

# ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

## THESE DE MAGISTER

OPTION MACHINES ELECTRIQUES

Présentée par SLIMANE TAHI

### **THEME**

# **CONTRIBUTION A L'ETUDE DES MACHINES A RELUCTANCE VARIABLE A STATOR LISSE**

SOUTENUE LE 27 NOVEMBRE 1990 DEVANT LA COMMISSION :

Président :  
Examineurs :

Mr A. NAIT-SAADA  
Mme S. DJEMA  
Mr R. DJELLOULI  
Mr M. KOURGLI  
Mr B.. LAPORTE  
Mr M. E. ZAIM

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

# ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

## THESE DE MAGISTER

OPTION MACHINES ELECTRIQUES

Présentée par SLIMANE TAHI

### **THEME**

# **CONTRIBUTION A L'ETUDE DES MACHINES A RELUCTANCE VARIABLE A STATOR LISSE**

SOUTENUE LE 27 NOVEMBRE 1990 DEVANT LA COMMISSION :

Président :  
Examineurs :

Mr A. NAIT-SAADA  
Mme S. DJEMA  
Mr R. DJELLOULI  
Mr M. KOURGLI  
Mr B.. LAPORTE  
Mr M. E. ZAIM

A mes parents  
à toute ma famille

— AVANT - PROPOS —

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire de machines électriques de l'Ecole Nationale Polytechnique, sous la direction de Monsieur M.E. ZAIM, Maître de conférences à l'ENP.

Je tiens à lui exprimer ma gratitude pour l'aide sans réserve qu'il m'a apportée par ses conseils éclairés, tout au long de ce travail. Qu'il soit assuré de ma sincère reconnaissance.

Je remercie très sincèrement Monsieur B. LAPORTE, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine, pour les précieux conseils qu'il m'a apportés, et pour l'intérêt constant qu'il a manifesté à ce travail.

Je suis très reconnaissant à Monsieur A. NAÏT-SAADA, Professeur à l'ENITA, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.

Que Madame DJEMA, chargée de cours à l'ENP, veuille bien trouver, ici, l'assurance de ma sincère reconnaissance d'avoir accepté de faire partie du jury.

Ma reconnaissance va également à Monsieur M. KOURGLI et à Monsieur R. DJELLOULI, chargés de cours à l'ENP, pour leur présence parmi les membres du jury.

J'exprime toute ma gratitude à Messieurs IBTIQUEN et EDJERAOUI ainsi qu'à Mme YAKER, pour les multiples discussions que nous avons eues concernant ce travail.

Je n'oublierais pas non plus d'adresser mes vifs remerciements à Mme SEBAÏBY ainsi qu'au personnel du centre de calcul de l'ENP, en particulier à Messieurs SARI et BENMESSAOUD qui n'ont ménagé aucun effort pour la réalisation de ce travail.

# SOMMAIRE

	pages
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE I : EQUATIONS DE FONCTIONNEMENT DES MRV A STATOR LISSE	
I.1 INTRODUCTION .....	4
I.2 EQUATIONS DE FONCTIONNEMENT .....	8
I.3 ETUDE DE LA MACHINE A RELUCTANCE PURE .....	16
I.3.1 Fonctionnement à courant fixé .....	16
I.3.2 Fonctionnement à tension fixée .....	19
I.4 ETUDE DE LA MACHINE HOMOPOLAIRE .....	24
I.4.1 Fonctionnement à tension fixée .....	24
CHAPITRE II : CALCUL DES INDUCTANCES DE LA MRV A STATOR LISSE	
II.1 INTRODUCTION .....	31
II.2 MODELE D'ETUDE .....	32
II.3 ETUDE DE LA MACHINE HETEROPOLAIRE .....	36
II.3.1 Détermination de l'inductance directe .....	39
II.3.2 Détermination de l'inductance en quadrature .....	48
II.3.3 Variation de l'induction normale à la surface du stator .....	54
II.3.4 Variations des inductances en fonction des paramètres géométriques .....	55

II.3.5	Optimisation de la largeur de la dent rotorique.....	58
II.4	ETUDE DE LA MACHINE HOMOPOLAIRE .....	59
II.4.1	Détermination de l'inductance directe .....	62
II.4.2	Détermination de l'inductance en quadrature .....	67
II.4.3	Variation des inductances en fonction des paramètres géométriques .....	72
II.4.4	Variation de l'induction normale à la surface du stator .....	72

### CHAPITRE III : ETUDE EXPERIMENTALE

III.1	MACHINE NON-EXCITEE .....	77
III.1.1	Essais à vide .....	79
III.1.2	Essais en charge .....	82
III.1.3	Essais à faible glissement .....	89
III.2	MACHINE HOMOPOLAIRE .....	91
III.2.1	Caractéristiques de magnétisation et de court-circuit .....	92
III.2.2	Essais en charge .....	95

CONCLUSION .....	101
------------------	-----

ANNEXE .....	102
--------------	-----

BIBLIOGRAPHIE .....	108
---------------------	-----

## NOTATIONS

A	(Wb/m)	: potentiel vecteur
A <sub>0</sub>	(Wb/m)	: $A_0 = \mu_0 N K_b q i / (\pi p)$
B <sub>y</sub>	(T)	: composante normale de l'induction magnétique
B <sub>z</sub>	(T)	: $B_z = A_0 (\pi/r) \sin n\theta$
C <sub>d</sub> , C <sub>q</sub>		: inductance "réduite" directe, en quadrature
E <sub>r</sub>	(V)	: fem due au flux d'excitation homopolaire
L <sub>d</sub> , L <sub>q</sub>	(H)	: inductance directe, en quadrature
L <sub>c</sub>	(H)	: $L_c = L_d/C_d = L_q/C_q$ inductance d'une machine à pôles lisses à entrefer constant
H <sub>t</sub>	(A/m)	: composante tangentielle du champ magnétique
I	(A)	: valeur efficace du courant diphasé
I <sub>0</sub>	(A)	: amplitude du courant statorique de la machine réelle
I <sub>r</sub>	(A)	: courant d'excitation
J <sub>0</sub>	(A/m)	: amplitude de la densité superficielle de courant
K <sub>b</sub>		: coefficient de bobinage
L	(m)	: longueur utile de la machine
N		: nombre de conducteurs par pôle et par phase
R	(Ω)	: résistance d'une phase statorique
R <sub>s</sub>	(m)	: rayon intérieur du stator
V	(V)	: tension d'alimentation d'une phase statorique
X <sub>d</sub>	(Ω)	: $X_d = L_d \omega$ réactance directe
X <sub>q</sub>	(Ω)	: $X_q = L_q \omega$ réactance en quadrature
W	(J)	: énergie magnétique
Z <sub>r</sub>		: nombre de dents au rotor

$e_1$	(m)	: épaisseur du petit entrefer
$e_2$	(m)	: épaisseur du grand entrefer
$i_d, i_q$	(A)	: courant direct, en quadrature
$i_\alpha, i_\beta$	(A)	: courant dans la phase $\alpha$ , dans la phase $\beta$
$p$		: nombre de paires de pôles statoriques
$q$		: nombre de phases
$\delta$	(rd)	: décalage interne
$e$		: épaisseur du grand entrefer rapportée au pas polaire
$\varphi$	(rd)	: déphasage entre courant et tension
$\eta$		: rendement
$\lambda$		: $\lambda = e - \sigma$
$\mu_0$	(H/m)	: perméabilité du vide
$\theta$	(rd)	: position du rotor par rapport au stator
$\sigma$		: épaisseur du petit entrefer rapportée au pas polaire
$\psi$		: largeur relative des dents du rotor par rapport au pas polaire
$\tau$	(m)	: pas polaire
$\omega$	(rd/s)	: pulsation de la source statorique
$\xi_d$	(rd)	: $\xi_d = \text{Arctg } X_d/R$
$\xi_q$	(rd)	: $\xi_q = \text{Arctg } X_q/R$
$\Gamma$	(N.m)	: couple électromagnétique
$\Omega$	(rd/s)	: vitesse de rotation



## INTRODUCTION

Les machines à rotor massif paraissent adaptées aux applications industrielles nécessitant des grandes vitesses de rotation (  $N > 10.000$  t/mn ) [1,2].

Leur utilisation est en effet, rendue possible par le développement des convertisseurs de puissance, fiables et délivrant des fréquences relativement élevées.

La configuration synchrone non-excitée, ou à réluctance pure possède l'avantage d'être techniquement simple [2,8,13].

Cependant, elle présente l'inconvénient d'avoir un facteur de puissance faible, impliquant un surdimensionnement de l'alimentation électrique.

On améliore ce facteur de puissance en utilisant, en plus de l'alimentation statorique, une excitation homopolaire [1,7,8] qui permet, en outre, une simplification de l'onduleur grâce à la commutation naturelle.

Nous montrons au chapitre I, que lorsqu'on néglige les courants harmoniques dans le rotor, le modèle de la MRV peut être ramené à celui de la machine hétéropolaire à rotor feuilleté, et que ses performances peuvent être déterminées lorsque les réactances directe  $X_d$  et en quadrature  $X_q$  sont connues.

Nous proposons ensuite, dans le deuxième chapitre, une méthode de calcul de ces réactances, basée sur la décomposition en série de Fourier de la composante axiale du potentiel vecteur dans les zones à petit et grand entrefer. Les conditions aux limites et d'interfaces conduisent alors à un système d'équations linéaires que nous résolvons itérativement.

Cette méthode est développée pour le calcul de la machine à réluctance pure [9] ainsi que pour la MRV homopolaire.

Le troisième chapitre concerne l'étude expérimentale effectuée sur trois bancs d'essais de 4 kW, composés de deux MRV non-excitées, et d'une machine homopolaire. Les caractéristiques mesurées sont ensuite comparées à celles obtenues numériquement par le modèle théorique développé précédemment.

# CHAPITRE I

## EQUATIONS DE FONCTIONNEMENT DES MRV A STATOR LISSE

### I.1 INTRODUCTION

### I.2 EQUATIONS DE FONCTIONNEMENT

### I.3 ETUDE DE LA MACHINE A RELUCTANCE PURE

#### I.3.1 Fonctionnement à courant fixé

#### I.3.2 Fonctionnement à tension fixée

### I.4 ETUDE DE LA MACHINE HOMOPOLAIRE

#### I.4.1 Fonctionnement à tension fixée

## I.1 INTRODUCTION

Nous considérons les MRV à stator lisse, alimentées par un système triphasé; elles présentent  $p$  paires de pôles, et le rotor comprend  $Z_R$  dents identiques et régulièrement espacées.

Le stator est un cylindre de rayon  $R_s$ , dans lequel sont creusées des encoches destinées à contenir les conducteurs (figure I.1). La largeur  $d$  des isthmes d'encoches est en général faible, et la structure présente ainsi une irrégularité géométrique négligeable.

En plus de l'alimentation statorique, les machines destinées aux grandes vitesses de rotation peuvent être excitées par un bobinage fixe par rapport au stator. La conversion électromécanique de l'énergie est alors due à l'interaction des courants statoriques et d'excitation ainsi qu'à l'existence d'une anisotropie liée à la position du rotor.

Dans les machines à réluctance pure, ou non-excitées, seule la variation de l'inductance propre de l'armature d'induit est créatrice d'énergie mécanique.

Cette structure n'est autre qu'une machine synchrone à pôles saillants démunie d'enroulements d'excitation.

Le nombre de dents rotoriques  $Z_R$  vérifie la relation :

$$Z_R = 2p \quad (\text{une dent par pôle}), \quad (\text{I.1-a})$$

et le rotor tourne à la vitesse synchrone

$$\Omega = \frac{\omega}{p} = \frac{2\omega}{Z_R} \quad (\text{I.1-b})$$

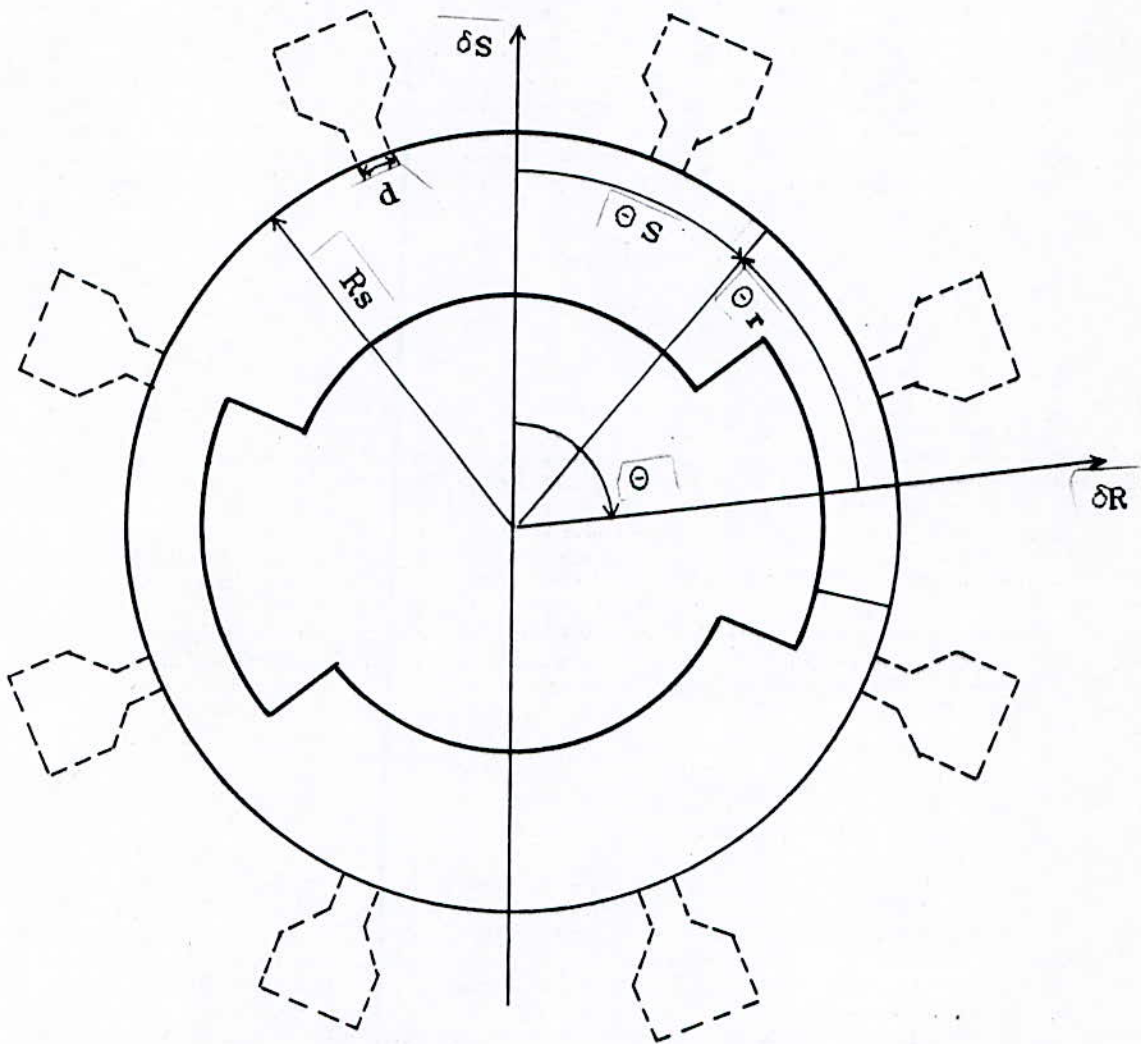


Figure I.1

Cette machine qui possède l'avantage d'être techniquement simple, présente cependant un facteur de puissance faible, impliquant un surdimensionnement de l'alimentation statorique.

On améliore ce facteur de puissance en utilisant une excitation homopolaire [1,7] qui permet en outre une simplification de l'onduleur grâce à la commutation naturelle.

Dans la cas de la machine étudiée, l'enroulement d'excitation est constitué de deux bobines en série, placées au niveau des flasques de part et d'autre du rotor.

Le flux homopolaire traverse les enroulements statoriques dans le même sens de telle sorte que les dents rotoriques portent des pôles identiques.

Le retour de ce flux est alors assuré par l'armature statorique et les flasques (figure I.2). Ce flux est modulé par la variation de l'entrefer; l'induction est maximale au voisinage des dents rotoriques, et minimale sur l'axe interpolaire (figure I.3).

On peut donc ramener l'étude de cette machine [7,8 ], dont la puissance massique est moitié moindre que celle de la machine hétéropolaire de taille équivalente, à une machine synchrone à pôles saillants (figure I.4).

Le nombre de dents rotoriques  $Z_R$  vérifie la relation

$$Z_R = p \quad (I.2-a)$$

et le rotor tourne à la vitesse synchrone

$$\Omega = \frac{\omega}{p} = \frac{\omega}{Z_R} \quad (I.2-b)$$

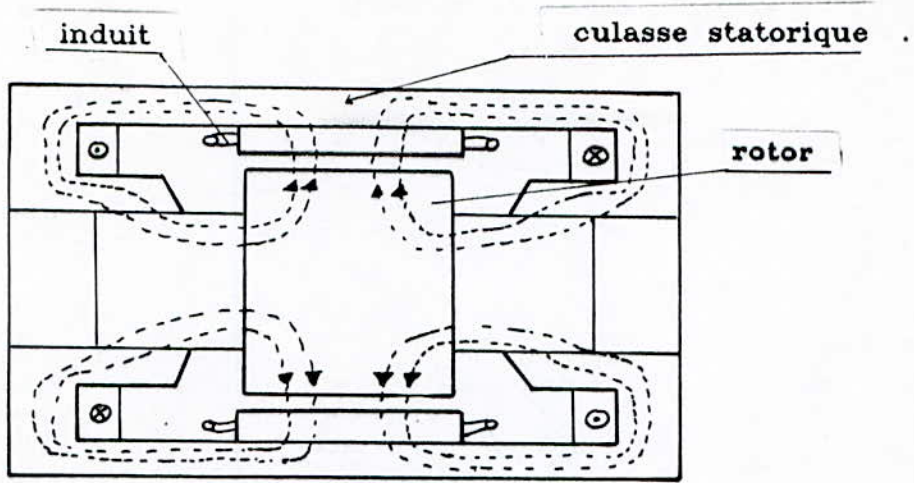


Figure I.2

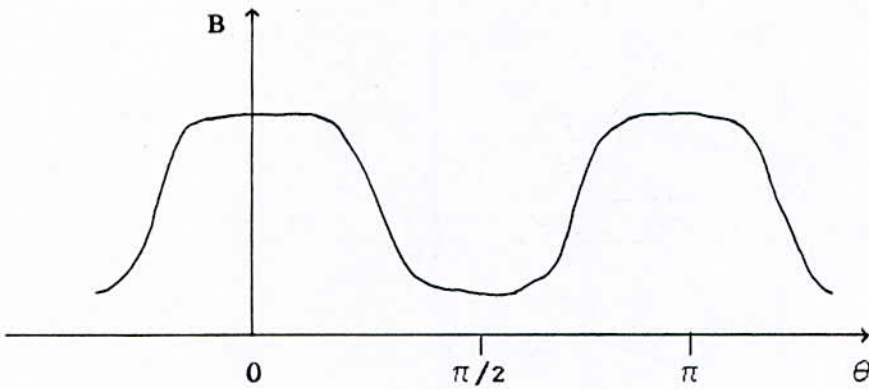


Figure I.3

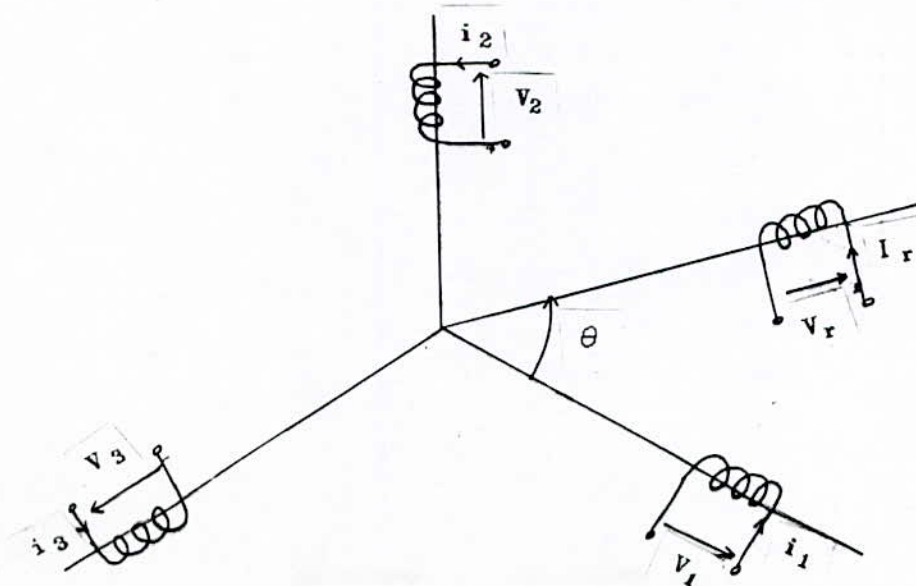


Figure I.4

## 1.2 Equations de fonctionnement

Considérons la machine représentée à la figure I.1, et soient  $\hat{o}_s$  et  $\hat{o}_r$  des axes respectivement liés au stator et au rotor. La position du rotor par rapport au stator est repérée par l'angle électrique  $\theta$  séparant les axes  $\hat{o}_s$  et  $\hat{o}_r$ .

Tout point M dans l'entrefer est repéré par les angles électriques  $\theta_s$  et  $\theta_r$  par rapport aux axes  $\hat{o}_s$  et  $\hat{o}_r$ .

On a donc :

$$\theta_s = \theta_r + \theta \quad (I.3)$$

En supposant que la machine fonctionne en régime non saturé, les relations entre les flux et les courants circulant dans les différents enroulements sont données par :

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{1r} \\ M_{21} & L_{22} & M_{23} & M_{2r} \\ M_{31} & M_{32} & L_{33} & M_{3r} \\ M_{r1} & M_{r2} & M_{r3} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ I_r \end{bmatrix} \quad (I.4)$$

$L_{ii}$  est l'auto-inductance de l'enroulement  $i$ , et  $M_{ij}$  est l'inductance mutuelle des enroulements  $i$  et  $j$ .

$i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$  représentent, respectivement, les courants dans les trois phases.  $I_r$  est le courant d'excitation.



La matrice des inductances  $[ \mathcal{L} ]$  est symétrique, et l'expression des flux induits et inducteur peut se mettre sous la forme suivante :

$$[ \Psi ] = [ \mathcal{L} ] [ i ] = \begin{bmatrix} \Psi^s \\ \Psi^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{ss} & \mathcal{L}^{sr} \\ \mathcal{L}^{rs} & \mathcal{L}^{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^s \\ i^r \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

avec :

$$[ \Psi^s ] = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{bmatrix}, \quad [ \Psi^r ] = \Psi_r \quad (1.6)$$

$$[ \mathcal{L}^{ss} ] = \begin{bmatrix} L_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & L_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & L_{33} \end{bmatrix}, \quad [ \mathcal{L}^{sr} ] = \begin{bmatrix} M_{1r} \\ M_{2r} \\ M_{3r} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

$$[ i^s ] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}, \quad [ i^r ] = i_r \quad (1.8)$$

En choisissant la notation moteur, les tensions aux bornes des différentes phases sont reliées aux flux par :

$$[ v ] = [ R ] [ i^s ] + \frac{d}{dt} [ \Psi^s ] \quad (1.9)$$

où

$$[ v ]^t = [ v_1 \quad v_2 \quad v_3 ] \quad \text{et} \quad [ R ] = \begin{bmatrix} R_0 & 0 & 0 \\ 0 & R_0 & 0 \\ 0 & 0 & R_0 \end{bmatrix}$$

$R_0$  est la résistance d'une phase statorique.

La tension aux bornes de l'enroulement inducteur est donnée par :

$$v_r = R_r I_r + \frac{d\bar{\psi}_r}{dt} \quad (I.10)$$

où  $R_r$  est la résistance de l'inducteur.

Dans ce qui suit, nous nous limitons aux fondamentaux des développements en série de Fourier des différentes inductances et des courants.

Nous présentons toutefois, en annexe, un calcul des différents flux dans la machine, en tenant compte des différentes harmoniques.

Dans ces conditions, on a :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = I_m \begin{bmatrix} \cos(\omega t - \varphi) \\ \cos(\omega t - \varphi - 2\pi/3) \\ \cos(\omega t - \varphi - 4\pi/3) \end{bmatrix} \quad (I.11)$$

$$\begin{bmatrix} z_{ss} \\ z_{sr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 + L_1 \cos 2\theta & M_0 + M_1 \cos 2(\theta - \pi/3) \\ M_0 + M_1 \cos 2(\theta - \pi/3) & L_0 + L_1 \cos 2(\theta - 2\pi/3) \\ M_0 + M_1 \cos 2(\theta + \pi/3) & M_0 + M_1 \cos 2\theta \\ M_0 + M_1 \cos 2(\theta + \pi/3) & \\ M_0 + M_1 \cos 2\theta & \\ L_0 + L_1 \cos 2(\theta + 2\pi/3) & \end{bmatrix} \quad (I.12)$$

$$\begin{bmatrix} z_{sr} \\ z_{sr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0 + M_1 \cos \theta \\ M_0 + M_1 \cos (\theta - 2\pi/3) \\ M_0 + M_1 \cos (\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (I.13)$$

Nous allons maintenant exprimer les équations de fonctionnement de la MRV diphasée équivalente, en utilisant la transformation de Concordia :

à trois grandeurs  $G_a$ ,  $G_b$  et  $G_c$  de la machine triphasée, elle fait correspondre les transformées  $G_\alpha$  et  $G_\beta$  par :

$$\begin{bmatrix} G_\alpha \\ G_\beta \end{bmatrix} = T^t \begin{bmatrix} G_a \\ G_b \\ G_c \end{bmatrix} \quad (I.14)$$

Cette transformation qui permet le passage d'une machine triphasée à une machine diphasée équivalente, d'enroulements  $\alpha$  et  $\beta$ , doit conserver la force magnétomotrice, les puissances, ainsi que les pertes.

L'équivalence des Ampère-tours peut être obtenue en choisissant pour la machine diphasée un nombre de conducteurs  $N$  par pôle et par phase, relié à celui,  $N_0$ , de la machine triphasée par :

$$N = N_0 \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (I.15)$$

La valeur efficace  $I$  des courants diphasés est alors reliée à celle des courants triphasés  $I_0$  par :

$$I = I_0 \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (I.16)$$

La conservation des pertes Joules s'écrit :

$$3 R_0 I_0^2 = 2 R I^2 \quad (I.17)$$

La relation I.16 implique alors :

$$R = R_0 \quad (I.18)$$

La géométrie de la machine étant inchangée, cette transformation permet également de conserver les flux et les puissances.

La matrice normalisée de Concordia s'écrit alors :

$$T = \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad (I.19)$$

Cette matrice est orthogonale, car on a :  $T^{-1} = T^t$ .

Les équations I.9 et I.10 s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v\alpha \\ v\beta \end{bmatrix} &= R \begin{bmatrix} i\alpha \\ i\beta \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi\alpha \\ \Psi\beta \end{bmatrix} = \\ &R \begin{bmatrix} i\alpha \\ i\beta \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{L}'_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i\alpha \\ i\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{L}'_{sr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^r \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (I.20)$$

$$\begin{bmatrix} v^r \end{bmatrix} = R^t \begin{bmatrix} i^r \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{L}'_{rs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i\alpha \\ i\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{L}'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^r \end{bmatrix} \right\} \quad (I.21)$$

avec :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathcal{L}'_s \end{bmatrix} &= T^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{L}^s \end{bmatrix} T \\ \begin{bmatrix} \mathcal{L}'_{sr} \end{bmatrix} &= T^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{sr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}'_{rs} \end{bmatrix}^t \\ \begin{bmatrix} \mathcal{L}'_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathcal{L}^r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (I.22)$$

Compte tenu de nos hypothèses, les tensions  $v\alpha$  et  $v\beta$  sont données par :

$$\begin{bmatrix} v\alpha \\ v\beta \end{bmatrix} = v \sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix} \quad (I.23)$$

tandis que les courants dans la phase  $\alpha$  et  $\beta$  s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} i\alpha \\ i\beta \end{bmatrix} = I \sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos (\omega t - \varphi) \\ \sin (\omega t - \varphi) \end{bmatrix} \quad (I.24)$$

La transformation de Park appliquée aux grandeurs statoriques  $v\alpha$ ,  $v\beta$  et  $i\alpha$ ,  $i\beta$ , permet d'introduire les variables  $v_d$ ,  $v_q$  et  $i_d$ ,  $i_q$ , liées au rotor et indépendantes du temps en régime stationnaire.

