

M0008/97A

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

Ecole Nationale Polytechnique  
Département de Génie Civil

# THESE



AMAR BOUZID DJILLALI

Ingénieur d'Etat de l'Ecole Nationale Polytechnique  
Pour l'obtention du titre de

# MAGISTER

En Génie Civil

Thème

**Analyse Semi-analytique par Eléments Finis des  
Pieux Isolés Sollicités Horizontalement dans un  
Milieu à Comportement Non-linéaire**

Soutenue Dimanche le 05 Octobre 1997, devant la commission d'examen composée de:

- |                      |                  |                       |                 |
|----------------------|------------------|-----------------------|-----------------|
| • <i>Président</i>   | Mr: A. Bali      | professeur            | E.N.P           |
| • <i>Rapporteurs</i> | Mr: B. Achour    | Maître de conférences | C.U. Mostaganem |
|                      | Mr: T. Messafer  | Maître de conférences | E.N.P           |
| • <i>Examineurs</i>  | Mr: S. Belkacemi | Maître de conférences | E.N.P           |
|                      | Mr: A. Bouafia   | Maître de conférences | U. Blida        |
|                      | Mr: M. Demidem   | Chargé de recherche   | E.N.P           |

Département de Génie Civil  
Ecole Nationale Polytechnique  
10, Avenue Hacén Badi - El Harrach - Alger

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## *Dédicace*

*A mes deux filles,*

**LINA ET ABIR**

*Djillali... E*



## REMERCIEMENTS

*Les travaux de recherches associés à cette étude numérique ont été effectués au centre de calcul de l'Ecole Nationale Polytechnique.*

*Je tiens tout d'abord à remercier tous les gens qui m'ont soutenu pendant la phase initiale de ce travail. Monsieur Y.Djebib m'a proposé le sujet et m'a encouragé à l'entamer, qu'il soit vivement remercié. Monsieur K.Kadri a accepté de m'encadrer malgré l'éloignement de l'université de Chlef où il exerçait, qu'il soit cordialement remercié. Je remercie également monsieur T.Messafer qui a pris la relève. Il m'a été d'une aide appréciable pendant les premières étapes de ce projet, je lui exprime mes sincères remerciements.*

*Le professeur A.Bali a bien voulu accepter la présidence de ce jury, qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.*

*Messieurs, M.Demidem et I.Belkacemi ont bien voulu accepter de participer à ce jury, qu'ils en soient profondément remerciés.*

*Je tiens à remercier tout particulièrement monsieur B.Achour qui a assuré la direction scientifique de ce travail pour son encouragement et ses conseils. Je lui exprime toute ma reconnaissance.*

*Que monsieur A.Bouafia trouve ici l'expression de ma sincère gratitude pour son enseignement, son sens pratique et le caractère constructif de ses remarques. Son aide efficace et ses précieux conseils pendant toute la durée de recherche m'ont permis la réalisation de ce travail.*

*Je remercie finalement tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail, particulièrement monsieur A.Moussa qui m'a aidé dans la frappe des nombreux brouillons de cet ouvrage.*

# sommaire

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

<b>Chapitre I: Introduction Générale</b> .....	1
<b>Chapitre II: Méthodes analytiques et numériques appliquées aux pieux isolés soumis à des sollicitations horizontales</b> .....	4
II.1- Introduction.....	5
II.2- Calcul des pieux aux petits déplacements.....	5
II.2.1- Méthodes utilisant les équations de M.M.C.....	6
II.2.1.a- Méthode de Poulos (1971a, 1973).....	7
II.2.1.b- Méthode de Banerjee et Davies (1978).....	9
II.2.1.c- Méthodes basées sur l'analyse par éléments finis.....	10
II.2.2- Méthodes basées sur l'approche de Winkler.....	16
II.2.2.a- Méthode de Reese, 1977.....	20
II.2.2.b- Méthode des laboratoires des Ponts et chaussées (Baguelin, Frank et Guegan, 1976; Frank, 1981).....	21
II.2.2.c- Méthode de Bowles, 1972.....	22
II.3- Méthodes de calcul des pieux à la rupture.....	23
II.3.a- Méthode de Brinch-Hansen (1961).....	25
II.3.b- Méthode de Menard (1962).....	26
II.3.c- Méthode de Broms (1964 a et b).....	27
II.4- Avis sur l'applicabilité des méthodes, critiques et conclusions.....	28
<b>Chapitre III: Présentation de la méthode numérique utilisée: Approche semi-analytique</b> .....	31
III.1- Introduction.....	32
III.2- Expression des sollicitations et du champ de déplacements en termes de série de Fourier.....	33
III.3- Formulation matricielle.....	38
III.3.1- Choix de l'élément fini.....	38
III.3.2- Description de l'élément isoparamétrique à symétrie axiale.....	38
III.3.3- Matrice de rigidité élémentaire dans les problèmes axisymétriques à chargement quelconque:.....	39
III.4- Conclusions.....	41
<b>Chapitre IV: Etude des pieux isolés sollicités en flexion en élasticité linéaire</b> .....	42
IV.1- Introduction.....	43
IV.2- Hypothèses.....	43
IV.3- Interprétation du chargement extérieur en termes de charges distribuées sur la circonférence.....	44
IV.3.1- Cas d'une force $H_0$ , appliquée en tête de pieu.....	44
IV.3.2- Cas d'un moment $M_0$ appliqué en tête du pieu.....	46
IV.4- Modèle d'éléments finis utilisé.....	47
IV.5- Evaluation des contraintes.....	47
IV.6- Calcul des éléments de réduction à partir des contraintes sur le pieu.....	51
IV.6.1- Calcul des Moments fléchissants.....	51
IV.6.1.a- Calcul à partir de $\sigma_z$ .....	51

IV.6.1.b- Calcul à partir de $P(z)$ et de $\tau_{rz}$ .....	52
IV.6.2- Calcul des efforts tranchants.....	52
IV.6.2.a- Calcul à partir des contraintes tangentielles $\tau_{rz}$ et $\tau_{z\theta}$ .....	53
IV.6.2.b- Calcul à partir de la réaction du sol $P(z)$ .....	53
IV.6.3- Calcul de la réaction du sol.....	54
IV.7- Description du programme numérique mis au point pour l'étude des pieux chargés horizontalement, en élasticité linéaire et isotrope.....	55
IV.7.1- Formation de la matrice de rigidité globale et résolution du système linéaire.....	58
IV.7.2- Evaluation des contraintes et des éléments de réduction.....	60
IV.8- Validation du code ELASPULL.....	60
IV.8.1- Comparaison avec une poutre cantilever sollicitée en flexion.....	60
IV.8.2- Comparaison des résultats d'un pieu sollicité horizontalement avec d'autres méthodes.....	63
IV.8.3- Etude du problème sol-pieu au niveau d'une tranche mince en déformation plane.....	70
IV.9- Conclusions.....	75
<b>Chapitre V: Etude paramétrique</b> .....	76
V.1- Introduction.....	77
V.2- Définition d'un sol non-homogène.....	77
V.3- Analyse dimensionnelle.....	79
V.4- Etude paramétrique.....	81
V.4.1- Effet de la rigidité relative sur le comportement du pieu.....	81
V.4.1.a- Cas d'un sol homogène.....	81
V.4.1.b- Cas d'un sol non-homogène.....	89
V.4.2- Effet de l'élançement sur le comportement du pieu.....	95
V.4.2.a- Cas d'un sol homogène.....	95
V.4.2.b- Cas d'un sol non-homogène.....	98
V.5- Etablissement de quelques relations analytiques.....	101
V.5.1- Estimation de l'élançement critique.....	101
V.5.2- Pieux souples.....	102
V.6- Confrontation des résultats numériques aux résultats d'un essai expérimental en vraie grandeur: Essai de Mclelland et Focht (1956).....	112
<b>Chapitre VI: Rappel des éléments fondamentaux de la théorie de l'élasto-plasticité</b> .....	114
VI.1- Introduction.....	115
VI.2- Eléments fondamentaux de la théorie incrementale de plasticité.....	115
VI.2.1- Equations différentielles décrivant le comportement.....	115
VI.2.2- Notion de surface de charge ou critère de plasticité.....	116
VI.2.3- Notion de règle d'écoulement.....	118
VI.2.4- Règles d'écrouissage.....	119
VI.3- Relations incrémentales pour un seul mécanisme plastique à écrouissage isotrope.....	120
VI.4- Conclusion.....	122
<b>Chapitre VII: Extension de l'approche semi-analytique à l'étude élasto-plastique des pieux sous charges horizontales</b> .....	123
VII.1- Introduction.....	124
VII.2- Choix et justification du modèle de sol.....	124
VII.3- Implémentation du modèle de Drucker-Prager.....	127
VII.3.1- Généralités.....	127

VII.3.2- Détermination du facteur r.....	128
VII.3.3- Schéma d'intégration numérique.....	128
VII.4- Analyse harmonique en élasto-plasticité.....	130
VII.4.1- Introduction.....	130
VII.4.2- Calcul des contraintes et vérification du critère de plasticité aux positions angulaires prédéterminées.....	130
VII.4.3- Developpement des incréments des déformations plastiques en séries de Fourier.....	131
VII.4.4- Algorithme de résolution des équations d'équilibre et description du code PLASPULL.....	133
VII.5- Application du programme PLASPULL.....	140
VII.5.1- Estimation de la réaction ultime d'un segment de pieu circulaire chargé latéralement dans un sol cohérent.....	141
<b>Chapitre VIII: Conclusion générale.....</b>	<b>144</b>
VIII.1-Résumé et conclusions.....	144
VIII.2- Recommandations pour de futures recherches.....	146
<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>147</b>
<b>Annexe1.....</b>	<b>158</b>
<b>Annexe2.....</b>	<b>162</b>

# Chapitre I:

## Introduction Générale

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

L'utilisation des pieux est l'une des méthodes les plus anciennes à qui l'homme a eu recours pour un projet de fondations. Dans les sols de mauvaises caractéristiques, les fondations sur pieux étaient les solutions traditionnelles pour maintenir les constructions, mais malheureusement leur utilisation empirique a souvent entraîné le bris des pieux. Ces résultats désastreux sont dus à une méconnaissance grave du problème.

Le problème des pieux est celui de l'interaction sol-fondation, et son traitement n'est pas toujours une chose aisée. Evidemment, toute structure transmet au terrain adjacent des efforts considérables. Alors que le comportement de la superstructure peut être prédit avec une bonne précision, le mécanisme de transfert des efforts au sol est encore loin d'être maîtrisé. L'hypothèse d'un sol élastique, isotrope et linéaire n'est qu'une hypothèse simpliste, elle n'est pas réaliste pour la plupart des sols. En fait, ni les contraintes et les déformations sont linéairement reliés, ni les déformations sont complètement réversibles quand il y a réduction des contraintes. L'examen des résultats d'analyse linéaire de certains problèmes d'interaction sol-structure ( pieux chargés latéralement par exemple ) révèle que de très fortes pressions peuvent se développer en surface, et qui ne peuvent être reprises par le sol en pratique. Alors la validité d'une telle analyse en ce qui concerne les déformations dans ce problème géotechnique peut être remise en question, particulièrement si les pieux sont très flexibles. Cependant, on peut dire au moins pour de très faibles déformations, la linéarité des relations contraintes-déformations est une bonne approximation du comportement du sol. L'adoption de la théorie élastique linéaire est tout de même convenable, et doit donner des résultats satisfaisants pour les problèmes pratiques d'ingénieurs, pourvu que les " constantes " élastiques soient convenablement choisies, et que la sollicitation des fondations soit faible.

L'étude de l'interaction sol-pieu présente donc deux genres de difficultés : en premier lieu, le comportement du sol est très complexe, et les modélisateurs ne sont pas encore arrivés à concevoir un modèle parfait. En second lieu, les procédures numériques effectives appliquées à la résolution des problèmes des milieux continus tridimensionnels n'ont pas encore atteint leur niveau

de perfection. Néanmoins, la technologie moderne des ordinateurs a mis à la disposition des mécaniciens de sols en général, et ceux spécialisés en pathologie des fondations, des méthodes très puissantes de calcul.

En théorie, les deux techniques numériques principales sont la méthode des éléments finis, qui a connu un essor considérable depuis plus d'une trentaine d'années, et la méthode des équations intégrales qui ne cesse de se développer à son tour au fil des années. Leur efficacité dépend essentiellement de la qualité de modélisation du problème et de la puissance et la performance des outils de calcul utilisés.

Les pieux des ouvrages terrestres ( ou de l'on-shore ) sont soumis simultanément à des efforts verticaux et latéraux d'origines très diverses. Outre les efforts apportés par la superstructure, les pieux peuvent être sollicités en flexion causée par l'application d'un moment, ou par l'excentricité des efforts axiaux. Les pieux des ouvrages fondés sur sol mou, sont non seulement soumis aux efforts résultant de la superstructure et du frottement négatif mais encore à ceux résultant des déplacements horizontaux des couches qu'ils traversent. Cette situation est rencontrée en particulier dans le cas des ponts et installations grutières établies sur pieux (le lecteur pourra se référer à la thèse de Marche, 1974 ).

En général, les pieux de ces ouvrages sont dimensionné principalement pour les efforts verticaux et le calcul de la résistance latérale est essentiellement un complément permettant d'adapter ces pieux à reprendre les moments fléchissants et à vérifier le déplacement latéral sous la charge appliquée.

Avec l'augmentation de la demande sur les sources d'énergie, l'activité d'exploration et d'extraction du pétrole s'est énormément développée. La recherche de cet élément vital en sites aquatiques ne concerne plus les zones côtières uniquement mais s'est orientée vers les grandes profondeurs où des centaines de plates-formes d'extraction du pétrole fondées sur pieux sont construites de nos jours (Ingénierie de l'off-shore ). Ces ouvrages maritimes sont extrêmement sollicités ( efforts dus au vent, à la houle, aux tremblements de terre, etc.). La majorité des recherches actuelles sur le comportement des pieux, dans les pays où l'activité de la recherche du pétrole en milieux maritimes est intense, se font dans le cadre d'améliorer les performances des pieux supportant les plates-formes (Barton, 1982; Kooijman, 1989; et Chaudhry, 1994 ).

Pour les ouvrages portuaires type appontements et ducs d'Albe, il n'y a pas de charge verticale et c'est le critère de la résistance à la flexion qui doit être le premier pris en compte pour la conception et le dimensionnement des pieux.

Cette thèse est destinée à l'étude des pieux isolés soumis aux sollicitations horizontales monotones, en utilisant l'approche semi-analytique de la méthode des éléments finis. En d'autres termes, le milieu tridimensionnel du problème sol-pieu est analysé numériquement par la technique des éléments finis dans son plan radial, et analytiquement par les séries de Fourier dans la direction circonférentielle.

Les effets d'installation des pieux et du temps débordent du cadre de cette thèse. Le lecteur intéressé pourra se référer à l'excellent ouvrage de ( Poulos et Davis, 1980 ). On y trouvera une description détaillée des fondations sur pieux.

La structure de cette thèse comporte huit chapitres. Le second chapitre est une synthèse bibliographique regroupant toutes les méthodes numériques et analytiques reportées dans la littérature des pieux sollicités horizontalement. Un avis de l'applicabilité de ces méthodes est donné à la fin de ce chapitre. Le troisième, le quatrième et le cinquième chapitres constituent en fait l'approche semi-analytique et son application à un pieu soumis aux efforts de flexion en élasticité linéaire et isotrope. Le chapitre 3 est consacré à la description de l'approche semi-analytique utilisée dans la méthode des éléments finis pour traiter les problèmes à géométrie de révolution et à chargement quelconque. Le chapitre 4 est l'application de la technique ainsi décrite aux pieux circulaires soumis aux efforts de flexion. Dans ce chapitre un code de calcul est développé dont l'organigramme de sa structure est présenté et commenté. Les résultats numériques de ce code sont comparés avec les résultats exactes de la résistance des matériaux et de la mécanique des milieux continus, ainsi qu'avec ceux d'autres méthodes numériques, telles que les méthodes des équations intégrales, et de la théorie du module de réaction. On effectue ensuite dans le chapitre 5 une étude paramétrique permettant de mettre en relief quelques paramètres qui ont de l'influence sur le comportement des pieux chargés latéralement, notamment l'effet de la rigidité relative du système sol-pieu et de l'élanement sur le comportement latéral du pieu. Des expressions analytiques des éléments servant au dimensionnement des pieux dans les applications routinières sont obtenus par lissage des résultats de l'analyse par éléments finis. Ces expressions données sous formes algébriques très simples, permettent d'avoir une information complète sur le pieu envisagé. Ce chapitre se termine par une confrontation des résultats numériques aux résultats d'un cas expérimental réel.

On donne dans le chapitre 6 les expressions fondamentales de la théorie de l'élasto-plasticité. Le modèle élastique linéaire, décrit dans les chapitres 3 et 4 est étendu à couvrir un modèle élasto-plastique, ceci fait l'objet du chapitre 7. On discute dans ce chapitre le modèle de comportement du sol retenu pour l'étude élasto-plastique des pieux sollicités latéralement. Un second code de calcul est développé, et décrit dans ce chapitre et validé par des résultats exactes. Le chapitre 8 est réservé à la conclusion et aux recommandations.

## Chapitre II:

# Méthodes analytiques et numériques appliquées aux pieux isolés soumis à des sollicitations horizontales

### Résumé:

*Ce chapitre constitue une synthèse bibliographique des méthodes numériques et analytiques appliquées aux pieux sollicités en flexion.*

*Les méthodes de calcul des pieux se regroupent en deux grandes classes: la première est celle des méthodes en déformation ou aux petits déplacements, la seconde est celle des méthodes de calcul à la rupture. Les méthodes en déformation se classent également en deux groupes selon la façon de tenir compte ou non de la nature continue du sol.*

*Après une brève introduction, on entame les méthodes utilisant les équations des milieux continus; puis les méthodes de l'approche de Winkler.*

*On décrit par la suite, les méthodes de calcul à la rupture, et on fini le chapitre par quelques avis sur l'applicabilité des méthodes décrites.*

## II.1- Introduction

Le calcul des déplacements et des efforts dans les pieux sous chargement latéral est une phase essentielle dans leur dimensionnement, c'est ainsi que plusieurs méthodes de calcul ont été développées pour répondre à ce problème. Néanmoins, toutes ces méthodes nécessitent des paramètres de déformation du sol, estimés à partir d'essais de laboratoire ou in-situ ou par des approches purement empiriques.

La disponibilité des ordinateurs sophistiqués, ces deux dernières décennies a permis le développement quasi-illimité des méthodes numériques, mais l'estimation des paramètres de déformation ménage encore pour l'instant un domaine de recherche très large.

L'estimation de la déformation latérale des pieux sollicités en flexion est particulièrement complexe, ceci le prouve l'abondance des études et des articles présentés sur le comportement des pieux soumis à des forces horizontales, ce qui montre ainsi que nos connaissances sont encore très imparfaites sur ce sujet.

Les méthodes de calcul peuvent être mises en deux grandes classes: la première est celle des méthodes de calcul des pieux aux petits déplacements, la seconde est celle des méthodes de calcul à la rupture ou à la limite.

Le but de ce chapitre est de faire une synthèse bibliographique de toutes les méthodes numériques et analytiques appliquées aux pieux soumis aux efforts de renversement.

## II.2- Calcul des pieux aux petits déplacements

Les méthodes de calcul des pieux aux petits déplacements se nomment également méthodes en déformation, elles se subdivisent elles-mêmes en deux familles suivant que l'on considère le sol comme un milieu continu ou comme un empilement de tranches au comportement indépendant d'une tranche à l'autre:

### - Méthodes utilisant les équations de la mécanique des milieux continus

la théorie à partir de laquelle ces méthodes ont été développées est basée sur l'étude de la distribution des contraintes et des déplacements dans un milieu modélisé, comme étant un continuum isotrope élastique linéaire, non-linéaire ou élasto-plastique.

### - Méthodes basées sur l'approche de Winkler

Le modèle sur lequel repose ces méthodes introduit la notion du module de réaction, et assimile la résistance du sol à une série de ressorts rapprochés et indépendants. Le concept d'une poutre reposant sur une série de ressorts a été mis en évidence par Winkler (1867), puis il a été largement développé pour modéliser le sol supportant les fondations.

#### II.2.1- Méthodes utilisant les équations de M.M.C.

Une description détaillée de toutes les méthodes se basant sur les équations de la mécanique des milieux continus, avec toutes les variantes élastique linéaire, élastique non linéaire, ou élasto-plastique, dépasse le cadre de cette thèse. on se contentera donc de citer les noms de quelques auteurs qui ont effectué des travaux dans ce domaine:

- Spillers et Stoll (1964),
- Douglas et Davis (1964),
- Lenci, Maurice et Madignier (1968),
- Poulos (1971a , 1973); Poulos et Davis (1980),
- Meissner (1976),
- Baguelin, Frank et Said (1977),
- Randolph (1977 , 1981),
- Banerjee et Davies (1978); Davies (1979),
- Kuhlemeyer (1979),
- Baguelin, Trezos et Frank (1979),
- Faruque et Desai (1982),
- Barton (1982),
- Budhu et Davies (1987 , 1988); Davies et Budhu (1986),
- Kooijman et Vermeer (1988); Verruijt et Kooijman (1989); Kooijman (1989),
- Lewis et Gonzalez (1989),
- Trochanis, Bielak et Christiano (1991),
- Chen et Poulos (1993),
- Anjum Rashid Chaudhry (1994),

Ces études reposent essentiellement soit sur la résolution des équations intégrales qui utilisent les solutions d'une force ponctuelle agissant à l'intérieur d'un milieu semi-infini, soit sur la méthode des éléments finis. On se limitera à exposer quelques méthodes courantes notamment:

- 1- La méthode de Poulos (1971a, 1973),
- 2- La méthode de Banerjee et Davies (1978),
- 3- Approches basées sur la méthode des éléments finis:
  - L'étude présentée par Randolph (1977, 1981).
  - Méthode de Kooijman (1989)

### II.2.1.a- Méthode de Poulos (1971a, 1973)

Poulos (1971a, 1973) a proposé une méthode basée sur l'interaction entre le pieu et le continuum élastique utilisant les équations de Mindlin (1936), donnant contraintes et déplacements en un point quelconque du massif, sous l'effet d'une force verticale ou horizontale appliquée en dessous de la surface horizontale d'un milieu semi-indéfini. Le pieu dans la méthode de Poulos est assimilé à une plaque mince de rigidité à la flexion égale à celle du pieu. L'auteur a étudié deux cas où:

- Le module du sol est constant avec la profondeur,
- Le module du sol varie linéairement avec la profondeur à partir de zéro en surface.

Il a donné pour ces deux cas des abaques applicables aux pieux libres en tête ou encastres qui permettent de déterminer la relation déplacements et pentes au niveau du sol ainsi que le moment maximum en fonction des efforts de flexion appliqués.

Pour le cas d'un module d'élasticité constant  $E_s$  avec la profondeur, le déplacement horizontal en tête, et la rotation en tête du pieu s'expriment alors par les équations:

$$u_0 = I_{UH_0} \left( \frac{H_0}{E_s h} \right) + I_{UM_0} \left( \frac{M_0}{E_s h^2} \right) \quad (2.1)$$

$$\theta_0 = I_{\theta H_0} \left( \frac{H_0}{E_s h^2} \right) + I_{\theta M_0} \left( \frac{M_0}{E_s h^3} \right) \quad (2.2)$$

Expressions dans lesquelles:

- $H_0$  est l'effort horizontal appliqué en tête du pieu.
- $M_0$  est le moment appliqué en tête du pieu.
- $E_s$  est le module d'Young du sol.

$I_{UHO}$ ,  $I_{UMO}$ ,  $I_{\theta HO}$  et  $I_{\theta MO}$  sont des facteurs d'influence, fonction de l'élanement  $h/D$  (longueur de fiche / Diamètre) et d'un facteur adimensionnel caractérisant la flexibilité du pieu:

$$K_r = \frac{E_p I_p}{E h^4} \text{ où } E_p I_p \text{ est la rigidité du pieu à la flexion.}$$

Les résultats sont présentés sous forme d'abaques (Poulos, 1971a; Poulos et Davis, 1980). Pour le second cas où le module d'élasticité varie linéairement avec la profondeur, Poulos (1973) a suggéré que la méthode concernant l'analyse homogène peut être étendue à traiter un cas non-homogène par simple modification des résultats de Mindlin qui ont été acquis pour un module constant. En effet, cette modification a été faite sous l'hypothèse que les rapports des déplacements aux points identiques d'un milieu homogène et un milieu non homogène dus à une force ponctuelle sont inversement proportionnels aux modules élastiques respectifs en ces points. Des équations similaires aux équations (2.1) et (2.2) ont été proposées et dans lesquelles le module de sol est remplacé par son taux de variation avec la profondeur  $N_h$ :

$$u_0 = I'_{uH_0} \left( \frac{H_0}{N_h h^2} \right) + I'_{uM_0} \left( \frac{M_0}{N_h h^3} \right) \quad (2.3)$$

$$\theta_0 = I'_{\theta H_0} \left( \frac{H_0}{N_h h^3} \right) + I'_{\theta M_0} \left( \frac{M_0}{N_h h^4} \right) \quad (2.4)$$

Les facteurs d'influence dans ces équations sont également fonctions de l'élanement, et du facteur de flexibilité pour ce cas:  $K_N = \frac{E_p I_p}{N_h h^5}$ . Un jeu d'abaques a été proposé également pour ce cas.

Par ailleurs, pour les pieux flexibles ( $K_r < 10^{-5}$ ) et les pieux rigides ( $K_r > 10^{-2}$ ), Poulos (1987) a donné des relations explicites linéaires et sous certaines conditions non linéaires, qui permettent de déterminer le déplacement en tête en fonction de la charge horizontale appliquée.

L'étude élastique linéaire décrite ci-dessus a été étendue pour tenir compte de l'effet de plastification du sol à proximité du tête de pieu par application de coefficients correcteurs fonction de la charge ultime  $H_u$  (Poulos 1973, Poulos et Davis 1980). Ceci nécessite l'introduction de contraintes limites proposées par Broms (1964a, 1964b) pour les sols cohérents et pulvérulents. Les déflexions et les rotations seront alors divisées respectivement par des facteurs de rupture  $F_u, F_\theta, F'_u$  et  $F'_\theta$ . Ces facteurs de rupture sont obtenus à partir d'abaques en fonction d'un paramètre

$\frac{H_0}{H_u}$  où  $H_0$  est l'effort appliqué et  $H_u$  l'effort ultime. Un code informatique dénommé **PULL2B** (Poulos, 1989) a été écrit par Poulos. Ce programme traite le cas des sols élastiques homogènes et non homogènes, ainsi que la non-linéarité par simple spécification des pressions limites. On utilisera **PULL2B** pour la validation du code d'éléments finis mis au point au chapitre IV.

### II.2.1.b- Méthode de Banerjee et Davies (1978)

Bien que la méthode des équations intégrales de Poulos revêt d'un intérêt très important à cause de sa simplicité, ces résultats restent moins réalistes du moins pour les sols de forte hétérogénéité. En plus, se contenter de remplacer  $E_s$  par  $E_s(z)$  dans les équations analytiques de Mindlin, manque évidemment de rigueur. Cependant, Banerjee et Davies (1978) ont proposé une méthode plus rationnelle dans le traitement des profils non homogènes et plus rigoureuse que la méthode précédente. En effet, la méthode proposée repose même sur les équations de la mécanique des milieux continus modifiées par (Chan, Karasudhi et Lee, 1974) pour un milieu formé de deux couches dont la couche profonde est d'une épaisseur infinie. Banarjee et Davies ont intégré et appliqué numériquement ces résultats à un pieu fiché dans un sol dont le module d'élasticité varie selon la loi suivante:  $E_s(z) = E_s(0) + m.z$ . Expression dans laquelle  $E_s(0)$  représente le module en surface, et  $m$  le taux de variation de la rigidité du sol avec la profondeur. Un algorithme approximatif a été formulé, en utilisant les expressions des déplacements dus à un effort agissant sur la surface du bi-couche élastique semi-indéfini.

Les auteurs ont proposé des équations analogues aux équations (2.1) et (2.2) issues de l'analyse de Poulos, donnant les déflexions et les rotations en tête du pieu. Pour revêtir ces équations d'une certaine généralité d'application, le module d'élasticité retenu est celui qui correspond à la pointe du pieu:  $E_s(h)$ . Les auteurs ont présenté les facteurs d'influence sous forme d'abaques en fonction de deux paramètres:

- La rigidité relative  $K_r$ , qui n'est autre que le facteur de flexibilité proposé par Poulos mais avec un module d'Young évalué en pointe du pieu.

- L'indice d'homogénéité: 
$$\chi = \frac{E_s(0)}{E_s(h)}$$

Selon les auteurs, le facteur de flexibilité  $K_r$ , a un effet dominant sur le déplacement latéral du pieu. Par contre l'élanement s'est avéré peu influant, La raison pour laquelle tous les calculs

ont été effectués sur un pieu d'élanement  $\frac{h}{D} = 20$ ; et les résultats sont supposés valables aux élanements allant jusqu'à 60.

### II.2.1.c- Méthodes basées sur l'analyse par éléments finis

La méthode des éléments finis constitue un outil de travail puissant et efficace qui permet de traiter les problèmes de géotechnique les plus complexes. En effet, le développement des méthodes de calcul numérique et notamment la méthode des éléments finis a permis au cours des vingt dernières années, un essor remarquable de calcul des ouvrages en déformation avec des modèles rhéologiques variés, pour des géométries et des conditions aux limites quelconques. Cependant, les problèmes tridimensionnels qui font intervenir un nombre important d'équations algébriques à résoudre ne seront jamais maîtrisés sans la disponibilité des ordinateurs sophistiqués de nos jours.

Le problème des pieux circulaires soumis à des sollicitations horizontales constitue en réalité un problème de symétrie axiale de révolution et un chargement non-symétrique. De ce fait, la distribution des chargements et par conséquent les déplacements peuvent être alors mis sous forme de séries de Fourier (Wilson, 1965; Zienkiewicz, 1977). Parmi les auteurs qui ont empruntés la voie de cette approche semi-analytique, on cite Meissner (1976), Randolph (1977, 1981); Kuhlemeyer (1979); Baguelin, Trezos et Frank (1979), Barton (1982) et Kay et al. (1986).

Une autre catégorie d'auteurs ont pensé qu'il était plus judicieux de considérer le problème des pieux chargés latéralement comme étant un problème de déformation plane. Parmi ces auteurs on cite Baguelin, Frank et Said (1977), qui ont étudiés le problème au niveau d'une tranche du complexe sol-pieu, en considérant un milieu élasto-plastique obeissant au critère de Tresca.

Plus récemment Chaudhry (1994) a approximé le problème des pieux à un disque rigide déplacé latéralement dans un milieu élastique parfaitement plastique. Les résultats ont été obtenus en utilisant le code OXFEM (Développé par le groupe de génie civil, université d'Oxford). Par ailleurs, Verruijt et Kooijman (1989), Kooijman (1989) ont traité le sol comme un multicouche, où les efforts que subissent les éléments du pieu dans chaque couche produisent principalement des déformations horizontales; en d'autres termes le problème est considéré comme étant un problème de contraintes planes, où l'interaction entre les différentes couches est prise en compte. Ces auteurs ont opté pour une méthode hybride composée d'éléments finis et de différences finies.

D'autres chercheurs ont opté pour une étude tridimensionnelle effective du problème sol-pieu. Parmi ces auteurs on cite Desai et Appel (1976), Faruque et Desai (1982); Trochanis, Bielak

et Christiano (1988), Lewis et Gonzalez (1989) et Brown et Shie (1990). Etant donné l'énormité du problème et sachant l'effort considérable de calcul que nécessite un problème tridimensionnel non linéaire, ces auteurs utilisent généralement des codes généraux, tel que le progiciel **ABAQUS** (Hibbit, Karlsson, et Sorensen, inc., 1987). L'exposé concernant les méthodes utilisant l'analyse par éléments finis, se limite aux travaux de Randolph (1977, 1981), et de Kooijman (1989).

### - Méthode de Randolph (1977, 1981)

La formulation de Randolph, qui repose sur l'approche semi-analytique est similaire à celle de Kuhlmeier (1979a) sauf que le sol est discrétisé en éléments triangulaires à déformation linéaire pour éviter le recours à la technique de l'intégration sélective décrite par Kuhlmeier (1979b) lors de l'utilisation des éléments rectangulaires à 4 noeuds.

Randolph a effectué un nombre important d'analyses pour un massif semi-infini élastique, isotrope et homogène caractérisé par un module de cisaillement  $G$  constant, et pour un massif non-homogène caractérisé par une rigidité variant linéairement avec la profondeur:  $G = m.z$  où  $m$  est le taux d'accroissement du module de cisaillement avec la profondeur.

Randolph a fait une étude paramétrique, dont les résultats de calcul ont été présentés sous forme d'expressions analytiques approchées pour les mouvements et les moments fléchissants.

Ces expressions dépendent essentiellement d'un paramètre appelé "longueur critique" à partir de laquelle toute augmentation dans la longueur de fiche du pieu n'altère pas le comportement en tête du pieu. Les longueurs critiques pour les deux cas extrêmes du sol sont:

$$\text{- Pour un sol homogène: } h_c = 2r_0 \left( \frac{E_p}{G^*} \right)^{\frac{2}{9}} \quad (2.5)$$

$$\text{- Pour un sol non-homogène: } h_c = 2r_0 \left( \frac{E_p}{m^* r_0} \right)^{\frac{2}{9}} \quad (2.6)$$

Expressions dans lesquelles

$$G^* = G \left( 1 + \frac{3\nu}{4} \right), \quad m^* = m \left( 1 + \frac{3\nu}{4} \right) \text{ et } r_0: \text{ rayon du pieu.}$$

Pour les pieux fichés dans un sol homogène, les expressions de Randolph pour le déplacement et la rotation en tête du pieu sont:

$$u_0 = 0.25 \frac{H_0}{G^* r_0} \left( \frac{E_p}{G^*} \right)^{\frac{1}{7}} + 0.27 \frac{M_0}{G^* r_0^2} \left( \frac{E_p}{G^*} \right)^{\frac{3}{7}} \quad (2.7)$$

$$\theta_0 = 0.27 \frac{H_0}{G^* r_0^2} \left( \frac{E_p}{G^*} \right)^{\frac{3}{7}} + 0.8 \frac{M_0}{G^* r_0^3} \left( \frac{E_p}{G^*} \right)^{\frac{5}{7}} \quad (2.8)$$

Notons que les constantes dans ces deux équations sont légèrement inférieures à celles proposées par l'auteur dans sa thèse de Ph.D (Randolph, 1977).

Pour les pieux fichés dans un sol non-homogène (de Gibson), Randolph donne le déplacement et la rotation en tête par:

$$u_0 = 0.54 \frac{H_0}{m^* r_0^2} \left( \frac{E_p}{m^* r_0} \right)^{\frac{3}{9}} + 0.60 \frac{M_0}{m^* r_0^3} \left( \frac{E_p}{m^* r_0} \right)^{\frac{5}{9}} \quad (2.9)$$

$$\theta_0 = 0.60 \frac{H_0}{m^* r_0^3} \left( \frac{E_p}{m^* r_0} \right)^{\frac{5}{9}} + 1.13 \frac{M_0}{m^* r_0^4} \left( \frac{E_p}{m^* r_0} \right)^{\frac{7}{9}} \quad (2.10)$$

Dans certaines circonstances, particulièrement dans les sols cohérents, ou multicouches, la rigidité peut être classée entre celle d'un sol homogène et celle d'un sol de Gibson. Ainsi Randolph a proposé pour ce cas intermédiaire une autre expression plus générale de la longueur critique du pieu:

$$h_c = 2r_0 \left( \frac{E_p}{G_c} \right)^{\frac{2}{7}} \quad (2.11)$$

où  $G_c$  est la valeur de  $G^*$  à la profondeur  $h_c/2$ .

L'expression (2.11) montre qu'un processus itératif est nécessaire. A partir du concept du module de cisaillement caractéristique  $G_c$ , Randolph a proposé d'autres formules plus générales servant à évaluer le déplacement, la rotation et le moment fléchissant maximum d'un pieu fiché dans un sol de rigidité quelconque:

$$u_0 = \frac{\left( \frac{E_p}{G_c} \right)^{\frac{1}{7}}}{\rho_c G_c} \left[ 0.27 H_0 \left( \frac{h_c}{2} \right)^{-1} + 0.3 M_0 \left( \frac{h_c}{2} \right)^{-2} \right] \quad (2.12)$$

$$\theta_0 = \frac{\left(\frac{E_p}{G_c}\right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_c G_c} \left[ 0.3 H_0 \left(\frac{h_c}{2}\right)^{-2} + 0.8 (\rho_c)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\frac{h_c}{2}\right)^{-3} \right] \quad (2.13)$$

$$M_{max} \cong \left(\frac{0.1}{\rho_c}\right) H_0 h_c \quad (2.14)$$

Expressions dans lesquelles,  $\rho_c$  est le degré d'hétérogénéité donné par:

$$\rho_c = \frac{G_{z=\frac{h_c}{2}}^*}{G_c} \quad (2.15)$$

A partir de ces expressions analytiques obtenues par lissage des résultats numériques, Randolph a écrit un programme informatique baptisé **PIGLET** (Randolph, 1994). Ce dernier est destiné également à l'analyse des groupes de pieux, ainsi que d'autres sollicitations telles que les efforts axiaux et de torsion.

#### - Méthode de Kooijman (1989)

Kooijman a proposé une méthode consistant à étudier le sol d'une part, le pieu d'autre part, puis une formulation permettant de coupler les deux systèmes d'une manière itérative.

En effet, compte tenu des conditions de compatibilité et d'équilibre, cette technique permettra d'analyser le sol en le subdivisant en couches, et d'étudier sa réponse aux sollicitations transmises par le pieu (Figure 2.1):

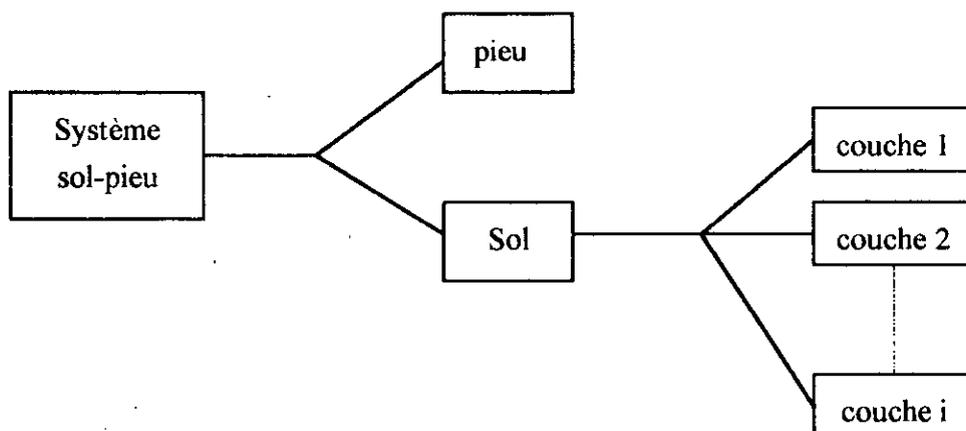


Figure 2.1: Structuration du système sol-pieu.

Cette structuration permet de distinguer un modèle pour le comportement du pieu, un autre modèle pour la couche du sol; et de satisfaire les conditions de compatibilité du système d'une manière itérative.

Le comportement du pieu dans l'étude de Kooijman est assimilé à celui d'une poutre soumise aux pressions des terres. Ceci pourra se traduire par l'expression suivante:

$$\frac{d^4u}{dz^4} = Ku - f \quad (2.16)$$

où  $u$  est le déplacement latéral,  $f$  est une charge latérale donnée, et  $K$  est la rigidité du ressort élastique. Les valeurs actuelles de ces deux paramètres peuvent être fournies par l'analyse des déformations du sol.

L'équation (2.16) qui représente l'équation fondamentale de l'approche de Winkler que l'on exposera plus loin, peut être résolue numériquement en divisant le pieu en un nombre fini de petit tronçons ayant chacun sa propre valeur de  $f$  et de  $K$ .

Le sol est considéré comme un continuum élastique (Verruijt et Kooijman, 1989) ou Elasto-plastique (Kooijman, 1989; Kooijman et Vermeer, 1988), formé d'un multicouche sur lequel agissent des forces latérales représentant l'interaction sol-pieu.

En modélisant le sol en couches interactives, Kooijman a introduit certaines hypothèses simplificatrices. La simplification majeure dans cette étude réside dans le fait, que la transmission de l'effort horizontal au sol, ne produit que des déformations horizontales. Ceci signifie, en fait, que la composante verticale  $v$  du déplacement devrait être petite, au point qu'elle pourrait être négligée. Par ailleurs, l'auteur suppose que pendant la déformation, la contrainte verticale en un point du milieu n'est dûe qu'au poids des terres agissant à ce point.

En analysant chaque couche de sol d'épaisseur  $H$ , l'auteur utilise les équations d'équilibre horizontal en négligeant les termes qui correspondent au déplacement vertical  $v$ . Ceci mène évidemment aux équations d'équilibre d'une plaque:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + Q_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Q_y = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

où  $\sigma_x$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{xy}$  et  $\sigma_y$  sont des contraintes moyennes dans le plan horizontal.  $Q_x$  et  $Q_y$  qui représentent des forces volumiques ont été évaluées par Kooijman à partir des contraintes de cisaillement agissant sur les deux interfaces de la couche en question. En effet,

$$\begin{cases} Q_x = (\tau'_{zx} - \tau^-_{zx}) / H \\ Q_y = (\tau'_{zy} - \tau^-_{zy}) / H \end{cases} \quad (2.18)$$

Système dans lequel, les exposants + et - représentent les valeurs à l'interface inférieure et supérieure respectivement.

Le résultat de cette procédure est pour chaque couche le système d'équations obtenu se réduit aux équations familières d'un problème de contraintes planes, avec les forces volumiques, assurant l'interaction entre les couches. L'analyse des contraintes et déformations est effectuée par la méthode des éléments finis.

L'élément fondamental dans l'étude de Kooijman, est la façon de coupler le comportement du pieu à celui du sol. Afin de satisfaire les conditions d'équilibre et de compatibilité, l'auteur propose d'évaluer formellement la réponse du sol aux efforts dûs au pieu par l'équation:

$$F_i = K_i u_i + f_i \quad (2.19)$$

où  $u_i$  est le déplacement horizontal de la couche  $i$  évalué à l'interface sol-pieu.  $f_i$  représente la contribution de toutes les couches à l'exception de la couche  $i$ . La valeur de rigidité  $K_i$  peut être déterminée à partir du modèle de sol.

L'analyse est effectuée d'une manière itérative à partir d'une solution initiale de déplacements, jusqu'à ce que l'équilibre sol-pieu est atteint. La convergence est acquise lorsque la différence entre la force d'interaction sol-pieu obtenue à partir du modèle de pieu, et celle fournie par le modèle du sol est suffisamment petite.

Outre le comportement élastique, l'auteur a introduit le comportement des sols cohérents obéissant à la loi élastique parfaitement plastique de Tresca (Kooijman, 1989). Un code de calcul informatique nommé **PILAT** a été publié (Verruijt, 1994); ce code représente la version élastique du travail de Kooijman.

## II.2.2- Méthodes basées sur l'approche de Winkler

Ce modèle introduit la notion du module de réaction qui assimile la résistance du sol à une série de ressorts rapprochés et indépendants. Le concept d'une poutre reposant sur un ensemble de ressorts pour représenter le sol a été introduit par Winkler en 1867.

Un développement considérable des méthodes de calcul dans le domaine géotechnique est dû à cette théorie, notamment le calcul des ouvrages de soutènement et des pieux sollicités horizontalement.

Les méthodes basées sur le modèle de Winkler, ou communément appelées méthodes aux modules de réaction, consistent à ramener le problème à deux dimensions, en considérant uniquement ce qui se passe dans une tranche de sol horizontale et en négligeant l'interaction entre les différents niveaux. Notons que l'ignorance de la nature continue du sol par ce modèle, conduit à une surestimation des déformations, c'est ce qu'on verra plus loin lors de la comparaison de cette méthode avec les méthodes du continuum élastique.

Pour les pieux soumis aux efforts de flexion, on part d'une relation entre la réaction frontale  $P$  (unité de force / unité de longueur du pieu), que le pieu exerce sur le terrain, tant en butée, qu'en contre-butée; et le déplacement horizontal  $u$  à une côte  $z$ :

$$K = k \cdot D = \frac{P}{u} \text{ (KN / m}^2\text{)} \quad (2.20)$$

Expression dans laquelle  $K$ : module de réaction qui a les unités d'une contrainte, et  $k$ : coefficient de réaction du sol, ayant les dimensions d'un poids volumique. La figure (2.2) Schématise l'application du modèle de Winkler aux pieux sollicités en flexion.

Dans la littérature américaine (McLelland et Focht, 1956), le coefficient  $K$  est appelé "Module de sol", et noté par  $E_s$ , cette notation peut conduire à une confusion avec le module d'Young d'élasticité, qui a également les mêmes unités.

le principal élément dans la théorie de Winkler est le module de réaction qui quantifie l'interaction sol-pieu, et caractérise la rigidité du sol lors du chargement horizontal des pieux.

Le développement rapide de l'ingénierie civile, et la nécessité de résoudre des problèmes liés aux pieux sollicités en flexion a motivé les chercheurs à fouiller dans la détermination du module de réaction de plus en plus réaliste. Certains auteurs ont tenté de proposer des corrélations entre le module de réaction et les propriétés géotechniques du sol. Parmi ces auteurs on cite: Terzaghi, 1955; Reese, Cox, et Koop, 1974; et Jamiolkowski, et Lancelotta, 1977. Particulièrement, ceux

qui se sont intéressés à la corrélation avec le module d'élasticité du sol on trouve: Vesic, 1961; Baguelin, Frank et Said, 1977; Imai, 1976; Pyke et Beikae, 1984. D'autres catégories de chercheurs se sont orientés vers l'estimation du module de réaction, à partir des essais in-situ, notamment l'essai préssiométrique. A titre d'indication on cite entre autres: Menard, Bourdon et Gambin, 1968; Gambin, 1979; Baguelin et Jezequel, 1972; et Briaud, 1993.

Dans l'absence de méthodes fiables de détermination du module de réaction, de telles corrélations restent très intéressantes, du moment qu'elles permettent d'avoir un ordre de grandeur qui servira à l'application de l'approche de Winkler sans ambiguïté.

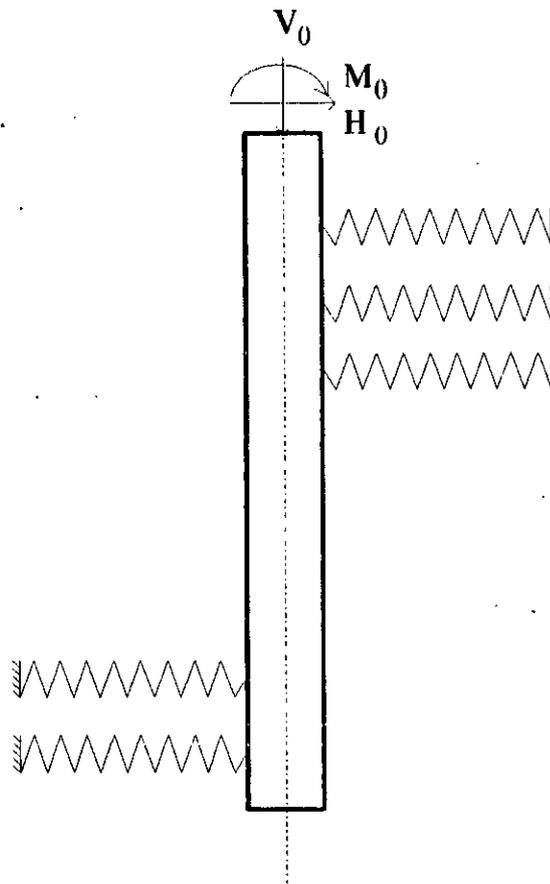


Figure 2.2: Modélisation de l'interaction du sol - pieu par la méthode à ressorts

Dans la théorie de Winkler, le pieu est généralement considéré comme une plaque mince, soumise à un effort latéral  $H_0$ , une force axiale  $V_0$ , un moment de flexion  $M_0$ , et une charge distribuée  $W$  le long de la fiche. Selon la théorie des poutres, le comportement du pieu, sous les différentes sollicitations évoquées, est régi par l'équation différentielle:

$$(EI)_p \frac{d^4 u}{dz^4} + V_0 \frac{d^2 u}{dz^2} + Ku - W = 0 \quad (2.21-a)$$

où  $(EI)_p$ : rigidité du pieu à la flexion.

Pour des considérations pratiques, le flambage ne peut avoir lieu que si la partie hors-fiche du pieu est importante, et l'étude des pieux sous l'effet de la force axiale  $V_0$  constitue un autre problème qui dépasse le cadre de cette thèse. La charge  $W$  ne représente qu'un cas spécial, pas très fréquent en pratique (Reese, Sullivan, 1984). En effet, l'équation (2.21-a) pourra être alors réduite à la forme:

$$(EI)_p \frac{d^4 u}{dz^4} + Ku = 0 \quad (2.21-b)$$

Bien que cette équation différentielle est séduisante du point de vue mathématique, sa résolution n'est pas toujours évidente. Lorsque le module de réaction  $K$  est constant, l'équation (2.21-b) est facilement intégrable, la solution analytique a été obtenue par Hetenyi, 1946. A contrario, si la distribution du module de réaction en profondeur est quelconque, la solution nécessite un calcul automatique.

L'hypothèse d'un module constant n'est valable que pour un certain type de sol bien déterminé (argile surconsolidée par exemple). Néanmoins, plusieurs auteurs ont essayé de proposer d'autres formes de variation pour simuler le comportement du sol en déformation latérale. Matlock et Reese, 1960, ont proposé la forme puissance:  $K = kz^n$ , et donné des solutions pour la forme  $K = k_0 + k_1 z$ . Davisson et Gill, 1963, ont étudié le problème d'un sol formé de deux couches, ils ont conclu que l'influence de la couche superficielle joue un rôle dominant sur le comportement des pieux chargés horizontalement. Une étude analogue concernant un sol bi-couche a été effectuée par Reddy, et Valsangkar, 1968, dans laquelle une distribution du module de réaction de la forme:  $K = k_0 + k_1 z + k_2 z^2$  a été attribuée à chaque couche.

D'autres catégories de chercheurs ont pensé qu'il était plus rigoureux de traiter le sol par un modèle de Winkler élasto-plastique. Sur la base de cette idée, des approches empiriques ont été développées pour tenir compte de la non-linéarité du sol. Parmi ces auteurs on cite le travail de Madhav, Kameswara, et Madhavan, 1971, et le travail de Kubo, 1965. Ce dernier a proposé une formule un peu particulière reliant la réaction  $P$ , à la déflexion  $u$  correspondant à la côte  $z$ :

$$P = k_s z^m u^n \quad (2.22)$$

Expression dans laquelle  $k_s$ ,  $m$  et  $n$  sont des coefficients à déterminer expérimentalement. En injectant l'équation (2.22) dans l'équation fondamentale du comportement du pieu (eq. 2.21-b), on obtiendra une équation extrêmement difficile à résoudre, voire impossible, due à la nature non linéaire de l'expression.

Dans l'absence d'une méthode de résolution analytique adaptable aux différentes formes du module de réaction, et dans le but de chercher une solution plus rigoureuse au problème, plusieurs auteurs ont opté pour la méthode des différences finies. Cette technique consiste à subdiviser le pieu en tronçons uniformément espacés, à discrétiser l'équation (2.21-b) par différences finies, et de la composer pour chaque tronçon. En considérant les conditions aux limites en tête et en pointe du pieu, il en résulte un système linéaire d'équations qui pourra être facilement résolu par un programme sur ordinateur.

La littérature contenant les méthodes utilisant la théorie du module de réaction est très vaste et très variée. La description de toutes les méthodes de cette catégorie est une tâche très laborieuse et dépasse le cadre de notre recherche. Toutefois, nous nous contentons de citer quelques travaux de:

- Palmer et Thompson (1948),
- Gleser (1953),
- Matlock et Reese (1960),
- Davisson et Gill (1963),
- Reese et Cox (1969),
- Davisson (1970),
- Bowles (1972),
- Reese et Manoliu (1973),
- Reese (1977),
- Desai et Kuppusamy (1980),
- Georgiadis et Butterfield (1982),
- Briaud, Smith et Meyer (1983),
- Reese et Sullivan (1984),
- Briaud, Smith et Tucker (1985),
- Borden et Gabr (1987),
- Bangratz, Frank et Kutniak (1981); Frank et Romagny (1990) (Méthodes des L.P.C).

