

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Ecole Nationale Polytechnique
Département de Génie Mécanique



Mémoire de Magister

Option : Energétique

Présenté par :

BELHOUT Youcef

Intitulé

Problème de conduction thermique axisymétrique et doublement mixte dans une plaque circulaire

Soutenu publiquement le 09/12/2013 devant le jury composé de:

Président :	Saïd Rechak,	Prof.	ENP
Rapporteur :	Belkacem KEBLI,	Prof.	ENP
Examineur :	Arezki SMAILI,	Prof.	ENP
Examineur :	Adel GHENAIET,	Prof.	USTHB

ENP 2013

Sommaire

Remerciement

Résumé

Nomenclature

Liste de figures § Liste des tableaux

Introduction générale	01
• <i>Synthèse bibliographique</i>	02
• <i>Description de problème</i>	05
• <i>Organisation du mémoire</i>	05

Chapitre 1 : Rappels mathématiques

1. I. Fonction de Bessel	07
Introduction.....	07
1. I.1. L'équation différentielle de Bessel	08
1. I.1.1.1. Cas1: n non entier	08
1. I.1.1.2. Cas2: n entier ou nul	09
1. I.2. Formule de récurrence pour les fonctions de Bessel de première espèce	13
1. I.3. Les fonctions de Bessel dont l'indice diffère d'un entier de $\pm \frac{1}{2}$	13
1. I.4. Développements asymptotiques des fonctions de Bessel	14
1. II. Transformation de Hankel	16
1. II.1. Généralité	16
1. II.2. Définition	17
1. II.3. Transformées de Hankel d'ordre n	17
Conclusion	19

Chapitre 2 : Généralités sur les transferts de chaleur

Introduction.....	20
2.1. Définitions	20
2.1.1. Champ de température	20
2.1.2. Gradient de température	20
2.1.3. Flux de chaleur	21
2.2. Formulation d'un problème de transfert de chaleur	21
2.2.1. Bilan d'énergie	21
2.2.2. Expression des flux d'énergie	21
2.2.2.1. Conduction	22
2.2.2.2. Convection	23
2.2.2.3. Rayonnement	23

2.2.2.4. Stockage d'énergie.....	24
2.2.2.5. Génération d'énergie.....	24
2.3. Transfert de chaleur par conduction.....	25
2.3.1. L'équation de la chaleur.....	25
2.3.2. Conduction unidirectionnel en régime permanent.....	27
2.3.2.1. Mur simple.....	27
2.3.2.2. Mur multicouche.....	28
2.3.2.3. Mur composite.....	29
2.3.2.4. Cylindre creux long (tube).....	30
2.3.2.5. Cylindre creux multicouche.....	32
2.4. Conduction unidirectionnelle en régime variable.....	33
2.4.1. Plaque infinie.....	33
2.4.2. Cylindre infini.....	36
2.4.3. Sphère.....	37
2.5. Problème de conduction thermique.....	39
2.5.1. Formulation mathématique du problème.....	40
2.5.2. Solution du problème.....	40
Conclusion.....	42

Chapitre 3 : formulation et résolution des équations de la conduction thermique

3.1. Formulation et résolution des équations de la conduction thermique	43
3.1.1. Description du problème.....	43
3.1.2. Formulation mathématique	44
3.1.3. Equation de la température	51
3.1.4. Equation du flux	51
3.2. Les expressions analytiques de la température et du flux dans les extrémités.....	52
3.2.1. Cas1: dans le plan $\zeta = 0$	52
3.2.2. Cas2: dans le plan $\zeta = H$	53
3.3. Résultats numériques et discussion.....	55
3.4. Distribution des températures et de flow de la chaleur.....	58
Conclusion.....	61
Conclusion générale et perspective.....	62
Références bibliographiques.....	65
Annexes.....	67

Remerciement

Premièrement je remercie DIEU, pour m'avoir aidé à réussir dans mes études, particulièrement à la réalisation de ce mémoire de magister.

Je tien à exprime toute ma gratitude à Monsieur Zebli Belkacem, professeur à L'école Nationale Polytechnique de m'avoir guidé tout le long de cette recherche, et n'avoir jamais cessé de me prodiguer ses conseils et suggestion.

J'adresse mes remerciements au président et membres du Jury qui ont bien voulu accepter d'examiner ce mémoire en lui accordant de l'intérêt.

Je veux aussi exprimer ma vive reconnaissance envers tous les enseignants de l'E.N.P, particulièrement ceux du département de Génie Mécanique, Spécialement Dr. Rachek.

Mes plus profonds remerciements vont à mes parents et mon frère Amer. Tout au long de mon cursus, ils m'ont toujours soutenu, encouragé et aidé. Ils ont su me donner toutes les chances pour réussi.

Aussi je remercie vivement mon amie oussama pour ses conseils précieux et son aide.

Mes sincères remerciements à toute personne m'ayant aidé de près ou de loin à l'achèvement de ce travail.

Belhout Foucef

ملخص

من خلال هذه المذكرة قمنا توصيل الحرارة على لوحة سميكة في حالة من شروط الحدود المختلطة على . نفرض الشروط الغير المتجانسة للحرارة و التدفق على المناطق الدائرية المحورية، و هذا من خلال طريقة تحويل تكاملي لهانكيل و خلافا للنهج المتبع نحصل مباشرة على نظامين غير منتهيين من المعادلات الجبرية باستخدام صيغ جيجوبوار و بعض العلاقات التكاملية لدوال بيسال ذات الدرجة صفر. و نتيجة لذلك يتم التعبير عن الدوال المجهولة باستخدام النشر لسلاسل بيسال. و بالنظر الى القيم العددية للحرارة و التدفق نقوم بعرض النتائج التحليلية و العددية بيانيا

تحويل تكاملي لهانكيل

الكلمات المفتاحية: توصيل الحرارة

غير منتهي.

التكاملية المزدوجة، صيغ جيجوبوار

Résumé

Nous avons étudié la conduction de chaleur dans une plaque épaisse dans le cas de conditions limites doublement mixte. Les conditions non homogènes de la température et du flux sont imposées sur des parties opposées circulaires et coaxiales. Moyennant la méthode de la transformation intégrale de Hankel le problème axisymétrique a été réduit à un système d'équations intégrales duales. Contrairement à l'approche traditionnelle nous avons directement obtenu deux systèmes algébriques infinis en utilisant la formule de Gegenbauer et quelques relations intégrales de la fonction de Bessel d'ordre zéro. Par la suite, les fonctions inconnues sont exprimées à l'aide d'un développement en série de fonctions de Bessel. Les valeurs numériques de la température et du flux sont aussi données analytiquement et illustrées graphiquement.

Mots clés: Conduction de chaleur, problème aux conditions mixtes, transformation intégrale de Hankel, équations intégrales duales, formule de Gegenbauer, système algébrique infini.

Abstract

We consider the heat conduction in a layer with doubly mixed boundary conditions. The non homogenous temperature and flux conditions are prescribed over coaxial opposite circular regions. Using the Hankel integral transforms method the axisymmetric problem is reduced to a system of dual integral equations. Instead of the traditional approach we directly get two systems of infinite algebraic equations with the help of the Gegenbauer formula and some integrals relations of the Bessel function of zero order. Then the unknown functions are expressed in terms of Bessel series development. The numerical values of the temperature and the flux are also given analytically and are illustrated graphically.

Key Words: Heat conduction, mixed boundary value problem, Hankel integral transforms, dual integral equations, Gegenbauer formula, infinite algebraic system.

Nomenclature

<i>Notation</i>	<i>Signification</i>	<i>1^{ère} formule</i>
n, p, k, m	constantes réelles	(1.I.1, 1.I.4, 1.I.10)
$J_n(x)$	fonction de Bessel de première espèce	(1.I.17)
$Y_n(x)$	fonction de Bessel de seconde espèce	(1.I.39)
$H_n(x)$	transformation intégrale de Hankel d'ordre n	(1.II.1)
T	température [$^{\circ}\text{C}$]	(2.01)
Φ	densité de flux de chaleur	(2.02)
φ	flux de chaleur [W]	(2.03)
φ_{st}	flux de chaleur stocké dans le système (S)	(2.04)
φ_{g}	flux de chaleur généré dans le système (S)	(2.04)
φ_{e}	flux de chaleur entrant dans le système (S)	(2.04)
φ_{s}	flux de chaleur sortant dans le système (S)	(2.04)
λ	conductivité thermique du milieu [$\text{W m}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$]	(2.05)
T_{∞}	température du fluide loin de la surface du solide [$^{\circ}\text{C}$]	(2.07)
σ	constante de Stephan [$\text{W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$]	(2.08)
ε_{p}	facteur d'émission de la surface	(2.08)
ρ	masse volumique [kg/m^3]	(2.09)
x, y, z	coordonnées cartésiennes [m]	(2.14)
(r, θ, z)	coordonnées cylindriques [$\text{m}, \text{rad}, \text{m}$]	(2.18)
Δu	opérateur de Laplace	(2.49)
h	épaisseur de la plaque [m]	(3.02)
$A(\lambda), B(\lambda)$	constants dépend de λ	(3.05)
T_n, U_n	polynômes de Tchebychev	(3.10)
α_n, β_n	coefficients	(3.14)
δ_{nm}	symbole de Kronecker	(3.22)
ci	fonction cosinus intégrale	(3.43)
si	fonction sinus intégrale	(3.44)
ρ, ζ, H	paramétré sans dimension	(3.53)

Listes des figures

Figure.I.1	les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce	5
Figure1.I.2	Graphe de $J_0(x)$ et $y_0(x)$	6
Figure.2.1	Problème de conduction thermique	39
Figure.3.1	Géométrie du problème	43
Figure.3.2	Distribution de la température ($b/a=1, H=1$)	58
Figure.3.3	Distribution du flux ($b/a=1, H=1$)	58
Figure.3.4	Distribution de la température ($b/a=1.5, H=1$).....	59
Figure.3.5	Distribution du flux ($b/a=1.5, H=1$)	59
Figure.3.6	Distribution de la température ($b/a=2, H=2$).....	60
Figure.3.7	Distribution du flux ($b/a=2, H=2$)	60

Liste des tableaux

Tableau.2.1	Valeurs de la conduction thermique λ	22
Tableau.3.1	Valeur de coefficients α_n et β_n pour $b/a=1, H=1$	55
Tableau.3.2	Valeur de coefficients α_n et β_n pour $b/a=1.5, H=1$	56
Tableau.3.3	Valeur de coefficients α_n et β_n pour $b/a=1.5, H=2$	56
Tableau.3.4	Valeur de coefficients α_n et β_n pour $b/a=2, H=2$	57
Tableau.3.5	Valeur de coefficients α_n et β_n pour $b/a=0.5, H=2$	57

Le phénomène de conduction thermique présente un intérêt capital dans divers domaines pratiques, tels la construction mécanique, la réaction nucléaire et la déformation thermoélastique. Grâce à son implication dans de nombreux phénomènes naturels et processus industriels, beaucoup d'auteurs se sont intéressés durant ces dernières décennies à ces problèmes de transfert de chaleur. De nombreux travaux de recherche ont y'été aussi consacrés à leur compréhension. Ce domaine fut également l'objet d'un grand nombre de publications.

Bien que les modèles analytiques soient largement employés dans la modélisation des problèmes étudiés [1, 24], le recours à d'autres méthodes de résolution reste indispensable en raison de la complexité des applications industrielles se présentant dans la pratique. Par suite, les chercheurs s'intéressent de plus en plus à d'autres approches plus performantes de résolution analytique et numérique des problèmes proposés.

L'objectif de ce mémoire de recherche est de présenter une solution alternative d'un problème doublement mixte de conduction thermique dans une plaque métallique épaisse donné par Dhaliwal. Il a étudié ce problème moyennant la méthode classique de réduction du système des équations intégrales duales à des équations intégrales de Fredholm. Dans notre cas, en s'inspirant des récents travaux de Sakamoto, nous avons directement transformés le système des équations duales correspondant en tenant compte de la formule d'addition de Gegenbauer à des systèmes algébriques infinis.

➤ Le tout premier travail consacré à l'étude analytique du problème axisymétrique et simplement mixte de conduction thermique dans une plaque est publié par *Dhaliwal* [2]. La base du domaine est maintenue à une température nulle ainsi que la partie opposée de rayon unité alors que le reste de la frontière supérieure est supposée thermiquement isolée. Ce problème a été réduit par la méthode de la transformation intégrale de Hankel à un système de deux équations intégrales duales. La fonction inconnue vérifie donc l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce et elle est donnée sous forme d'une série entière en fonction de l'épaisseur en supposant que h est suffisamment petit.

➤ *Dhaliwal* [1] s'est intéressé à la résolution du problème de conduction thermique dans le cas doublement mixte telles les parties opposées soient de types différents. Les portions circulaires inférieure et supérieure de rayons r_0 et r_1 sont soumises à une température uniforme u_0 et un flux thermique d'intensité u_1 , respectivement. Un système de quatre équations intégrales duales en J_0 a été obtenu à l'aide de la méthode de la transformation intégrale. En introduisant des fonctions auxiliaires et en utilisant les équations intégrales d'Abel ces dernières vérifient le système de deux équations intégrales de Fredholm de seconde espèce dont la solution a été donnée approximativement par la méthode de développement en séries entière suivant la hauteur h . Les résultats des calculs ont été représentés graphiquement pour montrer l'influence de l'épaisseur de la plaque sur la propagation de la température.

➤ L'analyse thermique de quatre problèmes aux conditions limites mixtes de l'équation de Laplace dans un demi-espace homogène a fait l'objet du travail de *Lemczyk et Yovanovich* [3]. Le système des équations intégrales du problème a été transformé à un système d'équations algébriques en utilisant le développement en série de Fourier la fonction auxiliaire et les propriétés des polynômes orthogonaux de Legendre. Le cas d'un milieu bicouche en contact idéal composé d'une plaque épaisse et d'un demi-espace ayant des coefficients différents de conductivité thermique a été aussi considéré par les mêmes auteurs *Lemczyk et Yovanovich* [4]. Les températures ainsi que les flux sont supposés être continus le long de l'interface du domaine étudié.

➤ L'étude menée par *Mehta et Bose* [5] est consacré au problème de conduction de chaleur dans le cas axisymétrique d'une plaque circulaire épaisse. La base du milieu est maintenue à une température nulle alors que la face opposée subit un flux le long d'une portion circulaire. La solution a été donnée sous forme explicite à l'aide des fonctions hypergéométriques et des intégrales elliptiques de première et seconde espèce. La convergence de la solution exacte sous forme de série a été aussi discutée.

➤ Le travail de *Dhaliwal* [11] propose la détermination de l'état d'équilibre des contraintes thermiques dans une couche élastique. La surface supérieure non chargée de la couche est soumise à un flux thermique le long d'une zone circulaire de rayon R sans charge alors que le reste est supposée être encastrée lisse. La distribution de la température dans la couche est réduite à la résolution d'un système des **équations intégrales duales** transformé à une seule équation d'intégrale de Fredholm. Les résultats numériques de distribution de la température dans la couche ont été obtenus à l'aide d'une intégration numérique en fonction de la variable radiale r dans l'intervalle $[0, 1,4]$ en z dans le cas $h=2,5$.

La distribution de la température a été calculée dans la couche ainsi que les surfaces isochromatiques ont été construites pour des différentes épaisseurs.

➤ *Lebedev et Ufliand* [10] ont étudié le problème de déformation axisymétrique d'une couche élastique ayant une fissure circulaire dans le cas d'un encastrement lisse des frontières. Les contraintes et les déplacements sont exprimés à l'aide des fonctions harmoniques de Neuber-Papkovich. Le problème est alors ramené à la résolution d'une équation intégrale de Fredholm ayant un noyau continu et symétrique.

➤ Le travail examiné par *Makoto Sakamoto* [6] traite le problème axisymétrique d'une couche isotrope et élastique, contenant une fissure circulaire de rayon $2a$ et subissant une pression interne et uniforme. Son étude considère le cas de surfaces libres de charges et le cas où les frontières du milieu élastique sont délimitées par deux plaques rigides et lisses. Ces problèmes aux conditions mixtes sont ramenés à un système des équations intégrales duales. Contrairement à la méthode classique, ces dernières équations intégrales sont réduites à un système d'équations algébriques infini. Ce qui a permis d'obtenir des expressions analytiques pour les déplacements et les contraintes en fonction des coefficients du système algébrique.

Les équations sont données sous forme d'intégrales. Ces dernières sont décomposées et calculées comme suit: la première partie est évaluée numériquement par la règle de Simpson avec $n_0 = 1500$ alors que dans la seconde intégrale on remplace la fonction par son expression asymptotique en tenant compte de l'équivalent à l'infini de fonction de Bessel.

Les effets de l'épaisseur de la couche élastique et des conditions aux limites sur le déplacement, la contrainte normale ainsi que sur le facteur d'intensité de contrainte ont été examinés.

Les calculs numériques ont été effectués dans les trois cas : $h/a=0.7$, $h/a=1$, $h/a=1.5$ et $a=1$. Les résultats obtenus se résument comme suit :

- Pour avoir la convergence du système, il suffit de considérer les dix termes de la série ;
- Pour le premier cas I, le déplacement normal normalisé de la fissure augmente avec la diminution de l'épaisseur de la couche toutefois pour le second cas, le déplacement augmente avec l'épaisseur de la couche ;
- Dans le voisinage du bord de la fissure, la contrainte normale normalisée pour le premier cas augmente avec l'épaisseur de la couche ;
- Quand l'épaisseur de la couche devient grande, le facteur d'intensité de contrainte pour le cas I augmente mais diminue pour le cas II.

➤ L'étude de *Sakamoto et Koboyashi* [7] est consacrée à la résolution du problème de l'action d'un poinçon rigide infini sur une couche élastique reposant sur une base rigide ayant un orifice circulaire. Le problème a été résolu par le même principe que leurs deux travaux antérieurs.

Les résultats numériques sont consacrés à l'effet de l'épaisseur de la couche et du rayon du trou circulaire sur les champs de contrainte. Les résultats des calculs sont donnés comme suit :

- La distribution du déplacement de la fissure et de la contrainte en fonction des variations de h/a ($h/a=0.7$, $h/a=1$, $h/a=1.5$, $h/a=2$ et $h/a=3$). Le déplacement de la fissure augmente en fonction de h/a .
- la contrainte de contact normalisé a une singularité polaire au bord de l'orifice; Il a été constaté que la contrainte dans la zone de contact correspond à une compression. Celle-ci est proportionnelle au rapport h/a .

▪ *Description du problème*

Dans cette étude, nous proposons une solution analytique pour un problème de conduction thermique axisymétrique d'une plaque métallique d'épaisseur h , circulaire et conductrice occupant le domaine donné en coordonnées cylindriques. On suppose que la face supérieure $z=h$ subit un flux thermique d'intensité u_1 le long d'une portion circulaire de rayon b . La face inférieure opposée de rayon a est soumise à une température uniforme u_0 . Le reste des surfaces est maintenu à une température nulle $z=h$, alors que la partie correspondante à $z=0$ est thermiquement isolée. Ce problème aux limites doublement mixte est transformé en un système d'équations intégrales duales par la méthode de la transformation intégrale de Hankel.

À l'aide de la formule de Gegenbauer et grâce à certaines formules intégrales, ce dernier système est réduit à un système infini d'équations. Les distributions de la température ont été exprimées par des séries appropriées et les courbes sont calculées numériquement.

▪ *Organisation du mémoire*

Ce mémoire est structuré en une *introduction générale* contenant un état de l'art sur les travaux relatifs concernant les problèmes de conduction thermique ainsi que trois chapitres et des références bibliographiques.

Un rappel mathématique sur les *fonctions de Bessel* est décrit dans la première partie du *premier chapitre*. Les principes de *transformation de Hankel* sont présentés dans la seconde partie de ce chapitre.

Le second chapitre comprend deux parties. Dans la première partie, on donne quelques rappels sur les transferts de chaleur. alors qu'un aperçu sur les transferts de chaleur par conduction a été présenté dans la seconde partie.

Introduction et Synthèse bibliographique

Dans *le troisième chapitre*, représentant le noyau du mémoire, on résout le problème de conduction thermique axisymétrique et doublement mixte par la *méthode de la transformation de Hankel*.

Finalement, ce mémoire s'achève par une *conclusion générale* qui illustre les principaux résultats obtenus à travers cette étude et une *perspective* sur les méthodes de résolution développées dans le sujet proposé.

Une *annexe* est jointe à ce mémoire pour décrire les calculs analytiques et les différents programmes numériques qu'on a appliqué pendant l'étude de ce problème.

Chapitre 1

Rappels mathématiques

CHAPITRE 1

Rappels mathématiques

Ce chapitre constitue des outils et des notions nécessaires qui seront présentés tout au long de cette thèse. Dans un premier temps, un aperçu et un rappel sur les fonctions de Bessel et leurs propriétés. Ensuite, nous allons présenter une brève méthode d'une transformation intégrale de Hankel. Enfin, il est utile de donner des notions et certaines méthodes concernant les équations intégrales. Notre travail se base sur la transformation des équations intégrales.

• *1.1. Fonction de Bessel*

En analyse mathématiques, les fonctions de Bessel découvertes par le mathématicien suisse Daniel Bernoulli, et portent le nom du mathématicien allemand Friedrich Bessel.

