

3/04

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## **PROJET DE FIN D'ETUDES**

En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état  
en Génie mécanique

*Thème*

*L'influence des défauts géométriques  
sur le chemin de contact des  
engrenages spiro-coniques*

Proposé par :

M<sup>R</sup>. RIACHE Lakhdar  
M<sup>R</sup>. BOUAZIZ Mohamed

Présenté par :

Ali MIHOUB ABDELHAKIM

Promotion : Juin 2004

3/04



PROJET DE LOI

RELATIVE

à la

révision



PROJET DE LOI

RELATIVE

L'influence des députés étrangers  
sur le caractère des contrats des  
entreprises de co-construction

présenté par

M. BOUTIN

ALPHONSE ABEL

M. RICHÉ  
M. BOUTIN



العمل المقدم في هذه المذكرة يتعلق بتحليل تأثير الخلل الهندسي على مسار التماس في المسننات المخروطية ذات الأسنان الحلزونية و ذلك باستعمال برنامج عددي يسمى متلاب 6.5 .  
تم هذا التحليل بتصنيع التقطيع و التماس استنادا إلى نموذج رياضي الذي يعمل على تحصيل جنب السن المولد عن طريق وسائط ضبط الآلة. التغيرات الطفيفة المحدثه في وسائط ضبط الآلة تأثر مباشرة على هندسة السن التي تتمثل في الأخطاء الهندسية حيث نبحت عن تأثيرها على مسار التماس.

كلمات مفتاحية: المسننات المخروطية ذات الأسنان الحلزونية, جنب, سن, مسار التماس.

## RESUME

Le travail présenté dans ce mémoire consiste à analyser l'influence des défauts géométriques sur le chemin de contact dans les engrenages spiro –coniques, avec l'utilisation d'un programme numérique appelé le logiciel MATLAB 6.5.

Cette analyse est faite par une simulation de taillage et de contact basée sur un modèle mathématique qui sert à l'obtention du flanc de la denture générée à partir des paramètres de réglages de la machine. La modification de ces paramètres influe directement sur la géométrie de la denture qui donne le défaut géométrique dont on cherche son influence sur le chemin de contact.

Mots clés : engrenages spiro – coniques, flanc, denture, chemin de contact.

## ABSTRACT

The work presented in this memory consist of analysis the influences of geometrical flaw on the way of the contact in spiral bevel gears with the help of numerical program called the software MATHLAB 6.5

This analysis is done by the simulation of contact and shaping based on mathematical model to obtain a flank tooth generate by adjustable machine settings.

The modification of this settings influence the geometry of tooth. The later give geometrical flaw whose we find its influence on the way contact.

Key words: spiral bevel gears, flank, tooth, the way contact.



# Remerciements

المدرسة الوطنية للتكنولوجيا  
BIBLIOTHÈQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Je remercie en premier lieu dieu qui m'a aidé à terminer ce travail, et d'avoir plus de connaissances

Je remercie mon promoteur M<sup>r</sup> Riache Lakhdar qui ma beaucoup aider et surtout pour son soutien morale qui ma donner le courage de terminer ce travail.

Je tiens à remercier aussi  
M<sup>r</sup> Belhanèche Hacène

Je remercie également toutes personnes qui ont contribué dans ma noble tâche.



# DEDICACES

**Je dédie ce modeste travail**

**A:**

**Ma chère maman, mon père et mon  
frère Abdelmalek**

**A la Mémoire de ma grande mère  
Yamina et ma tante Aïcha**

**A toute ma famille, et à tous ceux qui  
m'aiment**

**Abdelhakim**



# SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE .....	1
-----------------------------	---

## CHAPITRE I : GENERALITE SUR LES ENGRENAGES SPIRO - CONIQUES

I.1. Introduction.....	3
I.2. Principe de taillage des roues coniques a denture spirale.....	3
I.3. Méthode d'obtention des surfaces de denture .....	4
I.3.1. Méthode des roulettes.....	4
I.3.2. Méthode des enveloppes .....	5
I.4. Différents types de dentures .....	5
I.4.1. Selon l'angle spiral et la position du pignon .....	6
I.4.2. Selon la hauteur de la denture .....	6
I.5. Conicité de la denture.....	6
I.6. Différents types de fraises Gleason .....	8
I.7. Les méthodes de taillage Gleason .....	8
I.7.1. Taillage avec génération.....	8
I.7.2. Taillage sans génération .....	9
I.8. Conditions de conjugaison .....	10
I.9. Cycles de taillage .....	11
I.9.1. Passe unique (spread -blade) : .....	11
I.9.2. Réglage unique (single - setting).....	11
I.9.3. Passes et réglages séparés (single -side).....	11
I.9.4. Passes séparées et réglages fixes (fixed setting) .....	11
I.10. Conclusion.....	12