La quasi-totalité de ces études sont en accord sur le fait que le module de réaction n'est pas une caractéristique intrinsèque du sol, car il varie non seulement avec la profondeur, mais avec la déformation latérale du sol également. Cet aspect, prouve que le comportement du sol n'est pas encore maîtrisable. Ceci a motivé les chercheurs rhéologues à développer ce qu'on appelle les courbes P-Y (réaction - déplacement horizontal, le déplacement latéral est noté  $u$  dans cette thèse). (Figure 2.3)

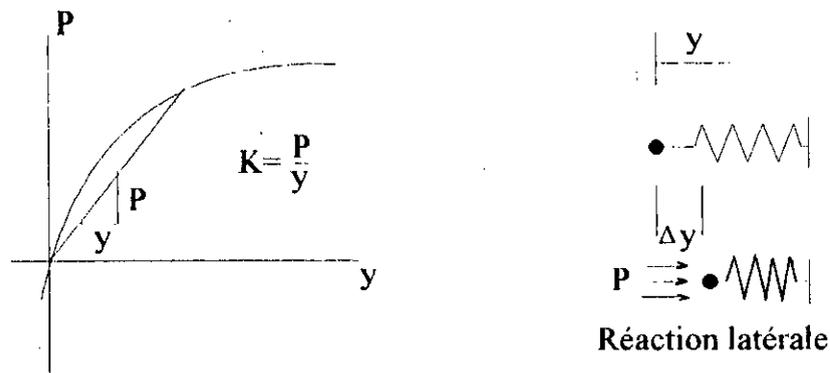


Figure 2.3: Réaction-déplacement latéral

Un effort considérable a été développé dans le domaine de la construction analytique des courbes P-Y, dont la détermination repose essentiellement sur les essais in-situ, notamment l'essai pressiométrique, et sur le calage des résultats de l'instrumentation des pieux chargés horizontalement à échelle grandeur. Les procédures les plus connues pour la construction des courbes P-Y sont celles de Matlock, 1970 pour les argiles molles submergées, de Reese, Cox, et Koop, 1975 pour les argiles raides en dessous de la nappe phréatique, et de Reese et Welch, 1975 pour les argiles raides en dessus de la nappe phréatique. Une approche unifiée permettant de prévoir la réponse des argiles submergées de n'importe quelle consistance a été établie par Sullivan, 1977. Finalement, Reese, Cox, et Koop, 1974, ont également décrit une procédure permettant d'établir une réponse P-Y du sable. Un travail de réexamination de ces procédures a été effectué par Meyer et Reese, 1979. Cette étude, qui contenait une analyse paramétrique a abouti à la conservation de toutes les procédures à l'exception des recommandations de Reese et Welch, 1975 où quelques modifications ont été introduites.

Les méthodes aux modules de réaction, consistent généralement à la résolution itérative de l'équation (2.21-b) avec le module de réaction, le module sécant des courbes P-Y. On présentera ci-dessous quelques méthodes courantes de l'approche de Winkler. Trois méthodes seront exposées: la méthode de Reese, 1977 qui se sert de la méthode des différences finies pour discrétiser l'équation du pieu; La méthode des laboratoires des Ponts et Chaussées qui profite de la solution analytique de l'équation (2.21-b) supposée valable dans chaque tranche du sol; et enfin la méthode de Bowles, 1972 qui utilise la méthode des éléments finis (éléments poutres unidimensionnels) pour modéliser le pieu.

### II.2.2.a- Méthode de Reese, 1977

L'article de Reese, 1977 résume en fait ses travaux antérieurs avec d'autres coéquipiers tels que Matlock et Reese, 1960 et Reese et Manoliu, 1973. Leurs études consistent à écrire l'équation

gérant le comportement du pieu en forme de différences finies. Ces auteurs ont proposé un schéma de calcul peu particulier se basant sur un processus itératif sur les courbes P-Y. La convergence est atteinte lorsque la différence des déplacements de deux itérations successives est inférieure à une tolérance fixée a priori. La méthode au module de réaction de Reese 1977, prend en considération l'effort axial appliqué en tête du pieu, et l'éventuelle variation de la rigidité à la flexion du pieu. Cet auteur a donné une description des équations et des expressions obtenues; ainsi qu'un code de calcul nommé COM622 a été également décrit. Ce programme servira aussi à la comparaison avec nos résultats issus de l'analyse harmonique.

Une autre version plus améliorée et plus générale baptisée COM624 a été mise au point par Reese et Sullivan, 1984. Ce logiciel permet le traitement des courbes P-Y de nombreux types de sol, et qui peuvent être générées automatiquement ou introduites par l'utilisateur.

### II.2.2.b- Méthode des laboratoires des Ponts et chaussées (Baguelin, Frank et Guegan, 1976; Frank, 1981)

Le laboratoire central des Ponts et chaussées a mis au point une méthode numérique de calcul pour la résolution des problèmes de pieux chargés latéralement, qui en outre les sollicitations classiques apportées par la superstructure, peuvent subir des poussées parasites dues aux déplacements libres du sol (charges dissymétriques sur le sol environnant, fluage des couches molles, etc...).

Cette méthode consiste à découper le sol en tranches horizontales suffisamment minces, pour que l'on puisse dire que chaque couche peut être caractérisée par une seule courbe P-Y, celle qui correspond au milieu de la tranche en question (les auteurs suggèrent une épaisseur de 1 m).

Si l'on argumente d'une autre façon, ceci signifie que le module de réaction ne dépend que du niveau de chargement, et le déplacement au centre est représentatif de toute la tranche.

L'élément clé de la méthode des L.P.C est l'exploitation, pour chaque tronçon, de la solution analytique de l'équation d'équilibre des pressions (eq. 2.21-b). Cette solution contient en effet, quatre constantes d'intégration; ce qui signifie en fait,  $4n$  inconnues pour  $n$  tranches envisagées. En plus, en considérant la continuité des déplacements, des rotations, des moments fléchissants, et des efforts tranchants aux interfaces inter - tranches, permettra de déterminer  $4n-4$  inconnues. Les quatre inconnues supplémentaires peuvent être facilement déterminées par la connaissance des conditions aux limites: deux en tête, et deux en pointe du pieu. Le système de  $4n$  équations linéaires à  $4n$  inconnues s'écrit:

$$[A] \{R\} = \{B\} \quad (2.22)$$

$[A]$ : Matrice ( $4n \times 4n$ ) construite à partir des 4 fonctions de base de l'équation homogène de chaque tronçon et de leurs 3 premières dérivées. Ce sont des fonctions de  $z$  connues à chaque itération.

$\{R\}$ : Vecteur de dimension  $4n$  des constantes d'intégration inconnues

$\{B\}$ : Vecteur de dimension  $4n$  construit à partir des solutions particulières des équations avec second membre et des conditions imposées aux deux extrémités.

Le processus de calcul de cette méthode, consiste alors à résoudre un système algébrique à chaque itération sur la courbe P-Y en utilisant une rigidité tangente pour approcher la courbe de réaction non linéaire à la profondeur donnée.

Un programme sur ordinateur baptisé **PILATE** a été mis au point par l'équipe du L.C.P.C. (Bangratz, Frank et Kutniak, 1981; Frank et Romagny, 1990). Ce programme permet de prendre en compte des déplacements imposés du sol, en plus des efforts appliqués en tête. Il permet aussi d'introduire des lois de réaction non linéaires quelconques, de même que les lois de mobilisation des efforts en pointe.

### II.2.2.c- Méthode de Bowles, 1972

Contrairement à presque la totalité des méthodes utilisant l'approche de Winkler qui se servent de la solution analytique ou numérique de l'équation d'équilibre des pressions, la méthode de Bowles emploie la méthode des éléments finis (éléments poutres unidimensionnels) afin de discrétiser le pieu sollicité horizontalement. En effet, Bowles est arrivé en divisant le pieu en segments à l'obtention d'un système algébrique linéaire:

$$\{u\} = [ASA^T]^{-1} \{F\} \quad (2.23)$$

Expression dans laquelle:

$\{u\}$ : vecteur des déplacements nodaux.

$\{F\}$ : vecteur des forces nodales extérieures.

$[A]$ : matrice reliant les forces nodales internes aux forces nodales externes.

$[S]$ : matrice reliant les forces internes et les déplacements nodaux.

Sachant les efforts externes appliqués au pieu, et en construisant la matrice  $[A]$  et  $[S]$ , on pourra aisément résoudre le système (2.23). Les déplacements nodaux et les rotations obtenus

seront utilisés par la suite pour déterminer les éléments de réduction appliqués sur le pieu soumis aux efforts latéraux.

Bien que cette méthode modélise le sol comme étant une série de ressorts, elle ne considère pas la variation du module de réaction avec le niveau de chargement, mais elle s'intéresse plutôt à la variation avec la profondeur. En effet, Bowles utilise un coefficient de réaction croissant avec la profondeur selon la loi suivante:

$$K_S = A_S + B_S z^n \quad (2.24)$$

L'auteur propose  $A_S = 0$  et  $A_S = 240 q_u$  pour un sol sableux et un sol argileux respectivement.  $q_u$  (ton/m<sup>2</sup>) est la résistance au cisaillement. Il propose également  $n = 1$  pour un sol pulvérulent et  $n$  variant de 0.4 à 0.8 pour un sol cohérent.

Afin de décrire la variation du module de réaction avec la profondeur lorsque l'exposant  $n$  de l'équation (2.24) est différent de 0 et de 1, l'auteur donne une méthode de construction des rigidités des ressorts appliqués aux noeuds, à partir de la parabole de Newmark (1942). En effet la rigidité au noeud  $i$  ( $i$  différent de 1 et de  $m$ ) dépend de son module de réaction ainsi que les modules de réaction des deux noeuds adjacents:

$$K_i = \frac{DL}{12} (K_{s(i-1)} + 10K_{s(i)} + K_{s(i+1)}) \quad (2.25-a)$$

Les rigidités des noeuds d'extrémités sont:

$$K_{i=1} = \frac{DL}{24} [7K_{s(1)} + 6K_{s(2)} - K_{s(3)}] \quad (2.25-b)$$

$$K_{i=m} = \frac{DL}{24} [7K_{s(m)} + 6K_{s(m-1)} - K_{s(m-2)}] \quad (2.25-c)$$

Expressions dans lesquelles:  $D$  est la largeur ou le diamètre du pieu, et  $L$  la longueur du segment considéré.

En conclusion, on peut dire que les équations (2.25) sont issues de l'équation quadratique générale  $az^2 + bz + c$ . Toutefois cette méthode pourra nous induire en erreur lorsqu'une variation quelconque du module de réaction est envisagée. Pour palier à cet inconvénient, il est nécessaire d'augmenter le nombre de segments du pieu.

### II.3- Méthodes de calcul des pieux à la rupture

Bien que le calcul des pieux se fait généralement par les méthodes dites aux petits déplacements dans le cas des ouvrages classiques, où les pieux travaillent essentiellement à la reprise des efforts axiaux, il n'en est pas de même dans quelques ouvrages spéciaux, tels que les ouvrages portuaires et de l'offshore.

Ainsi, dans le cas des ouvrages d'accostage, tels que les ducs d'Albe, l'étude des pieux est souvent faite à l'état limite ultime, où le diagramme des réactions est schématisée par deux zones de rupture: la zone de butée et la zone de contre - butée.

Lorsqu'on a évoqué les méthodes dites de courbes P-Y, nous avons mis l'accent sur l'élément essentiel qui caractérise ces courbes, qui est en fait la réaction ultime  $P_u$ . C'est ainsi que les premières analyses du comportement des pieux, les méthodes à la rupture utilisaient exclusivement cette caractéristique de la courbe de réaction, qu'elles cherchaient à prévoir à tous les niveaux.

Dans ces méthodes, le sol est considéré comme partout en état de rupture sous la pression horizontale ultime  $P_u$ . Le profil de  $P_u$  en profondeur présente un saut brusque au point de rotation séparant la zone de butée de celle de contre - butée; ce qui signifie que ce point est en réalité un point de discontinuité plutôt qu'un point de pression nulle. En plus, ces méthodes supposent que la contribution de la pointe du pieu dans la reprise des efforts latéraux est quasiment négligeable. Etant donné les hypothèses simplistes émises, les méthodes de calcul à la rupture constituent une approche grossière et ne sont d'ailleurs utilisables que pour un nombre restreint de problèmes.

La méthode à la rupture la plus ancienne a été donnée par Blum, en 1932, pour les sols pulvérulents et faisant principalement appel à un schéma de rupture de sol par coin en direction de la surface.

Les évaluations les plus connues de la pression ultime  $P_u$  sont celles de Brinch-Hansen (1961), Broms (1964 a et b), Menard (1962), et Randolph et Houlsby (1984). Les deux premiers travaux ont donné la pression ultime en fonction des caractéristiques de la résistance limite, mesurées en laboratoire ou in-situ: la cohésion  $C$ , et l'angle de frottement  $\phi$ . Par contre, Menard a rattaché directement  $P_u$  à la pression limite  $P_l$  d'expansion de la sonde pressiométrique en place dans le sol.

Récemment, Randolph et Houlsby, (1984) ont montré que la résistance latérale ultime du sol dépend largement de la nature de l'interface sol-pieu. En utilisant la méthode des caractéristiques,

les auteurs ont donné des solutions analytiques exactes de la réaction ultime qui se développe sur la face avant d'un disque circulaire rigide chargé latéralement, ces pressions sont:

$$P_u = 11.94 C_u D \quad \text{pour une interface parfaitement rugueuse.}$$

$$P_u = 9.14 C_u D \quad \text{pour une interface parfaitement lisse.}$$

Nous nous limiterons dans cet exposé aux travaux de Brinch-Hansen, de Menard et de Broms.

### II.3.a- Méthode de Brinch-Hansen (1961)

En prenant les considérations de Blum pour la rupture en surface, cet auteur a admis qu'à grande profondeur, on avait affaire à un phénomène de rupture localisé autour du pieu sans l'effet de surface. Il a ainsi combiné les deux schémas: rupture par coin et écoulement profond.

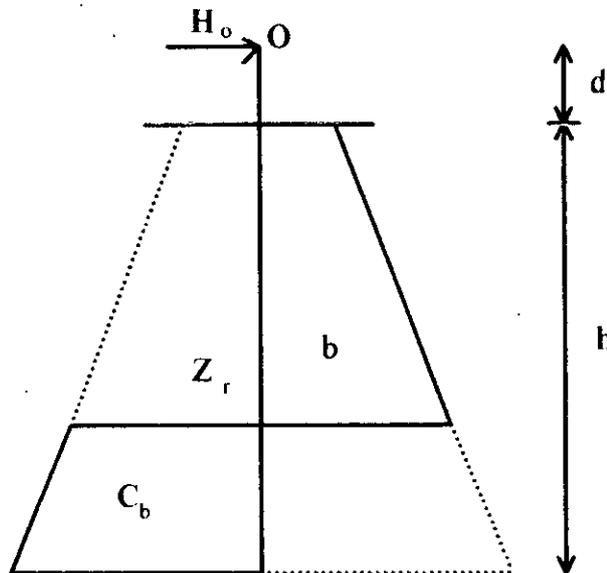


Figure 2.3: Schéma de principe de la méthode de Brinch-Hansen (1961)

Dans la méthode de Brinch-Hansen, le pieu est supposé libre en tête. Sont fixés au départ (Figure 2.3):

- La géométrie du problème (fiche du pieu  $h$ , partie hors-fiche  $d$ , et diamètre  $D$ ).

- La distribution de la réaction ultime le long du pieu que l'auteur en a proposé une expression valable pour un sol cohérent ou un sol frottant:

$$P_u(z) = \gamma' z D K_q(z) + C' D K_c(z)$$

Expression dans laquelle:  $\gamma'$ : poids spécifique effectif d'un sol frottant.

$C'$ : cohésion effective d'un sol cohérent.

$D$ : diamètre du pieu.

$K_g(z)$  et  $K_c(z)$  sont des facteurs de portance qui dépendent de la profondeur relative  $z/D$ , et de l'angle de frottement interne  $\phi'$ .

La méthode consiste à se donner arbitrairement un centre de rotation (profondeur  $z_r$ ) et à calculer les moments par rapport au point d'application de la charge des efforts de butée et de contre-butée qui en résultent. On fait varier  $z_r$  jusqu'à l'obtention de l'équilibre de ces moments. La charge latérale se déduit par simple différence entre la butée et la contre-butée obtenues. On en déduit ensuite le moment maximal mobilisé.

### II.3.b- Méthode de Menard (1962)

A côté des deux schémas théoriques de rupture, Menard a introduit un troisième qui est un schéma de rupture profonde, mais où les propriétés de déformation du sol avant rupture sont prises en compte. Ceci est dû au fait qu'il rattache directement ces phénomènes à l'essai d'expansion de la sonde dans l'essai pressiométrique.

La méthode de Menard repose essentiellement sur deux notions fondamentales:

- La notion de la profondeur critique  $D_c$ , qui selon l'auteur, pour une fondation isolée, est pratiquement proportionnelle au diamètre équivalent de la surface en butée. La valeur de la profondeur critique varie alors de  $2D$  pour les sols cohérents à  $4D$  pour les sols pulvérulents.

- La notion de la pression limite qui peut être mesurée par le pressiomètre, et qui a servi comme élément de base aux expressions proposées par Menard.

Dans le cas d'un pieu soumis simplement à un effort latéral en tête, l'auteur a donné une estimation à la valeur maximale  $H_t$  de l'effort en tête compatible avec la résistance du terrain. Cette expression est:

$$H_t = \alpha DhP_l \quad \text{où } \alpha \text{ est un facteur variant de } 0.20 \text{ à } 0.41 \text{ selon la valeur de } D_c/h.$$

Pour le moment maximum auquel est soumis le fût de la fondation correspond à la limite de la résistance du sol, Menard a proposé la formule suivante:

$$M_{max} = 0.08Dh^2P_l$$

Dans le cas d'une flexion pure ( $H_0 = 0$ ), Menard a également donné:

$$M_t = \beta Dh^2P_l \quad \text{où } \beta \text{ représente un facteur variant de } 0.13 \text{ à } 0.25 \text{ selon la valeur de } D_c/h.$$

### II.3.c- Méthode de Broms (1964 a et b)

La théorie développée par Broms (1964 a et b) se base fondamentalement sur les considérations statiques du pieu, où les conditions d'encastrement en tête sont prises en compte. En effet, cette théorie permet le traitement des pieux libres en tête d'une part, et les pieux encastrés d'autre part.

Dans la théorie de Broms, la distinction est nette dans le traitement d'un sol cohérent, et d'un sol frottant. En ce qui concerne le premier, l'auteur a suggéré un profil de réaction très simplifié. En effet, la réaction est nulle dans une zone superficielle d'épaisseur  $1.5D$ , suivie d'une réaction constante valant  $9 C_u$  en dessous. Quant aux pieux fichés dans un sol pulvérulent, les hypothèses émises par Broms sont:

- La pression des terres active sur la face arrière du pieu est négligée.
- La distribution de la réaction ultime le long de la face avant du pieu est égale à trois fois la pression passive des terres.

$$P_u = 3 \sigma'_v K_p \quad \text{où} \quad K_p = \frac{1 + \sin \phi'}{1 - \sin \phi'}$$

$\phi'$ : angle de frottement interne.

- L'effet de la forme de la section du pieu sur la réaction ultime est également négligé.
- L'entière résistance latérale est mobilisée au moment où le mouvement est considéré.

Outre les conditions d'encastrement en tête, la théorie de Broms tient compte du comportement du pieu selon son élancement. En effet, Broms a analysé d'une part les pieux courts ou rigides, et d'autre part les pieux longs dits flexibles.

La capacité latérale des pieux rigides dépend essentiellement et intégralement de la résistance du sol. Dans ce genre de fondation, le phénomène de rupture est imputable à la rupture du sol avoisinant. Pour les pieux courts, l'auteur a proposé des formules permettant de déterminer la côté et la valeur du moment maximum.

Contrairement aux pieux rigides, la capacité latérale des pieux élancés dépend fondamentalement du moment de rupture du matériau constituant le pieu lui même. En d'autres termes, le matériau se rompt avant que la rupture puisse atteindre le sol adjacent. Pour les pieux flexibles libres ou encastrés en tête, Broms a proposé des abaques permettant de déterminer

l'effort latéral ultime  $H_u$ , et le moment de rupture  $M_y$ , en fonction des caractéristiques du sol: la cohésion  $C_u$  des sols cohérents,  $K_p$  et  $\gamma_d$  des sols frottants.

#### II.4-Avis sur l'applicabilité des méthodes, critiques et conclusions

Nous avons vu dans les méthodes de calcul à la rupture que le sol est caractérisé par un comportement rigide plastique: la réaction ultime ne dépend pas du déplacement latéral sol - pieu. En effet, elles ne fournissent aucune information sur l'évolution des déformations lors de l'augmentation progressive des efforts. Elles constituent donc une approche très grossière à la solution du problème des pieux en flexion. Etant donné les dates de publication de ces méthodes (début des années soixante pour les plus récentes), on pourrait dire cependant, qu'elles étaient à l'époque un moyen de résolution raisonnable du problème des pieux sollicités horizontalement, car tous les calculs devaient être effectués manuellement.

Avec l'avènement des ordinateurs, et le développement rapide de l'informatique et des méthodes numériques, les méthodes de calcul à la rupture sont dépassées et mises à l'écart. Toutefois, certains auteurs (Frank, et Jezequel, 1989) mettent l'accent sur l'utilité pratique des méthodes de Brinch-Hansen et Broms et proposent de les adapter aux essais pressiométriques.

Actuellement, l'analyse du problème des pieux sous charges latérales se fait avec les méthodes de calcul aux petits déplacements. La sélection de l'une ou de l'autre méthode s'effectue donc selon la rigueur demandée et le degré de précision voulu. La méthode de Poulos n'est pas recommandée pour le dimensionnement des pieux, car comme nous l'avons vu, manque de rigueur notamment pour les profils de forte hétérogénéité. Néanmoins elle peut être intéressante pour l'analyse d'essais en vraie grandeur. Elle peut alors être utilisée à rebours. Malgré l'avantage d'être basées sur l'outil numérique puissant de la méthode des éléments finis, les approches de Randolph et Kooijman ont aussi leurs inconvénients. La première se limite à l'élasticité isotope linéaire alors que le comportement réel du sol est fort loin d'être linéaire. La seconde méthode a été élaborée en faisant l'hypothèse de négliger carrément les déplacements verticaux. Ceci n'est pas vrai notamment pour les pieux soumis à un moment en tête. En plus la nature itérative couplant le comportement du pieu d'une part et celui du sol d'autre part augmente considérablement le temps de calcul. Lors de l'étude comparative, les résultats de Kooijman concernant le déplacement latéral, la rotation et le moment maximal ont été obtenus supérieurs à ceux de Poulos sur toutes les gammes des pieux pour les deux premiers, et la gamme des pieux flexibles pour le dernier. Or, avec un pieu discrétisé en 21 éléments, la méthode de Poulos surestime déjà ces trois grandeurs. Il en résulte donc, que la marge de surestimation de la méthode de Kooijman est importante et pourra mettre son applicabilité en question.

Bien que l'approche semi - empirique de Winkler est largement utilisée par les praticiens, on doit rester pleinement conscient de ses limitations. Elle a l'inconvénient majeur d'ignorer la nature continue du sol. Les courbes P-Y, auxquelles les méthodes de l'approche de Winkler font appel, sont issues de corrélations expérimentales obtenues dans des conditions particulières sur des pieux instrumentés. Ces corrélations n'ont que peu de justification théorique, et ne peuvent donc s'utiliser que pour le calcul de pieux, de sols et de sollicitations voisins de ou au moins similaires aux ceux ayant fait l'objet des mesures dont ont été déduites les corrélations en question. En plus, la formulation des courbes de réponse charge-déplacement transversal laisse poser quelques interrogations:

- Comment les relations P-Y sont affectées par les conditions de fixation du pieu en tête, et par la rigidité relative sol-pieu?
- pourquoi sont elles réversibles, alors qu'il pourrait avoir un écoulement plastique du sol, entourant le pieu aux endroits où celui-ci subit des déplacements transversaux importants?

Finalement, on peut conclure que le problème des pieux soumis aux efforts latéraux est un problème très complexe. Une analyse rigoureuse doit rendre compte:

- du caractère tridimensionnel du problème
- de l'effet du glissement relatif sol-pieu qui peut se produire
- de l'influence du décollement de la face arrière supérieure du pieu, lors du chargement transversal
- de la non-linearité du sol avec tous ses aspects (Elasto-visco-plasticité, écrouissage, anisotropie, etc...)

A l'état actuel des connaissances, on ne reconnaît à aucune méthode le privilège de satisfaire tous les critères sus-cités. Une telle étude nécessite un coût de calcul exorbitant, et perd donc son efficacité devant les moyens énormes qu'elle requiert.

Nous pensons, cependant que l'utilisation conjointe de la méthode des éléments finis dans le plan radial, et les séries de Fourier dans la direction tangentielle pour étudier un milieu élasto-plastique, est un outil très efficace au problème de pieux.

Hormis sa prise en compte de l'aspect volumique tridimensionnel du domaine, cette approche semi-analytique est mathématiquement bidimensionnelle comportant ainsi un nombre

d'équations nettement inférieur à celui d'une analyse tridimensionnelle. Son extension à l'étude d'un milieu non-linéaire le rendra certainement plus efficace, et permettra d'avoir des résultats plus réalistes.

## Chapitre III:

### Présentation de la méthode numérique utilisée: Approche semi-analytique

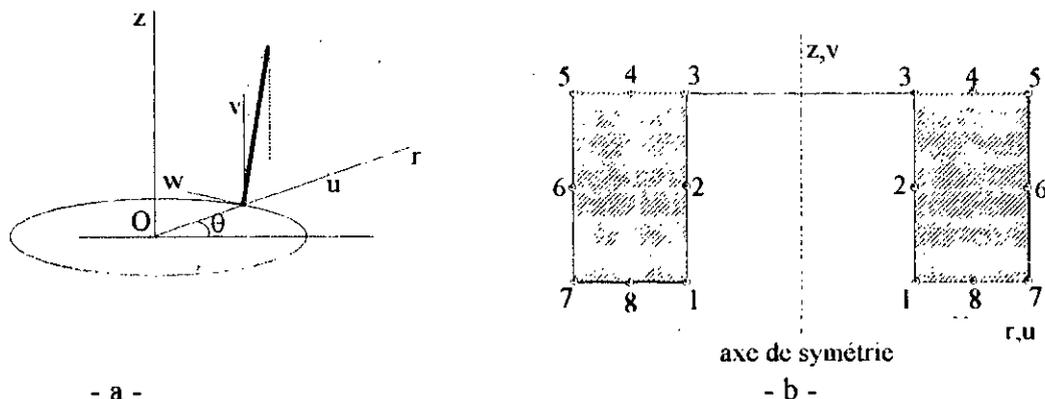
#### Résumé:

*L'objectif de ce chapitre est de décrire l'approche semi-analytique appliquée aux solides de révolution, soumis à des sollicitations non-axisymétriques.*

*On commencera d'abord, par exprimer les déplacements, et le chargement extérieur en termes de séries de Fourier, puis on passera à la formulation matricielle où la formation de la matrice de rigidité sera détaillée.*

### III.1- Introduction

La résolution des problèmes axisymétriques revêt un très grand intérêt pratique, en particulier dans le domaine de la mécanique des structures, où les éléments étudiés sont souvent de ce type, tels que les coques de révolution, ou dans le domaine de la géotechnique, où certains éléments présentent la caractéristique de la symétrie axiale, comme les fondations superficielles, et les fondations profondes circulaires, par exemple. Nous considérerons ici le cas des solides de révolution qui peuvent être obtenus, facilement en faisant tourner, un plan autour d'un axe. On utilise pour l'étude de ce genre de structures, les coordonnées cylindriques  $r$ ,  $z$ , et  $\theta$  (Figure 3.1).



**Figure 3.1:** a- Système de coordonnées cylindriques  
b- L'élément torique à section rectangulaire à 8 noeuds

Si le chargement est également axisymétrique, alors le problème tridimensionnel se ramène à un problème bidimensionnel, fonction seulement de deux coordonnées ( $r$ ,  $z$ ). le traitement de ce cas est similaire à ceux des contraintes planes, et des déformations planes. Par contre, si les sollicitations sont quelconques, le problème est plus complexe, et cependant, toutes les composantes du tenseur déformation doivent être considérées.

Wilson(1965) a proposé une méthode qui consiste à décomposer le chargement en série de Fourier suivant la coordonnée circonferentielle  $\theta$ , et à étudier indépendamment le comportement de la structure associé à chaque harmonique. Cette technique a été décrite en détail par (Zienkiewicz, 1977), et par (Cook et al., 1989).

Le problème original tridimensionnel est alors remplacé par une série de problèmes à deux dimensions. En effet selon le principe de superposition, la solution du problème global est obtenue en superposant toutes les solutions trouvées, en considérant chaque composante de chargement séparément. Si le nombre d'harmoniques n'est pas élevé, cette échange se révèle très bénéfique que se soit sur la capacité mémoire de l'ordinateur, et le temps de l'exécution, ou sur le coté économique; sachant que la résolution des problèmes tridimensionnels plus que les autres types de problèmes est complexe et coûteuse. En fait; elle nécessite l'utilisation d'éléments isoparamétriques

élaborés dont les calculs de génération sont longs. De plus, par rapport aux maillages 2D, les maillages 3D entraînent inévitablement des nombres très importants de noeuds et de d.d.l et les matrices de rigidité sont plus fortement peuplées ce qui augmente de façon très significative les temps de résolution. Enfin, compte tenu des volumes des données qui sont manipulées, la préparation des données nécessite l'emploi de programmes de génération automatique de même que l'interprétation des résultats nécessite des procédures automatiques de post-traitement ou de dépouillement graphique.

On présentera dans ce chapitre, tout d'abord, la façon de décomposer en série de Fourier, les sollicitations appliquées aux solides de révolution, ainsi que toutes les quantités qui en résultent telles que les déplacements, les contraintes etc.

On passera par la suite à la formulation matricielle, où les différentes étapes de la formation de la matrice de rigidité seront exposées.

### III.2- Expression des sollicitations et du champ de déplacements en termes de série de Fourier

Pour les solides à symétrie de révolution soumis à un chargement sans symétrie axiale, on pourra s'arranger à calculer la réponse de la structure à chaque harmonique de la série de Fourier représentant le chargement. la réponse globale au chargement total est déterminée en superposant les différentes réponses résultant de chaque harmonique. Le chargement peut être représenté par des fonctions périodiques en  $\theta$  de période  $2\pi$ , on peut alors écrire en toute généralité:

$$\begin{aligned} F_r &= \sum_i \overline{F}_r^i \cos i\theta + \sum_i \overline{\overline{F}}_r^i \sin i\theta \\ F_z &= \sum_i \overline{F}_z^i \cos i\theta + \sum_i \overline{\overline{F}}_z^i \sin i\theta \\ F_\theta &= \sum_i \overline{F}_\theta^i \sin i\theta + \sum_i \overline{\overline{F}}_\theta^i \cos i\theta \end{aligned} \quad (3.1)$$

$F_r$ ,  $F_z$  et  $F_\theta$  représentent les forces nodales par radian de la circonférence, respectivement dans direction radiale, verticale, et circonferentielle.

Les équations (3.1) montrent que les sollicitations sont divisées en deux composantes: symétrique et antisymétrique. En effet, les termes  $(\overline{F}_r^i, \overline{F}_z^i, \overline{F}_\theta^i)$  sont les amplitudes du chargement symétrique par rapport au plan ( $\theta = 0$ ); tandis que les termes  $(\overline{\overline{F}}_r^i, \overline{\overline{F}}_z^i, \overline{\overline{F}}_\theta^i)$  représentent les termes antisymétriques par rapport au plan ( $\theta = 0$ ).

A chaque amplitude de chargement correspond une amplitude de déplacement. En effet, les déplacements seront exprimés en série de Fourier de la même manière:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_i \bar{u}^i \cos i\theta + \sum_i \bar{u}^i \sin i\theta \\
 v &= \sum_i \bar{v}^i \cos i\theta + \sum_i \bar{v}^i \sin i\theta \\
 w &= \sum_i \bar{w}^i \sin i\theta - \sum_i \bar{w}^i \cos i\theta
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

où  $u$ ,  $v$ , et  $w$  sont respectivement le déplacement radial, vertical et circonférentiel. Les termes en barres sont des amplitudes, et sont fonctions de  $r, z$  et de l'ordre de l'harmonique  $i$ , et ne dépendent pas de l'angle  $\theta$ .

Les équations (3.2) montrent la nature tridimensionnelle du problème; ceci est dû au fait que les trois déplacements sont considérés.

Considérons les déplacements en petites déformations. Puisqu'il s'agit d'un problème tridimensionnel, les expressions reliant le champ des déplacements à celui des déformations en coordonnées cylindriques sont:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial v}{\partial z} \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \\
 \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \\
 \gamma_{z\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \gamma_{\theta r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}
 \end{aligned} \right. \tag{3.3}$$

Une fois le champ des déformations est connu, le champ des contraintes sera déterminé par le biais de la matrice des propriétés élastiques  $[D]$ .

En effet, si on considère l'isotropie du milieu, la relation contrainte- déformation aura la forme:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \\ \tau_{z\theta} \\ \tau_{\theta r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{z\theta} \\ \gamma_{\theta r} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} D_{11} = D_{22} = D_{33} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; & D_{44} = D_{55} = D_{66} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \text{ou} & & & \\ D_{12} = D_{13} = D_{23} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; & & \begin{cases} E: \text{Module d'Young} \\ \nu: \text{Coefficient de Poisson} \end{cases} \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas où le chargement présente une symétrie par rapport au plan ( $\theta = 0$ ), et considérons une seule harmonique, soit la  $i^{\text{eme}}$ . La distribution des contraintes associée à cette harmonique, aura la même forme que celle des déplacements:

$$\begin{aligned} \sigma_r^i &= \bar{\sigma}_r^i \cos i\theta \\ \sigma_z^i &= \bar{\sigma}_z^i \cos i\theta \\ \sigma_\theta^i &= \bar{\sigma}_\theta^i \cos i\theta \\ \tau_{rz}^i &= \bar{\tau}_{rz}^i \cos i\theta \\ \tau_{z\theta}^i &= \bar{\tau}_{z\theta}^i \sin i\theta \\ \tau_{\theta r}^i &= \bar{\tau}_{\theta r}^i \sin i\theta \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ce système peut être obtenu, en injectant les équations (3.3) dans les équations (3.4). Par exemple l'amplitude de la contrainte normale radiale aura l'expression:

$$\bar{\sigma}_r^i = D_{11} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial r} + D_{12} \left( \frac{\partial \bar{v}^i}{\partial z} + i \frac{\bar{w}^i}{r} + \frac{\bar{u}^i}{r} \right)$$

Pour aboutir aux équations algébriques générales qui régissent le comportement du solide à symétrie axiale, sous l'effet d'une sollicitation non-axisymétrique, il faut d'abord considérer les équations d'équilibre. En effet, on peut exprimer ces équations en coordonnées cylindriques par le système:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + f_r = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} + f_z = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $f_r$ ,  $f_z$ ,  $f_\theta$ , représentent respectivement les forces volumiques en direction radiale, verticale, et tangentielle.

En portant les équations (3.1) et (3.5) dans les équations (3.6) les équations d'équilibre pourront être exprimées en termes d'amplitudes de contraintes, et de la position angulaire  $\theta$  du point considéré. En fait, pour l'harmonique  $i$  le système (3.6) devient:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial r} + \frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \bar{\tau}_{rz}}{\partial z} + \frac{\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta}{r} + \bar{f}_r \right) \cos i \theta = 0 \\ \left( \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\tau}_{rz}}{\partial r} + \frac{\bar{\tau}_{z\theta}}{r} + \frac{\bar{\tau}_{rz}}{r} + \bar{f}_z \right) \cos i \theta = 0 \\ \left( -\frac{\bar{\sigma}_\theta}{r} + \frac{\partial \bar{\tau}_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\tau}_{z\theta}}{\partial z} + 2 \frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{r} + \bar{f}_\theta \right) \sin i \theta = 0 \end{cases} \quad (3.7-a)$$

On pourra réécrire le système (3.7-a):

$$\begin{cases} Q_1 \cos i \theta = 0 \\ Q_2 \cos i \theta = 0 \\ Q_3 \sin i \theta = 0 \end{cases} \quad (3.7-b)$$

$Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$  sont fonctions de  $r$ ,  $z$  et  $i$  seulement.

A partir du système (3.7-b), on s'aperçoit qu'il ne s'agit pas d'équations mais en réalité des identités en  $\theta$ . On peut dire alors que le système (3.7-b) doit être satisfait pour toute valeur de  $\theta$ ; ce qui implique par conséquent:  $Q_1=Q_2=Q_3=0$ . En considérant le principe des travaux virtuels (Zienkiewicz, 1977 et Barton, 1982) on obtient:

$$[K]^T \{U\}^T - \{R\}^T = 0 \quad (3.8)$$

La solution de cette équation permet de déterminer les degrés de liberté:

$\{u\}^i = \{\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{w}_1, \bar{u}_2, \dots\}^T$  qui sont les amplitudes de déplacements des points nodaux de l'élément torique associés à la  $i^{\text{ème}}$  harmonique.

Les éléments de  $\{R\}^i$  sont également des amplitudes. En effet, si on se limite en quête de simplification, à l'harmonique  $i$  de la distribution par radian, d'une densité de charge:

$$F_r = \bar{F}_r \cos i\theta, \quad F_z = \bar{F}_z \cos i\theta, \quad F_\theta = \bar{F}_\theta \sin i\theta$$

selon Winnicki et Zienkiewicz, 1979 le vecteur de chargement  $\{R\}^i$  sera:

$$\{R\}^i = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \bar{R}_r \\ \bar{R}_z \\ \bar{R}_\theta \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad \text{avec par exemple: } \bar{R}_r = \int_0^{2\pi} \bar{F}_r \cos^2 i\theta \cdot d\theta = \pi \cdot \bar{F}_r \quad (3.9)$$

La matrice  $[K]^i$  est la matrice de rigidité qui dépend également de l'ordre de l'harmonique  $i$ . On note ici que les  $n$  termes de la série de Fourier qui expriment le chargement sont associés à  $n$  termes de contraintes et de déplacements.

Du fait que les harmoniques de la série de Fourier ne sont pas couplées, les différentes valeurs de  $i$ , présentent  $n$  problèmes différents. D'après l'analyse précédemment décrite, la discrétisation du problème en éléments finis dans la direction tangentielle est remplacée par une superposition des différentes solutions de la structure discrétisée uniquement dans son plan radial. Un seul maillage suffira pour les différentes solutions.

### III.3- Formulation matricielle

#### III.3.1-Choix de l'élément fini

Lorsqu'on doit choisir un type d'éléments pour la résolution d'un problème donné, on arrive généralement au dilemme suivant: ou bien choisir des éléments simples en très grand nombre, ou bien choisir des éléments d'ordre élevé en nombre restreint ? Il n'y a pas de réponse unique. Cependant, on peut faire des constatations très intéressantes sur le comportement respectif des éléments en résolvant certains cas tests.

Une étude numérique de comparaison des performances des différents éléments (Durocher et al., 1978) ont montré que l'élément  $T6$  (triangulaire à 6 noeuds), et l'élément  $Q8$  (quadrilatéral à 8 noeuds) s'avèrent les plus performants pour les situations de flexion et de concentration des contraintes.

Le problème qui nous intéresse est l'étude des pieux soumis aux efforts de renversement, constitue en fait, un problème de flexion. Il serait alors intéressant d'utiliser des éléments toriques à section rectangulaire à 8 noeuds pour l'étude élastique et élasto-plastique. Ce type d'éléments à champ de déplacements quadratique constitue un bon compromis complexité-précision (Imbert, 1991).

#### III.3.2: Description de l'élément isoparamétrique à symétrie axiale

La figure (3.2) illustre la section radiale d'un tore  $Q8$ . Les fonctions de formes associées à cet élément sont:

Aux noeuds principaux: 1, 3, 5 et 7.

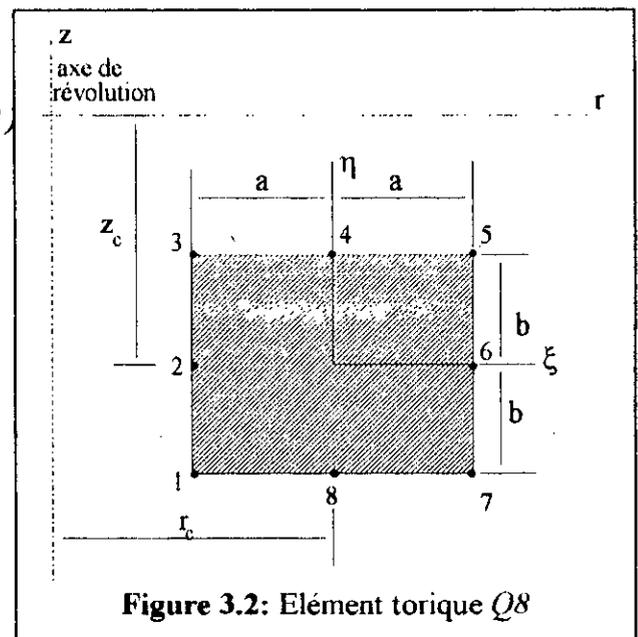
$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi \cdot \xi_i)(1 + \eta \cdot \eta_i)(\xi \cdot \xi_i + \eta \cdot \eta_i - 1)$$

Aux noeuds d'interface:

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta \cdot \eta_i) \quad \text{noeuds 4 et 8.}$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 + \xi \cdot \xi_i)(1 - \eta^2) \quad \text{noeuds 2 et 6.}$$

En utilisant ces fonctions de forme, on pourra interpoler les amplitudes de déplacements de l'harmonique  $i$  à n'importe quel point de l'élément, à partir des amplitudes des déplacements nodaux.



La superposition des différentes harmoniques de Fourier pourra alors donner le déplacement en tout point de l'élément en se servant des équations (3.2).

Un élément essentiel, dans la formulation de la méthode des éléments finis en déplacement, est la matrice  $[B]$ , reliant les déformations aux déplacements nodaux.

Pour l'élément considéré dans cette étude, la matrice  $[B]^i$  est de dimension  $(6 \times 24)$ , dépendant des trois coordonnées cylindriques  $r$ ,  $z$  et  $\theta$ , ainsi que l'ordre de l'harmonique  $i$ .

Vu l'importance des dimensions de la matrice  $[B]^i$ , il est préférable de diviser cette dernière en sous matrices. En effet,

$$[B]^i = [B_1^i B_2^i \dots B_8^i] \quad (3.10-a)$$

avec:

$$[B_j^i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial r} \cos i\theta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} \cos i\theta & 0 \\ \frac{N_j}{r} \cos i\theta & 0 & \frac{iN_j}{r} \cos i\theta \\ \frac{\partial N_j}{\partial z} \cos i\theta & \frac{\partial N_j}{\partial r} \cos i\theta & 0 \\ 0 & \frac{iN_j}{r} \sin i\theta & \frac{\partial N_j}{\partial z} \sin i\theta \\ -\frac{iN_j}{r} \sin i\theta & 0 & \left( \frac{\partial N_j}{\partial r} - \frac{N_j}{r} \right) \sin i\theta \end{bmatrix} \quad (3.10-b)$$

où  $[B_j^i]$  est une sous matrice de  $[B]^i$ , correspondant au noeud  $j$ .

### III.3.3- Matrice de rigidité élémentaire dans les problèmes axisymétriques à chargement quelconque:

La matrice de rigidité élémentaire associée à l'harmonique d'ordre  $i$  dépend essentiellement de la matrice  $[B]^i$  et de la matrice des propriétés élastiques  $[D]$ . Elle a la forme:

$$[K]^i = \int_{A-\pi}^{\pi} [B]^i{}^T [D] [B]^i . r . dr . dz . d\theta \quad (3.11)$$

A: est la section radiale de l'élément fini.

Compte tenu des termes en  $\cos i\theta$ , et en  $\sin i\theta$  présents dans la matrice  $[B]^e$ , on pourra se servir des propriétés orthogonales des fonctions trigonométriques, lors de l'intégration par rapport à  $\theta$ . Ces propriétés sont:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \cdot \sin n\theta \cdot d\theta = \begin{cases} \pi & m = n \neq 0 \\ 0 & m \neq n \text{ ou } m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \cdot \cos n\theta \cdot d\theta = \begin{cases} 2\pi & m = n = 0 \\ \pi & m = n \neq 0 \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \cdot \cos n\theta \cdot d\theta = 0 \quad \forall m \text{ et } n.$$

L'intégration analytique dans la direction tangentielle, permettra d'avoir un terme égal à  $\pi$  (ou à  $2\pi$  si l'harmonique nulle est considérée) dans tout élément de  $[K]^e$ . On pourra alors réécrire l'équation (3.11), en une autre forme plus simple:

$$[K] = \pi \int_A [B]^T [D][B] \cdot r \cdot dr \cdot dz \quad (3.13)$$

La matrice  $[B]^e$  présente dans cette expression est la même que celle dans l'équation (3.10-a), mais avec les termes  $\cos i\theta$ , et  $\sin i\theta$  enlevés.

L'intégration analytique des termes de la matrice de rigidité (3.13) n'est pas facile à effectuer, car il s'agit d'un élément à champ quadratique. En plus; elle entraîne de sérieuses difficultés pour les éléments dont les noeuds se trouvent sur l'axe de révolution ou à son voisinage. En effet, l'intégration analytique fait apparaître des termes qui deviennent infinis.

Lorsqu'un des noeuds se trouve sur l'axe, ces difficultés apparaissent également dans le calcul de certaines déformations ( $\epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{u}{r}$ , par exemple) au voisinage de l'axe. Dans ce cas, on peut soit écarter les noeuds sur l'axe d'une distance très faible, soit modifier les expressions algébriques incriminées au voisinage de l'axe. Cependant, l'intégration explicite constitue un choix maladroit et il est bien préférable de calculer les matrices de rigidité par intégration numérique. En effet, les difficultés d'intégration au voisinage de l'axe disparaissent. Par ailleurs, on peut utiliser des techniques d'intégration réduite qui améliorent les performances des éléments, et permettent de minimiser le temps de calcul.

En ce qui concerne l'élément axisymétrique Q8, le nombre minimal de points d'intégration est de 2 dans la direction radiale et de 2 également dans la direction verticale.

Pour mettre en lumière le découplage des différentes harmoniques, nous considérons maintenant le cas d'un chargement exprimé en  $M$  termes de la série de Fourier. La quantité à intégrer dans la matrice de rigidité est  $[B^{tot}]^T[D][B^{tot}]$ , où  $[B^{tot}]$  est composée des contributions des différentes harmoniques:

$$[B^{tot}] = [B^1 \ B^2 \ \dots \ B^M] \tag{3.14}$$

La matrice à intégrer, est une matrice pleine de dimension  $24 \times M$  par  $24 \times M$ , pour un élément de 24 degrés de liberté évidemment. Les éléments des sous matrices non diagonales dans la matrice de rigidité élémentaire totale (correspondant aux différentes harmoniques) contiennent les termes:  $\sin n\theta \cdot \sin m\theta$ , ou  $\cos n\theta \cdot \cos m\theta$ , où  $n$  et  $m$  représentent deux ordres d'harmoniques différents. En tenant compte des propriétés d'orthogonalité données par les équations (3.12), tous les termes de ces sous matrices s'annulent. On pourra alors, se rendre compte que la matrice  $[B^{tot}]^T[D][B^{tot}]$  n'est composée que d'une diagonale de  $M$  sous matrices de  $(24 \times 24)$  chacune. En effet; cette propriété permettra d'écrire les équations d'équilibre à résoudre sous la forme:

$$\begin{bmatrix} [K]^0 & & & \\ & [K]^1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \\ & 0 & & \\ & & & [K]^M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \vdots \\ u^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R^0 \\ R^1 \\ \vdots \\ R^M \end{Bmatrix} \tag{3.15}$$

Ce système met en évidence, le non couplage des différentes harmoniques.

### III.4- Conclusions

Compte tenu de la facilité relative de gérer un problème bidimensionnel, la résolution harmonique par série de Fourier constitue un choix très adroit dans le cas où le nombre de termes à considérer n'est pas important (pratiquement inférieur à 5).

On a vu que lors du calcul de la matrice de rigidité l'intégration dans la direction circonférencielle a été faite analytiquement, tandis qu'elle a été effectuée numériquement dans les deux autres directions, ce qui justifie le nom d'approche semi-analytique de la méthode exposée ici.

## Chapitre IV:

### Etude des pieux isolés sollicités en flexion en élasticité linéaire

#### Résumé:

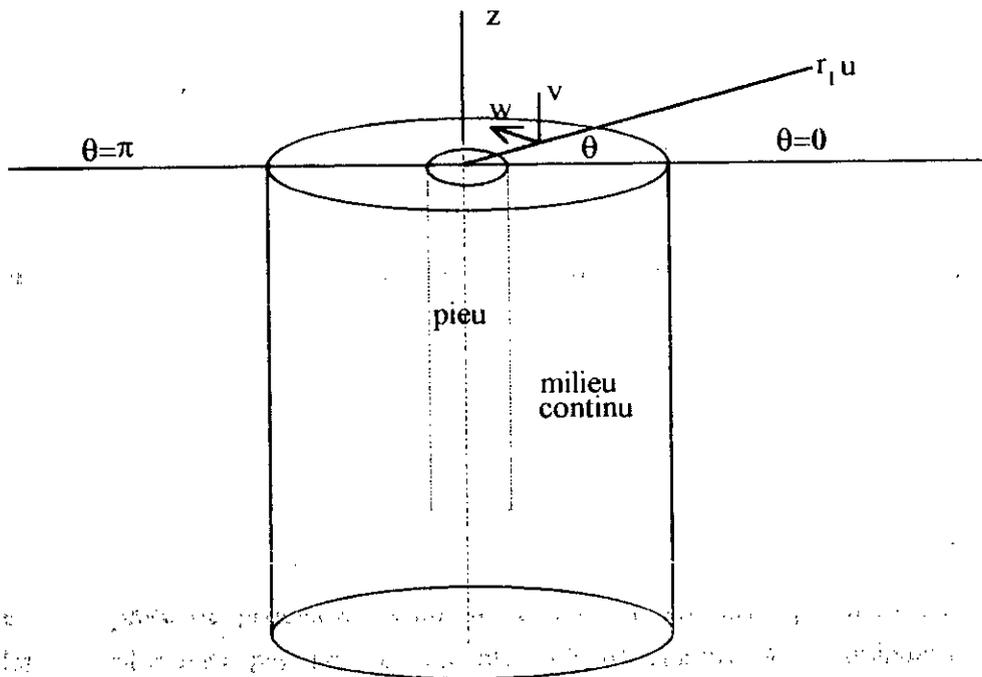
*Ce chapitre est la mise en oeuvre informatique de l'approche semi-analytique décrite au chapitre III, et son application aux pieux chagrés latéralement.*

*Après la description du modèle d'éléments finis utilisé et les équations analytiques qui serviront au calcul des éléments de réduction, on présentera l'organigramme du code numérique **ELASPULL** mis au point.*

*Pour que le modèle proposé puisse avoir une consistance, on finira le chapitre par la validation du code de calcul, en faisant des comparaisons avec les solutions exactes de la résistance des matériaux, et de la mécanique des milieux continus, ainsi qu'avec des résultats d'autres méthodes numériques.*

## IV.1- Introduction

Ce chapitre présente la mise en application sur ordinateur de la théorie développée au chapitre III. Du fait que le problème des pieux circulaires chargés horizontalement est un problème à symétrie de révolution et à chargement quelconque, l'approche semi-analytique est parfaitement adaptable à ce genre de problèmes. Compte tenu de la symétrie que présente le chargement (Effort latéral, Moment) par rapport au plan ( $\theta=0$ ) (Figure 4.1), uniquement les termes symétriques de la série de Fourier seront conservés.



**Figure 4.1:** Modèle cylindrique représentant le système sol-pieu, et les coordonnées adoptées.

La figure (4.1) montre le modèle cylindrique de l'ensemble sol-pieu, discrétisé en éléments finis, et les coordonnées cylindriques.

## IV.2- Hypothèses

Dans cette première partie, le sol est considéré comme étant un milieu isotrope, élastique et linéaire. Deux cas seront étudiés: Le cas des pieux fichés dans un sol homogène où le module d'Young est constant en profondeur, et le cas des pieux fichés dans un sol non-homogène; ce dernier est communément appelé sol de Gibson (Gibson, 1974) dont le module d'élasticité varie linéairement avec la profondeur et nul en surface.