Bessel développa l'analyse de ces fonctions en 1817 dans le cadre de ses études du mouvement des planètes induites par l'interaction gravitationnelle, généralisant les découvertes antérieures de Bernoulli. Les fonctions de Bessel jouent un rôle important en physique mathématique. Elles possèdent certaines analogies avec les fonctions trigonométriques; comme leur caractère oscillant.

Les fonctions de Bessel sont aussi connues sous le nom de fonctions cylindriques ou d'harmoniques cylindriques, parce qu'elles font partie des solutions de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques (intervenant par exemple, dans la propagation de la chaleur dans un cylindre). Ces fonctions sont présentées dans toutes les bibliothèques mathématiques de programmation, dans les logiciels de calcul symbolique comme Maple dans un logiciel graphique.

• *Introduction*

Le laplacien de u noté par Δu apparaît souvent dans de nombreuses équations aux dérivées partielles dans les domaines de la physique et de la technique. Le choix d'un système de coordonnées qui dépend de la nature du problème envisagé peut être important dans la recherche de la solution. Les problèmes des valeurs aux limites s'écrivent en termes

d'équations aux dérivées partielles peuvent être résolus par de nombreuses méthodes. Parmi ces méthodes, on utilise les conditions aux limites la méthode de la *fonction de Bessel* [15].

❖ **1. I.1. L'équation différentielle de Bessel**

Les fonctions de Bessel s'introduisent comme solutions de l'équation différentielle s'écrit [16] :

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - n^2)y = 0, \quad n \text{ est une constante réelle} \quad (2.I.1)$$

qui est appelée équation différentielle de Bessel.

En cherchant une solution de la forme :

$$y(z) = z^r + c_1 z^{r+1} + \dots + c_p z^{r+p} + \dots \quad (1.I.2)$$

il apparaît que l'équation déterminante s'écrit :

$$F(r) = r(r-1) + r - n^2 = r^2 - n^2 = 0 \quad (1.I.3)$$

elle admet les racines : $r_1 = +n, \quad r_2 = -n$

Divers cas peuvent se présenter :

❖ **1. I.1.1.1. Cas 1: n non entier**

Il existe manifestement deux solutions de la forme :

$$y_{\pm}(z) = z^{\pm n} + c_1 z^{\pm n+1} + \dots + c_p z^{\pm n+p} + \dots \quad (1.I.4)$$

En portant (2.I.4) dans (2.I.1), on obtient :

$$\begin{aligned} z^2 \left[\pm n(\pm n - 1) z^{\pm n-2} + c_1(\pm n + 1)(\pm n) z^{\pm n+p} + c_p(\pm n + p - 1) z^{\pm n+p-2} + \dots \right] \\ + z \left[\pm n z^{\pm n-1} + c_1(\pm n + 1) z^{\pm n} + \dots + c_p(\pm n + p) z^{\pm n+p} + \dots \right] \\ + (z^2 - n^2) \left[z^{\pm n} + c_2 z^{\pm n+1} + \dots + c_p z^{\pm n+1} + \dots \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.I.5)$$

il en résulte :

$$c_1(1 \pm 2n) = 0 \quad (1.I.6)$$

et la relation entre coefficients,

$$c_p \left[(\pm n + p)^2 - n^2 \right] = p(p \pm 2n)c_p = -c_{p-2} \quad (1.I.7)$$

deux situations peuvent se présenter.

• **a. $2n$ est non entier**

L'équation (2.I.1) admet les deux solutions :

$$y_{+n}(z) = z^n \left[1 - \frac{z^2}{2^2 1!(n+1)} + \frac{z^4}{2^4 2!(n+1)(n+2)} + \dots + (-1)^p \frac{z^{2p}}{2^{2p} p!(n+1)(n+2)\dots(n+p)} + \dots \right] \quad (1.I.8)$$

$$y_{-n}(z) = z^{-n} \left[1 + \frac{z^2}{2^2 1!(n-1)} + \frac{z^4}{2^4 2!(n-1)(n-2)} + \dots + \frac{z^{2p}}{2^{2p} p!(n-1)(n-2)\dots(n-p)} + \dots \right] \quad (1.I.9)$$

• **b. $2n$ est un entier**

L'équation (2.I.1) admet les deux solutions :

$$y_{+n}(z) = y_{\frac{2k+1}{2}}(z) = z^n \left[1 - \frac{z^2}{(n+1)(n+2)} + \dots + (-1)^p \frac{z^{2p}}{2^{2p} p!(n+1)(n+2)\dots(n+p)} + \dots \right] \quad (1.I.10)$$

$$y_{+n}(z) = z^{\frac{2k+1}{2}} \left[1 - \frac{z^2}{2^2 1! \left(\frac{2k+1}{2} + 1 \right)} + \dots + (-1)^p \frac{z^{2p}}{2^{2p} p! \left(\frac{2k+1}{2} + 1 \right) \dots \left(\frac{2k+1}{2} + p \right)} + \dots \right] \quad (1.I.11)$$

• **1. I.1.1.2. Cas 2: n entier ou nul**

Si n est un entier positif ou nul, il existe manifestement une solution de la forme :

$$y_n(z) = z^n + C_1 z^{n+1} + C_2 z^{n+2} + \dots + C_p z^{n+p} + \dots \quad (1.I.12)$$

Correspondant à la plus grande des racines, $r_2 = +n$, de l'équation déterminante ; elle s'écrit :

$$y_n(z) = z^n \left[1 - \frac{z^2}{2^2 1! \Gamma(n+1)} + \dots + (-1)^p \frac{z^{2p}}{2^{2p} 1!(n+1)(n+2)\dots(n+p)} + \dots \right] \quad (1.I.13)$$

Il résulte de cette discussion que l'équation de Bessel admet les deux solutions particulières:

$$y_{+n}(z) = z^n \left[1 - \frac{z^2}{2^2 1!(n+1)} + (-1)^p \frac{z^{2p}}{2^{2p} p!(n+1)\dots(n+p)} + \dots \right] \quad (1.I.14)$$

$$y_{-n}(z) = z^{-n} \left[1 + \frac{z^2}{2^2 1!(n-1)} + \dots + \frac{z^{2p}}{2^{2p} p!(n-1)\dots(n-p)} + \dots \right] \quad (1.I.15)$$

où les développements convergent pour tout z , mais il est à noter que la seconde, $y_{-n}(z)$ ne convient pas pour n entier positif. Envisageons la solution (2.I.14), et multiplions la par le

coefficient $\frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$, $\Gamma(n)$ étant la fonction eulérienne de seconde espèce, nous obtenons la

fonction :

$$\frac{1}{2^n \Gamma(n+1)} y_{+n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \left[\frac{1}{\Gamma(n+1)} - \left(\frac{z}{2}\right)^2 \frac{1}{1! \Gamma(n+p+1)} + \dots \right] \quad (1.I.16)$$

dite fonction de Bessel de première espèce d'ordre n , que l'on représente par la notation $J_n(x)$; ainsi

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \frac{1}{p! \Gamma(n+p+1)} \quad (1.I.17)$$

or:

$$J_n(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2p}}{p! \Gamma(n+p+1)} \quad (1.I.18)$$

Si $n=0$, devient:

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 4^2} - \frac{z^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots \quad (1.I.19)$$

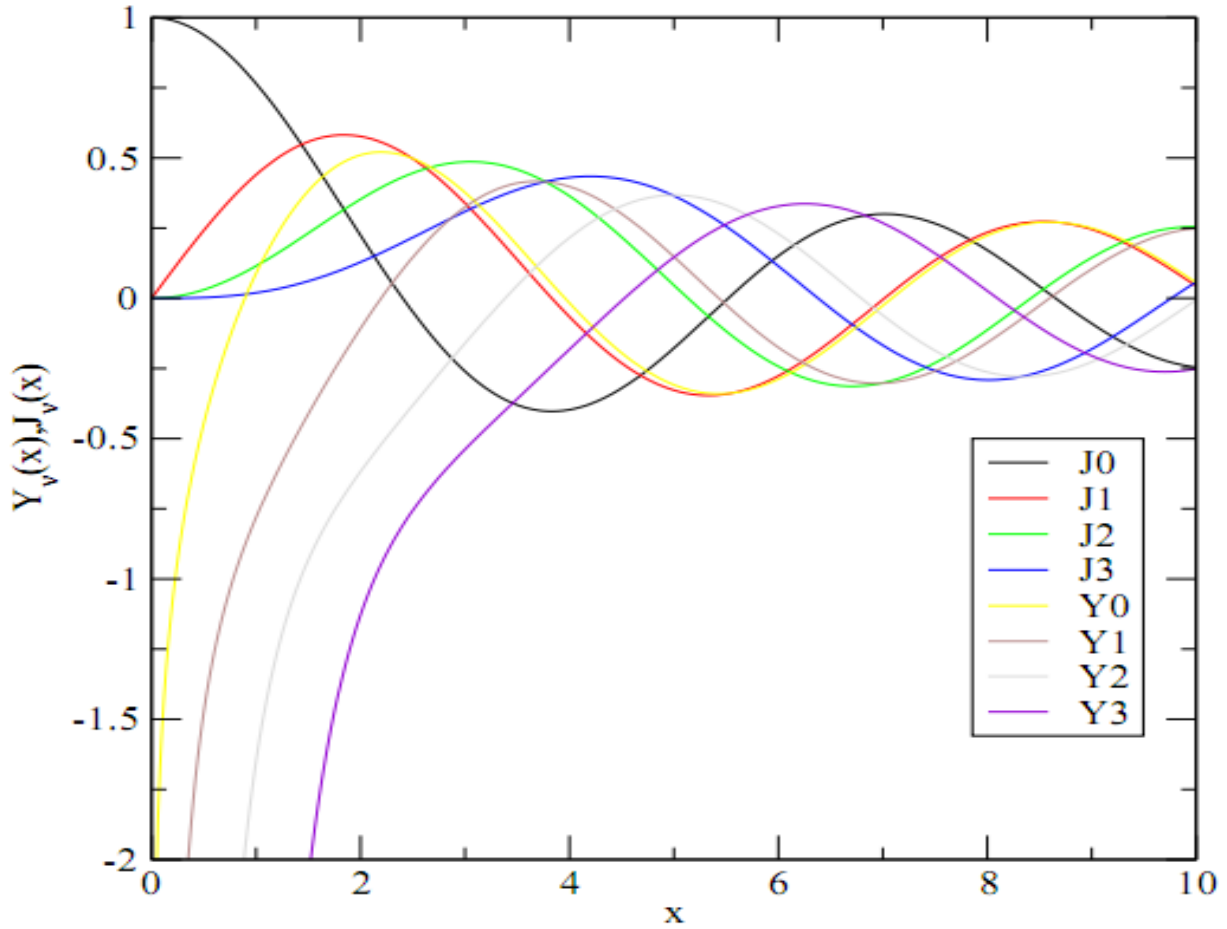


Figure 1.1.1. les quatre premières fonctions de Bessel entières de première espèce et de deuxième espèce.

Si n est un demi entier impair, $J_n(x)$ peut être exprimé sous la forme de termes en sinus et cosinus.

Soit maintenant la solution (2.I.15), en la multipliant par $\frac{2^n}{\Gamma(1-n)}$; on obtient :

$$\frac{2^n y_{-n}(z)}{\Gamma(1-n)} = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \left[\frac{1}{\Gamma(1-n)} - \left(\frac{z}{2}\right)^2 \frac{1}{1!\Gamma(2-n)} + \dots + (-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \frac{1}{p!\Gamma(p-n+1)} + \dots \right] \quad (1.I.20)$$

Cette fonction est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre $(-n)$:

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \frac{1}{p!\Gamma(p-n+1)} \quad (1.I.21)$$

Notons que cette solution se déduit (2.I.17) en remplaçant n en $(-n)$, mais que pour n entier positif, nous n'avons pu l'obtenir en tant que solution de l'équation de Bessel développée en série de puissances de z .

Ceci peut d'ailleurs se justifier en remarquant que pour n entier positif, les fonctions $J_n(z)$ et $J_{-n}(z)$ et ne sont pas indépendantes, d'une façon plus précise on a dans cette hypothèse,

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \tag{1.I.22}$$

ainsi que nous allons l'établir.

Soit :

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \frac{1}{p! \Gamma(p-n+1)} \tag{1.I.23}$$

avec n entier positif.

Nous avons pour $p < n-1$

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{p=n}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \frac{(-1)^p}{p! \Gamma(p-n+1)} \tag{1.I.24}$$

Posons $p-n = k$ entier positif, nous obtenons :

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+2k} \frac{(-1)^{n+k}}{k! \Gamma(n+k+1)} \tag{1.I.25}$$

$$= (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \tag{1.I.26}$$

$$= (-1)^n J_n(z)$$

La figure 2.I.2 représente le graphe de $J_0(x)$ et $y_0(x)$. Notons que ces fonctions comme toutes les fonctions $y_n(x)$ ou $n > 0$, ne sont pas bornées en $x=0$.

Si n est un demi entier impair, $y_n(x)$ peut être exprimé en termes de fonctions trigonométriques.

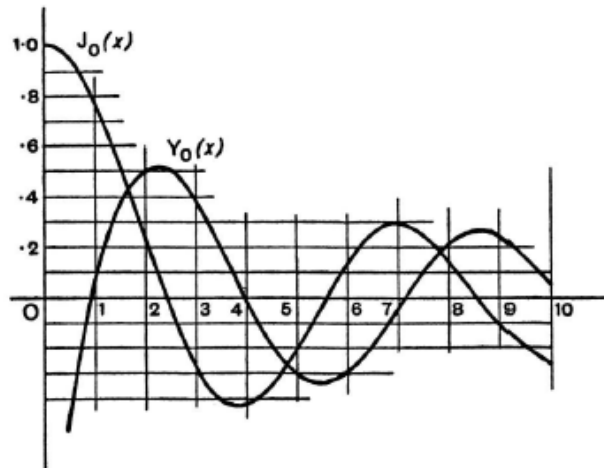


Figure 1.I.2. Graphe de $J_0(x)$ et $y_0(x)$.

• 1. I.2. Formule de récurrence pour les fonctions de Bessel de première espèce

Nous allons établir la relation :

$$\frac{d}{dz} [z^{n+1} J_{n+1}(z)] = z^{n+1} J_n(z) \tag{1.I.27}$$

De l'expression générale de $J_{n+1}(z)$, on tire :

$$z^{n+1} J_{n+1}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2n+2+2p}}{2^{n+1+2p} p!(n+p+2)} \tag{1.I.28}$$

et il en résulte :

$$\frac{d}{dz} [z^{n+1} J_{n+1}(z)] = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{2(n+p+1)z^{2n+1+2p}}{2^{n+1+2p} p!(n+p+2)} \tag{1.I.29}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2n+1+2p}}{2^{n+2p} p!(n+p+1)} \tag{1.I.30}$$

De la même manière, on établit la relation :

$$\frac{d}{dz} [z^{-n} J_n(z)] = -z^{-n} J_{n+1}(z) \tag{1.I.31}$$

• 1. I.3. Les fonctions de Bessel dont l'indice diffère d'un entier de $\pm \frac{1}{2}$

Posons $n = p \pm \frac{1}{2}$, où p est un entier, nous allons montrer que les fonctions de Bessel dont l'indice est de cette forme se relie aux fonctions trigonométriques.

Considérons la fonction :

$$J_{1/2}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{1/2} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{2z^{2p}}{(2p+1)!p!} \quad (1.I.32)$$

soit :

$$J_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z \quad (1.I.33)$$

Envisageons maintenant la fonction $J_{-1/2}(z)$:

$$z^{1/2} J_{-1/2}(z) = \frac{d}{dz} (z^{1/2} J_{1/2}(z)) \quad (1.I.34)$$

$$= \frac{d}{dz} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin z \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos z \quad (1.I.35)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos z \quad (2.I.36)$$

ainsi :

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z \quad (1.I.37)$$

❖ 1. I.4. Développements asymptotiques des fonctions de Bessel

Les développements en série qui ont été donnés pour représenter les fonctions de Bessel de première espèce $J_n(z)$, ne permettent pas de connaître facilement l'allure de ces fonctions pour les grandes valeurs de la variable et la même remarque vaut pour les fonctions de Bessel de seconde espèce $y_n(z)$.

Signalons que l'on a pu donner des expressions asymptotiques de ces fonctions pour les grandes valeurs de z ; on a :

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right) \quad (1.I.38)$$

$$y_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right) \quad (1.I.39)$$

Revenons à l'expression générale des fonctions de Bessel de première espèce :

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \frac{1}{p!(n+p+1)} \quad (1.I.40)$$

En utilisant des propriétés classiques de la fonction Γ nous allons montrer que l'on peut transformer la série représente $J_n(z)$ en une intégrale.

$$J_n(z) = \frac{2}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^p z^{2p}}{2^{2p} p \Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2n}(\theta) d\theta \right\} \quad (1.I.41)$$

Par applications répétées de la formule $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, en définitive :

$$J_n(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p z^{2p}}{(2p)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2n}(\theta) d\theta \quad (1.I.42)$$

Envisageons maintenant la fonction:

$$\cos(z \cos(\theta)) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(z \cos(\theta))^{2p}}{(2p)!} \quad (1.I.43)$$

où la série qui intervient est uniformément convergente par rapport à θ quelle que soit sa valeur. Nous pouvons poser:

$$\sin^{2n}(\theta) \cos(z \cos(\theta)) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p z^{2p} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2n}(\theta)}{(2p)!} \quad (1.I.44)$$

et la série qui figure au membre de droite est également uniformément convergente par rapport à θ . Dans ces conditions, il vient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(\theta) \cos(z \cos(\theta)) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^p z^{2p}}{(2p)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2n}(\theta) d\theta \right) \quad (1.I.45)$$

$$J_n(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \cos(\theta)) \sin^{2n}(\theta) d\theta \quad (1.I.46)$$

❖ 1. II. Transformation de Hankel

❖ 1. II.1. Généralité

Cette transformation s'obtient de la transformation de Fourier bidimensionnelle suivante [34] :

$$G(\sigma, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i(\sigma x + \tau y)} dx dy \quad (1.II.1)$$

dans l'inverse est :

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma, \tau) e^{i(\sigma x + \tau y)} d\sigma d\tau \quad (1.II.2)$$

Par passage aux coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -r \sin \varphi d\varphi \\ dy = r \cos \varphi d\varphi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma = \rho \cos \theta \\ \tau = \rho \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\sigma = -\rho \sin \theta d\theta \\ d\tau = \rho \cos \theta d\theta \end{cases}$$

Les expressions précédentes (2.II.1) et (2.II.2), s'écrivent sous cette forme :

$$G_*(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} g_*(r, \varphi) e^{-ir\rho \cos(\varphi - \theta)} d\varphi \quad (1.II.3)$$

alors que:

$$g_*(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} G_*(\rho, \theta) e^{ir\rho \cos(\varphi - \theta)} d\theta \quad (1.II.4)$$

A) Supposons maintenant que :

$$g_*(r, \varphi) = e^{-in\varphi} g(r) \quad (1.II.5)$$

Posons dans la relation (2.II.3), $\varphi - \theta = \frac{\pi}{2} + t$, en tenant compte en suite de la

représentation intégrale de :

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\rho(z \sin(\theta) - n\theta)} d\theta \quad (1.II.6)$$

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta \quad (1.II.7)$$

on trouve :

$$G_*(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r dr \int_{-\theta-\frac{\pi}{2}}^{2\pi-\theta-\frac{\pi}{2}} g(r) e^{-in\varphi} e^{ir\rho \sin t} dt \quad (1.II.8)$$

$$= e^{-in\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} \int_0^\infty r dr g(r) J_n(r\rho) dr \quad (1.II.9)$$

$$G_n(\rho) = \int_0^\infty r g(r) J_n(r\rho) dr \quad (1.II.10)$$

Si: $G_n(\rho) = G_*(\rho, \theta) e^{in\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$ (1.II.11)

B) la relation (2.II.3), s'écrit alors comme suit :

$$g(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty G_n(\rho) \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{i(n(\varphi-\theta-\frac{\pi}{2}))+r\rho \cos(\varphi-\theta)} d\theta \quad (1.II.12)$$

Effectuons ensuite le même changement de variable précédent, on aura :

$$g(r) = \int_0^\infty \rho G_n(\rho) J_n(r\rho) d\rho \quad (1.II.13)$$

❖ **1. II.2. Définition**

On appelle transformée de Hankel d'ordre n de la fonction g(r), la fonction $G_n(\rho)$ donnée par :

$$G_n(\rho) = \int_0^\infty r g(r) J_n(r\rho) dr \quad (1.II.14)$$

la fonction g(r) s'obtient de $G_n(\rho)$ à l'aide de la transformée inverse donnée par :

$$g(r) = \int_0^\infty \rho G_n(\rho) J_n(r\rho) d\rho \quad (1.II.15)$$

❖ **1. II.3. Les transformées de Hankel d'ordre n de;**

a) $g'(r)$

b) $g''(r) + \frac{g'(r)}{r} - \frac{n^2}{r^2} g(r)$

Rappelons tout d'abord quelques formules de la fonction J_n :

$$i. \quad \frac{\partial}{\partial r} J_n(r\rho) = \rho J_{n-1}(r\rho) - \frac{n}{r} J_n(r\rho) \quad (1.II.16)$$

$$ii. \quad J_n(r\rho) = \frac{r\rho}{2n} [J_{n-1}(r\rho) + J_{n+1}(r\rho)] \quad (1.II.17)$$

$$iii. \quad (n^2 - z^2) J_n(z) = z \frac{d}{dz} [z J'_n(z)] \quad (1.II.18)$$

Par suite on trouve :

a) transformée de $g'(r)$

Calculons par l'intégrale par partie l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\infty} r g(r) J_n(r\rho) \quad (1.II.19)$$