## CHAPITRE II: DESCRIPTION GENERALE DES MACHINES DE TAILLAGES GLEASON

II.1. Introduction .....	13
II.2. Présentation de la machine Gleason.....	13
II.3. La chaîne cinématique de la machine Gleason .....	15
II.3.1. Commande de la fraise.....	15
II.3.2. Commande du mouvement .....	15
II.4. Les différents réglages effectués sur la machine.....	16
II.4.1. Positionnement de la fraise .....	17
II.4.2. Positionnement de la pièce .....	19
II.4.3. Mouvement relatif entre la pièce et la berceau .....	20
II.5. Différents mouvements de la machine .....	21
II.5.1. Mouvement de coupe .....	21
II.5.2. Mouvement de génération.....	21
II.5.2.1. Méthode FORMATE .....	21
II.5.2.2. Méthode HELIXFORME .....	21
II.5.2.3. Méthode du roulement modifié .....	23
II.5.2.4. Méthode HELICAL DUPLIXE .....	23
II.5.3. Mouvement de division.....	23
II.6. Conclusion .....	23



## CHAPITRE III: MODELE MATHEMATIQUE ET SIMULATION DE TAILLAGE

III.1. Introduction .....	24
III.2. Coordonnées homogènes .....	24
III.3. Modélisation de taillage .....	25
III.3.1. Vecteur position de la surface génératrice et sa normale .....	25
III.3.2. Passage du repère lie a la fraise au repère fixe passant par les différents réglages de la machine .....	29
III.3.2.1. Réglage du berceau .....	30
III.3.2.2. Réglage de l'excentrique .....	31
III.3.2.3. Réglage du socle .....	32
III.3.2.4. Réglage de la tête porte fraise .....	33
III.3.3. Passage au repère lie a la pièce à usiner .....	38
III.3.4. Génération des flancs de denture .....	41
III.3.4.1. Vitesse relative .....	41
III.3.4.2. Vecteur normal .....	43
III.3.4.3. Méthode de calcul .....	44
III.3.4.4. Algorithme de maillage .....	46
III.3.4.5. Organigramme de résolution .....	46
III.4. Conclusion .....	47

## CHAPITRE IV: L'ANALYSE DE CONTACT

IV.1. Introduction .....	49
IV.2. Description de la machine de contrôle .....	49
IV.3. Simulation de contact .....	50
IV.3.1. Rotation du pignon .....	52
IV.3.2. Rotation de la roue .....	53
IV.3.3. L'organigramme de résolution .....	55
IV.4. Conclusion .....	56

## CHAPITRE V: RESULTATS ET INTERPRETATIONS

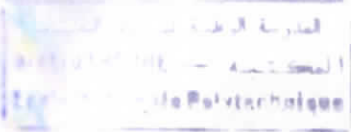
V.1. Introduction .....	57
V.2. Réglages machine et dimensions du couple d'engrenage spiro-conique .....	57
V.3. Validation du programme .....	58
V.4. Présentation des résultats et interprétations .....	59

CONCLUSION GENERALE .....	74
---------------------------	----

### ANNEXES

Annexe I .....	74
Annexe II .....	79
Annexe III .....	82

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....	94
-----------------------------------	----



# NOMENCLATURE

$R_i(O_i, \vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{Z}_i)$  : Repère  $R_i$  du centre  $O_i$  et d'axes  $\vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{Z}_i$ .

$R_m$  : Repère lié au bâti de la machine de taillage.

$R_b$  : Repère lié rigidement au berceau.

$R_e$  : Repère lié rigidement à l'excentrique.

$R_S$  : Repère lié au socle.

$R_{SS}$  : Repère lié rigidement au socle.

$R_{PF}$  : Repère lié au plan incliné de la tête porte fraise.

$R_{PFR}$  : Repère lié rigidement à la tête porte fraise.

$R_F$  : Repère lié à la fraise.

$R_{pl}$  : Repère intermédiaire entre  $R_m$  et  $R_p$ .