Les pieux considérés sont des pieux de section circulaire pleine, avec un module d'élasticité  $E_p$ , et un coefficient de Poisson  $\nu_p$ . Le matériau constituant les pieux est également élastique, linéaire. Le système sol-pieu est supposé comme étant en parfaite adhérence, en d'autres termes, le glissement relatif et le décollement sol-pieu ne seront pas pris en compte.

### IV.3- Interprétation du chargement extérieur en termes de charges distribuées sur la circonférence

L'effort appliqué en tête  $H_0$  et le moment  $M_0$ , sont des efforts concentrés, ce qui nous oblige à les transformer en des charges distribuées sur la circonférence afin que la théorie précédemment décrite puisse être appliquée. En effet, le chargement extérieur peut être développé en utilisant la première harmonique ( $i=1$ ), ce qui veut dire que les symboles de sommation dans les équations (3.1) et (3.2) ne sont pas nécessaires. De ce fait, le chargement peut être mis sous la forme:

$$\begin{cases} F_r = \bar{F}_r \cos \theta \\ F_z = \bar{F}_z \cos \theta \\ F_\theta = \bar{F}_\theta \sin \theta \end{cases} \quad (4.1)$$

$F_r, F_z, F_\theta$  représentent les forces nodales par radian de la circonférence dans la direction radiale, verticale et tangentielle. Les déplacements associés à l'harmonique  $i=1$  auront la même

$$\text{forme: } \begin{cases} u = \bar{u} \cos \theta \\ v = \bar{v} \cos \theta \\ w = \bar{w} \sin \theta \end{cases} \quad (4.2)$$

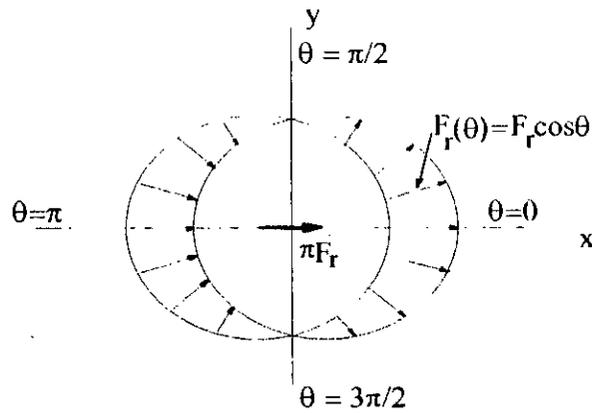
$u, v, w$  représentent respectivement le déplacement radial, vertical et circonférentiel.

#### IV.3.1- Cas d'une force $H_0$ , appliquée en tête de pieu

Considérons une charge radiale d'amplitude  $\bar{F}_r$ , distribuée sur la circonférence du pieu (Figure 4.2), avec  $\bar{F}_z = \bar{F}_\theta = 0$ .

D'après l'équation (4.3), on peut voir que cette charge engendre une force concentrée dans la direction horizontale  $x$ . En effet:

$$\bar{F}_r \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi \bar{F}_r \quad (4.3)$$



**Figure 4.2:** distribution d'une charge radiale

Cette même charge n'a aucun effet dans la direction  $Y$ , ce qui est bien confirmé par l'équation suivante:

$$\overline{F}_r \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = 0 \quad (4.4)$$

On peut donc conclure, qu'il est évident de remplacer une force ponctuelle  $H_\theta$ , par une densité de charge dans le sens radial dont l'amplitude est égale à  $\overline{F}_r = \frac{H_\theta}{\pi}$  et qui aura le même effet.

Considérons maintenant, une charge tangentielle d'amplitude  $\overline{F}_\theta$  distribuée sur la circonférence de la section du pieu, et  $\overline{F}_r = \overline{F}_z = 0$ . (Fig 4.3)

On peut voir que cette densité de charge, engendre une force concentrée dans la direction des  $x$  négatifs de valeur  $\pi \overline{F}_\theta$ . En effet:

$$\overline{F}_\theta \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi \overline{F}_\theta \quad (4.5)$$

Finalement, compte tenu des équations (4.3) et (4.5), on peut dire que l'effort  $H_\theta$ , appliqué en tête du pieu peut résulter, soit d'une application d'une densité de charge radiale d'amplitude  $H_\theta/\pi$ , soit d'une densité de charge tangentielle d'amplitude  $-H_\theta/\pi$ . Si on veut combiner les deux diagrammes, l'effort horizontal sera la résultante des deux distributions d'amplitudes respectivement  $H_\theta/2\pi$ , et  $-H_\theta/2\pi$ .

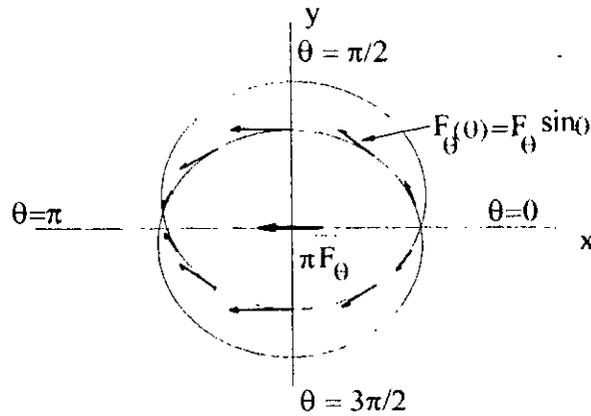


Figure 4.3: Distribution d'une charge tangentielle

**IV.3.2- Cas d'un moment  $M_0$  appliqué en tête du pieu**

Si on considère maintenant une densité de charge verticale  $F_z(\theta) = \bar{F}_z \cos \theta$ , d'amplitude  $\bar{F}_z$  (Figure 4.4), on s'aperçoit d'après l'équation (4.6) que cette distribution de charge engendre un moment  $\pi r_0 \bar{F}_z$ . En effet:

$$2r_0 \bar{F}_z \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = \pi r_0 \bar{F}_z \quad (4.6)$$

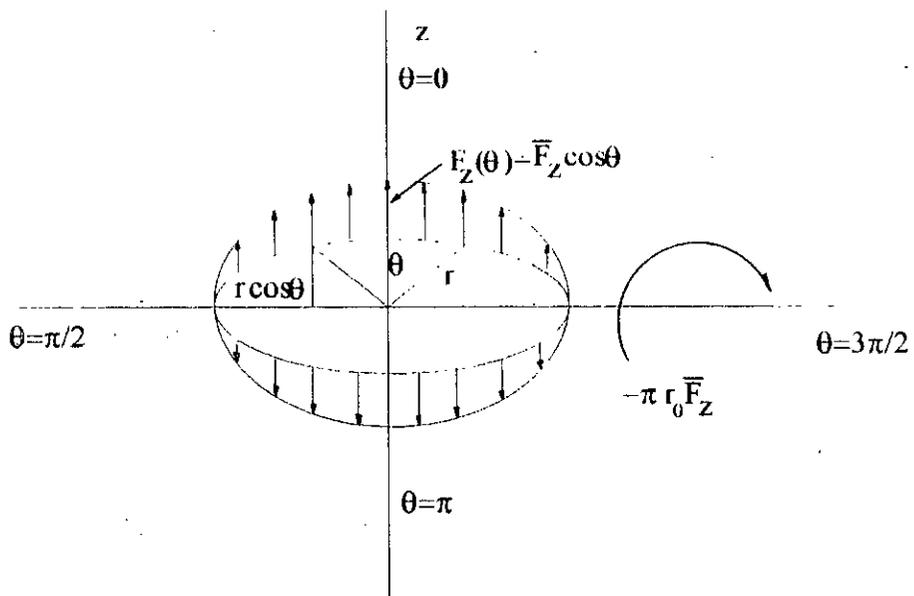


Figure 4.4: Distribution d'une charge verticale

Il est évident maintenant que le moment appliqué  $M_0$ , peut résulter d'une application de densité de charge d'amplitude  $-M_0/\pi r_0$ , dans la direction verticale.

Notons enfin, que les amplitudes déterminées seront introduites dans le vecteur force donné par l'équation (3. 9 ) qui servira à la résolution du système linéaire.

#### IV.4- Modèle d'éléments finis utilisé

La discrétisation en éléments finis, et le maillage utilisé pour représenter l'ensemble sol-pieu est illustré par la figure (4.5).

Afin de déterminer les dimensions du modèle, trois types de pieux ont été étudiés: pieux très flexibles, pieux de moyenne flexibilité et pieux très rigides.

Les frontières du modèle ont été envisagées selon le comportement du pieu considéré à travers ses grandeurs les plus déterminants en l'occurrence, le déplacement en tête, la rotation en tête et le moment maximum développé sur sa fiche.

La limite inférieure du modèle traduit un blocage, elle est supposée donc encastree ( $u = v = w = 0$ ). Dans le souci de déterminer la profondeur adéquate sensiblement précise, on a étudié trois profondeurs:  $0.25h$ ,  $0.4h$  et  $0.6h$  sous la pointe du pieu, tout en fixant la limite radiale du modèle à  $20$  diamètres.

Ces trois maillages n'ont pratiquement aucune influence sur les trois paramètres cités, et ce pour les trois types de pieux considérés. Compte tenu de cette constatation, la profondeur du modèle cylindrique a été fixée à  $1.4h$  à partir de la surface du sol. (Figure 4.5)

Les noeuds situés sur la frontière radiale sont supposés libres à se déplacer verticalement ( $u = w = 0, v \neq 0$ ). La recherche de la distance radiale, où l'influence des phénomènes mécaniques s'estompent rapidement a été faite en testant deux modèles différents de rayons  $20D$  et  $30D$  ( $D$ : diamètre du pieu). Ce test a révélé qu'une augmentation dans le rayon d'une valeur de  $10D$  n'a aucun effet sur le comportement des pieux flexibles, et ceux de flexibilité intermédiaire; tandis que pour les pieux très rigides une légère augmentation de 5% du moment maximum a été observée. Suite à ce test, la limite latérale du modèle a été choisie égale à  $20D$  (Figure 4.5).

#### IV.5- Evaluation des contraintes

Le calcul des éléments de réduction, tels que la rotation du pieu, le moment fléchissant, l'effort tranchant, et la réaction du sol, constitue le but primordial de l'étude des pieux sollicités horizontalement. Cependant, les résultats obtenus peuvent être imprécis, voire erronés si on n'arrive pas à utiliser la méthode adéquate pour déterminer les grandeurs considérées.

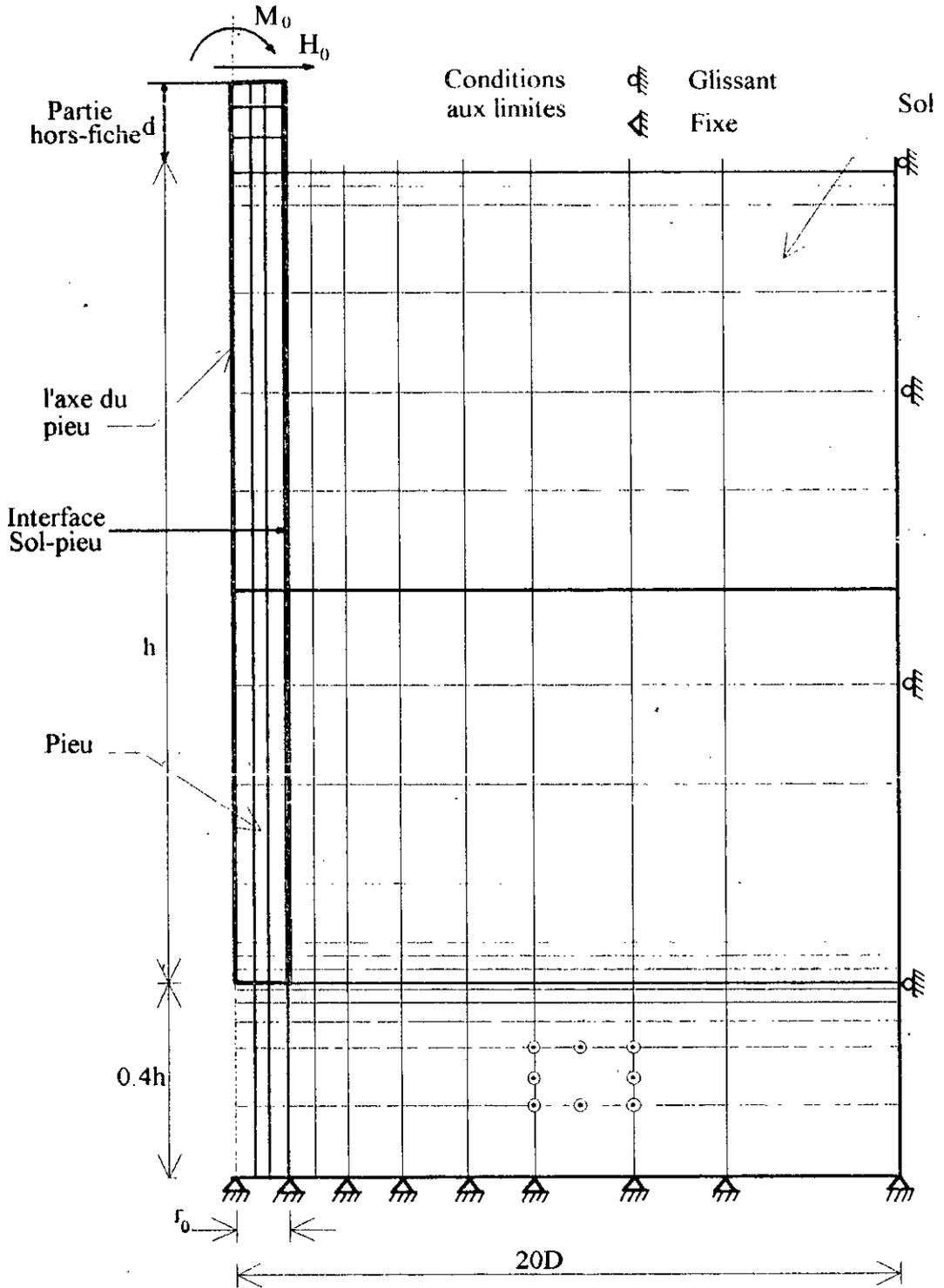


Figure 4.5: Discretisation en éléments finis du système Sol-pieu.

La formulation faite au chapitre III aboutit à la résolution numérique du système linéaire donné par l'équation (3.8) :  $[K]^i \{U\}^i = \{R\}^i$  pour l'harmonique  $i$  bien entendu. La résolution de ce système algébrique permet de déterminer les amplitudes de déplacement en tout point du milieu, et en particulier les déplacements du pieu. A partir des déplacements de l'axe du pieu, et en utilisant la théorie des poutres, on pourra facilement déterminer les éléments de réduction par différenciation successive des déplacements, en d'autres termes par différences finies. En effet, on pourra alors obtenir des résultats excellents pour la rotation et le moment fléchissant, mais les efforts tranchants, et les pressions pourront être sans signification physique. D'ailleurs on sait qu'il n'existe aucune méthode rigoureuse à l'heure actuelle qui donne les dérivées numériques d'ordre 3 ou 4 avec une précision, la raison pour laquelle, plusieurs chercheurs ont été amenés à utiliser des méthodes appropriées, telles que l'utilisation des Splines Cubiques (Desai, 1974) ou Quintiques (Bouafia, 1990), pour établir les courbes des efforts tranchants et des réactions du sol, à partir des courbes de moments fléchissants déterminées expérimentalement.

En écartant l'éventualité de déterminer l'effort tranchant et la pression du sol par la méthode des différences finies à partir des déplacements nodaux, le calcul des éléments de réduction peut se faire par le biais des contraintes, qui reste néanmoins un choix convenable. Toutefois, l'interprétation des champs de contraintes calculés pour les éléments finis de type déplacement pose des problèmes particuliers. En effet, les champs de contraintes sont discontinus d'un élément à un autre, ce qui peut soulever des difficultés d'interprétation.

Rappelons d'abord le principe de calcul des contraintes dans un élément. Après la résolution du système d'équations d'équilibre, on obtient les déplacements nodaux de chaque élément, il est alors facile d'appliquer la relation (3.4) donnant les contraintes à partir des déplacements élémentaires.

Parmi les stratégies envisageables pour évaluer les contraintes, on peut envisager deux possibilités:

- Calcul des contraintes moyennes aux noeuds.
- Calcul des contraintes aux points d'intégration.

La première méthode consiste à calculer les contraintes aux noeuds d'après l'équation (3.4). Les valeurs obtenues pourront être discontinues d'un élément à l'autre, il est souvent nécessaire pour chaque noeud de moyenner ces contraintes élémentaires. Ceci peut se faire soit aux noeuds principaux, soit aux noeuds d'interface. Dans notre étude, puisque les éléments utilisés sont intégrés numériquement, il est préférable de calculer les contraintes aux points d'intégration. En effet, c'est aux points d'intégration que l'on a la meilleure connaissance du champ des déformations

donc des contraintes (Barlow, 1977; 1989). Ainsi, la méthode généralement recommandée consiste à interpréter les contraintes calculées aux points d'intégration selon des fonctions d'interpolation choisies. En effet, puisqu'il s'agit de l'élément isoparamétrique à 8 noeuds, à champ de déplacement quadratique, on peut interpoler le champ de contraintes linéairement à l'intérieur de l'élément à l'aide des 4 points de Gauss envisagés (Hinton et Owen, 1977; et Cook et al., 1989).

Considérons un point quelconque  $p$ , à l'intérieur de l'élément (Figure 4.6). la contrainte en ce point peut être interpolée par la relation:

$$\sigma_p = \sum_{i=1}^4 N_i \sigma_i \tag{4.7}$$

Où  $\sigma_p$  peut être  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{\theta}, \dots, \tau_{xy}$ ; du point considéré  $p$ .  $\sigma_i$  peut être également l'une des 6 contraintes mais au point de Gauss  $i$ .  $N_i$  sont des fonctions de forme bilinéaires:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 \pm t)(1 \pm s) \tag{4.8}$$

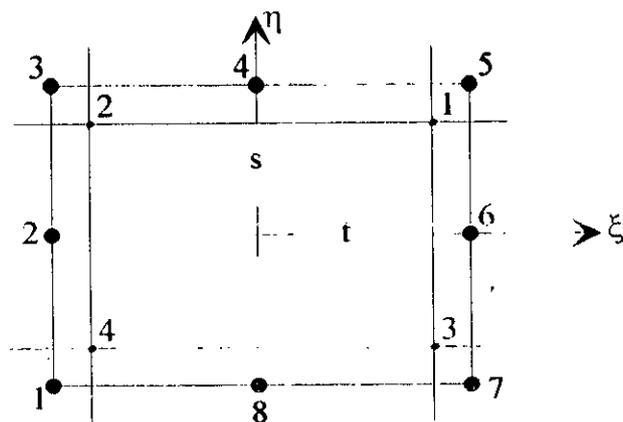


Figure 4.6: Élément isoparamétrique rectangulaire Q8

Les fonctions  $N_i$  seront évaluées aux coordonnées  $t$  et  $s$  du point  $p$ . Les coordonnées  $(\xi, \eta)$  de l'élément de référence sont liées aux coordonnées  $(t, s)$  par les expressions suivantes:

$$\begin{cases} t = \xi\sqrt{3} \\ s = \eta\sqrt{3} \end{cases} \tag{4.9}$$

Enfin, il faut noter qu'il est nécessaire de raffiner le maillage dans les zones où le calcul des contraintes est indispensable, des zones telles que le voisinage immédiat du pieu où la réaction du sol doit être évaluée.

## IV.6- Calcul des éléments de réduction à partir des contraintes sur le pieu

Après avoir déterminé les amplitudes des déplacements nodaux, le calcul des déformations et par conséquent les contraintes en tout point du milieu est simple. Il nous faut donc, calculer à partir des contraintes les éléments de réduction en l'occurrence.  $M$ ,  $T$  et  $P$  sur le pieu.

### IV.6.1- Calcul des Moments fléchissants

On peut calculer les moments soit à partir des contraintes normales  $\sigma_z$  à la section considérée, soit à partir de l'équilibre général du pieu, donc en fonction des pressions et des contraintes tangentielles sur la surface extérieure.

#### IV.6.1.a- Calcul à partir de $\sigma_z$

La distribution de la contrainte verticale  $\sigma_z$  varie linéairement avec  $r$  sur un diamètre (Figure 4.7).

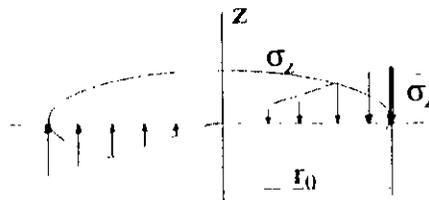


Figure 4.7: Distribution de la contrainte verticale le long du diamètre du pieu

En effet: 
$$\sigma_z = \bar{\sigma}_z \frac{r}{r_0} \cos \theta$$

où  $\bar{\sigma}_z$  est l'amplitude de la contrainte verticale dans l'élément du pieu à son interface avec le sol. Cette loi de flexion des poutres est bien vérifiée par les éléments finis. Le moment fléchissant à partir de cette contrainte peut être donné par:

$$M(z) = -2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r_0} \sigma_z r \cos \theta dr d\theta$$

En substituant la valeur de  $\sigma_z$  par sa valeur en fonction de  $\bar{\sigma}_z$ , et en effectuant l'intégration analytiquement on obtient:

$$M(z) = -\frac{\pi r_0^3}{4} \bar{\sigma}_z(z) \quad (4.10)$$

#### IV.6.1.b- Calcul à partir de $P(z)$ et de $\tau_{rz}$

Le moment fléchissant peut être calculé à partir des sollicitations extérieures ( $H_0$ ,  $M_0$ ), et de  $\tau_{rz}$  et  $P(z)$ , en considérant l'équilibre d'un tronçon de côté  $z$ :

$$M(z) = M_0 + H_0 z + 4 \int_0^z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau_{rz} r_0 \cos \theta r_0 d\theta dz - \int_0^z P(x)(z-x) dx$$

Sachant que:  $\tau_{rz} = \bar{\tau}_{rz} \cos \theta$ , avec  $\bar{\tau}_{rz}$  l'amplitude à l'interface sol-pieu; on obtient donc:

$$M(z) = M_0 + H_0 z + \pi r_0^2 \int_0^z \bar{\tau}_{rz}(z) dz - \int_0^z P(x)(z-x) dx \quad (4.11)$$

cette equation paraît plus complexe en comparaison avec l'équation (4.10) qui ne contient qu'un seul terme.

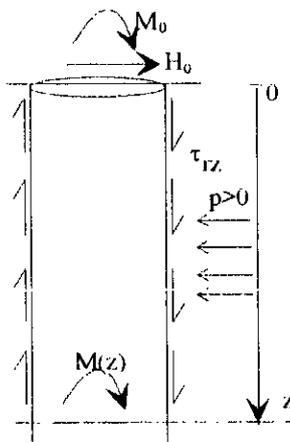


Figure 4.8: Evaluation du moment fléchissant à partir de  $P(z)$  et de  $\tau_{rz}$

#### IV.6.2- Calcul des efforts tranchants

Pour le calcul des efforts tranchants, deux méthodes sont possibles également.

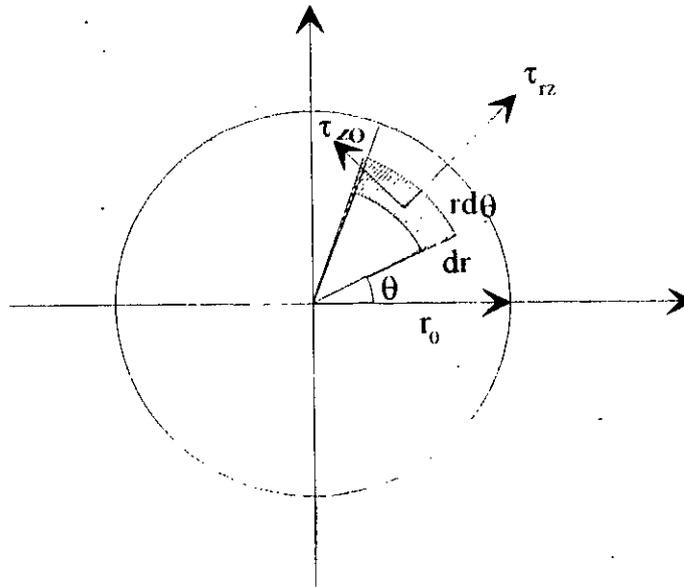
**IV.6.2.a- Calcul à partir des contraintes tangentielles  $\tau_{rz}$  et  $\tau_{z\theta}$**

L'effort tranchant à la côte  $z$ , peut être déterminé à partir des contraintes tangentielles  $\tau_{rz}$  et  $\tau_{z\theta}$  (Figure 4.9). En effet:

$$T(z) = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} (\tau_{rz}(z) \cos \theta - \tau_{z\theta} \sin \theta) r dr d\theta$$

Sachant que: 
$$\begin{cases} \tau_{rz} = \bar{\tau}_{rz} \cos \theta \\ \tau_{z\theta} = \bar{\tau}_{z\theta} \sin \theta \end{cases}$$

où  $\bar{\tau}_{rz}$ , et  $\bar{\tau}_{z\theta}$  sont les amplitudes au point appartenant au pieu et distant de  $r$  de l'axe de celui-ci.



**Figure 4.9:** Evaluation de l'effort tranchant à partir des contraintes tangentielles  $\tau_{rz}$  et  $\tau_{z\theta}$

En faisant la substitution, et en effectuant l'intégration suivant  $\theta$  on aura:

$$T(z) = \pi \int_0^{r_0} (\bar{\tau}_{rz}(r,z) - \bar{\tau}_{z\theta}(r,z)) r dr \tag{4.12}$$

**IV.6.2.b- Calcul à partir de la réaction du sol  $P(z)$**

Contrairement à l'équation précédente l'effort tranchant peut être évalué à partir des sollicitations extérieures. En effet,

$$T(z) = H_0 - \int_0^z P(z) dz \tag{4.13}$$

**IV.6.3- Calcul de la réaction du sol**

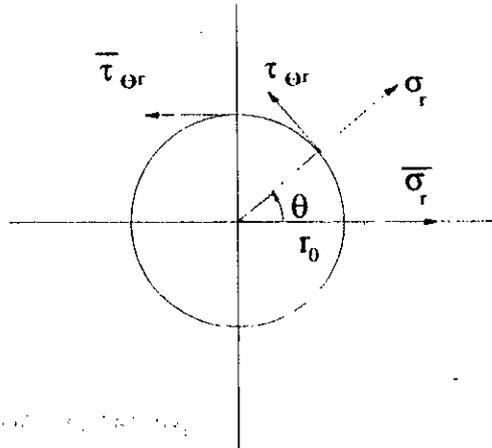
Le calcul de la réaction du sol sur une section de côte  $z$ , peut être obtenu par l'intégration des composantes horizontales de  $\sigma_r$  et  $\tau_{\theta r}$  agissant sur la circonférence de la section considérée. En effet:

$$P(z) = \int_0^{2\pi} (-\sigma_r \cos \theta + \tau_{\theta r} \sin \theta) r_0 d\theta$$

En tenant compte de ce que: 
$$\begin{cases} \sigma_r = \bar{\sigma}_r \cos \theta \\ \tau_{\theta r} = \bar{\tau}_{\theta r} \sin \theta \end{cases}$$

où  $\bar{\sigma}_r$  et  $\bar{\tau}_{\theta r}$  sont les amplitudes de  $\sigma_r$  et  $\tau_{\theta r}$  sur la circonférence. Après la substitution, et l'intégration, l'expression de  $P(z)$  aura la forme:

$$P(z) = \pi r_0 (-\bar{\sigma}_r(z) + \bar{\tau}_{\theta r}(z)) \tag{4.14}$$



**Figure 4.10:** Evaluation de la réaction du sol

Notons enfin, que les éléments de réduction peuvent être également déterminés par différences finies, à partir des déflexions du pieu, en utilisant l'équation classique des poutres fléchies.

Toutefois, l'utilisation de la méthode des différences finies pour l'estimation des éléments de réduction à partir des déplacements de l'axe du pieu peut donner des résultats très imprécis, notamment ceux de la réaction du sol.

L'écriture des moments fléchissants, de l'effort tranchant et de la réaction du sol, exprimés en formes de différences finies, est détaillée en annexe 1.

#### IV.7- Description du programme numérique mis au point pour l'étude des pieux chargés horizontalement, en élasticité linéaire et isotrope

Le programme élaboré est la mise en oeuvre sur ordinateur de la technique décrite dans les paragraphes précédents. Ce programme est le premier des deux logiciels mis au point décrits dans cette thèse. Il est destiné à l'étude des pieux circulaires soumis à un effort latéral en tête, ou un moment en tête dans un milieu élastique linéaire et isotrope.

Ce programme numérique baptisé **ELASPULL** (Elastic Study of Piles Under Lateral Loads) est écrit en Fortran 77, et comporte 21 sous-routines dont l'enchaînement est illustré par la figure (4.11).

Comme tout autre programme d'analyse par éléments finis le code **ELASPULL** débute par une lecture des caractéristiques géométriques et de calcul, ainsi que les conditions aux limites imposées au modèle cylindrique sol-pieu. Cette tâche est confiée aux deux routines **LECTRE** et **COLIM**.

Pour permettre à la technique de séries de Fourier d'être appliquée aux pieux soumis aux efforts de flexion, les pieux étudiés sont des pieux circulaires permettant d'avoir un problème à symétrie de révolution. Cette particularité paraît comme une limitation de l'applicabilité du programme mis au point, mais en réalité l'application peut être étendue à n'importe quel type de pieux, de n'importe quelle forme de section, pour la simple raison que le comportement latéral des pieux est complètement contrôlé par sa rigidité à la flexion  $(EI)_p$ . En effet, le rôle du sous-programme **PROPIL** est d'attribuer à chaque élément du pieu un module d'Young équivalent défini à partir de la rigidité de flexion effective du pieu et l'inertie d'une section circulaire pleine du même diamètre.

Parfois, les pieux étudiés présentent plusieurs rigidités flexionnelles le long de leurs fiches, ce qui soulève certaines difficultés. Pour palier à cet inconvénient, le maillage en éléments finis est choisi de telle manière que les frontières inter-élément de l'interface sol-pieu coïncident avec les points de transition des rigidités. Si le pieu est fiché dans un sol à rigidité uniformément distribuée (constante ou à variation linéaire) l'utilisateur se contentera uniquement de spécifier la valeur du module d'élasticité en surface et son taux d'accroissement avec la profondeur. En revanche, si le sol est un multi-couche présentant une rigidité variable avec la profondeur, l'utilisateur du code **ELASPULL** doit spécifier pour chaque élément deux valeurs du module d'Young : une à son interface supérieure, l'autre à son interface inférieure. Le sous-programme **PROSOL** permettra la lecture de ces éléments et attribuera à chaque point de Gauss la rigidité appropriée.

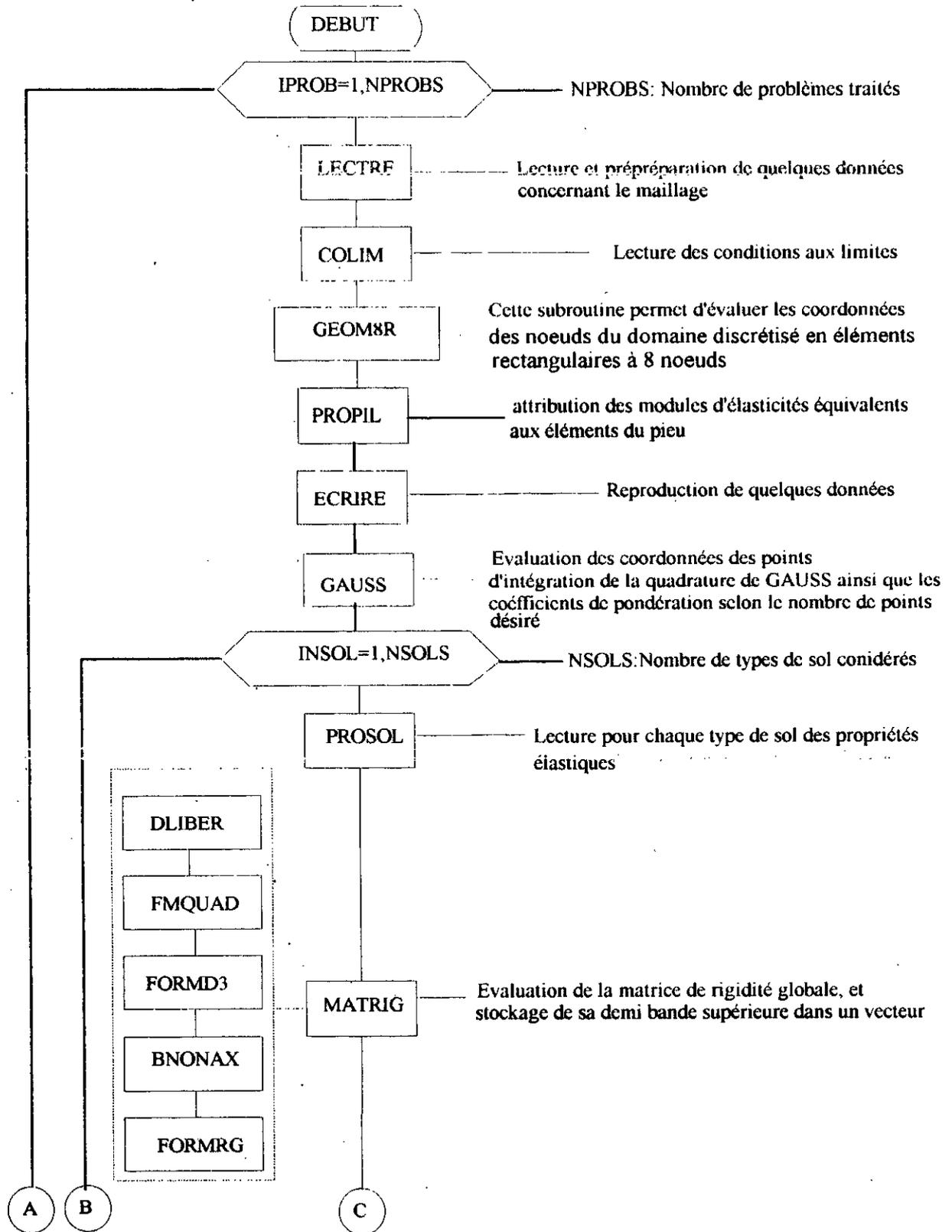


Figure 4.11: Organigramme du programme ELASPULL

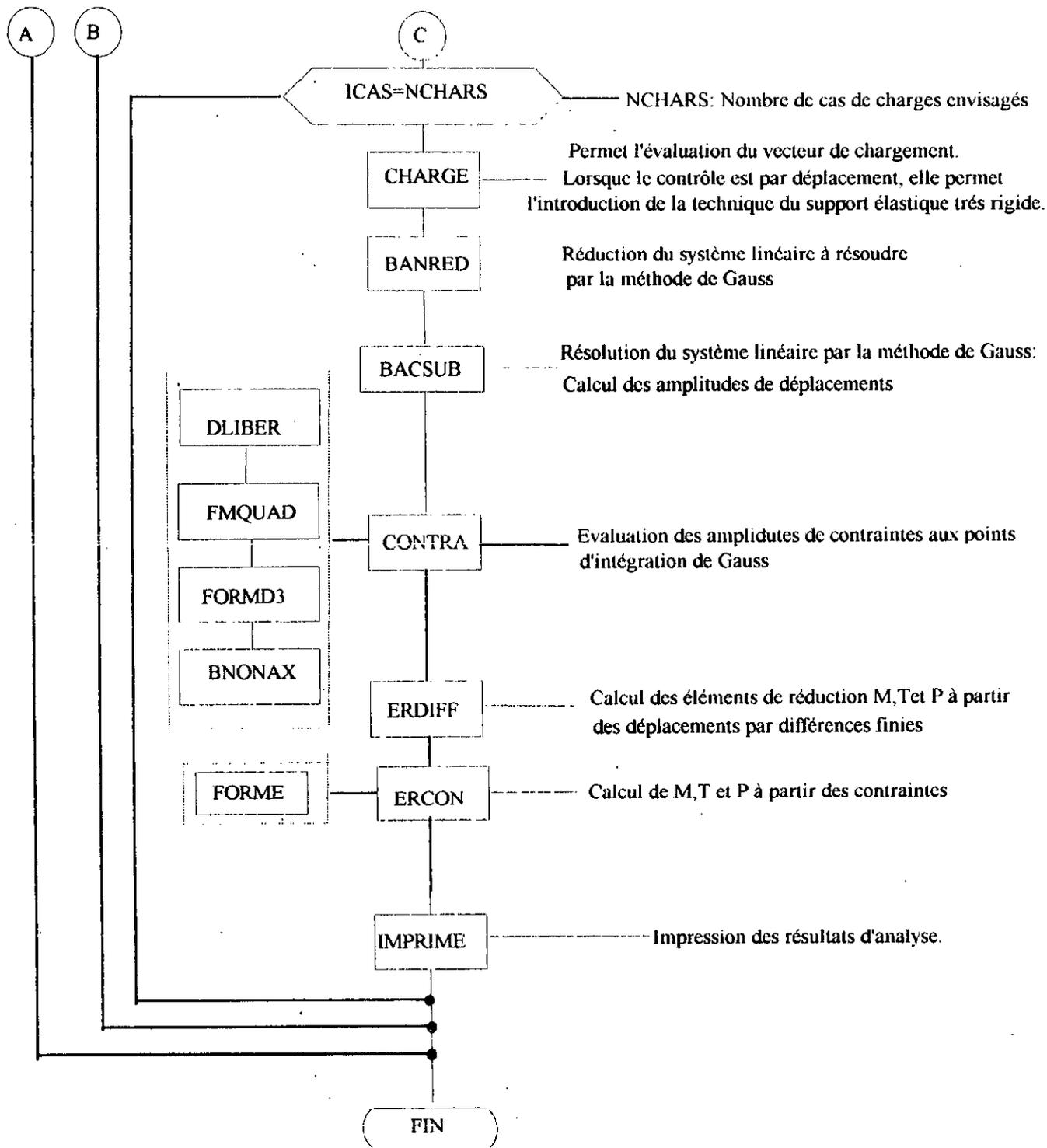


Figure 4.11: Organigramme du programme ELASPULL (suite)

### IV.7.1- Formation de la matrice de rigidité globale et résolution du système linéaire

Comme nous l'avons évoqué au chapitre III, l'élément choisi pour l'étude des pieux soumis aux sollicitations latérales est l'élément isoparamétrique torique à section rectangulaire à 8 noeuds. Cet élément présente un champ quadratique de déplacement, et a la particularité de traiter convenablement les problèmes de flexion. La matrice de rigidité élémentaire a été établie par l'équation (3. 13):

$$[K]^i = \pi \int_A [B]^T [D] [B]^i r dA \quad \text{pour l'harmonique } i \geq 1$$

L'intégration de cette matrice sur la surface élémentaire A est une intégration réduite faite par un schéma de Gauss à (2x2=4) points de Gauss. Le sous-programme MATRIG permet l'évaluation de la matrice de rigidité élémentaire et l'assemblage de la matrice globale, en faisant appel à 5 sous-routines: DLIBER, FMQUAD, FORMD3, BNONAX et FORMRG. Ces dernières font les tâches standards de l'analyse par la méthode des éléments finis (Zienkiewicz, 1977).

Bien que la discrétisation en éléments finis du système sol-pieu est faite uniquement dans un plan radial le problème est tridimensionnel, en d'autres termes, chaque noeud possède 3 degrés de liberté. Le nombre considérable des éléments de la matrice de rigidité globale, nous oblige à choisir un mode de stockage approprié, permettant de minimiser l'espace mémoire sur ordinateur. En effet, le sous-programme FORMRG, permet le stockage de la demi-bande supérieure de la matrice globale pour raison de symétrie.

L'introduction des sollicitations extérieures, et l'évaluation du vecteur de chargement se feront selon la nature du problème traité. Si le but de l'analyse est de traiter les déformations du sol-pieu, l'utilisateur spécifiera les efforts extérieurs  $H_0$  ou  $M_0$ . En revanche, s'il s'agit d'un problème contrôlé par déplacement (calcul de la charge de rupture par exemple), l'utilisateur doit spécifier les degrés de liberté et les amplitudes des déplacements imposés. Le sous-programme CHARGE évalue les amplitudes du chargement extérieur, qui vont servir comme second membre, au système d'équations d'équilibre. Si le 2<sup>ème</sup> cas se présente la sous-routine CHARGE fera appel à la technique des supports très rigides (Smith et Griffith, 1988) pour tenir compte des déplacements imposés. En effet, cette technique permet de reproduire les mêmes valeurs des déplacements imposés après la résolution du système linéaire. On réécrit donc le système algébrique (équation 3.8) correspondant à l'harmonique  $i$ :

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{3n,1} & K_{3n,2} & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \dots \\ \bar{w}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{R}_{1,1} \\ \bar{R}_{2,1} \\ \bar{R}_{0,1} \\ \dots \\ \bar{R}_{0n} \end{pmatrix}$$

Si par exemple on impose au noeud 1 un déplacement circonférentiel égal à  $\Delta w$ ; ceci signifie que  $\bar{w}_1 = \Delta w$ . Pour avoir cette solution après résolution du système, la technique du ressort fictif très rigide consiste à ajouter à l'élément diagonal de la matrice de rigidité globale correspondant au degré de liberté imposé une rigidité très grande disons  $10^{20}$  KN/m par exemple. En plus, on remplace l'élément du vecteur force correspondant au déplacement imposé par la rigidité modifiée multipliée par le déplacement imposé. En tenant compte du déplacement circonférentiel imposé au noeud 1, mathématiquement le système précédent devient:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} + 10^{20} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{3n,1} & K_{3n,2} & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \dots \\ \bar{w}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{R}_{1,1} \\ \bar{R}_{2,1} \\ (K_{33} + 10^{20}) \Delta w \\ \dots \\ \bar{R}_{0n} \end{pmatrix}$$

Ce système est donc entièrement défini et pourra être résolu par n'importe quelle méthode numérique. On écrit l'équation 3 du système précédent, on aura:

$$K_{31} \bar{u}_1 + K_{32} \bar{v}_1 + (K_{33} + 10^{20}) \bar{w}_1 + \dots = (K_{33} + 10^{20}) \Delta w$$

En divisant les termes des deux membres par:  $(K_{33} + 10^{20})$  et négligeant les termes infiniment petits on obtient:  $\bar{w}_1 = \Delta w$ , qui est en fait le déplacement imposé au début du problème. La précision de la méthode dépend évidemment de la valeur de la rigidité choisie, la méthode est donc autant précise que la rigidité est plus grande.

La résolution du système linéaire (équation 3.8) se fait par la méthode d'élimination de Gauss. Cette tâche est confiée aux deux sous-programmes BANRED et BACSUB.

## IV.7.2- Evaluation des contraintes et des éléments de réduction

Comme nous l'avons vu à la section précédente, la matrice de rigidité est intégrée numériquement. En effet, la subroutine CONTRA permet de déterminer les amplitudes des contraintes aux points d'intégration de Gauss pour les raisons évoquées au paragraphe (IV.5).

Dans le but de calculer la rotation, le moment fléchissant, l'effort tranchant, et la réaction du sol, deux sous-programmes ont été créés dans le programme **ELASPULL**: les sous-programmes **ERDIFF**, et **ERCON**. Le premier permet de déterminer les éléments de réduction à partir des déplacements du pieu en utilisant les équations des poutres fléchies, et par différenciation numérique, le second sous-programme utilise les équations développées au paragraphe (IV.6). Finalement, le programme **ELASPULL** se termine par le sous-programme **IMPRIME**, qui se charge évidemment d'imprimer les résultats d'analyse obtenus.

On peut dire finalement, que le programme informatique **ELASPULL** est écrit de telle façon qu'il peut traiter n'importe quel type de sol élastique linéaire (variation quelconque ou uniforme des paramètres élastiques). Il est adapté également à analyser des pieux de rigidité constante ou variable le long de la fiche et sous sollicitation de  $H_0$ , de  $M_0$  ou l'action simultanée des deux.

Le programme **ELASPULL** a été réalisé par l'auteur au sein du centre de calcul de l'Ecole Nationale Polytechnique d'El-Harrach, Alger. Il a été exécuté sur VAX et sur PC.

## IV.8- Validation du code ELASPULL

### IV.8.1- Comparaison avec une poutre cantilever sollicitée en flexion

La méthode la plus rigoureuse de valider un modèle numérique est de comparer ses résultats, avec les solutions exactes provenant de la théorie de résistance des matériaux. Dans ce contexte on considère une poutre cantilever de section circulaire et de rigidité flexionnelle  $(EI)_p=100$ . La poutre est soumise à son extrémité libre à un effort latéral  $H_0=1$ , puis un moment  $M_0=1$ . Dix éléments et 53 noeuds ont été utilisés pour discrétiser la poutre (Figure 4.12). Le tableau (4.1) montre les résultats de la méthode des éléments finis, comparés aux solutions exactes de la théorie des poutres flechies pour la poutre soumise à l'effort latéral. Les déflexions sont en parfaite concordance, l'erreur est inférieure à 1%. On constate, que les moments fléchissants obtenus par la méthode des éléments finis à partir des contraintes reproduisent avec une grande précision, ceux de la résistance des matériaux. Toutefois on a remarqué que les moments fléchissants obtenus par différences finies sont moins précis (ne sont pas représentés ici).

Côte z	Théorie des poutres		Méthode des éléments finis (ELASPULL)	
	Déflexions	Moment fléchissant	Déflexions	Moment fléchissant
0.00	3.333	0.00	3.322	0.00
1.00	2.835	1.00	2.825	0.988
2.00	2.346	2.00	2.338	1.987
3.00	1.878	3.00	1.871	2.994
4.00	1.440	4.00	1.434	3.998
5.00	1.041	5.00	1.037	4.997
6.00	0.693	6.00	0.689	5.985
7.00	0.405	7.00	0.402	6.947
8.00	0.186	8.00	0.185	7.881
9.00	0.048	9.00	0.049	8.795
10.00	0.000	10.00	0.000	10.270

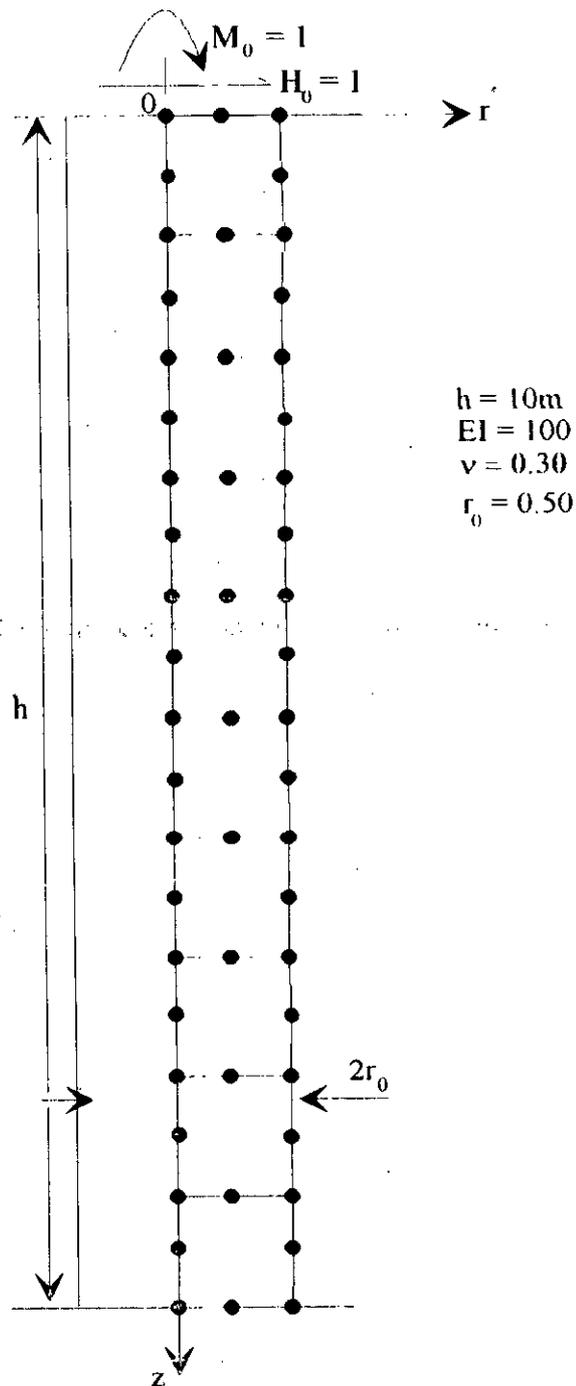
**Tableau 4.1:** Poutre cylindrique Cantilever soumise à un effort latéral à son extrémité libre  $H_0 = 1$

Le tableau (4.2) présente les résultats de la poutre soumise à un moment  $M_0 = 1$  en tête. Les mêmes constatations peuvent être faites sur les déplacements latéraux, et les moment flechissants calculés à partir des contraintes.

Côte z	Théorie des poutres		Méthode des éléments finis (ELASPULL)	
	Déflexions	Moment fléchissant	Déflexions	Moment fléchissant
0.00	0.500	1.00	0.497	1.000
1.00	0.405	1.00	0.402	1.029
2.00	0.320	1.00	0.318	0.987
3.00	0.245	1.00	0.243	0.988
4.00	0.180	1.00	0.178	0.995
5.00	0.125	1.00	0.123	0.997
6.00	0.080	1.00	0.079	0.997
7.00	0.045	1.00	0.044	0.994
8.00	0.020	1.00	0.019	0.988
9.00	0.005	1.00	0.005	0.982
10.00	0.000	1.00	0.000	1.024

**Tableau 4.2:** Poutre cylindrique Cantilever soumise à un moment à son extrémité libre  $M_0 = 1$

Les résultats de ce test confirment la validité du modèle proposé pour l'étude des pieux chargés latéralement, et montrent les performances de l'élément torique à 8 noeuds à l'égard des problèmes de flexion.



**Figure 4.12:** poutre cantilever cylindrique soumise à:  
 a) effort lateral  $H_0=1$ , b) Moment  $M_0=1$

#### IV.8.2- Comparaison des résultats d'un pieu sollicité horizontalement avec d'autres méthodes

Pour montrer la consistance du modèle numérique proposé, on compare les résultats obtenus de l'analyse harmonique par éléments finis avec les résultats d'autres méthodes utilisant l'approche du continuum ou se basant sur la théorie du module de réaction. En effet, toutes ces méthodes seront appliquées à un pieu vertical d'une rigidité flexionnelle constante, et fiché dans un sol élastique, ce dernier pourra être homogène (Poulos et Davis, 1980), ou muni d'un module d'élasticité variant linéairement (Banerjee et Davies, 1978; Randolph, 1981).

En premier lieu, la comparaison des résultats de la présente méthode est faite avec les solutions de la méthode des équations intégrales de Poulos et Davis, 1980.

Dans cette analyse les résultats sont exprimés en fonction de l'élanement, et le facteur de flexibilité. Ces paramètres ont été définis dans l'étude bibliographique comme étant respectivement

$$\frac{h}{D}, \text{ et } K_r = \frac{E_p I_p}{E_s h^3}$$

Lorsqu'un pieu est soumis à une charge horizontale  $H_0$  en tête, on peut exprimer le déplacement et la rotation de la tête  $u_0$ , et  $\theta_0$ , en fonction des facteurs d'influence:

$$I_{uH} = \frac{u_0 E_s h}{H_0} \quad (4.15)$$

$$I_{\theta H} = \frac{\theta_0 E_s h^2}{H_0} \quad (4.16)$$

Pour ce cas le moment maximum développé sur le pieu, pourra être exprimé en fonction du facteur adimensionnel:  $\frac{M}{H_0 h}$

Dans cette étude comparative on s'est limité à un pieu d'élanement  $\frac{h}{D} = 25$ , muni d'un coefficient de poisson  $\nu_p = 0.33$ . Les figures (4.13), (4.14) et (4.15) montrent les résultats du calcul numérique de comparaison.

On note tout d'abord que les résultats de Poulos ont été obtenus en exécutant le code **PULL2B** tandis que le code **COM622** a fourni les résultats de la théorie du module de réaction.

On constate que la concordance est bonne entre les résultats de l'analyse harmonique, et les résultats de la méthode des équations intégrales de Poulos pour les pieux d'intermédiaire et de grandes valeurs de facteur de flexibilité. Toutefois, on remarque que les résultats du programme **PULL2B** dépassent ceux de la présente méthode (programme **ELASPULL**), notamment les valeurs de  $I_{UH}$  et  $I_{GH}$  car la méthode de Poulos surestime les déplacements et les rotations.