Soit :

$$U = r J_n(r\rho) \Rightarrow dU = -(n-1) J_n(r\rho) + r \rho J_{n-1}(r\rho)$$

$$dV = g'(r) \Rightarrow V = g(r)$$

$$I = (n-1) \int_0^{\infty} g(r) J_n(r\rho) dr - \rho \int_0^{\infty} r g(r) J_{n-1}(r\rho) dr \quad (1.II.20)$$

or,

$$\int_0^{\infty} g(r) J_n(r\rho) dr = \frac{\rho}{2n} \left[\int_0^{\infty} r g(r) J_{n-1}(r\rho) dr + \int_0^{\infty} r g(r) J_{n+1}(r\rho) dr \right] \quad (1.II.21)$$

Finalement la transformée d'ordre n de $g'(r)$ est :

$$g'(r) = \frac{\rho}{2n} [(n-1) G_{n+1}(\rho) - (n+1) G_{n-1}(\rho)] \quad (1.II.22)$$

b) Transformée de

$$g''(r) + \frac{g'(r)}{r} - \frac{n^2}{r^2} g(r)$$

Calculons par l'intégrale par partie l'intégrale suivante :

$$(II) = \int_0^{\infty} r g''(r) J_n(r\rho) dr \quad (1.II.23)$$

$$(II) = - \int_0^{\infty} g'(r) \frac{d}{dr} [r J_n(r\rho)] \quad (1.II.24)$$

$$rJ_n(r\rho) \rightarrow \frac{d}{dr} [rJ_n(r\rho)]$$

$$g''(r) \rightarrow g'(r)$$

Ce qui donne en suite :

$$\int_0^\infty r \left[g''(r) + \frac{1}{r} g'(r) \right] J_n(r\rho) dr = -\rho \int_0^\infty r g'(r) J_n'(r\rho) dr \quad (1.II.25)$$

A l'aide d'une l'intégrale par partie on trouve, la dernière expression s'écrit comme suit :

$$II = \rho \int_0^\infty g(r) \frac{d}{dr} [r\rho J_n'(r\rho)] dr \quad (1.II.26)$$

En utilisant la propriété (ii) on trouve:

$$II = \rho \int_0^\infty g(r) \frac{d}{\rho dr} [r\rho J_n'(r\rho)] dr \Rightarrow \int_0^\infty g(r) \frac{(n^2 - r^2\rho^2)}{r} J_n(r\rho) dr \quad (1.II.27)$$

Finalement la transformée de $g''(r) + \frac{g'(r)}{r} - \frac{n^2}{r^2} g(r)$ est :

$$\int_0^\infty r \left[g''(r) + \frac{g'(r)}{r} - \frac{n^2}{r^2} g(r) \right] J_n(r\rho) dr = -\rho^2 G_n(\rho) \quad (1.II.28)$$

Conclusion

Cette introduction aux fonctions spéciales est très loin d'être exhaustive, il existe de nombreuses autres fonctions dites spéciales : les fonctions elliptiques, les fonctions de Fresnel, les fonctions de Meier, ... Le développement de bibliothèques qui permettent de calculer les valeurs de ces fonctions est un secteur très actif et nous disposerons dans les années futures de bibliothèques encore plus performantes.

Dans le cas général on aura, grâce à des transformations mathématiques, à résoudre suffisamment de systèmes des équations différentielles.

Dans la présente d'étude, la méthode de **la transformation de Hankel** a été choisie pour la résolution des équations aux dérivées partielles du système d'équilibre.

Chapitre 2

Généralités sur les transferts de chaleur

CHAPITRE 2

Généralités sur les transferts de chaleur

Introduction

La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre.

La thermique (ou thermocinétique) se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final.

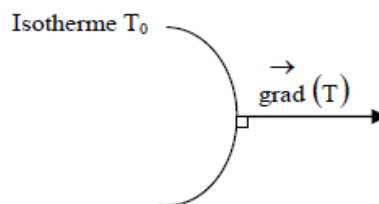
2.1- Définitions**2.1.1- Champ de température**

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température : $T = f(x, y, z, t)$. La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou instationnaire.

2.1.2- Gradient de température

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température :



$$\vec{\text{grad}}(T) = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.1)$$

avec \vec{n} : vecteur unitaire de la normale

$\frac{\partial T}{\partial n}$: dérivée de la température le long de la normale

2.1.3- Flux de chaleur

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température par conduction des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur :

$$\Phi = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} \quad (2.2)$$

Où S est l'aire de la surface

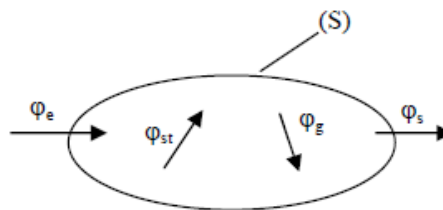
On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps :

$$\varphi = \frac{dQ}{dt} \quad (2.3)$$

2.2- Formulation d'un problème de transfert de chaleur

2.2.1- Bilan d'énergie

Il faut tout d'abord définir un système (S) par ses limites dans l'espace et il faut ensuite établir l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système et qui peuvent être :



φ_{st} : flux de chaleur stocké dans le système (S).

φ_g : flux de chaleur généré dans le système (S).

φ_e : flux de chaleur entrant dans le système (S).

φ_s : flux de chaleur sortant dans le système (S).

On applique alors le 1^{er} principe de la thermodynamique pour établir le bilan d'énergie du système (S) :

$$\varphi_e + \varphi_g = \varphi_s + \varphi_{st} \quad (2.4)$$

2.2.2- Expression des flux d'énergie

Il faut maintenant établir les expressions des différents flux d'énergie. En reportant ces expressions dans le bilan d'énergie, nous obtiendrons l'équation différentielle dont la résolution permettra de connaître l'évolution de la température en chaque point du système.

2.2.2.1- Conduction

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres.

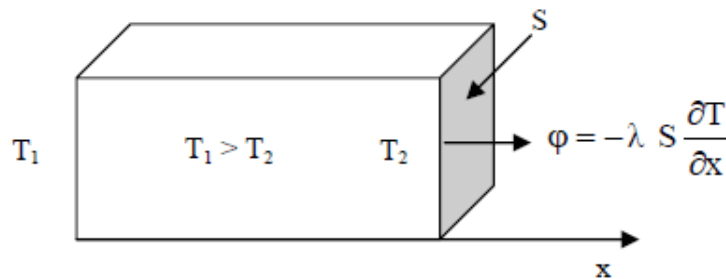
La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier le flux de chaleur est proportionnelle au gradient de température :

$$\vec{\varphi} = - \lambda S \text{grad}(T) \tag{2.5}$$

Ou sous forme algébrique

$$\varphi = - \lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \tag{2.6}$$

- avec : - φ : Flux de chaleur transmis par conduction (W)
- λ : Conductivité thermique du milieu ($\text{W m}^{-1} \text{°C}^{-1}$)
- x : Variable d'espace dans la direction du flux (m)
- S : Aire de la section de passage du flux de chaleur (m^2)



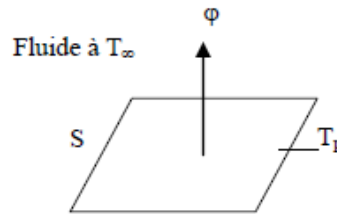
On trouvera dans le tableau ci-après les valeurs de la conductivité thermique λ de certains matériaux parmi les plus courants.

Matériau	λ ($\text{W m}^{-1} \text{°C}^{-1}$)
Argent	419
Cuivre	386
Aluminium	204
Acier doux	45
Acier inox	14,9
Béton	1,4
Bois	0,12-0,23
Verre	0,78
Air	0,026

Tableau 2.1. Valeurs de la conduction thermique λ

2.2.2.2- Convection

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide. Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de NEWTON :



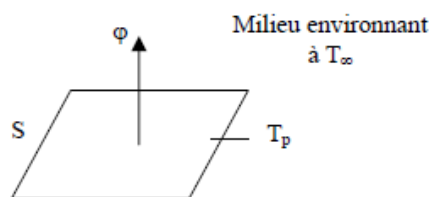
$$\varphi = h S (T_p - T_\infty) \quad (2.7)$$

- avec
- φ : Flux de chaleur transmis par convection (W)
 - h : Coefficient de transfert de chaleur par convection ($\text{W m}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$)
 - T_p : Température de surface du solide ($^\circ\text{C}$)
 - T_∞ : Température du fluide loin de la surface du solide ($^\circ\text{C}$)
 - S : Aire de la surface de contact solide/fluide (m^2)

Remarque : La valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection h est fonction de la nature du fluide, de sa température, de sa vitesse et des caractéristiques géométriques de la surface de contact solide/fluide.

2.2.2.3- Rayonnement

C'est un transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces (même dans le vide). Dans les problèmes de conduction, on prend en compte le rayonnement entre un solide et le milieu environnant et dans ce cas nous avons la relation :



$$\varphi = \sigma \varepsilon_p (T_p^4 - T_\infty^4) \quad (2.8)$$

- avec
- φ : Flux de chaleur transmis par rayonnement (W)
 - σ : Constante de Stephan ($5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$)
 - ε_p : Facteur d'émission de la surface
 - T_p : Température de la surface (K)
 - T_∞ : Température du milieu environnant la surface (K)
 - S : Aire de la surface (m^2)

2.2.2.4- Stockage d'énergie

Le stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps d'où (à pression constante) :

$$\varphi_{st} = \rho V c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.9)$$

avec - φ_{st} : Flux de chaleur stocké (W)

- ρ : Masse volumique (kg m^{-3})

- V : Volume (m^3)

- c : Chaleur massique ($\text{J kg}^{-1} \text{°C}^{-1}$)

- T : Température (°C)

- t : Temps (s)

- ρ , V et c sont supposés constants, le produit $\rho V c$ est appelé la capacité thermique du corps.

2.2.2.5- Génération d'énergie

Elle intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique. Nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$\varphi_g = \dot{q} V \quad (2.10)$$

avec - φ_g : Flux d'énergie thermique générée (W)

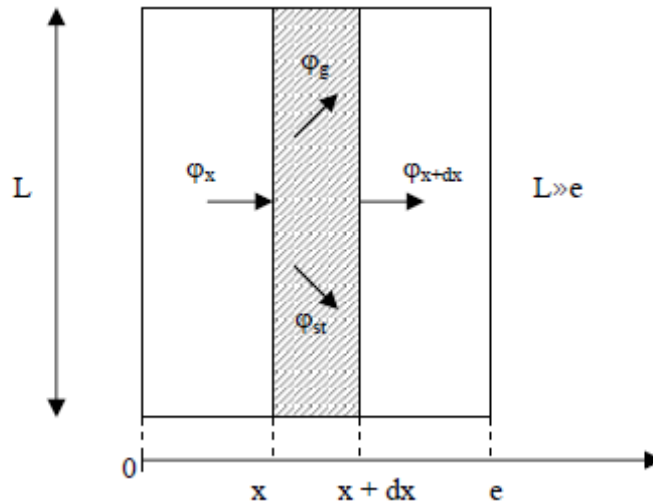
- \dot{q} : Densité volumique d'énergie générée (W m^{-3})

- V : Volume (m^3)

2.3. Transfert de chaleur par conduction

2.3.1. L'équation de la chaleur

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan :



Considérons un système d'épaisseur dx dans la direction x et de section d'aire S normalement à la direction Ox . Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\varphi_x + \varphi_g = \varphi_{x+dx} + \varphi_{st} \tag{2.11}$$

avec $\varphi_x = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x$

$$\varphi_g = \dot{q} S dx$$

$$\varphi_{x+dx} = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx}$$

$$\varphi_{st} = \rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x}{dx} + \dot{q} S = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.12}$$

Soit : $\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{q} S = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t}$ (2.13)

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par dx et dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.14)$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

- a) Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$
- b) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : $\dot{q} = 0$
- c) Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de T.

Les hypothèses a) + b) + c) permettent d'écrire :

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{d\lambda}{dT} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.15)$$

- d) Si de plus λ est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de Poisson :

$$a \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.16)$$

Le rapport $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ est appelé la diffusivité thermique.

- e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.17)$$

Par ailleurs, les hypothèses a), c) et d) permettent d'écrire :

* Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.18)$$

* Equation de la chaleur en coordonnées sphériques :

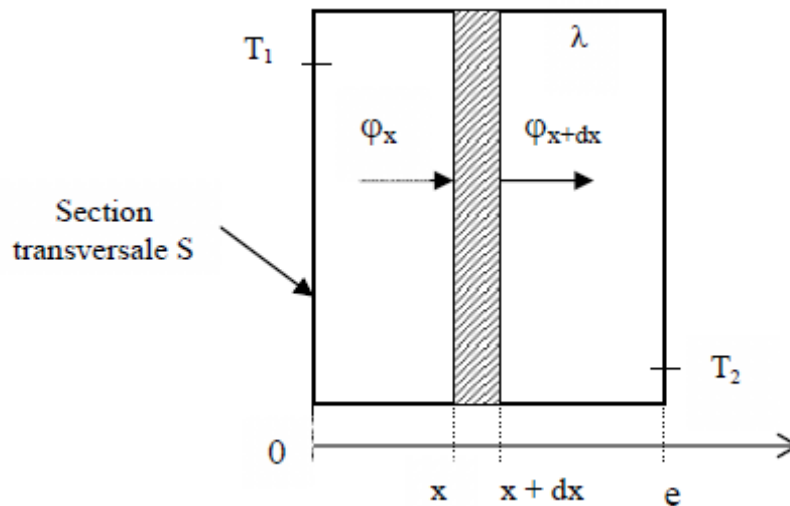
$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.19)$$

2.3.2- Conduction unidirectionnel en régime permanent

2.3.2.1- Mur simple

On se placera dans le cas où l'écoulement est unidirectionnel et qu'il n'y a pas de génération ni de stockage d'énergie.

On considère un mur d'épaisseur e , de conductivité thermique λ , et de grandes dimensions transversales dont les faces extrêmes sont à des températures T_1 et T_2 :



En effectuant un bilan thermique sur le système (S) constitué par la tranche de mur comprise entre les abscisses x et $x + dx$ il vient :

$$\phi_x = \phi_{x+dx} \Rightarrow -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x = -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx} \quad (2.20)$$

$$\text{d'où } \frac{dT}{dx} = A \text{ et } T = Ax + B \quad (2.21)$$

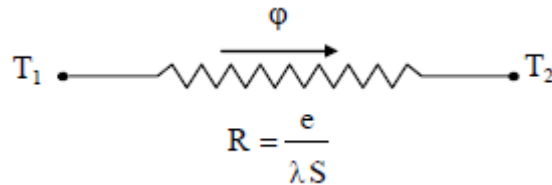
avec les conditions aux limites : $T(x = 0) = T_1$ et $T(x = e) = T_2$

$$\text{d'où } T = T_1 - \frac{x}{e} (T_1 - T_2) \quad (2.22)$$

Le profil de température est donc linéaire. Le flux de chaleur traversant le mur s'en déduit par la

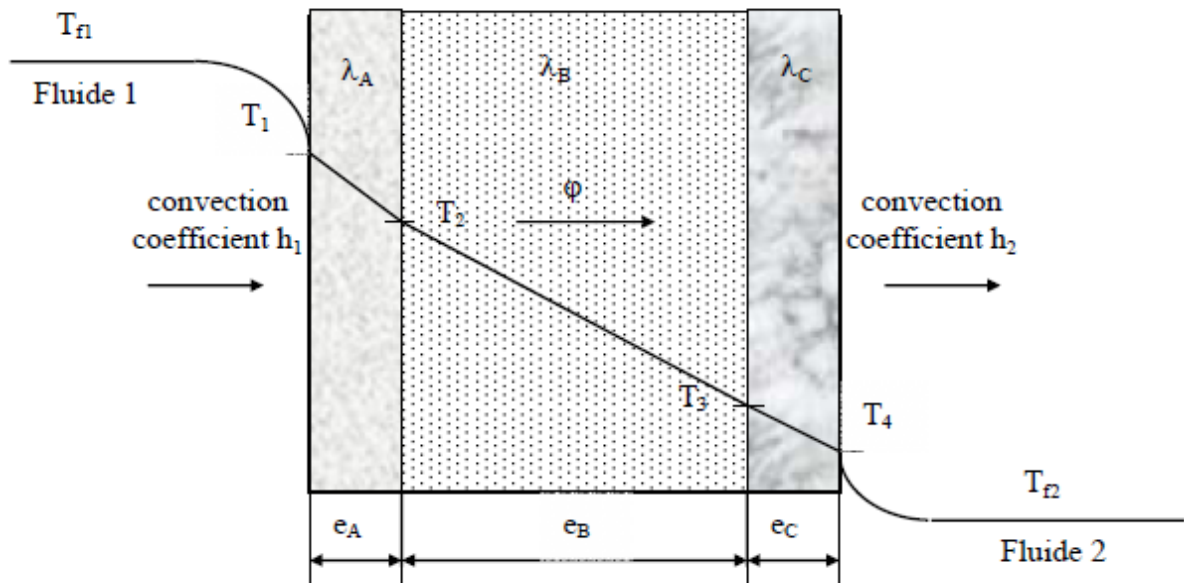
$$\text{relation : } \phi = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad \text{d'où : } \phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{\lambda S}} \quad (2.23)$$

Cette relation est analogue à la loi d'Ohm en électricité qui définit l'intensité du courant comme le rapport de la différence de potentiel électrique sur la résistance électrique. La température apparaît ainsi comme un potentiel thermique et le terme $e/\lambda S$ apparaît comme la résistance thermique d'un mur plan d'épaisseur e , de conductivité thermique λ et de surface latérale S , on a donc le schéma équivalent suivant :



2.3.2.2- Mur multicouches

C'est le cas des murs réels constitués de plusieurs couches de matériaux différents et où l'on ne connaît que les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les deux faces du mur de surface latérale S :



Le flux de chaleur est conservatif et s'écrit :

$$\varphi = \frac{(T_{f1} - T_1)}{\frac{1}{h_1 S}} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e_A}{\lambda_A S}} = \frac{(T_2 - T_3)}{\frac{e_B}{\lambda_B S}} = \frac{(T_3 - T_4)}{\frac{e_C}{\lambda_C S}} = \frac{(T_4 - T_{f2})}{\frac{1}{h_2 S}} \quad (2.24)$$

d'où

$$\varphi = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_A}{\lambda_A S} + \frac{e_B}{\lambda_B S} + \frac{e_c}{\lambda_c S} + \frac{1}{h_2 S}} \quad (2.25)$$

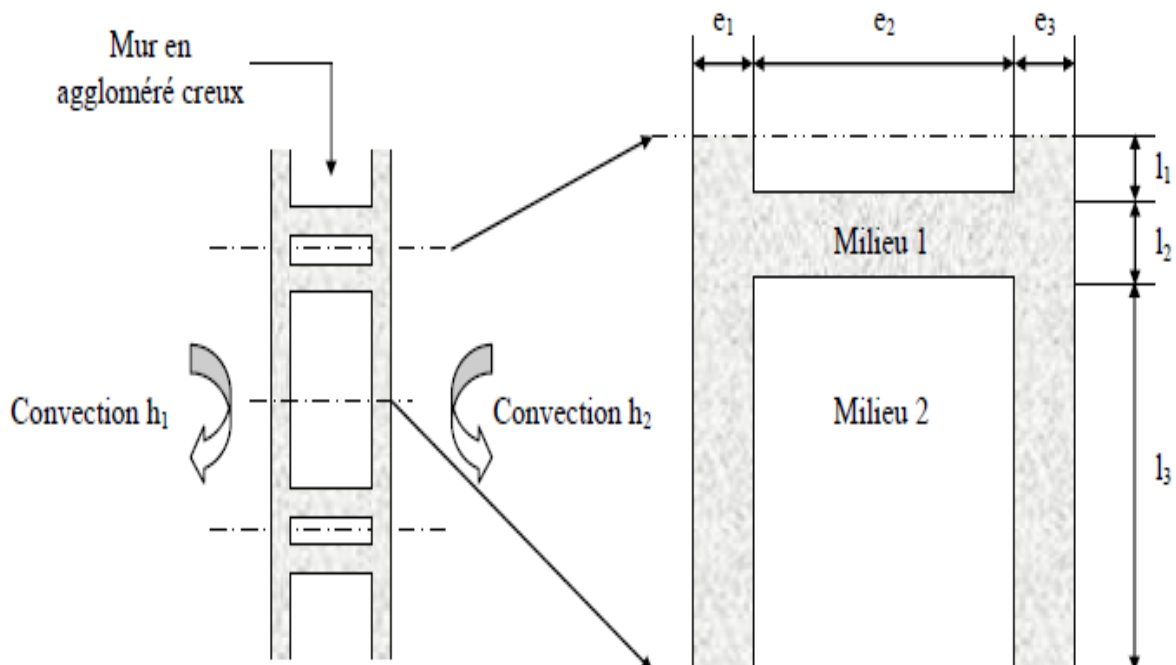
Nous avons considéré que les contacts entre les couches de différentes natures étaient parfaits et qu'il n'existait pas de discontinuité de température aux interfaces. En réalité, compte-tenu de la rugosité des surfaces, une micro-couche d'air existe entre les creux des surfaces en regard et crée une résistance thermique R (l'air est un isolant) appelée résistance thermique de contact.