$R_p$  : Repère lié rigidement à la pièce à usiner.

$R_{rp}$  : Repère lié rigidement au bâti de la machine de contrôle.

$R_{pp}$  : Repère lié rigidement au pignon.

$R_{pr}$  : Repère lié rigidement à la roue.

$\vec{r}_{rp}^{pp}$  : Vecteur position du pignon exprimé dans le repère  $R_{rp}$ .

$\vec{r}_{rp}^{pr}$  : Vecteur position de la roue exprimé dans le repère  $R_{rp}$ .

$\vec{n}$  : Vecteur normal à la surface de la lame.

$\vec{n}_F^{(a)}$  : Vecteur normal à la surface de la lame pour la partie rectiligne.

$\vec{n}_F^{(b)}$  : Vecteur normal à la surface de la lame pour la partie torique.

$\vec{n}_{rp}^{pp}$  : Vecteur normal au flanc du pignon exprimé dans le repère  $R_{rp}$ .

$\vec{n}_{rp}^{pr}$  : Vecteur normal au flanc de la roue exprimé dans le repère  $R_{rp}$ .

$\varphi_b$  : Angle du berceau.



$\varphi_e$  : Angle de l'excentrique.

$\varphi_{PF}$  : Angle de la tête porte fraise.

$\varphi_p$  : Angle de rotation du pignon pendant l'engrènement.

$\varphi_R$  : Angle de rotation de la roue pendant l'engrènement.

$\varphi_F$  : Positionnement angulaire du centre de la fraise dans le plan machine.

$\xi_b$  : Angle de rotation du berceau au cours du taillage.

$\xi_p$  : Angle de rotation de la pièce à tailler au cours du taillage.

$\varepsilon$  : Angle d'inclinaison du socle.

$L$  : Rayon du cercle de l'excentrique.

$S$  : Distance radiale du centre de la fraise par rapport au centre de la machine.

$E_S$  : Position de la base coulissante par rapport au centre de la machine.

$E_V$  : Décalage hypoïde.

$D$  : Recul de la poupée.

$\delta$  : Angle du pied de la machine.

$\chi_b$  : Réglage de la base coulissante.

$r_{pb}$  : Rapport de roulement entre le berceau et la pièce à tailler.

$Kh$  : Paramètre du mouvement hélicoïdal.

$\omega_b$  : Vitesse de rotation du berceau.

$\omega_p$  : Vitesse de rotation de la pièce à tailler.

$\vec{\omega}_b$  : Vecteur de la vitesse angulaire du berceau au cours du taillage.

$\vec{\omega}_p$  : Vecteur de la vitesse angulaire de la pièce à tailler au cours du taillage.

$\vec{V}_r$  : Vecteur de la vitesse relative entre la fraise et la pièce à tailler.

$\vec{V}_L^{(m)}$  : Vitesse absolue d'un point sur la surface de la lame exprimée dans le repère  $R_m$ .

$\vec{V}_p^{(m)}$  : Vitesse absolue d'un point sur la surface du flanc de denture exprimée dans le repère  $R_m$ .

$r_p$  : Rayon primitif de la pièce à tailler.

$\gamma_p$  : Angle primitif de la pièce à tailler.

$\theta_e$  : Angle de la saillie de la pièce à tailler.

$\theta_i$  : Angle du creux de la pièce à tailler.

$\theta_{ip}$  : Angle du creux du pignon.

$\theta_{ir}$  : Angle du creux de la roue.

$Ld$  : Largeur de la denture.

$nl$  : Nombre de maille suivant la largeur.

$nh$  : Nombre de maille suivant la hauteur.

$dL$  : Largeur d'un maille.

$dh$  : Hauteur d'une maille.

$xx$  : Position axiale d'un point sur le flanc de la pièce.

$rr$  : Distance radiale d'un point sur le flanc de la pièce.

$r_m$  : Rayon moyen de la fraise.

$r_e$  : Rayon de raccordement extérieur.

$r_i$  : Rayon de raccordement intérieur.

$w$  : Largeur entre pointe de la lame.

$u, v$  : Coordonnées de la surface engendrée par la partie rectiligne des lames de la fraise.

$u, \gamma$  : Coordonnées de la surface engendrée par la partie torique des lames de la fraise.

$E$  : Réglage de la machine de contrôle selon la position verticale de la roue.