Le module de réaction nécessaire au code **COM622** a été pris égal au module d'Young utilisé dans les deux autres méthodes du continuum élastique. On constate tout d'abord, pour la catégorie des pieux très rigides que les mouvements, et les moments maximaux issus des trois méthodes concordent bien, mais pour les pieux flexibles, on remarque que le fait d'ignorer les efforts de cisaillement, entre les différentes couches horizontales du sol dans la théorie du module de réaction mène à une surestimation des deflexions, et des moments fléchissants sur le pieu. Par ailleurs, on constate que le moment maximum évalué par la méthode des éléments finis et celui de Poulos sont en parfaite accord sur toute la gamme des facteurs de flexibilité.

Un autre aspect de comparaison est la déformée des pieux. Randolph (1977,1981) a présenté des courbes généralisées de la déformée de la partie supérieure des pieux; c'est à dire la partie s'étendant au point où le déplacement est nul. Cette profondeur est appelée profondeur critique.

Les profils des déplacements obtenus par l'analyse harmonique montrent une différence majeure dans le comportement des pieux flexibles, et des pieux rigides (Figure 4.16). Cependant, la représentation par une seule déformée peut alors entraîner des difficultés d'interprétation.

En examinant la figure (4.16), on remarque que le centre de rotation est inexistant, pour les pieux flexibles, c'est à dire tous les déplacements sont dans la direction de l'effort appliqué, pour toute la hauteur de fiche. Néanmoins, le centre de rotation ( $u=0$ ) est plus clair pour la gamme des pieux rigides.

Un comportement où les déplacements de la totalité de la longueur du pieu sont dans la direction de l'effort appliqué ne pourra pas être traité par la méthode dite des courbes P-Y, pour la simple raison que le pieu ne peut être en équilibre des moments. En revanche, cette éventualité est possible. Dans la méthode des éléments finis, du fait que les forces d'interaction sur le pieu ne sont pas déterminées par les déplacements locaux uniquement.

A partir du profil des pieux flexibles (Figure 4.16), on peut se rendre compte que la limite inférieure du maillage d'éléments finis a été prise suffisamment large. En général, une subdivision du maillage en 20 éléments dans le sens vertical pourra fournir des résultats suffisamment précis.

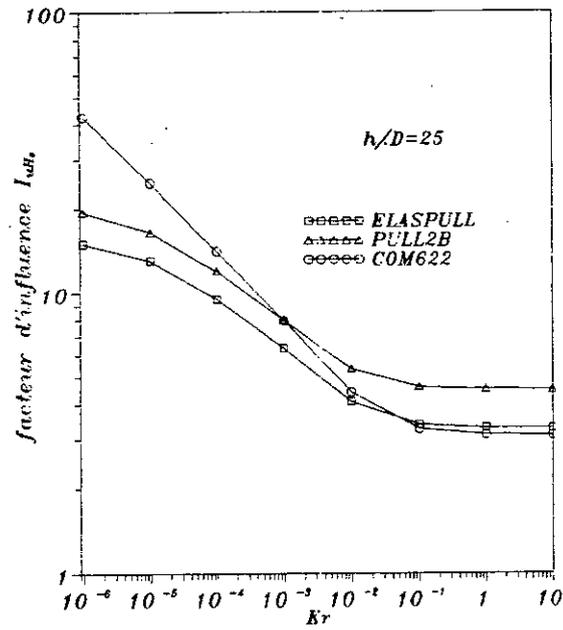


Figure 4.13: Variation du facteur d'influence  $I_{ph}$ , en fonction du facteur de flexibilité  $K_r$ .

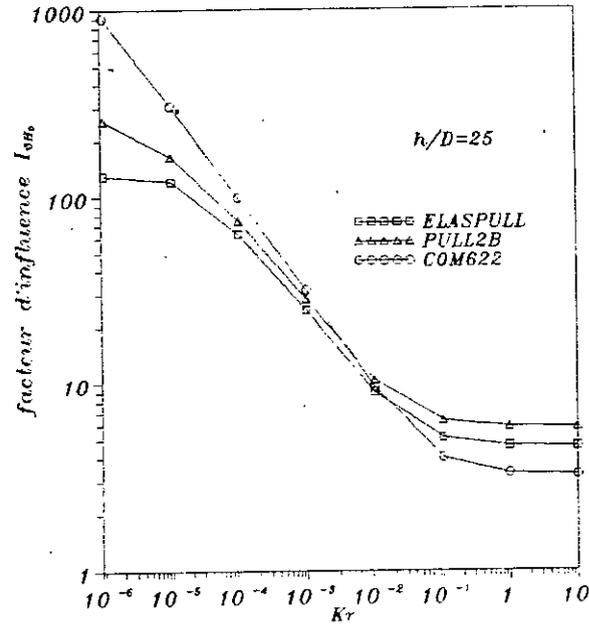


Figure 4.14: Variation du facteur d'influence  $I_{ph}$ , en fonction du facteur de flexibilité  $K_r$ .

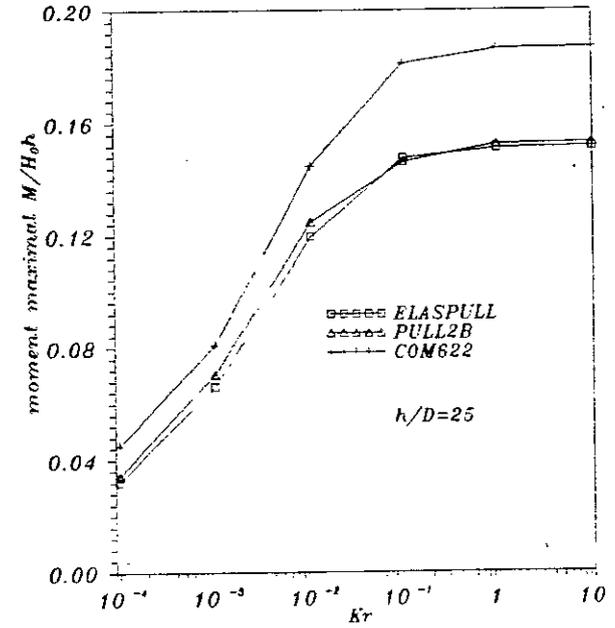


Figure 4.15: Variation du moment maximum en fonction du facteur de flexibilité  $K_r$ .

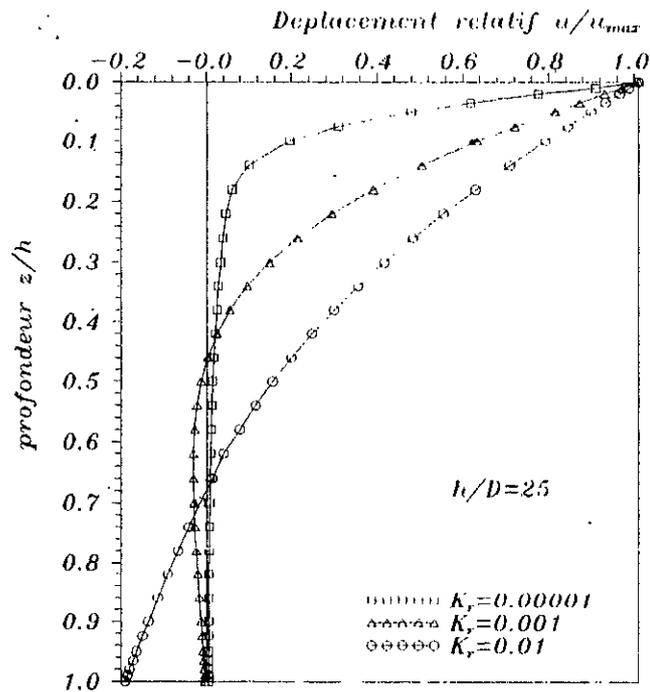


Figure 4.16: Deformées des pieux

Afin d'apprécier les aptitudes du modèle proposé dans l'analyse d'autres profils de sol, autres que le sol homogène qui a été considéré plus haut, on étudiera un pieu vertical soumis aux efforts de flexion ( $H_0$ ,  $M_0$ ) en tête, et fiché dans un milieu non-homogène, caractérisé par une rigidité à variation linéaire avec la profondeur dont le module d'Young est nul en surface ( $E_s(0) = 0$ ). On entreprendra une discussion plus détaillée sur ce type de non-homogénéité dans le chapitre suivant. Le travail consiste à comparer les résultats de la méthode proposée avec les résultats des méthodes du continuum élastique en l'occurrence: méthodes de Banerjee et Dávis (1978), de Poulos (1987), de Poulos et Hull (1992) et de Randolph (1977), appliquées également au profil non-homogène envisagé.

Les éléments de comparaison seront les facteurs d'influence proposés par Banerjee et Davies (1978) et Davies (1979), fonctions du module d'Young correspondant à la pointe du pieu  $E_s(h)$ , à la différence de beaucoup d'autres auteurs qui prennent le taux de variation du module d'élasticité avec la profondeur comme le paramètre principal qui caractérise les facteurs d'influence. Ces facteurs sont:

$$I_{H_0H_0} = \frac{u_0 E_s(h) h}{H_0}, \quad I_{H_0M_0} = \frac{u_0 E_s(h) h^2}{M_0}, \quad I_{M_0M_0} = \frac{\theta_0 E_s(h) h^3}{M_0}, \quad \text{et} \quad I_{FH_0} = \frac{u_0 E_s(h) h}{H_0}$$

Les trois premiers correspondent à un pieu libre en tête, tandis que le dernier est le facteur donnant le déplacement en tête d'un pieu encastré dans un chapeau très rigide, qui empêche toute rotation en tête ( $\theta_0=0$ ).

La comparaison consiste alors à étudier et analyser deux pieux verticaux d'élanements respectivement  $\frac{h}{D} = 20$  et  $\frac{h}{D} = 40$ . Pour se situer aux extrémités de la gamme des pieux généralement rencontrés en pratique, on s'intéresse à deux facteurs de flexibilité  $K_r = 10^{-4}$  et  $K_r = 10^{-1}$  représentant respectivement des pieux flexibles et rigides. Notons que le facteur de

flexibilité est celui de Davies (1979):  $K_r = \frac{E_p I_p}{E_s (h) h^4}$ .

Le tableau 4.3 rassemble tous les éléments de calcul obtenus par les différentes méthodes considérées. On constate d'abord que les résultats de Poulos et Hull sont trop conservatifs. En effet, une surestimation importante des déplacements et des rotations, même pour les pieux encastrés en tête. En termes de comparaison, les différences enregistrées entre les résultats de cette méthode et ceux de l'analyse harmonique peuvent atteindre 30% pour les pieux flexibles. Les résultats de Poulos et Hull, pour les pieux rigides sont encore moins encourageants. En effet, les divergences peuvent atteindre dans ce cas 60%. De ce fait, il est parfaitement clair que cette méthode est inadéquate aux profils de forte hétérogénéité. Par ailleurs, on remarque que les résultats de Poulos (1987) sont plus proches de ceux de l'analyse harmonique. En fait, un écart de 12% est constaté dans les déplacements des pieux soumis aux efforts latéraux. Cependant, il faut noter que même pour les profils non-homogènes, les résultats de Poulos surestiment les déplacements et les rotations des pieux flexibles, par contre le comportement des pieux rigides est sousestimé.

Bien que la méthode de Banerjee et Davies (1978) est une méthode d'éléments de frontière, de la même catégorie que celle de Poulos, on constate qu'elle est plus rigoureuse. Ceci revient sans doute à la modélisation plus réaliste du pieu faite par Banerjee et Davies. En effet, ils ont pu introduire le pieu sous sa vraie forme cylindrique dans l'algorithme numérique des équations intégrales, appliquées à un sol bi-couche dont les paramètres élastiques sont approximativement déterminés en fonction de la rigidité du profil réel. Ceci, à la différence de Poulos qui a intégré les solutions fondamentales de Mindlin destinées principalement à un profil homogène (ce point a été évoqué à l'étude bibliographique). Les facteurs d'influence obtenus par la méthode de Banerjee et Davies ne sont pas alors très loins de ceux fournis par **ELASPULL**, l'erreur relative dans le pire des cas est moins de 10%.

Enfin, on peut voir que les résultats de l'analyse harmonique par éléments finis concordent parfaitement avec ceux de la méthode de Randolph. Cependant, les valeurs obtenues par la présente méthode sont légèrement élevées et l'erreur relative est de 4%. Les différences remarquées entre les deux méthodes d'analyse harmonique par éléments finis sont dues probablement à la différence des éléments utilisés, et à la taille des éléments considérés notamment à l'interface sol-pieu.

Randolph, a noté que ses expressions sousestiment généralement les déformations d'environ 5%. Ceci, nous incite à dire que les résultats de la méthode formulée dans cette thèse, sousestiment les déplacements d'environ 1 à 2%, ce qui signifie que la présente méthode est la plus rigoureuse de toutes les méthodes étudiées.

D'autre part, dans le but de vérifier l'admissibilité de la méthode proposée, et les autres méthodes du continuum élastique, on envisage l'utilisation du théorème de réciprocité des travaux; principe fondamental, dans la résistance des matériaux en élasticité linéaire. Lorsqu'un pieu est soumis en tête à un effort horizontal  $H_0$ , et un moment  $M_0$ , le déplacement  $u_0$ , et la rotation  $\theta_0$  en tête sont reliés au chargement par le biais d'une matrice appelée matrice de flexibilité, qu'on pourra exprimer par l'équation suivante:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_0 \\ M_0 \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

Expression dans laquelle, les  $f_{ij}$  peuvent être facilement déduits des facteurs d'influence donnés dans le tableau 4.3.

Le principe de réciprocité des travaux implique la symétrie de la matrice de flexibilité, en d'autres termes  $f_{12}$  doit être égal à  $f_{21}$ . D'après les résultats obtenus, cette condition est complètement satisfaite par la présente méthode, du fait de la rigueur que présente la méthode des éléments finis dans le traitement des profils non-homogènes. La méthode de Banerjee et Davies présente une erreur de 10% (Davies 1979), tandis que la méthode de Poulos viole complètement cette condition. En effet, les différences entre les facteurs  $I_{H_0M_0}$  calculés à partir du déplacement en tête d'un pieu soumis à un moment  $M_0$ , et à partir de la rotation en tête d'un pieu soumis à un effort horizontal  $H_0$ , peuvent atteindre 100%. Cependant, les résultats de Poulos restent dans une marge acceptable pour les profils homogènes, ou de non-homogénéité modérée (le rapport des modules d'Young en surface et en pointe du pieu est d'environ 0.5).

Facteurs d'influence			$I_{H_0H_0}$		$I_{H_0M_0}$		$I_{M_0M_0}$		$I_{FH_0}$	
Elancement h/D			20	40	20	40	20	40	20	40
Banerjee et Davies (1978)	$K_r$	$10^{-4}$	70.4	72.4	270	287	2084	2145	27.20	28.40
		$10^{-1}$	10.7	12.5	14.4	16.9	23.0	26.0	2.39	2.61
Poulos et Hull (1992)	$K_r$	$10^{-4}$	89.22	101.433	370.54	408.51	2592.20	2741.92	36.114	40.67
		$10^{-1}$	18.387	-	27.5752	-	65.418	-	4.1337	-
Poulos (1987)	$K_r$	$10^{-4}$	72.89	80.88	317.84	347.81	2442.26	2563.68	31.52	33.69
		$10^{-1}$	11.79	13.97	14.07	16.96	19.34	23.59	1.55	1.77
Randolph (1977)	$K_r$	$10^{-4}$	61.22	77.137	279.38	325.907	2161.07	2333.953	25.10	31.63
		$10^{-1}$	10.27	15.37	22.62	32.47	-	-	-	-
Présente méthode (ELASPULL)	$K_r$	$10^{-4}$	64.00	79.26	295.70	345.35	2062.41	2394.0	21.60	29.44
		$10^{-1}$	12.64	14.76	16.46	19.71	26.49	31.85	2.41	2.56

**Tableau 4.3:** Facteurs d'influence pour un pieu fiché dans un sol non homogène ( $\nu_s=0.5$  B.E.M et  $\nu_s=0.4$  F.E.M)

### IV.8.3- Étude du problème sol-pieu au niveau d'une tranche mince en déformation plane

Afin d'étendre la validité du code ELASPULL, on étudie le complexe sol-pieu au niveau d'une tranche suffisamment mince située à une profondeur arbitraire  $z$  en dessous du terrain naturel. Le modèle considéré est donc un disque d'épaisseur unité représentant le sol de rayon extérieur  $R$ , au centre duquel est fixée une section rigide circulaire de rayon  $r_0$  représentant la section du pieu (Figure 4.17). Cette simplification qui est justifiée au moins dans la zone proche du pieu, permettra d'avoir les conditions d'un problème de déformation plane.

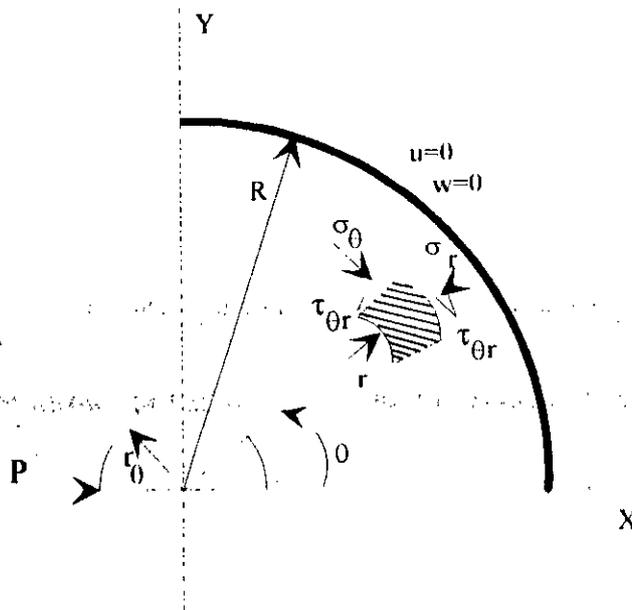


Figure 4.17: Définition du modèle

Compte tenu du blocage de la frontière extérieure du modèle, sous charge  $P$  (unité de force/unité de longueur du pieu) la section du pieu supposée indéformable se déplace rigidement suivant l'axe du chargement  $x$  ( $\theta=0$ ). Ceci se traduit par une translation uniforme de tout les points du pieu (Figure 4.18), dont les déplacements radial et circonférentiel pourront être exprimés par:

$$u = \bar{u}^1 \cos \theta \tag{4.18}$$

$$w = -\bar{u}^1 \sin \theta$$

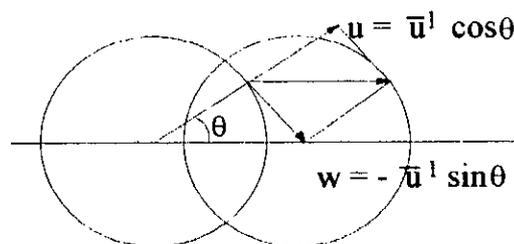


Figure 4.18: déplacement rigide d'une section de pieu

Baguelin, Frank et Said (1977) ont profondément étudié ce problème, ce qui leur a permis d'aboutir à des expressions analytiques permettant d'évaluer les déplacements radiaux et par conséquent les déplacements tangentiels en tout point du milieu envisagé. En particulier, l'amplitude du déplacement radial d'un point appartenant à l'interface sol-pieu supposée en parfaite adhérence est:

$$\bar{u}' = \frac{P}{8\pi E_s} \cdot \frac{(1+\nu_s)}{(1-\nu_s)} \left[ (3-4\nu_s) \ln\left(\frac{R}{r_0}\right)^2 - \frac{2}{3-4\nu_s} \right] \quad (4.19)$$

Expression dans laquelle:  $E_s$  = module d'Young du sol

$\nu_s$  = coefficient de Poisson

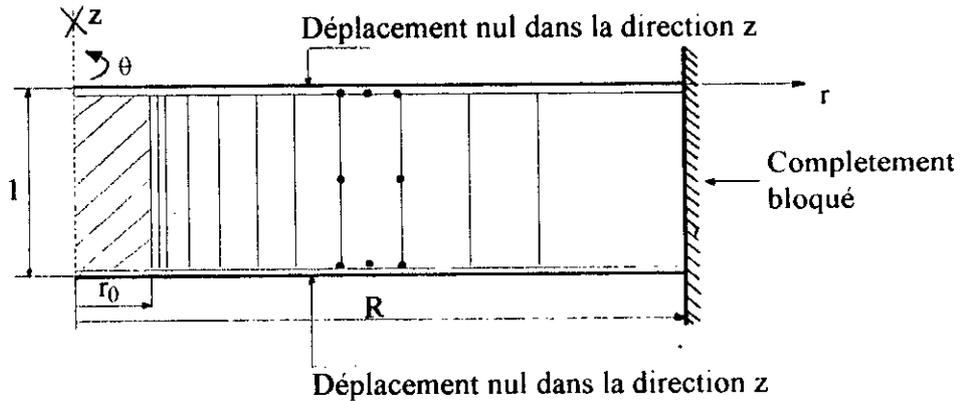
Outre les déplacements radiaux, Baguelin et al. ont donné des expressions exactes des contraintes en tout point  $(r, \theta)$  de la zone s'étendant de la section rigide du pieu à la frontière extérieure bloquée. En effet, les contraintes normales radiales et tangentielles, et la contrainte de cisaillement sont:

$$\sigma_r = \frac{P}{4\pi r_0} \cdot \frac{1}{1-\nu_s} \left[ (3-2\nu_s) \frac{r_0}{r} - \frac{1}{1+(\frac{r_0}{R})^2} \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 + \frac{1}{(3-4\nu_s)} \cdot \frac{1}{1+(\frac{R}{r_0})^2} \cdot \frac{r}{r_0} \right] \cos \theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{4\pi r_0} \cdot \frac{1}{1-\nu_s} \left[ (1-2\nu_s) \frac{r_0}{r} - \frac{1}{1+(\frac{r_0}{R})^2} \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 - \frac{3}{(3-4\nu_s)} \cdot \frac{1}{1+(\frac{R}{r_0})^2} \cdot \frac{r}{r_0} \right] \cos \theta \quad (4.20)$$

$$\tau_{\theta r} = \frac{P}{4\pi r_0} \cdot \frac{1}{1-\nu_s} \left[ (1-2\nu_s) \frac{r_0}{r} + \frac{1}{1+(\frac{r_0}{R})^2} \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 - \frac{1}{(3-4\nu_s)} \cdot \frac{1}{1+(\frac{R}{r_0})^2} \cdot \frac{r}{r_0} \right] \sin \theta$$

Pour l'analyse harmonique par éléments finis, le maillage adopté et les caractéristiques du sol et du pieu sont reportées sur la figure 4.19. Pour simuler donc les conditions d'un problème de déformation plane, on bloque tout déplacement vertical ( $v=0$ ).



$$R=10 \text{ m}, r_0 = 0.5 \text{ m}, E_p = 10^9 \text{ KN/m}^2, E_s = 10^5 \text{ KN/m}^2, \nu_p = \nu_s = 0.3$$

**Figure 4.19:** Maillage radial par éléments finis d'une tranche mince du système sol-pieu

Le premier travail consiste à imposer un déplacement progressif à la section du pieu, qui se translate rigidement en provoquant une pression  $P$  à l'interface pieu-milieu élastique. La figure 4.20 montre les valeurs de la pression  $P$  donnée par le code **ELASPULL** et les valeurs obtenues analytiquement (équation 4.19) en fonction du déplacement imposé. Comme nous le pouvons constater l'accord entre les deux variations est généralement excellent.

Le second travail consiste à traduire la section du pieu d'une distance égale à  $0.004 D$  (Diamètre du disque). Ceci se traduit par l'imposition aux noeuds de l'élément du pieu un déplacement radial et un déplacement circconférentiel d'amplitudes  $0.004D$  et  $-0.004D$  respectivement.

La figure 4.21-a compare la répartition des amplitudes des contraintes normales radiales  $\sigma_r$  évaluées par éléments finis avec celles obtenues par les équations (4.20). En d'autres termes, c'est la distribution des contraintes le long du plan radial correspondant à  $\theta = 0$ . La figure 4.21-b illustre également la répartition de la contrainte normale tangentielle  $\sigma_\theta$  le long du plan ( $\theta=0$ ). la distribution de la contrainte de cisaillement  $\tau_{\theta r}$  le long d'un plan radial correspondant à  $\theta = \pi/2$  est montré par la figure 4.21-c. C'est à dire la distribution de l'amplitude de la contrainte de cisaillement en fonction de la distance relative  $r/R$ .

Comme on peut le constater les résultats de l'analyse numérique et analytique montrent une parfaite concordance. Ceci est d'autant plus qu'on raffine le maillage à proximité de l'interface.

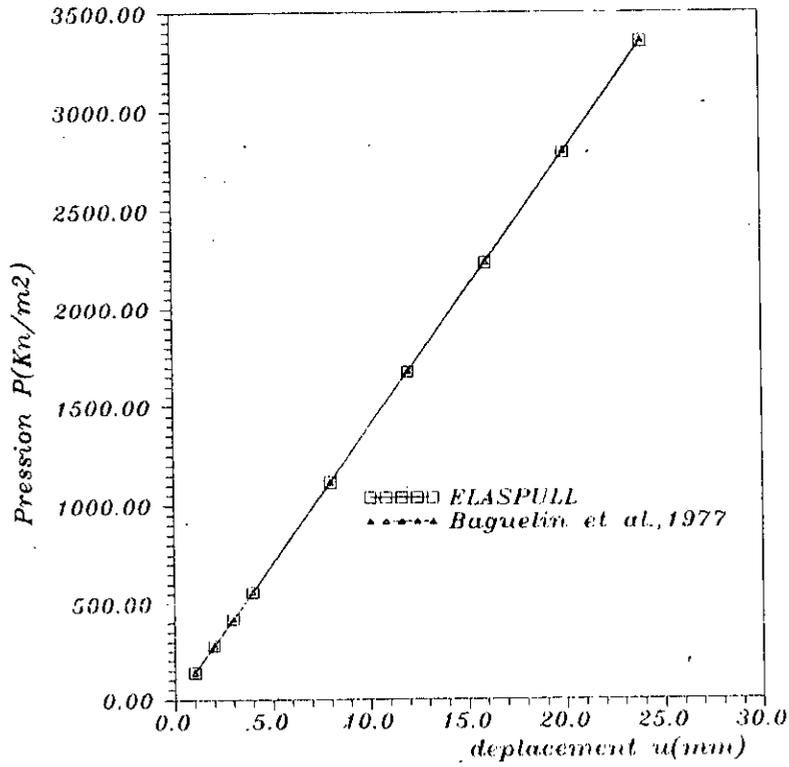


Figure 4.20: Variation de la pression  $p$  avec le déplacement imposé

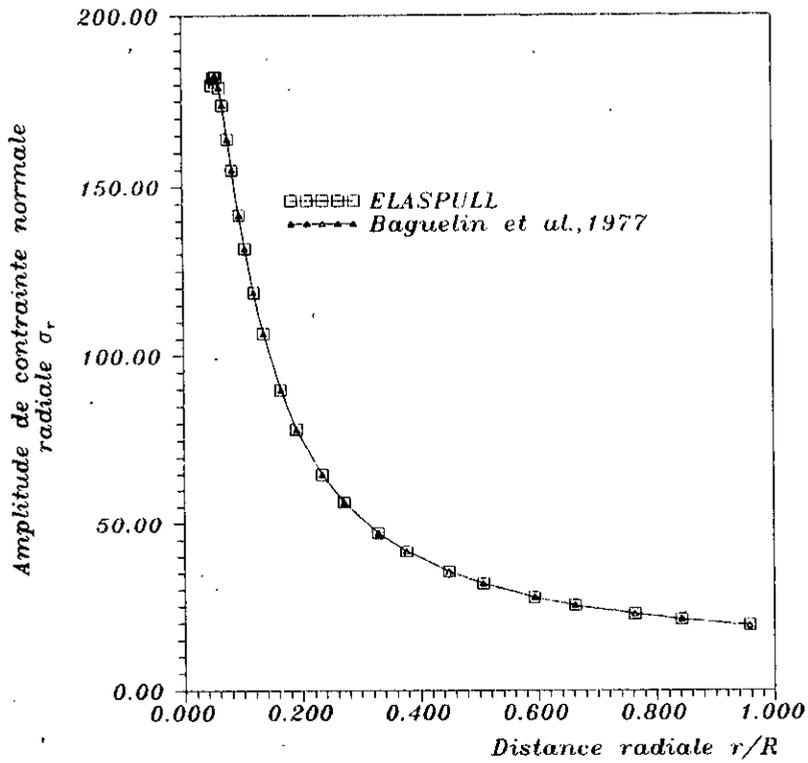


Figure 4.21-a: Distribution suivant l'axe ( $\vartheta=0$ ) de la contrainte normale radiale  $\sigma_r$

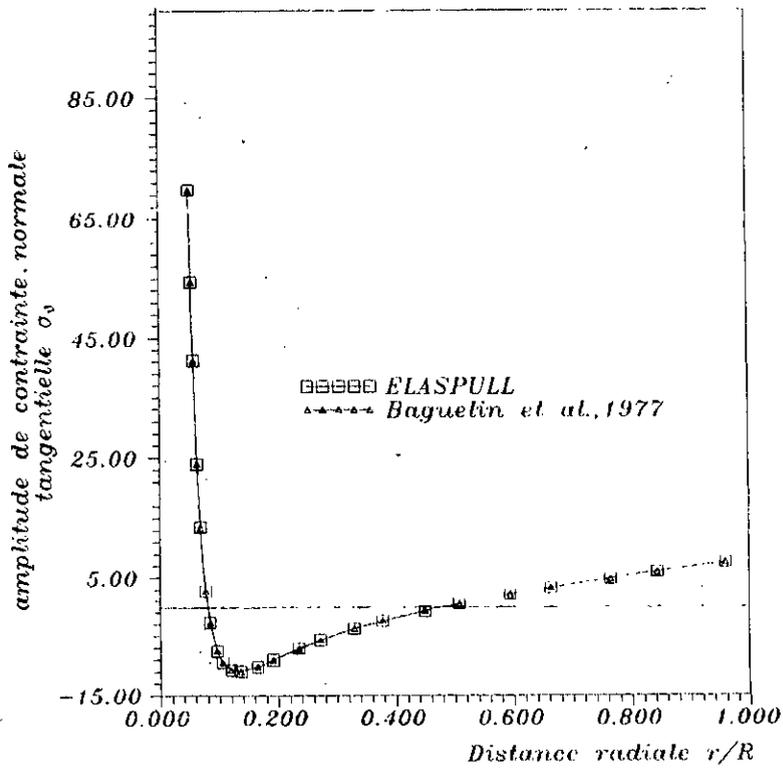


Figure 4.21-b: Distribution suivant l'axe ( $\psi=0$ ) de la contrainte normale tangentielle  $\sigma_\theta$

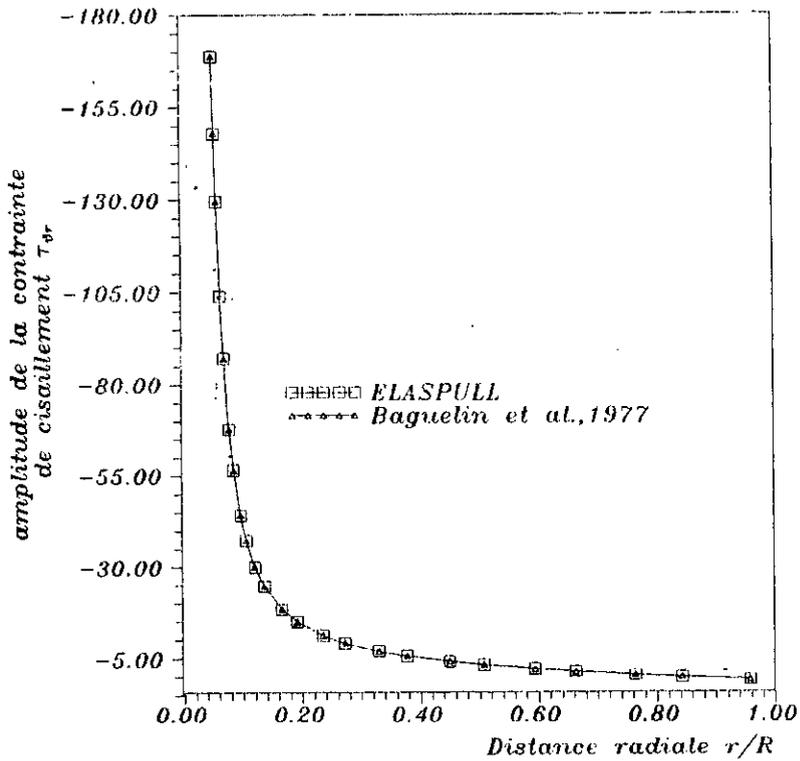


Figure 4.21-c: Distribution suivant l'axe ( $\psi=\pi/2$ ) de la contrainte de cisaillement  $\tau_{\theta r}$

## IV.9- Conclusions

Le code de l'analyse harmonique par éléments finis que nous venons de décrire en détail dans le présent chapitre a donné ses preuves lorsqu'on a considéré le cas test d'une poutre en flexion, et lorsqu'on a confronté ses résultats aux résultats d'autres méthodes numériques. Le cas de la poutre a donné d'excellents résultats, et l'erreur commise a été inférieure à 1%. La comparaison avec d'autres méthodes a révélé un excellent accord avec la méthode la plus rigoureuse. Les éléments de comparaison ont également montré la non-applicabilité de quelques approches numériques aux problèmes des pieux fichés dans des profils non-homogènes. Finalement, le parfait accord obtenu entre les expressions analytiques exactes et les valeurs numériques des contraintes dans le problème de la tranche mince en déformation plane, a confirmé la validité du logiciel **ELASPULL**.

Si la rigueur et la cohérence sont les qualités généralement requises pour valoriser une méthode numérique, la masse de données de calcul, les temps d'exécution et l'espace mémoire sur ordinateur, sont également des critères qui peuvent entraver la faisabilité d'un tel calcul. L'importance de ces paramètres peuvent mettre en question la crédibilité d'une telle méthode.

Bien que le volume de données et l'espace que nécessite le code de l'analyse harmonique par éléments finis sont relativement élevés par rapport au modèle de Winkler ou aux méthodes des équations intégrales, nous pensons que l'adoption de la présente méthode reste une bonne alternative dans la résolution des problèmes de pieux chargés en flexion.

REMERCIEMENTS AU COMITE D'ORGANISATION DE LA REUNION INTERNATIONALE DE LA SOCIETE INTERNATIONALE DE MECANIQUE DES SOLIDES

## Chapitre V:

### Etude paramétrique

#### **Résumé:**

---

*Avant d'entamer l'étude paramétrique proprement dite, on donnera la définition d'un sol non-homogène et on fera une analyse dimensionnelle.*

*Dans le cadre de l'étude paramétrique on étudiera les effets de la rigidité relative sol-pieu et de l'élançement sur le comportement d'un pieu soumis d'une part, à un effort latéral et d'autre part à un moment de flexion dans un sol homogène puis dans un sol de Gibson.*

*On résumera les résultats de l'analyse paramétrique par l'établissement des expressions analytiques donnant les déplacements, les rotations, les moments, les efforts tranchants et les réactions du sol maximales et leurs côtes pour les différents cas étudiés. On terminera le chapitre par la confrontation des résultats numériques aux résultats d'un essai expérimental réel.*

## V.1- Introduction

Le comportement d'un pieu isolé soumis aux efforts de renversement est particulièrement complexe du fait qu'il est caractérisé par nombreux paramètres. Afin de cerner ces paramètres et d'en dégager l'influence sur le comportement global du système sol-pieu, une étude paramétrique est entreprise.

L'étude comporte l'influence de la rigidité relative, et de l'élançement sur le comportement du pieu sollicité horizontalement dans les deux types de sol: homogène et non-homogène.

Nous envisagerons le comportement du pieu dans cette étude paramétrique, dans l'examen du déplacement du pieu à différentes côtes, ainsi qu'à la distribution des éléments de réduction développés sur le fût le long de la fiche. Cette étude paramétrique a deux objectifs d'une importance majeure: d'une part mieux comprendre le rôle de chaque paramètre sur la réponse tridimensionnelle des fondations sur pieux, d'autre part développer des expressions analytiques pour les applications routinières, guidant le projeteur a effectuer un calcul complet sur le comportement des pieux sollicités en flexion.

Avant de commencer l'étude de chaque paramètre séparément, il a été jugé préférable, d'une part, de définir la notion d'un sol non-homogène, et d'autre part, faire une analyse dimensionnelle qui nous permettra par la suite de voir les paramètres intervenant dans l'analyse, dans leurs formes les plus générales. En d'autres termes ,exprimer les déplacements et les éléments de réduction en formes adimensionnelles.

## V.2- Définition d'un sol non-homogène

Nous rappelons d'abord qu'un milieu homogène est un milieu qui présente une rigidité constante sur toute sa profondeur. En revanche, la notion d'un milieu non-homogène faisait l'objet de nombreuses publications et le sujet de recherche de plusieurs auteurs. Il semble à l'heure actuelle qu'un compromis sur ce point a été acquis.

L'hétérogénéité d'un sol est principalement dictée par l'histoire de ces états de contraintes. Les contraintes effectives augmentent généralement avec la profondeur ,ce qui nous amène à

adopter des modules de déformation en simples fonctions de la profondeur. En effet, Gibson (1967) a proposé:

$$E(z) = E(0) + m.z \quad (5.1)$$

où  $E(z)$  = module d'Young à la côte  $z$ .

$E(0)$  = Module d'Young en surface.

$m$ : Une constante élastique.

Le coefficient de poisson est considéré comme partout constant. Un module nul en surface est consistant pour représenter les argiles molles (Davies, 1979). Une équation similaire peut être écrite pour les sables. La représentation des argiles raides peut être faite en adoptant l'équation (5.1) avec une valeur non nulle en surface. Cooke et al. (1973), et Ward et Burland (1973) ont montré que le module non-drainé de l'argile de Londres est conforme à ce modèle, et ont confirmé son applicabilité à l'étude des tassements des fondations superficielles par éléments finis.

En étudiant les tassements d'une semelle circulaire de diamètre  $D$ , Carrier et Christian (1973) ont proposé une autre expression du module d'Young à la côte  $z$ , pour un sol non-homogène, donnée par l'équation:

$$E(z) = E(0) \left( \frac{z}{D} \right)^n \quad (5.2)$$

En utilisant ce modèle, qui est en fait, un cas particulier de (5.1), ils ont confirmé la crédibilité des résultats de Gibson. Chauprasert et al. (1974), dans une étude théorique, ont formulé une expression peu différente des précédentes et qui a donné des résultats comparables à ceux de Gibson. Cette équation est:

$$E(z) = E(0).(z+c)^\alpha \quad (5.3)$$

Expression dans laquelle:  $\begin{cases} c: \text{une constante} \\ \alpha = (1 - 2\nu_s) / \nu_s \end{cases}$  où  $\nu_s$ : Coefficient de Poisson.

Pour les propos de cette étude paramétrique, nous entendons par un sol non-homogène, ou de Gibson, un milieu dont le module d'élasticité est représenté par l'équation (5.1) avec une rigidité nulle en surface.

### V.3- Analyse dimensionnelle

Avant de voir chaque paramètre séparément, il faut rappeler qu'il est nécessaire de faire une analyse dimensionnelle afin d'établir des relations adimensionnelles dont l'applicabilité sera générale. Cette analyse nous permettra de voir le comportement du pieu sollicité horizontalement dans sa généralité. Ceci, facilitera donc, la tâche d'étudier un pieu particulier et de se situer lorsqu'on confronte un sol donné et un niveau de chargement bien déterminé.

Les grandeurs qui interviennent à priori seront:

-  $E_p$  et  $\nu_p$ : module d'Young effectif du pieu et coefficient de Poisson du pieu.

$$E_p = \frac{(EI)_p}{\frac{\pi D^4}{64}}$$

-  $E_s$ ,  $m$  et  $\nu_s$ : sont respectivement module d'Young d'un sol homogène, taux d'accroissement de la rigidité d'un sol de Gibson et enfin, coefficient de Poisson du sol.

- La fiche  $h$  et le diamètre  $D$  du pieu.

- La fiche  $h$  et le diamètre  $D$  du pieu.

- L'effort en tête  $H_0$  et le moment  $M_0$ .

Les groupes adimensionnels que l'on peut former en prenant par exemple  $E_s$ ,  $m$  et  $D$  seront:

$$\frac{E_p}{E_s}, \frac{h}{D}, \frac{H_0}{E_s D^2}, \frac{M_0}{E_s D^3} \quad \text{pour un sol homogène}$$

et

$$\frac{E_p}{mD}, \frac{h}{D}, \frac{H_0}{mD^3}, \frac{M_0}{mD^4} \quad \text{pour un sol de Gibson.}$$

Dans le problème des pieux chargés latéralement, l'influence de  $\nu_p$  et  $\nu_s$  est manifestement négligeable. En effet, toutes les méthodes des équations intégrales qui ont été appliquées aux pieux considèrent un coefficient de Poisson partout constant (Poulos, 1971a et Davies, 1979, etc...). Par ailleurs, Randolph (1977) a incorporé ce coefficient dans les solutions obtenues, malgré le peu d'influence que présente sa variation. En conséquence, en tout ce qui suit, son influence ne sera pas prise en compte. On pourra dire alors, que toute variable  $x$  adimensionnelle peut se mettre sous la forme:

$$x = f\left(\frac{E_p}{E_s}, \frac{h}{D}, \frac{H_0}{E_s D^2}, \frac{M_0}{E_s D^3}\right) \text{ pour un sol homogène.}$$

$$x = f\left(\frac{E_p}{mD}, \frac{h}{D}, \frac{H_0}{mD^3}, \frac{M_0}{mD^4}\right) \text{ pour un sol de Gibson.}$$

De plus  $x$  est nécessairement proportionnelle à  $H_0$  et à  $M_0$  en élasticité linéaire d'où:

-Pour les pieux fichés dans un sol homogène:

$$x = \frac{H_0}{E_s D^2} f\left(\frac{E_p}{E_s}, \frac{h}{D}\right) \text{ pour un effort } H_0 \text{ en tête.}$$

$$x = \frac{M_0}{E_s D^3} f\left(\frac{E_p}{E_s}, \frac{h}{D}\right) \text{ pour un moment } M_0 \text{ en tête.}$$

-pour les pieux fichés dans un sol non-homogène:

$$x = \frac{H_0}{m \cdot D^3} f\left(\frac{E_p}{m \cdot D}, \frac{h}{D}\right) \text{ pour un effort } H_0 \text{ en tête.}$$

$$x = \frac{M_0}{m \cdot D^4} f\left(\frac{E_p}{m \cdot D}, \frac{h}{D}\right) \text{ pour un moment } M_0 \text{ en tête.}$$

Ces expressions montrent que toute variable  $x$  qui, proportionnelle au chargement de flexion appliqué dépend essentiellement de deux paramètres  $E_p/E_s$  ou  $E_p/mD$  qui n'est autre que la rigidité relative selon le type de sol envisagé, et un autre paramètre  $h/D$  représentant l'élanement du pieu. ces facteurs feront l'objet de cette étude paramétrique.

A la lumière de cette analyse, les grandeurs adimensionnelles étudiées seront:

**1-pour un sol homogène:**

a-pieux soumis à un effort  $H_0$  en tête :

-déplacement horizontal :	$\frac{uE_s D}{H_0}$
-le moment développé le long de la fiche:	$\frac{M}{H_0 D}$
-l'effort tranchant développé le long de la fiche :	$\frac{T}{H_0}$
- la réaction du sol mobilisée:	$\frac{PD}{H_0}$

b-pieux soumis à un moment  $M_0$  en tête :

-déplacement horizontal du pieu :	$\frac{uE_s D^2}{M_0}$
- le moment développé sur la fiche:	$\frac{M}{M_0}$
-l'effort tranchant :	$\frac{TD}{M_0}$
- la réaction du sol:	$\frac{PD^2}{M_0}$

## 2-pour un sol non-homogène :

Pour ce type de sol dont le module varie linéairement  $E_s = mz$  les mêmes grandeurs seront étudiées sauf le déplacement latéral qui sera  $umD^2/H_0$  et  $umD^3/M_0$  pour les deux cas de charges considérés.

## V.4- Etude paramétrique

### V.4.1- Effet de la rigidité relative sur le comportement du pieu

La rigidité relative est le facteur donnant le rapport du module d'Young du pieu à celui du sol, elle sera notée  $E_p/E_s$ . Rappelons qu'un sol homogène présente un module d'élasticité  $E_s$  constant en profondeur et par conséquent la rigidité relative sera également constante pour un pieu donné. En revanche, pour un sol de Gibson, il a été jugé préférable de caractériser la rigidité relative par un facteur constant en fonction du taux de variation  $m$  du module élastique avec la profondeur. Cette rigidité sera alors  $E_p/mD$ .

#### V.4.1.a- Cas d'un sol homogène

L'étude comporte quatre rigidités relatives à savoir:  $E_p/E_s=100$ ,  $E_p/E_s=1000$ ,  $E_p/E_s=12000$ , et  $E_p/E_s=350000$ .

L'influence de ce paramètre sur le comportement global du pieu fiché dans un sol homogène sera observée à travers le déplacement de ses différentes sections et à travers tous les éléments de réduction résultant d'une part, de l'application d'un effort horizontal en tête, et d'autre part de l'application d'un moment en tête au niveau du terrain naturel. On pourra ensuite superposer les

effets des deux cas de sollicitations, du moment qu'il s'agit d'un problème en élasticité linéaire. Nous nous limiterons dans cette étude aux pieux libres en tête, d'élanement  $h/D = 25$ . L'effet de ce dernier sera considéré plus tard.

Les figures (5.1-a et 5.1-b) montrent les déplacements adimensionnels en fonction de la profondeur relative  $z/D$  respectivement pour un pieu soumis à un effort et un pieu soumis à un moment en tête. La figure (5.1-a) met en évidence une différence majeure dans le comportement des pieux dits rigides (fortes valeurs de  $E_p/E_s$ ) et celui des pieux dits souples (faibles valeurs de  $E_p/E_s$ ). On constate que le pieu rigide sous l'effet d'un effort horizontal en tête subit un déplacement d'ensemble avec un simple pivotement autour d'un point plus proche de sa pointe, limitant ainsi deux zones, dites de butée et de contre-butée. Bien que les déformées propres des pieux rigides sont négligeables, il n'en est pas de même pour les pieux souples. En effet, on remarque en examinant la figure (5.1-a) que le déplacement en tête diminue lorsque la rigidité relative augmente. Pour le pieu très souple ( $E_p/E_s = 100$ ) on se rend compte que le phénomène est entièrement localisé à la partie supérieure du pieu, et les conditions régnant en pointe ont peu d'influence. Il en découle que le point de déplacement nul est d'autant plus bas que le pieu est plus rigide. Les déplacements négatifs sont négligeables en comparaison aux déplacements positifs.

La figure (5.1-b) montre les déplacements adimensionnels d'un pieu soumis à un moment en tête. Les mêmes constatations faites sur la figure (5.1-a) peuvent être données pour ce cas avec quelques différences observées. En effet, le phénomène de flexion est plus prononcé dans le comportement des pieux sous l'effet d'un moment en tête, notamment pour les pieux flexibles. Tandis que les pieux rigides (par exemple  $E_p/E_s = 350000$ ) se déforment linéairement, les pieux souples fléchissent présentant ainsi quelques différences dans la reprise du moment appliqué en tête. D'une part, on constate que les points de déplacements nuls sont plus élevés par rapport aux points respectifs dus à l'application d'une force en tête, ce qui est physiquement évident car le moment tend à solliciter au maximum la partie supérieure du pieu. D'autre part le moment de flexion en tête, contrairement à effort en tête, crée des zones de déplacements négatifs d'autant plus proches de la surface du sol, et d'autant plus considérables que les pieux sont plus flexibles. Cependant, on se rend compte que ces zones sont inexistantes pour les pieux flexibles sollicités par un effort en tête.

Les figures (5.2-a et b) illustrent respectivement la distribution du moment adimensionnel  $M/H_0 D$  pour les pieux soumis à un effort de tête, et de la distribution de  $M/M_0$  pour les pieux

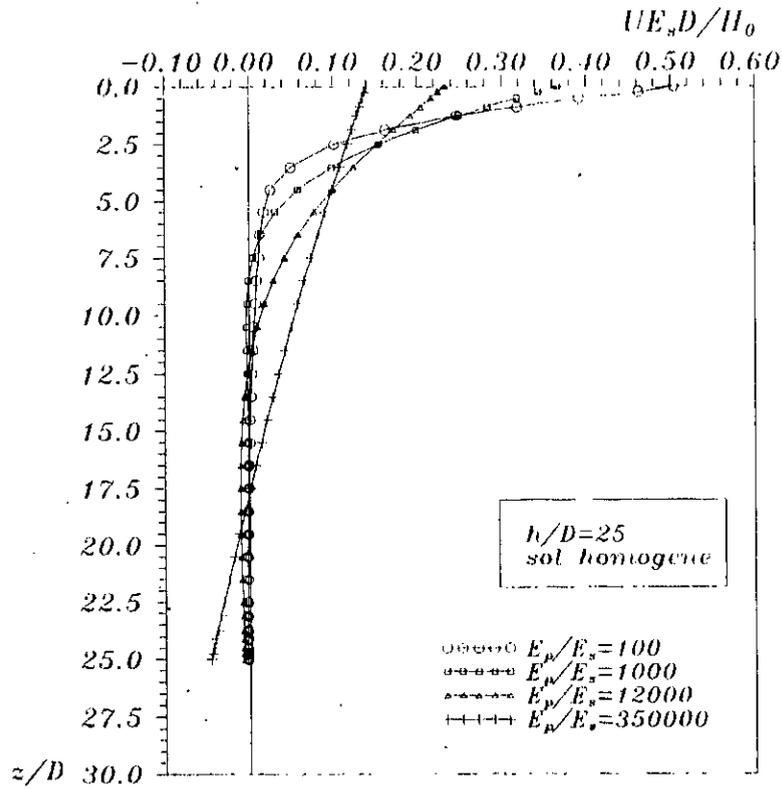


Figure 5.1-a: Effet de la rigidité relative sur le déplacement latéral: pile soumise à  $H_0$

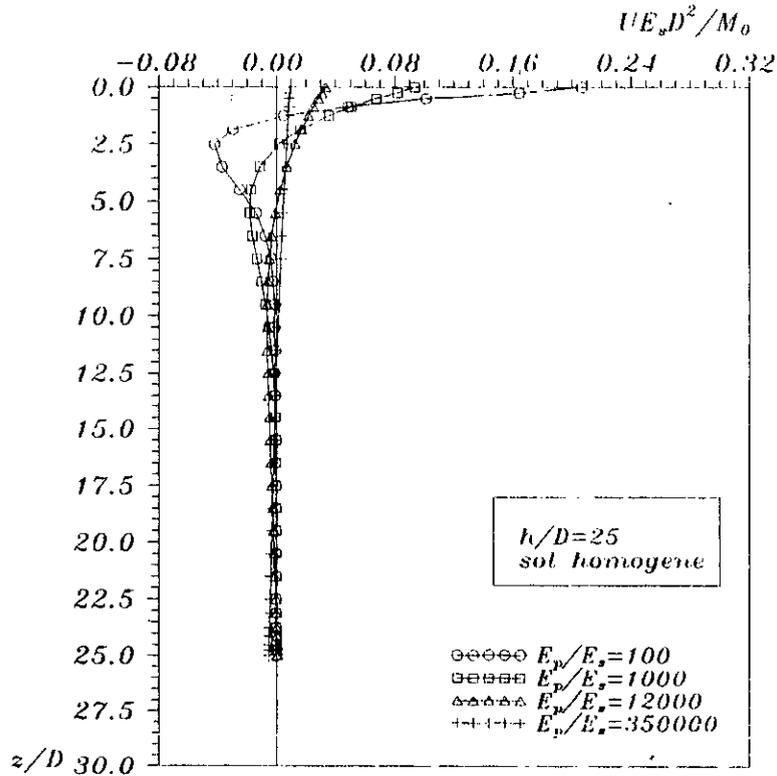


Figure 5.1-b: Effet de la rigidité relative sur le déplacement latéral: pile soumise à  $M_0$

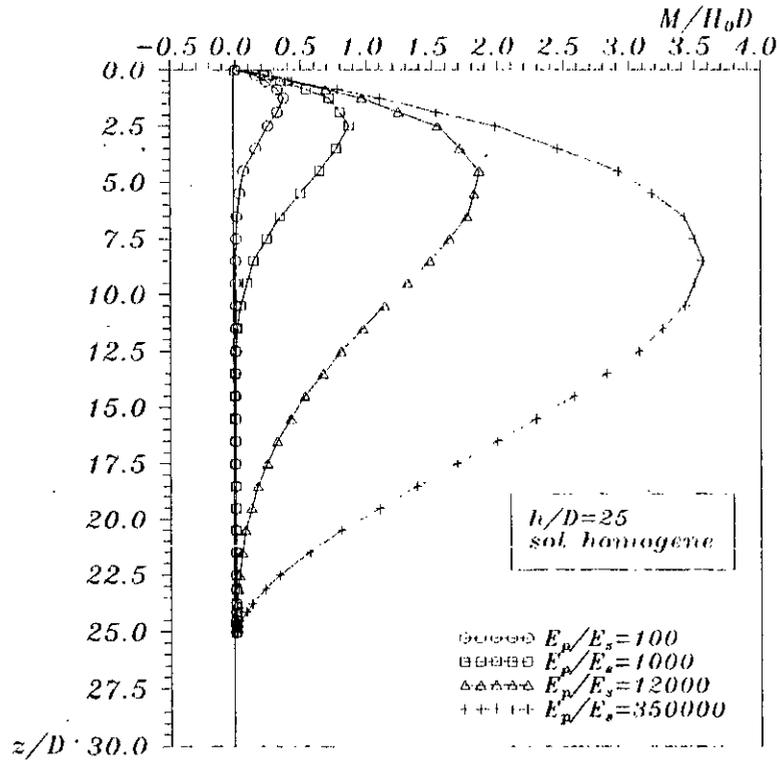


Figure 5.2-a: Effet de la rigidité relative sur le moment fléchissant: pile soumise à  $H_0$

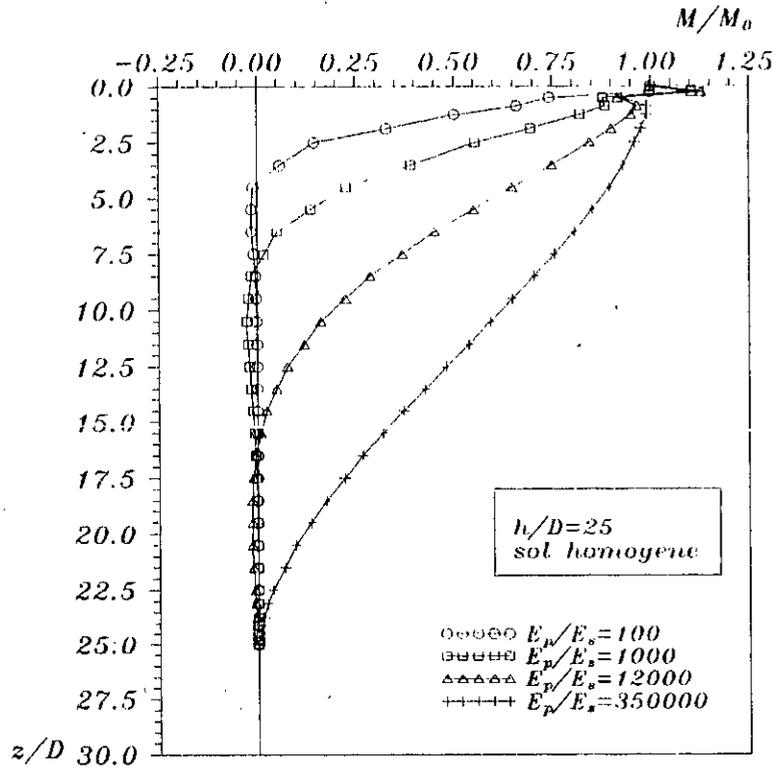


Figure 5.2-b: Effet de la rigidité relative sur le moment fléchissant: pile soumise à  $M_0$

sollicités par un moment en tête. Notons, que les valeurs des moments fléchissants, aux différentes côtes, ont été calculées par l'application de l'équation (4.10) d'utilisation plus facile. En examinant la figure (5.2-a), on s'aperçoit que la rigidité relative joue dans le même sens sur les moments fléchissants: plus le pieu est rigide plus le moment fléchissant maximum augmente. On constate également, que le moment maximum est situé d'autant plus bas, que le pieu est plus rigide. comme nous l'avons signalé pour les déplacements, il est parfaitement clair, que toute la hauteur de fiche des pieux rigides est sollicitée par un moment fléchissant; tandis qu'une partie des pieux souples situant à proximité de la surface du sol, encaisse réellement un moment fléchissant. Ceci explique le rôle primordial que présente la partie du pieu s'étendant à la côte du moment maximal dans la reprise des efforts latéraux.