La formule précédente s'écrit alors :

$$\varphi = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_A}{\lambda_A S} + R_{AB} + \frac{e_B}{\lambda_B S} + R_{Bc} + \frac{e_c}{\lambda_c S} + \frac{1}{h_2 S}} \quad (2.26)$$

2.3.2.3- Mur composite

C'est le cas le plus couramment rencontré dans la réalité où les parois ne sont pas isotropes et où le transfert n'est pas monodimensionnel. Considérons à titre d'exemple un mur de largeur L constitué d'agglomérés creux :



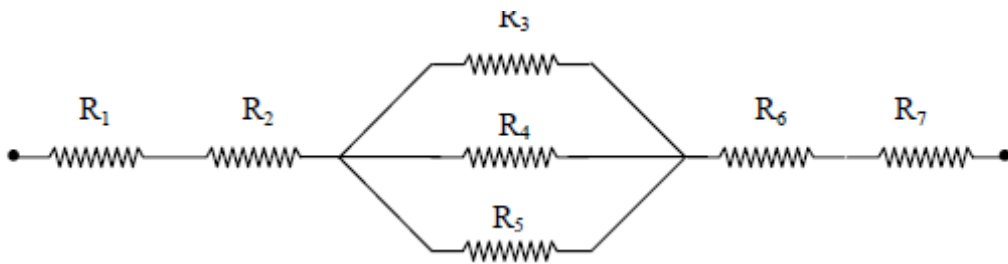
En tenant compte des axes de symétrie, on peut se ramener au calcul du flux à travers l'élément isolé sur la droite de la figure et calculer la résistance thermique R équivalente d'une portion de mur de largeur L et de hauteur $l = l_1 + l_2 + l_3$ en utilisant les lois d'association des résistances en série et en parallèle par la relation :

$$R = R_1 + R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} + R_6 + R_7 \quad (2.27)$$

avec

$$R_1 = \frac{1}{h_1 l L}; R_2 = \frac{e_1}{\lambda_1 l L}; R_3 = \frac{e_2}{\lambda_2 l_2 L}; R_4 = \frac{e_2}{\lambda_1 l_2 L}; R_5 = \frac{e_2}{\lambda_2 l_3 L}; R_6 = \frac{e_3}{\lambda_1 l L}; R_7 = \frac{1}{h_2 l L}$$

Selon le schéma électrique équivalent suivant :

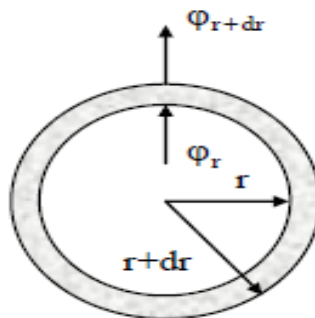


2.3.2.4 Cylindre creux long (tube)

On considère un cylindre creux de conductivité thermique λ , de rayon intérieur r_1 , de rayon extérieur r_2 , de longueur L , les températures des faces internes et externes étant respectivement T_1 et T_2 . On suppose que le gradient longitudinal de température est négligeable devant le gradient radial.

Effectuons le bilan thermique du système constitué par la partie de cylindre comprise entre les rayons r et $r + dr$:

$$\Phi_r = \Phi_{r+dr} \quad (2.28)$$



avec

$$\varphi_r = -\lambda 2\pi r L \left(\frac{dT}{dr} \right)_r$$

$$\text{et } \varphi_{r+dr} = -\lambda 2\pi (r+dr) L \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r+dr}$$

$$\text{Soit } -\lambda 2\pi r L \left(\frac{dT}{dr} \right)_r = -\lambda 2\pi (r+dr) L \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r+dr}$$

$$\text{d'où } r \frac{dT}{dr} = C \quad (2.29)$$

avec les conditions aux limites : $T(r_1) = T_1$ et $T(r_2) = T_2$

d'où

$$T(r) = \frac{T_2 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + T_1 \ln\left(\frac{r_2}{r}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (2.30)$$

Et par application de la relation $\varphi = -\lambda 2\pi r \frac{dT}{dr}$, on obtient :

$$\varphi = \frac{2\pi \lambda L (T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (2.31)$$

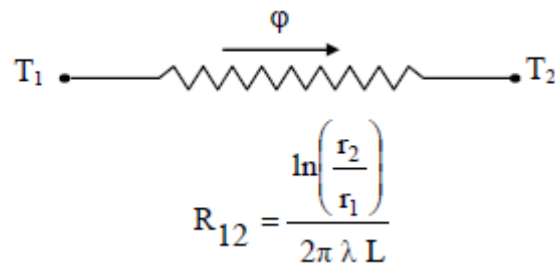
Cette relation peut aussi être mise sous la forme :

$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{R_{12}} \quad (2.32)$$

avec

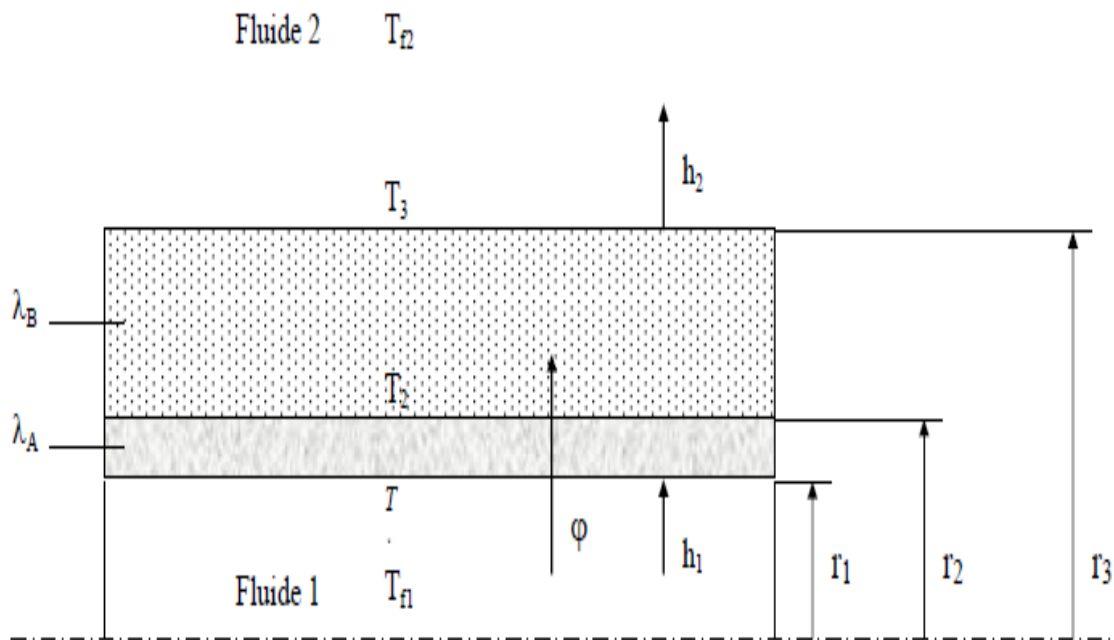
$$R_{12} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \lambda L}$$

et être représentée par le schéma électrique équivalent suivant :



2.3.2.5- Cylindre creux multicouche

C'est le cas pratique d'un tube recouvert d'une ou plusieurs couches de matériaux différents et où l'on ne connaît que les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les faces interne et externe du cylindre, h_1 et h_2 sont les coefficients de transfert de chaleur par convection entre les fluides et les faces internes et externes :



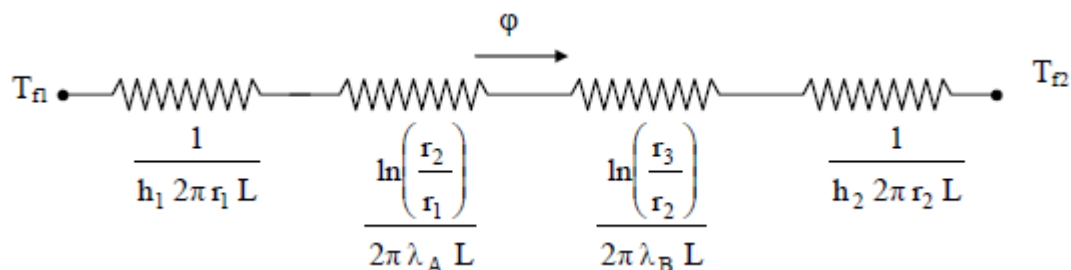
Le flux de chaleur φ est conservatif et s'écrit :

$$\varphi = h_1 2\pi r_1 L (T_{f1} - T_1) = \frac{2\pi \lambda_A L (T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{2\pi \lambda_B L (T_2 - T_3)}{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)} = h_2 2\pi r_3 L (T_3 - T_{f2}) \quad (2.33)$$

d'où

$$\phi = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{h_1 2\pi r_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \lambda_A L} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi \lambda_B L} + \frac{1}{h_2 2\pi r_3 L}} \quad (2.34)$$

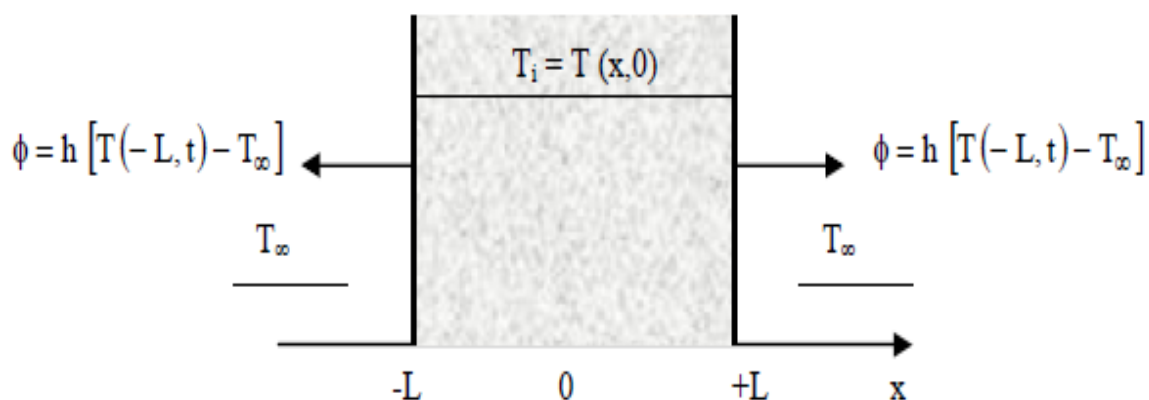
ce qui peut être représenté par le schéma électrique équivalent suivant :



2.4- Conduction unidirectionnelle en régime variable

2.4.1- Plaque infinie

Nous allons traiter dans ce qui suit le cas d'une plaque d'épaisseur $2L$ avec un coefficient de transfert connue, et de dimensions latérales suffisamment grandes pour que l'on puisse considérer que le transfert de chaleur est unidirectionnel.



L'équation de la chaleur s'écrit [24]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.35)$$

avec les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} T(x,0) = T_i \\ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \\ -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} = h[T(L,t) - T_\infty] \end{array} \right. \quad (2.36)$$

La résolution de cette équation permet d'obtenir le résultat suivant :

$$T(x,t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-a w_n^2 t\right) \frac{\left(w_n^2 + \frac{h^2}{\lambda^2}\right) \cos\left(w_n x\right) \int_0^L [T(x') - T_0] \cos\left(w_n x'\right) dx'}{\left(w_n^2 + \frac{h^2}{\lambda^2}\right) L + \frac{h}{\lambda}} \quad (2.37)$$

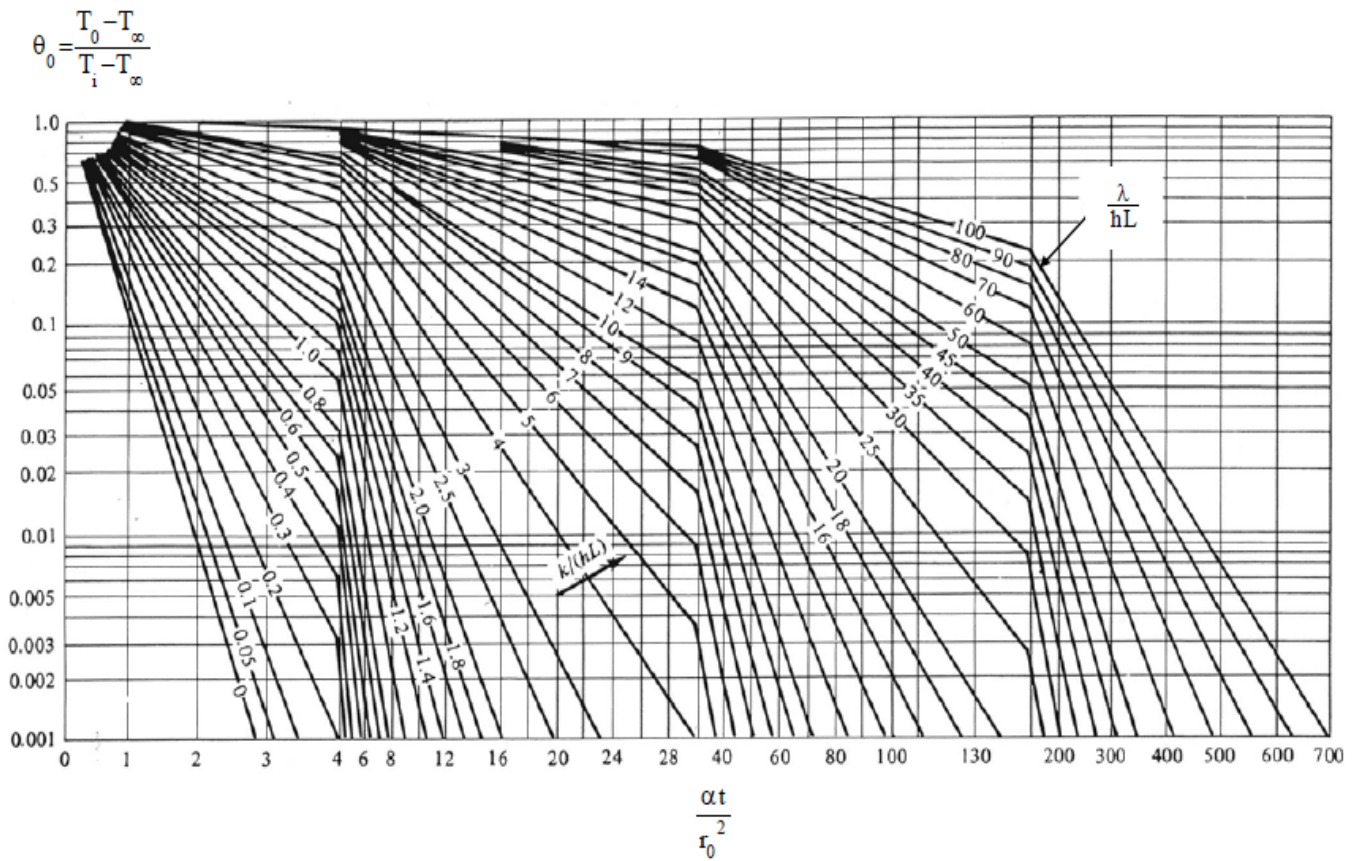
Où w_n ($n = 1, 2, \dots$) sont les solutions de l'équation : $w \tan(wL) = h/\lambda$

Dans le cas où la température initiale T_i est uniforme (indépendante de x) la solution s'écrit :

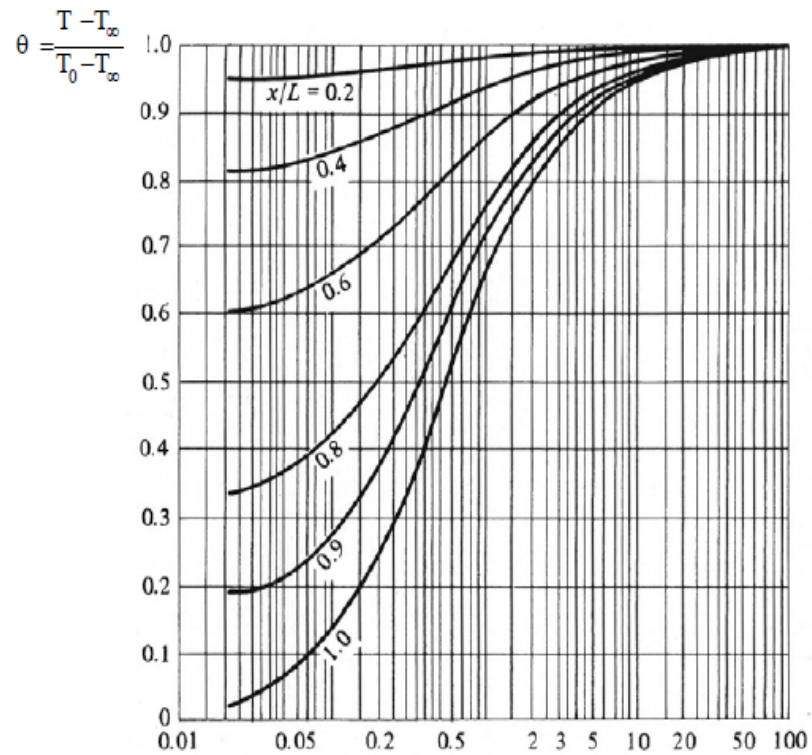
$$T(x,t) = T_0 + 2 \left(T_i - T_0\right) \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-a w_n^2 t\right) \frac{\frac{h}{\lambda} \cos\left(w_n x\right)}{\left(w_n^2 + \frac{h^2}{\lambda^2}\right) L + \frac{h}{\lambda} \cos\left(w_n L\right)} \quad (2.38)$$

Cette solution est représentée sous forme d'abaques.

Température adimensionnelle θ_0 au centre de la plaque d'épaisseur $2L$



Température adimensionnelle θ à la distance x du centre



2.4.2- Cylindre infini

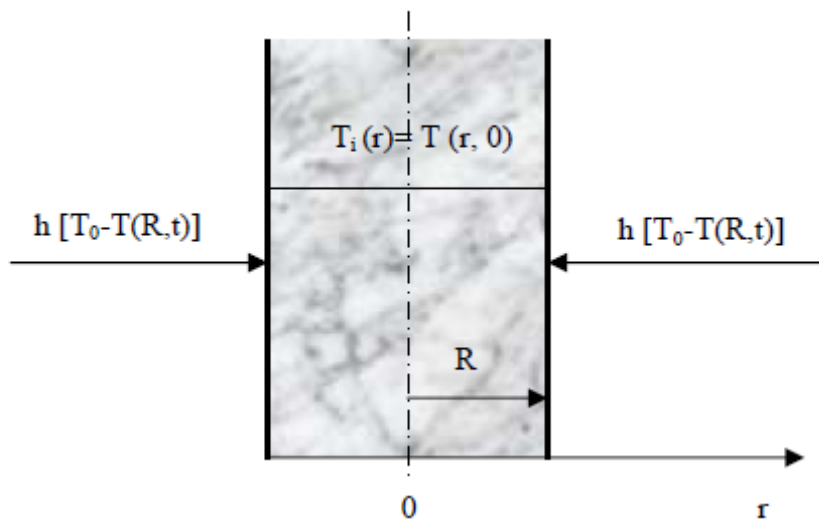
On impose brutalement un échange de chaleur par convection avec un coefficient de transfert h à la surface du cylindre initialement à la température uniforme T_i .

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.39}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(r,0) = T_i \\ -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = h [T(R,t) - T_\infty] \end{cases} \tag{2.40}$$



La solution s'écrit :

$$T(r,t) = T_0 + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-aw_n^2 t) \frac{w_n^2 J_0(w_n r)}{\left(w_n^2 + \frac{h^2}{\lambda^2} \right) [J_0(w_n R)]^2} \int_0^R r [T_i - T_0] J_0(w_n r) dr \tag{2.41}$$

Où w_n ($n=1, 2, 3, \dots$) sont les racines de l'équation : $\alpha J_0'(wr) + h J_0(wr)/\lambda = 0$

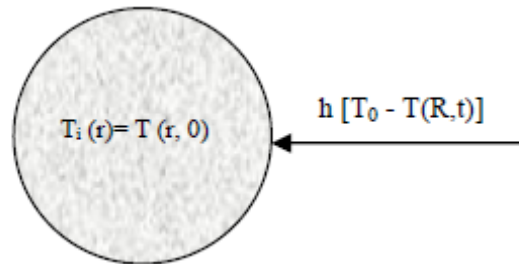
Si la température initiale T_i est uniforme (indépendante de r) ce résultat s'écrit :

$$T(r,t) = T_0 + \frac{2}{R} \frac{h(T_i - T_0)}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-aw_n^2 t) \frac{J_0(w_n r)}{\left(w_n^2 + \frac{h^2}{\lambda^2} \right) [J_0(w_n R)]} \tag{2.42}$$

Cette solution est représentée sous forme d'abaques

2.4.3- Sphère

Nous considérons ici une sphère de rayon R à la température initiale uniforme T_i à laquelle on impose brutalement une échange convectif (avec un coefficient h) avec le milieu ambiant à la température T_0 .



L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \tag{2.43}$$

Où $\bar{T} = T - T_i$ (2.44)

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \bar{T}(r,0) = T_i - T_0 \\ \bar{T}(R,t) = 0 \end{cases} \tag{2.45}$$

On effectue le changement de variable suivant : $U(r, t) = r T(r, t)$ qui permet de se ramener au cas de la plaque infinie d'épaisseur $2L$.