$G$  : Réglage de la machine de contrôle selon la position axiale de la roue.

$P$  : Réglage de la machine de contrôle selon la position axiale du pignon.

$\alpha$  : Réglage de la machine de contrôle selon la position angulaire du pignon.

## INTRODUCTION GENERALE

Les engrenages spiro-coniques ont de multiples applications dans divers domaines techniques. On les trouvent principalement dans les boîtes de transmission des moyens de transport; comme l'automobile, le train ou l'aviation. Leur rôle est d'assurer une transmission de grande puissance entre les axes concourants, le plus souvent perpendiculaires. Les développements industriels actuels demandent de repenser en terme de recherche le point clé du développement de ce type d'engrenage.

La complexité de la géométrie des engrenages spiro-coniques peut être difficilement décrite par les moyens analytiques contrairement aux engrenages à denture droite, pour cette raison l'utilisation de l'outil informatique est nécessaire pour la bonne maîtrise de l'analyse des comportements et de la géométrie pour ce type d'engrenage.

L'introduction de ce type d'engrenage, dont la géométrie est très complexe et l'analyse analytique est presque impossible, répond aux exigences majeures rarement accomplies par d'autres types d'engrenages. Ces exigences sont :

- La réduction du bruit.
- L'amélioration de la durée de vie et la fiabilité du fonctionnement.
- La diminution des vibrations.
- L'augmentation du rendement grâce à la diminution des frottements.

Dans cette étude, nous allons analyser l'influence des défauts géométriques sur la génération du flanc de la denture et par conséquent le chemin de contact. Ces défauts sont introduits par la modification des paramètres de réglages de la machine, et la résolution du problème se fera par un programme numérique à l'aide d'un logiciel de programmation MATLAB 6.5.



Notre travail est réparti en cinq chapitres :

- Dans le premier chapitre, on présentera des généralités sur les engrenages spiro-coniques de type Gleason.
  
- Dans le deuxième chapitre, on décrira les machines de taillage des engrenages spiro-coniques de type Gleason. Cette description est nécessaire pour la simulation de taillage, et par conséquent la génération de la denture dans ce type d'engrenage.
  
- La simulation de taillage et la génération de la denture sont présentées dans le chapitre III par un modèle mathématique basé sur les réglages de la machine.
  
- Le chapitre IV tient compte du modèle mathématique de simulation de taillage afin d'analyser le contact entre le pignon et la roue pendant l'engrènement, et avoir le chemin de contact.
  
- Le chapitre V sera consacré aux résultats obtenus après exécution du programme ainsi qu'à ses interprétations.
  
- Enfin, nous terminerons par une conclusion générale.

# CHAPITRE I

## GENERALITES SUR LES ENGRENAGES SPIRO -CONIQUES

### I.1. INTRODUCTION

Le rôle principal des engrenages est d'assurer la transmission de puissance avec un mouvement de rotation d'un arbre à un autre, avec un rapport moyen de vitesse angulaire constant. Selon les positionnements relatifs des arbres, trois classes majeures d'engrenages peuvent être distinguées :

- Les engrenages cylindriques à axes parallèles: Diverses catégories sont distinguées selon la géométrie des dents suivant la génératrice; on trouve les dentures droites et les dentures hélicoïdales.

- Les engrenages coniques à axes concourants dont les arbres sont tels que leurs axes de rotation se coupent.

Selon la géométrie des dents, on distingue les sous catégories :

- Dentures droites : Les génératrices passent par le point concourant des axes de rotation.
- Dentures hélicoïdales.
- Dentures spirales : Engendrées par des segments rectilignes s'appuyant sur une courbe directrice.

- Les engrenages gauches à axes quelconques: Les axes des arbres n'ont pas un point commun et occupent une position relative quelconque. Dans cette catégorie se retrouve par exemple les dentures hypoïdes.

Dans ce présent chapitre on va s'intéresser seulement aux engrenages coniques à dentures spirales.

### I.2. PRINCIPE DE TAILLAGE DES ROUES CONIQUES A DENTURE SPIRALE

De même qu'une crémaillère est la limite d'une roue cylindrique dont le cylindre primitif est devenu le plan primitif, on appelle « roue plate » une roue conique dont le cône primitif est devenu un plan, c'est-à-dire dont le demi-angle au sommet est devenu  $90^\circ$ . Une roue plate tourne autour d'un axe qui est normal à son plan primitif.