L'allure des moments fléchissants, concernant les pieux soumis à un moment en tête, est montrée par la figure (5.2-b). Il est parfaitement évident que le moment maximal se situe en tête du pieu, et égal au moment extérieur appliqué. Pour ce cas de charge, la rigidité relative a presque le même effet sur le comportement des pieux. En effet, il est clair que le phénomène de flexion est entièrement localisé dans la partie supérieure des pieux flexibles, contrairement aux pieux rigides qui présentent une rigidité relative plus élevée; ceci nous amène à dire que le point de moment nul est d'autant plus bas que la rigidité relative augmente.

les figures (5.3-a et b) montrent la distribution des efforts tranchants en fonction de la profondeur relative, pour les deux cas de sollicitations considérés. Ces efforts tranchants ont été évalués par le biais de l'équation (4.12). On a préféré l'utilisation de cette équation à la place de l'équation (4.13), suite au taux de précision acceptable remarqué dans les valeurs des amplitudes de contraintes.

On constate d'abord, en examinant la figure (5.3-a) que l'effort tranchant est égal à 1; résultat évident puisque l'effort tranchant est rapporté à la valeur appliquée en tête. En plus en suivant la distribution de l'effort de cisaillement le long de la fiche, on se rend compte qu'il passe par un maximum dans la zone des efforts négatifs dont l'intensité en valeur absolue croît avec l'augmentation de la rigidité relative.

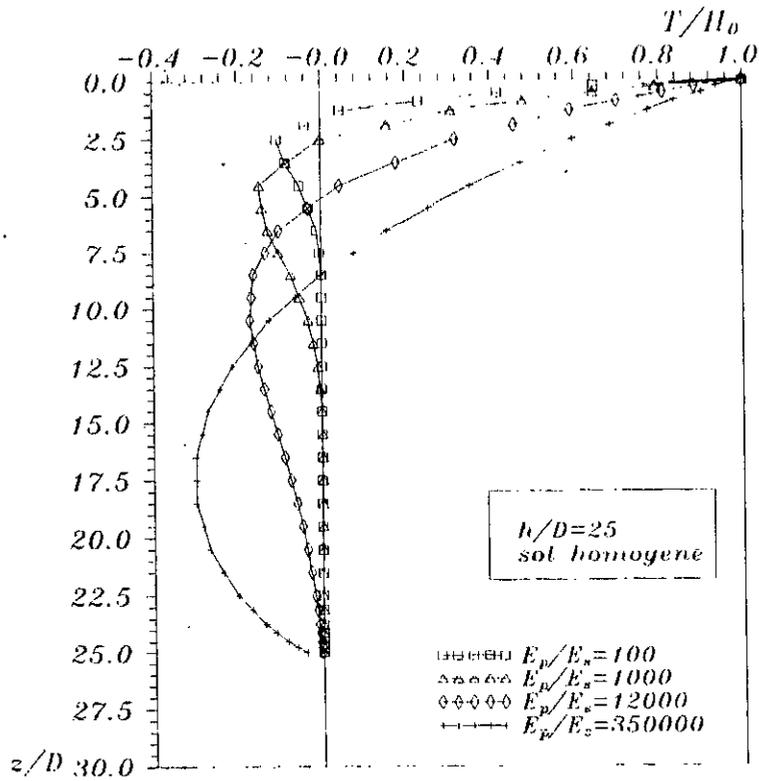


Figure 5.3-a: Effet de la rigidité relative sur l'effort tranchant: pieu soumis à  $H_0$

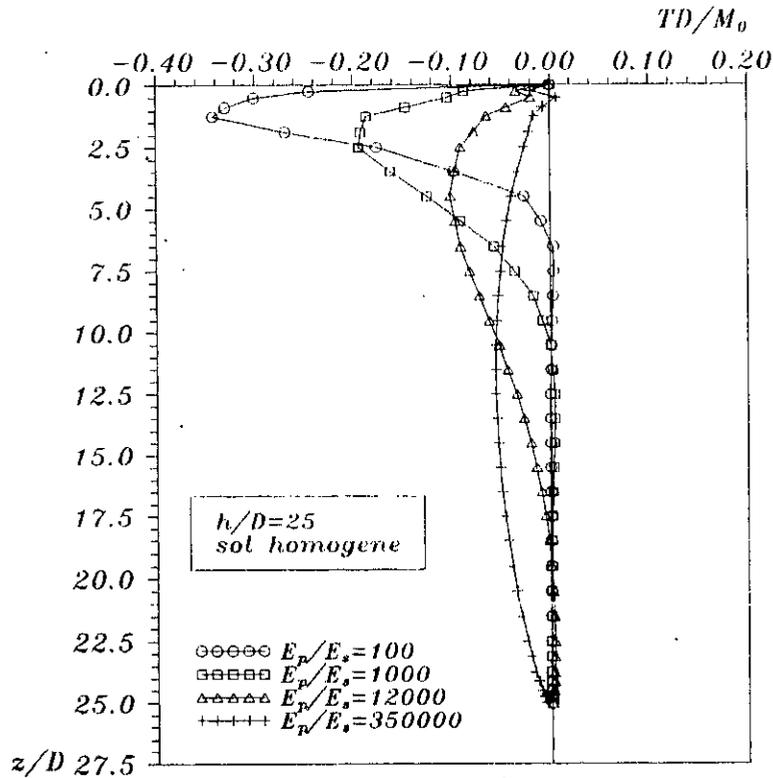


Figure 5.3-b: Effet de la rigidité relative sur l'effort tranchant: pieu soumis à  $M_0$

La plus grande valeur est d'autant plus bas que le pieu présente une rigidité relative plus élevée. Les côtes des efforts tranchants nuls correspondent exactement aux points des moments fléchissants maximums reportés sur la figure (5.2-a).

La figure (5.3-b) nous donne la distribution de l'effort tranchant sur la fiche d'un pieu sollicité par un moment en tête. On s'aperçoit d'abord que l'effort est nul en tête, dû, évidemment à l'application du moment, et que tous les profils sont entièrement compris dans la zone des valeurs négatives. Ces profils passent par un maximum, dont la valeur diminue lorsque la rigidité relative augmente, en même temps que sa position s'éloigne de la surface du sol. On constate aussi que la contribution de la moitié inférieure des pieux très souples  $\left(\frac{E_p}{E_s} = 100\right)^{pos}$  est significative. Toutefois, les pieux très rigides  $\left(\frac{E_p}{E_s} = 350000\right)$  encaissent dans leurs parties inférieures, un effort tranchant plus ou moins important, ce qui peut rendre, l'hypothèse d'un effort nul en pointe moins réaliste.

Les différentes valeurs de la réaction du sol ont été évaluées à l'interface sol-pieu par l'application de l'équation (4.14). Les figures (5.4-a et b) illustrent la distribution des réactions du sol en fonction de la profondeur relative, pour les deux cas de charges en question. D'une façon générale, les réactions du sol ont la même allure que les déplacements mais s'amortissent plus rapidement qu'eux lorsque la rigidité relative augmente.

En examinant la figure (5.4-a), on remarque que le pieu le plus rigide  $\left(\frac{E_p}{E_s} = 350000\right)$  mobilise le sol en deux zones de butée et de contre-butée. Le point de réaction nul correspond exactement à la côte de déplacement nul. Toutefois, seules les couches supérieures du sol sont mobilisées quand il s'agit d'un pieu flexible.

Dans le cas où les pieux sont soumis à un moment en tête (Figure 5.4-b), les mêmes constatations peuvent être faites pour les pieux sollicités par une force en tête, mais on rajoute:

- Les réactions sont mieux réparties pour les pieux très rigides.
- La hauteur du sol sollicitée diminue et l'intensité maximale de la réaction augmente lorsque la rigidité relative diminue.

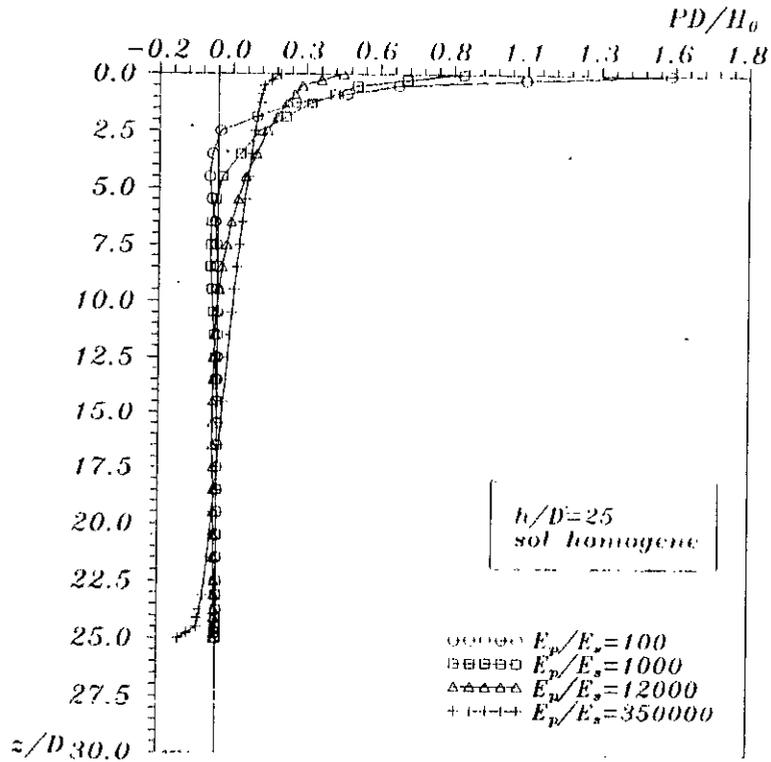


Figure 5.4-a: Effet de la rigidite relative sur la réaction du sol: pieu soumis à  $H_0$

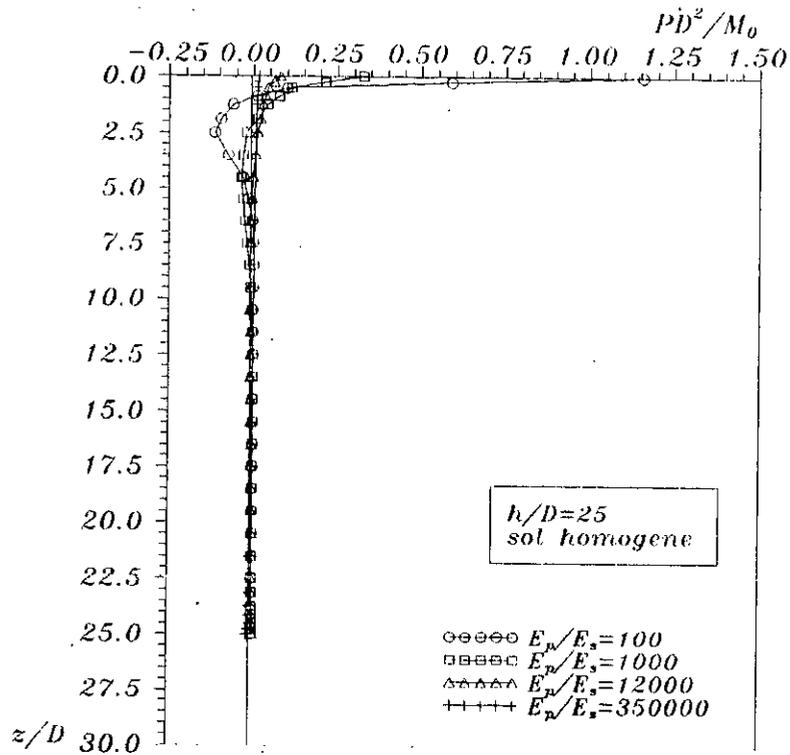


Figure 5.4-b: Effet de la rigidite relative sur la réaction du sol: pieu soumis à  $M_0$

#### V.4.1.b- Cas d' un sol non-homogène

Comme nous l'avons évoqué au début de ce paragraphe notre étude va se limiter à un seul type de non-homogénéité: les sols de Gibson. En effet, pour ce cas les rigidités relatives considérées seront:  $E_p/mD=500$ ,  $E_p/mD=1250$ ,  $E_p/mD=12500$ , et  $E_p/mD=150000$  pour les pieux d'élanement  $h/D=25$ . Cette étude paramétrique repose également sur les mêmes grandeurs adimensionnelles dépouillées lors du traitement du sol homogène, sauf que les déplacements adimensionnels ont des expressions, cette fois-ci, fonctions du taux d'accroissement  $m$  de la rigidité en profondeur. Ces déplacements sont:  $uD^2/H_0$  et  $uD^3/M_0$  respectivement pour les pieux soumis à un effort et un moment en tête.

Du moment que le principe de superposition est valable dans l'élasticité linéaire, on a jugé préférable d'étudier chaque sollicitation séparément pour illustrer son effet sur le comportement du pieu. Si un cas de charge, faisant paraître un effort en tête et un moment, se présente, il est facile d'obtenir l'effet combiné des deux sollicitations par simple superposition des effets provenant de chaque sollicitation considérée séparément.

Les figures (5.5-a et b) montrent la variation des déplacements adimensionnels en fonction de la profondeur relative pour les deux cas de charge considérés.

On s'aperçoit d'abord, en examinant la figure (5.5-a) que d'une façon générale, les différentes sections de la moitié inférieure des pieux ne reçoivent qu'un déplacement quasiment insignifiant, contrairement à ce qui se passe dans la moitié supérieure des pieux. Les déplacements en tête sont d'autant plus élevés que la rigidité relative est plus faible. Les pieux les plus souples ( $E_p/mD=500$  et  $E_p/mD=1250$ ) sont extrêmement sollicités en tête, et présentent une flexion très prononcée. On rencontre rapidement le point de déplacement nul, qui se situe à une profondeur d'environ égale au quart de la fiche du pieu ( $h/4$ ). La moitié supérieure du pieu rigide ( $E_p/mD=150000$ ) se déplace en présentant une déformée linéaire, contrairement à ce qui a été remarqué pour les pieux rigides dans le sol homogène, où la déformée n'étant que le résultat d'un simple et pure pivotement autour d'un point fixe. la côte de déplacement nul pour ce cas de figure se situe aux alentours d'une profondeur égale à la moitié de la hauteur de fiche du pieu. Si l'on examine maintenant l'évolution de  $uD^3/M_0$  en fonction de la profondeur relative (figure 5.5-b), pour les quatre rigidités envisagées, on constate que les pieux soumis à un moment de

renversement en tête fichés dans un sol de Gibson ne mobilisent qu'une partie de sol d'environ égale au tiers de la hauteur de fiche ( $h/3$ ), même pour les pieux présentant une raideur très importante ( $E_p/mD = 150000$ ). On note également que les déplacements en tête diminuent très fortement lorsque la rigidité relative augmente. Les pieux les plus souples qui sont très sollicités en tête subissent des déplacements négatifs à une certaine profondeur, mais d'une ampleur faible en comparaison aux déplacements en tête.

L'étude de  $M/H_0D$  et  $M/M_0$  en fonction de la profondeur, permet de voir l'évolution du moment fléchissant adimensionnel avec la souplesse des pieux. Ceci est illustré par les figures (5.6-a et b), pour les deux cas de charges. L'allure de ces courbes est presque identique à celle issue de l'étude des pieux dans le sol homogène. De ce fait, on pourra faire les mêmes constatations qui ont été faites auparavant.

L'examen de l'évolution de l'effort tranchant le long de la fiche du pieu est illustrée par les deux figures (5.7-a) et (5.7-b) pour les deux cas de sollicitations considérées. Les deux profils présentent les mêmes caractéristiques observées dans le cas d'un sol homogène.

Les figures (5.8-a) et (5.8-b) montrent la répartition de la réaction du sol avec la profondeur relative  $z/D$  pour les pieux soumis respectivement à  $H_0$  et à  $M_0$ . Nous avons vu dans le cas d'un sol homogène que l'allure des profils de la réaction du sol avec la profondeur est quasiment identique à celle des profils des déplacements pour les deux cas de charges envisagés. Cependant, cette situation est absente dans un sol de Gibson. La réaction du sol provoquée par une force en tête du pieu (figure 5.8-a), est nulle en surface. Ceci est dû évidemment à la rigidité du sol nulle en surface également ( $E_s(0)=0$ ). Les profils de réaction passent ensuite par deux extremums apparents, l'un dans la zone des pressions positives, l'autre dans la zone des pressions négatives. Les valeurs maximales des réactions sont d'autant plus importantes que la rigidité relative sol-pieu est plus faible. Leurs côtes augmentent avec la rigidité relative.

Les mêmes remarques peuvent être faites sur la figure (5.8-b) pour les pieux soumis à  $M_0$  dans un sol de Gibson. Toutefois, les points des réactions maximales positives sont plus proches de la surface du sol, et les valeurs minimales négatives sont en valeurs absolues plus grandes. Ce phénomène est dû naturellement à l'application d'un moment en tête, qui a tendance à créer une zone de contre-butée à quelques diamètres du terrain naturel.

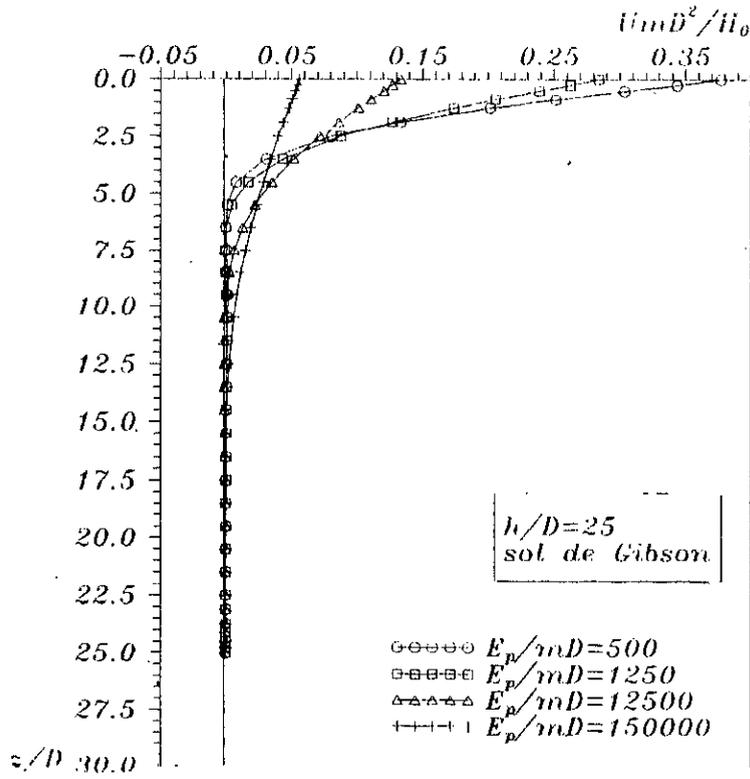


Figure 5.5-a: Effet de la rigidite relative sur le déplacement latéral: pieu soumis à  $H_0$

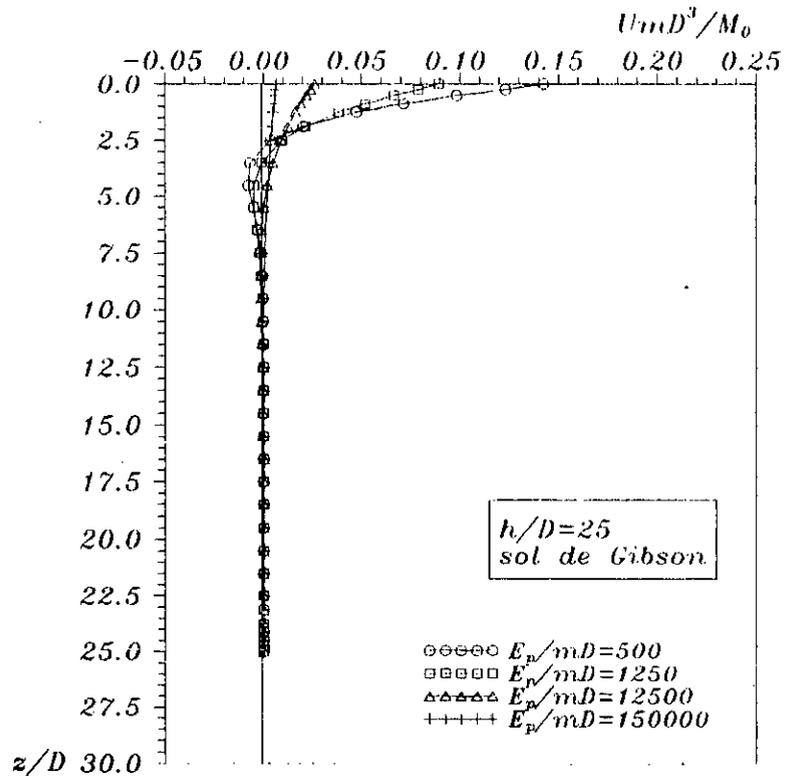


Figure 5.5-b: Effet de la rigidite relative sur le déplacement latéral: pieu soumis à  $M_0$

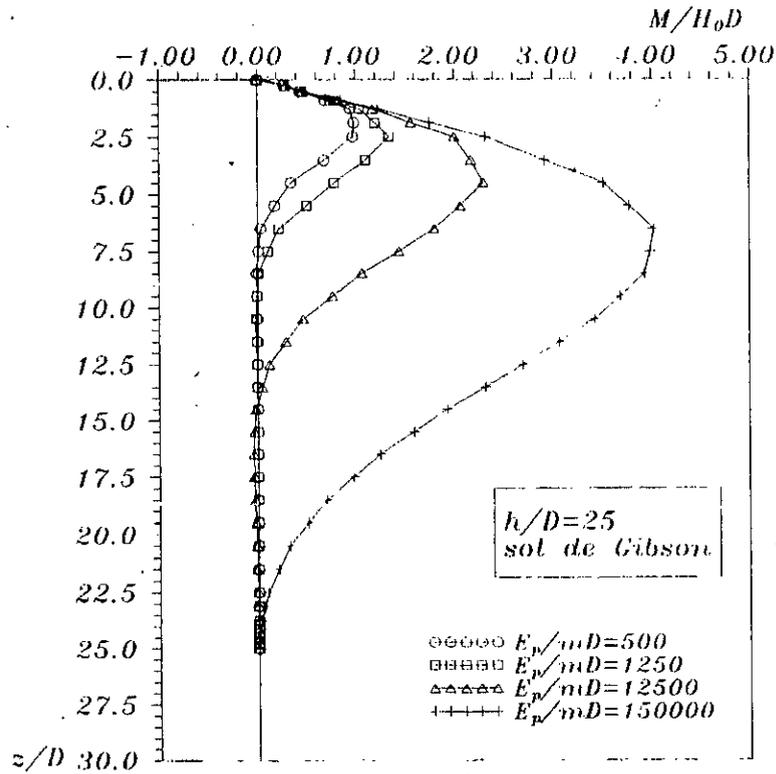


Figure 5.6-a: Effet de la rigidité relative sur le moment fléchissant: pieu soumis à  $H_0$

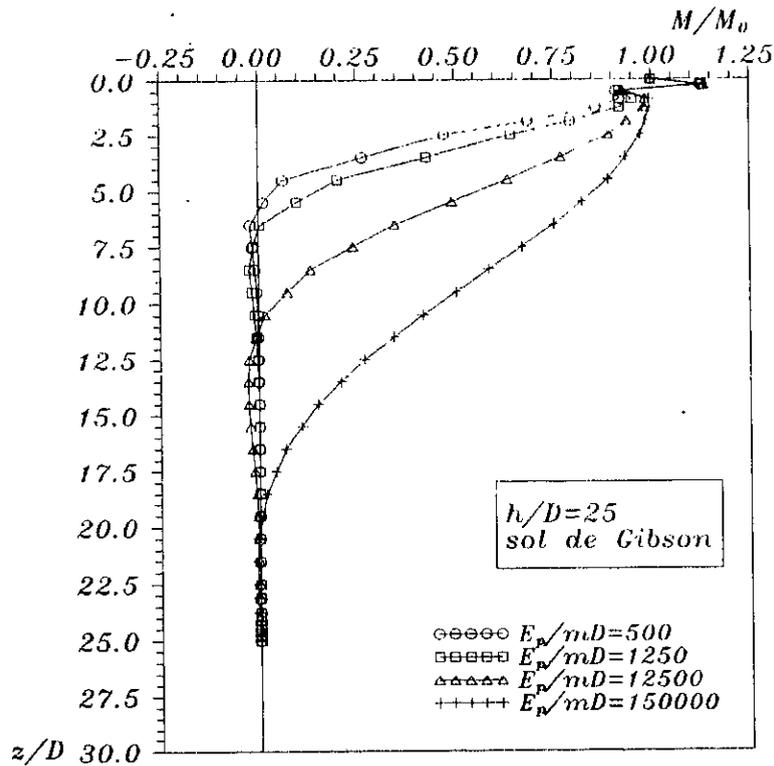


Figure 5.6-b: Effet de la rigidité relative sur le moment fléchissant: pieu soumis à  $M_0$

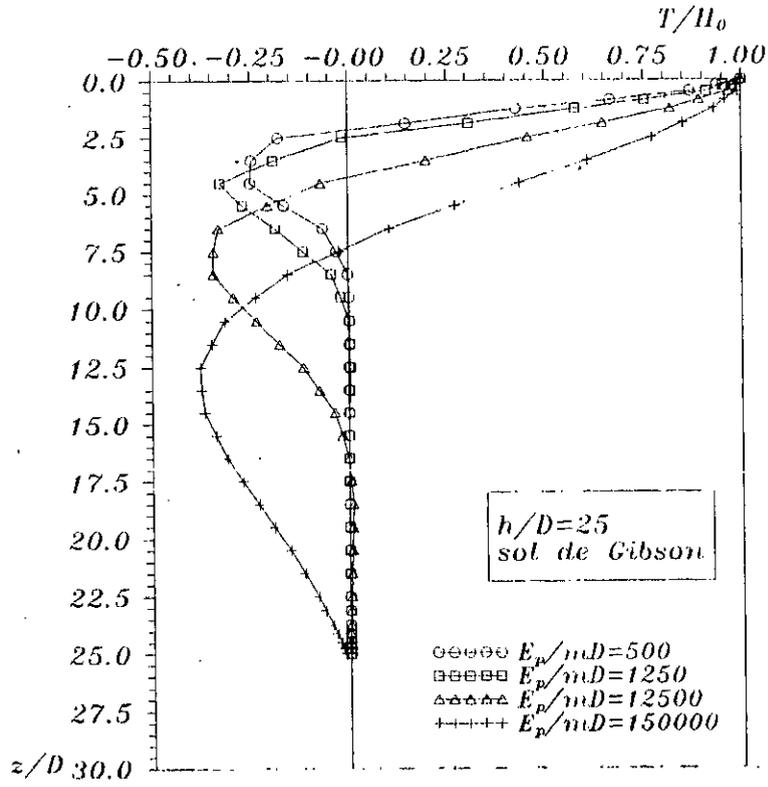


Figure 5.7-a: Effet de la rigidite relative sur l'effort tranchant: pieu soumis à  $H_0$

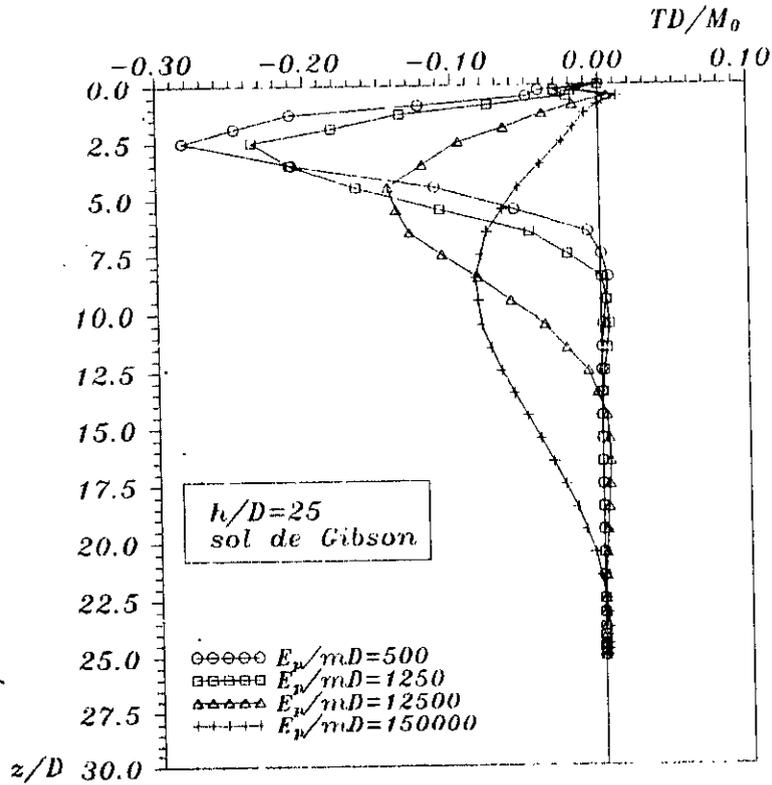


Figure 5.7-b: Effet de la rigidite relative sur l'effort tranchant: pieu soumis à  $M_0$

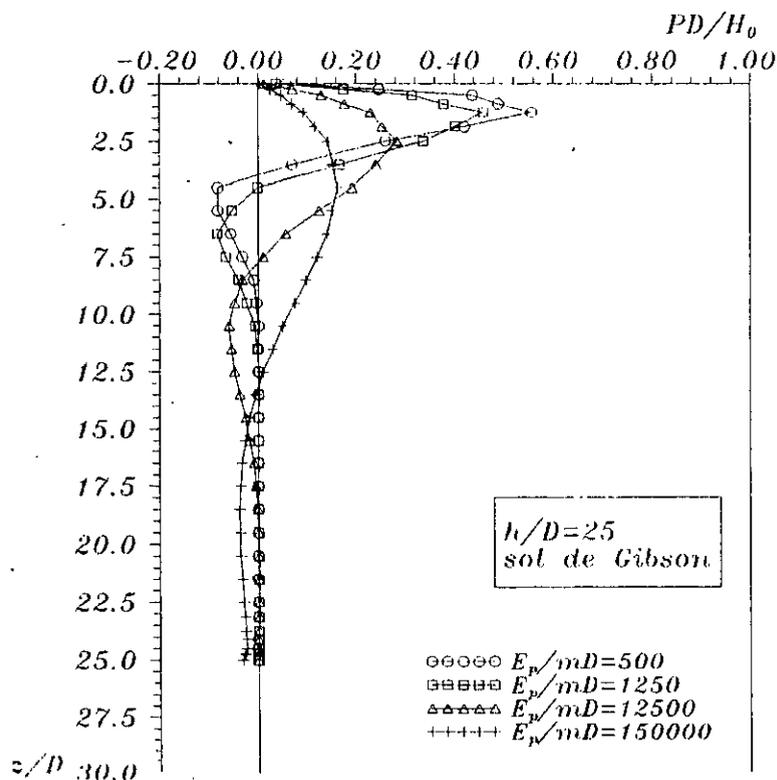


Figure 5.8-a: Effet de la rigidite relative sur la réaction du sol: pieu soumis à  $H_0$

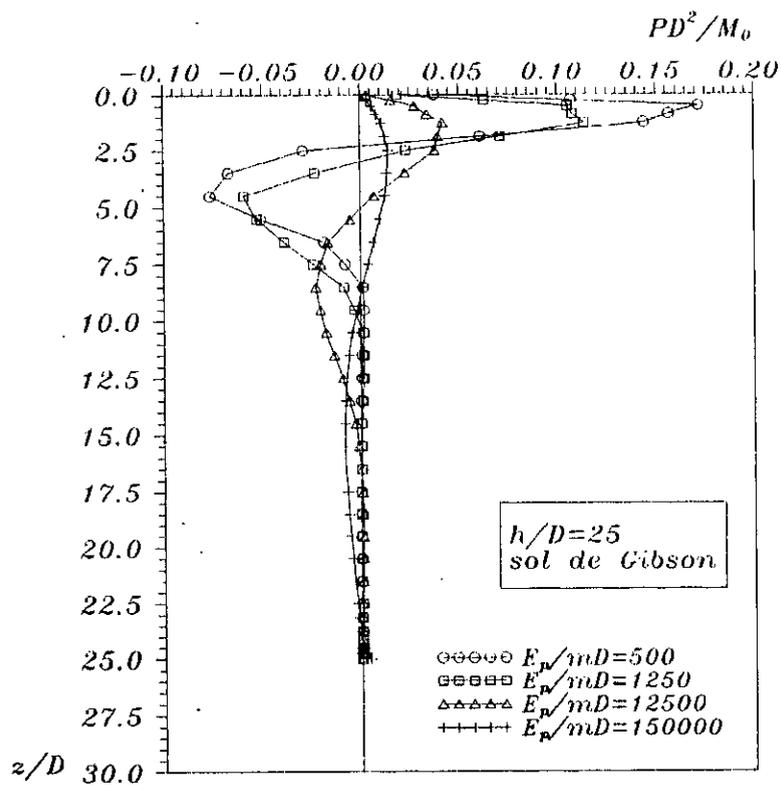


Figure 5.8-b: Effet de la rigidite relative sur la réaction du sol: pieu soumis à  $M_0$

### V.4.2- Effet de l'élancement sur le comportement du pieu

l'élancement d'un pieu est le rapport de sa longueur de fiche  $h$  à son diamètre  $D$ , on le note  $h/D$ . On se limite dans cette étude à une rigidité relative égale  $E_p/E_s=1000$  pour un sol homogène, et à  $E_p/mD=1250$  pour un sol de Gibson. L'influence de l'élancement de pieu sur son comportement sera examinée à travers son déplacement et le moment développé sur son fût. On étudiera donc quatre élancements à savoir:  $h/D=5$ ,  $h/D=10$ ,  $h/D=25$  et  $h/D=40$  pour deux cas de sollicitations.

Afin de faire une comparaison plus claire, et car l'étude porte sur des pieux de différents élancements, il a été jugé préférable d'étudier les déplacements latéraux et les moments fléchissants adimensionnels en fonction de la profondeur relative qui est cette fois-ci, la profondeur réelle rapportée à la longueur de fiche de chaque pieu.

#### V.4.2.a- Cas d'un sol homogène

Les figures (5.9-a et 5.9-b) illustrent les déplacements à différentes côtes des pieux des quatre élancements étudiés, respectivement sous l'effet d'un effort  $H_0$  et d'un moment  $M_0$ .

La figure (5.9-a) montre deux faits principaux pouvant retenir l'attention: on constate premièrement que le déplacement du pieu d'élancement  $h/D=5$  se manifeste par un pivotement autour d'un centre de rotation situé à proximité de sa pointe, et par un déplacement important en tête. Le second fait est que les pieux d'élancement  $h/D=10$ ,  $h/D=25$  et  $h/D=40$  ont une flexion d'autant plus prononcée que le pieu est plus élancé, et ont le même déplacement en tête.

La figure (5.9-b) met au clair une différence entre le comportement sous l'application d'un moment  $M_0$  d'un pieu d'élancement  $h/D=5$  d'une part, et les pieux des trois autres élancements d'autre part. Alors que le pieu d'élancement  $h/D=5$  subit une rotation d'ensemble, les autres pieux fléchissent en présentant les mêmes déplacements en tête, et les mêmes déplacements minimum négatifs (maximum en valeurs absolues).

La répartition des moments fléchissants adimensionnels avec la profondeur relative  $z/h$  est reportée sur les deux figures (5.10-a et 5.10-b) pour les deux cas de charges envisagés. La distinction est nette, notamment dans la figure (5.10-a), entre la distribution des moments

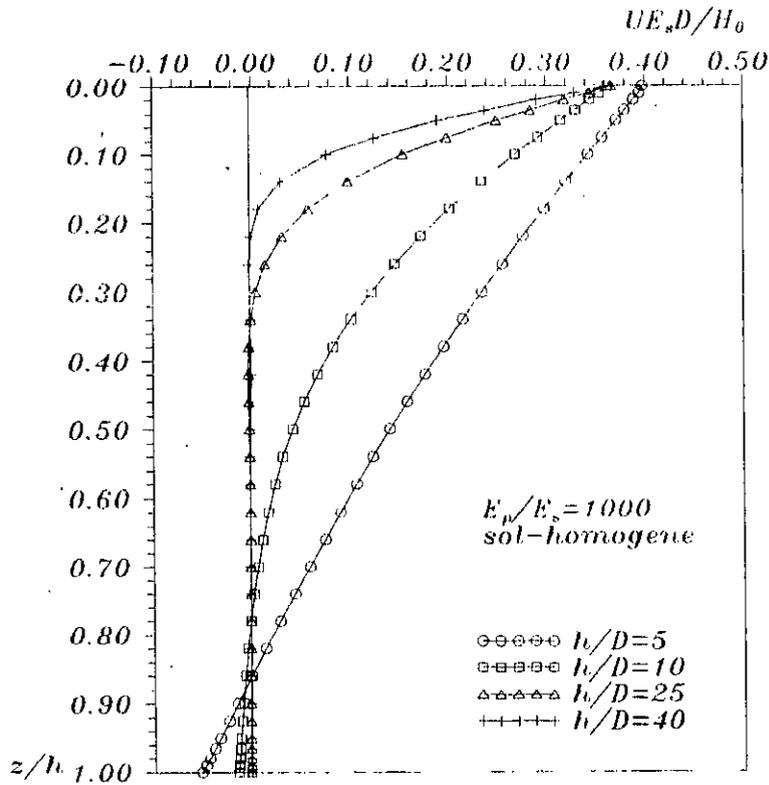


Figure 5.9-a: Effet de l'elancement sur le déplacement latéral: pieu soumis à  $H_0$

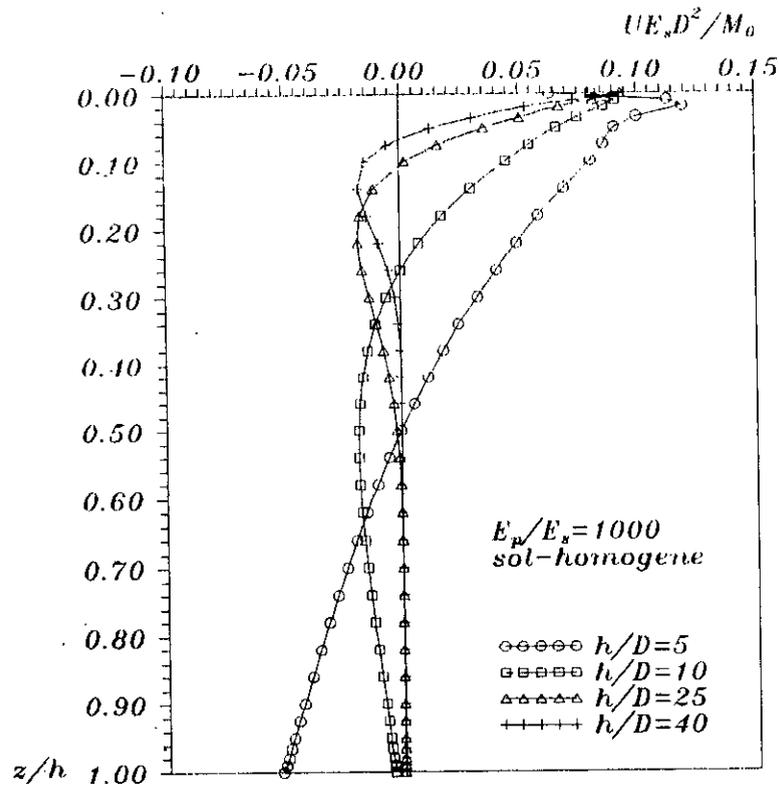


Figure 5.9-b: Effet de l'elancement sur le déplacement du pieu: pieu soumis à  $M_0$

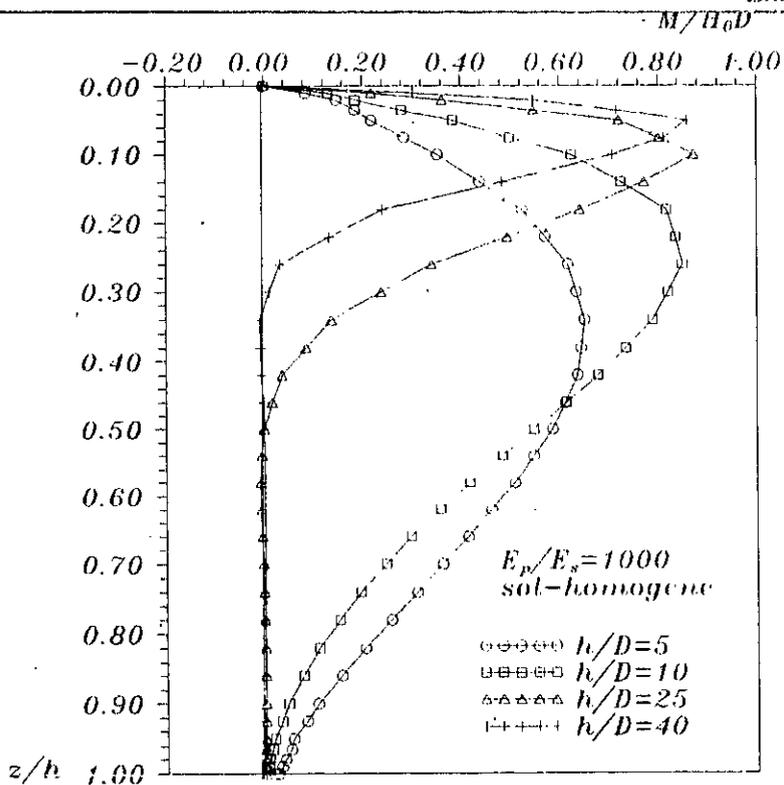


Figure 5.10-a: Effet de l'elancement sur le moment fléchissant: pieu soumis à  $H_0$

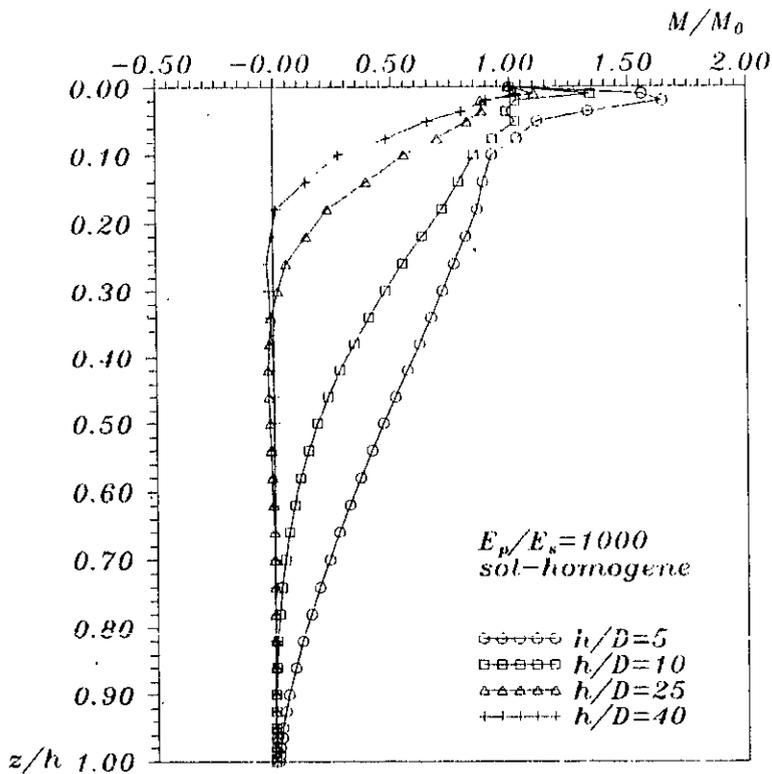


Figure 5.10-b: Effet de l'elancement sur le moment fléchissant: pieu soumis à  $M_0$

développés sur le pieu  $h/D=5$ , et ceux des pieux  $h/D=10$ ,  $h/D=25$  et  $h/D=40$ . Alors que cette répartition concerne toute la hauteur de fiche du pieu d'élanement  $h/D=5$ , ils se développent sur les autres pieux des moments de même intensité maximale, et des zones d'influence d'autant plus restreintes que l'élanement est important.

En conclusion, on s'est rendu à l'évidence, après l'examen des déformées des pieux et les répartitions des moments fléchissants, qu'il y a une relation étroite entre les élanements étudiés et la rigidité relative choisie dans cette étude. On s'est aperçu que le comportement du pieu  $h/D=5$  est différent de celui des pieux  $h/D=10$ ,  $h/D=25$  et  $h/D=40$ . Ceci nous amène à dire qu'il existe un élanement critique correspond à la rigidité relative  $E_p/E_s$  1000 situant certainement entre l'élanement  $h/D=5$  et l'élanement  $h/D=10$ . On donnera plus loin une expression analytique de cet élanement critique.

#### V.4.2.b-Cas d'un sol non-homogène

La rigidité relative sélectionnée pour cette étude est de  $E_p/mD = 1250$ . Les déplacements latéraux des différentes sections des quatre pieux sont illustrés par les figures (5.11-a et 5.11-b) pour les deux cas de sollicitations. On constate également que les pieux d'élanements  $h/D=10$ ,  $h/D=25$  et  $h/D=40$  ont le même déplacement en tête, alors que le pieu d'élanement  $h/D=5$  a un déplacement plus grand. Les mêmes constatations faites pour le cas d'un sol homogène peuvent être émises pour ce cas.

Les figures (5.12-a et 5.12-b) montrent la variation des moments en fonction de la profondeur relative. On s'aperçoit également que les moments sur le pieu d'élanement  $h/D=5$  se développent différemment. Ce phénomène confirme pour ce cas l'existence d'un élanement critique correspond à la rigidité relative d'un sol de Gibson  $E_p/mD=1250$  situant entre  $h/D=5$  et  $h/D=10$ .

Les résultats de l'analyse harmonique par éléments finis nous ont permis de déterminer une relation analytique donnant l'élanement critique en fonction de la rigidité relative  $E_p/mD$ . On donnera cette expression dans le paragraphe suivant.