On obtient finalement :

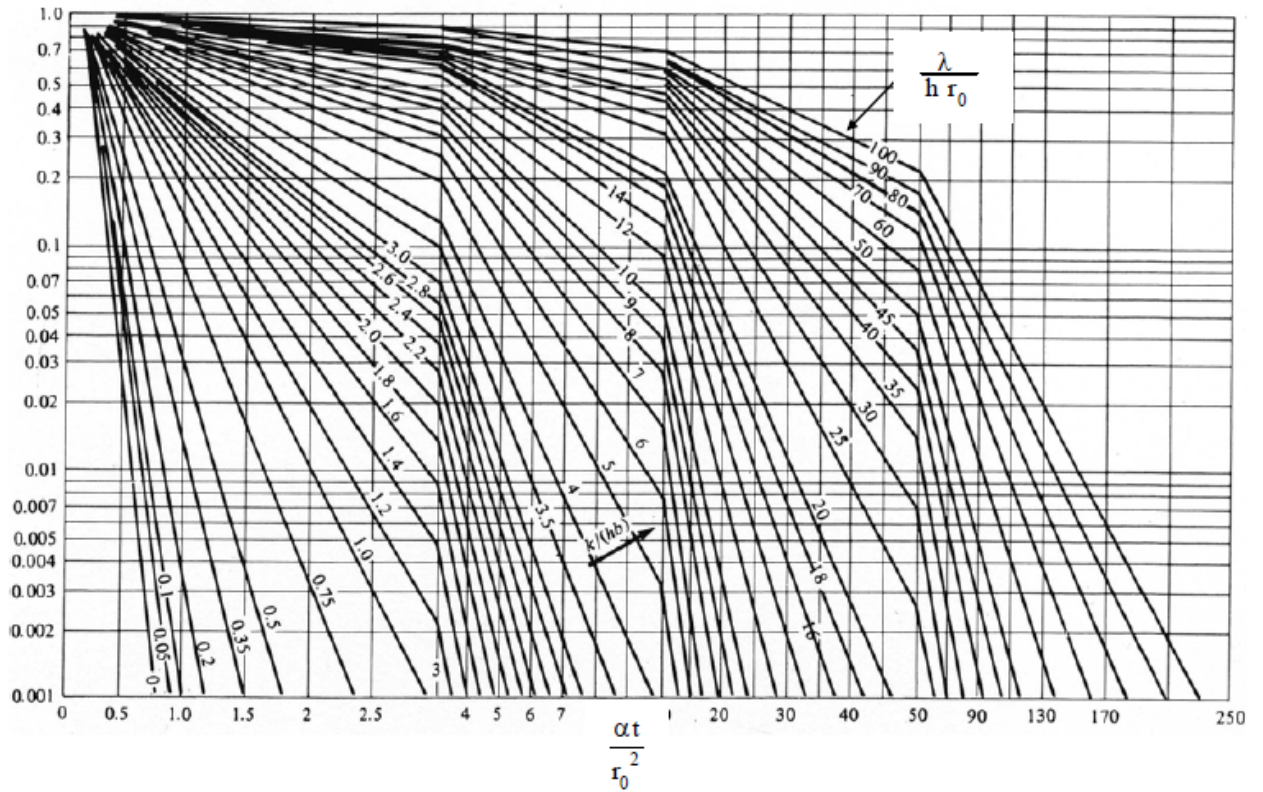
$$T(r,t) = T_0 + \frac{2h(T_i - T_0)}{\lambda R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^2 w_n^2 + \left(\frac{hR}{\lambda} - 1\right)^2}{w_n^2 \left[R^2 w_n^2 + \frac{hR}{\lambda} \left(\frac{hR}{\lambda} - 1\right) \right]} \sin(w_n R) \sin(w_n r) \tag{2.46}$$

Où w_n ($n=1, 2, \dots$) sont les racines de l'équation : $wR \cotg(wR) + hR/\lambda - 1 = 0$

Cette solution est représentée sous forme d'abaques.

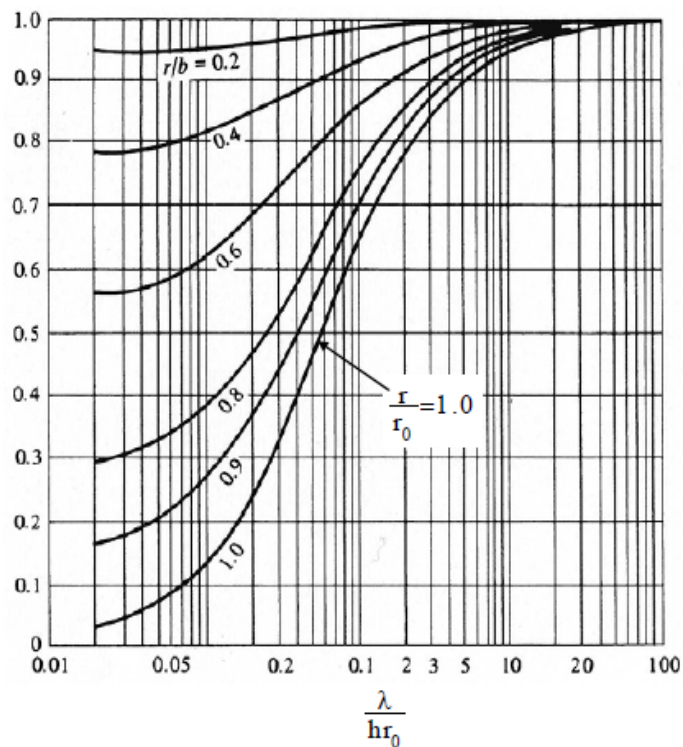
Température adimensionnelle θ_0 au centre de la sphère de rayon r_0

$$\theta_0 = \frac{T_0 - T_\infty}{T_1 - T_\infty}$$



Température adimensionnelle θ à la distance r du centre

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$



2.5. Problème de conduction thermique

Considérons une plaque métallique bicouche dont les coefficients de conductivité thermique [25] sont λ_1 ($0 < z < h$) et λ_2 ($h < z < \infty$). Ainsi, les conditions limites sur la frontière $\{z : z = 0\}$ sont:

$$u_1(r, z)|_{z=0} = 1 \quad r < 1, \quad (a)$$

$$\frac{\partial u_1(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad r > 1, \quad (b)$$
(2.47)

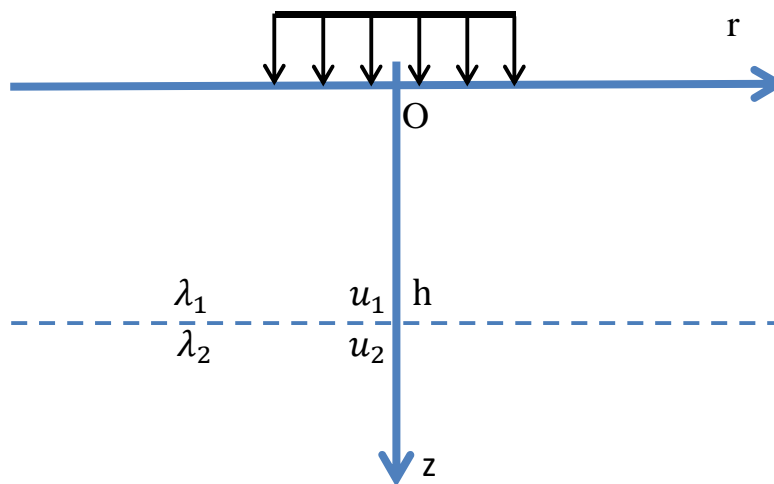
alors que sur la zone de séparation $\{z : z = h\}$ le contact est supposé idéal ; c'est-à-dire :

$$u_1(r, z)|_{z=h} = u_2(r, z)|_{z=h} \quad r < 1, \quad (c)$$

$$\lambda_1^{-1} \frac{\partial u_1(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=h} = \lambda_2^{-1} \frac{\partial u_2(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=h} \quad r > 1, \quad (d)$$
(2.48)

la continuité des températures et des flux correspondants entraîne :

$u_2 \rightarrow 0$ (Lorsque, $z \rightarrow \infty$) et la figure (2.1) montre la géométrie du problème



u_1, u_2 - température des 2 milieux

Figure 2.1 Problème de conduction thermique.

2.5.1. Formulation mathématique du problème

Les équations de conduction sont :

$$\begin{cases} \Delta u_1(r, z) = 0, & (0 \leq z \leq h), (r \geq 0) \\ \Delta u_2(r, z) = 0, & (z \geq h), (r \geq 0) \end{cases} \quad (2.49)$$

ou
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

2.5.2. Solution du problème

Nous multiplions les équations de conduction par $rJ_0(\zeta r)$ et nous intégrons en suite le résultat de 0 à ∞ suivant r. En tenant compte de ($u_2 \rightarrow 0$ lorsque $z \rightarrow \infty$), et à l'aide de la transformation inverse de Hankel, nous trouvons :

$$u_1(r, z) = \int_0^\infty [A_1(\zeta)e^{-\zeta z} + B_1(\zeta)e^{\zeta z}] J_0(\zeta r) d\zeta \quad (2.50)$$

$$u_2(r, z) = \int_0^\infty A_2(\zeta)e^{-\zeta z} J_0(\zeta r) d\zeta \quad (2.51)$$

Vérifions les transformées de (2.48.c) et (2.48.d) nous trouvons les équations algébriques:

$$A_1(\zeta)e^{-\zeta h} + B_1(\zeta)e^{\zeta h} = A_2(\zeta)e^{-\zeta h} \quad (2.52)$$

$$A_1(\zeta)e^{-\zeta h} - B_1(\zeta)e^{\zeta h} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} A_2(\zeta)e^{-\zeta h} \quad (2.53)$$

En additionnant (2.52) et (2.53) nous obtenons :

$$2A_1(\zeta)e^{-\zeta h} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2} A_2(\zeta)e^{-\zeta h} \text{ i. e., } A_1(\zeta) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\lambda_2} A_2(\zeta) \quad (2.54)$$

Par suite, en soustrayant (2.52) et (2.53) nous aurons :

$$2B_1(\zeta)e^{\zeta h} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} A_2(\zeta)e^{-\zeta h} \text{ i. e., } B_1(\zeta) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\lambda_2} A_2(\zeta)e^{-2\zeta h} \quad (2.55)$$

ce qui donne

$$u_1(r, z) = \frac{1}{2\lambda_2} \int_0^\infty A_2(\zeta) [(\lambda_1 + \lambda_2)e^{-\zeta z} + (\lambda_2 - \lambda_1)e^{\zeta(z-2h)}] J_0(\zeta r) d\zeta \quad (2.56)$$

$$u_2(r, z) = \int_0^\infty A_2(\zeta) e^{-\zeta z} J_0(\zeta r) d\zeta \quad (2.57)$$

Vérifions les conditions mixtes (2.47.a) et (2.47.b), nous trouvons les équations duales suivantes:

$$\frac{1}{2\lambda_2} \int_0^\infty A_2(\zeta) [(\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_2 - \lambda_1)e^{-2\zeta h}] J_0(\zeta r) d\zeta = 1 \quad (r < 1) \quad (2.58)$$

$$\frac{1}{2\lambda_2} \int_0^\infty A_2(\zeta) [(\lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_2 - \lambda_1)e^{-2\zeta h}] J_0(\zeta r) d\zeta = 0 \quad (r > 1) \quad (2.59)$$

Posons ensuite :

$$A_1(\zeta) = \frac{1}{2\lambda_2} A_2 \zeta (\zeta) [(\lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_2 - \lambda_1)] e^{-2\zeta h} \quad (2.60)$$

nous trouvons les équations dérivées :

$$a + be^{-2\zeta h} = (a - be^{-2\zeta h})\gamma \quad (2.61)$$

$$\gamma = \frac{a + be^{-2\zeta h}}{a - be^{-2\zeta h}} = \frac{1 + \frac{b}{a}e^{-2\zeta h}}{1 - \frac{b}{a}e^{-2\zeta h}} = H(\zeta)$$

Si $0 < \left(\frac{b}{a} = k\right) < 1$, on aura :

$$\begin{aligned} H(\zeta) &= (1 + ke^{-2\zeta h}) \sum_{n=0}^{\infty} k^n e^{-2n\zeta h} \\ &\simeq 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} k^n e^{-2n\zeta h} \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\Rightarrow \alpha_n = 2k^n, \beta_n = 2nh$$

Si $A(\zeta) = \zeta \int_0^1 \varphi(t) \cos(\zeta t) dt$ alors, l'équation (2.59) est satisfaite. Ce qui correspond à Poser $A(\zeta)$ comme suit

$$A(\zeta) = \zeta \int_0^1 \varphi(t) \cos(\zeta t) dt \quad (2.63)$$

Dans ce cas, l'équation (2.58) permet de trouver l'équation de Fredholm suivante :

$$\varphi(x) + \int_0^1 \varphi(t) k(x, t) dt = 1, \quad (r < 1) \quad (2.64)$$

ou

$$k(x, t) = -2\pi \int_0^\infty g(\zeta) \cos(\zeta t) d\zeta$$
$$g(\zeta) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} k^n e^{-n\zeta h} \quad (2.65)$$

i.e., $H(\zeta) = 1 - g(\zeta)$

Conclusion

Ce chapitre contient quelques hypothèses et des notions élémentaires sur Les transferts de chaleur qui vont être utilisées dans les chapitres à suivre, nous pouvons donner quelques applications sur Les transferts de chaleur par conduction.

Chapitre 3

*Formulation et résolution des équations de la
conduction thermique*

3.1. Formulation et résolution des équations de la conduction thermique :

3.1.1. Description du problème

On considère une plaque métallique d'épaisseur h , circulaire et conductrice occupant domaine D donné en coordonnées cylindriques par :

$$D = \{(r, \varphi, z) \text{ tel que } 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h\}$$

On suppose que la face supérieure $z=h$ subit un flux thermique d'intensité u_1 le long d'une portion circulaire de rayon b . la face inférieure opposée de rayon a est soumise à une température uniforme u_0 . Le reste des surfaces est maintenu à une température nulle $z=h$ alors que la partie correspondante à $z=0$ est thermiquement isolée, cf. figure 3.1.

Le problème se ramène à un système d'équations intégrales duales en J_0 (fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro). L'approche de résolution diffère de la méthode traditionnelle de transformation à un système d'équations intégrales de Fréholm de seconde espèce

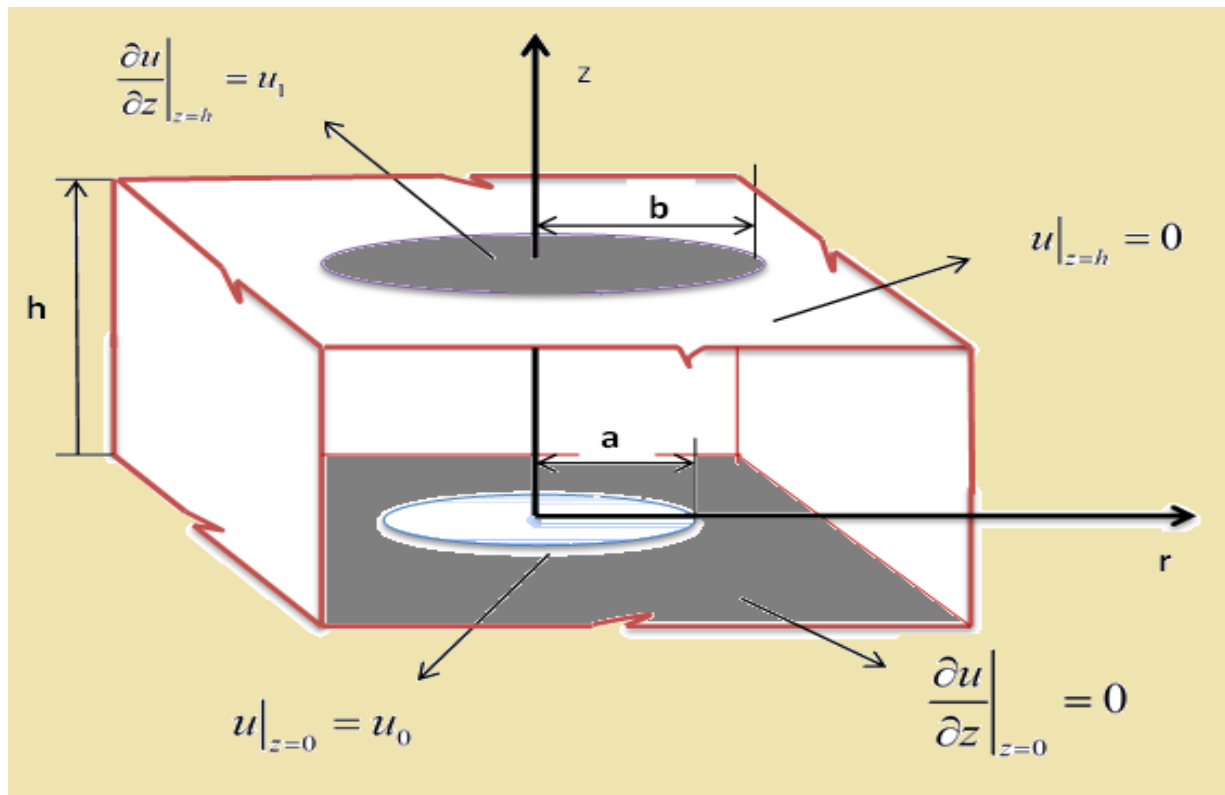


Figure 3.1 Géométrie du problème

3.1.2. Formulation mathématique :

L'équation de la conduction thermique stationnaire en coordonnées cylindrique (r, z) pour ce problème est exprimée comme suit [1] :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1)$$

Alors que les conditions aux limites sont :

$$\text{face inférieure} \begin{cases} u|_{z=0} = u_0 & r < a \\ \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0} = 0 & r > a \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\text{face supérieure} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=h} = u_1 & r < b \\ u|_{z=h} = 0 & r > b \end{cases} \quad (3.3)$$

après la transformation integrale de Hankel d'ordre zéro sur l'équation de laplace (3.1) on obtient l'équation différentielle ordinaire suivant :

$$U'' - \lambda^2 U = 0 \quad (3.4)$$

La solution de l'équation (3.4) est de type :

$$U(r, z) = \int_0^\infty [A(\lambda)ch\lambda z + B(\lambda)sh\lambda z] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.5)$$

où A(λ) et B(λ) sont des fonctions de paramétré λ à déterminer à partir des conditions aux limites du champ de température.