Comme pour une roue cylindrique, on commence par étudier la génération de la denture d'une roue conique à partir d'une « roue plate génératrice ». La figure 1.1 représente le cône primitif P de la roue plate génératrice, tournant autour de l'axe  $X_0$ . [2][14]

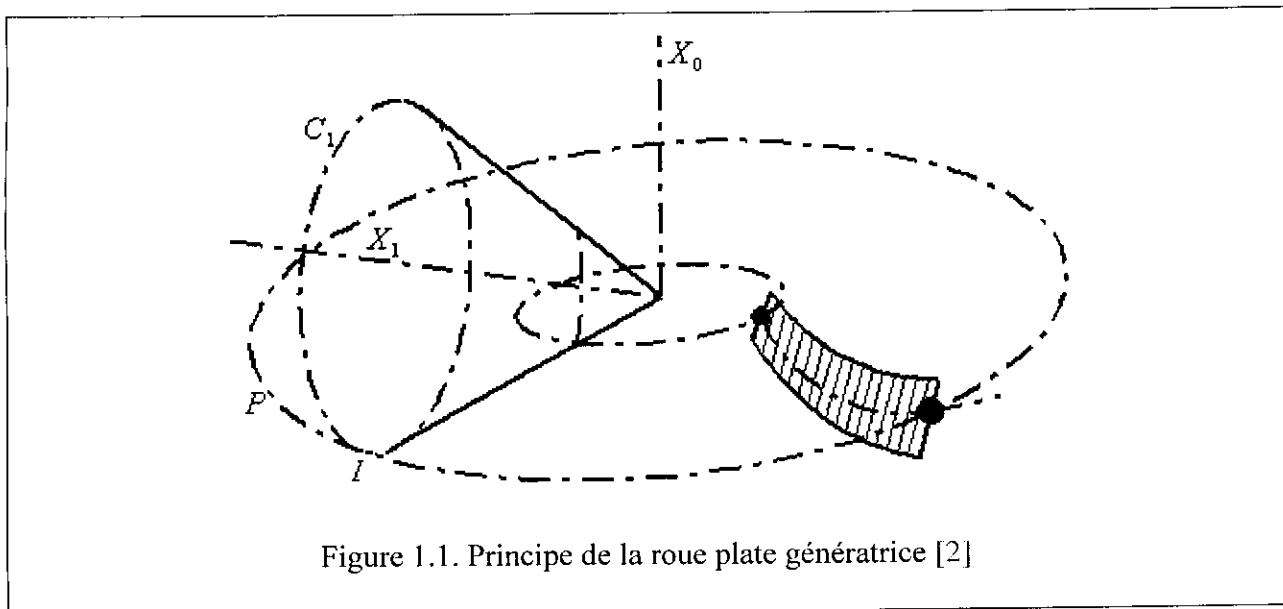


Figure 1.1. Principe de la roue plate génératrice [2]

La forme de la denture de la roue plate permet de définir les différents types de dentures. Parmi ces dentures, la denture spirale où la surface égale pente, formée par les segments également inclinés par rapport à P, s'appuyant sur une courbe directrice V caractérisant le type de denture:

- Un cercle pour la denture Gleason.
- Une épicycloïde pour la denture Orlikon ou Klingelnberg.

#### Remarque:

Dans tous ce qui suit, on s'intéresse seulement à la denture de type Gleason.

### I.3. METHODE D'OBTENTION DES SURFACES DE DENTURE [1][14]

Pour l'obtention des dentures conjuguées entre le pignon et la roue, il existe deux méthodes:

- Méthode des roulettes.
- Méthode des enveloppes.

#### I.3.1. METHODE DES ROULETTES

Soient  $C_1$  et  $C_2$  les cônes primitifs du pignon et de la roue et du sommet S, tangents suivant la génératrice SI. Les dentures conjuguées du pignon et de la roue sont obtenues, par génération, à partir d'un même ensemble générateur, ce dernier est matérialisé par sa surface primitive P roulant sans glisser sur  $C_1$  et  $C_2$  suivant SI, et la surface génératrice N liée invariablement à p.

Les deux dentures conjuguées du pignon et de la roue sont engendrées par N. En faisant rouler sans glisser P soit le cône  $C_1$ , soit sur le cône  $C_2$ . Les surfaces engendrées par les arêtes tranchantes matérialisent N (figure 1.2).