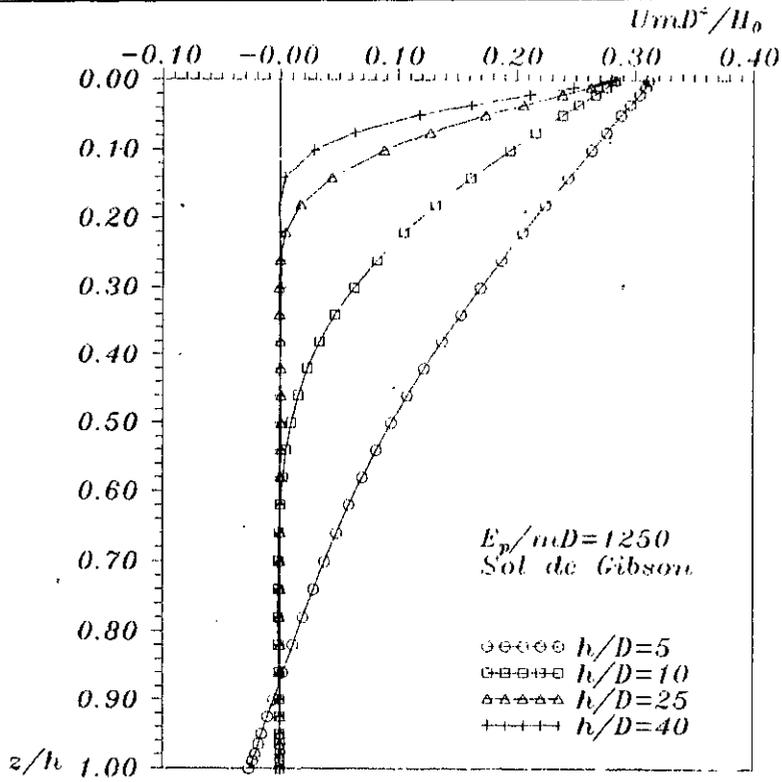


Figure 5.11-a: Effet de l'élancement sur le déplacement du pieu: pieu soumis à  $H_0$

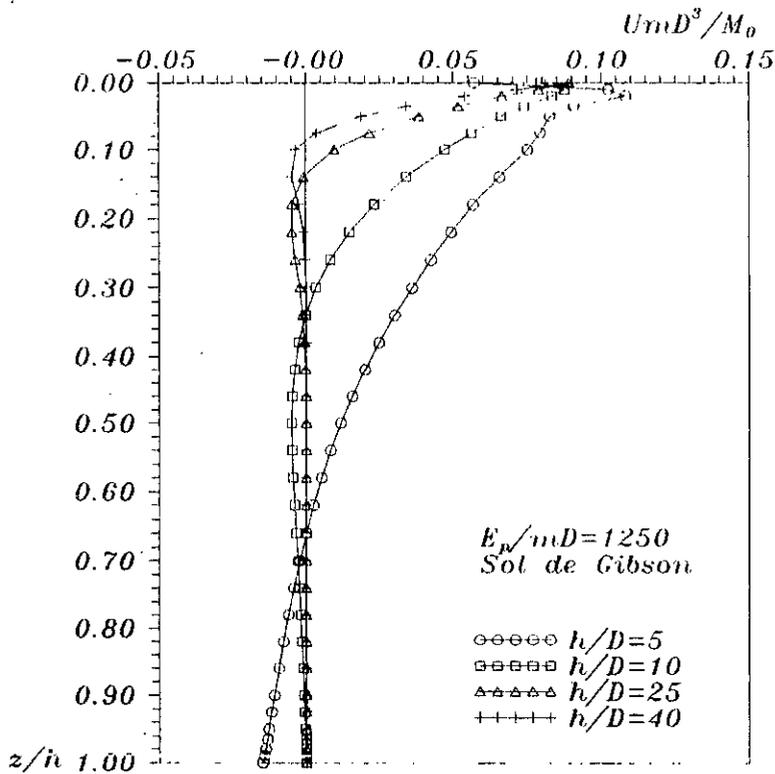


Figure 5.11-b: Effet de l'élancement sur le déplacement du pieu: pieu soumis à  $M_0$

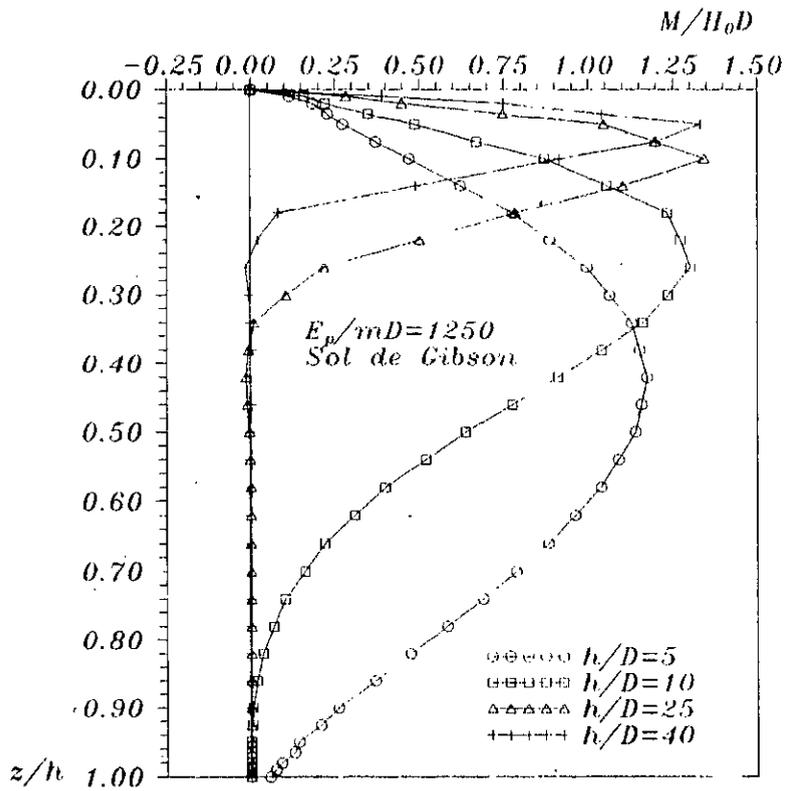


Figure 5.12-a: Effet de l'elancement sur le moment fléchissant: pieu soumis à  $H_0$

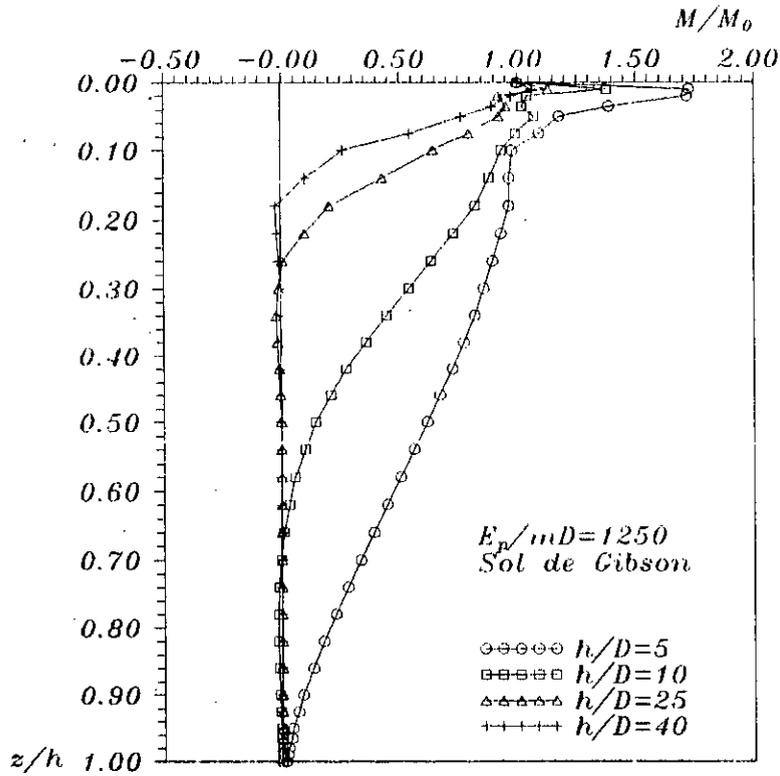


Figure 5.12-b: Effet de l'elancement sur le moment fléchissant: pieu soumis à  $M_0$

## V.5- Etablissement de quelques relations analytiques

Parmi les nombreux enseignements que l'on peut tirer de cette étude paramétrique théorique sont l'influence considérable de la rigidité relative sur le déplacement du pieu et les éléments de réduction développés sur le pieu en flexion, ainsi que l'effet plus ou moins important de l'élanement sur le comportement latéral du pieu, et qui dépend de ce qu'on est en dessus ou en dessous de l'élanement critique. Cette étude paramétrique nous a permis de voir la différence importante dans le comportement d'un pieu rigide qui n'a pas de déformations propres, et le comportement d'un pieu souple dont la stabilité est liée à son moment de flexion, à son effort tranchant et à la réaction du sol qu'il mobilise.

### V.5.1- Estimation de l'élanement critique

Nous avons constaté lors de l'étude de l'influence de l'élanement sur le comportement global du pieu, qu'il existe pour une rigidité relative fixe, une longueur du pieu au delà de laquelle le pieu se comporte comme s'il était infiniment long, et par conséquent la longueur de fiche n'affecte pas les déformations de l'extrémité chargée. L'existence d'une telle longueur a deux importantes conséquences pratiques:

a- la réduction de la déflexion latérale ne peut être effectuée par simple augmentation de la longueur de fiche au delà de la longueur critique; d'autres approches sont donc nécessaires telles que l'augmentation du diamètre et la rigidité du pieu.

b- La détermination rigoureuse de la forme du profil de sol et les paramètres géotechniques dans les couches superficielles du sol, est d'une importance majeure. En d'autres termes, dans la zone s'étendant à une profondeur égale à la longueur critique.

Un effort considérable d'analyse par élément finis a permis l'estimation de l'élanement critique (ou longueur critique). Les résultats numériques ont fourni les expressions:

$$\frac{h_c}{D} = 1.25 \left( \frac{E_p}{E_s} \right)^{0.286} \quad \text{pour un sol homogène.} \quad (5.4-a)$$

$$\frac{h_c}{D} = 1.38 \left( \frac{E_p}{mD} \right)^{0.222} \quad \text{pour un sol non-homogène.} \quad (5.4-b)$$

Les expressions analytiques qui seront fournies ultérieurement seront applicables aux pieux dont les élancements sont égaux ou supérieurs à ceux des équations (5.4). En d'autres termes on s'applique, dans ce qui suit, à l'étude des pieux souples.

### V.5.2- Pieux souples

Dans les méthodes qui considèrent le sol comme un milieu de Winkler, la longueur critique peut être donnée par:

$$h_c \cong 4 \left[ \frac{(EI)_p}{K} \right]^{0.25} \quad (5.5)$$

$K$ : module de réaction.

Pour les pieux dont la longueur est supérieure à leur longueur critique, les solutions de Hetenyi (1946) pour les pieux sollicités en flexion comprennent les déflexions et les rotations en tête exprimées par les relations:

$$\begin{aligned} u_0 &= \sqrt{2} \frac{H_0}{K} \left( \frac{h_c}{4} \right)^{-1} + \frac{M_0}{K} \left( \frac{h_c}{4} \right)^{-2} \\ \theta_0 &= \frac{H_0}{K} \left( \frac{h_c}{4} \right)^{-2} + \sqrt{2} \frac{M_0}{K} \left( \frac{h_c}{4} \right)^{-3} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Les déformations induites et les moments de flexion dans les pieux souples dont la longueur est supérieure à la longueur critique, sont restreints à la partie supérieure du pieu et la longueur globale du pieu n'a pas d'effet significatif sur la réponse de ce dernier. On a constaté que le passage de l'élancement  $h/D=10$  à l'élancement  $h/D=25$  puis à  $h/D=40$  pour les deux rigidités relatives étudiées:  $E_p/E_s=1000$  et  $E_p/mD=1250$ , n'avait aucune influence sur le déplacement en tête et sur le moment maximum développé.

A partir des résultats de l'étude semi-analytique tridimensionnelle, on présente sous formes algébriques simples des expressions semblables du point de vue de la forme à celles obtenues à partir d'une idéalisation de Winkler du sol (équations: 5.5 et 5.6 par exemple), et permettent l'estimation rapide: des déformations du pieu au niveau du sol, du moment de flexion maximum développé sur le fût, de l'effort tranchant maximum en travée, et de la réaction du sol maximale mobilisée en tête ou en profondeur. On fournit également des expressions permettant en fonction

de la rigidité relative, d'estimer les côtes où le moment maximum, l'effort tranchant maximum et la réaction du sol maximale pouvant avoir lieu.

En débutant par l'étude d'un sol homogène, les déplacements et les rotations en tête du pieu peuvent être interprétés par les expressions:

$$\begin{aligned} u_0 &= J_{uH_0} \cdot \frac{H_0}{E_s D} + J_{uM_0} \cdot \frac{M_0}{E_s D^2} \\ \theta_0 &= J_{\theta H_0} \cdot \frac{H_0}{E_s D^2} + J_{\theta M_0} \cdot \frac{M_0}{E_s D^3} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Expressions dans lesquelles  $J_{uH_0}$ ,  $J_{uM_0}$ ,  $J_{\theta H_0}$  et  $J_{\theta M_0}$  sont les facteurs d'influence d'un pieu libre en tête (vus au chapitre IV)

La figure (5.13) montre l'évolution des facteurs  $J_{uH_0}$ ,  $J_{uM_0}$  et  $J_{\theta M_0}$  en fonction de  $E_p/E_s$ .

Les résultats numériques obtenus par éléments finis peuvent être mis dans une forme analytique facilitant la tâche aux praticiens d'estimer les déplacements et les rotations en fonction de  $E_p/E_s$ , et sans avoir recours à l'interprétation, souvent laborieuse, à partir d'abaques. Le lissage des résultats numériques a donné:

$$\begin{aligned} J_{uH_0} &= 1.1073 \left( \frac{E_p}{E_s} \right)^{-0.1667} \\ J_{uM_0} &= J_{\theta H_0} = 1.1622 \left( \frac{E_p}{E_s} \right)^{-0.3802} \\ J_{\theta M_0} &= 3.7935 \left( \frac{E_p}{E_s} \right)^{-0.6378} \end{aligned} \quad (5.8)$$

En ce qui concerne les pieux soumis à un effort en tête  $H_0$ , le moment maximal se développe en profondeur. Ce moment qui a de l'importance dans le dimensionnement des pieux, pourra être exprimé par:

$$M_{max} = J_{MH_0} H_0 D \quad (5.9)$$

Les figures (5.14) et (5.15) illustrent respectivement les variations de  $J_{MH_0}$  et de la côte du moment maximal  $\frac{Z_{M_{max}}}{D}$  en fonction de la rigidité relative  $E_p/E_s$ . Le lissage des résultats numériques par des fonctions puissances a donné:

$$J_{MH_0} = 0.0761 \left( \frac{E_p}{E_s} \right)^{0.3414}$$

$$\frac{Z_{M_{max}}}{D} = 0.3158 \left( \frac{E_p}{E_s} \right)^{0.2896}$$
(5.10)

Qu'il soit soumis à un effort en tête ou à un moment, le pieu encaisse en profondeur des efforts tranchants négatifs non négligeables dont la valeur maximale (en valeur absolue) est proportionnelle à la rigidité relative dans le cas d'un effort en tête, et inversement proportionnelle à celle-ci dans le cas d'un moment. En revanche, les réactions maximales du sol apparaissent en tête et s'atténuent rapidement pour les deux cas de sollicitations. On pourra exprimer tous ces grandeurs par:

$$\begin{aligned} \text{un pieu soumis à } H_0 : \quad T_{max}^{tr} &= -J_{TH_0} H_0 \\ P_{max} &= J_{pH_0} \frac{H_0}{D} \end{aligned}$$
(5.11-a)

$$\begin{aligned} \text{un pieu soumis à } M_0 : \quad T_{max}^{tr} &= -J_{TM_0} \frac{M_0}{D} \\ P_{max} &= J_{pM_0} \frac{M_0}{D^2} \end{aligned}$$
(5.11-b)

Les figures (5.16), (5.17) et (5.18) montrent les variations de  $J_{TH_0}$ ,  $J_{TM_0}$ , des côtes de l'effort tranchant en travée maximal (en valeur absolue), de  $J_{pH_0}$  et de  $J_{pM_0}$  en fonction de la rigidité relative pour les deux cas de sollicitations. Leurs expressions numériques sont:

$$\begin{aligned} \text{un pieu soumis à } H_0 : \quad J_{TH_0} &= 0.0544 \left( \frac{E_p}{E_s} \right)^{0.1309} \\ \frac{Z_{T_{max}}}{D} &= 0.8601 \left( \frac{E_p}{E_s} \right)^{0.2620} \end{aligned}$$
(5.12)

$$\begin{aligned} J_{pH_0} &= 7.2062 \left( \frac{E_p}{E_s} \right)^{-0.2827} \\ J_{TM_0} &= 1.1318 \left( \frac{E_p}{E_s} \right)^{0.2576} \\ \text{un pieu soumis à } M_0 \quad \frac{Z_{T_{max}}}{D} &= 0.1543 \left( \frac{E_p}{E_s} \right)^{0.3557} \\ J_{pM_0} &= 39.9249 \left( \frac{E_p}{E_s} \right)^{-0.6319} \end{aligned}$$
(5.13)

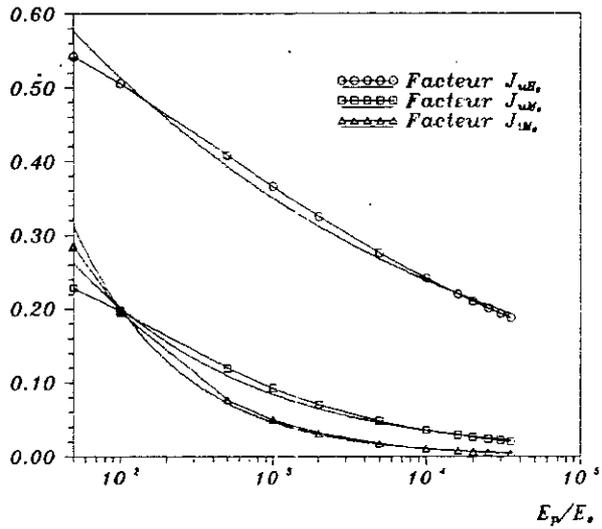


Figure 5.13: Facteurs d'influence d'un pieu libre en tete dans un sol homogène.

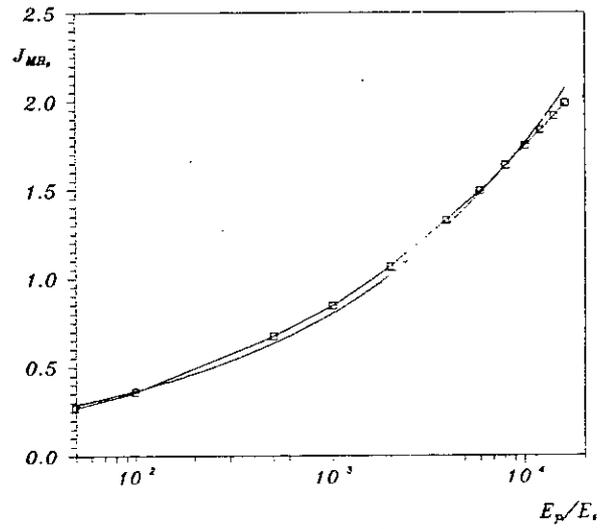


Figure 5.14: Moment maximum en fonction de la rigidite relative.

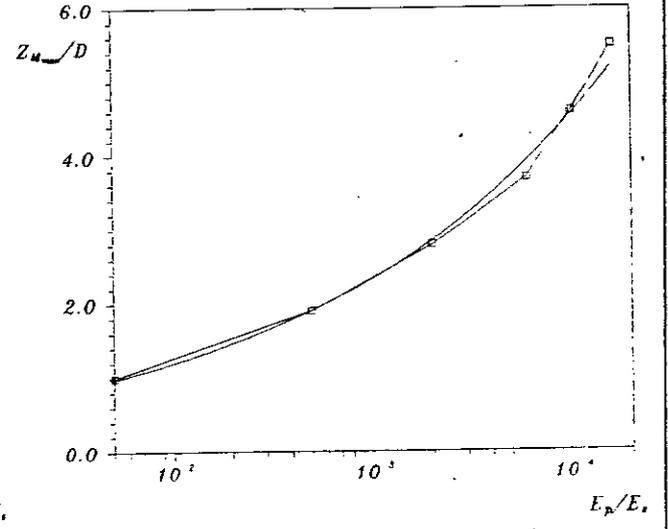


Figure 5.15: Cote du moment maximum.

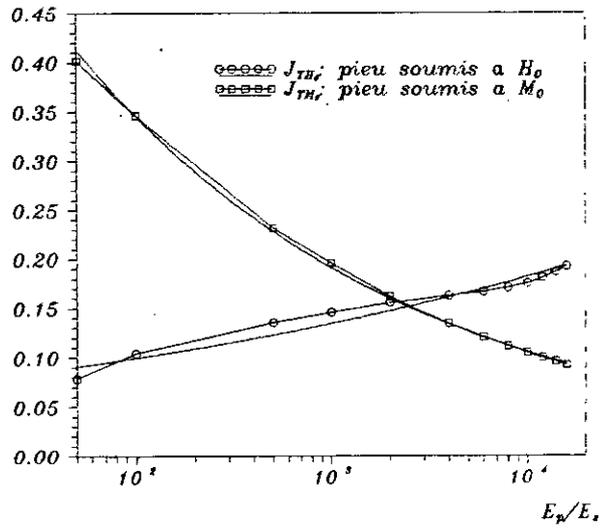


Figure 5.16: Evolution de l'effort tranchant extrême en travée.

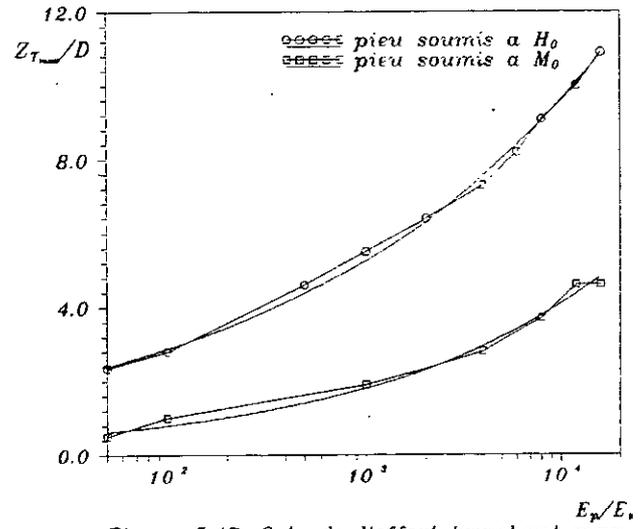


Figure 5.17: Cote de l'effort tranchant max. en travée.

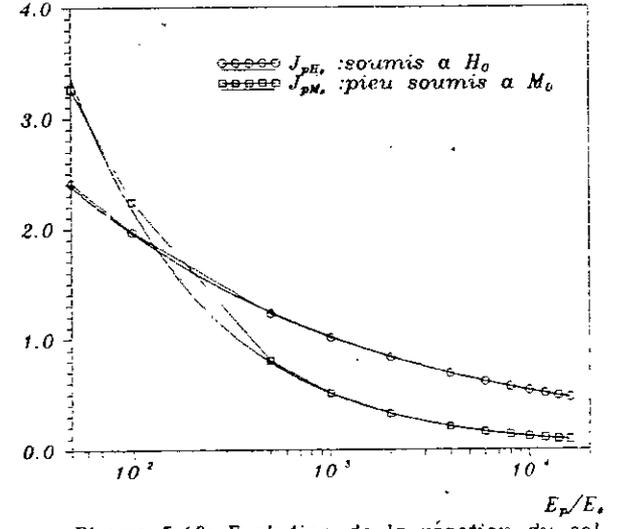


Figure 5.18: Evolution de la réaction du sol maximale.

Pour les pieux fichés dans un sol de Gibson, les expressions semblables aux équations (5.7) sont:

$$\begin{aligned} u_0 &= J'_{uH_0} \frac{H_0}{mD^2} + J'_{uM_0} \frac{M_0}{mD^3} \\ \theta_0 &= J'_{\theta H_0} \frac{H_0}{mD^3} + J'_{\theta M_0} \frac{M_0}{mD^4} \end{aligned} \quad (5.14)$$

La variation des trois facteurs d'influence  $J'_{uH_0}$ ,  $J'_{uM_0}$  et  $J'_{\theta M_0}$  correspondant à un sol non-homogène, est illustrée par la figure (5.19) en fonction de la rigidité relative. L'approximation par des fonctions puissances a donné :

$$\begin{aligned} J'_{uH_0} &= 2.7573 \left( \frac{E_p}{mD} \right)^{-0.3242} \\ J'_{uM_0} &= 3.6146 \left( \frac{E_p}{mD} \right)^{-0.5269} \\ J'_{\theta M_0} &= 6.9587 \left( \frac{E_p}{mD} \right)^{-0.7227} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Lorsque le pieu est soumis uniquement à une force latérale  $H_0$  en tête, le moment fléchissant maximal apparaît, comme dans le cas d'un sol homogène, à quelques diamètres de la surface naturelle du sol. L'expression de ce moment peut être écrite:

$$M_{max} = J'_{MH_0} H_0 D \quad (5.16)$$

L'évolution de  $J'_{MH_0}$  et de la côte relative  $\frac{Z_{M_{max}}}{D}$  du moment maximum en fonction de la rigidité relative  $E_p/mD$  est montrée respectivement par les figures (5.20) et (5.21). Le lissage analytique a permis d'avoir:

$$\begin{aligned} J'_{MH_0} &= 0.2203 \left( \frac{E_p}{mD} \right)^{0.2447} \\ \frac{Z_{M_{max}}}{D} &= 0.4130 \left( \frac{E_p}{mD} \right)^{0.2394} \end{aligned} \quad (5.17)$$

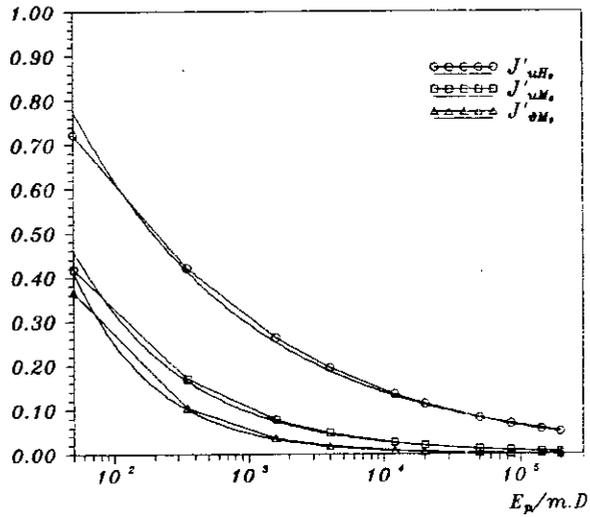


Figure 5.19: Facteurs d'influence d'un pieu libre en tete dans un sol non-homogene.

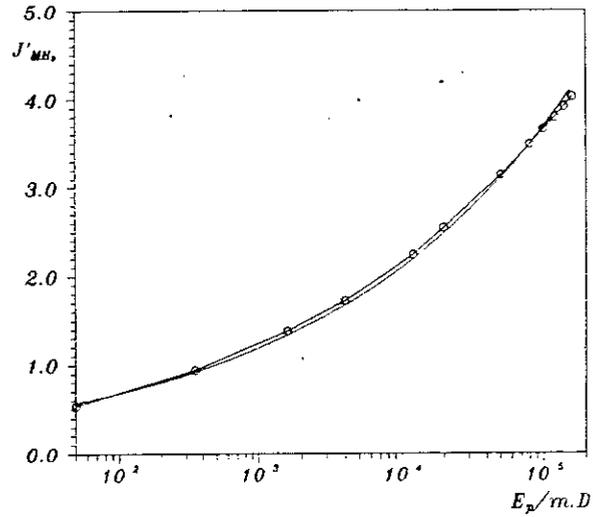


Figure 5.20: Variation du moment maximum

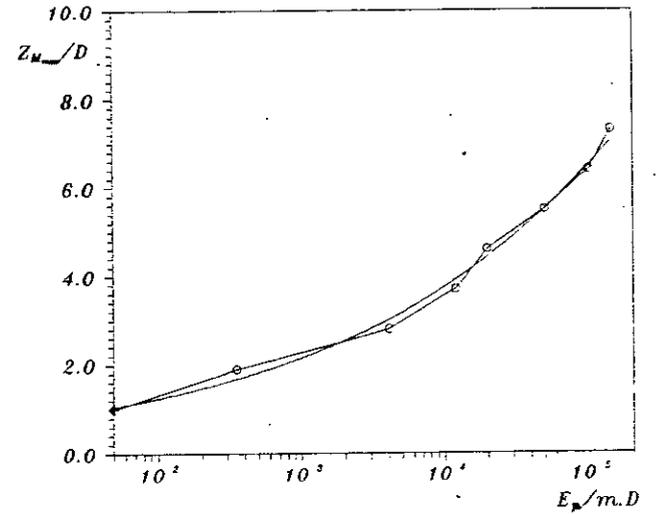


Figure 5.21: Cote du moment maximum.

Des équations similaires aux équations (5.11) concernant les efforts tranchants maximaux et les réactions du sol maximales peuvent être adoptées. Toutefois, les réactions apparaissent à quelques diamètres en profondeur, et sont moins importantes que celles du type de sol précédent. L'analyse numérique a fourni:

pour un pieu soumis à  $H_0$ :

$$\begin{aligned} J'_{T_{H_0}} &= 0.1469 \left( \frac{E_p}{mD} \right)^{0.0892} \\ \frac{Z'_{T_{max}}}{D} &= 1.0085 \left( \frac{E_p}{mD} \right)^{0.2151} \\ J'_{p_{H_0}} &= 1.9757 \left( \frac{E_p}{mD} \right)^{-0.2104} \\ \frac{Z'_{p_{max}}}{D} &= 0.1941 \left( \frac{E_p}{mD} \right)^{0.2664} \end{aligned} \quad (5.18)$$

pour un pieu soumis à  $M_0$ :

$$\begin{aligned} J'_{T_{M_0}} &= 0.9187 \left( \frac{E_p}{mD} \right)^{-0.1996} \\ \frac{Z'_{T_{max}}}{D} &= 0.3771 \left( \frac{E_p}{mD} \right)^{0.2686} \\ J'_{p_{M_0}} &= 2.9430 \left( \frac{E_p}{mD} \right)^{-0.4494} \\ \frac{Z'_{p_{max}}}{D} &= 0.2083 \left( \frac{E_p}{mD} \right)^{0.2233} \end{aligned} \quad (5.19)$$

La variation des paramètres des équations (5.18) et (5.19) est illustrée par les figures (5.22 - 5.25)

Ces équations ont été obtenues en modélisant le milieu sol-pieu en 270 éléments, 30 éléments dans la direction verticale dont 26 pour la discrétisation du pieu. Les figures des différents paramètres montrent clairement que le lissage des résultats numériques est optimal. Nous pensons donc que les expressions analytiques présentées sont suffisamment précises, et permettent d'effectuer une analyse complète d'un pieu souple sollicité en flexion.

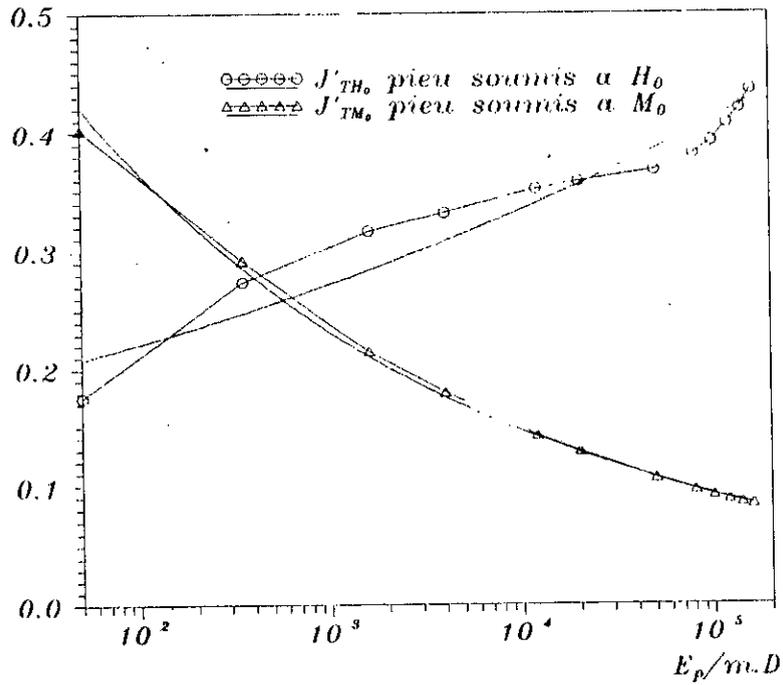


Figure 5.22: Evolution de l'effort tranchant extrême en travée.

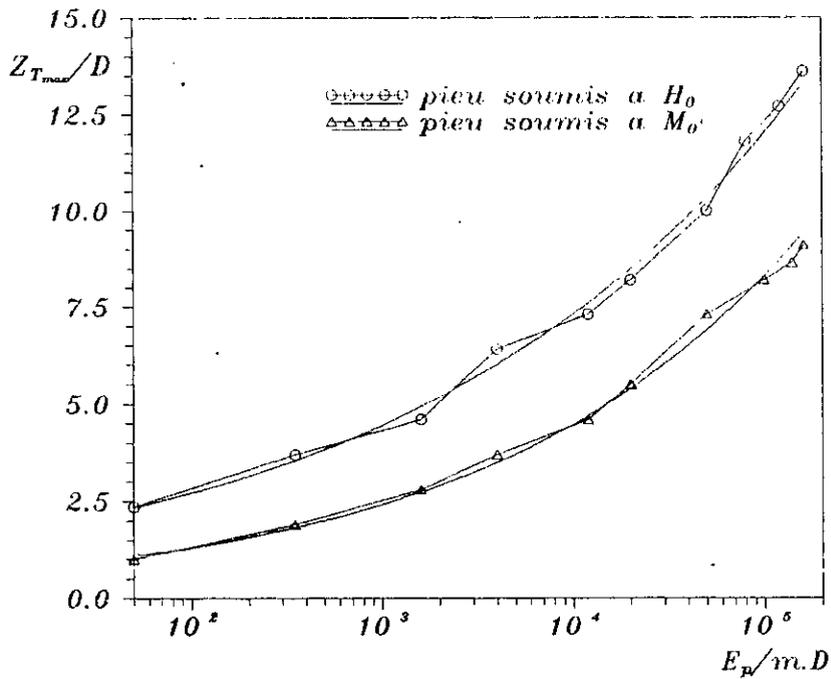


Figure 5.23: Cote de l'effort tranchant extrême en travée.

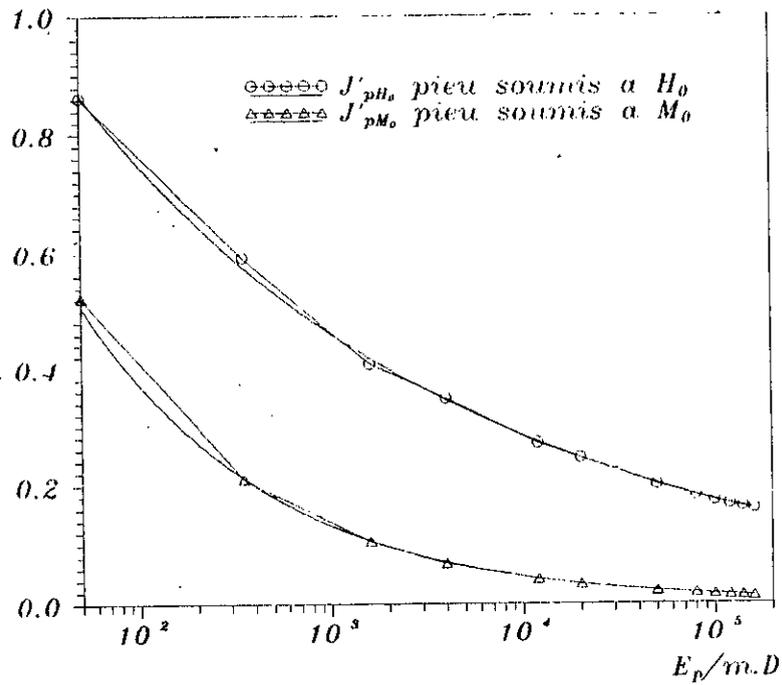


Figure 5.24: Variation de la réaction du sol maximale.

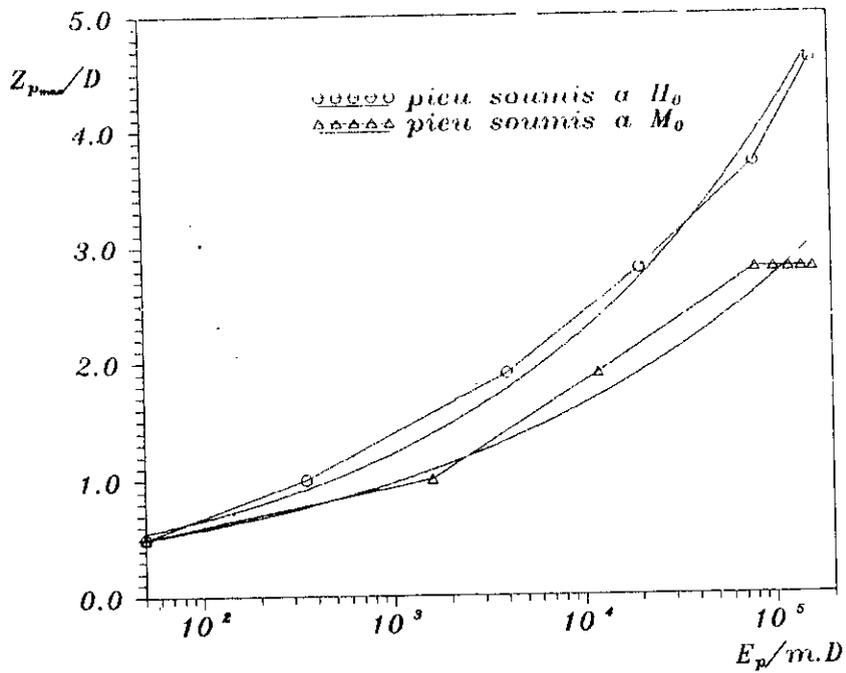


Figure 5.25: Cote de la réaction maximale du sol.

## V.6- Confrontation des résultats numériques aux résultats d'un essai expérimental en vraie grandeur: Essai de Mclelland et Focht (1956)

L'essai de Mclelland et Focht a été effectué dans un site argileux situé dans le Golfe du Mexique (U.S.A.). Le pieu battu à une profondeur de  $23m$  en dessous du terrain naturel, a un diamètre égal à  $0.61m$  et une rigidité à la flexion  $(EI)_p = 465\ 064.416\ KN.m^2$ .

Par l'intermédiaire d'un vérin hydraulique, les auteurs ont appliqué un effort latéral égal à  $356\ KN$  à un point du pieu situé environ à  $1.83\ m$  en dessus du sol. En plus, la configuration de l'essai est faite de telle façon qu'un moment négatif de  $-814\ KN.m$  est également appliqué au même point que l'effort latéral.

Le profil des moments obtenu expérimentalement a été intégré deux fois pour donner successivement les profils des pentes et des déplacements, et dérivé deux fois pour obtenir les profils des efforts tranchants et des réactions du sol.

D'après le profil des moments fléchissants, on s'aperçoit que le moment appliqué au niveau du sol est égal à  $-265\ KN.m$ . Ceci nous amène à dire que la force latérale transmise par le vérin hydraulique, compatible avec le profil des moments est de  $300\ KN$ , contrairement à la valeur de  $267\ KN$  reporté par le profil des efforts tranchants donné par Mclelland et Focht (cette constatation a été également faite par Randolph (1981)).

Le site où le pieu a été fiché est une argile normalement consolidée dont la rigidité varie linéairement avec la profondeur estimé à  $E_s = 2080. z\ (KN/m^2)$ , ( $z$  en mètres) et un coefficient de Poisson  $\nu_s = 0.30$ .

Afin de ne pas trop détailler la comparaison on s'est contenté de comparer les valeurs maximales des différentes grandeurs régissant le comportement du pieu, provenant des analyses numérique et expérimental.

	Essai expérimental	Numérique(ELASPULL)
Déplacement en tête (mm)	22.3	24.92
Moment maximum (KN.m)	475	421.09
Effort tranchant max. (KN)	107	77.20
Réaction max. du sol (KN/m)	97	81.05

**Tableau 5.1:** Comparaison avec l'essai de Mclelland et Focht (1956)

Le tableau (5.1) résume les éléments de comparaison. Les différences remarquées sont dues probablement à nombreuses raisons:

-Après l'examen du profil du moment fléchissant dans cet essai, on constate que l'effort latéral conforme à ce profil doit être égal à  $300\text{ KN}$ , contrairement à  $267\text{ KN}$  reporté par le profil de l'effort tranchant expérimental.

-Les seules grandeurs physiques sur lesquelles l'expérimentateur a le plus de contrôle sont le moment fléchissant et le déplacement latéral. Les deux autres grandeurs sont obtenues par différenciation numérique, et nous avons mentionné les inconvénients de cette technique.

-Etant donné la date de l'essai, les paramètres élastiques ne sont certainement pas précis.

Toutefois, on peut conclure que l'accord est assez bon pour le moment maximal et le déplacement horizontal en tête.

## Chapitre VI:

### Rappel des éléments fondamentaux de la théorie de l'elasto-plasticité

#### Résumé:

*Dans le cadre de ce chapitre, nous décrivons, sans rentrer dans les détails, les éléments essentiels de la théorie de l'élasto-plasticité.*

*Après une courte introduction, nous donnons la définition du critère de plasticité et la surface de charge. Nous décrivons ensuite, la notion de la règle d'écoulement et les règles d'écrouissage ainsi que les deux approches permettant de déterminer les paramètres d'écrouissage.*

*A la fin du chapitre, nous donnons les équations incrémentales élasto-plastiques qui serviront à la programmation des algorithmes mis au point.*

## VI.1- introduction

L'accroissement des moyens informatiques et la possibilité offerte par la méthode des éléments finis de prendre en compte de manière relativement simple des lois de comportement complexes, ont motivé les rhéologues à développer des lois de comportement de plus en plus réalistes.

Toutefois, la diversité et la complexité des géomatériaux ont amené les chercheurs à distinguer un grand nombre de caractères de comportement tels que l'élasticité, la viscosité, la plasticité et leurs combinaisons (élasto-plasticité, viscosité et visco-plasticité). Dans le cadre de ce chapitre seul le comportement elasto-plastique sera développé. Ce schéma de comportement exclut tout effet de vieillissement et de viscosité du sol. L'incorporation d'une loi de comportement élasto-plastique dans un code d'éléments finis se base essentiellement sur les algorithmes fournis par la théorie incrementale de l'élasto-plasticité (Nayak et Zienkiewicz, 1972; et Zienkiewicz, 1977). Pour cet objectif on donnera dans les prochains paragraphes les éléments fondamentaux relatifs à cette théorie. Pour plus de détail, le lecteur intéressé pourra se référer aux ouvrages spécialisés (Chen et Han, 1988; Naylor et al., 1984; Chen et Baladi, 1985 et Mestat, 1993).

## VI.2- Eléments fondamentaux de la théorie incrementale de plasticité

L'écoulement plastique d'un corps solide est caractérisé par un facteur qui est absent pendant une déformation élastique. Des déformations irréversibles se développent et dépendent non seulement de l'état actuel des contraintes, mais de l'histoire du chargement également. Le principal objectif de la théorie de plasticité est d'aboutir à des relations constitutives permettant de rendre compte de ce phénomène.

La théorie incrementale de plasticité qui a été initialement établie à partir des résultats expérimentaux relatifs au comportement des métaux, fournit un processus très performant à l'étude d'une large gamme de géomatériaux y compris le sol.

### VI.2.1- Equations différentielles décrivant le comportement

La déformation est supposée statique et infinitésimale; ce qui signifie que les effets de l'inertie et de la variation dans la géométrie due aux déformations sont négligés. En plus, on suppose que la déformation totale est définie comme la somme d'une déformation réversible (élastique) et d'une déformation irréversible (plastique):

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^p\} \quad (6.1)$$

Les incréments des déformations élastiques sont reliés aux incréments des contraintes par la loi de Hooke généralisée (système 3.4). Les relations nécessaires entre les incréments des déformations plastiques et les incréments des contraintes sont établies à partir de trois concepts fondamentaux:

- Le critère de plasticité, qui généralise la notion du seuil de plasticité mis en évidence dans les expériences de sollicitations uniaxiales.

- La règle d'écoulement qui définit, dans le cas des sollicitations uniaxiales, la façon dont évolue la déformation plastique.

- Le phénomène d'écrouissage qui se traduit mathématiquement par l'évolution de la surface de charge dans l'espace des contraintes.

### VI.2.2- Notion de surface de charge ou critère de plasticité

Il a été postulé que l'écoulement plastique tient lieu lorsque l'état de contraintes cumulé dans un point matériel satisfait un certain critère énergétique, ou atteint une valeur critique bien déterminée. Le concept unidirectionnel du seuil de plasticité mis en évidence par l'essai de traction simple mène naturellement à l'idée de la surface de charge dans le cas d'une sollicitation multiaxiale. Le critère de plasticité peut être alors défini par la fonction scalaire  $F$  (Figure 6.1):

$$F(\{\sigma\}) = 0 \quad (6.2)$$

Expression dans laquelle:  $\{\sigma\}^T = \{\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \tau_{rz}, \tau_{z\theta}, \tau_{\theta r}\}$  dans un système de coordonnées cylindriques.

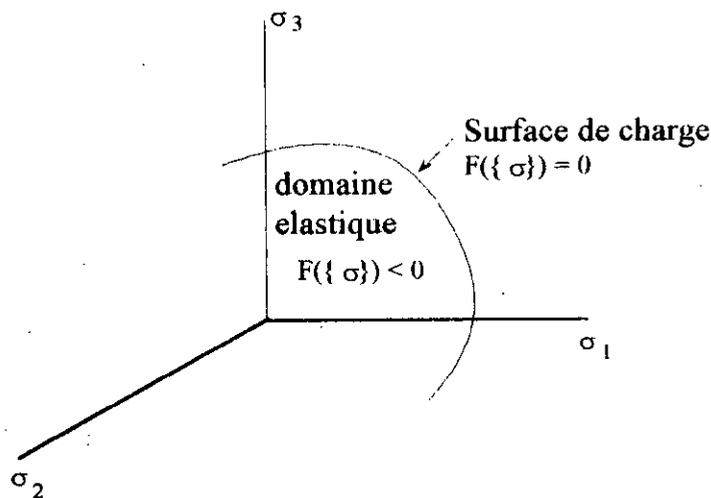


Figure 6.1: Représentation de la surface de charge dans l'espace des contraintes

$F(\{\sigma\}) < 0$  l'état des contraintes est à l'intérieur du domaine élastique, i.e. le sol se déforme élastiquement.

$F(\{\sigma\}) = 0$  implique que l'état de contraintes est sur la surface de charge; les déformations élastiques peuvent être éventuellement accompagnées de déformations plastiques.

$F(\{\sigma\}) > 0$  est un état de contraintes physiquement impossible.

En général, la théorie de plasticité peut être développée pour permettre l'expansion (radoucissement du matériau), la contraction (ramollissement du matériau) et la translation de la surface de charge dépendant ainsi de la règle d'écoulement et des paramètres d'écrouissage utilisés.

Etant donné que la surface de charge est invariable par rapport à tout système de coordonnées pour les matériaux isotropes, il convient alors d'exprimer le critère de plasticité en termes d'invariants du tenseur des contraintes et du tenseur des contraintes déviatoriques:

$$F(I_1, I_2, I_3, J_2, J_3) = 0 \quad (6.3)$$

Où en adoptant le système des coordonnées cylindriques,  $I_1, I_2, I_3$  sont le premier, le second et le troisième invariants du tenseur de contraintes donnés par :

$$I_1 = \sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta \quad (6.4-a)$$

$$I_2 = \sigma_z \sigma_\theta + \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_r \sigma_z - \tau_{z\theta}^2 - \tau_{\theta r}^2 - \tau_{rz}^2 \quad (6.4-b)$$

$$I_3 = \sigma_r \sigma_z \sigma_\theta + 2 \tau_{rz} \tau_{z\theta} \tau_{\theta r} - \sigma_r \tau_{z\theta}^2 - \sigma_\theta \tau_{rz}^2 - \sigma_z \tau_{\theta r}^2 \quad (6.4-c)$$

Et  $J_2, J_3$  sont le second et le troisième invariants de contraintes déviatoriques donnés par:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_r)^2] + \tau_{rz}^2 + \tau_{z\theta}^2 + \tau_{\theta r}^2 \quad (6.5-a)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_r - \frac{I_1}{3} & \tau_{rz} & \tau_{r\theta} \\ & \sigma_z - \frac{I_1}{3} & \tau_{z\theta} \\ & & \sigma_\theta - \frac{I_1}{3} \end{vmatrix} \quad (6.5-b)$$

Afin de modéliser le sol d'une manière plus réaliste, plusieurs critères de plasticité très sophistiqués ont été formulés par les modélisateurs; on cite entre autres les lois de comportement de Cam-clay et ses versions: originale et modifiée (Roscoe et al, 1958; Schofield et Wroth, 1968), de Vermeer (1980), et de Nova (1982). Ces lois de comportement sont plus élaborées et mieux adaptées à l'étude du comportement du sol.

### VI.2.3- Notion de règle d'écoulement

Le postulat fondamental de la théorie incrémentale de plasticité réside dans le fait que l'écoulement d'un point matériel à l'état plastique est contrôlé par une certaine fonction qui dépend de l'état actuel des contraintes, nommé potentiel plastique. Si l'on suppose que le potentiel a la même forme que celle de la surface de charge, on peut donc l'exprimer comme:

$$Q(\{\sigma\}) = 0 \quad (6.6)$$

La règle d'écoulement énonce que l'incrément de déformation plastique est linéairement relié au gradient du potentiel plastique (Drucker, 1951). Autrement dit, toutes les déformations possibles sont coaxiales à la normale extérieure au potentiel plastique dans l'espace des contraintes. Ceci peut s'exprimer mathématiquement par:

$$\{d\varepsilon^p\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} \right\}, \quad d\lambda \geq 0 \quad (6.7)$$

$d\lambda$  est un scalaire incrémental non-négatif appelé multiplicateur plastique (Figure 6.2). Il dépend de l'état actuel des contraintes, des déformations, et de l'histoire entière du chargement.

On dit qu'un matériau est standard si son potentiel plastique et sa surface de charge sont identiques ( $F \equiv Q$ ). On parle donc d'une règle d'écoulement associée. Ceci est généralement vrai pour les métaux dont le comportement est indépendant de la contrainte moyenne. En revanche, un matériau comme le sol est dit non-standard et on introduit en fait, un potentiel plastique différent de la surface de charge ( $F \neq Q$ ). On parle alors d'une règle d'écoulement dite non-associée à la surface de charge. Les études expérimentales ont clairement montré que le vecteur de l'incrément de déformation plastique dévie nettement de la normale à la surface de charge. Ainsi, divers auteurs tels que Zienkiewicz, Humpheson et Lewis (1977), et Stipho (1978) par exemple ont utilisé une règle d'écoulement non-associée dans leurs formulations.

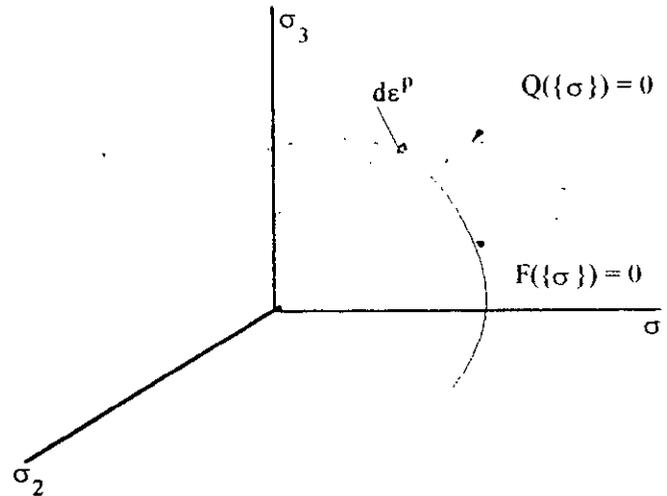


Figure 6.2: Potentiel plastique et règle d'écoulement non-associée.

#### VI.2.4- Règles d'écrouissage

Les règles d'écrouissage permettent de définir l'évolution de la surface de charge résultant des déformations plastiques continues. Cela veut dire que l'état d'écrouissage n'évolue que lorsqu'il y a évolution de la déformation plastique. En fait, c'est la connaissance de l'histoire de l'état des contraintes qui définit l'état d'écrouissage du matériau. On peut dire donc, pour les situations multiaxiales, la surface de charge ne dépend pas uniquement de l'état de contraintes mais des déformations plastiques également. L'équation (6.2) de la fonction de charge peut être réécrite d'une façon plus générale:

$$F(\{\sigma\}, \{\epsilon^p\}) = 0 \quad (6.8)$$

ou 
$$F(\{\sigma\}, h) = 0 \quad (6.9)$$

où  $h$  représente une fonction scalaire des déformations plastiques appelé paramètre d'écrouissage. Ici encore,  $F(\{\sigma\}, h) < 0$  implique une réponse élastique et  $F(\{\sigma\}, h) > 0$  représente une situation impossible.

Les règles d'écrouissage qui dépendent évidemment de la non-linéarité matérielle ont fait l'objet de nombreuses recherches qui combinent des observations expérimentales et des hypothèses théoriques nécessaires à l'interprétation des essais. Deux approches sont généralement adoptées pour la détermination des paramètres d'écrouissage. Le premier permet d'exprimer les règles d'écrouissage en termes de la dissipation du travail plastique  $W_p$ , la seconde utilise la notion de la distorsion plastique  $\epsilon_p$ . Il importe que la variable d'écrouissage choisie soit une variable facilement

mesurable. Le travail et la distorsion plastiques peuvent être définis par les relations suivantes (Owen et Hinton, 1980; Chen et Han, 1988):

$$dw_p = \{\sigma\}^T \cdot \{d\varepsilon^p\} \quad (6.10)$$

$$d\varepsilon_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \{d\varepsilon^p\}^T \cdot \{d\varepsilon^p\} \right]^{1/2} \quad (6.11)$$

Diverses théories simplificatrices ont été construites pour décrire les règles de l'écroûissage on peut citer:

- La théorie de l'écroûissage isotrope de Taylor et Quinney (1931): Cette théorie suppose une expansion ou une contraction uniforme de la surface de charge initiale. En d'autres termes, la surface de charge actuelle se déduit de la surface de charge initiale par homothétie au fur et à mesure que les déformations plastiques se développent.

- La théorie de l'écroûissage cinématique de Prager (1958): durant la déformation plastique la surface de charge initiale se translate rigidement dans l'espace des contraintes. L'objectif principal de cette théorie est de rendre compte de l'effet de Bauschinger et donc de fournir une modélisation approximative au comportement d'un matériau sous charges cycliques.