La matrice de Park est définie par :

$$P(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (I.25)$$

Cette matrice est orthogonale et unitaire. On a :

$$P^{-1}(\theta) = P^t(\theta) = P(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (I.26)$$

Les courants  $i_d$  et  $i_q$  s'écrivent alors :

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = P(-\theta) \begin{bmatrix} i\alpha \\ i\beta \end{bmatrix} \quad (I.27)$$

Compte tenu de l'expression I.24, on obtient :

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = I \sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos(\theta - \omega t + \varphi) \\ -\sin(\theta - \omega t + \varphi) \end{bmatrix} \quad (I.28)$$

En régime de fonctionnement synchrone, on a :

$$\theta = \omega t + \theta_0 \quad (I.29)$$

Les courants  $i_d$  et  $i_q$  s'écrivent alors :

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = I \sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos(\theta_0 + \varphi) \\ -\sin(\theta_0 + \varphi) \end{bmatrix} = I \sqrt{2} \begin{bmatrix} \sin(\delta + \varphi) \\ \cos(\delta + \varphi) \end{bmatrix} \quad (I.30)$$

tandis que les tensions sont :

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = P(-\theta) \begin{bmatrix} v\alpha \\ v\beta \end{bmatrix} = V \sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos\theta_0 \\ -\sin\theta_0 \end{bmatrix} = V \sqrt{2} \begin{bmatrix} \sin\delta \\ \cos\delta \end{bmatrix} \quad (I.31)$$

où  $\delta$  représente le décalage interne définie par :

$$\delta = \frac{\pi}{2} + \theta_0 \quad (I.32)$$

Les flux  $\Psi_d$  et  $\Psi_q$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} &= P(-\theta) \begin{bmatrix} \Psi_\alpha \\ \Psi_\beta \end{bmatrix} = \\ &P(-\theta) [ \mathcal{L}'^s ] P(\theta) \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + P(-\theta) [ \mathcal{L}'^{sr} ] [ i^r ] \end{aligned} \quad (I.33)$$

c'est à dire :

$$\begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} = [ L' ] \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + [ M' ] [ i^r ] \quad (I.34)$$

$$\text{avec : } [ L' ] = P(-\theta) [ \mathcal{L}'^s ] P(\theta) = \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \quad (I.35)$$

$$[ M' ] = P(-\theta) [ \mathcal{L}'^{rs} ] = \begin{bmatrix} \sqrt{3/2} M_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (I.36)$$

$$L_d = L_0 - M_0 + \frac{3}{2} L_1$$

$$L_q = L_0 - M_0 - \frac{3}{2} L_1$$

$$M_1 = L_1$$

Les tensions diphasées exprimées dans le repère dq, et données par :

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \omega P(\pi/2) \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} \quad (I.37)$$

conduisent alors à :

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -L_q\omega \\ L_d\omega & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ E_r \end{bmatrix} \quad (I.38)$$

La fém  $E_r$  est créée par le flux d'excitation homopolaire. On a :

$$E_r = \sqrt{\frac{3}{2}} M_i' \omega I_r \quad (I.39)$$

$L_d \omega = X_d$  et  $L_q \omega = X_q$  sont, respectivement, les réactances directe et en quadrature.

Les courants et les tensions diphasés peuvent être exprimés par leur représentation complexe :

$$\bar{v} = -j e^{j\delta} (v_d + j v_q) \quad (I.40)$$

$$\bar{i} = i e^{-j\varphi} = -j e^{j\delta} (i_d + j i_q) \quad (I.41)$$

On a choisi  $\bar{v}$  comme origine des phases;  $v$  représente donc l'amplitude des tensions diphasées.  $\bar{i}$  est déphasé de  $\varphi$  par rapport à la tension.

Le calcul de la puissance apparente complexe  $\bar{s}$ , définie par :

$$\bar{s} = \bar{v} \bar{i}^* = 2 V I e^{j\varphi} = P + j Q \quad (I.42)$$

conduit à

$$P = \text{Re}(\bar{s}) = v_d i_d + v_q i_q \quad (I.43)$$

$$Q = \text{Im}(\bar{s}) = v_q i_d - v_d i_q \quad (I.44)$$

En utilisant I.38, on obtient :

$$P = R \left( \frac{i_d^2}{2} + \frac{i_q^2}{2} \right) + (X_d - X_q) i_d i_q + E_r i_q \quad (I.45)$$

$$Q = X_d i_d i_q + X_q i_q^2 + E_r i_d \quad (I.46)$$

### 1.3 ETUDE DE LA MACHINE A RELUCTANCE PURE

Les équations de fonctionnement peuvent être obtenues à partir des équations établies au paragraphe précédent en considérant un courant d'excitation nul.

Dans ce cas, on a :  $E_r = 0$ .

Nous nous intéressons aux deux fonctionnements suivants : à courant fixé et à tension fixée.

#### 1.3.1 Fonctionnement à courant fixé

A courant fixé, on peut exprimer les puissances  $P$  et  $Q$  en fonction de l'angle  $\gamma_0 = \theta_0 + \varphi$ .

En effet, en remplaçant les expressions de  $i_d$  et  $i_q$ , données par I.30 dans I.45 et I.46, on obtient :

$$P = 2RI^2 - (X_d - X_q) I^2 \sin 2\gamma_0 \quad (I.47)$$

$$Q = (X_d + X_q) I^2 + (X_d - X_q) I^2 \cos 2\gamma_0 \quad (I.48)$$

Le fonctionnement moteur est obtenu lorsque la puissance interne  $P'$ , donnée par :

$$P' = (X_d - X_q) I^2 \sin 2\gamma_0 \quad (I.49)$$

est positive. Il faut donc  $\sin 2\gamma_0 < 0$ .

Le fonctionnement générateur n'est possible que si  $P$  est négatif, c'est à dire lorsque  $\sin 2\gamma_0$  est supérieur à

$$\frac{2R}{X_d - X_q}$$



A courant fixé et pour  $\gamma_0$  variable, l'image de la puissance apparente  $\bar{s}$ , dans le plan complexe des puissances, décrit un cercle centré au point d'affixe  $( 2RI^2 + j (X_d + X_q) I^2 )$  et de rayon  $( X_d - X_q ) I^2$ .

La figure I.5 représente le diagramme d'impédance à courant fixé. Les puissances actives et réactives sont données par la mesure des segments MQ et MP, au facteur  $2 I^2$  près.

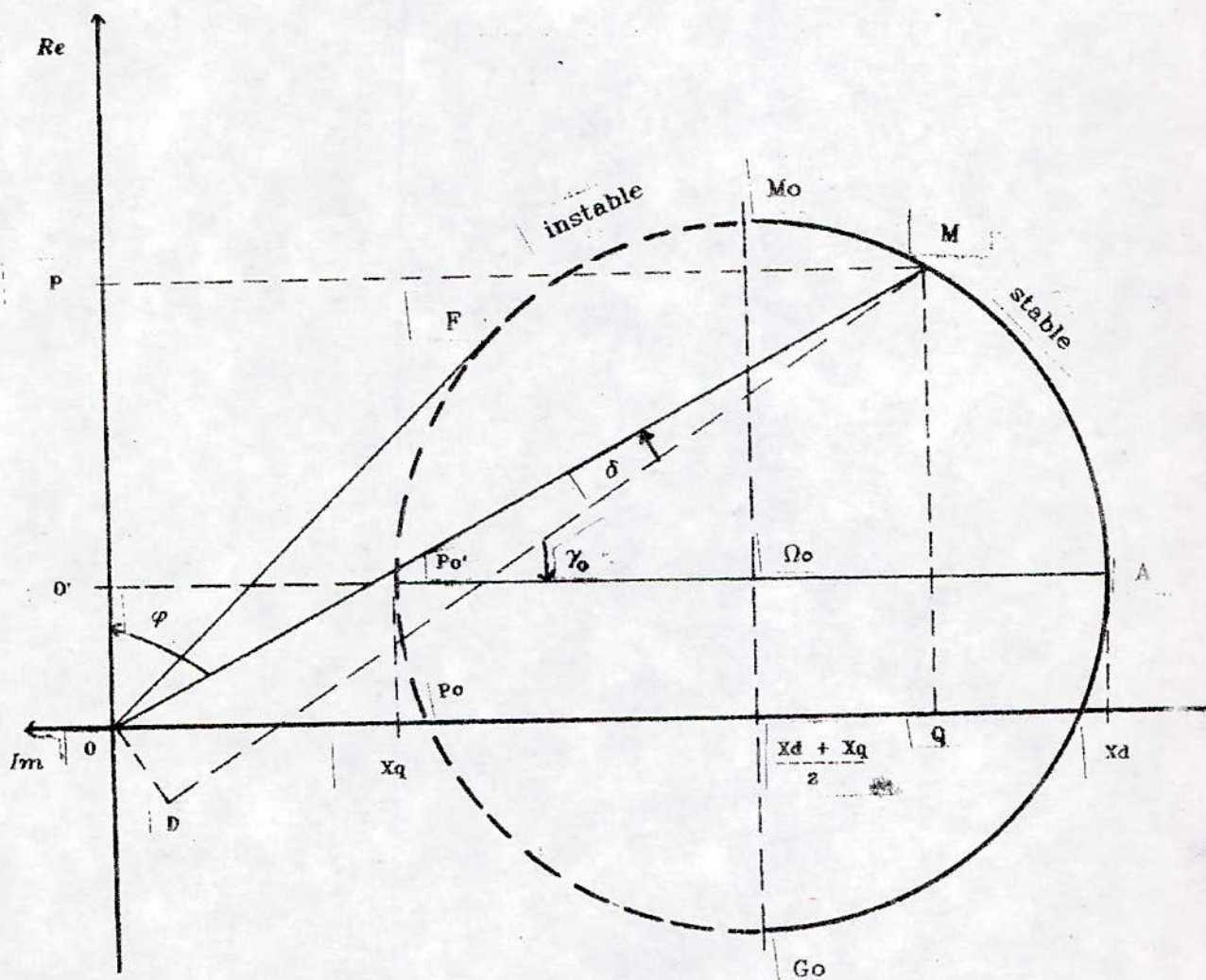


Figure I.5 : Diagramme d'impédance à courant fixé

Au point A, on a :  $\gamma_0 = 0$ , et la puissance interne est nulle.

Les limites de stabilité de fonctionnement, en moteur et en générateur, correspondant aux points  $M_0$  et  $G_0$  sont caractérisées par un angle  $|\gamma_0| = \pi/4$ .

Le déphasage  $\varphi$  est représenté par l'angle MOP. On constate que dans ce régime de fonctionnement, le facteur de puissance s'améliore avec la charge et atteint son maximum au point F situé dans la zone instable ( figure I.5 ).

Au point  $M_0$  (limite de stabilité), la puissance est maximale, et le facteur de puissance correspondant est égal à :

$$(\cos \varphi)_{M_0} = \frac{X_d - X_q + 2R}{\sqrt{2(X_d^2 + X_q^2) + 4R(X_d - X_q) + 4R^2}} \quad (I.50)$$

Dans le cas des machines de grande puissance, la résistance statorique R est négligeable devant les réactances  $X_d$  et  $X_q$ , et on peut écrire :

$$(\cos \varphi)_{M_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{X_d/X_q - 1}{\sqrt{(X_d/X_q)^2 + 1}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (I.51)$$

### I.3.2 Etude du fonctionnement à tension fixée

Dans ce mode de fonctionnement, le paramètre de réglage est l'angle interne  $\delta$ .

En effet, en transposant I.38 et en remplaçant les tensions  $v_d$  et  $v_q$  par leur expression donnée par I.31, les courants  $i_d$  et  $i_q$  s'expriment alors en fonction de l'angle  $\delta$ . On obtient :

$$i_d = \frac{V \sqrt{2}}{R^2 + X_d X_q} [ R \sin \delta + X_q \cos \delta ] \quad (I.52)$$

$$i_q = \frac{V \sqrt{2}}{R^2 + X_d X_q} [ -X_d \sin \delta + R \cos \delta ] \quad (I.53)$$

La représentation complexe du courant  $\bar{i}$  est alors donnée par :

$$\bar{i} = \frac{V \sqrt{2}}{R^2 + X_d X_q} \left[ \left( R - j \frac{X_d + X_q}{2} \right) + j \left( \frac{X_d - X_q}{2} \right) e^{j2\delta} \right] \quad (I.54)$$

Lorsque  $\delta$  varie, l'image de  $\bar{i}$  dans le plan complexe des courants décrit un cercle (figure I.6) centré au point  $\Omega_0$

d'affixe  $\frac{V \sqrt{2}}{R^2 + X_d X_q} \left( R - j \frac{X_d + X_q}{2} \right)$ , et ayant pour rayon

$$r = \frac{V \sqrt{2}}{R^2 + X_d X_q} \frac{(X_d - X_q)}{2}$$

Compte tenu de I.52 et I.53, les puissances active P et réactive Q, définies par I.43 et I.44 s'écrivent :

$$P = \frac{V^2}{R^2 + X_d X_q} ( 2R - (X_d - X_q) \sin 2\delta ) \quad (I.55)$$

$$Q = \frac{V^2}{R^2 + X_d X_q} ( (X_d + X_q) - (X_d - X_q) \cos 2\delta ) \quad (I.56)$$

tandis que la puissance P' est donnée par :

$$P' = \frac{2 V^2 (X_d - X_q)}{(R^2 + X_d X_q)^2} [ (R^2 - X_d X_q) \sin 2\delta + R (X_d + X_q) \cos 2\delta - R (X_d - X_q) ] \quad (I.57)$$

Le couple  $\Gamma$  est relié à P' par :

$$\Gamma = \frac{P}{\omega} P' \quad (I.58)$$

c'est à dire :

$$\Gamma = \frac{P V^2 (X_d - X_q)}{\omega (R^2 + X_d X_q)^2} [ (R^2 - X_d X_q) \sin 2\delta + R (X_d + X_q) \cos 2\delta - R (X_d - X_q) ] \quad (I.59)$$

Au point de fonctionnement M (figure I.6), les mesures des segments OP et OQ donnent les puissances active P et réactive Q, au facteur 2V près.

En fonctionnement moteur, l'angle interne  $\delta$  est négatif, tandis que le fonctionnement générateur n'est possible que si 2R est inférieur à  $X_d - X_q$ .

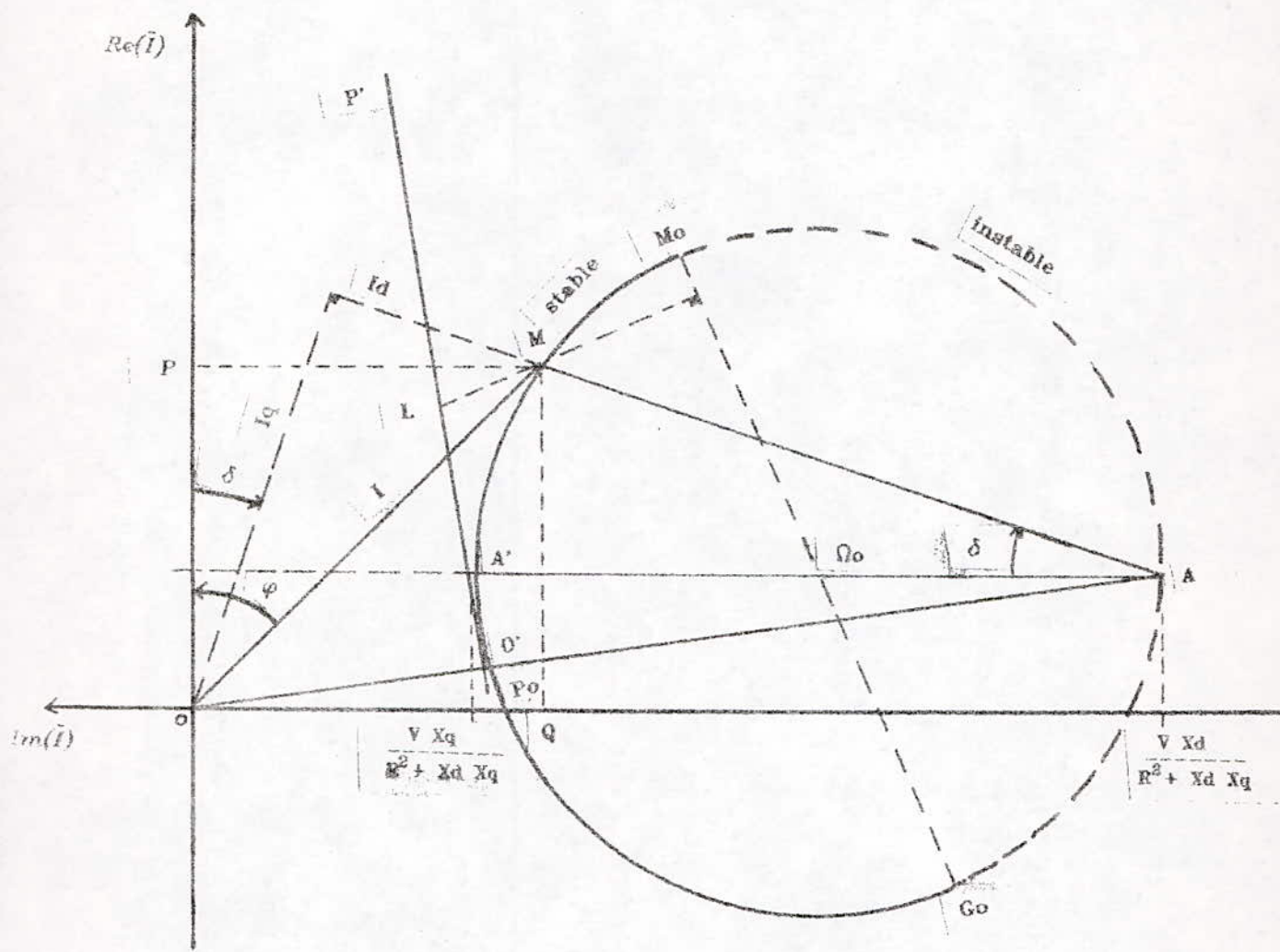


Figure 1.6 : Diagramme des courants à tension fixée

Au point  $O'$ , intersection du cercle et de la droite  $OA$ , la puissance interne est nulle; l'angle interne correspondant est égal à :

$$\delta_0 = \pi/2 - \zeta_d \quad (\delta_0 \geq 0) \quad (I.60)$$

où

$$\zeta_d = \text{Arctg} \frac{X_d}{R} \quad (I.61)$$

Le point  $O'$  caractérise ainsi la limite du fonctionnement moteur.  
 La puissance active  $P$  est nulle au point  $P_0$ , où

$$\delta_{O'} = \frac{1}{2} \operatorname{Arccsin} \frac{2R}{X_d - X_q} \quad (I.62)$$

c'est la limite du fonctionnement générateur.

Pour un point de fonctionnement appartenant à l'arc  $O'P_0$ ,  
 la machine absorbe simultanément de la puissance électrique et  
 de la puissance mécanique.

Les limites de stabilité en moteur et en générateur  
 correspondent respectivement aux points  $M_0$  et  $G_0$  diamétralement  
 opposés sur le cercle (figure I.6).

Aux points  $M_0$  et  $G_0$ , la puissance interne  $P'$ , donnée par I.57  
 passe par un extrémum et les valeurs de l'angle interne  $\delta$  en ces  
 points peuvent être obtenues en résolvant l'équation :

$$\frac{\partial P'}{\partial \delta} = 0 \quad (I.63)$$

d'où la condition :

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\xi_d + \xi_q}{2} \leq \delta \leq \frac{3\pi}{4} - \frac{\xi_d + \xi_q}{2} \quad (I.64)$$

avec  $\xi_q = \operatorname{Arctg} \frac{X_q}{R}$

Le lieu de fonctionnement stable est donc le demi-cercle  $M_0MGO_0$ .

Soit  $O'P'$  la tangente au cercle en  $O'$  (figure I.7), les droites  $OP$ ,  $O'P'$  et  $GoMo$  sont alors concourantes au point  $T$  de coordonnées  $(0, V/2R)$ .

Soit  $L$  l'intersection de  $O'P'$  avec la perpendiculaire à  $MoGo$  menée du point de fonctionnement  $M$  (figure I.7), on peut montrer que  $O'L$  donne la puissance interne  $P'$  au facteur  $2V$  près.

$O'P'$  peut donc être utilisée comme droite des couples.

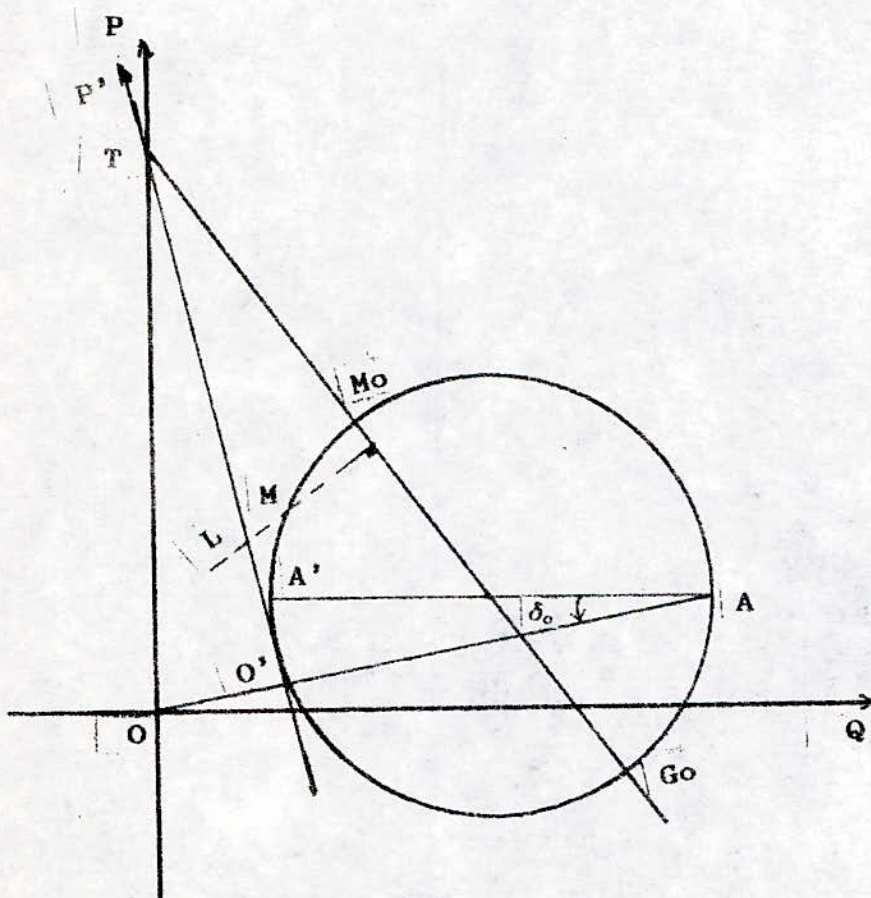


Figure I.7

#### I.4 ETUDE DE LA MACHINE HOMOPOLAIRE

Les équations de fonctionnement sont celles établies au paragraphe I.2.

Les expressions des tensions diphasées sont donc :

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -X_q \\ X_d & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ E_r \end{bmatrix} \quad (I.65)$$

Elles sont analogues à celles de la machine synchrone à pôles saillants, classique.

Toutefois, nous verrons au chapitre II, que pour notre machine,  $X_d$  peut être inférieure à  $X_q$ .

##### I.4.1 Etude du fonctionnement à tension fixée

En transposant I.65, on a :

$$i_d = \frac{R v_d + X_q (v_q - E_r)}{R^2 + X_d X_q} \quad (I.66)$$

$$i_q = \frac{-X_d v_d + R (v_q - E_r)}{R^2 + X_d X_q} \quad (I.67)$$

Compte tenu de I.31, on peut écrire :

$$i_d = \frac{R V \sqrt{2} \sin \delta + X_q (V \sqrt{2} \cos \delta - E_r)}{R^2 + X_d X_q} \quad (I.68)$$

$$i_q = \frac{-X_d V \sqrt{2} \sin \delta + R (V \sqrt{2} \cos \delta - E_r)}{R^2 + X_d X_q} \quad (I.69)$$



En prenant la tension comme origine des phases, la représentation complexe du courant s'écrit :

$$\bar{i} = \frac{V \sqrt{2}}{R^2 + X_d X_q} \left[ (R - j \frac{X_d + X_q}{2}) + j (\frac{X_d - X_q}{2}) e^{j2\delta} - \frac{E_r}{V \sqrt{2}} (R - jX_q) e^{j\delta} \right] \quad (1.70)$$

A  $E_r$  fixé et  $\delta$  variable, le lieu du point M, image de  $\bar{i}$  dans le plan complexe est une conchoïde de cercle (figures I.8 et I.9). Le cercle de base des conchoïdes est centré au point  $\Omega$  de coordonnées  $(\frac{\sqrt{2} V R}{R^2 + X_d X_q}, \frac{\sqrt{2} V (X_d + X_q)}{2 (R^2 + X_d X_q)})$ , et a pour rayon

$$r = \frac{\sqrt{2} V}{R^2 + X_d X_q} \frac{|X_d - X_q|}{2}.$$

Il correspond au lieu de fonctionnement à excitation nulle ( $E_r = 0$ ).

Soit A' le point de fonctionnement sur le cercle de base correspondant à  $\delta = 0$ . Le point de base des conchoïdes  $\Omega'$  est extérieur au segment OA' si  $X_d > X_q$  (figure I.8); il est compris entre O et A' dans le cas contraire (figure I.9).

Soit M' le point sur le cercle de base obtenu pour un angle interne  $\delta$  donné. Le point de fonctionnement M sur la conchoïde de cercle ( $E_r = cte$ ) se trouve à l'intersection de la droite  $\Omega'M'$  avec la conchoïde (figures I.8 et I.9).

Pour des courants d'excitation croissants, le diagramme de fonctionnement se déplace vers les valeurs négatives de la puissance réactive. Le facteur de puissance est ainsi amélioré.

Soit T le point d'intersection de la tangente au cercle de base issue de  $\Omega'$ , avec l'axe des ordonnées. On peut montrer que le lieu des points de fonctionnement à puissance interne nulle décrit un cercle centré en T et passant par l'origine O et le point de base  $\Omega'$  (figures I.8 et I.9).

La puissance interne s'exprime par :

$$P' = [ (X_d - X_q) i_d + E_r ] i_q \quad (I.71)$$

On en déduit l'expression du couple par :

$$\Gamma = \frac{P}{\omega} [ (X_d - X_q) i_d + E_r ] i_q \quad (I.72)$$

Le couple  $\Gamma$  peut s'exprimer uniquement en fonction de V, E et  $\delta$ .

On obtient :

$$\Gamma = \frac{P V^2}{\omega (R^2 + X_d X_q)^2} \left[ (X_d - X_q) [ (R^2 - X_d X_q) \sin 2\delta + R(X_d + X_q) \cos 2\delta - 2R(X_d - X_q) ] + \frac{2E_r}{V} [ (R^2 + 2X_q^2 - X_d X_q) R \cos \delta - (2R^2 X_d + X_d X_q^2 - R^2 X_q) \sin \delta ] - 2 \frac{E_r^2}{V^2} R (R^2 + X_q^2) \right] \quad (I.73)$$

qui se réduit à

$$\Gamma = - \left[ \frac{V^2 P}{\omega} \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \frac{\sin 2\delta}{2} + \frac{E_r V P}{\omega X_d} \sin \delta \right] \quad (I.74)$$

lorsqu'on néglige la résistance statorique devant  $X_d$  et  $X_q$ .

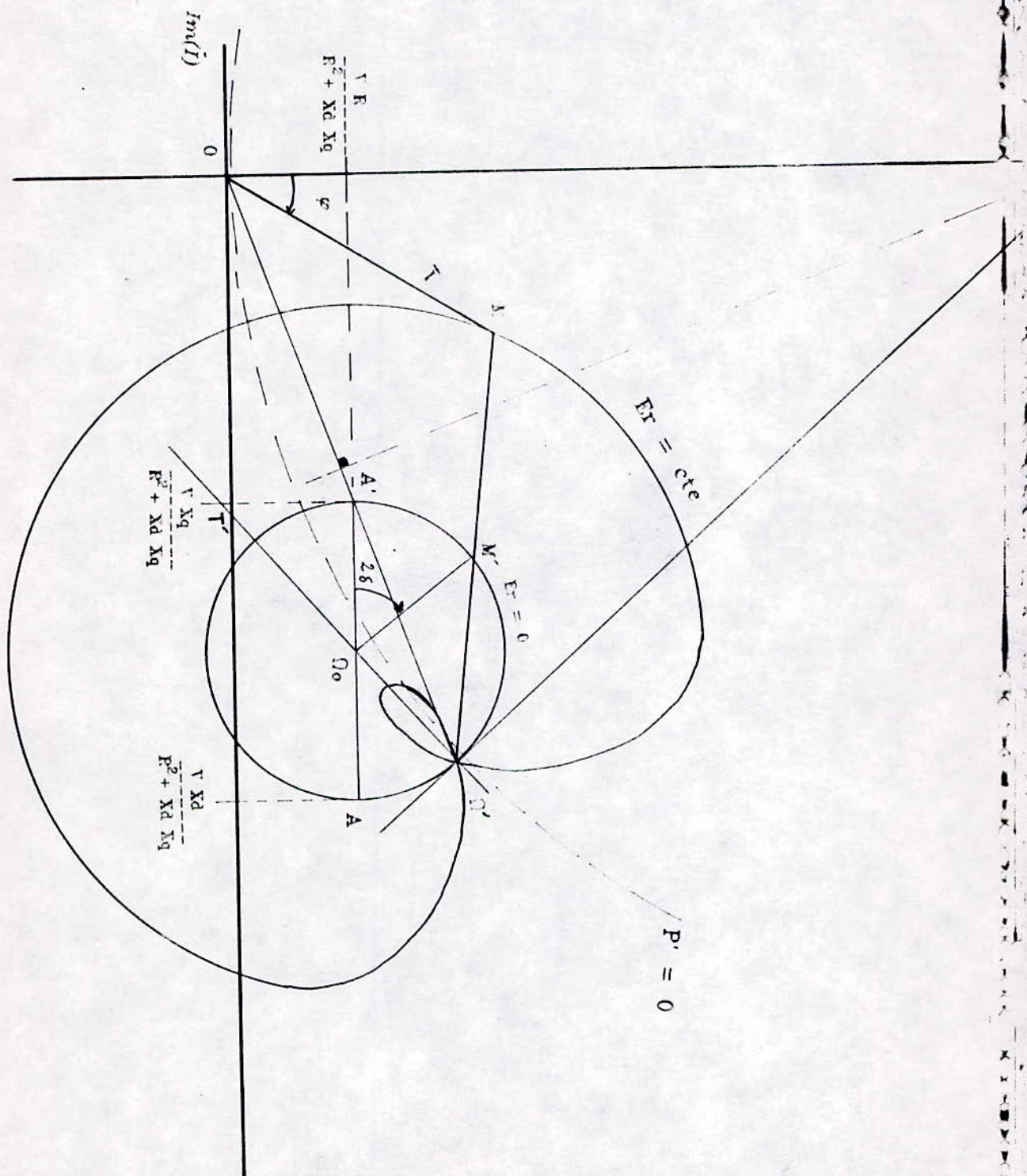


Figure 1.8 : Diagramme des courants à tension fixée.  $X_d > X_q$

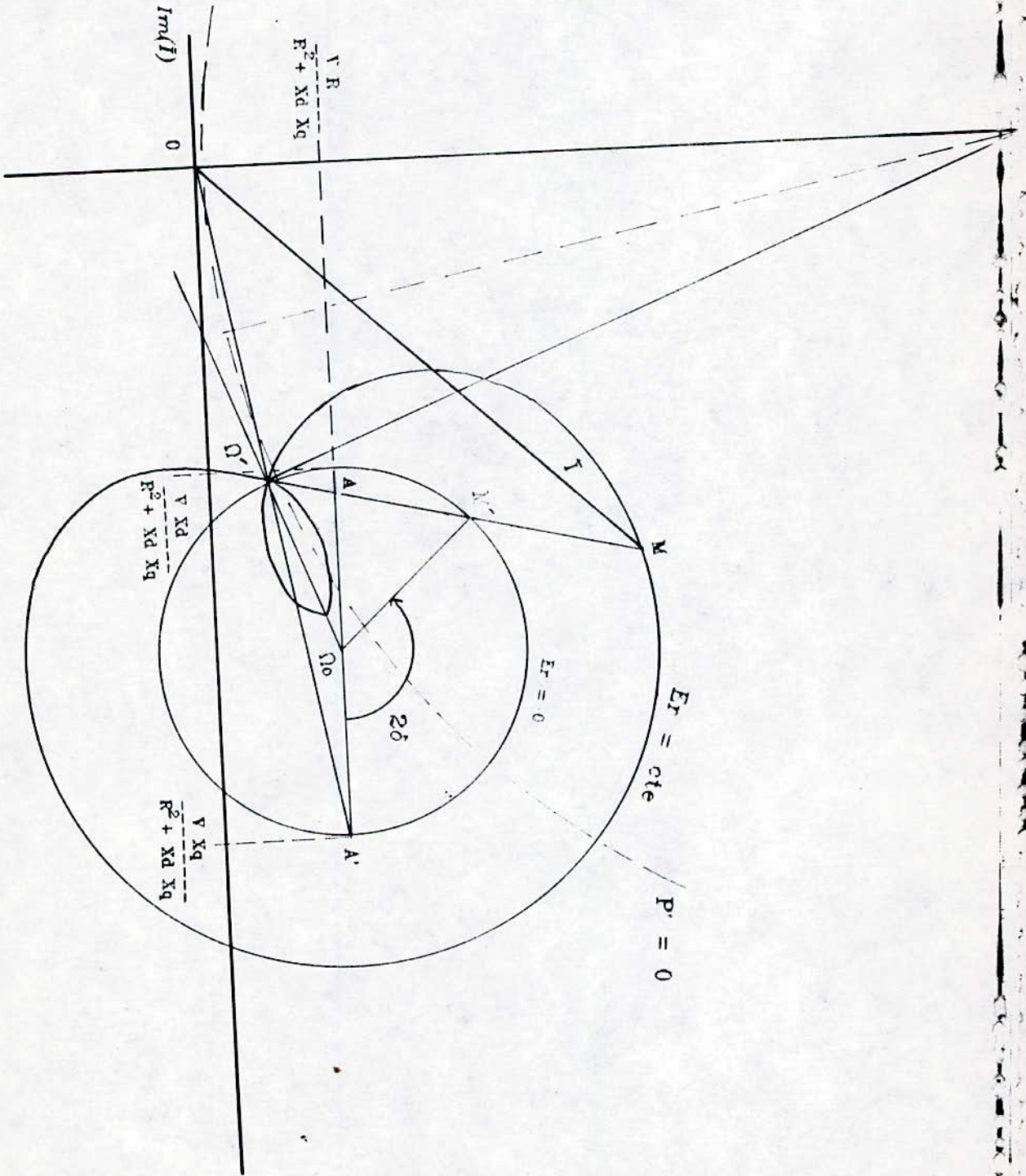


Figure 1.9 : Diagramme des courants à tension fixée.  $X_d < X_q$

## CONCLUSION

Nous avons montré que les machines à réluctance variable (avec ou sans excitation homopolaire) admettent un même diagramme de fonctionnement que les machines hétéropolaires classiques.