En vérifiant les conditions mixtes (3.2) et (3.3) on obtient le système d'équations intégrales duales suivantes :

$$\int_0^{\infty} A(\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda = u_0 \quad r < a \quad (3.6)$$

$$\int_0^{\infty} \lambda[A(\lambda)sh(\lambda z) + B(\lambda)ch(\lambda z)]J_0(\lambda r) d\lambda = u_1 \quad r < b \quad (3.7)$$

$$\int_0^{\infty} \lambda B(\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda = 0 \quad r > a \quad (3.8)$$

$$\int_0^{\infty} [A(\lambda)ch(\lambda z) + B(\lambda)sh(\lambda z)]J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \quad r > b \quad (3.9)$$

La résolution du système des équations duales (3.6) (3.9) se base sur les deux formules intégrales :

$$\int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda r)M_n(\lambda x)d\lambda = \begin{cases} \frac{2}{\pi r} \frac{T_{2n+1}(\frac{r}{x})}{\sqrt{x^2 - r^2}} & r < x \\ 0 & r > x \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda r)N_n(\lambda x)d\lambda = \begin{cases} \frac{4}{\pi x r} \sqrt{1 - \frac{r^2}{x^2}} U_{2n+1}\left(\frac{r}{x}\right) & r < x \\ 0 & r > x \end{cases} \quad (3.11)$$

où $n = 0, 1, 2, \dots$, T_n et U_n sont les polynômes de Tchebychev de première et seconde espèce, respectivement. Alors que les deux fonctions M_n et N_n sont données par

$$M_n(x) = J_{(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)J_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right) \quad (3.12)$$

et

$$N_n(x) = \lambda [J_{(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)J_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right) - J_{(n+\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)J_{-(n+\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)] \quad (3.13)$$

Ainsi pour satisfaire les équations homogènes (3.8) et (3.9) on pose :

$$B(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n M_n(\lambda a) \quad (3.14)$$

$$A(\lambda)ch\lambda h + B(\lambda)sh\lambda h = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n N_n(\lambda b) \quad (3.15)$$

D'où :

$$A(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\beta_n \frac{N_n(\lambda b)}{ch(\lambda h)} - \alpha_n th(\lambda h) M_n(\lambda a) \right] \quad (3.16)$$

En portant les expressions (3.14) et (3.16) dans les équations (3.6) et (3.7) on trouve :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\beta_n \frac{N_n(\lambda b)}{ch(\lambda h)} - \alpha_n th(\lambda h) M_n(\lambda a) \right] J_0(\lambda r) d\lambda = u_0 \quad r < a \quad (3.17)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda \left[\beta_n th(\lambda h) N_n(\lambda b) + \alpha_n \frac{M_n(\lambda b)}{ch(\lambda h)} \right] J_0(\lambda r) d\lambda = u_1 \quad r < b \quad (3.18)$$

En tenant compte de la formule de Gegenbauer [15] :

$$J_0(\lambda r) = \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) X_m(\lambda x) \cos(m\varphi_x), \quad x = a, b \quad (3.19)$$

où

$$X_m(\lambda x) = J_m^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right), \quad \text{alors que} \quad (3.20)$$

$$\varphi_x = 2 \arcsin\left(\frac{r}{a}\right) \quad (3.21)$$

Les équations (3.17) et (3.18) s'écrivent sous la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [\beta_n \frac{N_n(\lambda b)}{ch(\lambda h)} - \alpha_n th(\lambda h) M_n(\lambda a)] \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) X_m(\lambda a) \cos(m\varphi_a) d\lambda = u_0 \quad (3.22)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda [\beta_n th(\lambda h) N_n(\lambda b) + \alpha_n \frac{M_n(\lambda a)}{ch(\lambda h)}] \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) X_m(\lambda b) \cos(m\varphi_b) d\lambda = u_1 \quad (3.23)$$

Or le système trigonométrique $\{\cos m\varphi_x\}$ $m=0, 1, 2, \dots$

est linéairement indépendant, en intervenant les sommes suivant m et n

on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [\beta_n \frac{N_n(\lambda b)}{ch(\lambda h)} - \alpha_n th(\lambda h) M_n(\lambda a)] X_m(\lambda a) d\lambda = u_0 \delta_{0m} \quad (3.24)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda [\beta_n th(\lambda h) N_n(\lambda b) + \alpha_n \frac{M_n(\lambda a)}{ch(\lambda h)}] X_m(\lambda b) d\lambda = u_1 \delta_{0m} \quad (3.25)$$

où δ_{0m} désigne le symbole de Kronecker (on dit aussi le delta de Kronecker) défini par :

$$\delta_{0m} = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 0 & m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Dans les dernières équations, par soustraction des équations d'ordre m et $m+2$

on aura les systèmes algébriques infinis suivants :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [\beta_n \frac{N_n(\lambda b)}{ch(\lambda h)} - \alpha_n th(\lambda h) M_n(\lambda a)] X_m(\lambda a) d\lambda = u_0 \delta_{0m} \quad (3.26)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda [\beta_n th(\lambda h) N_n(\lambda b) + \alpha_n \frac{M_n(\lambda a)}{ch(\lambda h)}] Y_m(\lambda b) d\lambda = u_1 \delta_{0,m+2} \quad (3.27)$$

avec

$$Y_m(\lambda b) = \lambda [X_m(\lambda b) - X_{m+2}(\lambda b)]$$

Par suite, nous pouvons écrire le système d'équations (3.26) et (3.27) sous la forme algébrique

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n A_{mn} - \beta_n B_{mn}] = -u_0 \delta_{0m} \\ \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n C_{mn} + \beta_n D_{mn}] = u_1 \delta_{0m} \end{cases} \quad (3.28)$$

Le but de la résolution le système algébrique d'équation (3.28) est la détermination des coefficients α_n et β_n , ou une grande partie de la solution dépend de l'évaluation du suit des intégrales

$$A_{mn} = \int_0^{\infty} th(\lambda h) M_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda \quad (3.29)$$

$$B_{mn} = \int_0^{\infty} \frac{1}{ch(\lambda h)} N_n(\lambda b) X_m(\lambda a) d\lambda \quad (3.30)$$

$$C_{mn} = \int_0^{\infty} \frac{1}{ch(\lambda h)} M_n(\lambda a) Y_m(\lambda b) d\lambda \quad (3.31)$$

$$D_{mn} = \int_0^{\infty} th(\lambda h) N_n(\lambda b) Y_m(\lambda b) d\lambda \quad (3.32)$$

Les intégrales (3.30) et (3.31) sont rapidement convergentes et donc nous avons intégré directement entre zéro et λ_0 nous obtenons:

$$B_{mn} \simeq \int_0^{\lambda_0} \frac{1}{ch(\lambda h)} N_n(\lambda b) X_m(\lambda a) d\lambda \quad (3.33)$$

$$C_{mn} \simeq \int_0^{\lambda_0} \frac{1}{ch(\lambda h)} M_n(\lambda a) Y_m(\lambda b) d\lambda \quad (3.34)$$

Pour améliorer la convergence des intégrales (3.29) et (3.32) qui sont lentement convergent nous écrit sous la forme suivante :

$$A_{mn} = \int_0^{\lambda_0} th(\lambda h) M_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda + \int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda \quad (3.35)$$

$$D_{mn} = \int_0^{\lambda_0} th(\lambda h) N_n(\lambda b) Y_m(\lambda b) d\lambda + \int_{\lambda_0}^{\infty} N_n(\lambda b) Y_m(\lambda b) d\lambda \quad (3.36)$$

L'équation (3.35) et (3.36) est calculée comme suit: la première intégrale du côté droit est évaluée numériquement par la règle de Simpson avec $\lambda_0 = 1500$ alors que dans la seconde intégrale on remplace la fonction par son expression asymptotique en tenant compte de l'équivalent à l'infini de fonction de Bessel.

$$J_\nu(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \cos\left(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{4\nu^2 - 1}{8x} \sin\left(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right\}, x \rightarrow +\infty \quad (3.37)$$

par la dernière formule nous conduisons les suivantes pour de grandes valeurs de λ :

$$M_n(\lambda a) X_m(\lambda a) \rightarrow \frac{4}{\pi^2 a^2 \lambda^2} \left[\sin(\lambda a) + \frac{(-1)^m}{2} (1 - \cos(2\lambda a)) \right] \quad (3.38)$$

$$N_n(\lambda b) Y_m(\lambda b) \rightarrow \frac{128(-1)^m (m+1)(n+1) \cos^2(\lambda b)}{\pi^2 b^4 \lambda^2} \quad (3.39)$$

Après intégration de la formule (3.35) par partie nous obtenons :

$$A_{mn} = \int_0^{\lambda_0} M_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda + A'_{mn} \quad (3.40)$$

où A'_{mn} est représenté par:

$$A'_{mn} = \int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 a^2 \lambda^2} \left[\sin(\lambda a) + \frac{(-1)^m}{2} (1 - \cos(2\lambda a)) \right] d\lambda \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{\pi^2 a^2} \int_{\lambda_0}^{\infty} \left[\frac{\sin(\lambda a)}{\lambda^2} + \frac{(-1)^m}{2} \frac{(1 - \cos(2\lambda a))}{\lambda^2} \right] d\lambda \\ &= \frac{4}{\pi^2 a^2} \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda + \frac{(-1)^m}{2} \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda \end{aligned} \quad (3.42)$$

Par suite, on intègre l'expression (3.42) par partie nous obtenons :

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda = \frac{\sin(\lambda_0 a)}{\lambda_0} - aCi(\lambda_0 a) \quad (3.43)$$

et

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda = \frac{1 - \cos(2\lambda_0 a)}{\lambda_0} - 2aSi(2\lambda_0 a) \quad (3.44)$$

avec $Si(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ (sinus intégrale)

$Ci(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ (cosinus intégrale)

Nous obtenons donc :

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda = \frac{4}{\pi^2 a^2} \left[\frac{\sin(\lambda_0 a)}{\lambda_0} - aCi(\lambda_0 a) + \frac{(-1)^m}{2} \left(\frac{1 - \cos(2\lambda_0 a)}{\lambda_0} \right) - 2aSi(2\lambda_0 a) \right] \quad (3.45)$$

D'autre par la relation (3.36) donne :

$$D_{mn} = \int_0^{\lambda_0} N_n(\lambda b) Y_m(\lambda b) d\lambda + D'_{mn} \quad (3.46)$$

où D'_{mn} est représenté par:

$$D'_{mn} = \int_{\lambda_0}^{\infty} N_n(\lambda b) Y_m(\lambda b) d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{128(-1)^m (m+1)(n+1) \cos^2(\lambda b)}{\pi^2 b^4 \lambda^2} d\lambda \quad (3.47)$$

$$= \frac{128(-1)^m (m+1)(n+1)}{\pi^2 b^4} \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\cos^2(\lambda b)}{\lambda^2} d\lambda \quad (3.48)$$

On a

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\cos^2(\lambda b)}{\lambda^2} d\lambda = \frac{\cos^2(\lambda_0 b)}{\lambda_0 b} - Si(2\lambda_0 a) \quad (3.49)$$

Finalement on trouve

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} N_n(\lambda b) Y_m(\lambda b) d\lambda = \frac{128(-1)^m(m+1)(n+1)}{\pi^2 b^3} \left[\frac{\cos^2(\lambda_0 b)}{\lambda_0 b} - Si(2\lambda_0 a) \right] \quad (3.50)$$

3.1.3. Equation de la température :

$$u(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \frac{\text{ch}(\lambda z)}{\text{ch}(\lambda h)} N_n(\lambda b) J_0(\lambda r) d\lambda + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} [M_n(\lambda a) \text{sh}(\lambda z) - M_n(\lambda a) \text{ch}(\lambda z) \text{th}(\lambda h)] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.51)$$

3.1.4. Equation du flux :

$$\frac{\partial u(r, z)}{\partial z} = - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \lambda \frac{\text{sh}(\lambda z)}{\text{ch}(\lambda h)} N_n(\lambda b) J_0(\lambda r) d\lambda + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} \lambda [M_n(\lambda a) \text{ch}(\lambda z) - M_n(\lambda a) \text{sh}(\lambda z) \text{th}(\lambda h)] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.52)$$

Nous utilisons les équations sans dimensions de la température et de flux pour simplifier et généraliser les résultats en faisant le changement de variable suivant :

$$\rho = \frac{r}{a} \quad ; \quad \zeta = \frac{z}{a} \quad ; \quad H = \frac{h}{a}$$

L'équation sans dimensions du flux et de la température est rédigée comme suit :

✓ Equation de la température sans dimensions :

$$u(\rho, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \frac{\text{ch}(\lambda \zeta)}{\text{ch}(\lambda H)} N_n \left(\lambda \frac{b}{a} \right) J_0(\lambda \rho) d\lambda + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} [M_n(\lambda a) \text{sh}(\lambda \zeta) - M_n(\lambda a) \text{ch}(\lambda \zeta) \text{th}(\lambda H)] J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad (3.53)$$

✓ Equation du flux sans dimensions:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\rho, \zeta)}{\partial \zeta} = & - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \lambda \frac{\text{sh}(\lambda \zeta)}{\text{ch}(\lambda H)} N_n \left(\lambda \frac{b}{a} \right) J_0(\lambda \rho) d\lambda \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} \lambda [M_n(\lambda a) \text{ch}(\lambda \zeta) - M_n(\lambda a) \text{sh}(\lambda \zeta) \text{th}(\lambda H)] J_0(\lambda \rho) d\lambda \end{aligned} \quad (3.54)$$

3.2. Les expressions analytiques de la température et du flux dans les extrémités :

Dans cette étude, une autre technique est utilisée pour exprimer la température et le flux de chaleur dans la partie supérieure et inférieure, au moyen de la formule intégrale (3.53), nous pouvons exprimer analytiquement la température à la surface supérieure $\zeta = H$ avec le polynôme de Tchebychev.

3.2.1. Cas1: dans le plan $\zeta = 0$

Pour la détermination l'expression analytique de la température et du flux dans la surface inférieure que nous prenons

🚩 Equation de la température

$$\begin{aligned} u(\rho, \zeta) |_{\zeta=0} = & \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \frac{1}{\text{ch}(\lambda H)} N_n \left(\lambda \frac{b}{a} \right) J_0(\lambda \rho) d\lambda \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} M_n(\lambda a) \text{th}(\lambda H) J_0(\lambda \rho) d\lambda \end{aligned} \quad \rho > 1 \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} = & \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\lambda_0} \frac{1}{\text{ch}(\lambda H)} N_n \left(\lambda \frac{b}{a} \right) J_0(\lambda \rho) d\lambda + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\lambda_0} \frac{1}{\text{ch}(\lambda H)} N_n \left(\lambda \frac{b}{a} \right) J_0(\lambda \rho) d\lambda \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\lambda_0} M_n(\lambda a) \text{th}(\lambda H) J_0(\lambda \rho) d\lambda \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda a) \text{th}(\lambda H) J_0(\lambda \rho) d\lambda \end{aligned} \quad \rho > 1 \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned}
 u(\rho, \zeta)|_{\zeta=0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\lambda_0} \frac{1}{\text{ch}(\lambda H)} N_n\left(\lambda \frac{b}{a}\right) J_0(\lambda \rho) d\lambda - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\lambda_0} M_n(\lambda a) \text{th}(\lambda H) J_0(\lambda \rho) d\lambda \\
 &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda a) J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad \rho > 1 \quad (3.58)
 \end{aligned}$$

✚ Equation du flux

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial u(\rho, \zeta)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} \lambda M_n(\lambda a) J_0(\lambda \rho) d\lambda \\
 &= - \frac{2}{\pi \rho} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{T_{2n+1}(\rho)}{\sqrt{1-\rho^2}} \quad \rho < 1 \quad (3.59)
 \end{aligned}$$

3.2.2. Cas2: dans le plan $\zeta = H$

Pour la détermination l'expression analytique de la température et du flux dans la surface supérieur que nous prenons

✚ Equation de la température

$$\begin{aligned}
 u(\rho, \zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \frac{\text{ch}(\lambda \zeta)}{\text{ch}(\lambda H)} N_n\left(\lambda \frac{b}{a}\right) J_0(\lambda \rho) d\lambda \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} [M_n(\lambda a) \text{sh}(\lambda \zeta) - M_n(\lambda b) \text{ch}(\lambda \zeta) \text{th}(\lambda H)] J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad (3.60)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u(\rho, \zeta)|_{\zeta=H} &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \frac{\text{ch}(\lambda H)}{\text{ch}(\lambda H)} N_n\left(\lambda \frac{b}{a}\right) J_0(\lambda \rho) d\lambda \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} [M_n(\lambda a) \text{sh}(\lambda H) - M_n(\lambda b) \text{ch}(\lambda H) \text{th}(\lambda H)] J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad \rho < \frac{b}{a}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} N_n\left(\lambda \frac{b}{a}\right) J_0(\lambda \rho) d\lambda$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} \left[M_n(\lambda a) \operatorname{sh}(\lambda H) - M_n(\lambda b) \operatorname{ch}(\lambda H) \frac{\operatorname{sh}(\lambda H)}{\operatorname{ch}(\lambda H)} \right] J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad \rho < \frac{b}{a}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} N_n\left(\lambda \frac{b}{a}\right) J_0(\lambda \rho) d\lambda$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} [M_n(\lambda a) \operatorname{sh}(\lambda H) - M_n(\lambda a) \operatorname{sh}(\lambda H)] J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad \rho < \frac{b}{a}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} N_n\left(\lambda \frac{b}{a}\right) J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad \rho < \frac{b}{a}$$

$$u(\rho, \zeta) \Big|_{\zeta=H} = \frac{4}{\pi b \rho} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{b}\right)^2} U_{2n+1}\left(\frac{\rho}{a}\right) \quad \rho < \frac{b}{a}$$

✚ Equation du flux

$$\frac{\partial u(\rho, \zeta)}{\partial \zeta} = - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \lambda \frac{\operatorname{sh}(\lambda \zeta)}{\operatorname{ch}(\lambda H)} N_n\left(\lambda \frac{b}{a}\right) J_0(\lambda \rho) d\lambda$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} \lambda [M_n(\lambda a) \operatorname{ch}(\lambda \zeta) - M_n(\lambda a) \operatorname{sh}(\lambda \zeta) \operatorname{th}(\lambda H)] J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial u(\rho, \zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=H} = - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \lambda \frac{\operatorname{sh}(\lambda H)}{\operatorname{ch}(\lambda H)} N_n\left(\lambda \frac{b}{a}\right) J_0(\lambda \rho) d\lambda$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} \lambda [\operatorname{ch}(\lambda H) - \operatorname{sh}(\lambda H) \operatorname{th}(\lambda H)] M_n(\lambda a) J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad \rho > \frac{b}{a}$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \lambda \operatorname{th}(\lambda H) N_n\left(\lambda \frac{b}{a}\right) J_0(\lambda \rho) d\lambda$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} \lambda \left[\frac{\operatorname{ch}^2(\lambda H) - \operatorname{sh}^2(\lambda H)}{\operatorname{ch}(\lambda H)} \right] M_n(\lambda a) J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad \rho > \frac{b}{a}$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \lambda \operatorname{th}(\lambda H) N_n\left(\lambda \frac{b}{a}\right) J_0(\lambda \rho) d\lambda$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} \lambda \left[\frac{1}{\operatorname{ch}(\lambda H)} \right] M_n(\lambda a) J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad \rho > \frac{b}{a}$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\lambda_0} \lambda \operatorname{th}(\lambda H) N_n\left(\lambda \frac{b}{a}\right) J_0(\lambda \rho) d\lambda - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda N_n\left(\lambda \frac{b}{a}\right) J_0(\lambda \rho) d\lambda$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\lambda_0} \lambda M_n(\lambda a) J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad \rho > \frac{b}{a}$$

$$\left. \frac{\partial u(\rho, \zeta)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\lambda_0} \lambda \operatorname{th}(\lambda H) N_n\left(\lambda \frac{b}{a}\right) J_0(\lambda \rho) d\lambda - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda N_n\left(\lambda \frac{b}{a}\right) J_0(\lambda \rho) d\lambda$$

$$- \frac{2}{\pi \rho} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{T_{2n+1}(\rho)}{\sqrt{1-\rho^2}} \quad \rho > \frac{b}{a}$$

3.3. Résultats numériques et discussion

Les résultats obtenus du coefficient en fonction de ζ , montre que la convergence devient légèrement rapide et proportionnelle la valeur de H . Il a été examiné que dix itérations des coefficients sont suffisantes pour le calcul des champs de la température du problème proposé.

n	α_n	β_n
0	-1.541545832943438	0.365968531824528
1	-0.268506311099624	-0.005972864848679
2	0.063640690638092	-0.003410894411459
3	0.008860063737945	0.000004904103949
4	-0.001699734268390	0.000070913350266
5	-0.000441079036041	0.000004806643845
6	0.000031793346259	-0.000001876178944
7	0.000032415601294	-0.000000689113283
8	0.000020844438649	-0.000000490288271
9	0.000012477453714	-0.000000860094709

Tableau 3.1. Valeur de coefficients α_n et β_n pour $b/a=1, H=1$.

n	α_n	β_n
0	-1.116568741635938	0.582716452200962
1	-0.089030736285750	-0.043338799011299
2	0.006523506756922	0.001437711656850
3	0.000173045124586	0.000554287192166
4	-0.000013031479631	-0.000119724184436
5	0.000000280413850	0.000003660517057
6	0.000003641129269	0.000003157510507
7	0.000007393435089	-0.000000863179220
8	0.000013689339744	-0.000000230513429
9	0.000009121181741	-0.000000359463523

Tableau 3.2. Valeur de coefficients α_n et β_n pour $b/a=1.5$, $H=1$.

n	α_n	β_n
0	-3.414873687256331	0.472014344852912
1	0.004071637505510	-0.000413620643207
2	0.000070957843950	0.000002394609465
3	-0.000003502456158	-0.000000029103269
4	0.000000165479719	0.000000000889727
5	0.000000167045241	-0.000000027724412
6	0.000000382214929	-0.000000028897610
7	0.000000777270452	-0.000000066963831
8	0.000001441564843	-0.000000092507972
9	0.000000960654557	-0.000000153192922

Tableau 3.3. Valeur de coefficients α_n et β_n pour $b/a=1.5$, $H=2$.

n	α_n	β_n
0	-1.055760971697039	0.770594082437782
1	-0.020893502871042	-0.034114508253404
2	0.000838575752275	0.002826017384498
3	0.000003602807212	-0.000169317810953
4	0.000000149488728	-0.000000995889636
5	0.000001458841026	0.000002276603826
6	0.000003272724393	-0.000000467256934
7	0.000006644964231	-0.000000054962850
8	0.000012310081428	-0.000000142440461
9	0.000008200206275	-0.000000232126086

Tableau 3.4. Valeur de coefficients α_n et β_n pour $b/a=2$, $H=2$.

n	α_n	β_n
0	-3.082486651021158	0.154218171860934
1	0.070894119326874	-0.000920319960774
2	0.010656287292661	-0.000009658739279
3	-0.003219902521863	0.000000243958964
4	0.000515494752564	0.000000007646944
5	-0.000056553546494	-0.000000067609835
6	0.000004096027135	-0.000000069772402
7	0.000002665375395	-0.000000166058120
8	0.000003978062432	-0.000000230680471
9	0.000002799555761	-0.000000385089640

Tableau 3.5. Valeur de coefficients α_n et β_n pour $b/a=0.5$, $h/a=2$.