### **VI.3- Relations incrémentales pour un seul mécanisme plastique à écroûissage isotrope**

Les relations incrémentales reliant l'incrément de contrainte à l'incrément de déformation élastique d'une part, et à l'incrément de déformation plastique d'autre part, nécessaires à leur programmation dans un code numérique d'analyse par éléments finis ont été formulées par nombreux auteurs. On cite entre autres: Yamada, Yoshimura, et Sakurai, 1968; Zienkiewicz, Valliappan et King, 1969; Nayak et Zienkiewicz, 1972; Zienkiewicz, 1977; Owen et Hinton, 1980; Naylor et al, 1984; et Sloan, 1987.

Nous donnons brièvement dans ce paragraphe les relations incrémentales permettant de décrire un comportement élasto-plastique avec écroûissage isotrope, et qui sont mêmes applicables à un comportement élastique parfaitement plastique.

Lorsqu'on part d'un état plastique et on effectue un chargement on obtient un autre état plastique. On doit donc admettre que l'état de contrainte et d'écaouissage  $(\sigma, h)$  se situe obligatoirement sur la frontière du domaine d'élasticité actuel. Ceci signifie que  $F(\{\sigma\}, h) = 0$ . En utilisant l'équation (6.1) et en se servant de la règle de normalité pour la déformation plastique on obtient:

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + d\lambda \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} \quad (6.12)$$

Afin de définir complètement la relation de comportement, il convient d'exprimer le multiplicateur plastique  $d\lambda$  soit en fonction de l'incrément de déformation, soit en fonction de l'incrément de contrainte. Ce calcul est effectué en appliquant la condition de consistance  $dF(\{\sigma\}, h) = 0$  qui indique que l'état de contrainte doit rester sur la surface de charge au cours du chargement ( $F = 0$ ). La condition de consistance permet d'écrire:

$$dF = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T \{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial h} dh = 0 \quad (6.13)$$

En utilisant l'équation du comportement élastique, l'équation de la règle d'écoulement, et l'équation (6.12) on déduit l'expression du multiplicateur de plasticité:

$$d\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D] \{d\varepsilon\}}{A + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}} \quad (6.14)$$

On peut également, à partir des relations précédentes écrire une relation plus générale liant les incréments de déformations aux incréments de contraintes: C'est la relation du comportement élasto-plastique:

$$\{d\sigma\} = ([D] - [D^p]) \{d\varepsilon\} = [D^{ep}] \{d\varepsilon\} \quad (6.15-a)$$

$$\text{où } [D^p] = \frac{[D] \left\{ \frac{\partial \cdot}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \cdot}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{A + \left\{ \frac{\partial \cdot}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial \cdot}{\partial \sigma} \right\}} \quad (6.15-b)$$

Le tenseur de comportement  $[D^{ep}]$  ainsi défini est appelé matrice de comportement élasto-plastique. Celle-ci remplace la matrice d'élasticité  $[D]$  dans l'analyse incrémentale.  $[D^{ep}]$  est symétrique et définie positive.

La détermination du paramètre  $A$  est liée à la règle d'écoulement utilisée. Si le comportement est élastique parfaitement plastique on a simplement  $A = 0$ .

Toutes les relations incrémentales de l'élasto-plasticité présentées ci-dessus ne sont valables que pour un modèle défini à partir d'une seule surface de charge  $F(\{\sigma\}, h)$  et régi par une règle d'écoulement associée. Lorsque le modèle est défini par plusieurs surfaces de charge, les relations deviennent plus complexes.

#### VI.4- Conclusion

Pour résumer, les relations incrémentales élasto-plastiques reliant les contraintes aux déformations ont trois ingrédients:

- Une fonction de charge permettant de définir une surface délimitant une zone élastique et une zone plastique.

- Une fonction d'écoulement décrivant l'évolution de la surface de charge due aux déformations plastiques.

- Et finalement une règle d'écoulement définissant la direction des déformations plastiques. Cette règle régit également le phénomène de dilatance pendant la déformation plastique. Elle a donc un effet considérable sur la résistance du matériau.

Nous nous limiterons dans cette thèse à un sol élastique parfaitement plastique et à une règle d'écoulement associée.

## Chapitre VII:

### Extension de l'approche semi-analytique à l'étude élasto-plastique des pieux sous charges horizontales

#### Résumé:

*on décrit dans le cadre de ce chapitre la version elasto-plastique de l'approche semi-analytique et son application à un pieu dans un sol à comportement non-linéaire.*

*Après une succincte introduction, et une courte description du critère de Drucker-Prager et justification de son utilisation, on entamera les différentes étapes de l'analyse harmonique en élasto-plasticité.*

*On terminera le chapitre par l'application du code numérique **PLASPULL** dans l'estimation de la réaction latérale ultime d'un sol cohérent.*

## VII.1- Introduction

Bien que l'approche semi-analytique a été largement utilisée dans le traitement des problèmes axisymétriques élastiques, peu nombreux sont les chercheurs qui ont développé et appliqué cette méthode aux problèmes axisymétriques dans le domaine élasto-plastique. Stricklin, 1968 a fait la suggestion d'étendre cette approche à l'analyse non-linéaire des coques axisymétriques dont les propriétés mécaniques changent dans la direction circonférentielle. Par ailleurs, une étude élasto-plastique similaire a été faite par Witmer et Kotanchik, 1968 pour l'analyse des coques minces soumises aux chargements axisymétriques avec la restriction d'un problème 2-D de contraintes planes. En revanche, Meissner, 1976 est le premier auteur qui a présenté une tentative d'étude semi-analytique non-linéaire des pieux soumis aux efforts latéraux. Il s'est limité en effet, aux pieux fichés dans un milieu pulvérulent où le sol obéit à la loi de comportement de Stutz. On peut dire toutefois, que l'article de Meissner n'a aucune valeur technique, car il se dévouait entièrement à la description de la loi de comportement, et ne contenait que peu d'informations sur l'algorithme non-linéaire du modèle numérique semi-analytique. Recemment, Desai et Chandrasekaran, 1986 ont présenté une procédure de l'approche semi-analytique appliquée à un matériau élastique non-linéaire. En effet, ils ont approximé le comportement du matériau par une loi de comportement bilinéaire reliant la contrainte de cisaillement octaédrique à la déformation de cisaillement octaédrique. Il est évident que la loi de comportement élastique bilinéaire est une approximation grossière pour un matériau aussi complexe comme le sol.

Le travail réellement concis dans ce domaine a été effectué par Winnicki et Zienkiewicz, 1979. Ces auteurs ont présenté un processus semi-analytique par éléments finis permettant l'étude tridimensionnelle du comportement élasto-visco-plastique des solides à symétrie de révolution soumis aux sollicitations non-axisymétriques. En s'appuyant sur le travail de Winnicki et Zienkiewicz, Barton, 1982 a repris et restructuré le code numérique élaboré en lui donnant la possibilité de tenir compte d'autres lois de comportement telles que le critère de non-tension.

Dans le cadre de ce chapitre, nous décrivons l'extension du modèle élastique étudié en détail aux chapitres III et IV, à l'étude élastique parfaitement plastique des pieux verticaux cylindriques soumis aux charges horizontales.

## VII.2- Choix et justification du modèle de sol

Si la rigueur et la cohérence de la conception théorique d'un modèle sont des éléments très importants pour sa valorisation, le nombre des constantes du matériau qu'il nécessite ainsi que leur méthode de détermination sont aussi des facteurs très importants, étant donné les difficultés que pose ce problème pour un matériau comme le sol. Or le fait de chercher un modèle bien fondé

théoriquement nécessite l'utilisation de plusieurs paramètres du sol qui sont parfois difficiles à déterminer.

Puisque le but de la modélisation est la recherche d'un compromis entre la simplicité et l'efficacité, nous proposons d'étudier le pieu dans un sol à comportement élastique parfaitement plastique de Drucker-Prager (1952). Dans le souci d'introduire les effets de la contrainte hydrostatique sur la résistance au cisaillement d'un matériau comme le sol, ces auteurs ont modifié le critère de Von-Mises et ont proposé un critère contenant l'expression du 1<sup>er</sup> invariant de contraintes. La fonction de charge du critère de Drucker-Prager est:

$$F = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - K \quad (7.1)$$

Expression dans laquelle:  $I_1$  : représente le 1<sup>er</sup> invariant du tenseur des contraintes (équation 6.4-a)  
 $J_2$ : le second invariant du tenseur déviatorique (équation 6.5-a)

Les paramètres  $\alpha$  et  $K$  sont des constantes du matériau fonctions de l'angle de frottement interne  $\Phi$  et la cohésion  $C$  du sol. Leurs expressions sont:

$$\alpha = \frac{2 \sin \Phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \Phi)}, \quad K = \frac{6C \cos \Phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \Phi)} \quad (7.2)$$

La surface de charge du critère de Drucker-Prager représente dans l'espace des contraintes principales un cône à section circulaire dont l'axe de symétrie représente la droite de la contrainte hydrostatique. La figure (7.1) illustre les différentes représentations du critère de Drucker-Prager.

Comme nous le pouvons constater, le critère de Drucker-Prager peut modéliser les sols à la fois frottants et cohérents. En plus lorsqu'un sol présente un angle de frottement interne nul, c'est à dire un sol purement cohérent, la fonction de charge de Drucker-Prager (équation 7.1) se réduit donc au critère de Von-Mises bien connu dans la modélisation des sols purement cohérents (Brown et Shie, 1990). Dans les applications pratiques, telles que le problème des pieux sollicités en flexion, l'amélioration apportée par l'utilisation d'un modèle très sophistiqué se compense par les erreurs induites dans la détermination des nombreux paramètres par les essais qui ont servi à la mise en évidence du modèle considéré. Ces essais peuvent être des essais de laboratoire classiques (essais triaxiaux, etc.), et les paramètres obtenus présentent donc des difficultés de généralisation au problème pratique en question.

Nous pensons que la loi de comportement élastique parfaitement plastique de Drucker-Prager qui est simple (ne nécessite que deux paramètres), de surface de charge lisse (absence d'arêtes, donc absence de difficultés numériques) constitue un réel compromis entre la simplicité et

l'efficacité dans l'analyse semi-analytique des pieux sous l'effet des sollicitations non-axisymétriques.

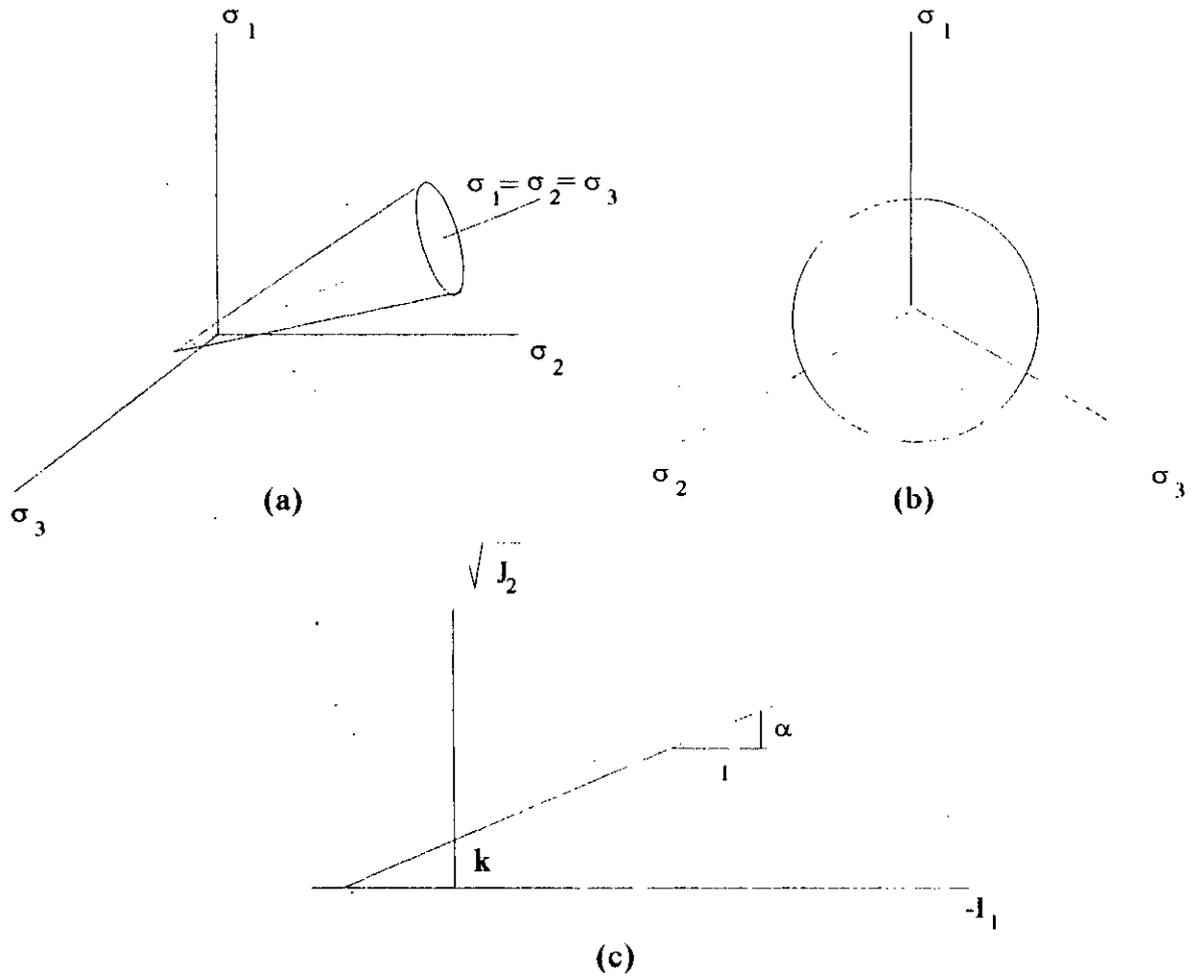


Figure 7.1: Les représentations de la surface de charge du critère de Drucker-Prager dans:

- a- L'espace des contraintes principales.
- b- Le plan déviatorique  $\pi$ .
- c- Le plan  $(\sqrt{J_2}, -I_1)$ .

### VII.3- Implémentation du modèle de Drucker-Prager

#### VII.3.1- Généralités

La loi de comportement étant incrémentale on procède donc à un chargement pas à pas. A chaque incrément de chargement, la réalisation des étapes de la méthode des éléments finis permet de savoir si l'on se trouve dans le domaine élastique, auquel cas on calcule les incréments des contraintes  $\{\Delta\sigma\}$  à partir des incréments de déformations  $\{\Delta\varepsilon\}$  par la loi élastique, ou si l'on se trouve dans le domaine plastique  $[ F(\{\sigma_0\} + \{\Delta\sigma\}) > 0 ]$  auquel cas un procédé itératif permet de se ramener sur la surface du critère de plasticité.

La figure (7.2) illustre le cas où le critère de Drucker-Prager est violé en un point d'intégration quelconque. Le sol se comporte élastiquement jusqu'au point C, puis se déforme élasto-plastiquement. Ici, le point C représente le point d'intersection du vecteur de contraintes et la surface de charge.

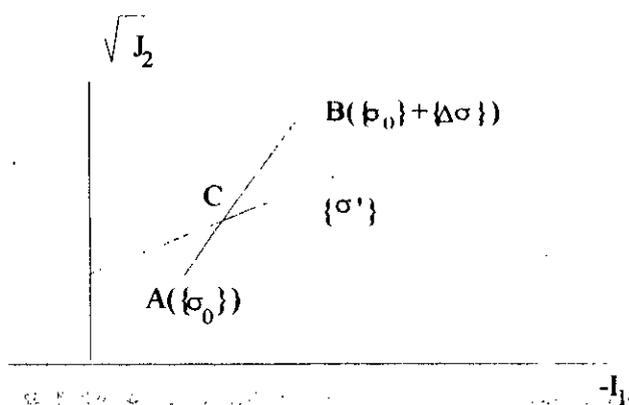


Figure 7.2: L'état de contraintes à l'extérieur de la surface de charge.

pour cette situation l'incrément de contraintes peut être évalué par:

$$\{\Delta\sigma\} = r[D]\{\Delta\varepsilon\} + (1-r)[D^{ep}]\{\Delta\varepsilon\} \quad (7.3)$$

Expression dans laquelle:

$[D]$  est la matrice d'élasticité donnée par l'équation (3.4)

$[D^{ep}]$  est la matrice élasto-plastique donnée par l'équation (6.15-a)

L'équation (7.3) contient également un facteur  $r$  permettant de déterminer la fraction de l'incrément de déformation nécessaire à atteindre le seuil de plasticité. Une fois la valeur de  $r$  est connue, le calcul de  $\{\Delta\sigma\}$  est immédiat. Le calcul du second terme de l'équation (7.3) n'est pas évident, car la matrice  $[D^{ep}]$  dépend du niveau de contrainte. Il nécessite donc une intégration.

On peut dire en résumé, que lorsque le point de Gauss fait une transition du domaine élastique au domaine élasto-plastique, deux algorithmes numériques interviennent dans la détermination de  $\{\Delta\sigma\}$ . D'une part, un algorithme pour déterminer le facteur  $r$  et d'autre part un schéma d'intégration numérique pour évaluer la partie non-linéaire de l'équation (7.3).

### VII.3.2- Détermination du facteur $r$

Des méthodes approximatives pour le calcul du coefficient  $r$  ont été proposées (Nayak et Zienkiewicz, 1972; Owen et Hinton, 1980; Chen et Han, 1988; et Chen et Baladi, 1985). En revanche, Siriwardane et Desai, 1983 proposent une formulation exacte dans le cas du modèle de Drucker-Prager où le coefficient  $r$  est la solution de l'équation du second degré suivante:

$$Ar^2 + 2Br + C = 0 \quad (7.4)$$

L'équation (7.4) est obtenue à partir de l'équation:  $F(\{\sigma_0\} + r\{\Delta\sigma\}) = 0$

Les constantes  $A$ ,  $B$  et  $C$  dépendent des paramètres du modèle, de l'état de contraintes et de l'incrément de contraintes. L'annexe (2) à la fin de cette thèse donne la procédure de détermination de  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

### VII.3.3- Schéma d'intégration numérique

La détermination du second terme de l'équation (7.3) nécessite comme nous l'avons mentionné un schéma d'intégration numérique. Les schémas les plus souvent utilisés sont le schéma d'intégration du module tangent et le schéma de retour du module tangent (Tadjbakhsh et Frank, 1985).

Lors du processus de déformation, on peut voir que pour un matériau élastique parfaitement plastique avec un potentiel associé, comme le modèle considéré ici, le vecteur  $\{\sigma_D\}$ - $\{\sigma_C\}$  est tangent au point  $C$  à la surface de charge (Figure 7.3).

Dans le schéma du module tangent, la taille de l'incrément doit être suffisamment petite pour que l'écart entre  $\{\sigma_D\}$  et la surface de charge soit minimal, surtout lorsqu'il y a une forte courbure au point  $C$ .

Pour diminuer cet écart on peut par exemple appliquer l'incrément de contraintes en plusieurs " sous-incréments" ou étapes. Ce schéma est appelé aussi schéma d'intégration explicite avec sous-incrémentation. Le nombre de pas d'intégration  $m$  est en général compris entre 10 et 20 (Owen et Hinton, 1980).

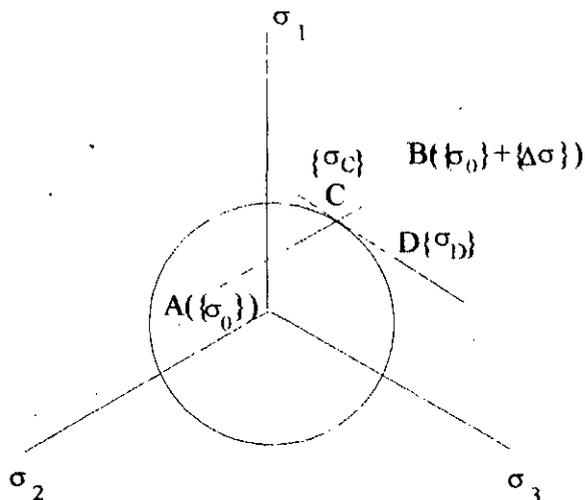


Figure 7.3: Schéma du module tangent pour un potentiel associé.

Le schéma de retour du module tangent a pour but de ramener l'état  $\{\sigma_D\}$  sur la surface de charge. Pour cela on ajoute une correction de contrainte à  $\{\sigma_D\}$  définie précédemment. L'état final s'écrit alors:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_D\} + \{\delta\sigma\} \quad (7.5-a)$$

avec 
$$\{\sigma_D\} = \{\sigma_C\} + (1-r)[D^{ep}]\{\Delta\varepsilon\}$$

La correction de contrainte dans ce schéma d'intégration est supposée normale à la surface de charge, on peut donc écrire:

$$\{\delta\sigma\} = \beta \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} \quad (7.5-b)$$

Où  $\beta$  est un scalaire à déterminer par l'équation:  $F(\{\sigma\} + \{\delta\sigma\}) = 0$

Puisque cette équation est une fonction non-linéaire de  $\beta$ , on pourra utiliser un développement de Taylor pour la détermination de  $\beta$ . En négligeant les termes d'ordre supérieur on obtient:

$$\beta = \frac{-F(\{\sigma\})}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}} \quad (7.5-c)$$

Puisque la valeur de  $\{\sigma\}$  dépend du paramètre  $\beta$ , l'équation (7.5-c) nécessite une résolution

itérative. Le vecteur d'écoulement  $\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}$  et  $F(\{\sigma\})$  doivent être Déterminés par  $\{\sigma_D\}$  comme première approximation. Le calcul se poursuit jusqu'à l'obtention de la précision voulue. Nous adoptons cette technique dans l'élaboration du code d'éléments finis.

## VII.4- Analyse harmonique en élasto-plasticité

### VII.4.1- Introduction

Lorsque nous avons étudié au chapitre III le problème des pieux cylindriques soumis aux sollicitations horizontales en élasticité linéaire isotrope, nous avons montré que les efforts de flexion appliqués en tête pouvaient être exprimés par une densité de charge répartie sur la circonférence sous la forme d'une seule harmonique ( $i = 1$ ). Ceci a nécessité donc une seule résolution de l'équation (3.8).

Comme dans tout problème classique d'éléments finis, l'application des forces extérieures dans l'approche semi-analytique en élasto-plasticité est également incrémentale, et à chaque incrément une équation du type (3.8) est résolue.

Lors du déroulement du processus de calcul, certains points du milieu discrétisé peuvent violer le critère de plasticité. L'état de contraintes en ces points est inadmissible et doit être ramené à la surface de charge par un processus de correction. Ceci rend la distribution des contraintes différente de celle du chargement, et la recherche des contraintes dans la direction circonférentielle par simple application des équations (3.5) n'est plus valable. Cependant, afin d'avoir une distribution correcte aux points en plasticité on doit introduire d'autres termes de série de Fourier d'ordre supérieur ( $i > 1$ ) servant à la redistribution des contraintes aux points du milieu qui ont encore une réserve de résistance. Ceci constitue la différence fondamentale entre les deux versions de l'approche semi-analytique.

### VII.4.2- Calcul des contraintes et vérification du critère de plasticité aux positions angulaires prédéterminées

Dans l'étude des problèmes tridimensionnels non-linéaires d'éléments finis, le fait de vérifier le critère de plasticité aux points d'intégration de Gauss le milieu discrétisé est entièrement parcouru, et donc le caractère tridimensionnel du milieu est automatiquement pris en compte. En revanche, l'approche semi-analytique analyse un problème 3-D mais ne le discrétise que dans un plan radial ( $r, z$ ). Ceci implique que l'évaluation et la vérification des contraintes dans le plan radial n'est pas suffisante et, il est nécessaire donc de prévoir certaines positions angulaires dans la direction circonférentielle afin de balayer tout le cylindre analysé.

Etant donné la symétrie du chargement extérieur par rapport au plan  $(\theta - \pi)$ , on pourra prévoir des positions angulaires  $\theta$  dans l'intervalle  $[0, \pi]$ . En fait, le modèle numérique est d'autant plus précis que le nombre de points anguleux est plus élevé, mais cela va peut être au dépens du temps et de l'espace mémoire de l'outil de calcul. Donc un compromis doit être établi entre le nombre de positions et la précision du calcul.

Contrairement au calcul élastique des pieux chargés latéralement, les champs de déplacements et de contraintes dans le calcul élasto-plastique nécessitent des termes de Fourier d'ordre supérieur mais en un nombre fini. Le champ de déplacement est:

$$\begin{cases} u = \bar{u}^{-1} \cos \theta + \bar{u}^{-2} \cos 2\theta + \bar{u}^{-3} \cos 3\theta + \dots \\ v = \bar{v}^{-1} \cos \theta + \bar{v}^{-2} \cos 2\theta + \bar{v}^{-3} \cos 3\theta + \dots \\ w = \bar{w}^{-1} \sin \theta + \bar{w}^{-2} \sin 2\theta + \bar{w}^{-3} \sin 3\theta + \dots \end{cases} \quad (7.6)$$

L'objectif donc consiste à évaluer les amplitudes des déplacements  $\bar{u}^{-1}$ ,  $\bar{v}^{-1}$  et  $\bar{w}^{-1}$  servant à faire régner un champ de contraintes compatible au chargement appliqué. Le champ de contraintes correspondant à celui des déplacements est donné par les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \bar{\sigma}_r^{-1} \cos \theta + \bar{\sigma}_r^{-2} \cos 2\theta + \bar{\sigma}_r^{-3} \cos 3\theta + \dots \\ \sigma_z &= \bar{\sigma}_z^{-1} \cos \theta + \bar{\sigma}_z^{-2} \cos 2\theta + \bar{\sigma}_z^{-3} \cos 3\theta + \dots \\ \sigma_\theta &= \bar{\sigma}_\theta^{-1} \cos \theta + \bar{\sigma}_\theta^{-2} \cos 2\theta + \bar{\sigma}_\theta^{-3} \cos 3\theta + \dots \\ \tau_{rz} &= \bar{\tau}_{rz}^{-1} \cos \theta + \bar{\tau}_{rz}^{-2} \cos 2\theta + \bar{\tau}_{rz}^{-3} \cos 3\theta + \dots \\ \tau_{z\theta} &= \bar{\tau}_{z\theta}^{-1} \sin \theta + \bar{\tau}_{z\theta}^{-2} \sin 2\theta + \bar{\tau}_{z\theta}^{-3} \sin 3\theta + \dots \\ \tau_{\theta r} &= \bar{\tau}_{\theta r}^{-1} \sin \theta + \bar{\tau}_{\theta r}^{-2} \sin 2\theta + \bar{\tau}_{\theta r}^{-3} \sin 3\theta + \dots \end{aligned} \quad (7.7)$$

Ce champ qui est également symétrique ne doit en aucun cas violer le critère de plasticité.

#### VII.4.3- Développement des incréments des déformations plastiques en séries de Fourier

La détermination de l'état de contraintes dépend essentiellement de l'équation (7.3) selon la valeur de la fonction de charge au point d'intégration considéré. Lorsque le critère de plasticité est atteint, un écoulement plastique tient lieu. L'équation régissant ce comportement est

l'équation (7.3) que l'on peut réécrire par:  $\{\Delta\sigma\} = [D]\{\Delta\varepsilon\} - [D]\{\Delta\varepsilon^p\}$

où  $\{\Delta\varepsilon^p\}^T = \{\Delta\varepsilon_r^p, \Delta\varepsilon_z^p, \Delta\varepsilon_\theta^p, \Delta\gamma_{rz}^p, \Delta\gamma_{z\theta}^p, \Delta\gamma_{\theta r}^p\}$  est le vecteur de l'incrément de déformations plastiques qui doit disparaître par le processus de correction que nous avons vu. Le vecteur  $\{\Delta\varepsilon^p\}$  qui est simplement nul en un point à comportement élastique, engendre un vecteur de forces appelé vecteur résidu exprimant ainsi l'état de déséquilibre du point matériel à un instant donné de la sollicitation imposée. Dans le processus itératif de résolution ces déformations plastiques permettent de calculer les forces de rééquilibrage (Body Loads) qui vont participer dans le calcul itératif.

Rappelons que l'équation fondamentale de rigidité (équation 3.8) associe les amplitudes des forces extérieures aux amplitudes des déplacements nodaux. De ce fait, les forces de rééquilibrage qui vont être ajoutées aux forces extérieures durant le processus de calcul non-linéaire doivent être aussi des amplitudes. Pour la détermination des amplitudes des incréments de déformations plastiques, nous profitons de deux caractéristiques fondamentales du problème des pieux sous efforts de flexion:

- Ce problème présente des champs de contraintes et de déformations symétriques par rapport au plan  $[\theta - \pi]$ , ceci est dû évidemment à la distribution symétrique de l'effort latéral et le moment de flexion appliqué.

- Car il est fourni par l'utilisateur du code élaboré, le nombre d'harmoniques est fixé a priori à un nombre fini.

En tenant compte de ces deux caractéristiques, les incréments de déformations plastiques  $\Delta\varepsilon_r^p, \Delta\varepsilon_z^p, \Delta\varepsilon_\theta^p$  et  $\Delta\gamma_{rz}^p$ , se comportent comme des fonctions "paires". Leur développement en séries de Fourier peut être représenté par la fonction:

$$f(\theta) = a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \dots + a_m \cos m\theta \quad (7.8)$$

En revanche, les incréments  $\Delta\gamma_{z\theta}^p$  et  $\Delta\gamma_{\theta r}^p$  se comportent comme des fonctions "impaires". ils peuvent donc être représentés par:

$$g(\theta) = b_1 \sin \theta + b_2 \sin 2\theta + \dots + b_m \sin m\theta \quad (7.9)$$

Les constantes  $a_j$  et  $b_j$  sont les coefficients des séries de Fourier donnés par:

$$a_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \cos i\theta d\theta \quad \text{et} \quad b_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(\theta) \sin i\theta d\theta \quad (7.10)$$

Nous supposons que les fonctions  $f$  et  $g$  sont linéaires par morceaux (Figure 7.4). Les intégrales (7.10) sont évaluées numériquement en utilisant l'une des méthodes d'intégration connues. Pour les propos de notre code numérique, on utilise la méthode d'intégration de Bode (Abramowitz et Stegun, 1970). En effet,

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^p c_i \left( \frac{f_i + f_{i+1}}{2} \right) \Delta\theta \cos i\theta, \\ b_i &= \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^p c_i \left( \frac{g_i + g_{i+1}}{2} \right) \Delta\theta \sin i\theta, \end{aligned} \quad (7.11)$$

Ici  $q$  représente le nombre de positions angulaires où les incréments de déformations plastiques sont connus.  $P$  est l'ordre de la règle d'intégration de Bode et  $c_j$  représentent les coefficients de cette méthode d'intégration.

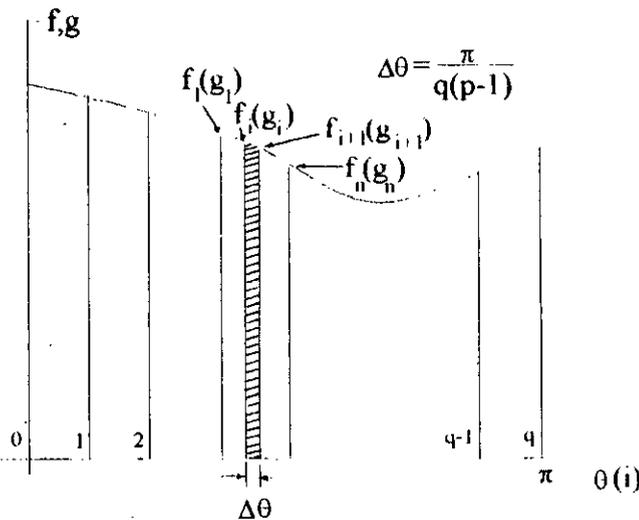


Figure 7.4: Intégration numérique des amplitudes des séries de Fourier

#### VII.4.4- Algorithme de résolution des équations d'équilibre et description du code PLASPULL:

Comme nous l'avons noté au paragraphe VII.4.1, les termes des séries de Fourier d'ordre supérieur ( $i > 1$ ) servent à la redistribution des contraintes dans le milieu élasto-plastique. De ce fait, nous avons à résoudre pour chaque itération incluse dans chaque harmonique, un système d'équations de type:

$$[K]^i \{\Delta u\}^i = \{\Delta R\}^i \quad (7.12)$$

Où  $i$  est l'ordre de l'harmonique.

La résolution directe de ce système est souvent impossible. A cause de la dépendance de la matrice de rigidité des amplitudes des déplacements nodaux, et par conséquent des déformations, il est nécessaire d'utiliser des méthodes de résolution itératives. En plus, puisque les relations élasto-plastiques établies sont incrementales, et afin de réduire les erreurs dans le calcul du vecteur résidu, il est intéressant de procéder à un chargement pas à pas. Le chargement total (effort latéral, moment en tête) à appliquer sur le pieu est divisé en un nombre fini d'accroissements.

Les méthodes itératives les plus souvent utilisées sont celles du type de Newton-Raphson. La méthode de Newton-Raphson originale se base sur le calcul d'une matrice de rigidité tangente à chaque itération. Les difficultés théoriques et le coût du calcul d'une matrice de rigidité à chaque itération (assemblage et triangularisation) ont été à l'origine de nombreuses recherches visant à trouver des méthodes plus fiables et plus économiques. En effet, il est possible de conserver durant tous les incréments, la matrice de rigidité calculée lors de l'étape initiale. Cette méthode est appelée méthode de Newton-Raphson "modifiée" ou encore méthode des contraintes initiales (Nayak et Zienkiewicz, 1972). Les contraintes initiales dans ce contexte n'ont aucun rapport avec les contraintes initiales dans le sol (Naylor et al., 1984).

Cette méthode présente le grand avantage de reporter tout l'effet non-linéaire de la loi de comportement dans le calcul des contraintes donc, dans le second membre de l'équation (7.12) (Figure 7.5). La robustesse et la simplicité de cette méthode font que nous l'adoptons dans notre programme numérique.

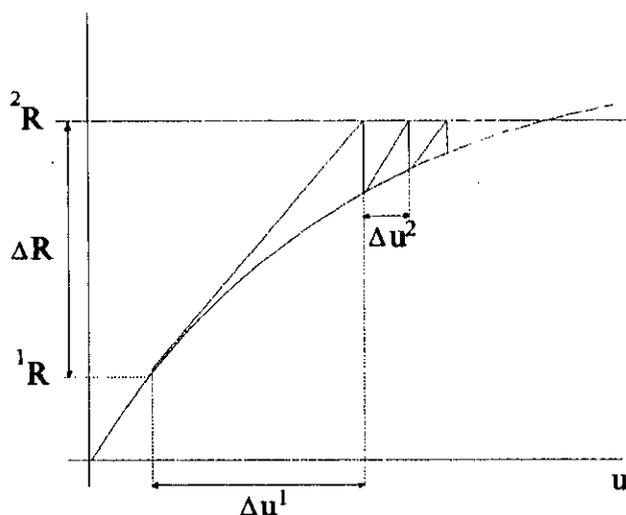


Figure 7.5: Méthode de Newton-Raphson modifiée

Contrairement à un calcul élastique, les déformations plastiques s'accumulent dans le matériau, créant ainsi un état de déséquilibre entre les forces extérieures appliquées et les forces équivalentes au champ de contraintes vérifiant le critère élasto-plastique. Les amplitudes des

incréments des déformations plastiques, déterminées au paragraphe précédent, génèrent sur chaque harmonique des forces de rééquilibrage et qui doivent disparaître par le processus de correction. Donc, durant le processus itératif le second membre de l'équation d'équilibre contient éventuellement deux parties. La première est éventuellement l'incrément de charge extérieure  $\{\Delta R'\}$ , le second est le vecteur des forces de rééquilibrage (body loads)  $\{\Delta R''\}$ . On peut écrire donc:

$$\{\Delta R\} = \{\Delta R'\} + \{\Delta R''\} \quad (7.13-a)$$

Expression dans laquelle:  $\{\Delta R'\}$ : Vecteur incrément des amplitudes des forces extérieures.

et  $\{\Delta R''\}$  peut être évalué par l'équation:

$$\{\Delta R''\} = \pi \int_A [B]^{iT} [D] \{\overline{\Delta \varepsilon}^p\}^i r dA \quad (7.13-b)$$

$[B]^{iT}$  est la transposée de la matrice des dérivées des fonctions d'interpolation, relative à l'harmonique  $i$  mais privée des termes en  $\cos i\theta$  et  $\sin i\theta$ .

$\{\overline{\Delta \varepsilon}^p\}^i$  est le vecteur représentant les amplitudes des incréments des déformations plastiques générées sur l'harmonique  $i$ .

La théorie qui vient d'être développée dans ce chapitre est prête maintenant à être programmée sur ordinateur. Un second logiciel baptisé **PLASPULL** (plastic study of piles under lateral loads) a été écrit. Il regroupe ainsi les différentes étapes de l'approche semi-analytique appliquée à un pieu isolé soumis à des sollicitations horizontales, et fiché dans un milieu à comportement élastique parfaitement plastique de Drucker-Prager. La figure (7.6) illustre un organigramme simplifié des différentes opérations du programme.

Ce programme est également écrit en Fortran 77 et il comporte 31 sous-programmes. Les routines qui servent à la réalisation des étapes classiques de l'analyse élastique par éléments finis ont été conservées. Elles ont été décrites lors de la description du code **ELASPULL**. d'autres sous-programmes ont été créés, ils concernent particulièrement l'analyse harmonique elasto-plastique. Seules ces routines feront l'objet de notre description.

Le programme débute par une lecture des données géométriques du domaine discrétisé et ses conditions aux limites, et des caractéristiques mécaniques du pieu et du sol. A ces éléments élastiques ont été rajoutées les caractéristiques de résistance du sol au cisaillement servant à la détermination des paramètres du critère de Drucker-Prager, et les éléments relatifs à l'analyse harmonique non-linéaire tels que:

-NPOSAS: nombre de positions circonférentielles où le critère de plasticité peut être vérifié.

- NHARMS: nombre d'harmoniques à utiliser dans l'approche semi-analytique.
- IORHAM(I): ordre de l'harmonique envisagé.
- MAXITS: nombre maximal d'itérations.
- TOLER: la tolérance sur la précision voulue.
- NCRIMS: nombre d'incrément de charges envisagés.

En se basant sur les caractéristiques élastiques le programme **PLASPULL** évalue la matrice de rigidité globale pour chaque harmonique. L'analyse étant incrémentale, l'effort latéral  $H_0$  et le moment fléchissant  $M_0$  appliqués en tête du pieu, sont spécifiés d'une manière incrémentale sur la première harmonique. Le sous-programme **INCRIM** effectue cette tâche en recevant le facteur de charges **FACTO(I)** correspondant à chaque incrément. Ce facteur est spécifié auparavant dans la subroutine **INITLE** qui sert à son tour à l'initialisation de quelques tableaux de calcul.

Après la résolution du système d'équations d'équilibre relatif à chaque harmonique, la subroutine **CONVER** permet de tester la convergence de la norme des amplitudes de déplacements nodaux issus de chaque résolution. Une fois, les amplitudes des déplacements sont connues, la routine **CONTRA** effectuera la tâche de calculer et de stocker les incréments de contraintes de chaque élément, à chaque point d'intégration de Gauss et en toute position angulaire, en faisant appel au sous-programme **BTHETA**. cette dernière permettra d'évaluer la matrice  $[B]^t$  exprimée par équation (3.10-a). La subroutine **CONTRA** permet également d'avoir l'incrément total des contraintes contenant éventuellement les contributions des différentes harmoniques considérées.

Lorsque l'état de contraintes est connu en tout point du milieu, on procède à la vérification du critère de plasticité. Cette opération est effectuée par la subroutine **VECPLA** en appelant quatre sous-programmes:

- INVAR3**: permet d'évaluer le premier invariant de contraintes  $I_1$ , et le second invariant des contraintes déviatoriques  $J_2$  pour un état de contraintes tridimensionnel.
- RFACTO**: permet de déterminer la valeur exacte du facteur  $r$  décrit dans le paragraphe VII.3.2.
- CRITDP**: permet de déterminer la fonction de charge du critère Drucker-Prager.
- ECOPLA**: permet de calculer le vecteur d'écoulement:  $\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}$

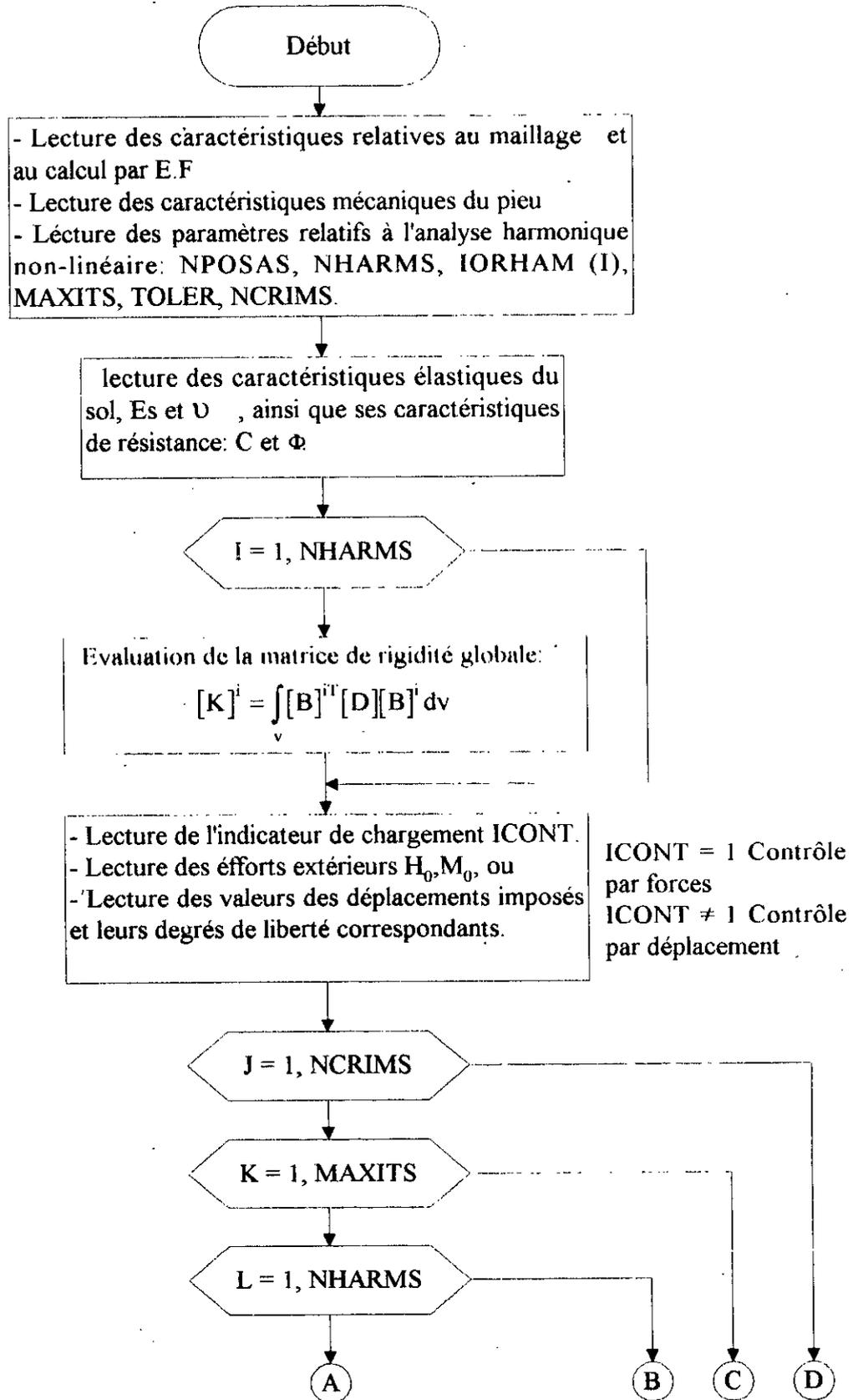


Figure 7.6: Organigramme simplifié du programme PLASPULL

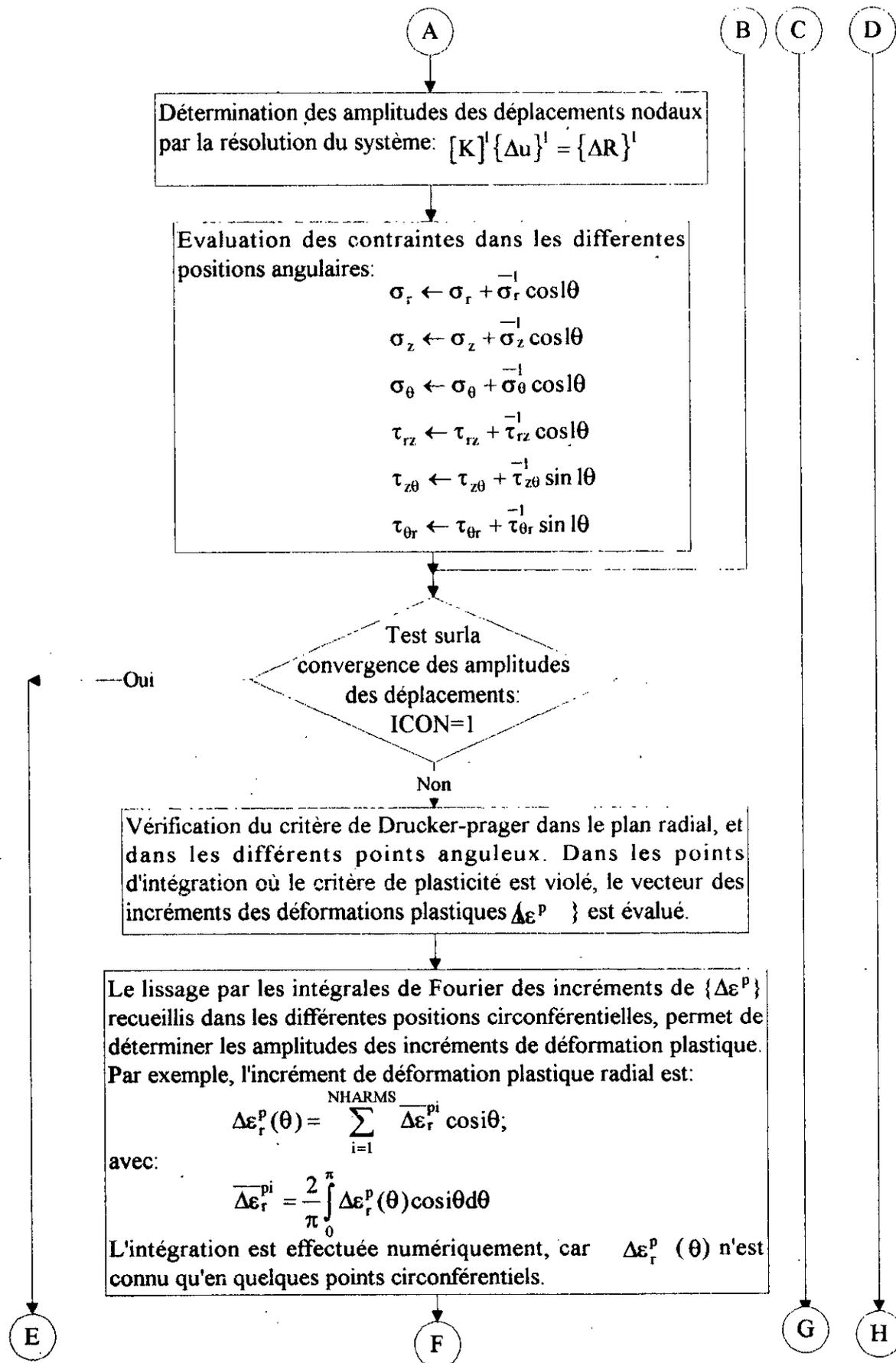


Figure 7.6: Organigramme simplifié du programme PLASPULL (suite)



La subroutine VECPLA permet également de faire la correction des contraintes selon le processus expliqué dans le paragraphe VII.3. Pour les éléments subissant un comportement élasto-plastique, les incréments des déformations plastiques sont recueillis à chaque position circonférentielle dans l'intervalle  $[0, \pi]$ .

A partir des valeurs discrètes des incréments de déformations plastiques ainsi déterminés, un lissage par séries de Fourier permettra donc d'avoir les amplitudes des incréments de déformations plastiques. Cette tâche est confiée à la subroutine AMFOUR, qui se sert de la méthode d'intégration de Bode (paragraphe VII.4.3).

En utilisant les amplitudes des incréments des déformations plastiques obtenues là où le comportement du matériau est élasto-plastique, le sous-programme RESIDU permet de déterminer les forces de rééquilibrage selon équation (7.13-b). Cette subroutine effectuera aussi une intégration numérique selon la méthode d'intégration de Bode.

Le sous-programme ERCON dans le logiciel PLASPULL permet après chaque incrément de charge d'évaluer les moments fléchissants, les efforts tranchants et les réactions du sol à partir de état de contraintes à la convergence. Ces éléments seront imprimés dans un fichier de résultats par le biais de la subroutine IMPRIM qui s'occupera de les organiser selon les différentes côtes du pieu.

### VII.5- Application du programme PLASPULL

La confirmation de la validité des résultats d'un code d'éléments finis en élasticité linéaire est souvent possible, car des solutions analytiques exactes existent pour un grand nombre de problèmes en géotechnique. En plus, d'autres méthodes numériques telles que la méthode des équations intégrales peuvent fournir des résultats pouvant servir de guide aux résultats d'éléments finis.

En revanche, dans la validation d'un code d'éléments finis en élasto-plasticité, on est confronté à deux genres de difficultés:

- Les solutions exactes de la mécanique des milieux continus ne sont disponibles que pour un nombre de problèmes d'interaction sol-structure très restreint.
- même pour les problèmes où la solution analytique exacte existe, la loi de comportement élasto-plastique pour laquelle la solution analytique a été établie est rarement identique à celle qui a servi à l'élaboration du code d'éléments finis en élasto-plasticité.

Dans la validation du programme PLASPULL, on s'applique à confronter ses résultats aux ceux d'un segment de pieu rigide déplacé latéralement dans un sol purement cohérent. Ce problème est sélectionné pour deux raisons: la première, est que le chargement du disque rigide jusqu'à la rupture du sol représente en fait ou au moins approxime le mode d'écoulement du sol en profondeur du problème des pieux chargés latéralement. la seconde raison, est que l'expression de la charge ultime existe et a été établie analytiquement.

### VII.5.1- Estimation de la réaction ultime d'un segment de pieu circulaire chargé latéralement dans un sol cohérent

La recherche de la réaction ultime d'un sol par la méthode des éléments fini n'est pas une chose aisée, et a fait l'objet de nombreuses recherches dans le passé. En effet, parmi les auteurs qui se sont appliqués sur ce sujet, on cite: (Rowe et Davis, 1977) et (Sloan et Randolph, 1982). Ces auteurs se sont rendus compte que pour les problèmes complexes de la mécanique des sols, la méthode des éléments finis échoue souvent à donner une définition claire de la charge de rupture. Elle peut conduire, même avec un maillage très raffiné, à des valeurs numériques de charge nettement supérieures aux valeurs fournies par la théorie de plasticité.

Dans les problèmes d'interaction sol-structure, la compréhension du mécanisme de rupture et la détermination de la charge limite dépendent de nombreux facteurs: la qualité de l'interface sol-structure, la densité du maillage au voisinage immédiat de la structure, les dimensions du modèle etc. Il est admis généralement que la charge de rupture peut être améliorée par le raffinement du maillage adopté, mais ceci pourra soulever des difficultés de convergence.

Le phénomène de rupture d'un pieu sollicité horizontalement est régi par la résistance du sol et par la résistance du pieu lui même, selon où l'on a affaire à un pieu long flexible ou à un pieu court rigide (Broms, 1964a; 1964b). Pour les sols cohérents, la réaction latérale limite varie entre  $8.3 C_u D$  et  $11 C_u D$  ( $C_u$ : cohésion non drainée).

Le mécanisme de rupture du sol en profondeur autour d'un pieu sollicité horizontalement est un phénomène d'écoulement plastique se passant dans des conditions de déformation planes. La rupture d'un segment de pieu circulaire chargé latéralement dans un sol purement cohérent dans les mêmes conditions a été étudiée par Randolph et Houlsby (1984). En effet, en introduisant une loi de comportement parfaitement plastique, et en se servant de la méthode des caractéristiques, ces auteurs ont établi des expressions analytiques de la réaction ultime dépendant sur la qualité de l'interface exprimée en fonction du rapport de l'adhérence et la cohésion non drainée.

$$\alpha = \frac{C_a}{C_u}$$

$C_a$ : l'adhérence.