Toutefois, ces machines diffèrent par les valeurs respectives de  $X_d$  et  $X_q$  qui donnent lieu à deux types de diagrammes nettement distincts.

La connaissance de ces réactances est nécessaire à la détermination des performances de la machine. Nous nous proposons de les calculer dans le prochain chapitre.

## CHAPITRE II

### CALCUL DES INDUCTANCES DE LA MRV A STATOR LISSE

#### II.1 INTRODUCTION

#### II.2 MODELE D'ETUDE

#### II.3 ETUDE DE LA MACHINE HETEROPOLAIRE

II.3.1 Détermination de l'inductance directe

II.3.2 Détermination de l'inductance en quadrature

II.3.3 Variation de l'induction normale à la surface du stator

II.3.4 Variations des inductances en fonction des paramètres géométriques

II.3.5 Optimisation de la largeur de la dent rotorique

#### II.4 ETUDE DE LA MACHINE HOMOPOLAIRE

II.4.1 Détermination de l'inductance directe

II.4.2 Détermination de l'inductance en quadrature

II.4.3 Variation des inductances en fonction des paramètres géométriques

II.4.4 Variation de l'induction normale à la surface du stator

## II.1 INTRODUCTION

Les performances des MRV peuvent être déterminées lorsque les réactances directe et transversale sont connues. Cependant, le calcul de ces réactances est ardu car il nécessite la résolution des équations du champ électromagnétique dans un milieu à géométrie complexe.

Différents modèles de la MRV hétéropolaire existent. Les flux sont obtenus à l'aide d'hypothèses sur le trajet des lignes de champ dans l'entrefer [2,5]. Par ailleurs, le flux direct dans la zone à grand entrefer est négligé [4], ou considéré comme une perturbation du flux principalement canalisé dans le petit entrefer.

Ces modèles peuvent donc conduire à des erreurs appréciables pour les faibles angles d'ouverture de la dent rotorique.

Nous proposons une méthode de calcul des inductances  $L_d$  et  $L_q$ , basée sur le développement en série de Fourier de la composante axiale du potentiel vecteur dans les zones à petit et à grand entrefer; les conditions aux limites et d'interfaces conduisent alors à un système d'équations que nous résolvons itérativement.

Cette méthode est développée pour le calcul de la machine à réluctance pure [9] ainsi que pour la MRV homopolaire.

## II.2 MODELE D'ETUDE

La machine étudiée présente un stator lisse et un rotor cylindrique possédant  $Z_R$  dents régulièrement espacées et limitées par des droites radiales (figure II.1).

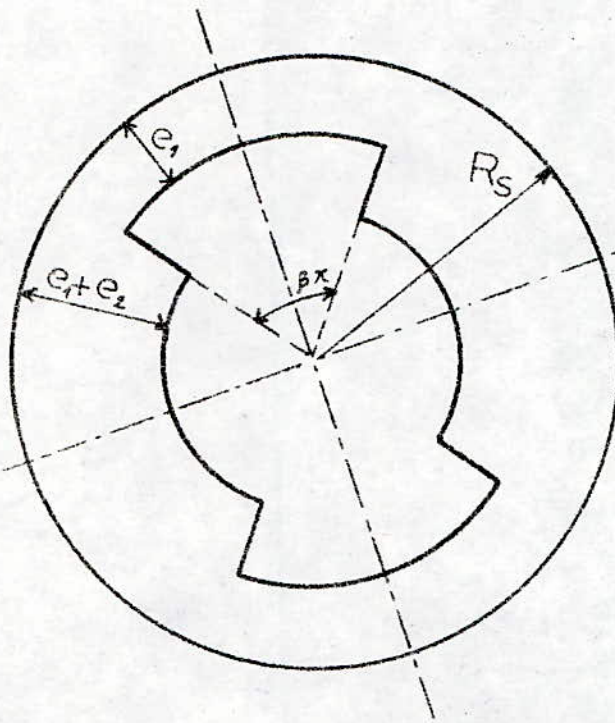


Figure II.1 : MRV à  $Z_R = 2$

$R_s$  est le rayon intérieur du stator;

$e_1$  et  $(e_1 + e_2)$  désignent les épaisseurs des entrefers;

L'angle d'ouverture d'une dent rotorique vaut  $\beta\pi$ .

On étudie la machine sur une structure développée en admettant que son rayon de courbure est infini. Cette hypothèse fréquemment utilisée conduit à des erreurs acceptables tant que l'épaisseur de l'entrefer est faible devant le rayon de la machine [3,5,16].



On admet que la machine est suffisamment grande pour qu'on puisse considérer qu'elle présente une symétrie cylindrique suivant son axe de rotation. Sous cette condition, les diverses grandeurs électromagnétiques ne dépendent plus alors de la direction axiale  $z$ .

On introduit l'axe  $oy$  normal et dirigé vers le stator, et l'axe tangentiel  $ox$  lié au rotor.

Le comportement de la machine peut être ainsi étudié dans un plan de section droite, à partir du potentiel vecteur  $\vec{A}$  qui ne comporte qu'une seule composante axiale, indépendante de  $z$ , que l'on notera  $A(x,y)$ .

Nous adoptons de plus les hypothèses suivantes :

— l'enroulement statorique est à répartition sinusoïdale et il est alimenté par des courants équilibrés à variation sinusoïdale par rapport au temps. On se limite ainsi au fondamental de la densité de courant à la surface du stator.

— les perméabilités magnétiques du stator et du rotor sont infinies.

A la surface du rotor, la composante tangentielle du champ magnétique est donc nulle, ce qui se traduit par la condition de Neumann :

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0 \quad \text{où } \vec{n} \text{ est un vecteur unitaire normal à la surface du rotor.}$$

A la surface du stator, il y a discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique, on a :

$$\frac{\partial A}{\partial n} = -\mu_0 H_t = -\mu_0 J_s$$

où  $H_t$  est la composante tangentielle du champ magnétique à la surface du stator,

et  $J_s$  la densité superficielle de courant.

Dans ces conditions, on obtient le modèle représenté à la figure II.2.

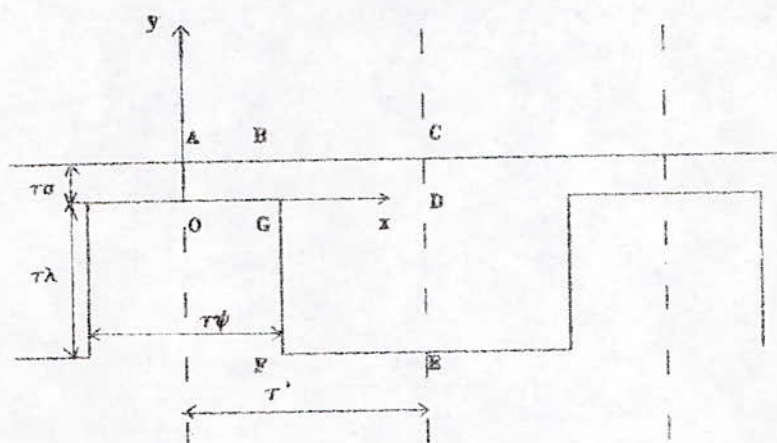


Figure II.2 : Modèle d'étude

$\sigma$  et  $(\sigma+\lambda)$  sont, respectivement, les épaisseurs du petit et du grand entrefer, rapportées au pas polaire  $\tau$  de la machine.

$\psi$  est l'ouverture de la dent rotorique rapportée à  $\tau$ .

Lorsque le rotor se place suivant les positions longitudinale et transversale, il y a symétrie de la densité de courant par rapport aux axes OA et CE du rotor (figure II.3); on peut alors limiter le domaine d'étude à un intervalle de longueur  $\tau'$  compris entre les axes de symétries OA et CE.

L'entrefer est alors délimité par le contour OABCDEFGO représenté à la figure II.3.

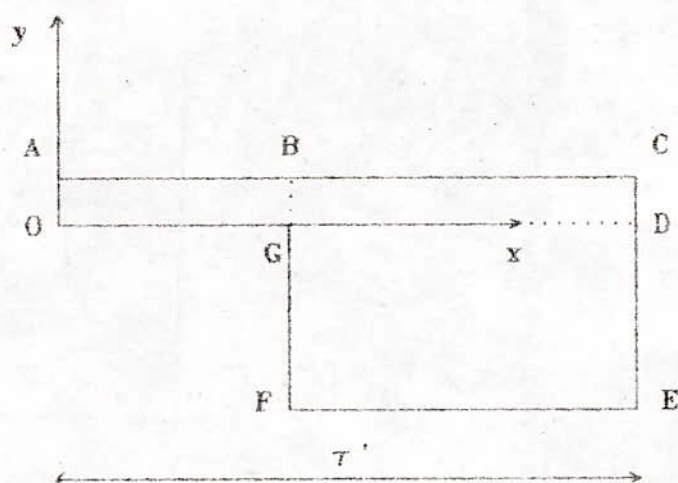


Figure II.3 : Domaine d'étude

On introduit :

la région 1, définie par :

$$0 \leq x \leq \tau' \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq \tau\sigma$$

et la région 2, définie par :

$$\tau\psi/2 \leq x \leq \tau' \quad \text{et} \quad -\tau\lambda \leq y \leq \tau\sigma$$

Ces deux régions admettent en commun le rectangle GBCD.

### II.3 ETUDE DE LA MACHINE HETEROPOLAIRE

Le stator est alimenté par une distribution de courant à  $2p$  pôles, et le rotor comporte  $Z_R$  dents, avec  $Z_R = 2p$ .

Les axes direct  $d$  et en quadrature  $q$  sont confondus avec les axes de symétrie de la dent et de l'encoche rotoriques (figure II.4); ils correspondent respectivement aux perméances maximale et minimale de l'entrefer.

Le domaine d'étude de la structure développée (figure II.3) est alors limité à une largeur  $\tau' = \tau/2$ .

Compte tenu des hypothèses précédemment admises, le tracé approximatif des lignes de champ dans l'entrefer, lorsque le rotor se place suivant la position directe, est donné par la figure II.4.

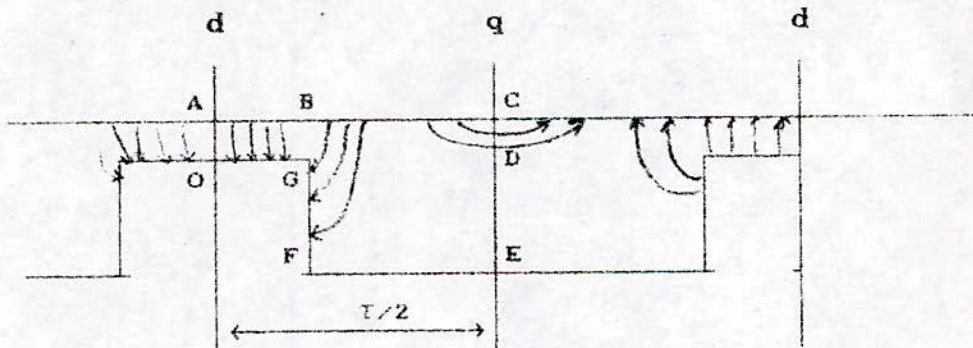


Figure II.4 : Allure des lignes de champ  
Rotor en position directe

OA est une ligne de champ, le potentiel vecteur  $y$  est constant et sa valeur se ramène au choix du potentiel au centre du rotor. On peut choisir :

$$A = 0 \quad \text{sur OA}$$

Sur la surface EC, seule la composante normale du champ existe, ce qui se traduit par :

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0 \quad \text{sur CE}$$

A la surface OGFE du rotor, la composante tangentielle du champ est nulle. On a :

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0 \quad \text{sur la surface OGFE.}$$

A la surface du stator ( $y = \tau\sigma$ ), la composante tangentielle du champ est imposée par la densité de courant que nous avons supposé distribuée sinusoidalement. On a (figure II.5) :

$$H_t = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A}{\partial n} = J_S = J_0 \sin \pi x / \tau \quad (II.1)$$

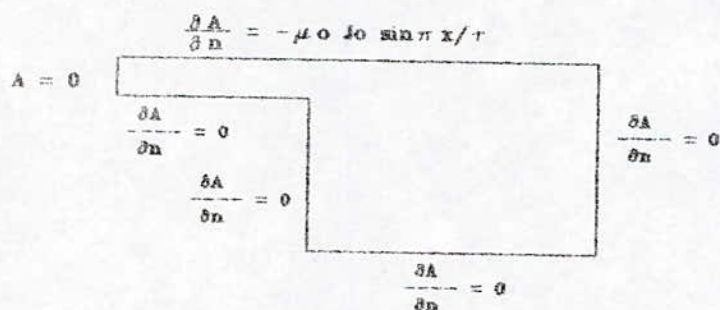


Figure II.5 : Conditions aux limites.  
Rotor en position directe.

Lorsque le rotor se place suivant la position en quadrature, le tracé approximatif des lignes de champ dans l'entrefer est donné par la figure II.6.

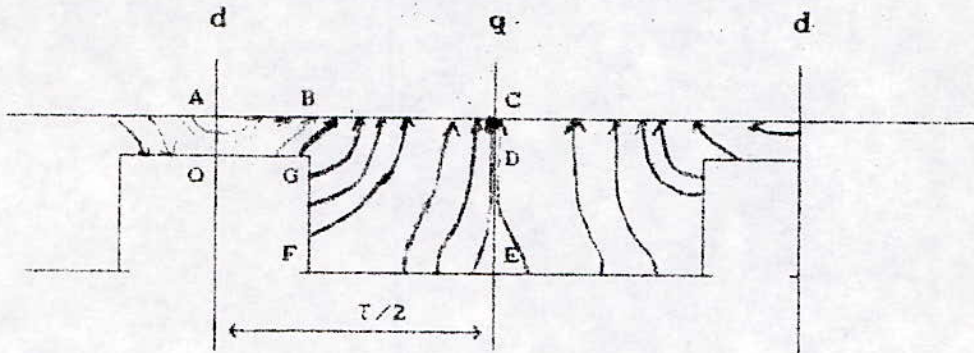


Figure II.6 : Allure des lignes de champ  
Rotor en position en quadrature

A la surface du stator, la composante tangentielle du champ magnétique est imposée par la densité de courant distribuée sinusoidalement. On a :

$$J_s = J_0 \cos \pi x / \tau \quad (II.2)$$

CE est une ligne de champ, et sur les surfaces OA, OG, GF et FE, seule la composante normale du champ existe.

Les autres conditions aux limites pour le problème q sont rappelées par la figure II.7.

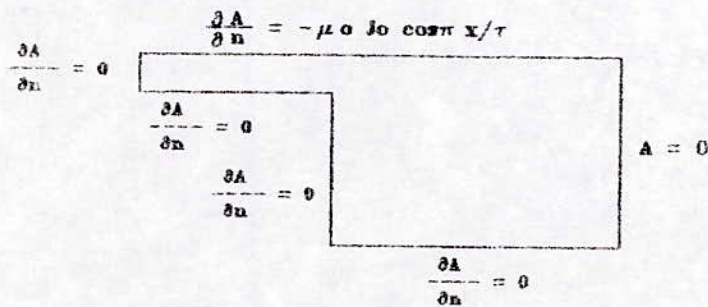


Figure II.7 : Conditions aux limites.  
Rotor en position en quadrature.

### II.3.1 Détermination de l'inductance directe

Dans l'entrefer, le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est solution de l'équation de Laplace. Compte tenu de toutes les symétries ainsi que de la parité de la densité de courant  $J_s$ , on choisit les développements du potentiel vecteur, dans chacune des deux régions, comme suit :

$$A_{1d} = A_0 \left[ \frac{\text{ch } \pi y / \tau}{\text{sh } \pi \sigma} \sin \pi x / \tau + \sum_n \alpha_n f(y, n) \sin n \pi x / \tau \right] \quad (\text{II.3})$$

dans la région 1, définie par :  $0 \leq x \leq \tau/2$  et  $0 \leq y \leq \tau\sigma$ ,

$$A_{2d} = A_0 \left[ \frac{\text{ch } (\pi y / \tau + \lambda)}{\text{sh } \pi \varepsilon} \sin \pi x / \tau + \sum_m \beta_m g(x, m) \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} (y / \tau + \lambda) \right] \quad (\text{II.4})$$

dans la région 2, définie par  $\tau\psi/2 \leq x \leq \tau/2$  et  $-\tau\lambda \leq y \leq \tau\sigma$ .

Les premiers termes de  $A_{1d}$  et  $A_{2d}$  correspondent au potentiel que l'on obtiendrait pour une machine à rotor lisse possédant un entrefer égal à  $\tau\sigma$  ou  $\tau\varepsilon$  respectivement.

$A_{1d}$  et  $A_{2d}$  étant solution de l'équation de Laplace, on peut montrer que l'on a :

$$A_{1d} = A_0 \left[ \frac{\text{ch } \pi y / \tau}{\text{sh } \pi \sigma} \sin \pi x / \tau + \sum_n \frac{\alpha_n}{n} \frac{\text{ch } n\pi (y / \tau - \sigma)}{\text{sh } n\pi \sigma} \sin n \pi x / \tau \right] \quad (\text{II.5})$$

$$A_{2d} = A_0 \left[ \frac{\text{ch } (\pi y / \tau + \lambda)}{\text{sh } \pi \varepsilon} \sin \pi x / \tau + \sum_m \frac{\beta_m}{m} \frac{\text{ch } \frac{m\pi}{2\varepsilon} (1 - 2x / \tau)}{\text{sh } \frac{m\pi}{2\varepsilon} (1 - \psi)} \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} (y / \tau + \lambda) \right] \quad (\text{II.6})$$

L'expression II.5 satisfait toutes les conditions aux limites relatives à la région 1 (figure II.5), sauf sur la surface OGD, définie par  $y = 0$ . Sur cette surface, la condition pour  $A_{1d}$  est obtenue en utilisant la dérivée normale définie par le potentiel  $A_{2d}$ .

L'expression II.6 satisfait à toutes les conditions aux limites relatives à la région 2 (figure II.7), sauf sur la surface FGB, définie par  $x = \tau\psi/2$ . Sur cette surface, la condition pour  $A_{2d}$  est obtenue en utilisant la dérivée normale définie par le potentiel  $A_{1d}$ .

Sur la surface définie par  $y = 0$ , la dérivée normale de  $A_{1d}$ , obtenue à partir de l'équation II.5, s'écrit :

$$\frac{\partial A_{1d}}{\partial y} (x,y=0) = - A_0 \frac{\pi}{\tau} \sum_n \alpha_n \sin n\pi x/\tau \quad (\text{II.7})$$

$$0 \leq x \leq \tau/2$$

tandis que celle de  $A_{2d}$  est obtenue à partir de l'équation II.6. On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_{2d}}{\partial y} (x,y=0) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \tau\psi/2 \\ \frac{\partial A_{2d}}{\partial y} (x,y=0) = A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{\text{sh } \pi\lambda}{\text{sh } \pi\varepsilon} \sin \pi x/\tau - \sum_m \frac{\beta_m}{\varepsilon} \frac{\text{ch } \frac{m\pi}{2\varepsilon} (1 - 2x/\tau)}{\text{sh } \frac{m\pi}{2\varepsilon} (1 - \psi)} \sin \frac{m\pi\lambda}{\varepsilon} \right] \end{array} \right.$$

$$\text{pour } \tau\psi/2 \leq x \leq \tau/2$$

(II.8)



La figure II.8 représente l'allure de la variation de  $\frac{\partial A_{2d}}{\partial y}(x, y=0)$  en fonction de  $x$  sur l'intervalle  $[-\tau, \tau]$ .

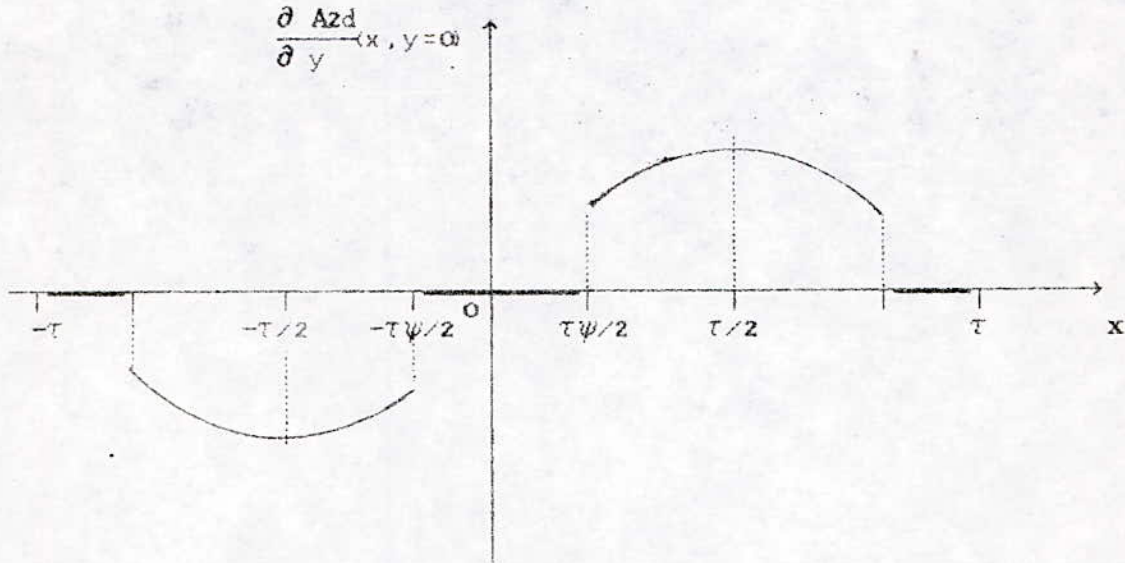


Figure II.8

La fonction représentée est impaire :

$$\frac{\partial A_{2d}}{\partial y}(x, y=0) = - \frac{\partial A_{2d}}{\partial y}(-x, y=0)$$

et satisfait à :

$$\frac{\partial A_{2d}}{\partial y}(x \pm \tau, y=0) = - \frac{\partial A_{2d}}{\partial y}(x, y=0)$$

Son développement en série de Fourier sur l'intervalle  $2\tau$  s'écrit alors :

$$\frac{\partial A_{2d}}{\partial y}(x, y=0) = A_0 \frac{\pi}{\tau} \sum_n (a_n - \sum_m b_{nm}) \sin n\pi x/\tau \quad (II.9)$$

Les coefficients  $a_n$  et  $b_{nm}$  proviennent, respectivement, des développements en série de Fourier des termes

$$\frac{\text{sh } \pi \lambda}{\text{sh } \pi \varepsilon} \sin \pi x / \tau \quad \text{et} \quad \frac{\sin m \pi \lambda / \varepsilon}{\varepsilon} \frac{\text{ch } \frac{m \pi}{2 \varepsilon} (1 - 2x / \tau)}{\text{sh } \frac{m \pi}{2 \varepsilon} (1 - \psi)}$$

intervenant dans l'expression II.8.

On obtient :

$$a_n = \frac{\text{sh } \pi \lambda}{\text{sh } \pi \varepsilon} \frac{4}{\pi (n^2 - 1)} \left( n \sin \pi \psi / 2 \cos \frac{n \pi \psi}{2} - \sin \frac{n \pi \psi}{2} \cos \pi \psi / 2 \right) \quad n \geq 3$$

$$a_1 = \frac{\text{sh } \pi \lambda}{\text{sh } \pi \varepsilon} \frac{\pi (1 - \psi) + \sin \pi \psi}{\pi}$$

$$b_{nm} = \frac{\sin m \pi \lambda / \varepsilon}{\varepsilon} \frac{4}{\pi (n^2 + m^2 / \varepsilon^2)} \left( n \cos \frac{n \pi \psi}{2} \text{cth } \frac{m \pi}{2 \varepsilon} (1 - \psi) + \frac{m}{\varepsilon} \sin n \pi \psi / 2 \right)$$

$$n = 1, 3, 5, \dots$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

L'identification des expressions II.7 et II.9 permet alors d'écrire la relation suivante entre les coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_m$  :

$$a_n - \sum_m \beta_m b_{nm} = -\alpha_n \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

(II.10)

Sur la surface définie par  $x = \tau\psi/2$ , l'expression de  $\frac{\partial A_{id}}{\partial x}$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_{id}}{\partial x} (x=\tau\psi/2, y) = 0 \quad \text{pour } -\tau\lambda \leq y \leq 0 \\ \frac{\partial A_{id}}{\partial x} (x=\tau\psi/2, y) = A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{\text{ch } \pi y/\tau}{\text{sh } \pi\sigma} \cos \pi\psi/2 + \sum_n \alpha_n \frac{\text{ch } n\pi(y/\tau - \sigma)}{\text{sh } n\pi\sigma} \cos n\pi\psi/2 \right] \quad \text{pour } 0 \leq y \leq \tau\sigma \end{array} \right.$$

(II.11)

La figure II.9 représente l'allure de la variation de  $\frac{\partial A_{id}}{\partial x} (x=\tau\psi/2, y)$  sur l'intervalle  $[-\tau\lambda, \tau(2\sigma + \lambda)]$ .

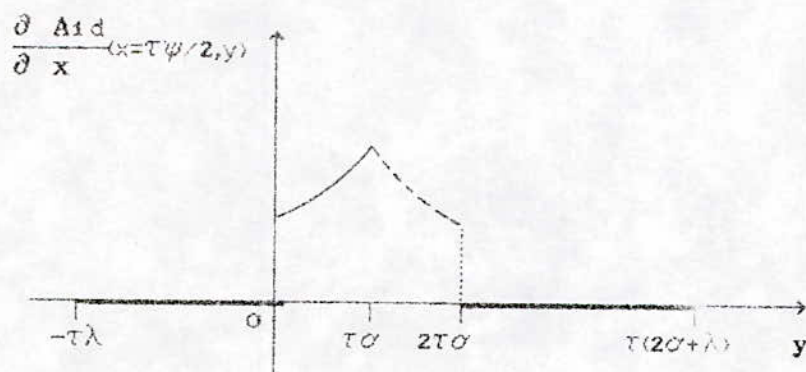


Figure II.9

La fonction donnée par II.11 est prolongée par symétrie par rapport à  $y = \tau\sigma$  dans l'intervalle  $[\tau\sigma, \tau(2\sigma + \lambda)]$ .

Nous considérons ainsi un modèle dans lequel sont juxtaposées un nombre infini de machines identiques suivant la direction  $y$ .