3.4. Distribution des températures et de flow de la chaleur

📌 Cas1: $b/a=1, H=1$

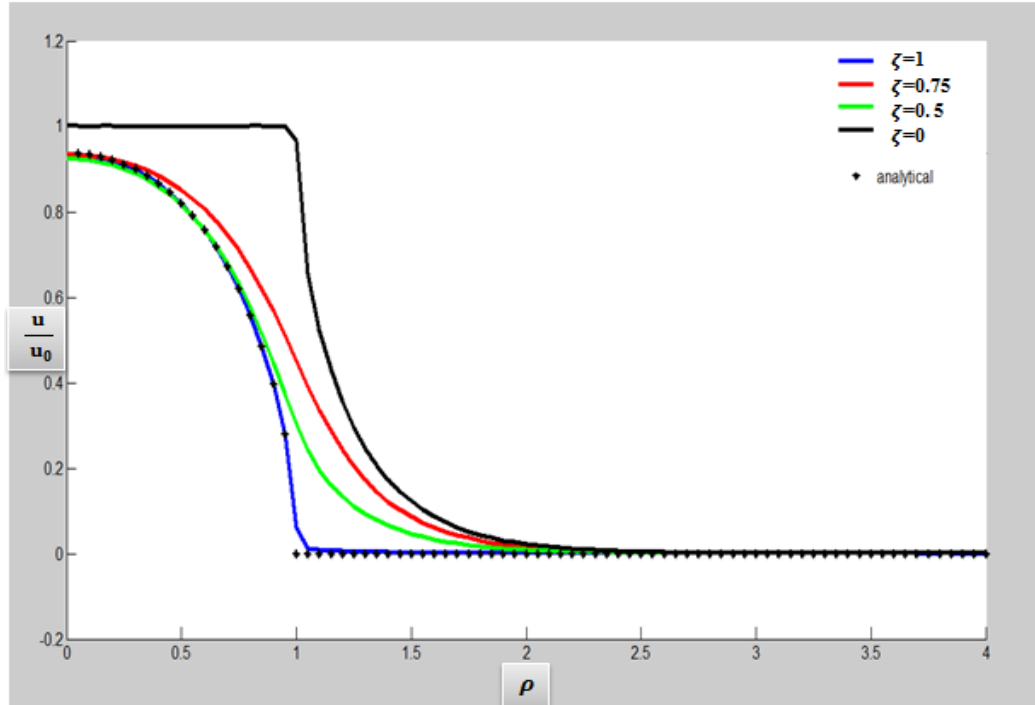


Figure 3.2. Distribution de la température

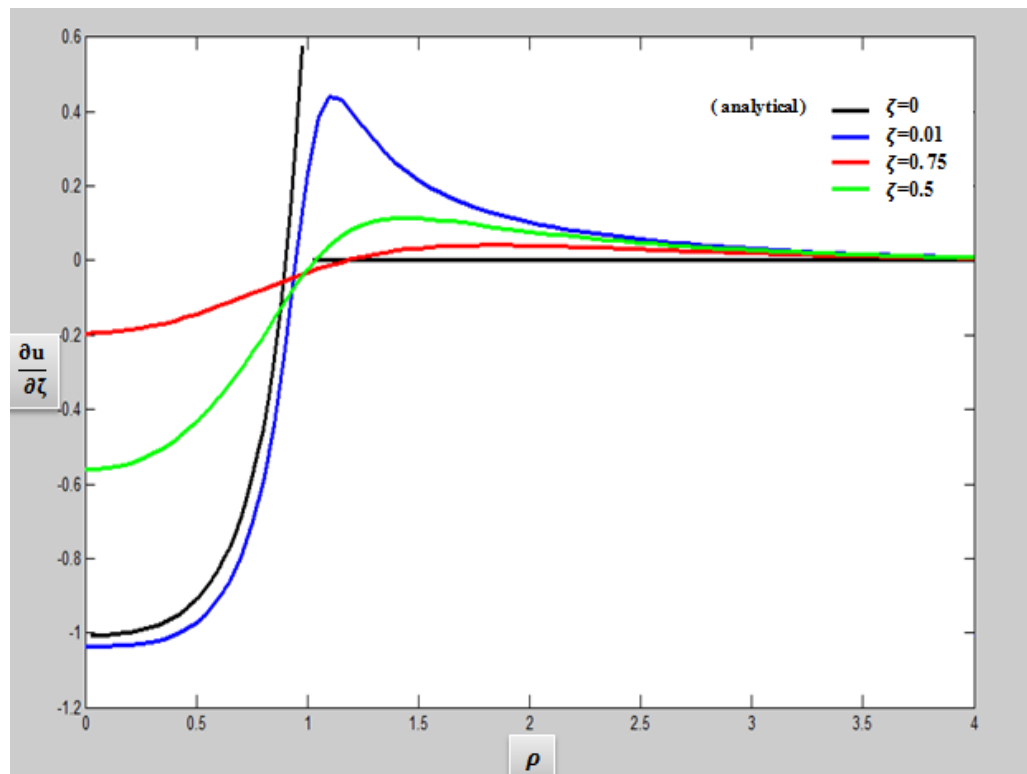


Figure 3.3. Distribution du flux

✚ Cas2: $b/a=1.5, H=1$

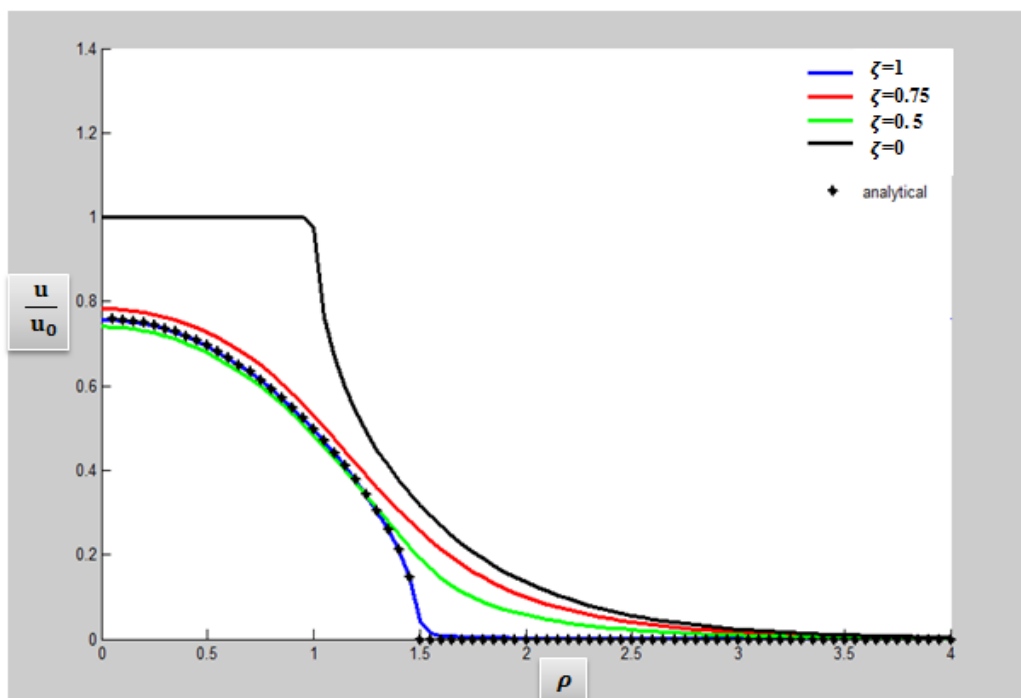


Figure 3.4. Distribution de la température

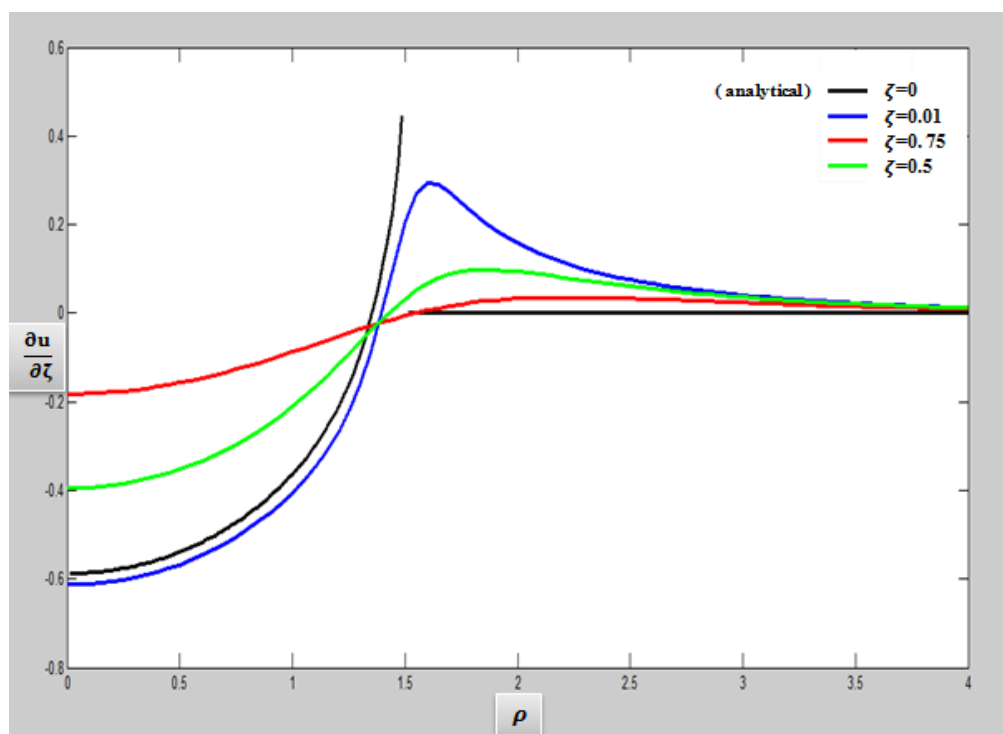


Figure 3.5. Distribution du flux

✚ Cas3: $b/a=2, H=2$

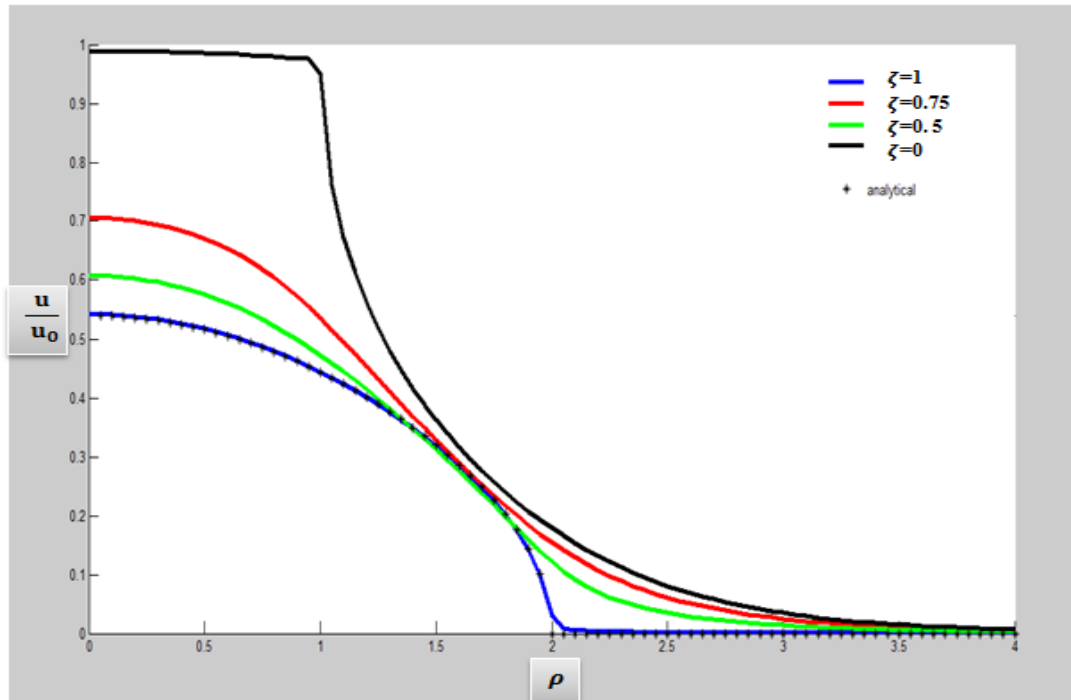


Figure 3.6. Distribution de la température

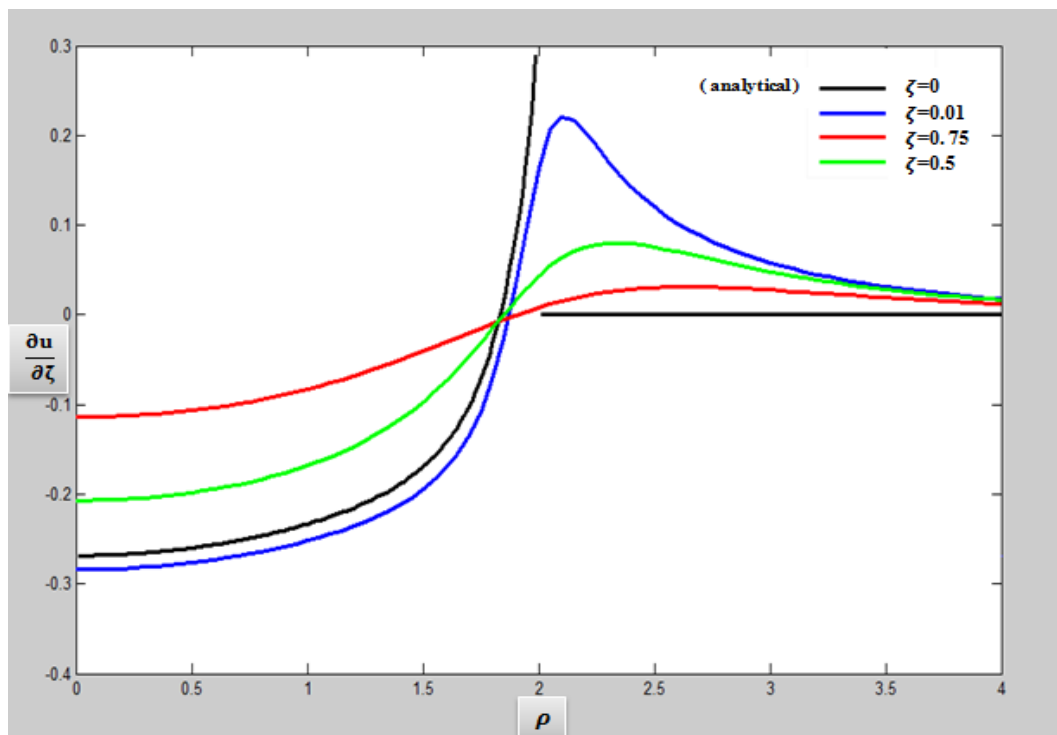


Figure 3.7. Distribution du flux

Conclusion

Nous avons traité dans cette étude un problème doublement mixte de conduction thermique dans une plaque métallique épaisse. En utilisant la transformation intégrale de Hankel et en se servant de la méthode analytique développée dans notre étude basée sur la formule d'addition de Gegenbauer, nous avons montré que :

➤ Le problème est équivalent à deux systèmes d'équations intégrales duales couplés dont les noyaux sont des fonctions de Bessel d'ordre zéro. La solution analytique a été obtenue à l'aide des coefficients de systèmes algébriques infinis.


➤ Les suites des coefficients α_n et β_n sont donnés sous forme de tableau en fonction des deux rayons des domaines de changement des conditions limites et de la hauteur de la plaque conductrice. On peut remarquer qu'ils convergent plus rapidement si H est croissant.

➤ La température et le flux sont calculés analytiquement à l'aide des coefficients précédents et en fonction de la variable adimensionnelle ρ en tout point de la plaque en fixant la hauteur ζ . Les résultats obtenus montrent que les valeurs numériques du problème pour les deux frontières peuvent être calculées avec une bonne précision en utilisant les formules intégrales. La température dans la plaque est proportionnelle au rapport ζ alors qu'un phénomène inverse se produit pour le cas du flux.

➤ La température est maximale le long de l'axe de symétrie du domaine indépendamment du rapport des deux rayons. Le flux tend vers l'infini sur la circonférence des deux surfaces de changement des conditions limites ce concorde avec le résultat de Dhaliwal.

➤ Le problème étudié dans ce mémoire peut être aussi résolu par la même méthode pour le cas d'un matériau transversalement isotrope.

➤ Les conséquences pratiques de cette étude paraissent intéressantes puisqu'elles permettent de considérer des problèmes aux limites plus complexes en réduisant les étapes de calcul analytique contrairement à l'approche traditionnelle des équations intégrales de Fredholm.



<i>Conclusion générale et perspective</i>	62
<i>Références bibliographiques</i>	65
<i>Annexes</i>	67



Conclusion générale et perspective

Nous avons traité dans cette étude un problème de conduction thermique dont la solution analytique a été obtenue à l'aide des coefficients de deux systèmes algébriques infinis. Nous avons proposé une technique directe de résolution des problèmes aux conditions limites mixtes. Ce qui a permis le calcul du champ de température en tous points de la plaque ainsi que le flux correspondants. Les résultats obtenus par la méthode proposée ont été validés à l'aide d'une comparaison avec des solutions analytiques existantes, cf p. 226-240 [1].

Perspective du travail réalisé

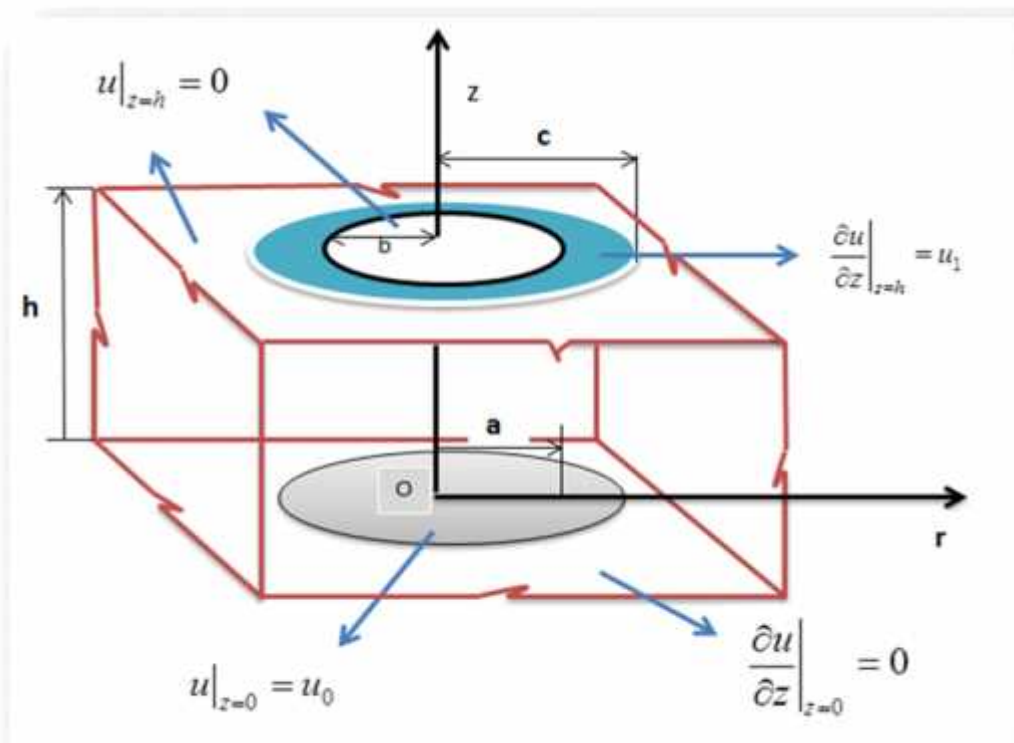
La méthode analytique développée dans ce mémoire peut être appliquée pour la résolution d'une classe intéressante de problèmes de recherche. Nous envisageons d'étudier les problèmes aux conditions limites mixtes suivants:

Problème 1:

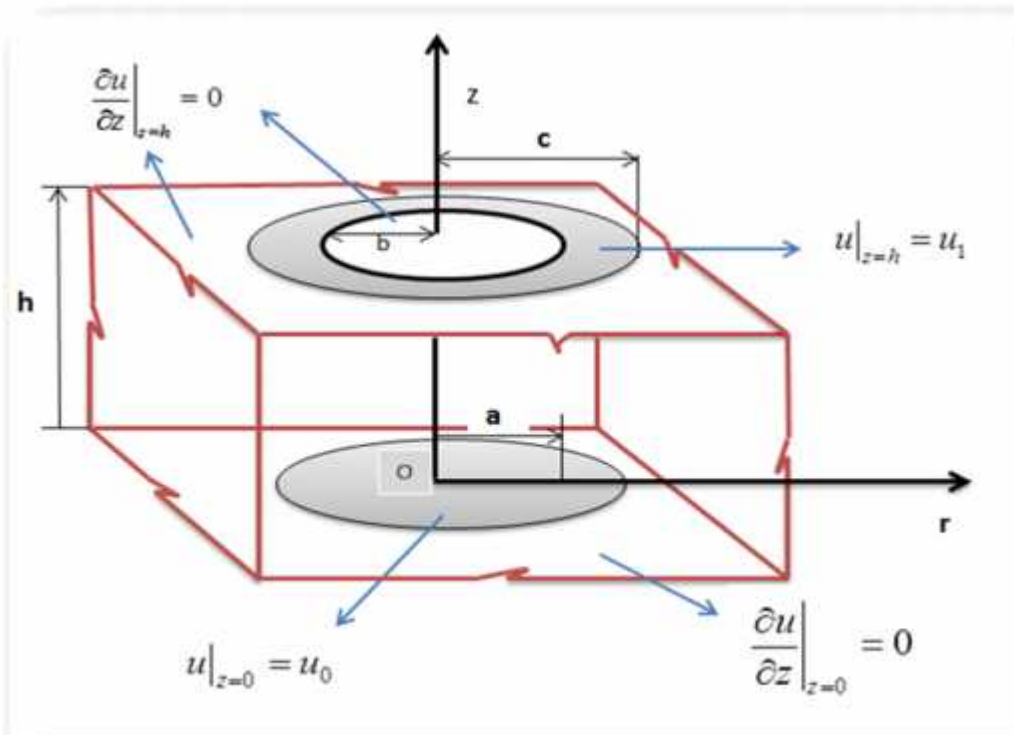
On maintient les mêmes conditions sur la face inférieure que le problème proposé. Les conditions imposées sur la seconde frontière sont triplement mixte du type température / flux / température ou bien flux / température/ flux, cf. figures ci-après.