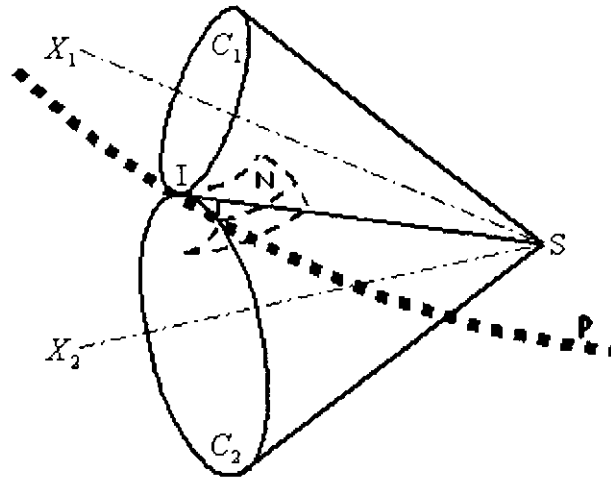


Figure 1.2. Méthode des roulettes

### I.3.2. METHODE DES ENVELOPPES

Soient  $C_1$  et  $C_2$  les cônes primitifs de l'engrenage.

Cependant, la denture du pignon est engendrée par un ensemble de générateur (P-N) matérialisant exactement la roue : c'est-à-dire que P est le cône primitif de la roue, et N est la surface de la surface de denture de cette roue (figure 1.3).

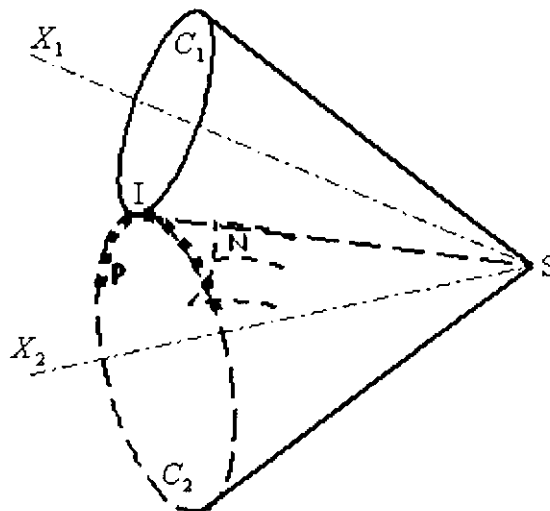


Figure 1.3 : Méthode des enveloppes

### I.4. DIFFERENTS TYPES DE DENTURES

On peut distinguer deux catégories de dentures:

- Selon l'angle spiral et la position du pignon.
- Selon la hauteur de la denture.

**I.4.1. SELON L'ANGLE SPIRAL ET LA POSITION DU PIGNON [1][18] (figure 1.4)**

- a) **Denture Zérol** : caractérisée par un angle spiral nul.
- b) **Denture spirale** : caractérisée par un angle spiral non nul.
- c) **Denture hypoïde** : caractérisée par le décalage de l'axe du pignon en dessous ou en dessus de l'axe de la roue.

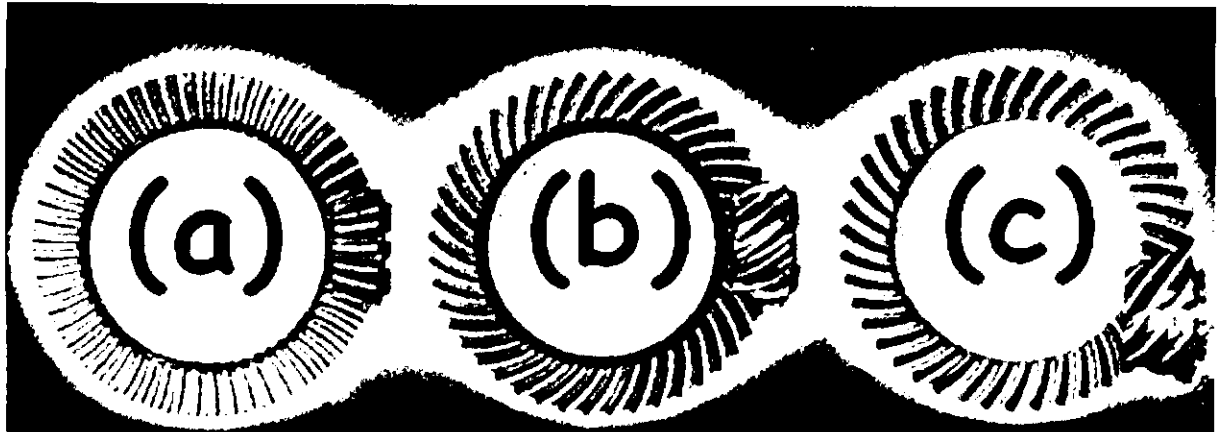


Figure 1.4. Types de dentures selon l'angle spiral [1]