Ainsi, le développement en série de Fourier de

$$\frac{\partial A_{1d}}{\partial x}(x=\tau\psi/2, y), \quad \text{sur l'intervalle } [ \tau\sigma, \tau(2\sigma + \lambda) ],$$

est de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{1d}}{\partial x}(x=\tau\psi/2, y) = A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{c_0}{2} + \sum_n \alpha_n \frac{d_{0n}}{2} + \right. \\ \left. \sum_m (c_m + \sum_n \alpha_n d_{mn}) \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} (y/\tau + \lambda) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.12-a})$$

Avec :

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{2 \cos \pi\psi/2}{\varepsilon\pi (1 + m^2/\varepsilon^2)} \left( \cos m\pi - \frac{m \sin m\pi\lambda/\varepsilon}{\varepsilon \operatorname{sh} \pi\sigma} \right) \\ d_{mn} &= \frac{2 \cos n\pi\psi/2}{\varepsilon\pi (n^2 + m^2/\varepsilon^2)} \left( n \cos m\pi\lambda/\varepsilon - \frac{m}{\varepsilon} \sin m\pi\lambda/\varepsilon \operatorname{cth} n\pi\sigma \right) \\ & \quad m \geq 0 \\ & \quad n = 2k+1 \end{aligned} \quad (\text{II.12-b})$$

La dérivée normale de  $A_{2d}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{2d}}{\partial x}(x=\tau\psi/2, y) = \\ A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{\operatorname{ch} \pi(y/\tau + \lambda)}{\operatorname{sh} \pi\sigma} \cos \pi\psi/2 - \sum_m \frac{\beta_m}{\varepsilon} \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} (y/\tau + \lambda) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Comme précédemment, on développe le premier terme de II.13 comme suit :

$$\frac{\operatorname{ch} \pi(y/\tau + \lambda)}{\operatorname{sh} \pi\sigma} \cos \pi\psi/2 = \frac{e_0}{2} + \sum_m e_m \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} (y/\tau + \lambda)$$

$$\text{où } e_m = \frac{2 \cos m\pi \cos \pi\psi/2}{\varepsilon\pi (1 + m^2/\varepsilon^2)} \quad m \geq 0$$

L'expression II.13 s'écrit alors :

$$\frac{\partial A_{2d}}{\partial x} (x=\tau\psi/2, y) = A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{e_0}{2} + \sum_m \left( e_m - \frac{\beta_m}{\varepsilon} \right) \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} (y/\tau + \lambda) \right] \quad (\text{II.14})$$

L'identification des expressions II.12-a et II.14 permet d'écrire la deuxième relation liant les coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_m$  :

$$\frac{c_0}{2} + \sum_n \alpha_n \frac{d_{0n}}{2} = \frac{e_0}{2} \quad (\text{II.15})$$

$$c_m + \sum_n \alpha_n d_{mn} = e_m - \frac{\beta_m}{\varepsilon} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

En remarquant que :

$$\frac{c_0}{2} = \frac{e_0}{2} = \frac{\cos \pi\psi/2}{\varepsilon\pi}, \quad \text{et en posant : } f_m = c_m - e_m,$$

on peut réécrire II.15 sous la forme :

$$f_m + \sum_n \alpha_n d_{mn} = -\beta_m/\varepsilon \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{II.16})$$

avec la condition  $\beta_0 = 0$ .

Les coefficients inconnus  $\alpha_n$  et  $\beta_m$  peuvent alors être déterminés par le système d'équations linéaire formé par les équations II.10 et II.16 :

$$\alpha_n - \sum_m \beta_m b_{mn} = -\alpha_n$$

$$\varepsilon f_m + \varepsilon \sum_n \alpha_n d_{nm} = -\beta_m \quad (\text{II.17})$$

avec la condition  $\beta_0 = 0$ .

En limitant les rangs d'indices  $n$  et  $m$  des développements en série de Fourier à  $N_0$  et  $M_0$  respectivement, on peut écrire le système II.17 sous la forme :

$$[ A ] - [ B ] [ \beta ] = - [ \alpha ] \quad \text{II.18 - a}$$

$$[ F ] + [ D ] [ \alpha ] = - [ \beta ] \quad \text{II.18 - b}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, M_0$$

$$n = 1, 3, 5, \dots, N_0$$

avec :

$[ \alpha ]$  ,  $[ \beta ]$  , les matrices colonnes des coefficients inconnus  $\alpha_n$  et  $\beta_m$ ;

$[ A ]$  , la matrice colonne des coefficients  $a_n$ ;

$[ B ]$  , la matrice d'éléments  $b_{nm}$ ;

$[ F ]$  , la matrice colonne des coefficients  $f_m$ ;

$[ D ]$  , la matrice d'éléments  $d_{mn}$ .

En reportant la valeur de  $[ \beta ]$  donnée par II.18 - b dans II.18 - a, on obtient :

$$[ G ] + [ H ] [ \alpha ] = - [ \alpha ] \quad \text{(II.19)}$$

avec :  $[ G ] = [ A ] + [ B ] [ F ]$

et  $[ H ] = [ B ] [ D ]$

Nous résolvons ensuite le système II.19 par approximations successives en partant d'une matrice  $[ \alpha ]$  initialement nulle.

Les rangs  $N_0$  et  $M_0$  des développements en série de Fourier, qui déterminent les dimensions des matrices du système II.18, sont choisis suffisamment élevés de telle sorte que lorsqu'on les fait varier, les inconnues  $\alpha_n$  soient obtenues avec la précision souhaitée.

En général, la prise en compte des trente premiers harmoniques assure la convergence du système. Les temps de calcul sont ainsi plus réduits que ceux exigés par des méthodes numériques [19].

### Expression de l'inductance directe

L'inductance directe  $L_d$  peut être calculée à partir de l'énergie magnétique à la surface du stator de longueur  $L$ .

On a :

$$W = \frac{p L}{2} \int_0^{2\tau} A_{id}(x, y=\tau\sigma) J_{S(x)} dx \quad (II.20)$$

Le potentiel  $A_{id}$  et la densité de courant  $J_S$  sont donnés par les expressions II.1 et II.5.

On obtient :

$$W = \frac{L p}{2} \tau A_0 J_0 \operatorname{cth} (1 + \alpha_1 / \operatorname{ch} \pi\sigma) \quad (II.21)$$

L'inductance directe  $L_d$  peut ensuite être déduite de la relation :

$$W = \frac{1}{2} L_d i_d^2 \quad (II.22)$$

On obtient :

$$L_d = \mu_0 \frac{2 q L}{\pi p} (N K_b)^2 \operatorname{cth} \pi\sigma (1 + \alpha_1 / \operatorname{ch} \pi\sigma) \quad (II.23)$$

L'inductance directe  $L_d$  est donc le produit de

$$L_c = \mu_0 \frac{2 q L}{\pi p} (N K_b)^2 \operatorname{cth} \pi\sigma ,$$

représentant l'inductance d'une machine à pôles lisses ayant un entrefer  $\tau\sigma$  constant,

par le facteur

$$C_d = 1 + \alpha_1 / \operatorname{ch} \pi\sigma \quad (II.24)$$

$C_1$  est fonction des paramètres géométriques  $\alpha$ ,  $\lambda$  et  $\psi$ , et sa valeur est toujours inférieure ou égale à l'unité.

L'inductance directe  $L_d$  n'étant fonction que de  $\alpha_1$ , les solutions du système II.19 peuvent être obtenues à l'itération  $i$  en assurant uniquement la condition de convergence :

$$\left| \alpha_1^{(i)} - \alpha_1^{(i+1)} \right| \leq \varepsilon_0, \text{ où } \varepsilon_0 \text{ est la précision souhaitée.}$$

### II.3.2 Détermination de l'inductance en quadrature

De façon analogue au problème d, nous exprimons la composante axiale du potentiel vecteur dans les régions 1 et 2, en tenant compte de toutes les symétries et de la parité de la densité de courant à la surface du stator.

On a :

$$A_{1q} = A_0 \left[ \frac{\text{ch } \pi y / \tau}{\text{sh } \pi \sigma} \cos \pi x / \tau + \sum_n \frac{\alpha_n}{n} \frac{\text{ch } n\pi (y/\tau - \sigma)}{\text{sh } n\pi \sigma} \cos n\pi x / \tau \right] \quad (\text{II.25})$$

dans la région 1.

Cette expression vérifie toutes les conditions aux limites relatives à la région 1, sauf sur la surface définie par  $y = 0$ .

Dans la région 2, on a :

$$A_{2q} = A_0 \left[ \frac{\text{ch} \left( \frac{\pi y}{\tau} + \lambda \right)}{\text{sh } \pi \varepsilon} \cos \pi x / \tau + \sum_m \frac{\beta_m}{m} \frac{\text{sh} \frac{m\tau}{2\varepsilon} (1 - 2x/\tau)}{\text{ch} \frac{m\tau}{2\varepsilon} (1 - \psi)} \cos \frac{m\tau}{\varepsilon} (y/\tau + \lambda) \right] \quad (\text{II.26})$$



Cette expression vérifie toutes les conditions aux limites relatives à la région 2, sauf sur la surface définie par  $x = \tau\psi/2$ .

Nous devons maintenant annuler les dérivées normales du potentiel vecteur sur les surfaces OG ( $y = 0$ ) et GF ( $x = \tau\psi/2$ ).

Sur la surface définie par  $y = 0$ , la dérivée normale de  $A_{1q}$  s'écrit :

$$\frac{\partial A_{1q}}{\partial y} (x, y=0) = - A_0 \frac{\pi}{\tau} \sum_n \alpha_n' \cos n\pi x/\tau \quad (\text{II.27})$$

$$0 \leq x \leq \tau/2$$

et celle de  $A_{2q}$  s'exprime par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_{2q}}{\partial y} (x, y=0) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \tau\psi/2 \\ \frac{\partial A_{2q}}{\partial y} (x, y=0) = A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{\text{sh } \pi\lambda}{\text{sh } \pi\varepsilon} \cos \pi x/\tau - \sum_m \frac{\beta_m'}{\varepsilon} \frac{\text{sh } \frac{m\tau}{2\varepsilon} (1 - 2x/\tau)}{\text{ch } \frac{m\tau}{2\varepsilon} (1 - \psi)} \sin \frac{m\pi\lambda}{\varepsilon} \right] \end{array} \right.$$

$$\text{pour } \tau\psi/2 \leq x \leq \tau/2$$

$$(\text{II.28})$$

La variation de  $\frac{\partial A_{2q}}{\partial y} (x, y=0)$  en fonction de  $x$ , sur l'intervalle  $[-\tau, \tau]$ , est donnée par la figure II.10.

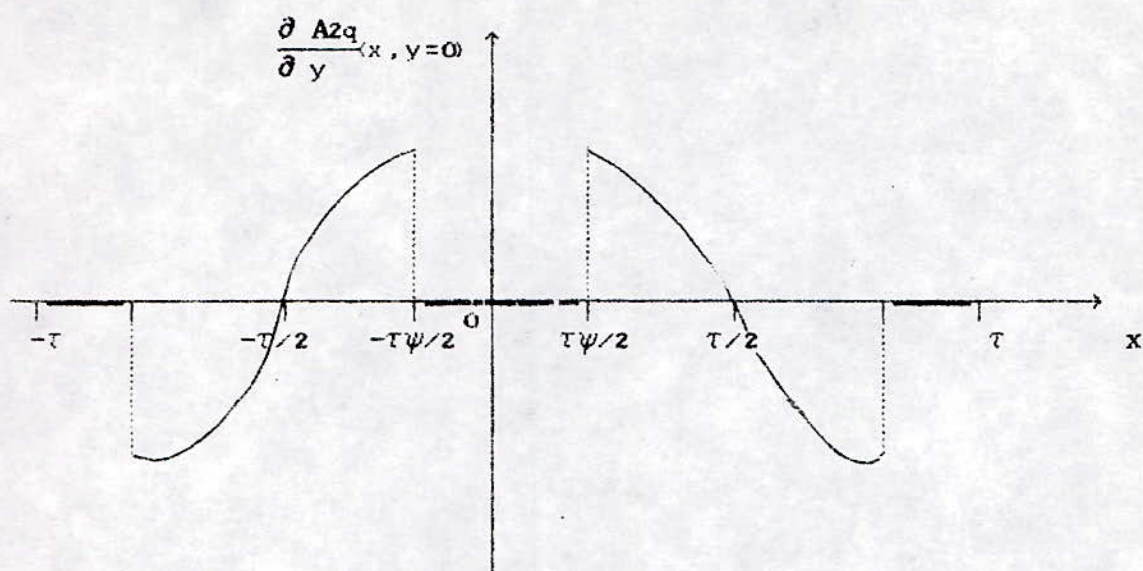


Figure II.10

La fonction représentée est paire, et satisfait à :

$$\frac{\partial A_{2q}}{\partial y}(x \pm \tau, y=0) = - \frac{\partial A_{2q}}{\partial y}(x, y=0)$$

Son développement en série de Fourier, sur l'intervalle  $[-\tau, \tau]$ , s'écrit :

$$\frac{\partial A_{2q}}{\partial y}(x, y=0) = A_0 \frac{\pi}{\tau} \sum_n ( a_n' - \sum_m \beta_m' b_{nm}' ) \cos n\pi x/\tau \quad (II.29)$$

$a_n'$  et  $b_{nm}'$  représentent, respectivement, les coefficients du développement en série de Fourier des termes :

$$\frac{\text{sh } \pi\lambda}{\text{sh } \pi\varepsilon} \cos \pi x/\tau \quad \text{et} \quad \frac{\sin m\pi\lambda/\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\text{sh } \frac{m\pi}{2\varepsilon} (1 - 2x/\tau)}{\text{ch } \frac{m\pi}{2\varepsilon} (1 - \psi)}$$

intervenants dans l'expression II.28.

On peut montrer que :

$$a_n' = \frac{\text{sh } \pi \lambda}{\text{sh } \pi \varepsilon} \frac{4}{\pi (n^2 - 1)} \left( -n \sin \frac{n\pi\psi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi\psi}{2} \right)$$

$$n \geq 3$$

$$a_1' = \frac{\text{sh } \pi \lambda}{\text{sh } \pi \varepsilon} \frac{\pi (1 - \psi) - \sin \pi \psi}{\pi}$$

$$b_{nm}' = \frac{\sin m\pi\lambda/\varepsilon}{\varepsilon} \frac{4}{\pi (n^2 + m^2/\varepsilon^2)} \left( -n \sin m\pi\psi/2 \text{th } \frac{m\pi}{2\varepsilon} (1 - \psi) + \right.$$

$$\left. \frac{m}{\varepsilon} \cos n\pi\psi/2 \right)$$

$$n = 1, 3, 5, \dots$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

De l'identification de II.27 et II.29, il vient :

$$a_n' - \sum_m \beta_m' b_{nm}' = -\alpha_n' \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$(II.30)$$

Sur la surface définie par  $x = \tau\psi/2$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_{1q}}{\partial x} (x=\tau\psi/2, y) = 0 \quad \text{pour } -\tau\lambda \leq y \leq 0 \\ \frac{\partial A_{1q}}{\partial x} (x=\tau\psi/2, y) = -A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{\text{ch } \pi y/\tau}{\text{sh } \pi\sigma} \sin \pi\psi/2 + \right. \\ \left. \sum_n \alpha_n' \frac{\text{ch } n\pi(y/\tau - \sigma)}{\text{sh } n\pi\sigma} \sin n\pi\psi/2 \right] \\ \text{pour } 0 \leq y \leq \tau\sigma \end{array} \right.$$

$$(II.31)$$

Le développement en série de Fourier de cette fonction est obtenu de façon analogue à celui de l'expression II.11. On a :

$$\frac{\partial A_{1q}}{\partial x} (x=\tau\psi/2, y) = -A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{c_0'}{2} + \sum_n \alpha_n' \frac{d_0 r'}{2} + \sum_m (c_m' + \sum_n \alpha_n' \alpha_{mn}') \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} (y/\tau + \lambda) \right] \quad (\text{II.32})$$

Avec :

$$c_m' = \frac{2 \sin \pi\psi/2}{\varepsilon\pi (1 + m^2/\varepsilon^2)} \left( \cos m\pi - \frac{m \sin m\pi\lambda/\varepsilon}{\varepsilon \operatorname{sh} \pi\sigma} \right)$$

$$d_{mn}' = \frac{2 \sin n\pi\psi/2}{\varepsilon\pi (n^2 + m^2/\varepsilon^2)} \left( n \cos m\pi\lambda/\varepsilon - \frac{m}{\varepsilon} \sin m\pi\lambda/\varepsilon \operatorname{cth} n\pi\sigma \right)$$

$$m \geq 0$$

$$n = 2k + 1$$

$$(\text{II.33})$$

La dérivée normale de  $A_{2q}$  pour  $x = \tau\psi/2$ , s'écrit :

$$\frac{\partial A_{2q}}{\partial x} (x=\tau\psi/2, y) = -A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{\operatorname{ch} \pi(y/\tau + \lambda)}{\operatorname{sh} \pi\varepsilon} \sin \pi\psi/2 + \sum_m \frac{\beta_m'}{\varepsilon} \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} (y/\tau + \lambda) \right] \quad (\text{II.34})$$

Le développement en série de Fourier du terme  $\frac{\operatorname{ch} \pi(y/\tau + \lambda)}{\operatorname{sh} \pi\varepsilon} \sin \pi\psi/2$ , sur l'intervalle  $[-\tau\lambda, \tau(2\sigma + \lambda)]$ ,

est donné par :

$$\frac{e_0'}{2} + \sum_m e_m' \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} (y/\tau + \lambda)$$

où 
$$e_m' = \frac{2 \cos m\pi \sin \pi\psi/2}{\varepsilon\pi (1 + m^2/\varepsilon^2)} \quad m \geq 0$$

Ceci permet d'écrire l'expression II.34 sous la forme :

$$\frac{\partial A_{2q}}{\partial x} (x=\tau\psi/2, y) = -A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{e_0'}{2} + \sum_m (e_m' + \frac{\beta_m'}{\varepsilon}) \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} (y/\tau + \lambda) \right] \quad (\text{II.35})$$

On doit maintenant identifier les expressions II.32 et II.35; ce qui permet d'écrire la relation :

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{2} + \sum_n \alpha_n \frac{u_0 n}{2} &= \frac{e_0}{2} \\ c_m + \sum_n \alpha_n &= e_m + \beta_m \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (II.36)$$

II.30 et II.36 forment alors le système d'équations linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \alpha_n - \sum_m \beta_m b_m &= -\alpha_n \\ \varepsilon f_m + \varepsilon \sum_n \alpha_n d_{nm} &= \beta_m \end{aligned} \quad (II.37)$$

$m = 0, 1, 2, \dots$   
 $n = 1, 3, 5, \dots$

avec :

$$\begin{aligned} f_m &= c_m - e_m \\ \beta_0 &= 0 \end{aligned}$$

En choisissant des rangs suffisamment élevés des indices  $n$  et  $m$  dans les développements en série de Fourier, nous résolvons les équations II.37 en utilisant le même procédé que pour le système II.17.

### Expression de l'inductance en quadrature

L'inductance en quadrature  $L_q$  peut être calculée à partir de l'énergie magnétique  $W$  à la surface du stator. On a :

$$W = \frac{p L}{2} \int_0^{2\tau} A_{iq}(x, y=TC) J_S(x) dx = \frac{1}{2} L_q i_q^2 \quad (II.38)$$

Le potentiel  $A_{iq}$  et la densité de courant  $J_S$  sont donnés par les expressions II.25 et II.2.

On obtient :

$$L_q = \mu_0 \frac{2 q L}{\pi p} (N K_b)^2 \operatorname{cth} \pi \sigma (1 + \alpha_1' / \operatorname{ch} \pi \sigma) \quad (\text{II.39})$$

Comme précédemment, on peut écrire :

$$L_q = L_c C_q$$

où  $L_c$ , défini précédemment, représente l'inductance d'une machine à pôles lisses, et

$$C_q = 1 + \alpha_1' / \operatorname{ch} \pi \sigma \quad (\text{II.40})$$

### II.3.3 Variation de l'induction normale à la surface du stator

La composante normale de l'induction magnétique, à la surface du stator ( $y = \tau \sigma$ ), est obtenue par dérivation du potentiel vecteur par rapport à  $x$ .

Suivant l'axe direct, la composante normale de l'induction magnétique s'écrit :

$$B_{yd} = \frac{\partial A_{1d}}{\partial x} (x, y = \tau \sigma) = B_m \left( \cos \pi x / \tau + \operatorname{th} \pi \sigma \sum_n \frac{\alpha_n}{\operatorname{sh} n \pi \sigma} \cos n \pi x / \tau \right)$$

où  $B_m = A_0 \frac{\pi}{\tau} \operatorname{cth} \pi \sigma$ , représente la valeur maximale de la composante normale de l'induction magnétique à la surface du stator, obtenue pour une machine à pôles lisses ( $\psi = 1$ ).

Suivant l'axe en quadrature, la composante normale de l'induction magnétique s'écrit :

$$B_{yq} = \frac{\partial A_{1q}}{\partial x} (x, y=\tau\sigma) = B_m \left( \sin \pi x / \tau + \text{th } \pi\sigma \sum \frac{\alpha_n}{\sigma} \sin \pi n x / \tau \right)$$

La figure II.11 donne un exemple de variations de  $B_{yd}$  et  $B_{yq}$  sur un intervalle égal à un pas polaire.

$B_{yd}$  est maximale pour  $x = 0$  et nulle pour  $x = \tau\psi/2$ . Dans les deux cas, l'induction normale subit une forte diminution due à la variation brusque de l'entrefer.

#### II.3.4 Variations des inductances en fonction des paramètres géométriques

Les variations des coefficients  $C_d$  et  $C_q$ , définis par II.24 et II.40, en fonction de  $\psi$  sont données par les figures II.12 et II.13.

On montre que  $C_d$  et  $C_q$  augmentent avec la largeur  $\psi$  de la dent rotorique et tendent vers l'unité.

La figure II.13 est obtenue pour  $\sigma = 0.01$  et plusieurs valeurs de  $\lambda$  ( $\lambda = 0.02, 0.05$  et  $0.2$ ). On vérifie que  $C_d$  et  $C_q$  sont des fonctions décroissantes de  $\lambda$ ; toutefois,  $C_q$  décroît plus vite que  $C_d$ .

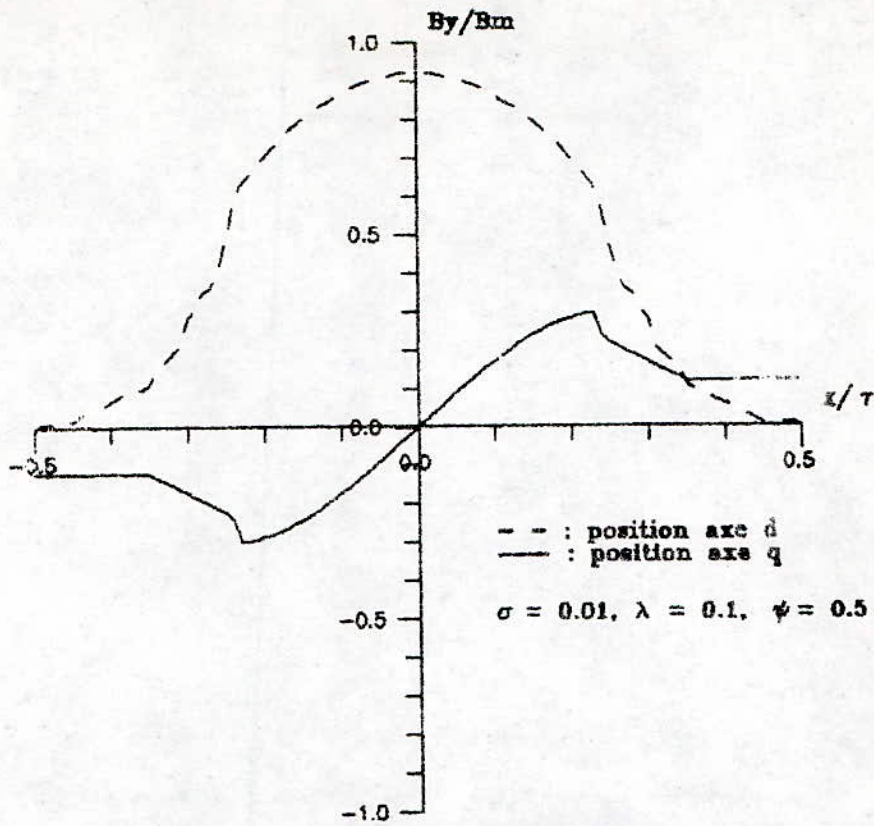


Figure II.11 : Variation de l'induction normale en fonction de  $x/\tau$

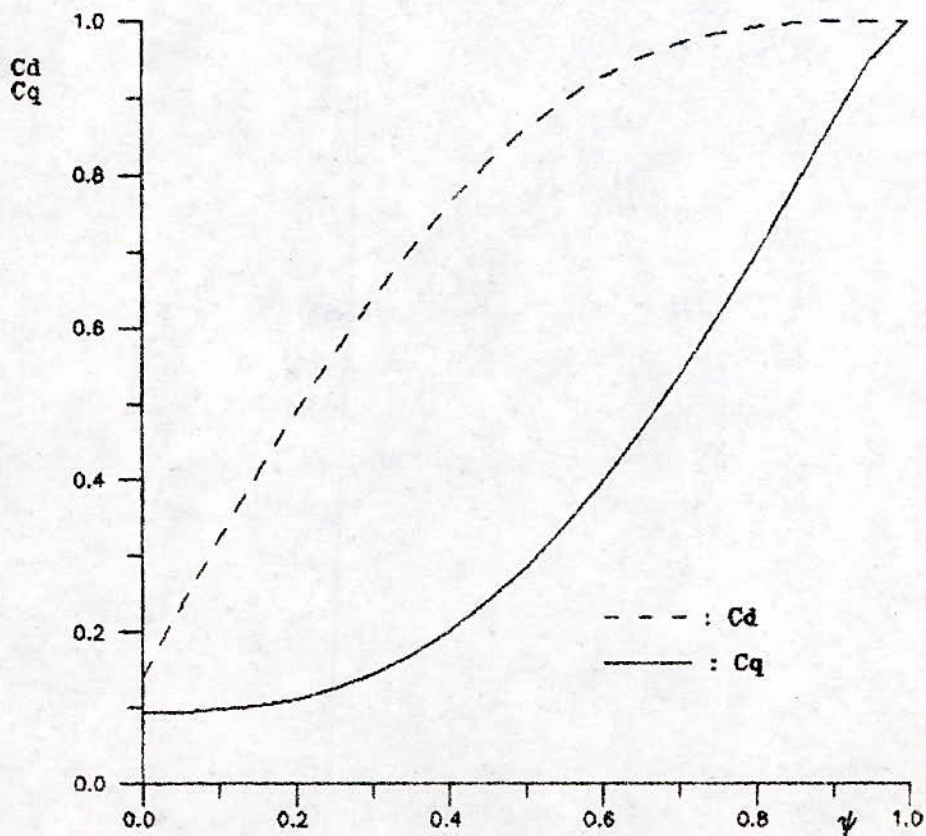


Figure II.12 : Variations de  $C_d$  et  $C_q$  en fonction de  $\psi$   
 $\sigma = 0.01, \lambda = 0.1$



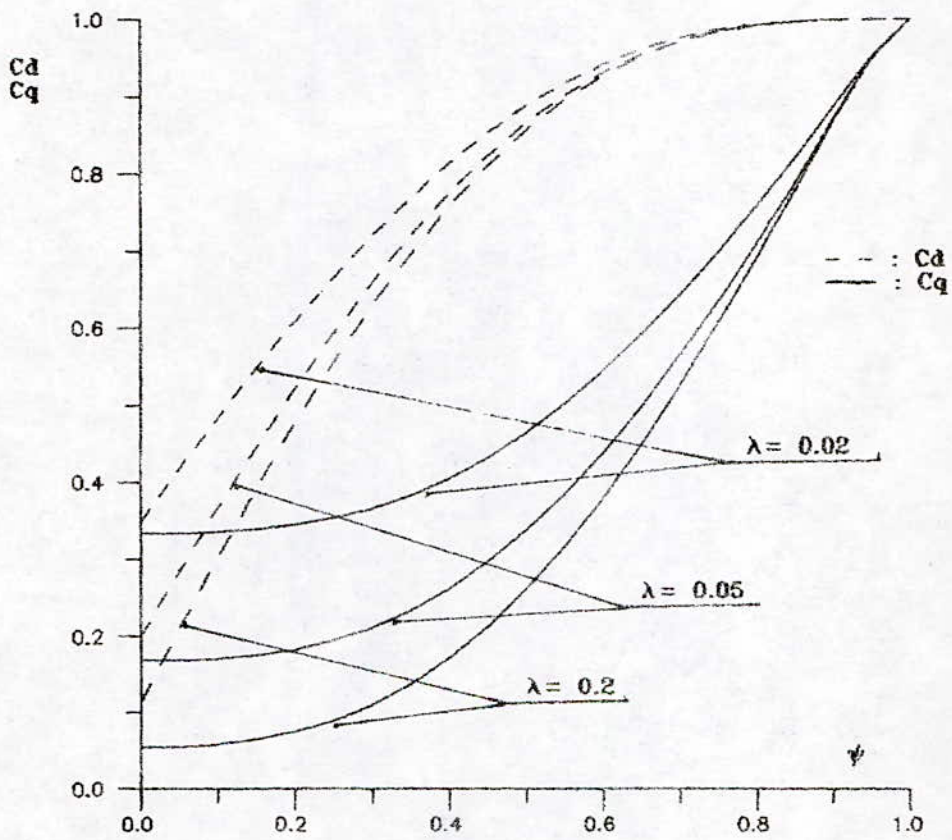


Figure II.13 : Variations de Cd et Cq en fonction de  $\psi$   
 $\sigma = 0.01$  ,  $\lambda$  paramètre

### II.3.5 Optimisation de la largeur de la dent rotorique

En négligeant la résistance statorique  $R$  ( cas des machines de puissance suffisamment élevée ), on a montré au chapitre I que le couple est proportionnel à  $X_d - X_q$ , pour un fonctionnement à courant fixé, et à  $1/X_q - 1/X_d$ , pour un fonctionnement à tension fixée, et que le facteur de puissance augmente avec le rapport  $X_d/X_q$ .

La valeur optimale de la largeur de la dent rotorique  $\psi$  qui maximise le rapport  $X_d/X_q$  ne correspond pas à celle qui maximise le couple.