Conclusion générale et perspective

Cas1 : Température / flux / température



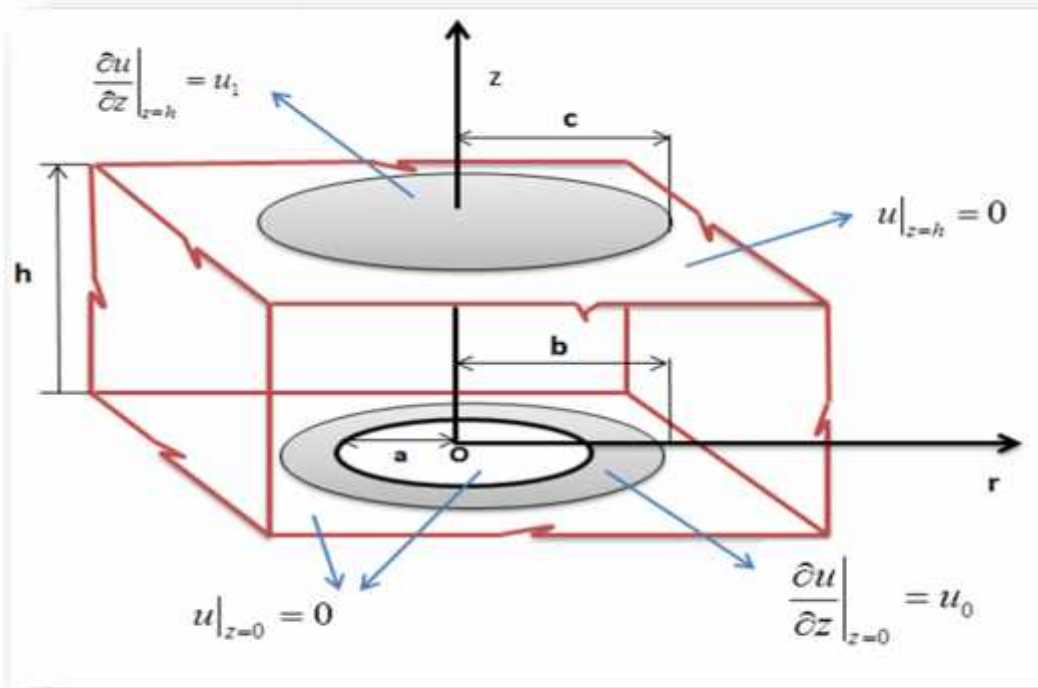
Cas2 : Flux / température/ flux



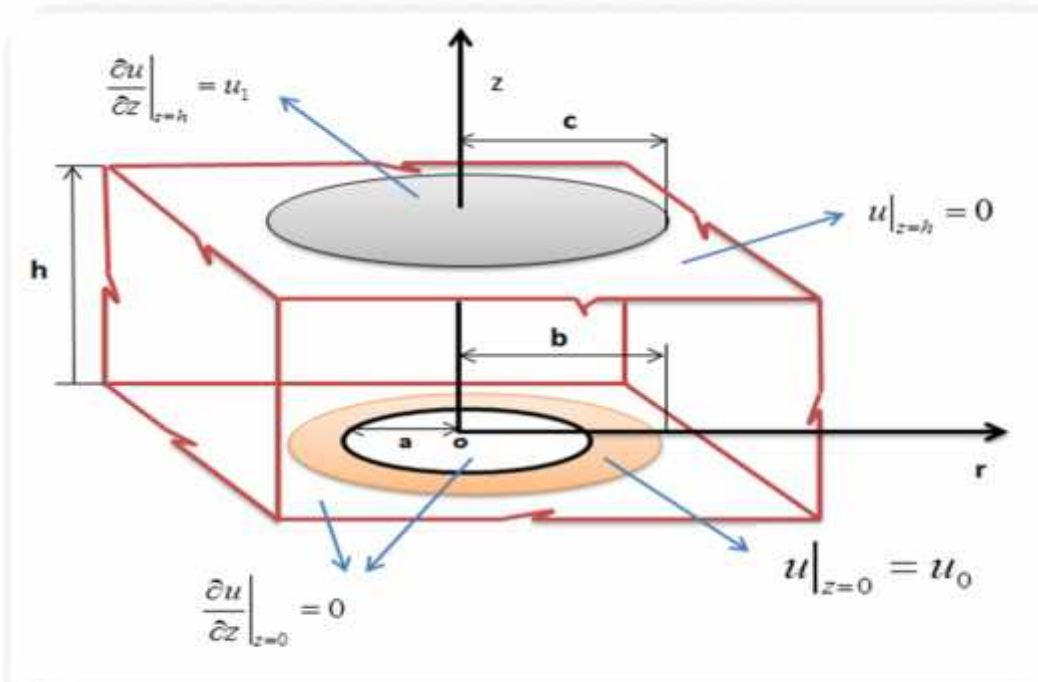
Conclusion générale et perspective

Problème 2: Les conditions maintenues sont celles de la surface $z=h$ du problème étudié dans le mémoire. Les conditions triplement mixte de la base sont alors de la forme : température / flux / température ou bien flux / température/ flux, cf. figures ci-après.

Cas1 : Température / flux / température



Cas2 : Flux / température/ flux



Références bibliographiques

- [1] R. S. Dhaliwal, *Mixed boundary value problem of heat conduction for infinite slab*, Appl. Sci. Res, Vol. 16, No 1, pp. 228-240, 1966.
- [2] R. S. Dhaliwal, *An axisymmetric mixed boundary value problem for a thick slab*, SIAM J. Appl. Math. Res, Vol. 15, No 1, pp. 98-106, 1967.
- [3] T. F. Lemczyk and M. M. Yovanovich, *Thermal constriction resistance with convective boundary conditions-1 Half-space contacts*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 31, No 9, pp. 1861-1872, 1988.
- [4] T. F. Lemczyk and M. M. Yovanovich, *Thermal constriction resistance with convective boundary conditions-2 layered half-space contacts*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 31, No. 9, pp. 1873-1883, 1988.
- [5] R. C. Mehta, and T. K. Bose, *Temperature distribution in a large circular plate heated by a disk heat source*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 26, No. 7, pp. 1093-1095, 1983.
- [6] M. Sakamoto, *An elastic layer with a penny-shaped crack subjected to internal pressure*, JSME Int. J. Ser. A, Vol. 46. No. 1, pp. 27-36, 2003.
- [7] M. Sakamoto, and K. Kobayashi, *The axisymmetric contact problem of an elastic layer subjected to a tensile stress applied over a circular region*, Theor. Appl. Mech. Japan. Vol. 53, pp. 27-36, 2004.
- [8] M. Sakamoto, and K. Kobayashi, *Axisymmetric indentation of an elastic layer on a rigid foundation with a circular hole*, WIT Trans. Engng. Sci. Vol. 49, pp. 279-286, 2005.
- [9] M. Sakamoto, and K. Kobayashi, *The axisymmetric contact problem of an elastic layer indented by a infinite rigid punch with a circular hole*, Theor. Appl. Mech. Jpn. Vol. 55, pp. 61-71, 2006.
- [10] N. N. Lebedev, and Ia. S Ufliand, *Axisymmetric contact problem for an elastic layer*, J. Appl. Math. And Mech, Vol. 22, No. 3, pp. 422-450, 1958.
- [11] R. S. Dhaliwal, *Axisymmetric contact problem for an elastic layer on a rigid foundation with a cylindrical hole*, Int. J. Engng. Sci. Vol. 15, pp. 421-428, 1977.
- [12] T. Hara, T. Akiyama, T. Shibuya and T. Koizumi, *An axisymmetric contact problem of an elastic layer on a rigid base with a cylindrical hole*, JSME International Journal, Series I, Vol. 33, No. 4, 1990.
- [13] V. N. Zakorko. *Axisymmetric strain of an elastic layer with a circular line of separation of the boundary condition on both faces*. PMM, Vol. 38, No. 1, pp 131-138, 1974
- [14] M. Rahman, *A note on the polynomail solution of a class of dual integral equations arising in mixed boundary value problems of elasticity*, Z. Angew. Math. Phys, Vol. 46, pp. 117-121, 1995.
- [15] I. S. Gradshteyn, and I. M. Ryzhik, *Tables of integrales series and products*, seventh edition, Academic Press, New York, 2007.

- [16] M. Parodi, Mathématiques appliquées à l'art de l'ingénieur, Société d'édition d'enseignement supérieur Sorbonne, Paris, Tome. 4, pp. 379, 1966.
- [17] R. Fortunier, Comportement mécanique des matériaux, *Ecole Nationale Supérieure des Mines*, Saint-Etienne cedex 2. <http://www.emse.fr/~fortunier/cours>.
- [18] H. D. BUI, Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux, *Eyrolles, Paris*, pp. 229, 1993.
- [19] J. Lemaitre, P. A. Boucard, F. Hild, Résistance mécanique des solides, *Dunod*, <http://www.eyrolles.com> >Science >Physique >Mécanique, 2002.
- [20] J. P. Mercier, G. Zambelli, W. Kurz, Introduction à la science des matériaux, *Presses Polytechniques et universitaires, ROMANDES*, pp. 500, 2002.
- [21] N. Moes, Mécanique des milieux continus, *Ecole centrale de Nantes*, http://www.chireux.fr/mp/cours/mecanique_milieux_continus.pdf.
- [22] J. F. Sacadura, Initiation aux transferts thermiques, *Paris*, pp. 439, 1980.
- [23] Y. Jannot, Transferts thermiques, *Masson*, pp. 158, 2005.
- [24] H. S. Carslaw, and J. C. Jaeger, Conduction of heat in solids, oxford, 1950.
- [25] D. G. Duffy, Mixed boundary value problem, Chapman Hall / CRC, pp. 688, 2007.
- [26] M. R. Spiegel, Analyse de Fourier, *ISBN, Paris*, pp. 195, 1980.
- [27] S. I. Hayek, Advanced mathematical methods in science and engineering, *Marcel Dekker, Inc., N. Y., Basel*, pp. 737, 2001.
- [28] B. R. Hetnarski, M. R. Eslami, Thermal stresses. Advanced theory and applications, Solid mechanics and its applications, *Springer*, Vol. 158, pp. 553, 2009.
- [29] R. M. Fee, Stress in the vicinity of a crack in a thick elastic plate, *Simon Fraser University*, <http://www.ir.lib.sfu.ca/bitstream/1892/4995/1/b13768396.pdf>, 1974.

Annexe 1

On trouvera dans le tableau A.1.2. Les valeurs de la conductivité thermique de certains matériaux parmi les plus courants.

Matériau	λ (W m ⁻¹ °C ⁻¹)	Matériau	λ (W m ⁻¹ °C ⁻¹)
Argent	419	Plâtre	0,48
Cuivre	386	Amiante	0,16
Aluminium	204	Coton	0,059
Acier doux	45	Liège	0,044-0,049
Acier inox	15	Laine de roche	0,038-0,041
Glace	1,88	Laine de verre	0,035-0,051
Béton	1,4	Polystyrène expansé	0,036-0,047
Bois (feuillu-résineux)	0,12-0,23	Polyuréthane (mousse)	0,030-0,045
Brique terre cuite	1,1	Polystyrène extrudé	0,027
Verre	0,78	Air	0,026

Tableau A.1.1. Valeurs de la conduction thermique .

Annexe 2

Tableau A.3.1 des valeurs de $J_0(x)$ et $J_1(x)$.

x_i	$J_0(x_i)$	$J_1(x_i)$
0	+ 1	0
1	+ 7652	+ 4401
2	+ 2239	+ 5767
2-406	0	+ 5191
3	- 2601	+ 3391
3-832	- 4028	0
4	- 3971	- 0660
5	- 1776	- 3276
5-520	0	- 3403
6	+ 1506	- 2767
7	+ 3001	- 0047
7-016	+ 3001	0
8	+ 1717	+ 2346
8-654	0	+ 2715
9	- 0903	+ 2453
10	- 2459	+ 0435
10-173	- 2497	0
11	- 1712	- 1768
11-792	0	- 3325
12	+ 0477	- 2234
13	+ 2060	- 0703
13-324	+ 2184	0
14	+ 1711	+ 1334
14-931	0	+ 2065

Tableau A.2.1. Les valeurs de $J_0(x)$ et $J_1(x)$.

Annexe. Calculs analytiques_ Programmes numériques

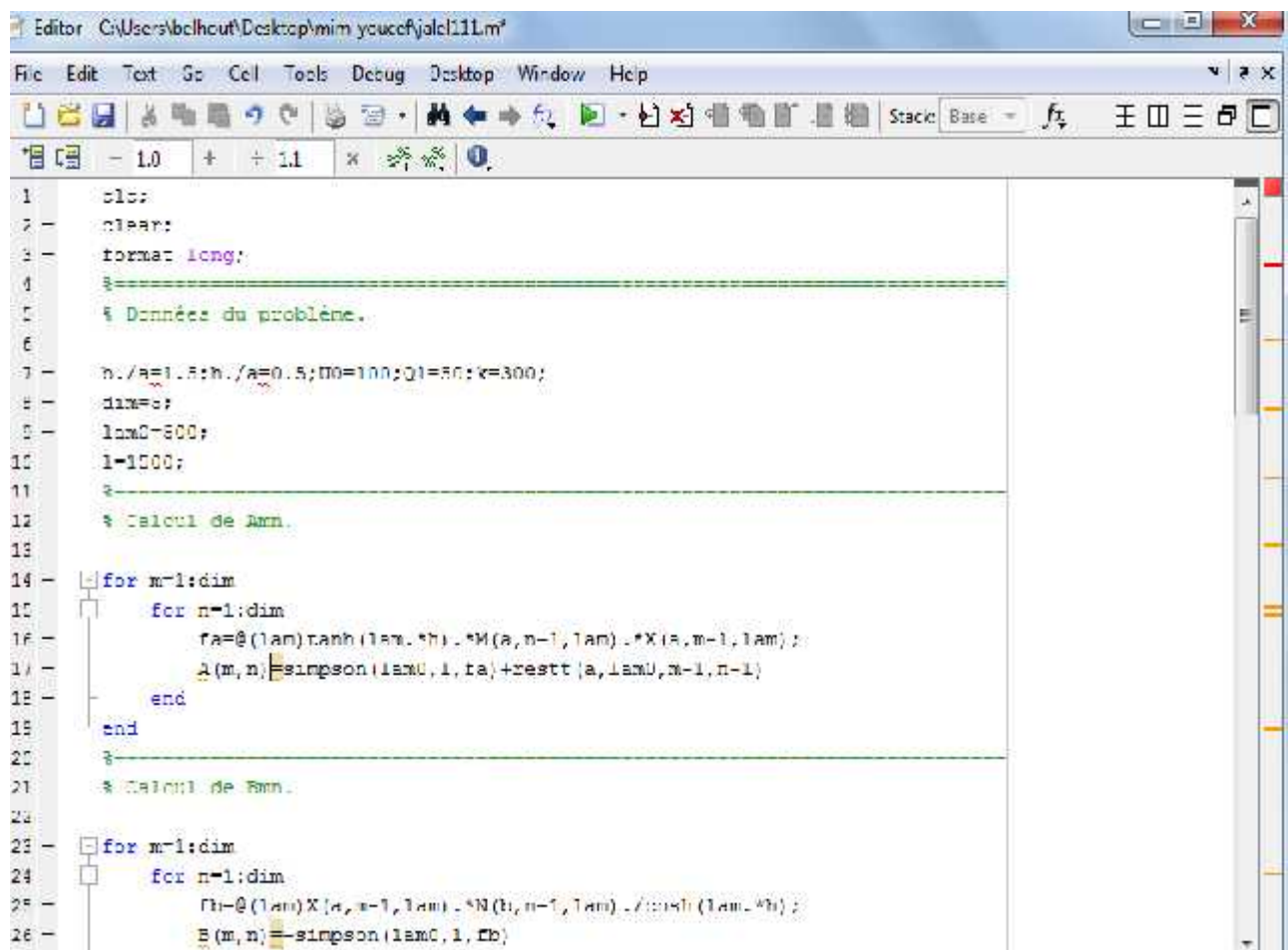
Le tableau suivant donne la liste des quelques première racines positives de $J_0(x)=0$.
Les racines de valeur élevée différent, approximativement de $\approx 3.145\dots$

	$J_0 = 0.$	$J_1 = 0.$	$J_2 = 0.$	$J_3 = 0.$	$J_4 = 0.$	$J_5 = 0.$
1	2.405	3.832	5.136	6.380	7.588	8.771
2	5.520	7.016	8.417	9.761	11.065	12.339
3	8.654	10.173	11.620	13.015	14.373	15.700
4	11.792	13.324	14.796	16.223	17.616	18.980
5	14.931	16.471	17.960	19.409	20.827	22.218

Tableau A.2.2. Zéros des fonctions de Bessel.

Annexe 3

I. Programme numérique « MATLAB »



```
Editor C:\Users\belhout\Desktop\mim youcefjalcl11Lm
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
Stack Base f
- 1.0 + + 1.1 x
1 clear;
2 format long;
3 %-----
4 % Données du problème.
5
6
7 n./a=1.5:n./a=0.5;N0=100;Q1=50;K=300;
8 dim=:
9 lam0=800;
10 l=1000;
11 %-----
12 % Calcul de Ann.
13
14 for m=1:dim
15     for n=1:dim
16         fa=@(lam) tanh(lam.*h) .*M(a,n-1,lam) .*X(a,m-1,lam);
17         A(m,n)=simpson(lam0,l,fa)+restt(a,lam0,m-1,n-1)
18     end
19 end
20 %-----
21 % Calcul de Bnn.
22
23 for m=1:dim
24     for n=1:dim
25         fb=@(lam) X(a,n-1,lam) .*N(b,n-1,lam) ./cosh(lam.*h);
26         B(m,n)=simpson(lam0,l,fb)
```

Annexe. Calculs analytiques_ Programmes numériques

```
clc;
clear;
format long;
%=====
% Données du problème.

b./a=1.5;h./a=0.5;U0=100;Q1=50;k=300;
dim=5;
lam0=500;
l=1500;
%=====
% Calcul de Amn.

for m=1:dim
    for n=1:dim
        fa=@(lam)tanh(lam.*h).*M(a,n-1,lam).*X(a,m-1,lam);
        A(m,n)=simpson(lam0,l,fa)+restt(a,lam0,m-1,n-1)
    end
end
%=====
% Calcul de Bmn.

for m=1:dim
    for n=1:dim
        fb=@(lam)X(a,m-1,lam).*N(b,n-1,lam)./cosh(lam.*h);
        B(m,n)=-simpson(lam0,l,fb)
    end
end
%=====
% Calcul de Cmn.

for m=1:dim
    for n=1:dim
        fc=@(lam)Y(b,m-1,lam).*M(a,n-1,lam)./cosh(lam.*h);
        C(m,n)=simpson(lam0,l,fc)
    end
end
%=====
% Calcul de Dmn.

for m=1:dim
    for n=1:dim
        fd=@(lam)Y(b,m-1,lam).*N(b,n-1,lam).*tanh(lam.*h);
        D(m,n)=simpson(lam0,l,fd)+rest(b,lam0,m-1,n-1)
    end
end
%=====
% Résolution du système algébrique.

d=[-U0;zeros(dim-1,1);Q1;zeros(dim-1,1)];
ab=[A B;C D]\d;
alpha=ab(1:dim)
beta=ab(dim+1:2.*dim)
```


Annexe. Calculs analytiques_ Programmes numériques

```
%===== Temperature =====

Vz=[0,0.5,1].*h;
for i=1:length(Vz)
    z=Vz(i);
    raf=2;
    for m=0:(40*raf)
        r=m./(10*raf);
        T=0;
        for n=1:length(beta)
            T=T+(beta(n).*(quadgk(@(lam
(cosh(lam.*z)./cosh(lam.*h)).*N(b,n1,lam).*Besselj(0,lam.*r),.000001,300))+..
+ alpha(n).*(quadgk(@(lam) (sinh(lam.*z).*M(a,n-1,lam)-
(cosh(lam.*z).*tanh(lam.*h)).*M(b,n-1,lam)).*Besselj(0,lam.*r),.000001,300 ))));
            Temp(m+1,i)=T
        end
    end
end
A=Temp(:,1);B=Temp(:,2);C=Temp(:,3);
i=0:(40*raf);
plot(i/(10*raf),A(i+1),i/(10*raf),B(i+1),'r',i/(10*raf),C(i+1),'g');

%===== Flux =====

Vz=[0.00001,.5,1].*h;
for i=1:length(Vz)
    z=Vz(i);
    raf=2;
    for m=0:(40*raf)
        r=m./(10*raf);
        q=0;
        for n=1:length(beta)
            q=q+(beta(n).*(quadgk(@(lam) lam.*(sinh(lam.*z)./cosh(lam.*h)).*
N(b,n-1,lam).*Besselj(0,lam.*r),.000001,300 ))+...
            alpha(n).*(quadgk(@(lam) lam.*(cosh(lam.*z).*M(a,n-1,lam)-
(sinh(lam.*z).*tanh(lam.*h)).*M(b,n-1,lam)).*Besselj(0,lam.*r),.000001,300 ))));
            flux(m+1,i)=-k.*q;
        end
    end
end
A=flux(:,1);B=flux(:,2);C=flux(:,3);
i=0:(40*raf);
plot(i/(10*raf),A(i+1),i/(10*raf),B(i+1),'r',i/(10*raf),C(i+1),'g');

===== Fin =====
```