**I.4.2. SELON LA HAUTEUR DE LA DENTURE [7][18] (figure 1.5)**

- a. **hauteur constante** : traitée selon le procédé Klingelnberg et Orlikon.
- b. **hauteur variable** : traitée selon le procédé Gleason.
- c. **hauteur duplex** : traitée selon le procédé Gleason.

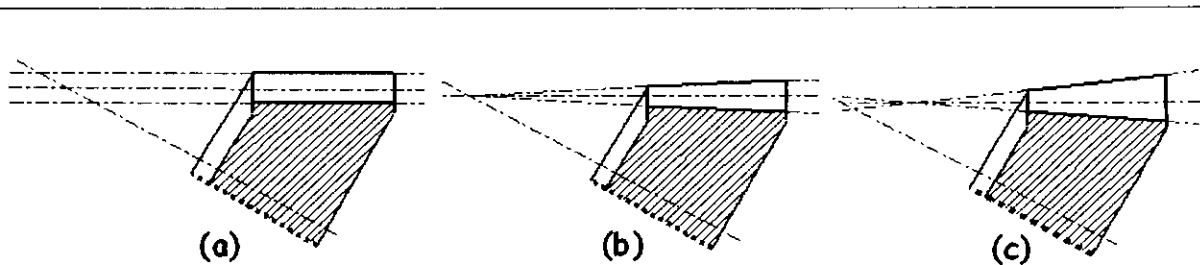
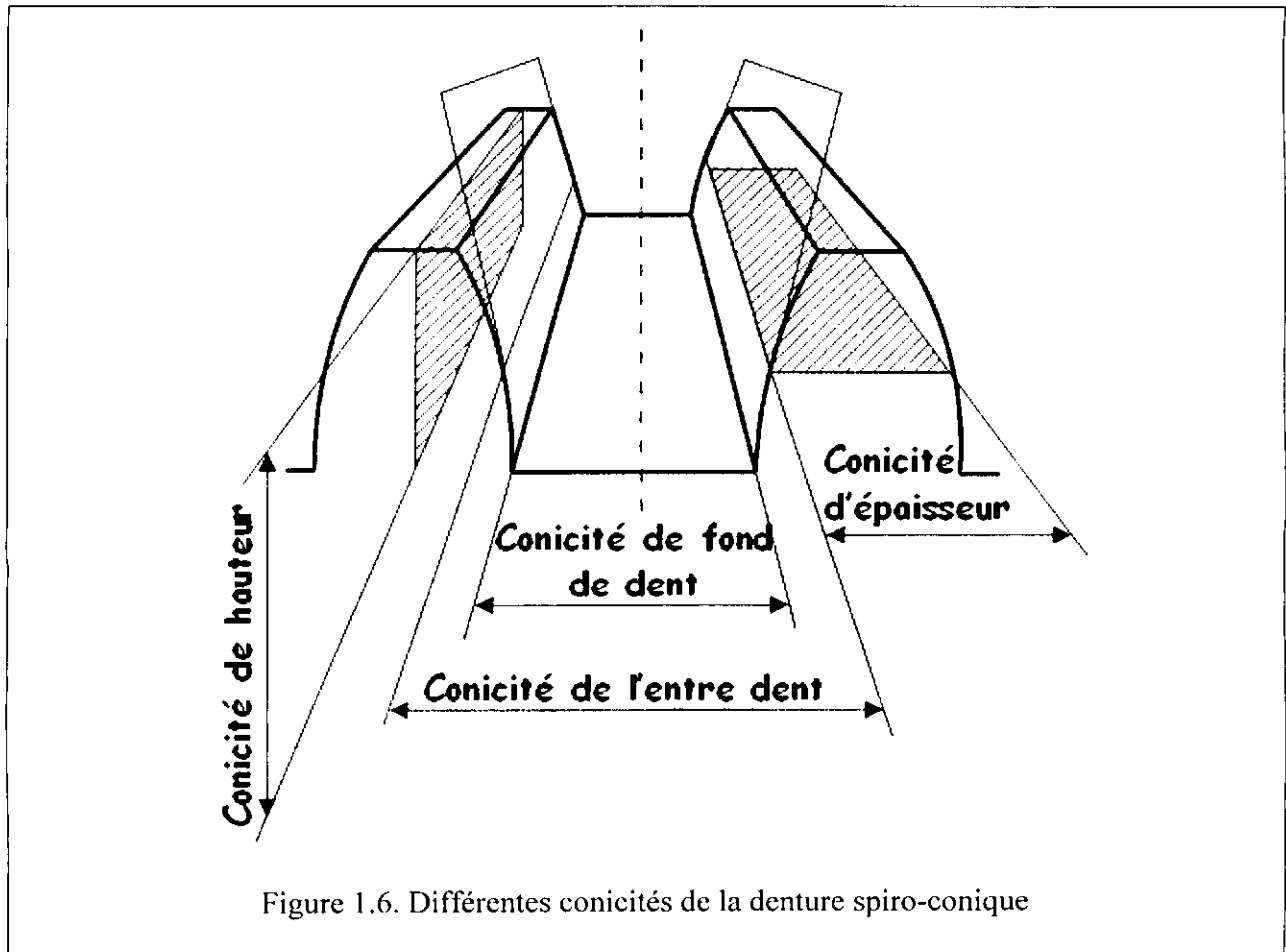