Le tableau II.1 donne un exemple de valeurs de  $\psi$  optimisant soit le facteur de puissance, soit le couple. Il correspond à  $\sigma = 0.01$  et  $\lambda = 0.1$ .

	$X_d/X_q$	$X_d - X_q$	$1/X_q - 1/X_d$
$\psi$	0.25	0.45	0.13

Tableau II.1

La valeur optimale de la largeur de la dent rotorique est donc celle qui réalise un compromis entre le couple et le facteur de puissance.

## II.4 ETUDE DE LA MACHINE HOMOPOLAIRE

La machine présente au stator une alimentation polyphasée  $2p$  pôles, ainsi qu'un circuit d'excitation homopolaire alimenté en courant continu.

Le rotor possède  $Z_R$  dents, avec  $Z_R = p$ . Ainsi, la vitesse de rotation  $\Omega$  vérifie la relation :  $\Omega = \frac{\omega}{Z_R}$ .

Les réactances directe et en quadrature de cette machine peuvent être déterminées en considérant un courant d'excitation nul.

Nous convenons de choisir, comme pour la machine non-excitée, l'axe direct  $d$  confondu avec l'axe de symétrie d'une dent rotorique. L'axe  $q$ , décalé de  $\pi/2p$ , n'est plus axe de symétrie (figure II.14).

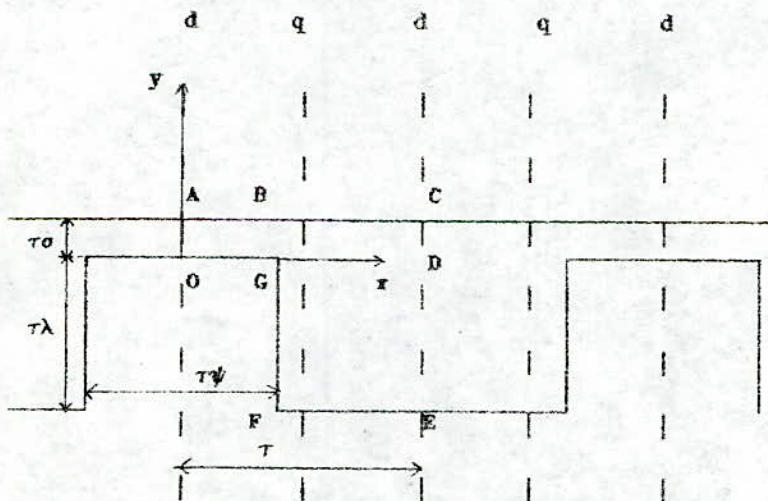


Figure II.14 : Modèle d'étude de la machine homopolaire

Compte tenu de toutes les symétries, le domaine d'étude est représenté à la figure II.3; il est délimité par deux axes  $d$  successifs correspondant à une largeur  $\tau' = \tau$ .

L'ouverture de la dent rotorique varie de  $0$  à  $2\tau$ , et on a  $0 \leq \psi \leq 2$

Lorsque le rotor se place suivant l'axe  $d$ , le tracé approximatif des lignes de champ est donné par la figure II.15.

OA et CE sont des lignes de champ; le potentiel vecteur  $y$  est donc constant.

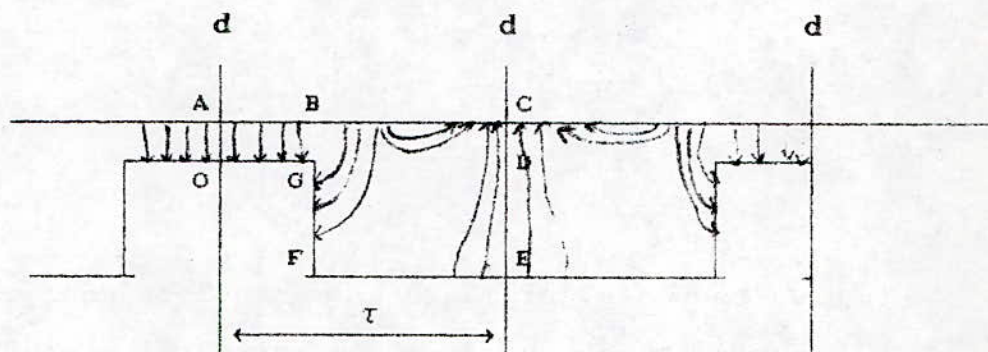


Figure II.15 : Allure des lignes de champ  
Rotor en position directe

Comme dans le cas de la machine non-excitée, nous négligeons la réluctance rotorique et nous choisissons un potentiel nul au centre du rotor.

Ainsi, on a :

$$A = 0$$

sur les surfaces OA et CE.

A la surface du stator, la composante tangentielle du champ magnétique est imposée par la densité de courant  $J_S = J_0 \sin \pi x / \tau$ .

On a donc :

$$\frac{\partial A}{\partial n} = -\mu_0 J_s \quad \text{sur la surface AC.}$$

Les autres conditions aux limites relatives au problème d sont précisées sur la figure II.16.

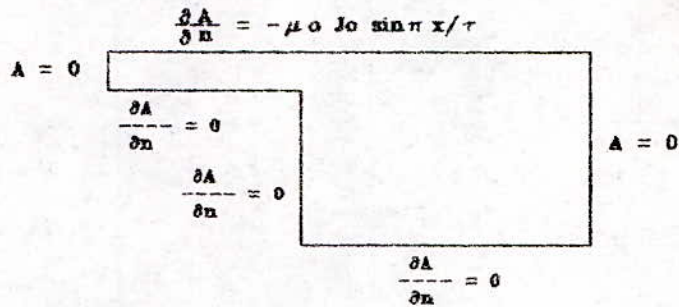


Figure II.16 : Conditions aux limites.  
Rotor en position directe.

Lorsque le rotor se place suivant la position en quadrature, le tracé approximatif des lignes de champ magnétique dans l'entrefer, est donné par la figure II.17.

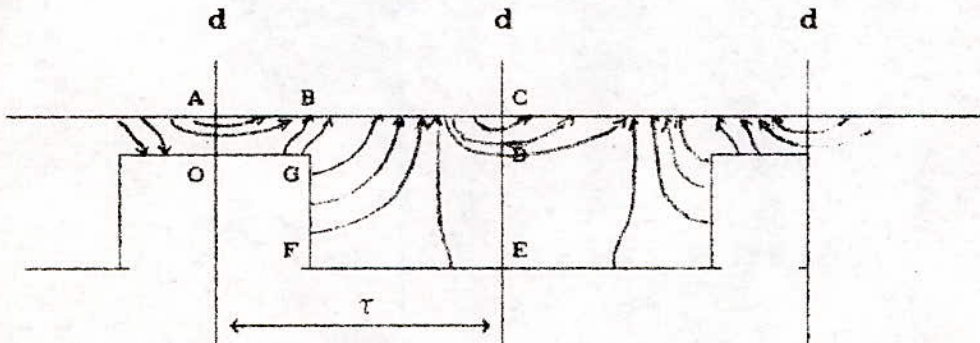


Figure II.17 : Allure des lignes de champ  
Rotor en position en quadrature

Sur les surfaces OA et CE, seule la composante normale du champ magnétique existe; on a alors la condition de Neumann :

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0 \quad \text{sur les surfaces OA et CE.}$$

Les autres conditions aux limites pour le problème q sont données par la figure II.18.

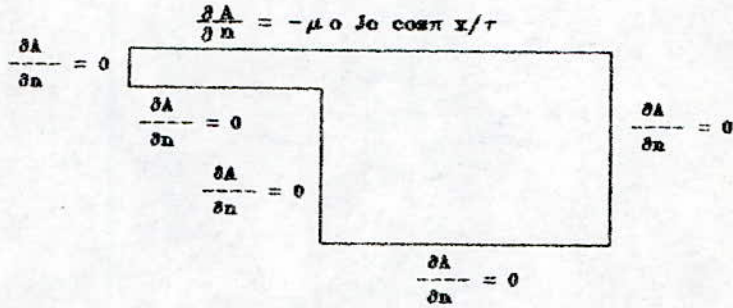


Figure II.18 : Conditions aux limites.  
Rotor en position en quadrature.

#### II.4.1 Détermination de l'inductance directe

De façon analogue à la machine non-excitée, on exprime la composante axiale du potentiel vecteur, dans la région 1, par :

$$A_{1d} = A_0 \left[ \frac{\text{ch } \pi y / \tau}{\text{sh } \pi \sigma} \sin \pi x / \tau + \sum_n \frac{\alpha_n}{n} \frac{\text{ch } n\pi (y/\tau - \sigma)}{\text{sh } n\pi \sigma} \sin n\pi x / \tau \right] \quad (II.41)$$

Cette expression vérifie toutes les conditions aux limites relatives à la région 1, sauf sur la surface définie par  $y = 0$ .

Dans la région 2, la composante normale du potentiel vecteur s'écrit :

$$A_{2d} = A_0 \left[ \frac{\text{ch } (\pi y / \tau + \lambda)}{\text{sh } \pi \varepsilon} \sin \pi x / \tau + \sum_m \frac{\beta_m}{m} \frac{\text{sh } \frac{m\pi}{\varepsilon} (1 - x/\tau)}{\text{ch } \frac{m\pi}{\varepsilon} (1 - \psi/2)} \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} (y/\tau + \lambda) \right] \quad (II.42)$$

Cette expression satisfait toutes les conditions aux limites relatives à la région 2, sauf sur la surface définie par  $x = \tau\psi/2$ .

Nous devons maintenant assurer l'annulation des dérivées normales du potentiel vecteur sur les surfaces OG ( $y = 0$ ) et GF ( $x = \tau\psi/2$ ).

Sur la surface définie par  $y = 0$ , la dérivée normale

$\frac{\partial A_{1d}}{\partial y}$  est donnée par :

$$\frac{\partial A_{1d}}{\partial y} (x, y=0) = -A_0 \frac{\pi}{\tau} \sum_n \alpha_n \sin n\pi x/\tau \quad (\text{II.43})$$

$0 \leq x \leq \tau$

tandis que la dérivée  $\frac{\partial A_{2d}}{\partial y}$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_{2d}}{\partial y} (x, y=0) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \tau\psi/2 \\ \frac{\partial A_{2d}}{\partial y} (x, y=0) = A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{\text{sh } \pi\lambda}{\text{sh } \pi\varepsilon} \sin \pi x/\tau - \sum_m \frac{\beta_m}{\varepsilon} \frac{\text{sh } \frac{m\pi}{\varepsilon} (1 - x/\tau)}{\text{ch } \frac{m\pi}{\varepsilon} (1 - \psi/2)} \sin \frac{m\pi\lambda}{\varepsilon} \right] \end{array} \right.$$

$\text{pour } \tau\psi/2 \leq x \leq \tau$

(II.44)

La variation de  $\frac{\partial A_{2d}}{\partial y} (x, y=0)$  sur l'intervalle  $[-\tau, \tau]$  est donnée par la figure II.19. C'est une fonction impaire, et admet ainsi un développement en série de Fourier de la forme :

$$\frac{\partial A_{2d}}{\partial y} (x, y=0) = A_0 \frac{\pi}{\tau} \sum_n \left( a_n - \sum_m \beta_m b_{nm} \right) \sin n\pi x/\tau \quad (\text{II.45})$$

On peut montrer que l'on a :

$$a_n = \frac{\text{sh } \pi \lambda}{\text{sh } \pi \varepsilon} \frac{4}{\pi (n^2 - 1)} \left( n \sin \frac{\pi \psi}{2} \cos \frac{n\pi \psi}{2} - \sin \frac{n\pi \psi}{2} \cos \frac{\pi \psi}{2} \right) \quad n \geq 2$$

$$a_1 = \frac{\text{sh } \pi \lambda}{\text{sh } \pi \varepsilon} \frac{\pi (2 - \psi) + \sin \pi \psi}{2\pi} \quad (II.46)$$

$$b_{nm} = \frac{\sin m\pi \lambda / \varepsilon}{\varepsilon} \frac{2}{\pi (n^2 + m^2 / \varepsilon^2)} \left( n \cos \frac{n\pi \psi}{2} \text{th } \frac{m\pi}{\varepsilon} (1 - \psi/2) + \frac{m}{\varepsilon} \sin \frac{n\pi \psi}{2} \right)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

(II.47)

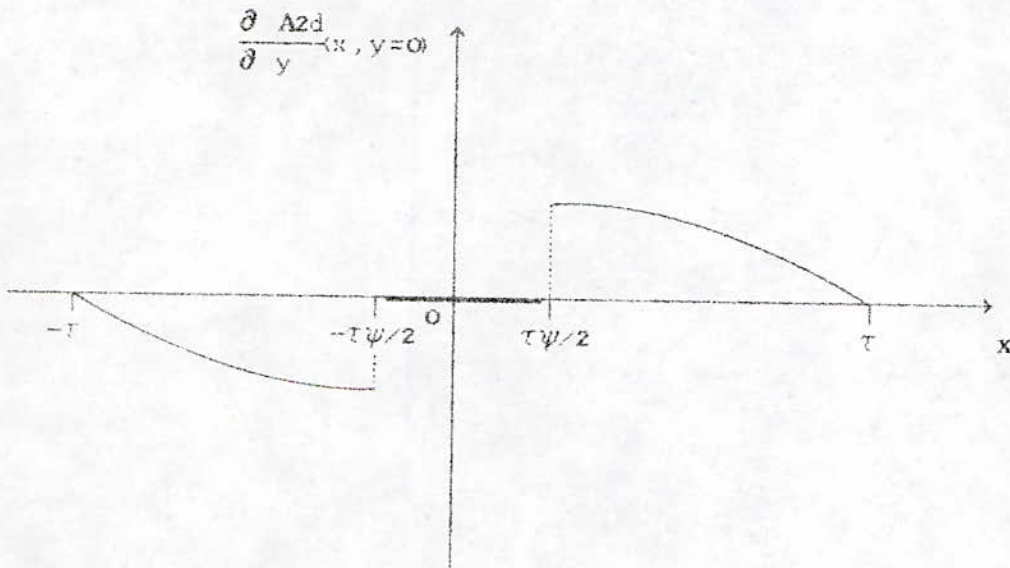


Figure II.19

Nous devons maintenant identifier les expressions II.43 et II.45 . On obtient :

$$a_n - \sum_m \beta_m b_{nm} = -\alpha_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(II.48)



Sur la surface définie par  $x = \tau\psi/2$ , la dérivée normale de  $A_{1d}$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_{1d}}{\partial x} (x=\tau\psi/2, y) = 0 \quad \text{pour } -\tau\lambda \leq y \leq 0 \\ \frac{\partial A_{1d}}{\partial x} (x=\tau\psi/2, y) = A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{\text{ch } \pi y/\tau}{\text{sh } \pi\sigma} \cos \pi\psi/2 + \right. \\ \left. \sum_n \alpha_n \frac{\text{ch } n\pi(y/\tau - \sigma)}{\text{sh } n\pi\sigma} \cos n\pi\psi/2 \right] \\ \text{pour } 0 \leq y \leq \tau\sigma \end{array} \right.$$

(II.49)

Cette expression admet un développement en série de Fourier analogue à celui de l'expression II.11 :

$$\frac{\partial A_{1d}}{\partial x} (x=\tau\psi/2, y) = A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{c_0}{2} + \sum_n \alpha_n \frac{d_{0n}}{2} + \sum_m (c_m + \sum_n \alpha_n d_{mn}) \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} (y/\tau + \lambda) \right]$$

(II.50)

Les coefficients  $c_m$  et  $d_{mn}$  sont définis par l'expression II.12-b.

La dérivée normale de  $A_{2d}$  s'écrit :

$$\frac{\partial A_{2d}}{\partial x} (x=\tau\psi/2, y) = A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{\text{ch } \pi(y/\tau + \lambda)}{\text{sh } \pi\varepsilon} \cos \pi\psi/2 - \sum_m \frac{\beta_m}{\varepsilon} \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} (y/\tau + \lambda) \right]$$

$-\tau\lambda \leq y \leq \tau\sigma, \quad 0 \leq \psi \leq 2$

(II.51)

Cette expression est identique à celle obtenue pour la machine non-excitée, et son développement en série de Fourier sur l'intervalle  $[-\tau\lambda, \tau(2\sigma + \lambda)]$  est alors donné par II.14, que nous rappelons :

$$\frac{\partial A_{2d}}{\partial x} (x=\tau\psi/2, y) = A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{e_0}{2} + \sum_m \left( e_m - \frac{\beta_m}{\varepsilon} \right) \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} (y/\tau + \lambda) \right] \quad (\text{II.52})$$

L'identification de II.50 et II.52 permet d'écrire la relation suivante entre les coefficients  $c_m$  et  $\beta_m$ :

$$f_m + \sum_n a_n d_{mn} = -\beta_m/\varepsilon \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{II.53})$$

avec :  $f_m = c_m - e_m$ , et  $\beta_0 = 0$ .

On peut écrire les expressions II.48 et II.53 sous la forme matricielle :

$$[A] - [B][\beta] = -[\alpha] \quad \text{II.54-(a)}$$

$$[F] - [D][\alpha] = -[\beta] \quad \text{II.54-(b)}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, M_0$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, N_0$$

où :

$[A]$  est la matrice colonne des coefficients  $a_n$  donnés par II.46, et

$[B]$  la matrice d'éléments  $b_{nm}$  donnés par II.47.

La détermination de la matrice  $[\alpha]$  est obtenu en utilisant le même procédé de résolution que pour le système II.18.

### Expression de l'inductance directe

L'inductance directe  $L_d$  peut être calculée à partir de l'énergie magnétique à la surface du stator. On a :

$$W = \frac{P L}{2} \int_0^{2\tau} A_{td}(x, y=\tau\sigma) J_S(x) dx = \frac{1}{2} L_d i_d^2 \quad (II.55)$$

On obtient :

$$L_d = \mu_0 \frac{2 q L}{\pi p} (N K_b)^2 \operatorname{cth} \pi\sigma (1 + \alpha_1 / \operatorname{ch} \pi\sigma) = L_c C_d \quad (II.56)$$

### II.4.2 Détermination de l'inductance en quadrature

De façon analogue à la machine non-excitée, on exprime les potentiels vecteurs  $A_{1q}$  et  $A_{2q}$  correspondant aux régions 1 et 2 :

$$A_{1q} = A_0 \left[ \frac{\operatorname{ch} \pi y / \tau}{\operatorname{sh} \pi\sigma} \cos \pi x / \tau + \sum_n \frac{\alpha_n}{n} \frac{\operatorname{ch} n\pi (y/\tau - \sigma)}{\operatorname{sh} n\pi\sigma} \cos n\pi x / \tau \right] \quad (II.57)$$

$$A_{2q} = A_0 \left[ \frac{\operatorname{ch} (\pi y / \tau + \lambda)}{\operatorname{sh} \pi\varepsilon} \cos \pi x / \tau + \sum_m \frac{\beta_m}{m} \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{\varepsilon} (1 - x/\tau)}{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{\varepsilon} (1 - \psi/2)} \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} (y/\tau + \lambda) \right] \quad (II.58)$$

Ces deux expressions vérifient les conditions aux limites définies par la figure II.18, sauf sur la surface définie par  $y = 0$ , pour  $A_{1q}$ , et sur la surface définie par  $x = \tau\psi/2$ , pour  $A_{2q}$ .

Sur la surface définie par  $y = 0$ , la dérivée normale de  $A_{1q}$  s'exprime par :

$$\frac{\partial A_{1q}}{\partial y} (x, y=0) = -A_0 \frac{\pi}{\tau} \sum_n \alpha_n \cos n\pi x/\tau \quad (II.59)$$

$$0 \leq x \leq \tau$$

tandis que celle de  $A_{2q}$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_{2q}}{\partial y} (x, y=0) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \tau\psi/2 \\ \frac{\partial A_{2q}}{\partial y} (x, y=0) = A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{\text{sh } \pi\lambda}{\text{sh } \pi\varepsilon} \cos \pi x/\tau - \sum_m \frac{\beta_m}{\varepsilon} \frac{\text{ch } \frac{m\pi}{\varepsilon} (1 - x/\tau)}{\text{sh } \frac{m\pi}{\varepsilon} (1 - \psi/2)} \sin \frac{m\pi\lambda}{\varepsilon} \right] \end{array} \right.$$

$$\text{pour } \tau\psi/2 \leq x \leq \tau \quad (II.60)$$

La variation de  $\frac{\partial A_{2q}}{\partial y} (x, y=0)$  en fonction de  $x$  est donnée par la figure II.20.

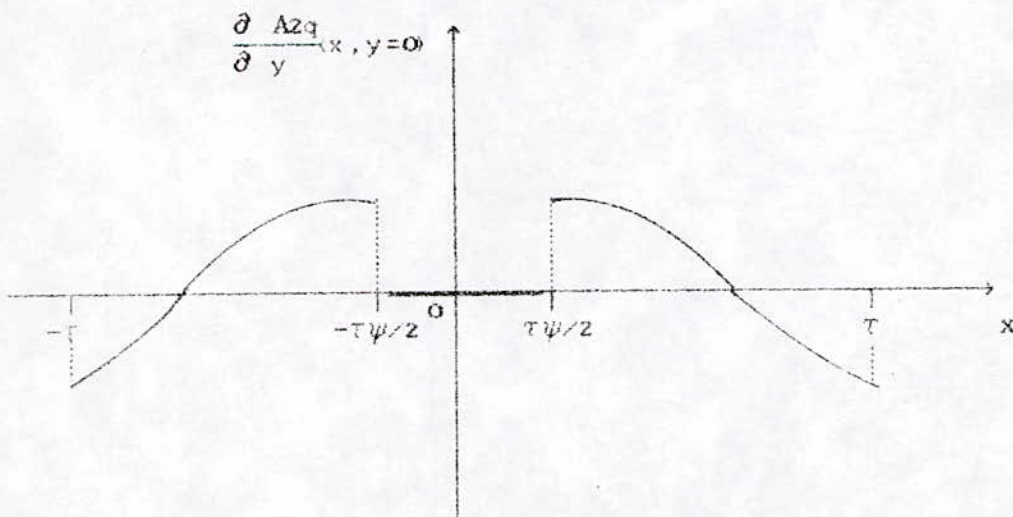


Figure II.20

Sur l'intervalle  $[-\tau, \tau]$ , l'expression II.60 admet un développement en série de Fourier qui s'écrit :

$$\frac{\partial A_{2q}}{\partial y} (x, y=0) = A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{a_0'}{2} - \sum_m \beta_m' \frac{b_{0m}'}{2} + \sum_n (a_n' - \sum_m \beta_m' b_{nm}') \cos n\pi x/\tau \right] \quad (II.61)$$

Avec :

$$a_0' = - \frac{\text{sh } \pi\lambda}{\text{sh } \pi\varepsilon} \frac{\sin \pi\psi/2}{\pi}$$

$$a_1' = \frac{\text{sh } \pi\lambda}{\text{sh } \pi\varepsilon} \frac{\pi (2 - \psi) - \sin \pi\psi}{2\pi}$$

$$a_n' = \frac{\text{sh } \pi\lambda}{\text{sh } \pi\varepsilon} \frac{2}{\pi (n^2 - 1)} \left( -n \sin \frac{n\pi\psi}{2} \cos \frac{\pi\psi}{2} + \sin \frac{\pi\psi}{2} \cos \frac{n\pi\psi}{2} \right) \quad n \geq 2$$

$$b_{nm}' = \frac{\sin m\pi\lambda/\varepsilon}{\varepsilon} \frac{2}{\pi (n^2 + m^2/\varepsilon^2)} \left( -n \sin n\pi\psi/2 \text{cth } \frac{m\pi}{\varepsilon} (1 - \psi/2) + \frac{m}{\varepsilon} \cos n\pi\psi/2 \right) \quad \begin{matrix} m = 1, 2, 3, \dots \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{matrix}$$

(II.62)

$a_n'$  et  $b_{nm}'$  représentent, respectivement, les coefficients du développement en série de Fourier des termes :

$$\frac{\text{sh } \pi\lambda}{\text{sh } \pi\varepsilon} \cos \pi x/\tau \quad \text{et} \quad \frac{\sin m\pi\lambda/\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\text{ch } \frac{m\pi}{\varepsilon} (1 - x/\tau)}{\text{sh } \frac{m\pi}{\varepsilon} (1 - \psi/2)}$$

Afin d'assurer une dérivée normale nulle du potentiel vecteur sur la surface OG, nous identifions les expressions II.59 et II.61. Il en résulte les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{a_0'}{2} - \sum_m \beta_m' \frac{b_{0m}'}{2} &= 0 \\ a_n' - \sum_m \beta_m' b_{nm}' &= -\alpha_n' \quad n = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (II.63)$$

Sur la surface définie par  $x = \tau\psi/2$ , la dérivée normale  $\frac{\partial A_{1q}}{\partial x}(x=\tau\psi/2, y)$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial A_{1q}}{\partial x}(x=\tau\psi/2, y) &= 0 \quad \text{pour } -\tau\lambda \leq y \leq 0 \\ \frac{\partial A_{1q}}{\partial x}(x=\tau\psi/2, y) &= -A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{\text{ch } \pi y/\tau}{\text{sh } \pi\sigma} \sin \pi\psi/2 + \right. \\ &\quad \left. \sum_n \alpha_n' \frac{\text{ch } \pi(y/\tau - \sigma)}{\text{sh } \pi\sigma} \sin n\pi\psi/2 \right] \\ &\quad \text{pour } 0 \leq y \leq \tau\sigma \end{aligned} \right. \quad (II.64)$$

Le développement en série de Fourier de II.64 est analogue à celui de II.31 et s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{1q}}{\partial x}(x=\tau\psi/2, y) &= -A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{c_0'}{2} + \sum_n \alpha_n' \frac{d_n'}{2} + \right. \\ &\quad \left. \sum_m (c_m' + \sum_n \alpha_n' d_{mn}') \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} (y/\tau + \lambda) \right] \end{aligned} \quad (II.65)$$

La dérivée normale de  $A_{2q}$  pour  $x = \tau\psi/2$ , est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{2q}}{\partial x}(x=\tau\psi/2, y) &= \\ -A_0 \frac{\pi}{\tau} &\left[ \frac{\text{ch } \pi(y/\tau + \lambda)}{\text{sh } \pi\varepsilon} \sin \pi\psi/2 + \sum_m \frac{\beta_m'}{\varepsilon} \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} (y/\tau + \lambda) \right] \end{aligned} \quad (II.66)$$

Elle peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{\partial A_{2q}}{\partial x} (x=\tau\psi/2, y) = -A_0 \frac{\pi}{\tau} \left[ \frac{e_0}{2} + \sum_m \left( e_m' + \frac{\beta_m'}{\varepsilon} \right) \cos \frac{m\pi}{\varepsilon} (y/\tau + \lambda) \right] \quad (\text{II.67})$$

L'identification de II.65 et II.67 permet d'écrire :

$$c_m' + \sum_n \alpha_n' d_{mn} = e_m' + \beta_m'/\varepsilon \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{II.68})$$

avec la condition  $\beta_0' = 0$ .

Les équations II.63 et II.68 forment un système d'équations qui peut s'écrire :

$$[A'] - [B'] [ \beta' ] = - [ \alpha' ] \quad (\text{II.69-a})$$

$$[F'] + [D'] [ \alpha' ] = - [ \beta' ] \quad (\text{II.69-b})$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Les inconnues  $\alpha_n'$  et  $\beta_m'$  peuvent être déterminées par le même procédé décrit précédemment.

### Expression de l'inductance en quadrature

L'expression de l'inductance en quadrature  $L_q$  peut être déterminée à partir de l'énergie magnétique à la surface du stator; on obtient :

$$L_q = \mu_0 \frac{2 q L}{\pi p} (N K_b)^2 \operatorname{cth} \pi \sigma (1 + \alpha_i / \operatorname{ch} \pi \sigma) \quad (\text{II.70})$$

### II.4.3 Variations des inductances en fonction des paramètres géométriques

La courbe de la figure II.21 représente la variation des coefficients  $C_d$  et  $C_q$  en fonction de  $\psi$ , obtenue pour une machine ayant des entrefers réduits  $\sigma = 0.01$  et  $\lambda = 0.1$ .

Pour  $\psi$  inférieur à une valeur  $\psi_c$ ,  $C_d$  est supérieur à  $C_q$ ; le résultat est inversé pour  $\psi$  supérieur à  $\psi_c$ .

On met ainsi en évidence une des principales différences entre la machine non-excitée et la machine homopolaire.

Les courbes de la figure II.22 ont été tracées pour  $\sigma = 0.01$  et plusieurs valeurs de  $\lambda$ . Elles illustrent l'influence de l'épaisseur du grand entrefer. On remarque en particulier que la valeur de  $\psi_c$  diminue lorsque  $\lambda$  croît.

### II.4.4 Variation de l'induction normale à la surface du stator

Les expressions de la composante normale de l'induction magnétique à la surface du stator, suivant les axes direct et en quadrature, sont celles établies au paragraphe II.3.3.

Les figures II.23-a et II.23-b représentent les variations de  $B_{yd}$  et  $B_{yq}$  sur un double pas polaire, obtenues pour  $\psi = 0.5$  et  $\psi = 1$  respectivement.

On vérifie que pour  $x = 0$  ou  $x = \tau$ ,  $B_{yq}$  est nulle tandis que  $B_{yd}$  y présente un extrêmmum, et on montre que le point correspondant à  $B_{yd} = 0$  dépend de la largeur  $\psi$  de la dent rotorique.

Les résultats obtenus pour  $\psi = 1$  sont comparables à ceux obtenus par d'autres auteurs qui procèdent à des mesures locales du champ magnétique dans l'entrefer [20].