Cette réaction limite  $P_u$  varie de  $9.14 C_u D$  pour une interface parfaitement lisse ( $\alpha=0$ ) à  $11.94 C_u D$  pour une interface parfaitement rugueuse ( $\alpha=1$ ). leur équation générale pour une interface quelconque est:

$$P_u = \left[ \pi + 2\theta + 2 \cos \theta + 4 \left( \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] C_u D \quad (7.14)$$

Expression dans laquelle:  $\theta = \arcsin \alpha$

Puisque l'interface sol-pieu a été supposée, dans la théorie développée dans cette thèse, en parfaite adhérence, les résultats du programme **PLASPULL** seront alors confrontés la valeur analytique  $P_u = 11.94 C_u D$ . Les résultats de ce programme numérique dépendent de plusieurs paramètres, notamment les paramètres de l'analyse harmonique elle même: le nombre de stations angulaires, et le nombre de termes des séries de Fourier considérés. Plusieurs exécutions du programme **PLASPULL**, pour ce cas nous ont permis de constater que la contribution des harmoniques d'ordre élevé est quasiment négligeable. De ce fait, nous avons prévu sept positions angulaires et trois harmoniques d'ordres impairs. Cependant, nous pensons que cela ne constitue pas une règle générale, mais par contre dépend de la nature du problème traité. Nous pensons, qu'une étude paramétrique pourra élucider les effets du nombre de positions angulaires, ainsi que le nombre et les ordres des harmoniques sur la qualité des résultats numériques. Ceci pourra faire l'objet d'une recherche future.

Dans le but de comparer la réaction ultime numérique et analytique nous avons adopté le maillage de la figure (4.19) avec les caractéristiques suivantes:

$$\begin{array}{ll} E_p = 6.10^7 \frac{KN}{m^2} & E_s = 10^5 \frac{KN}{m^2} \\ \text{pieu: } C_u = 10^{10} \frac{KN}{m^2} & \text{sol: } C_u = 100 \frac{KN}{m^2} \\ \nu_p = 0.3 & \nu_s = 0.4 \end{array}$$

Afin de simplifier la comparaison, on a rapporté la réaction du sol à la réaction ultime analytique. Ce rapport est dénommé facteur de charge ( $\frac{P}{11.94 C_u D}$ ). La figure (7.7) montre

l'évolution du facteur de charge en fonction du déplacement latéral relatif ( $\frac{u}{D}$ ). On constate que la valeur numérique est légèrement supérieure à la valeur analytique et la surestimation ne dépasse pas 14%.

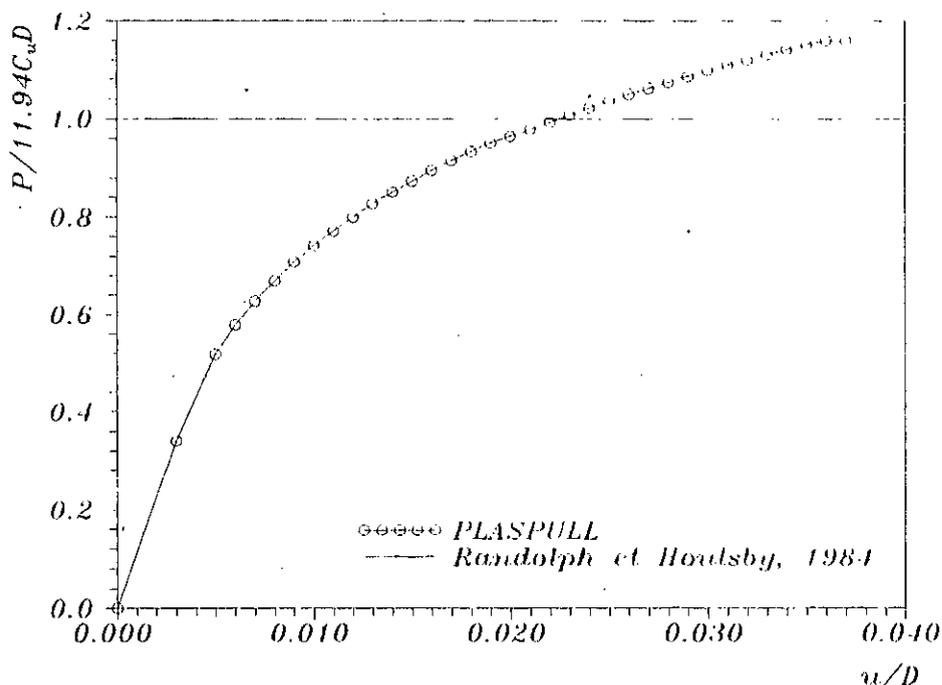


Figure 7.7: Réponse charge-déplacement d'un segment de pieu déplacé rigidement dans un sol purement cohérent.

Finalement, on conclut que malgré que le problème d'une tranche mince sol-pieu sollicitée latéralement constitue un test sévère de la validité du programme **PLASPULL**, les résultats de l'estimation de la réaction ultime sont très encourageants. En plus, la méthode des caractéristiques de (Randolph et Housby, 1984) ne donne que les expressions de réactions limites sans donner d'information sur les déformations avant la rupture. En revanche, l'analyse harmonique nous permet de suivre toutes les déformations du système sol-pieu jusqu'à la rupture, et pourra nous donner un ordre de grandeur des déplacements latéraux correspondant à cette réaction limite. On peut dire finalement que l'analyse harmonique en élasto-plasticité constitue une excellente alternative dans l'étude des pieux sollicités latéralement.

## chapitre VIII:

### Conclusion Générale

#### VIII.1-Résumé et conclusions

Le développement d'outils d'analyse numérique en mécanique des sols est un des aspects importants des recherches actuelles pour améliorer les capacités des méthodes de dimensionnement des ouvrages et d'élaboration des projets. C'est un travail complexe et long, dont l'utilité pratique peut rester très faible tant que l'on n'a pas fini d'établir les modèles et méthodes de calcul et que l'on n'a pas prouvé leur représentativité.

L'étude théorique des pieux soumis à des charges de renversement est complexe. Il s'agit d'un problème tridimensionnel et l'on sait parfaitement que les mécanismes de sollicitation du sol font intervenir un nombre important de facteurs. Sur ce sujet qui présente plusieurs axes de recherches qui ne sont jusqu'à maintenant pas encore complètement explorés, des centaines d'études et d'articles ont été publiés dans les différents domaines théoriques, numériques et expérimentaux. De ce fait, il était impossible dans cette présente étude de passer en revue tous les travaux qui ont été effectués sur les pieux chargés latéralement.

Le traitement par la méthode des éléments finis des problèmes présentant une géométrie à symétrie de révolution et à chargement quelconque est un traitement spécial. En effet, cette technique, appelée approche semi-analytique consiste à décomposer les efforts appliqués et les déplacements en séries de Fourier de  $n$  termes en  $\theta$ , et à résoudre l'équivalent de  $n$  problèmes à deux dimensions.

Cette thèse a présenté une étude numérique semi-analytique des pieux sollicités horizontalement dans laquelle on a pu séparer l'influence de la coordonnée  $r$  et de  $z$  d'une part, et de  $\theta$  d'autre part sur toutes les fonctions inconnues ( contraintes, déformations, etc.). Cette étude numérique a atteint ses deux objectifs principaux:

-En adoptant l'approche semi-analytique, on a pu effectuer une étude physiquement tridimensionnelle et mathématiquement bidimensionnelle. Cela nous a permis d'avoir un gain considérable en matière de temps et de coût de calcul en comparaison avec une analyse tridimensionnelle classique par éléments finis.

-A partir de cette étude semi-analytique tridimensionnelle, on a pu établir des expressions analytiques concernant certaines grandeurs qui contrôlent le comportement du pieu. Ces expressions permettent aux praticiens de faire une analyse complète des pieux sollicités en flexion.

L'analyse harmonique en élasticité linéaire et isotrope appliquée aux pieux cylindriques soumis aux efforts de flexion, a permis d'élaborer un code de calcul. Les résultats de ce code numérique se sont avérés très encourageants, notamment lorsqu'on les a confronté aux résultats d'autres méthodes numériques du continuum élastique.

L'étude paramétrique limitée à analyser les effets de deux paramètres en l'occurrence; la rigidité relative sol-pieu et l'élanement du pieu, a permis de concevoir une image claire de l'influence de ces deux paramètres sur les principales grandeurs régissant le phénomène de flexion des pieux. Cette étude paramétrique restreinte également aux deux cas de sol de rigidités extrêmes (homogène et de Gibson) a pu répondre à presque toutes les questions que peut se poser un lecteur qui doit dimensionner un pieu soumis à des efforts de flexion. En effet, on a pu mettre en évidence la notion de l'élanement critique et de la caractériser par une valeur numérique pour les deux cas de sols considérés. Etant donné que la majorité des pieux rencontrés en pratique sont des pieux flexibles, on a formulé des expressions analytiques permettant de déterminer les déplacements en tête, les rotations, et les valeurs extrémales des moments fléchissants, des efforts tranchants et des réactions du sol, ainsi que leurs côtes respectives.

L'extension de l'approche semi-analytique élastique à l'étude elasto-plastique des pieux, constitue l'apport essentiel de cette recherche numérique. L'algorithme développé dans ce contexte a permis l'élaboration d'un second logiciel de calcul basé sur une loi de comportement élastique parfaitement plastique simple. L'application de ce code ( baptisé **PLASPULL**) dans l'estimation de la réaction ultime d'un sol purement cohérent a donné des résultats très satisfaisants. En ce qui concerne les méthodes utilisant l'approche de Winkler, outre l'ignorance de la nature continue du sol, les sources d'erreurs sont souvent imputables à la manière dont on détermine les courbes P-Y. Le code d'analyse harmonique non-linéaire **PLASPULL** pourra servir efficacement à la détermination de ces courbes. Ceci est possible par l'établissement des courbes déplacement-réaction à différentes côtes du sol en question.

Dans cette étude, nous avons abordé un problème assez délicat en éléments finis puis qu'il s'agit de la simulation numérique des pieux sollicités horizontalement. Nous avons montré que les résultats de nos calculs en éléments finis se situent correctement vis à vis des résultats analytiques d'une part et les résultats d'autres méthodes numériques d'autre part. Certes, l'analyse harmonique par éléments finis se situe à mi-chemin, du point de vue temps de calcul et de volume de données,

entre l'étude classique tridimensionnelle et les méthodes du module de réaction et des équations intégrales de frontière. Les performances des résultats de l'approche semi-analytique en élasticité qu'en élasto-plasticité font que nous la recommandons fortement pour l'étude et l'analyse des pieux soumis aux sollicitations horizontales.

### **VIII.2- Recommandations pour de futures recherches**

Bien que cette étude numérique a l'apparence de toucher au fond au problème des pieux chargés latéralement, nous sommes pleinement conscients que nous n'avons cerné qu'une infime partie des facteurs influençant ce problème. En effet les efforts appliqués en tête du pieu sollicitent le sol environnant mettant ainsi le numéricien face à un problème complexe à caractère tridimensionnel. En plus, lors du chargement, un décollement du sol de la face arrière du pieu apparaîtra en surface, et un glissement relatif entre les éléments du pieu et ceux du sol pourra avoir lieu, et même un arrachement pourra se produire, notamment si la partie hors-fiche est importante. Dans cette optique, nous pensons qu'il est souhaitable de contourner les hypothèses simplistes d'une interface sol-pieu solidaire et d'améliorer la simulation numérique en faisant introduire des éléments d'interface dans l'approche semi-analytique afin de modéliser correctement le décollement et le glissement relatif.

En ce qui concerne l'approche semi-analytique en élasto-plasticité, nous avons mis l'accent sur l'effet de certains paramètres sur les résultats de l'analyse harmonique non-linéaire. Outre, les éléments de l'intégration numérique de la loi constitutive du matériau et le schéma de correction des contraintes, nous avons parlé de l'importance d'autres facteurs relatifs à l'analyse harmonique elle-même, tels que le nombre de termes des séries de Fourier, les ordres d'harmoniques et le nombre de stations circonférentielles. Dans ce contexte, nous recommandons de pousser la recherche plus loin en faisant une étude paramétrique permettant d'éclaircir le rôle de chaque paramètre sur la qualité des résultats non-linéaires, et d'aboutir au moins à des directives permettant la sélection des paramètres cités relativement à la loi de comportement envisagée. Ensuite, nous espérons qu'il sera possible de proposer des expressions analytiques non-linéaires similaires aux expressions élastiques en fonction évidemment des constantes géotechniques. Finalement, nous avons étudié dans le cadre de cette thèse, les pieux sous sollicitations monotones; nous recommandons alors d'étendre cette étude aux sollicitations cycliques.

## Références Bibliographiques

- Abramowitz, M. and Stegun, I.A., (1970)** *Handbook of mathematic functions*. 9th edition. Dover publications, New York.
- Baguelin, F., Frank, R. and Said, Y. H. (1977)**. Theoretical study of lateral reaction mechanism of piles. *Geotechnique*, Vol. 27, no.3, pp.405-434.
- Baguelin, F., Frank, R. et Guegan, Y. (1976)**. Calcul sur ordinateur des pieux sollicités horizontalement ou subissant des poussées parasites. *Bulletin de liaison Laboratoires des ponts et chaussées*, no. 84, juillet-août, pp. 113-120, Ref. 1916.
- Baguelin, F. et Jezequel, J.-F.(1972)**.Etude expérimentale du comportement de pieux sollicités horizontalement. *Annales ITBTP. Série sols et fondations*, 91, suppl. 297, sept., pp. 153-204.
- Baguelin, F., Trezos, S.C. et Frank, R. (1979)**. Réaction latérale des pieux: effets de forme et effets tridimensionnels. *Bulletin de liaison Laboratoires des Ponts et Chaussées*, no. 104, Nov-Dec., pp. 33-47, Réf. 2384.
- Banerjee, P.K and Davies, T.G. (1978)**. The behaviour of axially and laterally loaded single piles embedded in nonhomogeneous soils. *Geotechnique*, Vol. 28, no.3, pp. 309-326.
- Bangratz J.-L., Frank, R. et Kutniak, M. (1981)**. PILATE: programme de calcul d'un pieu isolé soumis à des efforts de flexion en tête et à des poussées latérales de sol. Notice d'utilisation. Rapport du département des sols et fondations, F.A.E.R. 1.05.10.0, laboratoire central des ponts et chaussées.
- Barlow, J. (1977)**. Optimal stress locations in finite elements models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, no.2, pp. 243-251.
- Barlow, J. (1989)**. More on optimal stress points-Reduced integration element distortions and error estimation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, pp. 1487-1504.
- Barton, Y.O. (1982)**. Laterally loaded model piles in Sand: Centrifuge tests and finite element analyses. Ph.D thesis, University of cambridge, U.K.

- Blum H. (1932).** Wirtschaftliche Dalbenformen und deren Berechnung. Die Bautechnik.
- Borden, R.H. and Gabr, M.A. (1987).** LTBASE: Computer program for laterally loaded pier analysis including base and slope effects. Research report no. FHWA/NC/87/01, NCSU.
- Bouafia, A. (1990).** Modélisation des pieux chargés latéralement en centrifugeuse. Thèse de Doctorat, ENSM, Nantes, France, 267p.
- Bowles, J-E. (1972).** Finite element analysis of lateral pile. Proc. Conf. Finite element meth. Civ. Eng., McGill Univ., Montreal, pp. 677-700.
- Briaud, J.-L. (1993).** *The Pressuremeter*. A.A. Balkema/Rotterdam/Brookfield.
- Briaud, J.-L., Smith, T.D and Meyer, B.J. (1983).** Laterally loaded piles and the pressuremeter: Comparison of existing methods. Laterally loaded deep foundations, ASTM, STP 835.
- Briaud J.-L., Smith, T.D and Tucker, L.M. (1985).** A pressuremeter method for laterally loaded piles. Int. Conf. of Soil mechanics and foundation engineering, vol.3, p.1353, San Francisco.
- Brinch-Hansen, J. (1961).** The ultimate resistance of rigid piles against transversal forces. Bulletin no.12, Geoteknisk Institut, Copenhagen, pp. 5-9.
- Broms, B.B. (1964 a).** Lateral resistance of piles in cohesion soils. Proc. ASCE, Journal of the soil Mechanics and foundation Engineering Division, 90, SM3, pp. 27-63.
- Broms, B.B. (1964 b).** Lateral resistance of piles in cohesionless soils. Proc. ASCE, Journal of the soil Mechanics and foundation Engineering Division, 90, SM3, pp. 123-156.
- Brown, D.A and Shie, C.F. (1990).** Three dimensional finite element model of laterally loaded piles. Computers and Geotechnics, Vol. 10, pp. 59-79.
- Budhu, M. and Davies, T.G. (1987).** Nonlinear analysis of laterally loaded piles in cohesionless soils. Canadian geotechnical journal, 24, pp. 289-296.
- Budhu, M. and Davies, T.G. (1988).** Analysis of laterally loaded piles in soft clays. ASCE, journal of geotechnical engineering, Vol. 114 no.1, pp. 21-39.
- Carrier, W.D and Christian, J.T. (1973).** Rigid circular plate resting on a non-homogeneous elastic half-space. Geotechnique, 23, no.1, pp. 67-84.

- Chan, K.S., Karasudhi, P. and Lee, S.L. (1974).** Force at a point in the interior of a layered half-space. *International Journal for Solids and Structures*, 10, pp. 1179-1199.
- Chaudhry, A., R. (1994).** Static pile-soil-pile interaction in offshore pile groups. Ph.D thesis, university of oxford, U.K.
- Chauprasert, M.F. and Mumtaz, K.K. (1974).** Displacements and stresses in nonhomogeneous solid. *J. ASCE*, 100, EM5, pp. 861-872.
- Chen, W.F. and Baladi, G.Y. (1985).** *Soil plasticity: Theory and implementation*. Elsevier, New York, 231p.
- Chen, W.F. and Han, D.J. (1988).** *Plasticity for structural engineers*. Springer-Verlag, 606p.
- Chen, L. and Poulos, H. G. (1993).** Analysis of pile-soil interaction under lateral loading using infinite and finite elements. *Computers and Geotechnics*, vol. 15, pp.189-220.
- Cook, R.D., Malkus, D.S and Plesha, M.E. (1989).** Concepts and applications of finite element analysis. Third edition, John Wiley and Sons.
- Cooke, R.W. and Price, G. (1973).** Strains and displacements around friction piles. Proc. 8th Int. conf. SMFE, 2, pp. 53-60.
- Davies, T.G. (1979).** Linear and nonlinear analyses of pile groups. Ph.D thesis, University of Wales, Cardiff, U.K.
- Davies, T.G. and Budhu, M. (1986).** Nonlinear analysis of laterally loaded piles in heavily overconsolidated clays. *Geotechnique*, 36, no. 4, pp. 527-538.
- Davisson, M. T. (1970).** Lateral load capacity of piles. *Highway research record*, 333, pp.104-112.
- Davisson, M.T and Gill, H.L. (1963).** Laterally laded piles in a layered soil system. *Journal of soil Mechanics and foundation division, ASCE*, Vol. 89, SM3 pp. 63-94.
- Desai, C.S. (1974).** Numerical design analysis for piles in sands. *Journal of the geotechnical engineering division, ASCE*, Vol. 100, no. GT6, pp. 613-635.
- Desai, C.S. and Appel, G.C. (1976).** 3-D Analysis of laterally loaded structures. Proc., Second International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, ASCE, Blacksburg, Virginia, Vol.1, pp. 405-418.

- Desai, I. D. and Chandrasekaran, V. S. (1986).** Semianalytical finite element procedure for nonlinear material behaviour. *Computers and structures*, vol.23, no. 1, pp.15-21.
- Desai, C.S. and Kuppusamy, T. (1980).** Application of a numerical procedure for laterally loaded structures. *Numerical methods in offshore piling*, Institution of civil engineers, London, pp. 93-99.
- Douglas, D.J. and Davis, E.H. (1964).** The movement of buried footings due to moment and horizontal load and the movement of anchor plates. *Geotechnique*, Vol. 14, pp. 115-132.
- Drucker, D.C. (1951).** A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. *Proc. 1st U.S.Nat. Cong. Appl. Mech.*, pp. 487-491.
- Drucker, D.C. and Prager, W. (1952).** Soil mechanics and plastic analysis or limit Design. *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, Vol. 10, no.2, pp. 157-162.
- Durocher, L., Gasper, A. and Rhoades, G. (1978).** A numerical comparison of axisymmetric finite elements. *International Journal for numerical Methods in engineering*, Vol. 12, pp 1415-1427.
- Faruque, M.O. and Desai, C.S. (1982).** 3-D material and geometric nonlinear analysis of piles. *Proc., 2nd Int. Conf. on numerical Methods for off-shore pilings*, Austin, Texas.
- Frank, R. (1981).** Design of piles subjected to lateral pressures in soft soils. *Colloquy of Jablonna*, Institute of Hydroengineering, Gdansk, Poland, pp. 112-151
- Frank, R. and Romagny, J.-C. (1990).** PILATE-LCPC version 10.4: Programme de calcul d'un pieu isolé soumis à des efforts de flexion en tête et à des poussées latérales de sol. *Notice d'utilisation*. Laboratoire Centrale des Ponts et Chaussées.
- Gambin, M. (1979).** Calculation of foundations subjected to horizontal forces using pressuremeter data. *Sols-Soils*, no. 30/31, pp. 17-59.
- Georgiadis, M. and Butterfield, R. (1982).** Laterally loaded pile behavior. *ASCE, Journal of the geotechnical engineering division*, Vol. 108, no. GT1, pp. 155-165.
- Gibson, R.E. (1967).** Some results concerning displacements and stresses in a non-homogeneous elastic half-space. *Geotechnique*, 17, pp. 58-67.
- Gibson, R.E. (1974).** The analytical method in soil mechanics. *Geotechnique*, 24, no. 2, pp.115-140.

- Gleser, S.M. (1953).** Lateral load tests on vertical fixed-head and free-head piles. Symp. On lateral load tests on piles, ASCE, New York, pp.75-93.
- Hetenyi, M. (1946).** *Beams on elastic foundations*. Ann Arbor, Michigan, University of Michigan Press.
- Hibbit, Karlsson and Sorensen inc., (1987).** ABAQUS theory manual, version 4.6.
- Hinton, E. and Owen, D.R.J. (1977).** *Finite element programming*. Academic press, inc., London.
- Imai, T. (1976).** Method of calculation of transverse behavior of pile based on measurements results by LLT. Chapter 4 of OYO technical Note TN-13, Studies of subgrade reaction coefficient K- value of soil ground, OYO corporation, Tokyo, Japan.
- Imbert, J.F. (1991).** *Analyse des structures par éléments finis*. Cepadues editions, Toulouse.
- Jamiolkowski, M. and Lancelotta, R. (1977).** Remarks on the use of the self boring pressuremeter test in three Italian clays. Riv. Ital. Geotechnica Vol. 11, no.3.
- Kay, S., Griffiths, D.V. and Kolk, H.J. (1986).** Application of pressuremeter testing to assess lateral pile response in clays. ASTM spec. Techn. Publ. STP no. 950, pp. 458-477.
- Kooijman, A.P. (1989).** Numerical model for laterally loaded piles and pile groups. Ph.D thesis, Delft university of technology, Delft, Netherlands.
- Kooijman, A.P. and Vermeer, P.A. (1988).** Elastoplastic analysis of Laterally loaded piles. Proc.6th Int. Conf. Num. Meth. Geomech., Innsbruck, Vol.2, pp. 1033-1042.
- Kubo, J. (1965).** Experimental study of the behaviour of laterally loaded piles. Proc. 6th. Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol.2 pp. 275-279.
- Kuhlemeyer, R.L. (1979a).** Static and dynamic laterally loaded floating piles. Proc. ASCE, Journal of the geotechnical engineering division, Vol.105 no.GT2, pp. 289-304.
- Kuhlemeyer, R.L. (1979b).** Bending element for circular beams and piles. Proc., ASCE, Journal of the geotechnical engineering division, Vol. 105, no.GT2, pp. 325-330.
- Lenci, C., Maurice, J. et Madignier, F. (1968).** Pieu vertical sollicité horizontalement. Annales des ponts et chaussées, VI, Nov-Dec., pp. 337-383.

- Lewis, K. H. and Gonzalez, L. F. R. (1989).** Finite element analysis of laterally loaded drilled piers in clay. International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Rio de Janeiro, Brazil, pp. 1201-1204.
- Madhav, M.R., Kameswara, R.N.S.V and Madhavan, K. (1971).** Laterally loaded pile in elasto-plastic soil. Soils and foundations Vol. 11, no.2, pp. 1-15.
- Marche, R. (1974).** Sollicitation en flexion des pieux par les couches qu'ils traversent. Thèse de doctorat, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Suisse.
- Matlock, H. (1970).** Correlations for design of laterally loaded pile in soft clay. Proc. 2nd offshore tech. Conf., Houston, Vol. 1, pp. 577-594.
- Matlock, H. and Reese, L. C. (1960).** Generalized solutions for laterally loaded piles. Journal of Soil Mechanics and Foundation Engineering, ASCE, Vol.86, SM5, pp. 63-91.
- McClelland, B. and Focht, J. A. (1956).** Soil Modulus for laterally loaded piles. Trans. ASCE, Vol. 123, pp. 1049.
- Meissner, H. E. (1976).** Laterally loaded pipe-pile in cohesionless soil. Proc. 2nd Conf. Num. Meth. Geomech., Virginia (Ed.C.S. Desai) Vo. III.
- Menard, L. (1962).** Comportement d'une fondation profonde soumise à des efforts de renversement. Sols soils Vol. 1,3, pp. 9-27.
- Menard, L., Bourdon, M. et Gambin, M. (1968).** Méthode générale de calcul d'un rideau ou d'un pieu sollicité horizontalement en fonction des résultats pressiométrique. Sols soils no. 22/23.
- Mestat, P. (1993).** Lois de comportement des géomatériaux et modélisation par la méthode des éléments finis. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, rapport des laboratoires, série géotechnique GT52.
- Meyer, B. J. and Reese, L. C. (1979).** Analysis of single piles under lateral loading. Research Report no. 244-1, Centre of Transportation Research, the university of Texas, Austin, U.S.A.
- Mindlin, R.D. (1936).** Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. Physics 7, pp. 195.
- Nayak, G. C. and Zienkiewicz, O. C. (1972).** Elasto-plastic stress analysis, generalisation for various constitutive relations including strain softening. International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 5, pp. 113-135.

- Naylor, D. J., Pande, G. N., Simpson, B. and Tabb, R. (1984).** *Finite elements in geotechnical engineering*. second edition, Pineridge press, Swansea, 245 p.
- Newmark, N. M. (1942).** Numerical procedure for computing deflections, moments and buckling loads. Proc. ASCE, Vol. 68, no.5, pp.697.
- Nova, R. (1982).** A viscoplastic constitutive model for normally consolidated clay. IUTAM Conference on Deformation and Failure of Granular materials, Delft, pp. 287-295.
- Owen, D. R. J. and Hinton, E. (1980).** *Finite elements in plasticity: theory and practice*. Pineridge press, Swansea.
- Palmer, L. A. and Thompson, J. B. (1948).** The earth pressure and deflection along the embedded lengths of piles subjected to lateral thrusts. Proc. 2nd Int. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering, Rotterdam, Vol. 5 pp. 156-161.
- Poulos, H. G. (1971a).** Behaviour of laterally loaded piles: I-single piles. Journal of Soil Mechanics and Foundation Engineering, ASCE, Vol. 97, no. SM5, pp. 711-731.
- Poulos, H. G. (1973).** Load-deflection prediction for laterally loaded piles. Journal of Australian Geomechanics, Vol. G3, no. 1, pp. 1-8.
- Poulos, H. G. (1987).** From theory to practice in pile design. Research Report no. R559, School of Civil and Mining Engineering, Centre for Geotechnical Research, University of Sydney, Australia.
- Poulos, H. G. (1989).** PULL2B: Computer program for analysis of a single laterally loaded pile. User's Manual, Centre for Geotechnical Research, University of Sydney, Australia.
- Poulos, H. G. and Davis, E. H. (1980).** *Pile Foundation Analysis and Design*. John Wiley and sons.
- Poulos, H. G. and Hull, T. S. (1992).** Analytical geomechanics in foundation engineering- A study of laterally loaded piles. Research Report no. R667, School of Civil and Mining Engineering, Centre for Geotechnical Research, University of Sydney, Australia.
- Prager, W. (1958).** *Problèmes de plasticité théorique*. Dunod, Paris.
- Pyke, R. and Beikae, M. (1984).** A new solution for the resistance of single piles to lateral loading. Laterally loaded deep foundations: Analysis and performance. ASTM STP 835., pp. 3-20.

- Randolph, M. F. (1977).** A theoretical study of the performance of piles. Ph.D thesis, Cambridge University, U.K.
- Randolph, M. F. (1981).** The response of flexible piles to lateral loading. *Geotechnique*, Vol. 31, no. 2, pp. 247-259.
- Randolph, M. F. (1994).** PIGLET: Computer program for analysis and design of pile groups. User's Manual, Department of Civil Engineering, University of Western Australia, Nedlands, Australia.
- Randolph, M. F. and Houlsby, G. T. (1984).** The limiting pressure on a circular pile loaded laterally in cohesive soil. *Geotechnique*, Vol. 34, pp. 613-623.
- Reddy, A. S. and Valsangkar, A. J. (1968).** An analytical solution for laterally loaded piles in layered soils. *Sols-Soils*, no. 21, pp. 23-28.
- Reese, L. C. (1977).** Laterally loaded piles: program documentation. *Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 103, no. GT4, pp. 287-305.
- Reese, L. C. and Cox, W. R. (1969).** Soil behaviour from analysis of tests on uninstrumented piles under lateral loading. *ASTM, STP 444*, pp. 160-176.
- Reese, L. C., Cox, W. R. and Koop, F. D. (1974).** Analysis of laterally loaded piles in sand. *Proc. 6th Offshore Tech. Conf., Houston*, paper OTC 2080 pp. 473-483.
- Reese, L. C., Cox, W. R. and Koop, F. D. (1975).** Field testing and analysis of laterally loaded piles in stiff clay. *Proc. 7th Offshore Tech. Conf., Houston*, paper OTC 2312 pp. 671-690.
- Reese, L. C. and Manoliu, I. (1973).** Analysis of laterally loaded piles by computer. *Buletinul stiintific al Institutului De Constructii Bucuresti*, XVI, no.1, pp. 35-70.
- Reese, L. C. and Sullivan, W. R. (1984).** Documentation of computer program COM624, Parts I and II: Analysis of stresses and deflections for laterally loaded piles including generation of P-Y curves. *Research Report GS80-1, Geotechnical Engineering Center, University of Texas at Austin, U.S.A.*
- Reese, L. C. and Welch, R. C. (1975).** Lateral loading of deep foundations in stiff clay. *Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 101, no. GT7, pp. 633-649.
- Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Wroth, C. P. (1958).** On the yielding of soils. *Geotechnique*, Vol. 8, no. 1, pp. 22-53.

- Rowe, R. K. and Davis, E. H. (1977).** Application of the finite element method to the prediction of collapse loads. Research Report no. R310, School of Civil Engineering, University of Sydney, Australia.
- Schofield, A. N. and Wroth, C. P. (1968).** *Critical State Soil Mechanics*. McGraw-Hill.
- Siriwardane, H. J. and Desai, C. S. (1983).** Computational procedures for nonlinear three dimensional analysis with some advance constitutive laws. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 7, no. 2, pp. 143-171.
- Sloan, S. W. (1987).** Substepping schemes for the numerical integration of elastoplastic stress-strain relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 893-911.
- Sloan, S. W. and Randolph, M. F. (1982).** Numerical prediction of collapse loads using finite element methods. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 6, pp.47-76.
- Smith, I. M. and Griffiths, D. V. (1988).** *Programming the Finite Element Method*. Second edition, John Wiley and sons, Chichester, 469 p.
- Spillers, W. R. and Stoll, R. D. (1964).** Lateral response of piles. *Journal of Soil Mechanics and Foundation Engineering Division, ASCE*, Vol. 90, SM6, pp. 1-9.
- Stipho, A. S. (1978).** Theoretical and experimental investigation of the behaviour of anisotropically consolidated Kaolin. Ph. D thesis, University College, Cardiff, U.K.
- Stricklin, J. A. (1968).** Linear and non-linear analysis of shells of revolution with axisymmetric stiffness properties. *Proc. 2nd Conf. Matrix Methods in Struct. Mech.*, Air Force Institute of Technology, Ohio, U.S.A.
- Sullivan, W. R. (1977).** Development and evaluation of a unified method for the analysis of laterally loaded piles in clay. Master's thesis, University of Texas at Austin, U.S.A.
- Tadjbakhsh, S. et Frank, R. (1985).** Etude par la methode des éléments finis du comportement élastoplastique de sols dilatants. Application aux pieux sous charge axiale. *Rapport de recherche LPC*, no.135, 142p.
- Terzaghi, K. (1955).** Evaluation of coefficients of subgrade reaction. *Geotechnique*, Vol. 5, pp.297.

- Trochanis, A. M., Bielak, J. and Christiano, P. (1988).** A three-dimensional nonlinear study of piles leading to the development of a simplified model. A Technical report of research, R-88-176, Department of Civil Engineering, Carnegie Institute of technology, Carnegie Mellon University, Pittsburgh.
- Trochanis, A. M., Bielak, J. and Christiano, P. (1991).** Three-dimensional nonlinear study of piles. ASCE, Journal of Geotechnical Engineering, vol. 117, pp. 429-447.
- Vermeer, P. A. (1980).** Formulation and analysis of sand deformation problems. Ph.D thesis, Delft university of Technology, Delft, Netherlands.
- Verruijt, A. (1994).** *Offshore Soil Mechanics*. Delft University of Technology Press, Delft, Netherlands.
- Verruijt, A. and Kooijman, A. P. (1989).** Laterally loaded piles in layered elastic medium. *Geotechnique*, Vol. 39, no. 1, pp.39-46.
- Vesic, A. S. (1961).** Bending of beam resting on isotropic elastic solid. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 87, EM2, pp. 35-53.
- Ward, W. H. and Burland, J. B. (1973).** The use of ground strain measurements in civil engineering. Building Research Establishment, DOE, CP13/73.
- Wilson, E. L. (1965).** Structural analysis of axisymmetric solids. *Journal AIAA*, Vol. 3, pp. 2269-2274.
- Winkler, E. (1867).** *Die lehre von plastizitat und festigkeit*. 182 Prague.
- Winnicki, L. A. and Zienkiewicz, O. C. (1979).** Plastic ( or visco-plastic) behaviour of axisymmetric bodies subjected to non-symmetric loading-semi-analytical finite element solution .*International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, pp. 1399-1412.
- Witmer, E. A. and Kotanchik, J. J. (1968).** Progress report on discret element elastic and elastic-plastic analyses of shells of revolution subjected to axisymmetric and asymmetric loading. Proc. 2nd Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, U.S.A.
- Yamada, Y., Yoshimura, N. and Sakurai, T. (1968).** Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.10, pp. 343-354.

**Zienkiewicz, O. C. (1977).** *The Finite Element Method in Engineering Science*. 3rd edition, McGraw-Hill, London.

**Zienkiewicz, O. C., Humpheson, C. and Lewis, R. W. (1975).** Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics. *Geotechnique*, Vol. 25, no. 4, pp. 671-689.

**Zienkiewicz, O. C., Valliappan, S. and King, I. P. (1969).** Elasto-plastic solution of engineering problems ; initial stress, finite element approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 1, pp. 75-100.

# Annexe1

## Détermination du moment fléchissant, de l'effort tranchant et de la réaction du sol par la méthode des différences finies

Considérons la configuration nodale illustrée par la figure (A1.1). Nous faisons l'hypothèse d'une variation quadratique des déplacements en fonction de la profondeur.

$$u = az^2 + bz + c \quad (\text{A1.1})$$

En substituant les valeurs de  $u$  aux noeuds  $i-1$ ,  $i$  et  $i+1$  on aura:

$$\begin{aligned} u_{i-1} &= ah^2 - bh + c \\ u_i &= c \\ u_{i+1} &= a\alpha^2 h^2 + b\alpha h + c \end{aligned} \quad (\text{A1.2})$$

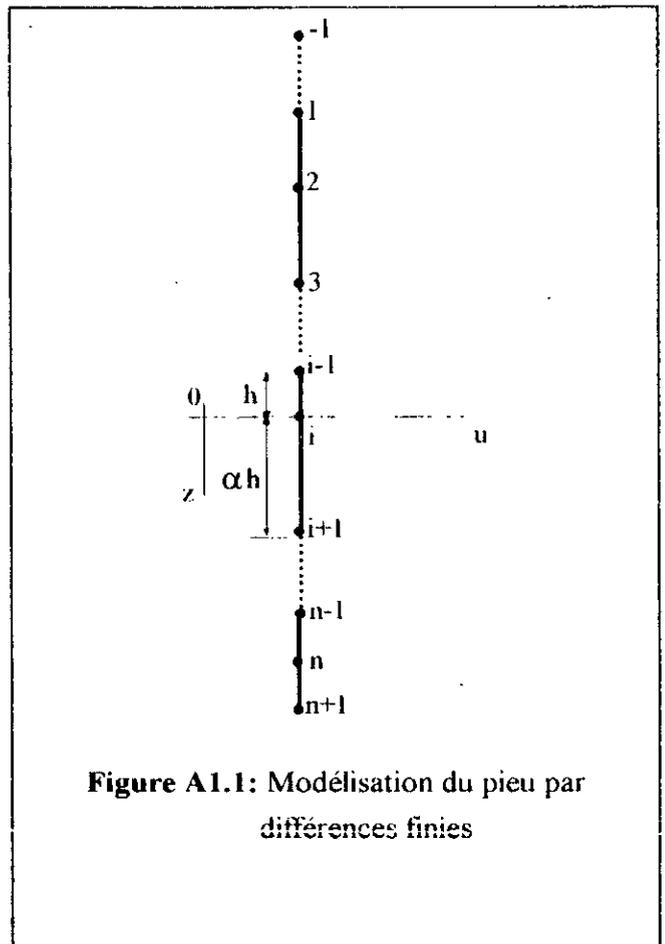
Système dans lequel  $h$  est la longueur d'un tronçon courant.

En résolvant les équations (A1.2) on obtient:

$$a = \left( -\frac{u_{i+1}}{\alpha(1+\alpha)} - \frac{u_i}{\alpha} + \frac{u_{i-1}}{(1+\alpha)} \right) / h^2 \quad (\text{A1.3-a})$$

$$b = \left( -\frac{u_{i+1}}{\alpha(1+\alpha)} + \frac{(\alpha-1)u_i}{\alpha} - \frac{\alpha u_{i-1}}{(1+\alpha)} \right) / h \quad (\text{A1.3-b})$$

$$c = u_i \quad (\text{A1.3-c})$$



**Figure A1.1:** Modélisation du pieu par différences finies

A partir de l'équation (A1.1) on aura:  $\frac{du}{dz} = 2az + b \quad (\text{A1.4})$

au noeud  $i$  ( $z=0$ ). L'équation (A1.4) se réduit à:  $\left( \frac{du}{dz} \right)_i = b$

En dérivant l'équation (A1.4) une seconde fois on obtient:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = 2a \quad (\text{A1.5})$$

le moment fléchissant  $M_i$  au noeud  $i$  pourra être exprimé par:

$$M_i = R_i \left( \frac{d^2 u}{dz^2} \right)_i = 2R_i a \quad (\text{A1.6})$$

Expression dans laquelle  $R_i$  est la rigidité à la flexion  $EI$  au noeud  $i$ , l'effort tranchant est donné par:

$$T = \frac{dM}{dz} \quad (\text{A1.7})$$

En faisant l'hypothèse d'une variation quadratique du moment fléchissant en fonction de la profondeur  $z$ , on obtiendra une expression de l'effort tranchant similaire à l'équation (A1.3-b)

$$T_i = \left( \frac{M_{i+1}}{\alpha(1+\alpha)} - \frac{(\alpha-1)M_i}{\alpha} + \frac{\alpha M_{i-1}}{1+\alpha} \right) / h \quad (\text{A1.8})$$

La réaction du sol  $P$  est donnée par:

$$P = -\frac{d^2 M}{dz^2} \quad (\text{A1.9})$$

et encore en comparaison avec l'équation (A1.3-a):

$$P_i = -2 \left( -\frac{M_{i+1}}{\alpha(1+\alpha)} - \frac{M_i}{\alpha} + \frac{M_{i-1}}{1+\alpha} \right) / h^2 \quad (\text{A1.10})$$

pour un pieu libre en tête soumis à un effort latéral  $H_0$  et un moment de flexion  $M_0$ . En tête du pieu on a:

$$EI \frac{d^2 u}{dz^2} = M_0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dz} \left( EI \frac{d^2 u}{dz^2} \right) = H_0 \quad (\text{A1.11})$$

Considérons le noeud  $l$  en tête du pieu et introduisons le noeud fictif  $-l$  en dessus de la tête:

$$R_l \left( \frac{u_2 - 2u_1 + u_{-1}}{h^2} \right) = M_0 \quad (\text{A1.12})$$

ou

$$u_{-1} = \frac{M_0 h^2}{R_l} + 2u_1 - u_2 \quad (\text{A1.13})$$

La rotation en tête du pieu est donnée par:

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_1 = \frac{u_2 - u_{-1}}{2h} = \left(\frac{2u_2 - 2u_1 - \frac{M_0 h^2}{R_1}}{2h}\right) \quad (\text{A1.14})$$

En tête du pieu on a également:

$$H_0 = \frac{M_2 - M_{-1}}{2h} \quad (\text{A1.15})$$

ou 
$$M_{-1} = M_2 - 2hH_0 \quad (\text{A1.16})$$

La réaction du sol en tête est donnée par:

$$\begin{aligned} P_1 &= -\left(\frac{M_2 - 2M_1 + M_{-1}}{h^2}\right) \\ &= -2\left(\frac{M_2 - M_1 - hH_0}{h^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A1.17})$$

En pointe, le moment fléchissant et l'effort tranchant sont tous deux nuls. A partir de l'hypothèse d'un moment nul en pointe on a :

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 0 \quad (\text{A1.18})$$

ou 
$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} \quad (\text{A1.19})$$

La rotation en pointe du pieu est :

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_n = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} \quad (\text{A1.20})$$

$$M_{n+1} - M_{n-1} = 0 \quad \text{ou} \quad M_{n+1} = M_{n-1} \quad (\text{A1.21})$$

La réaction du sol en pointe est :

$$P_n = -\frac{M_{n-1} + M_{n+1}}{h^2} = -\frac{2M_{n-1}}{h^2} \quad (\text{A1.22})$$

Lorsque le pieu est encasté en tête, la rotation en tête est:

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_1 = \frac{u_2 - u_{-1}}{2h} = 0 \quad (\text{A1.23})$$

ou  $u_1 = u_2$  (A1.24)

Le moment fléchissant en tête est:

$$M_1 = R_1 \left( \frac{d^2 u}{dz^2} \right)_1 = R_1 (2u_2 - 2u_1) / h^2 \quad (\text{A1.25})$$

En utilisant l'expression (A1.17), la réaction du sol en tête du pieu peut être évaluée.

## Annexe2

### Détermination de la fraction $r$ de l'incrément de déformation pour le modèle de Drucker-Prager

Le critère de plasticité de Drucker-Prager est donné par l'équation:

$$F = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - K = 0 \quad (\text{A2.1})$$

L'état initial des contraintes correspondant au point  $a$  sur la figure (A2.1) peut être représenté par:

$$\{\sigma_0\} = \{\sigma_r \ \sigma_z \ \sigma_\theta \ \tau_{rz} \ \tau_{z\theta} \ \tau_{r\theta}\}^T \quad (\text{A2.2-a})$$

Le vecteur de l'incrément de contraintes pourra également être écrit par:

$$\{\Delta\sigma\} = \{\Delta\sigma_r \ \Delta\sigma_z \ \Delta\sigma_\theta \ \Delta\tau_{rz} \ \Delta\tau_{z\theta} \ \Delta\tau_{r\theta}\}^T \quad (\text{A2.2.b})$$

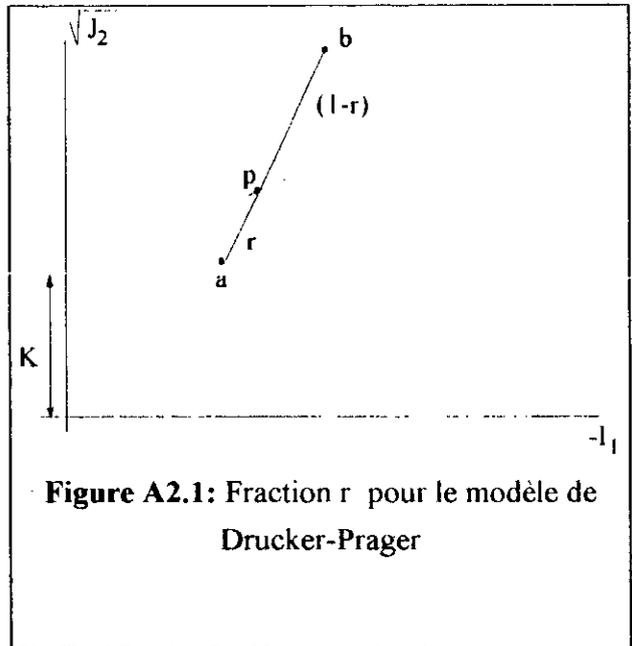
Supposons maintenant qu'en ajoutant l'incrément de contrainte  $\{\Delta\sigma\}$  à l'état de contrainte initial  $\{\sigma_0\}$ , l'état de contrainte se déplace au point  $b$  sur la figure (A2.1), qui se trouve à l'extérieur de la surface de charge.

Pendant le processus de déformation, le seuil plastique est atteint au point  $p$  qui représente l'intersection du vecteur de l'incrément de contrainte  $ab$  et la surface de charge. De ce fait, le vecteur de contrainte correspondant au point  $p$  peut être exprimé par:

$$\{\sigma\}_p = \{\sigma_r + r\Delta\sigma_r, \ \sigma_z + r\Delta\sigma_z, \ \sigma_\theta + r\Delta\sigma_\theta, \dots\}^T \quad (\text{A2.3})$$

Expression dans laquelle:  $r$  est le rapport des segments  $ap$  et  $ab$ . Puisque le point  $p$  se situe exactement sur la surface de charge, l'état de contrainte  $\{\sigma\}_p$  qui lui correspond doit satisfaire l'équation (A2.1). En effet,

$$F = (\{\sigma_0\} + r\{\Delta\sigma\}) = 0 \quad (\text{A2.4})$$



**Figure A2.1:** Fraction  $r$  pour le modèle de Drucker-Prager

L'invariant de contraintes  $I_1$  et l'invariant des contraintes déviatoriques  $J_2$  au point  $p$  peuvent être exprimés par:

$$(I_1)_p = (\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta) + r(\Delta\sigma_r + \Delta\sigma_z + \Delta\sigma_\theta) \quad (\text{A2.5})$$

et

$$(J_2)_p = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_r + r\Delta\sigma_r - P - r\Delta P)^2 + (\sigma_z + r\Delta\sigma_z - P - r\Delta P)^2 + (\sigma_\theta + r\Delta\sigma_\theta - P - r\Delta P)^2 \right] \\ + (\tau_{rz} + r\Delta\tau_{rz})^2 + (\tau_{z\theta} + r\Delta\tau_{z\theta})^2 + (\tau_{\theta r} + r\Delta\tau_{\theta r})^2 \quad (\text{A2.6-a})$$

où

$$P = \frac{(\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta)}{3} \quad \text{et} \quad \Delta P = \frac{(\Delta\sigma_r + \Delta\sigma_z + \Delta\sigma_\theta)}{3}$$

Ici, l'indice  $p$  montre que les quantités en question sont évaluées au point  $p$ . En effectuant quelques simplifications sur l'expression de  $(J_2)_p$  on obtient:

$$(J_2)_p = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_r - p)^2 + (\sigma_z - p)^2 + (\sigma_\theta - p)^2 \right] + \tau_{rz}^2 + \tau_{z\theta}^2 + \tau_{\theta r}^2 \\ + r^2 \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\Delta\sigma_r - p)^2 + (\Delta\sigma_z - p)^2 + (\Delta\sigma_\theta - p)^2 \right] + \Delta\tau_{rz}^2 + \Delta\tau_{z\theta}^2 + \Delta\tau_{\theta r}^2 \right\} \\ + r \left\{ (\sigma_r - p)(\Delta\sigma_r - p) + (\sigma_z - p)(\Delta\sigma_z - p) + (\sigma_\theta - p)(\Delta\sigma_\theta - p) \right. \\ \left. + 2(\tau_{rz}\Delta\tau_{rz} + \tau_{z\theta}\Delta\tau_{z\theta} + \tau_{\theta r}\Delta\tau_{\theta r}) \right\} \quad (\text{A2.6-b})$$

En remplaçant les expressions de  $(I_1)_p$  et  $(J_2)_p$  dans l'équation (A2.1) on aura:

$$(\sqrt{J_2})_p = -\alpha(I_1)_p + K \quad (\text{A2.7})$$

En élevant au carré les deux membres de l'équation (A2.7) on obtient:

$$(J_2)_p = \alpha^2(I_1)_p^2 - 2\alpha K(I_1)_p + K^2 \quad (\text{A2.8-a})$$

ou

$$(J_2)_p - \alpha^2(I_1)_p^2 + 2\alpha K(I_1)_p - K^2 = 0 \quad (\text{A2.8-b})$$

En remplaçant les équations (A2.5) et (A2.6-b) dans l'équation (A2.8-b) on obtient l'expression suivante:

$$\begin{aligned}
 & r^2 \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\Delta\sigma_r - \Delta p)^2 + (\Delta\sigma_z - \Delta p)^2 + (\Delta\sigma_\theta - \Delta p)^2 \right] + \Delta\tau_{rz}^2 + \Delta\tau_{z\theta}^2 + \Delta\tau_{\theta r}^2 - \alpha^2 (\Delta\sigma_r + \Delta\sigma_z + \Delta\sigma_\theta)^2 \right\} \\
 & + r \left\{ (\sigma_r - p)(\Delta\sigma_r - \Delta p) + (\sigma_z - p)(\Delta\sigma_z - \Delta p) + (\sigma_\theta - p)(\Delta\sigma_\theta - \Delta p) + 2(\tau_{rz}\Delta\tau_{rz} + \tau_{z\theta}\Delta\tau_{z\theta} + \tau_{\theta r}\Delta\tau_{\theta r}) \right\} \quad (A2.9) \\
 & - 2\alpha^2 (\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta)(\Delta\sigma_r + \Delta\sigma_z + \Delta\sigma_\theta) + 2\alpha K (\Delta\sigma_r + \Delta\sigma_z + \Delta\sigma_\theta) \left\{ \tau_{rz}^2 + \tau_{z\theta}^2 + \tau_{\theta r}^2 - \alpha^2 (\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta)^2 \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \left[ (\sigma_r - p)^2 + (\sigma_z - p)^2 + (\sigma_\theta - p)^2 \right] + 2\alpha K (\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta) - K^2 \right\} = 0
 \end{aligned}$$

Cette expression longue peut être écrite sous une forme plus simple:

$$Ar^2 + 2Br + C = 0 \quad (A2.10)$$

avec:

$$\begin{aligned}
 A = & (\Delta\sigma_r - \Delta p)^2 + (\Delta\sigma_z - \Delta p)^2 + (\Delta\sigma_\theta - \Delta p)^2 + 2(\Delta\tau_{rz}^2 + \Delta\tau_{z\theta}^2 + \Delta\tau_{\theta r}^2) \\
 & - 2\alpha^2 (\Delta\sigma_r + \Delta\sigma_z + \Delta\sigma_\theta)^2 \quad (A2.10-a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B = & (\sigma_r - p)(\Delta\sigma_r - \Delta p) + (\sigma_z - p)(\Delta\sigma_z - \Delta p) + (\sigma_\theta - p)(\Delta\sigma_\theta - \Delta p) \\
 & + 2(\tau_{rz}\Delta\tau_{rz} + \tau_{z\theta}\Delta\tau_{z\theta} + \tau_{\theta r}\Delta\tau_{\theta r}) - 2\alpha^2 (\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta)(\Delta\sigma_r + \Delta\sigma_z + \Delta\sigma_\theta) \\
 & + 2\alpha K (\Delta\sigma_r + \Delta\sigma_z + \Delta\sigma_\theta) \quad (A2.10-b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C = & (\sigma_r - p)^2 + (\sigma_z - p)^2 + (\sigma_\theta - p)^2 + 2(\tau_{rz}^2 + \tau_{z\theta}^2 + \tau_{\theta r}^2) \\
 & - 2\alpha^2 (\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta)^2 + 4\alpha K (\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta) - 2K^2 \quad (A2.10-c)
 \end{aligned}$$

La valeur de  $r$  peut être facilement déterminée en résolvant l'équation du second degré (A2.10).

---

**Edité à l'Agence des Palmiers, Blida le 03 Février 1997**  
**05, Cité Taidirt, Blida (Algérie) Tél: (03) 41 20 76**