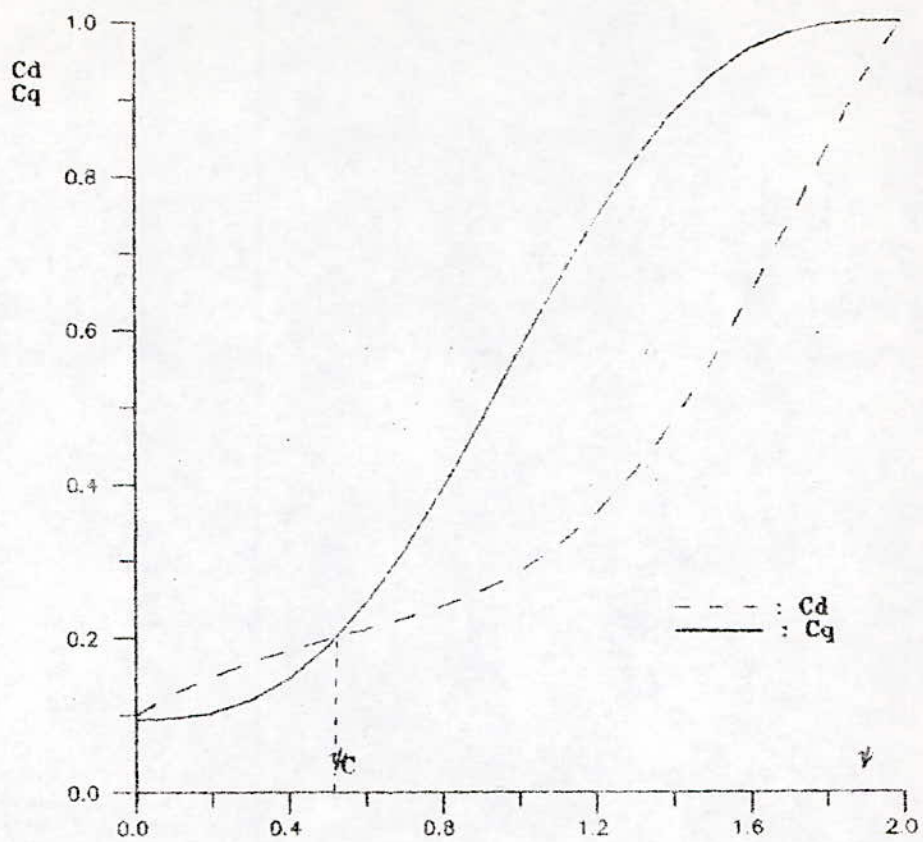
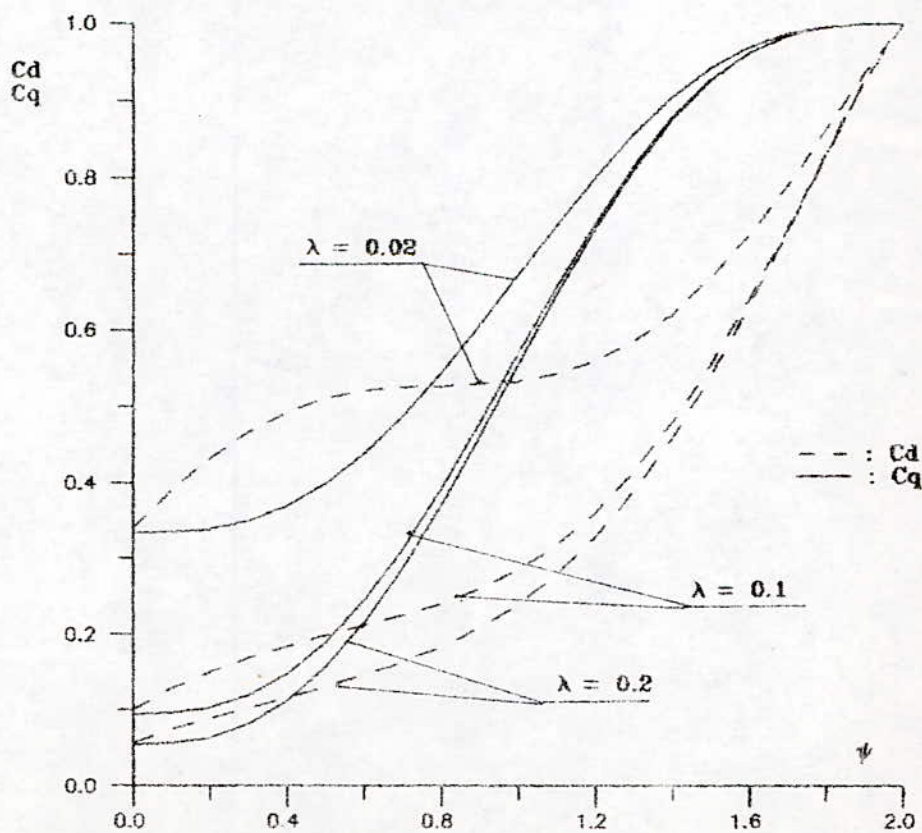
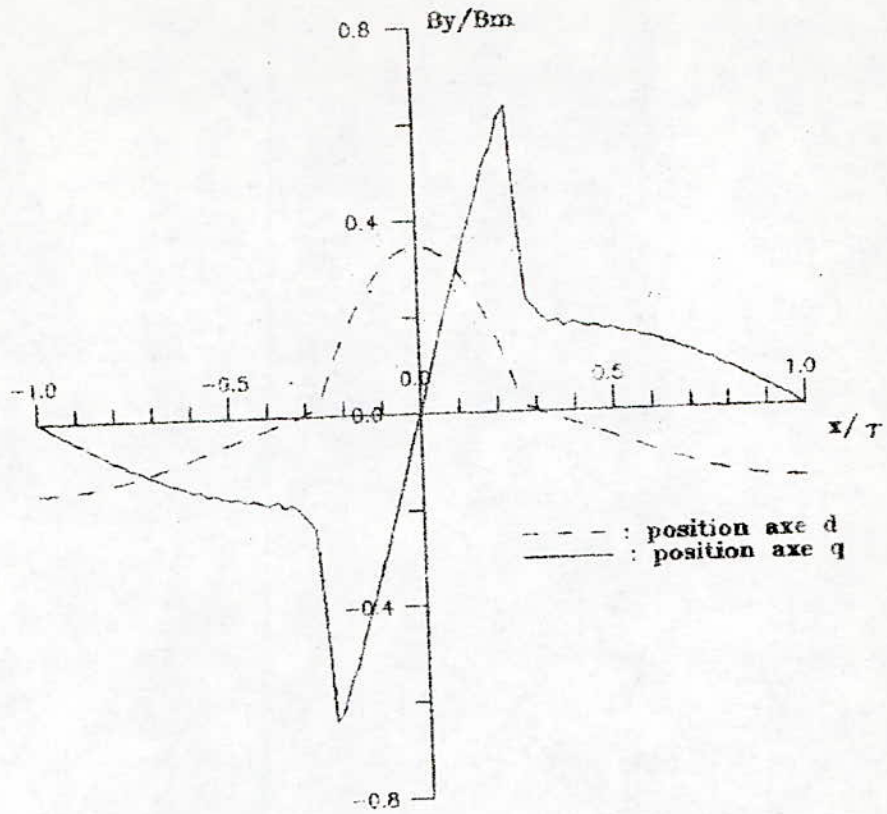


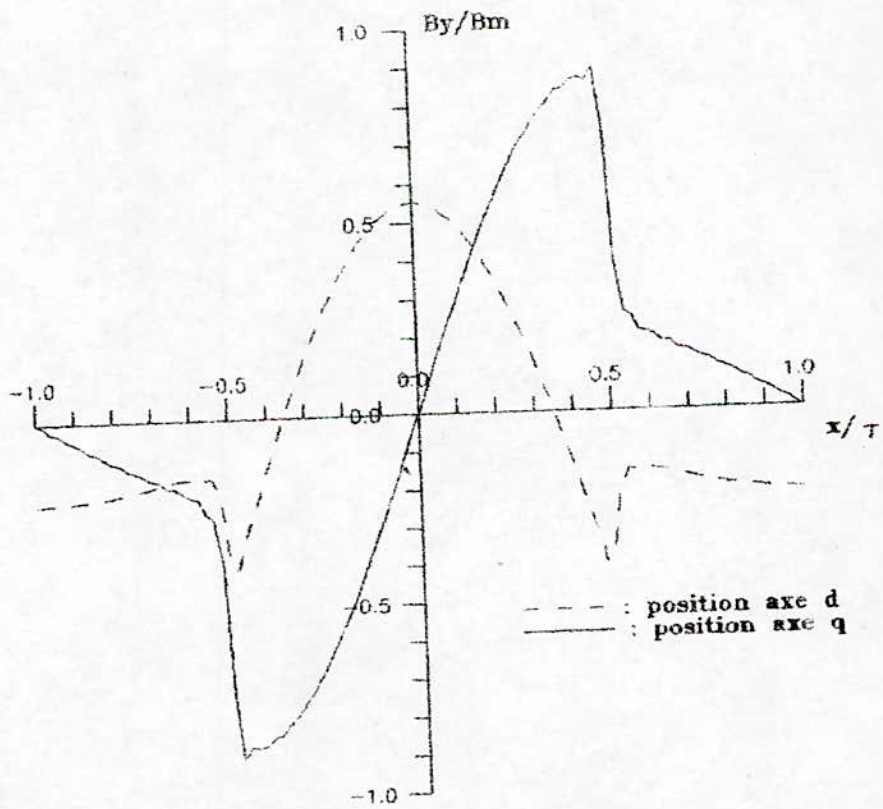
Figure II.21 : Variations de Cd et Cq en fonction de  $\psi$   
 $\sigma = 0.01$  ,  $\lambda = 0.1$



$\sigma = 0.01$  ,  $\lambda$  - paramètre



a)  $\sigma = 0.01$   $\lambda = 0.1$   $\psi = 0.5$



b)  $\sigma = 0.01$   $\lambda = 0.1$   $\psi = 1.0$

Figure II.23 : Variation de l'induction normale en fonction de  $x/\tau$

## CONCLUSION

Nous avons développé une méthode de calcul des réactances synchrones des MRV à stator lisse, en nous limitant au fondamental de la densité de courant à la surface du stator, et en négligeant la saturation du circuit magnétique. Cette méthode est basée sur la décomposition en série de Fourier de la composante axiale du potentiel vecteur dans l'entrefer que nous divisons en deux régions distinctes.

Les conditions aux limites et d'interfaces conduisent alors à un système d'équations que nous résolvons itérativement.

Ces calculs permettent alors l'optimisation de ces réactances en fonction des différents paramètres géométriques de la machine.

Les résultats sont comparables à ceux obtenus par d'autres auteurs.

## CHAPITRE III

### ETUDE EXPERIMENTALE

#### III.1 MACHINE NON-EXCITEE

III.1.1 Essais à vide

III.1.2 Essais en charge

III.1.3 Essais à faible glissement

#### III.2 MACHINE HOMOPOLAIRE

III.2.1 Caractéristiques de magnétisation  
et de court-circuit

III.2.2 Essais en charge

## INTRODUCTION

Nous présentons une étude expérimentale réalisée sur trois bancs d'essais de 4 kW, composés de deux MRV non-excitées, et d'une MRV homopolaire.

Les stators utilisés sont ceux de machines asynchrones classiques, tandis que les rotors réluctants sont en acier massif.

Nous nous intéressons particulièrement à la détermination des réactances synchrones de la machine.

### III.1 MACHINE NON-EXCITEE

Les essais ont concerné deux MRV ayant respectivement, 2 et 4 pôles, présentant les rotors massifs indiqués par la figure III.1, et les stators caractérisés par :

	Stator 1	Stator 2
Nombre de pôles :	2	4
Puissance nominale :	4.4 kW	3.7 kW
Tension nominale :	220/380 V	220/380 V
Courant nominal :	15.8/9.8 A	13.9/8 A
Fréquence d'alimentation :	50 Hz	50 Hz
Nombre d'encoches au stator :	36	36
Nombre de conducteurs par encoche :	20	40
Alésage intérieur du stator :	122 mm	122.8 mm
Double épaisseur de l'entrefer :	1.2 mm	1.2 mm
Longueur du fer utile :	90 mm	108.6 mm
Résistance d'une phase statorique :	1 $\Omega$	1.6 $\Omega$

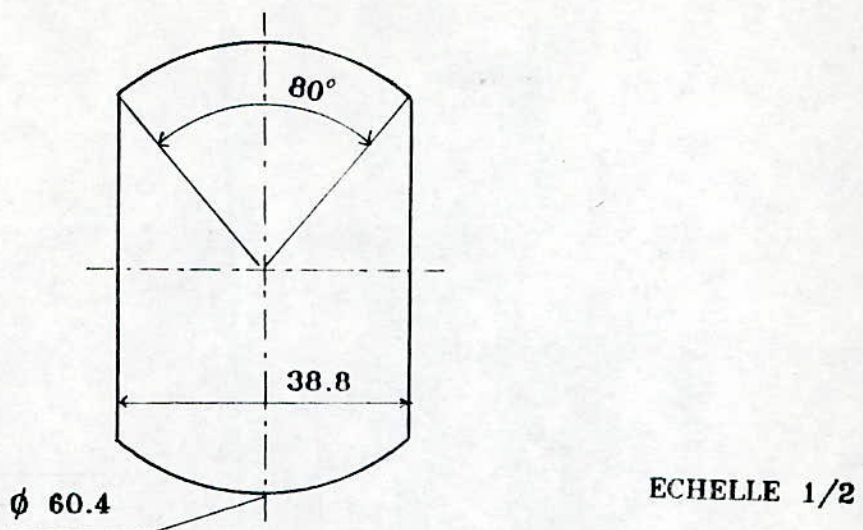


Figure III.1-a : Coupe transversale de la MRV à  $p = 1$

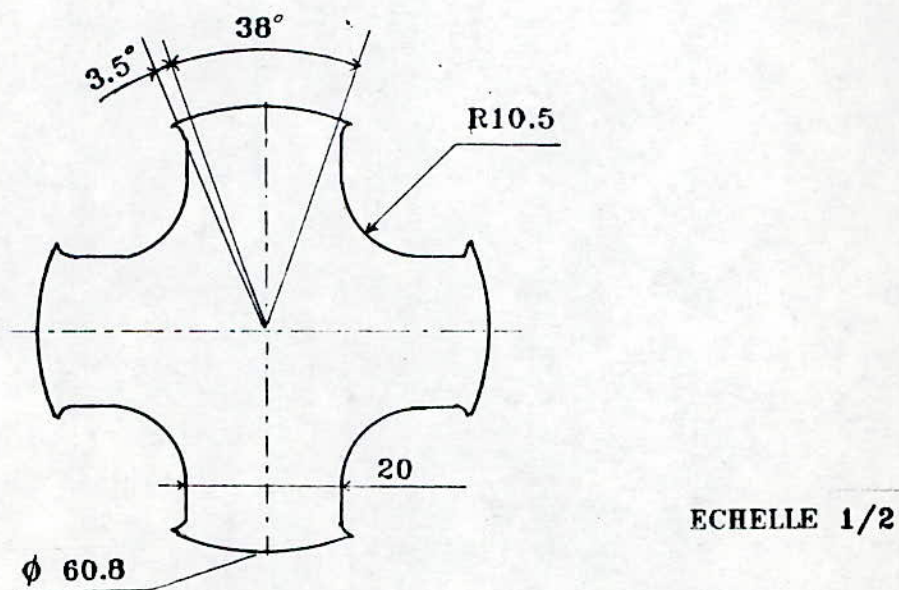


Figure III.1-b : Coupe transversale de la MRV à  $p = 2$

### III.1.1 Essais à vide

La MRV est alimentée, à fréquence constante, par différentes tensions  $V_0$ . Nous relevons le courant  $I_0$  et la puissance absorbée  $P_0$ .

A partir des équations de fonctionnement développées au chapitre I, on peut montrer que la réactance  $X_d$  peut être déterminée par :

$$X_d = \sqrt{\frac{V_0^2}{I_0^2} - R^2} \quad (\text{III.1})$$

où  $R$  est la résistance d'une phase statorique.

On doit toutefois corriger cette expression en tenant compte des pertes fer  $p_f$  et mécaniques  $p_m$  de la machine.

Ces pertes sont déterminées classiquement à partir de la figure III.2 représentant les variations de  $P_0 - P_{j0}$  en fonction de  $V_0^2$ .

On a en effet :

$$p_0 - p_{j0} = p_m + p_f \quad (\text{III.2})$$

$p_{j0}$  sont les pertes joules à vide.

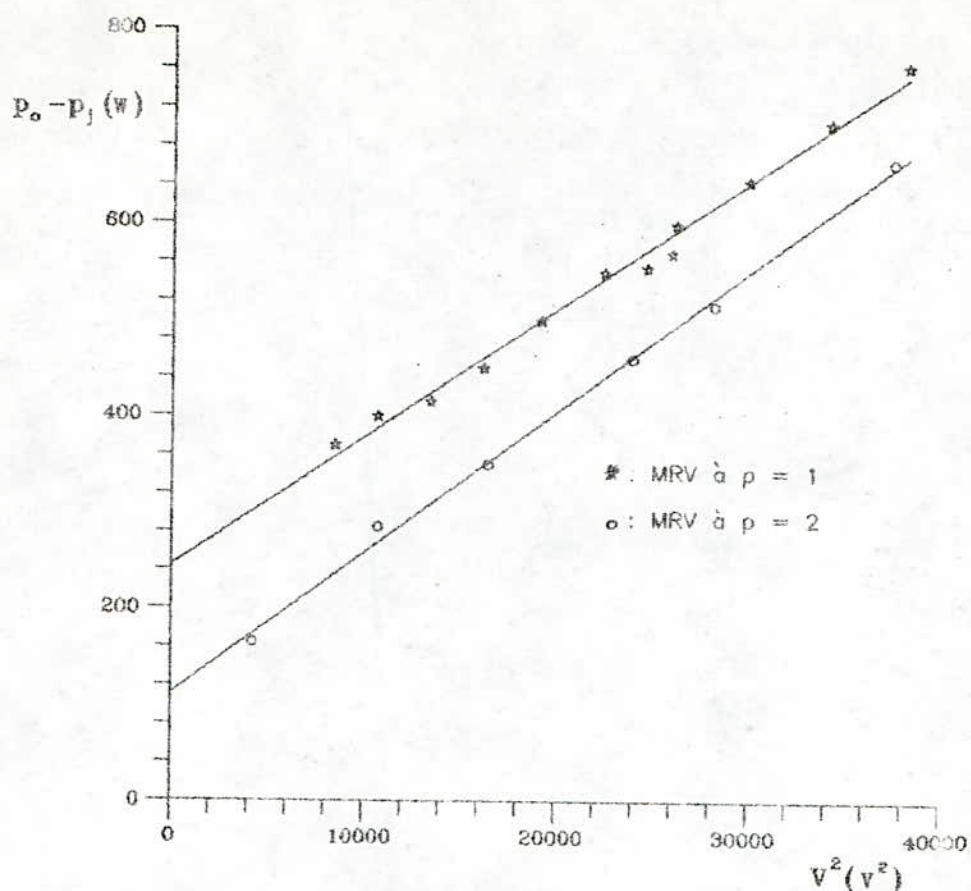


Figure III.2 : Variation de  $p_o - p_j$  en fonction de  $V^2$

Les figures III.3 représentent les variations des réactances des deux machines en fonction de la tension  $V_o$ .

Elles montrent que pour la machine à deux paires de pôles, la réactance est d'abord constante, puis diminue par suite de la saturation, alors que pour la machine à une paire de pôles qui possède un matériau rotorique différent,  $X_d$  croît avec la tension, passe par un maximum, puis diminue lorsque le fer est saturé.



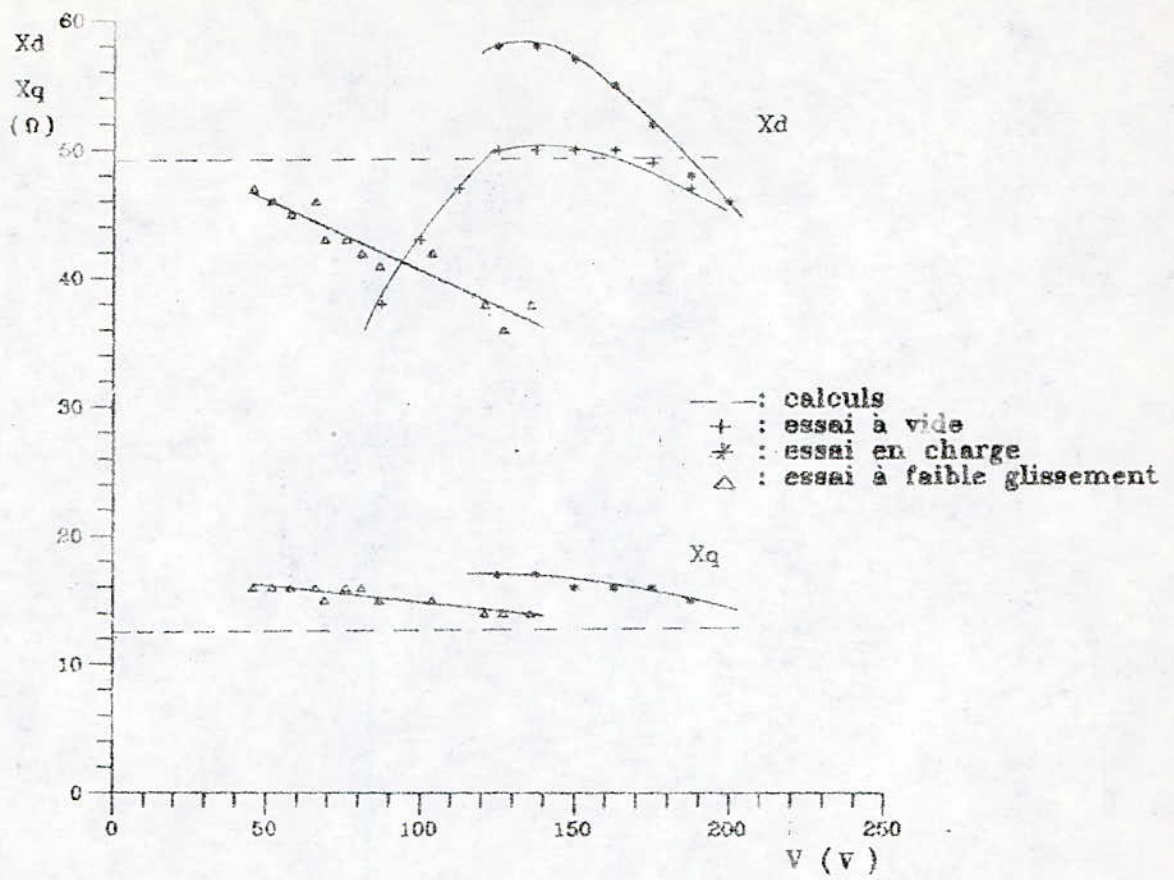


Figure III.3-a : Variation des réactances  $X_d$  et  $X_q$  en fonction de la tension d'alimentation.  $p = 1$

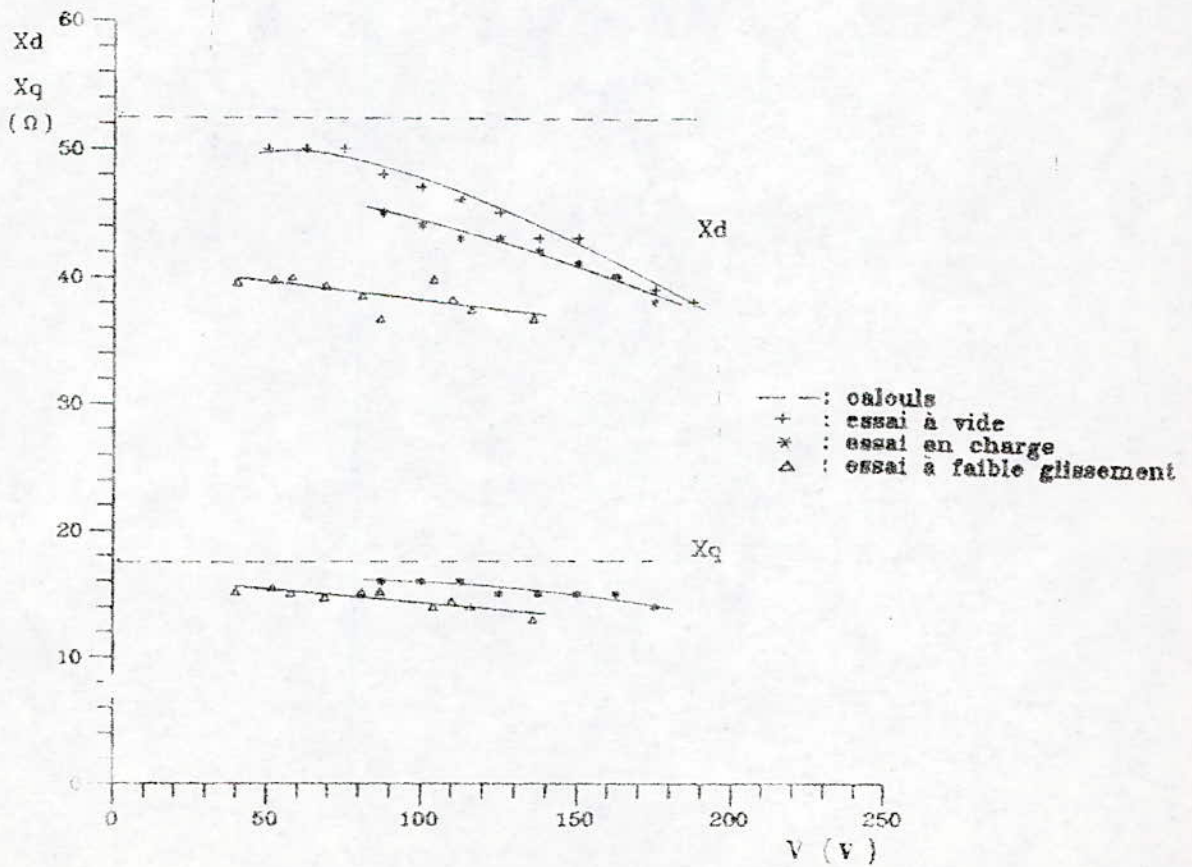


Figure III.3-b : Variation des réactances  $X_d$  et  $X_q$  en fonction de la tension d'alimentation.  $p = 2$

### III.1.2 Essais en charge

La MRV accrochée au réseau, est accouplée à une dynamo-balance étalonnée et reliée à un réseau à courant continu.

A 50 Hz, et pour différentes tensions, nous relevons le courant I, la tension V, ainsi que les puissances actives P et réactives Q absorbées par la machine, lorsque la charge varie.

Nous considérons le fonctionnement moteur et générateur.

En fonctionnement moteur, le rendement est déterminé directement par :

$$\eta = \frac{P_u}{P} = \frac{\Gamma_u \Omega}{P} \quad (\text{III.3})$$

où  $\Omega$  est la vitesse de rotation, et  $\Gamma_u$  le couple utile mesuré par la dynamo-balance.

Ce rendement admet un maximum pratiquement indépendant de la tension. Il est de 85 % pour la machine à quatre pôles et 63.5 % pour celle bipolaire ( figure III.4 ).

Le facteur de puissance correspondant admet un maximum indépendant de la tension d'alimentation ( figure III.5 ).

Ce maximum est plus important pour la machine à deux pôles (  $\cos \varphi_{\max} = 0.64$  ) que pour celle à 4 pôles (  $\cos \varphi_{\max} = 0.58$  ).

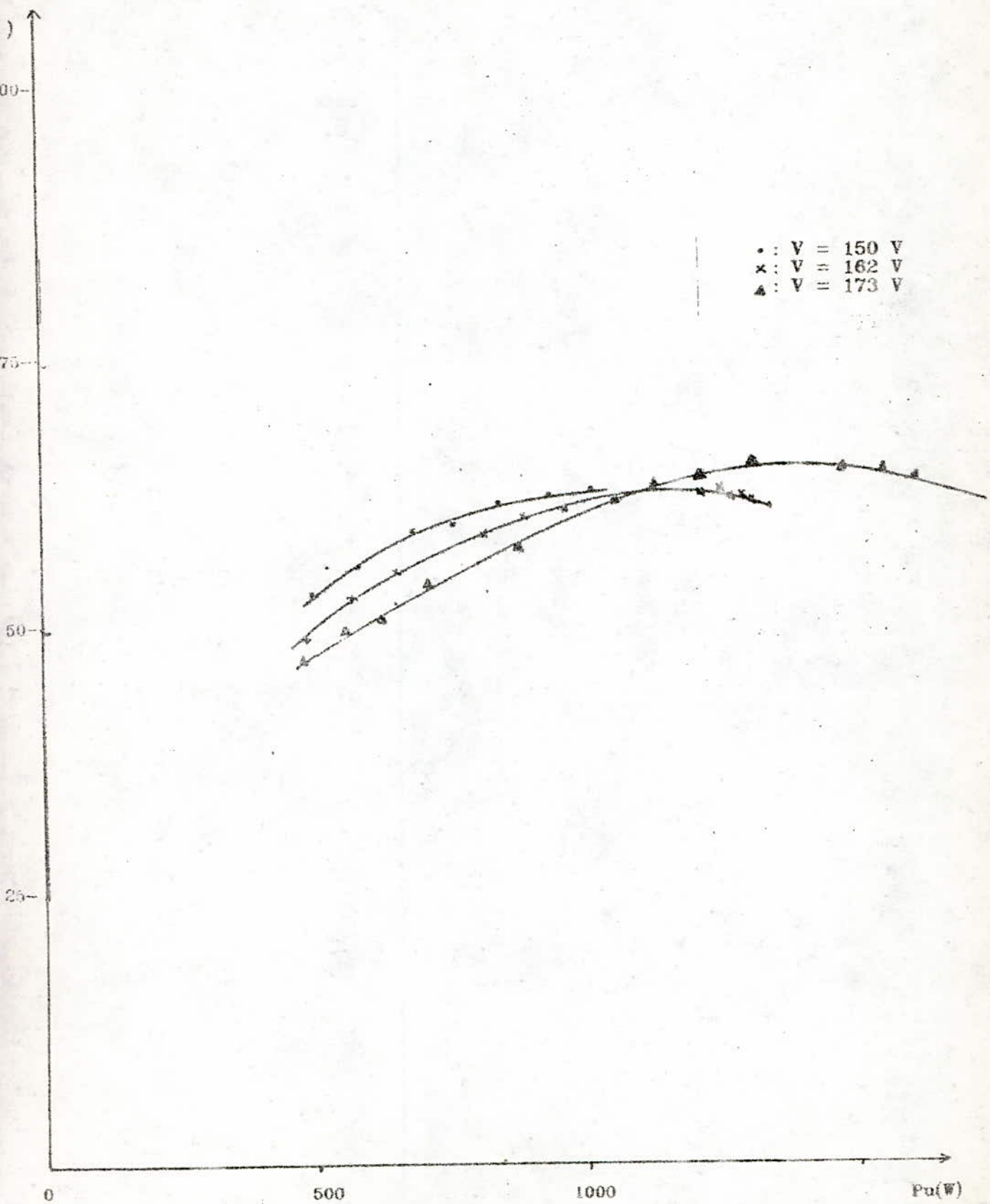


Figure III.4-a : Variation du rendement en fonction de la puissance utile.  $p = 1$

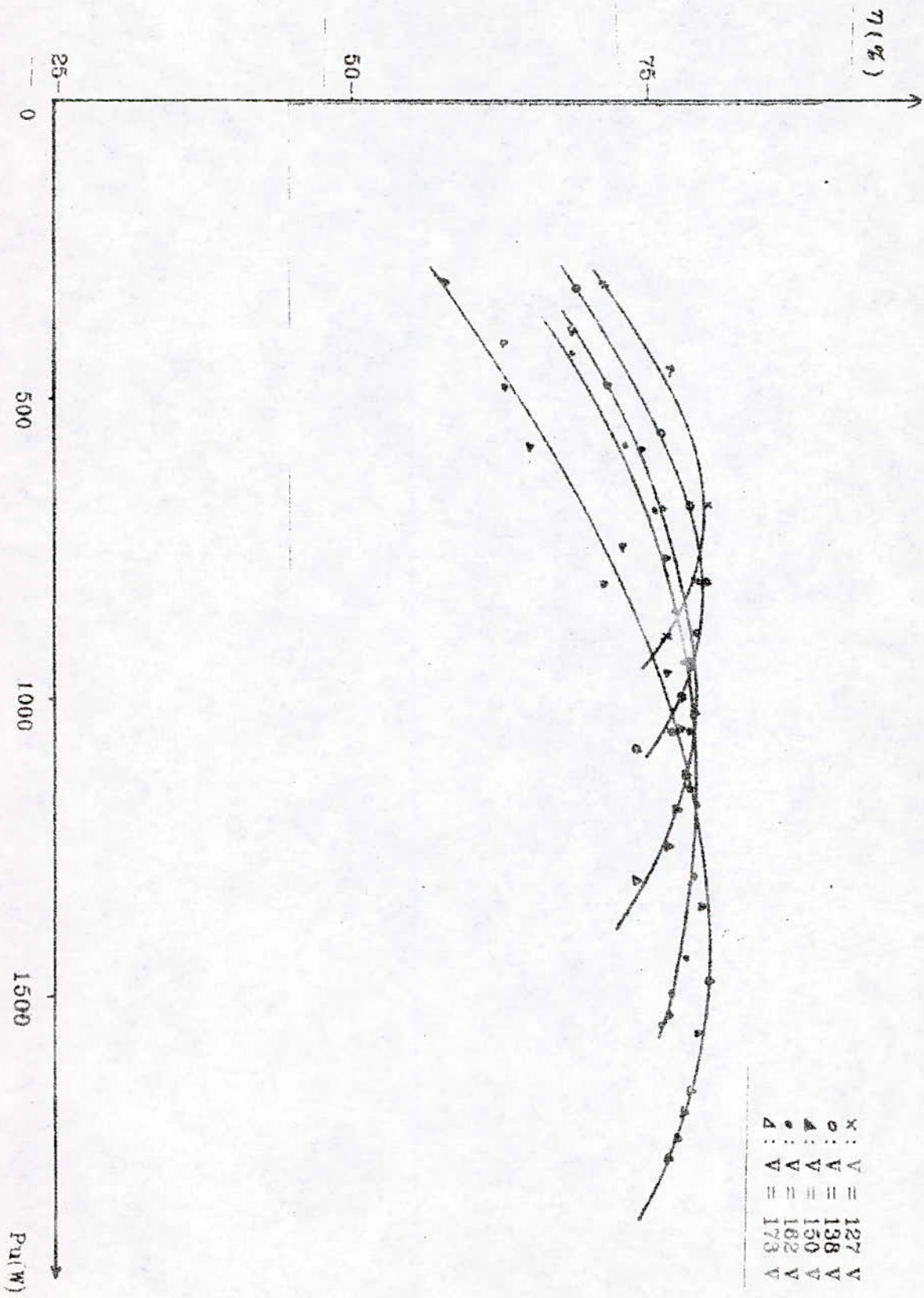


Figure III.4-b : Variation du rendement en fonction de la puissance utile.  $p = 2$

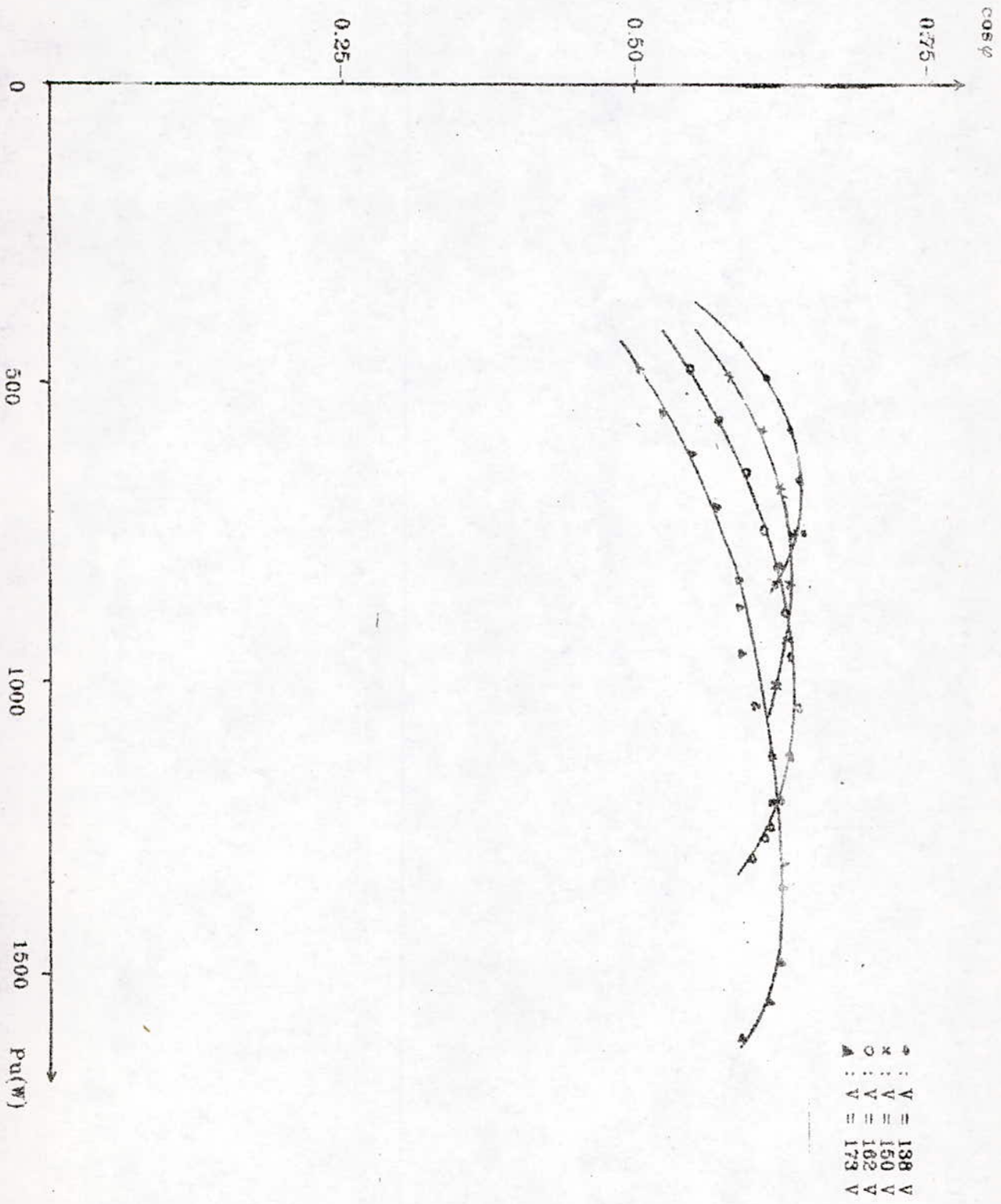


Figure III.5-a : Variation du facteur de puissance en fonction de la puissance utile,  $p = 1$

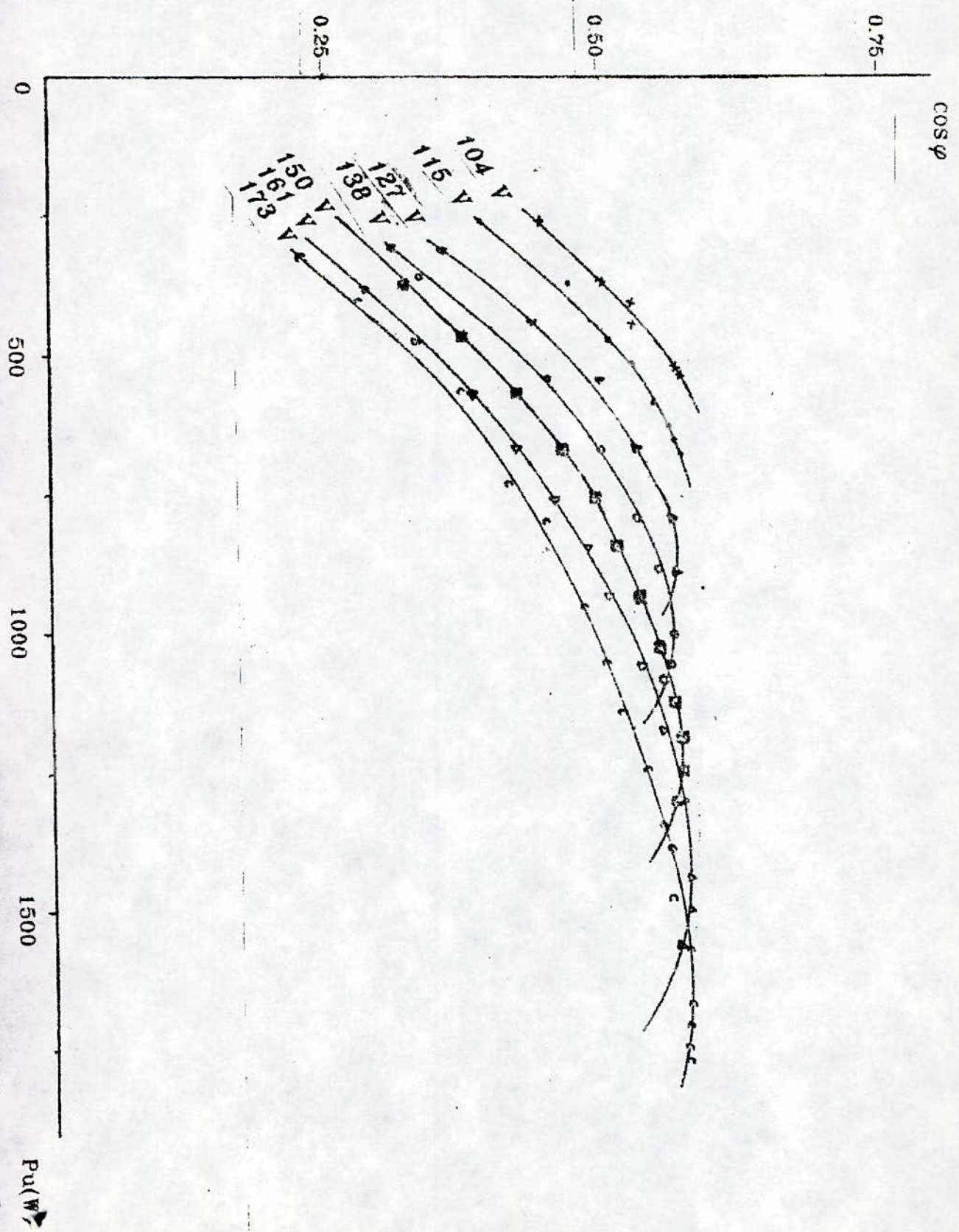


Figure III.5-b : Variation du facteur de puissance en fonction de la puissance utile.  $p = 2$

Dans le plan P-Q, les points de fonctionnement moteur et générateur, obtenus sous différentes tensions, se placent sensiblement sur des arcs de cercle de centre C et de rayon r (figure III.6). Ce résultat est en accord avec le calcul théorique développé au chapitre I.

Soient  $P_m$  et  $P_a$  les puissances actives maximales mesurées respectivement, en fonctionnement moteur et générateur, et soit  $Q_m$  la puissance réactive minimale absorbée par la machine.

Les réactances  $X_d$  et  $X_q$  peuvent alors être déterminées soit à partir du rayon r et du centre C (de coordonnées  $C_p$  et  $C_q$ ), soit à partir des puissances  $P_m$ ,  $P_a$  et  $Q_m$  [ 9 , 10 ].

On a en effet :

$$r = V \frac{X_d - X_q}{2 (R^2 + X_d X_q)} \quad (\text{III.4})$$

$$C_p + jC_q = V \frac{R - j(X_d + X_q)/2}{R^2 + X_d X_q} \quad (\text{III.5})$$

$$X_d/X_q = 1 + \frac{P_m + P_a}{Q_m} \quad (\text{III.6})$$

$$R/X_q = \frac{P_m - P_a}{2 Q_m} \quad (\text{III.7})$$

$$X_d = \frac{3 V^2}{Q_m} \frac{1}{[ (R/X_q)^2 (X_q/X_d) + 1 ]} \quad (\text{III.8})$$

P (kW)

2.0  
1.5  
1.0  
0.5  
0.0  
-0.5  
-1.0  
-1.5

- : V = 127 V
- : V = 138 V
- : V = 150 V
- : V = 161 V
- : V = 173 V

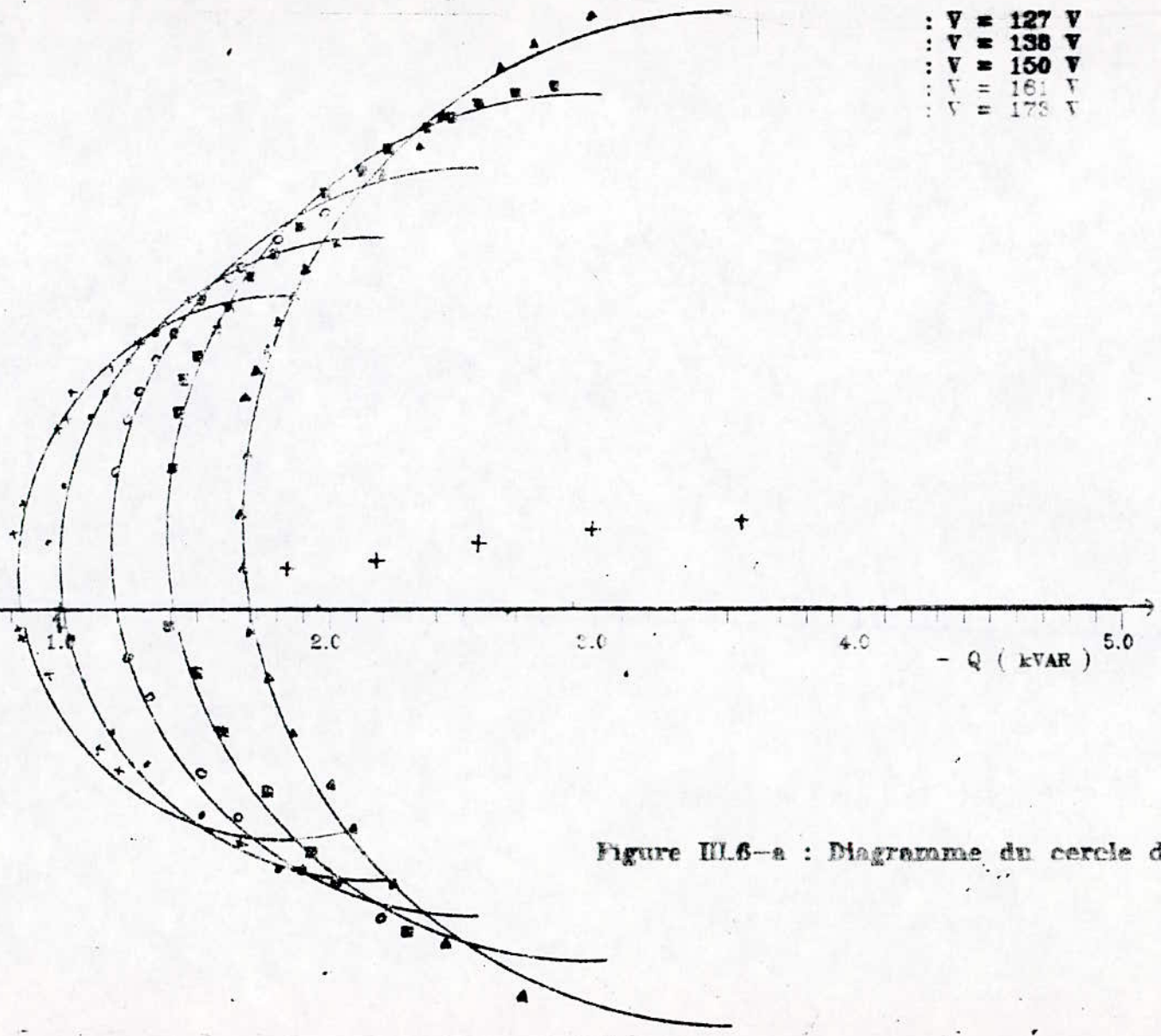


Figure III.6-a : Diagramme du cercle de la MRV à  $p = 1$



P ( kW )

2.0

1.5

1.0

0.5

0.0

-0.5

-1.0

-1.5

- : V = 92 V
- : V = 104 V
- : V = 115 V
- : V = 127 V
- : V = 138 V
- : V = 150 V
- : V = 161 V
- : V = 173 V

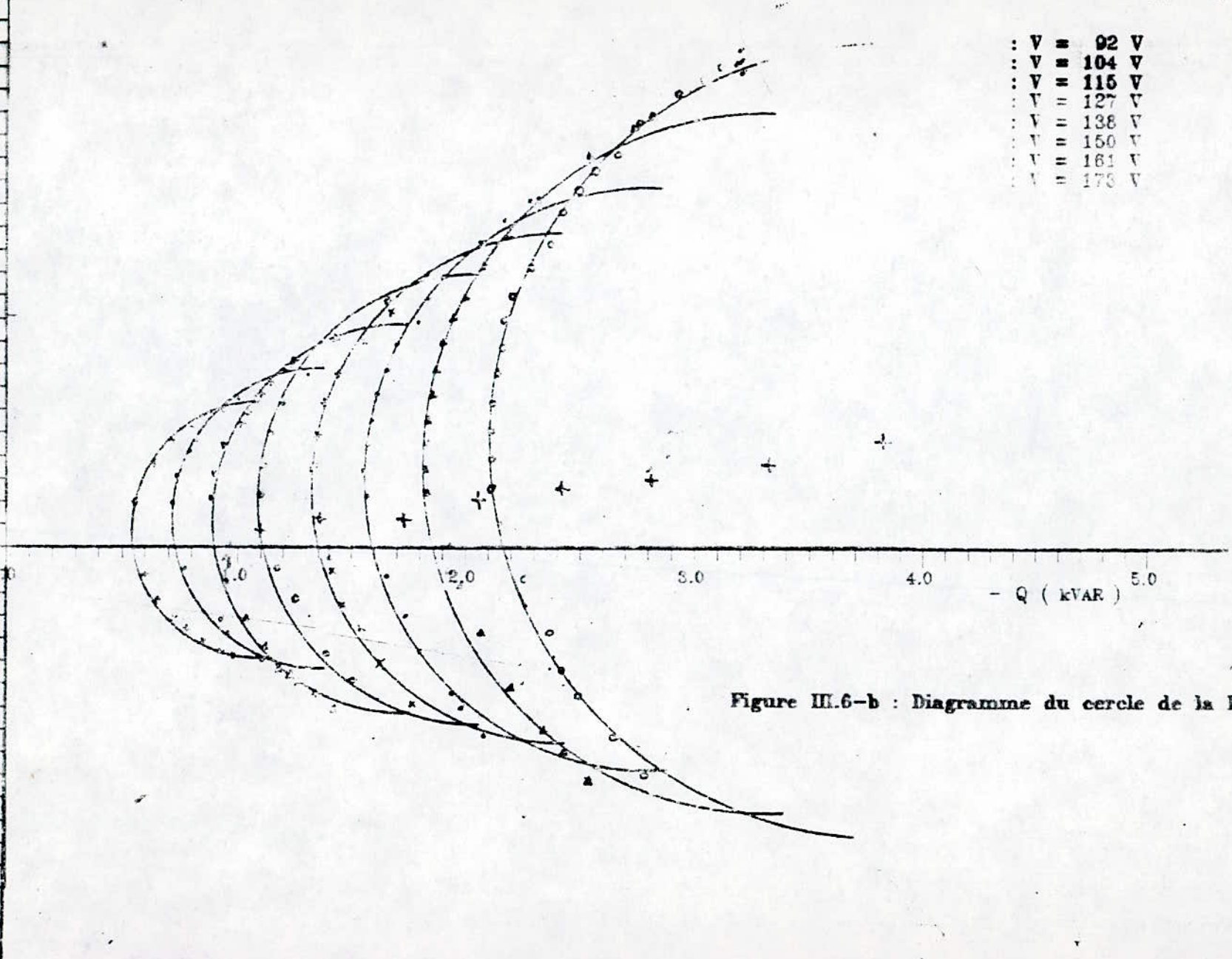


Figure III.6-b : Diagramme du cercle de la MRV à p = 2

es figures III.3 montrent que la réactance  $X_d$  ainsi déterminée, décroît pour les valeurs importantes de la tension, tandis que la réactance  $X_q$  reste sensiblement indépendante de l'état de saturation de la machine.

### II.1.3 Essai à faible glissement

On entraîne la machine à une vitesse proche du synchronisme, et on relève les variations du courant et de la tension statoriques en fonction du temps. Le courant est maximum en position transversale, et minimum en position longitudinale. On peut ainsi en déduire  $X_d$  et  $X_q$  pour chaque tension statorique (figure III.3).

### III.2 MACHINE HOMOPOLAIRE

Les essais ont concerné une MRV à quatre pôles, présentant un stator identique à celui de la machine non-excitée (stator 2), et un rotor possédant deux dents (figure III.7).

L'excitation de la machine est obtenue au moyen de deux bobines montées sur des poulies de même axe que le rotor, et placées au niveau des flasques de part et d'autre de celui-ci (figure I.2).

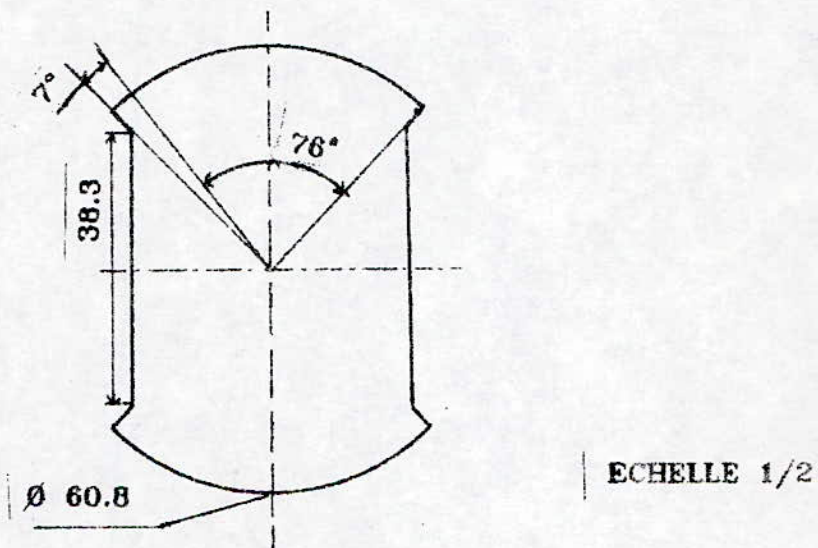


Figure III.7 : Coupe transversale du rotor de la machine homopolaire

### III.2.1 Caractéristiques de magnétisation $E(I_r)$ et de court-circuit $I_{cc}(I_r)$

La figure III.8 qui représente la caractéristique  $E(I_r)$  obtenue à 1500 tr/mn, montre que la machine sature pour un courant d'excitation  $I_r = 3$  A, et que la fém correspondante est faible par suite de la mauvaise utilisation du matériau magnétique.

La caractéristique  $I_{cc}(I_r)$  relevée à 1500 tr/mn, en court-circuitant les trois phases de l'induit, est représentée par la figure III.9.

Ces caractéristiques permettent la détermination de  $X_d$  par la relation :

$$E = X_d I_{cc} \quad (III.9)$$

qui peut être obtenue à partir des équations de fonctionnement développées au chapitre I, lorsqu'on néglige la résistance statorique.

La réactance ainsi déterminée est pratiquement indépendante de l'état de saturation de la machine (figure III.10), et elle est environ égale à  $13 \Omega$ .

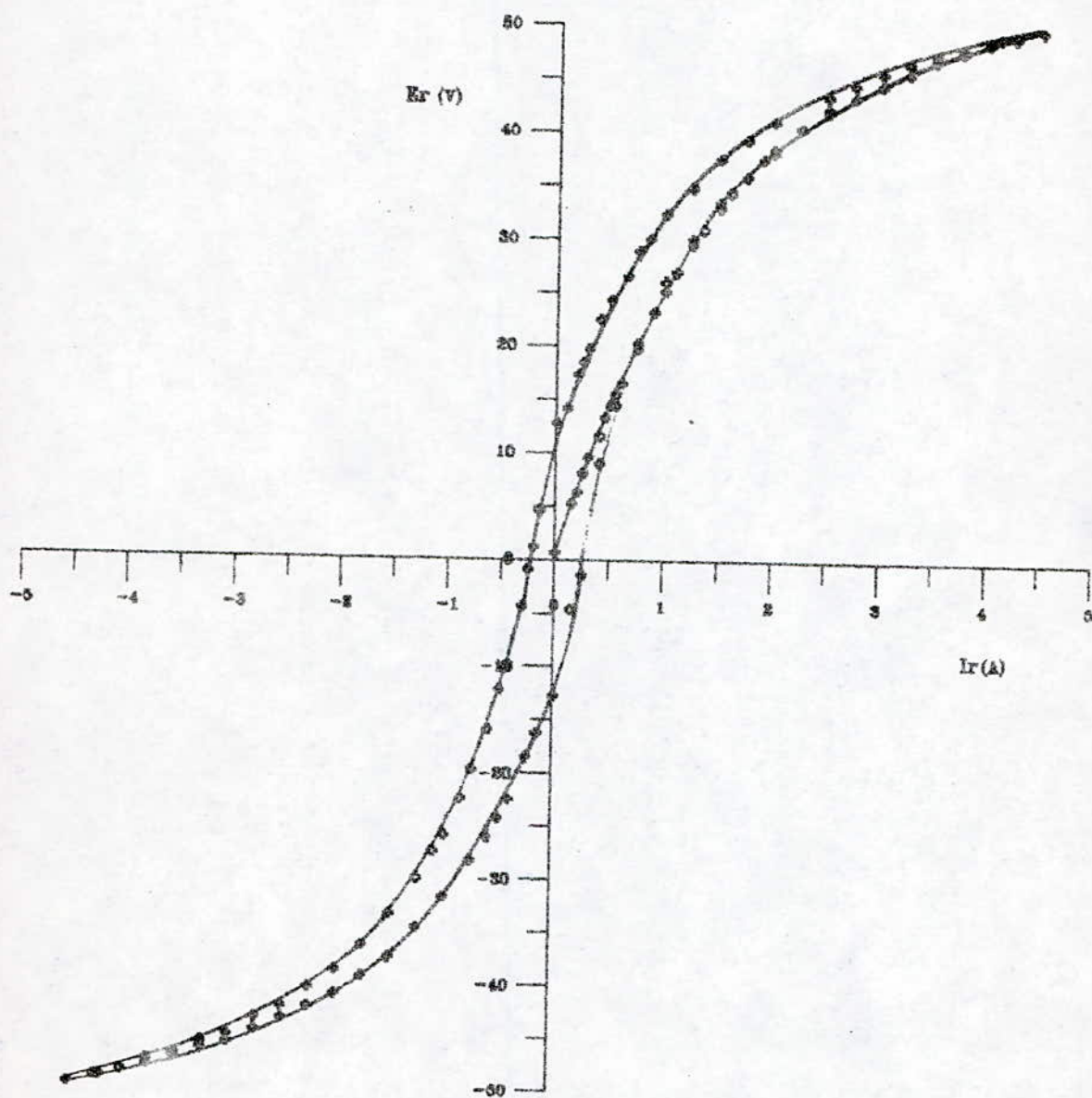


Figure III.8 : caractéristique à vide

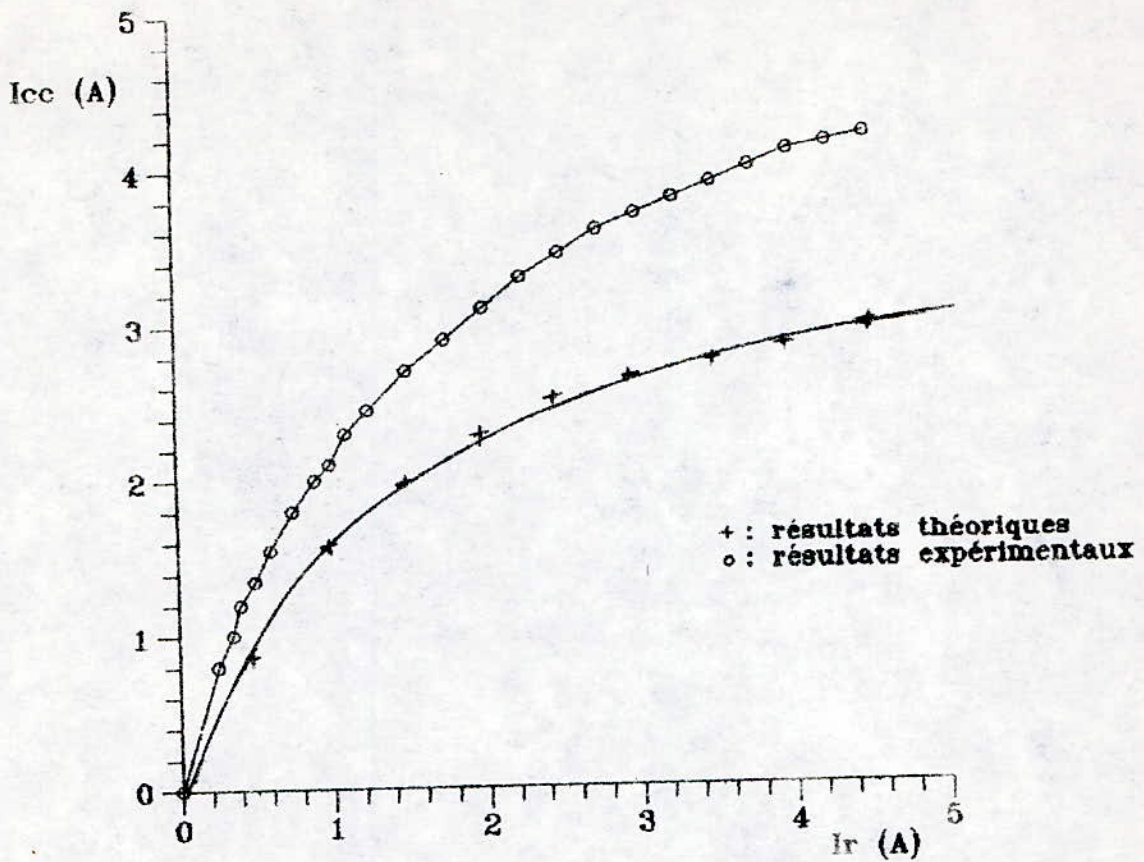


Figure III.9 : Caractéristique de court-circuit

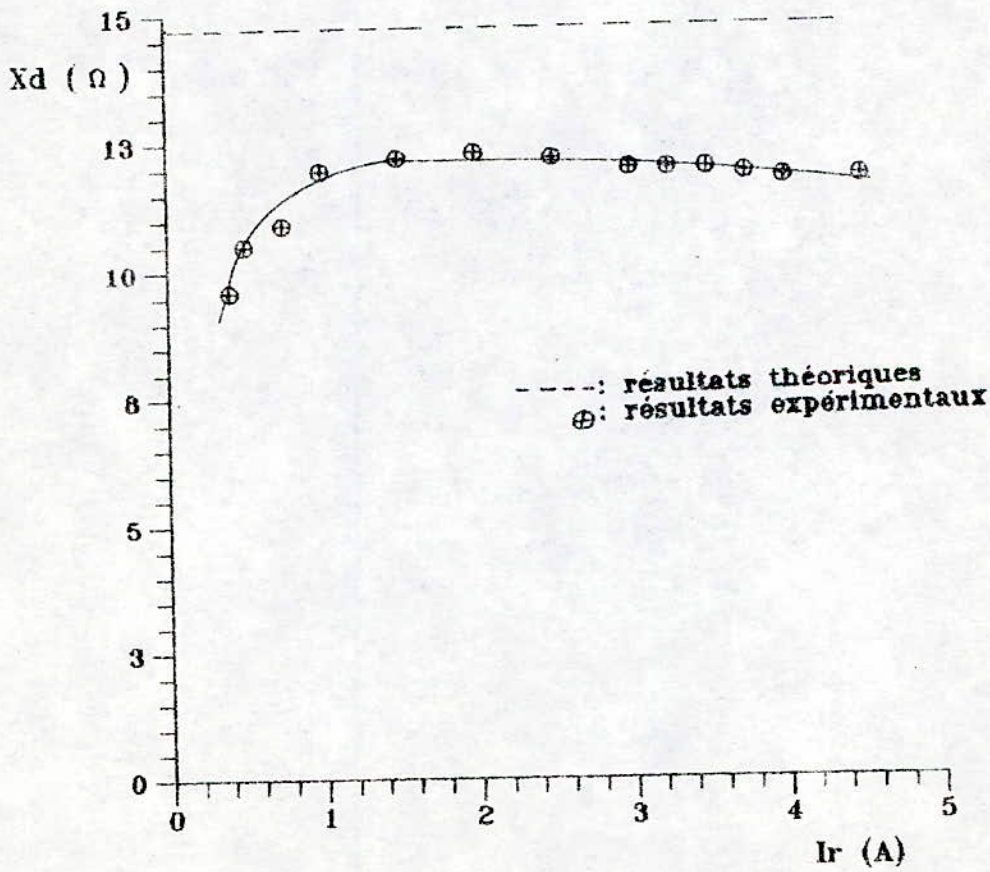


Figure III.10 : Variation de  $X_d$  en fonction du courant d'excitation

### III.2.2 Essais en charge

La machine accrochée au réseau à travers un autotransformateur, est accouplée à une dynamo-balance reliée à un réseau continu.

Comme pour la MRV non-excitée, nous déterminons les variations du rendement et du facteur de puissance en fonction de la puissance utile (figure III.11).

Les courbes obtenues sous 127 V et pour deux valeurs du courant d'excitation ( $I_r = 3 \text{ A}$  et  $4 \text{ A}$ ), montrent que le rendement est faible, et qu'il faudrait concevoir des machines ayant des tensions nominales comparables à la fém à vide, pour améliorer le facteur de puissance.

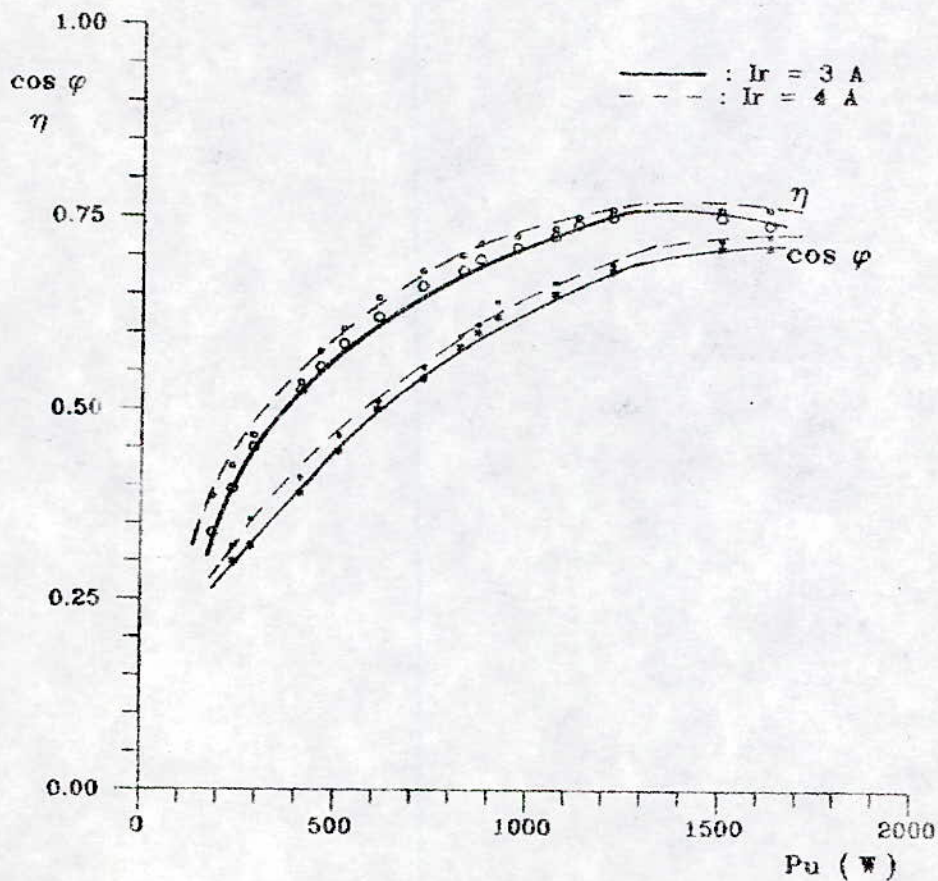


Figure III.11 : Variation du rendement et du facteur de puissance en fonction de la puissance utile

Dans le plan P-Q, le lieu des points de fonctionnement sous 47 V et à  $I_r$  donné, est une conchoïde de cercle qui se déplace vers les puissances réactives négatives lorsque l'excitation augmente (figure III.12). On confirme le calcul théorique développé au chapitre I, et on montre l'amélioration du facteur de puissance.

Ces essais mettent en évidence que le point de base des conchoïdes est compris entre O et A, comme sur la figure I.20.

Notre machine, qui possède un angle d'ouverture de la dent rotorique égal à un pas polaire, se caractérise donc par  $X_d < X_q$ . Ce résultat est conforme à celui théorique obtenu au chapitre II (figure II.21).

Les réactances  $X_d$  et  $X_q$  peuvent être déterminées en fonctionnement non-excité, par la détermination du centre C (de coordonnées  $C_p$  et  $C_a$ ) et du rayon  $r$  du cercle de base.

Nous avons effectué cet essai sous 136 V (figure III.13), pour avoir plusieurs points de fonctionnement stable. En effet, pour notre machine, il faudrait des tensions supérieures à 86 V pour assurer le maintien du synchronisme.



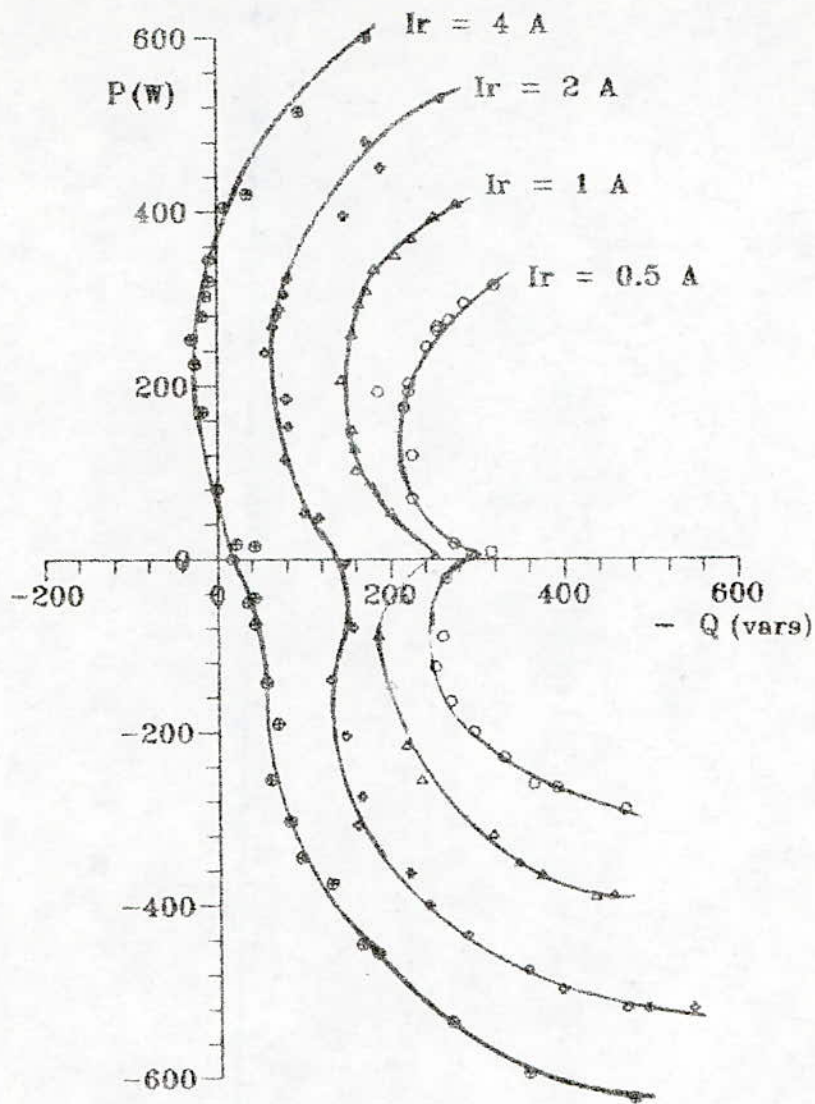


Figure III.12 : Diagramme dans le plan P-Q.  $V = 47 \text{ V}$

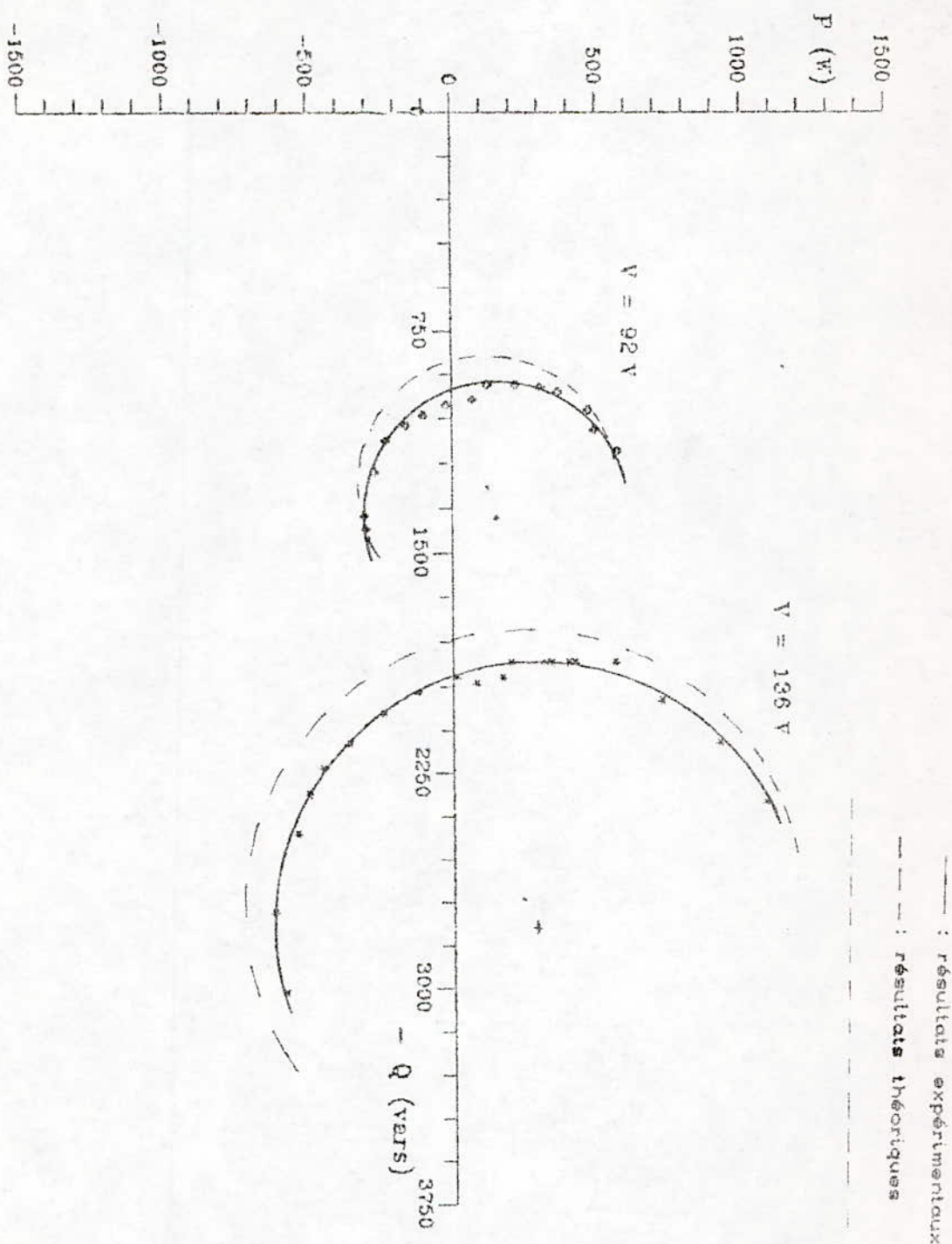


Figure III.13 : Diagrammes à excitation nulle

On trouve :

$$C_p = 300 \text{ W} , \quad C_a = 2794 \text{ VAR} , \quad r = 916 \text{ W} ,$$

et on en déduit :

$$X_d = 23.2 \ \Omega , \quad X_q = 14 \ \Omega .$$

La réactance directe ainsi obtenue est comparable à celle déterminée par les essais à vide et en court-circuit (figure III.10).

## CONCLUSION

L'étude expérimentale effectuée sur les deux machines non-excitées nous a permis

- de vérifier que dans le plan P-Q, les points de fonctionnement à tension constante se placent sur des arcs de cercle.

- de montrer que les valeurs maximales du rendement et du facteur de puissance sont relativement faibles, et qu'elles ne dépendent pratiquement pas de la tension d'alimentation. Ces valeurs maximales sont plus importantes pour la configuration quadripolaire.

Les réactances  $X_d$  et  $X_q$  ont ensuite été déduites à partir des essais à vide, en charge ainsi qu'à faible glissement. La variation de ces réactances en fonction de la tension d'alimentation diffère d'un essai à l'autre, et notamment suivant l'axe d. Cette différence serait due principalement à l'influence de la saturation du circuit magnétique de la machine, ainsi qu'aux courants harmoniques induits dans le rotor.

les essais en charge effectués sur la machine homopolaire, ont montré l'amélioration du facteur de puissance et mis en évidence que pour notre machine, la réactance  $X_d$  est inférieure à  $X_q$ ; ce qui est conforme aux calculs théoriques.

## CONCLUSION GENERALE

Nous nous sommes intéressés dans ce travail à l'étude des machines à réluctance variable destinées aux applications de grandes puissances nécessitant des grandes vitesses de rotation.

Nous avons montré qu'en négligeant les harmoniques, leur modèle peut être ramené à celui des machines à rotor feuilleté classiques; toutefois, la configuration homopolaire peut avoir  $X_d < X_q$ , ce qui conduit à deux types de diagrammes nettement distincts.

Nous avons ensuite développé une méthode de calcul des réactances synchrones de la machine, en nous limitant au fondamental de la densité de courant à la surface du stator, et en négligeant la saturation du circuit magnétique. Cette méthode est basée sur la décomposition en série de Fourier de la composante axiale du potentiel vecteur dans l'entrefer que nous divisons en deux régions distinctes.

Ces calculs permettent alors l'optimisation de ces réactances en fonction des différents paramètres géométriques de la machine. Les résultats sont comparables à ceux obtenus par d'autres auteurs.

Les essais effectués sur trois bancs d'essais de 4 kW, nous ont ensuite permis de vérifier que le modèle théorique est acceptable, et qu'il serait souhaitable de le développer par une prise en compte des harmoniques ainsi que de la saturation du circuit magnétique.

## ANNEXE

---

### EXPRESSION DES FLUX DANS LA MACHINE TENANT COMPTE DES HARMONIQUES D'ESPACE ET DE TEMPS

#### A.1 Expression des flux dans les différents enroulements

En supposant que la machine fonctionne en régime non saturé, les relations entre les flux et les courants circulant dans les différents enroulements sont donnés par la relation I.4 que nous rappelons :

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{d1} & M_{12} & M_{13} & M_{1r} \\ M_{21} & L_{22} & M_{23} & M_{2r} \\ M_{31} & M_{32} & L_{33} & M_{3r} \\ M_{r1} & M_{r2} & M_{r3} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_r \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

L'expression A.1 peut se mettre sous la forme condensée suivante:

$$\begin{bmatrix} \Psi^s \\ \Psi^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^s & \mathcal{L}^{sr} \\ \mathcal{L}^{rs} & \mathcal{L}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^s \\ i^r \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Les différentes matrices intervenant dans l'expression A.2, sont définies au § I.2.

## 1.2 Expression développée des flux

Après avoir tenu compte des développements en série de Fourier des différentes inductances propres et mutuelles, les matrices d'inductances  $[ \mathcal{L}^s ]$  et  $[ \mathcal{L}^{sr} ]$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 [ \mathcal{L}^s ] &= \sum_{k=0}^{\infty} [ \mathcal{L}_{2k}^s ] = \\
 &= \begin{bmatrix} L_{2k} \cos 2k\theta & M_{2k} \cos 2k(\theta - \frac{\pi}{3}) & M_{2k} \cos 2k(\theta + \frac{\pi}{3}) \\ M_{2k} \cos 2k(\theta - \frac{\pi}{3}) & L_{2k} \cos 2k(\theta - \frac{2\pi}{3}) & M_{2k} \cos 2k\theta \\ M_{2k} \cos 2k(\theta + \frac{\pi}{3}) & M_{2k} \cos 2k\theta & L_{2k} \cos 2k(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$[ \mathcal{L}^{sr} ] = \sum_{\substack{l=0 \\ l=-1/2}}^{\infty} M_{2l+1} \begin{bmatrix} \cos (2l+1)\theta \\ \cos (2l+1)(\theta - 2\pi/3) \\ \cos (2l+1)(\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

En régime triphasé équilibré, les décompositions en série de Fourier des courants statoriques s'écrivent :

$$[ i^s ] = \sum_{m=1}^{\infty} [ i_m^s ] = \sum_{m=1}^{\infty} I_m \sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos m(\omega t - \varphi_m) \\ \cos m(\omega t - \varphi_m - 2\pi/3) \\ \cos m(\omega t - \varphi_m + 2\pi/3) \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

Où  $I_m$  est la valeur efficace de l'harmonique d'ordre  $m$ .

Les relations A.3, A.4 et A.5 permettent d'écrire la matrice des flux induits et inducteur sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \Psi^s \\ \Psi^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_{2k}^{ss} & \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{L}_{2l+1}^{sr} \\ \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{L}_{2l+1}^{rs} & \mathcal{L}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} i_m^s \\ i^r \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Soient  $\Psi_{\alpha\beta}^s$  et  $i_{\alpha\beta}^s$  respectivement, les flux et les courants dans les enroulements  $\alpha\text{-}\beta$ , l'utilisation de la transformation de Concordia, définie au § 1.2, permet alors d'écrire :

$$\begin{bmatrix} \Psi_{\alpha\beta}^s \\ \Psi^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\alpha\beta}^{ss} & \mathcal{L}_{\alpha\beta}^{sr} \\ \mathcal{L}_{\alpha\beta}^{rs} & \mathcal{L}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha\beta}^s \\ i^r \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Avec :

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta}^{ss} = T^{-1} \mathcal{L}^{ss} T \quad (\text{A.8})$$

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta}^{sr} = T^{-1} \mathcal{L}^{sr} \quad (\text{A.9})$$

$$i_{\alpha\beta}^s = T^{-1} i^s \quad (\text{A.10})$$



La décomposition de chaque élément en série de Fourier reste valable puisque T est indépendante de k, l et m; la relation des flux devient :

$$\begin{bmatrix} \Psi^s_{\alpha\beta} \\ \Psi^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}^s_{\alpha\beta, 2k} & \sum_{\substack{l=0 \\ l=-1/2}}^{\infty} \mathcal{L}^{sr}_{\alpha\beta, 2l+1} \\ \sum_{\substack{l=0 \\ l=-1/2}}^{\infty} \mathcal{L}^{rs}_{\alpha\beta, 2l+1} & \mathcal{L}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} i^s_{\alpha\beta, m} \\ i^r \end{bmatrix}$$

(A.11)

### A.3 Calcul des termes généraux des différentes sommations

Le calcul de  $\mathcal{L}^s_{\alpha\beta, 2k} = T^{-1} \mathcal{L}^s_{2k} T$  montre qu'il peut se mettre sous une forme acceptable à condition d'introduire le symbole  $a_k$

$$\begin{aligned} a_k &= 0 & \text{si } k &= 3h & (h = 0, 1, 2, \dots) \\ a_k &= 1 & \text{si } k &= 3h + 1 \\ a_k &= -1 & \text{si } k &= 3h + 2 \end{aligned}$$

Nous posons :

$$\begin{aligned} L_{2k} + 2(-1)^k M_{2k} &= \Lambda_{1,2k} \\ L_{2k} - 2(-1)^k M_{2k} &= \Lambda_{2,2k} \end{aligned} \quad (A.12)$$

La matrice  $\mathcal{L}_{\alpha\beta,2k}^s$  ne comporte plus que des fonctions trigonométriques de l'angle  $\theta$ , et s'écrit :

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta,2k}^s = \begin{bmatrix} \left[ (1-a_k^2) \Lambda_{2,2k} + a_k^2 \frac{\Lambda_{1,2k}}{2} \right] \cos 2k\theta & - a_k \frac{\Lambda_{1,2k}}{2} \sin 2k\theta \\ - a_k \frac{\Lambda_{1,2k}}{2} \sin 2k\theta & \left[ (1-a_k^2) \Lambda_{2,2k} - a_k^2 \frac{\Lambda_{1,2k}}{2} \right] \cos 2k\theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

En introduisant le symbole  $a_{2l+1}$ , analogue au symbole  $a_k$ , défini par :

$$\begin{aligned} a_{2l+1} &= 0 & \text{si } 2l+1 &= 3h \\ a_{2l+1} &= 1 & \text{si } 2l+1 &= 3h+1 \\ a_{2l+1} &= -1 & \text{si } 2l+1 &= 3h+2 \end{aligned}$$

la matrice  $\mathcal{L}_{\alpha\beta,2l+1}^{sr}$  s'écrit :

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta,2l+1}^{sr} = \sqrt{3/2} M'_{2l+1} \begin{bmatrix} a_{2l+1}^2 \cos (2l+1)\theta \\ a_{2l+1} \sin (2l+1)\theta \end{bmatrix}$$

(A.14)

La transformation de Concordia appliquée à la matrice de courants donne :

$$i_{\alpha\beta,m}^s = \sqrt{3} I_m \begin{bmatrix} a_m^2 \cos m (\omega t - \varphi_m) \\ a_m \sin m (\omega t - \varphi_m) \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Les expressions A.13, A.14, A.15 permettent alors de calculer les divers flux à l'aide de la relation A.11.

Le couple électromagnétique est défini par :

$$\Gamma = \frac{1}{2} [ i ]^t \frac{\partial [ \Psi ]}{\partial \theta} \quad (\text{A.16})$$

$$\text{où } [ \Psi ] = \begin{bmatrix} \Psi_{\alpha\beta}^s \\ \Psi_r \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [ i ] = \begin{bmatrix} i_{\alpha\beta}^s \\ i_r \end{bmatrix}$$

Les conditions d'existence d'un couple moyen non permettraient alors la détermination des vitesses de rotation possibles en fonction des rangs  $k$ ,  $l$  et  $m$  des harmoniques.

## B I B L I O G R A P H I E

- [1] A. WIART, G. CAUSSIN, M. MARCHENOIR "Machine homopolaire alimentée par onduleur de courant pour entraînement de grande puissance à grande vitesse". Revue Générale de l'Electricité, oct. 1984.
- [2] F. MEIBODY TABAR "Etude d'une machine synchrone à réluctance variable pour les applications à grande vitesse". Thèse de Doctorat de l'INPL, Nancy (France) 1986.
- [3] P.J. LAWRENSON "Two speed operation of salient-pole reluctance machines". Proc. IEE, vol 112, No 12, dec. 1965.
- [4] V.B. HONSINGER "The inductances  $L_d$  and  $L_q$  of reluctance machines". IEEE, PAS, jan-feb 1971.
- [5] K.P.P. PILLAI "Torque calculation of polyphase reluctance machines". IEEE, PAS, dec. 1967.
- [6] F.M. SARGOS "Etude théorique des performances des machines à réluctance variable". Thèse de Doctorat ès-Sciences, Nancy (France) 1981.
- [7] J.M. KAUFFMANN "Contribution à l'étude d'une machine synchrone homopolaire". Thèse de Docteur-Ingénieur, INPL, Nancy (France), 1967.

- [8] M.E. ZAIM, S. TAHI, H. ZEROUG "Performances des machines à réluctance variable à rotor massif". JTEA 85, Tunis Mai 1985
- [9] B. LAPORTE, M.E. ZAIM, S. TAHI "Détermination réactances synchrones de la machine à réluctance variable". J 89, Hammamet (Tunisie) déc. 1989.
- [10] A.Ah. FOCK, and P.M. HART "New method for measuring  $X_d$   $X_q$  based on the P-Q diagram of the lossy salient-pole machine". IEE, Vol. 131, Pt.B, No 6, nov. 1984.
- [11] J. ZEISSER "Contribution à l'étude des machines à réluctance à plots dentés". Thèse de Docteur-Ingénieur, INP Nancy. 1980.
- [12] J.M. KAUFFMANN "Contribution au calcul des inductances d'une machine à pôles saillants" Thèse d'Etat, INPL, Nancy 1977
- [13] B.C. CHALMERS and A.S. MULKI "Design and performance reluctance motors with unlaminated rotors". IEEE, Winter meeting New York 1972.
- [14] V.B. HONSINGER " Steady-state performance of reluctance machines". IEEE. Trans. PAS -90, jan-feb. 1971.
- [15] H. ECKHARDT, I. GAHLER, H. DARRELMANN "Numerical calculation of steady-state synchronous performance of reluctance machines". I.C.E.M, Munich 1978.
- [16] P.J. LAWRENSON and L.A. AGU "Theory and performance of polyphase reluctance machines". Proc. IEE, vol. 111, august 1964

- [17] A. MAILFERT "Machines à réluctance variable". Techniques de l'Ingénieur, vol. D 550.
- [18] M. BOUMAH RAT, A. GOURDIN "Méthodes numériques appliquées". OPU, Alger 1983.
- [19] S. DJEMAA, H. IDJERA OUI, N. YAKER, M.E. ZAIM " Calcul des machines à réluctance variable par la méthode des éléments finis" Premier Colloque sur l'électrotechnique et l'automatique, Alger, mai 1990.
- [20] F. GUERBAS, A. REDJIMI, "Détermination du champ magnétique dans une MRV à excitation homopolaire" Projet de fin d'étude ENP, juin 1990.
- [21] J. CORDA and J.M STEPHENSON "Analytical estimation of the minimum and maximum inductances of a double-salient motor". Proc. of the Int. Conf. on stepping motors and system, Leeds sept.197