Figure 1.5. Types de dentures selon la hauteur

**I.5. CONICITE DE LA DENTURE**

Le taillage des engrenages spiro-coniques produit différentes conicités de denture, selon Gleason la denture est caractérisée par quatre types de conicité (figure 1.6) [4].

- **Conicité de la hauteur** : C'est la variation de la hauteur de la dent perpendiculairement au plan primitif.
- **Conicité de l'épaisseur** : Elle correspond à la variation de l'épaisseur le long de la dent, elle est mesurée dans le plan primitif.
- **Conicité d'entre dent** : Elle correspond à la variation de la largeur de l'entre dent le long de la dent, elle est mesurée dans le plan primitif.
- **Conicité de fond de la dent** : Elle correspond à la variation de la longueur entre pointe.



En plus des quatre conicités, Gleason définit deux autres types de conicités nommées:

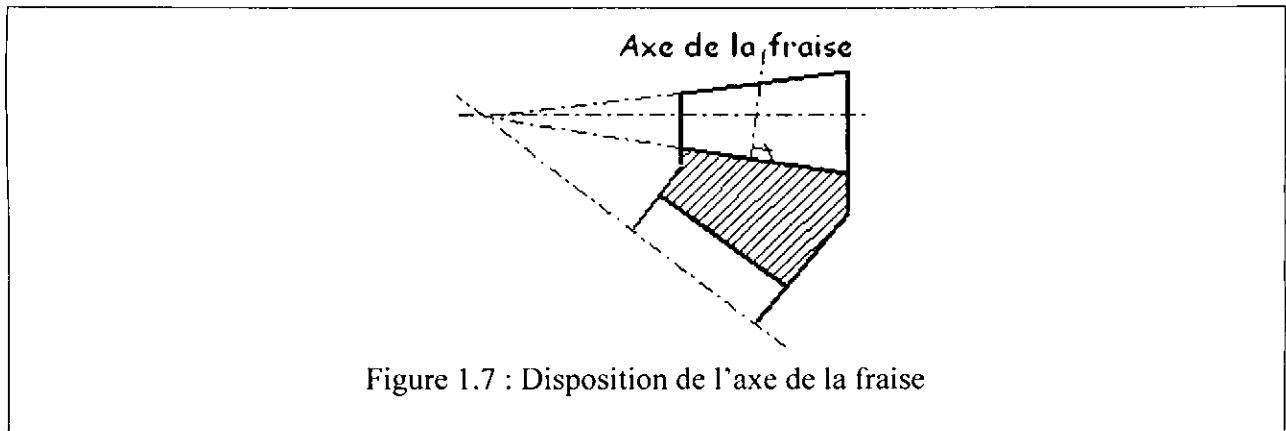
- **Conicité normale** : Les dimensions de la hauteur et de l'épaisseur de la dent sont proportionnelles à la distance d'une section donnée au sommet du cône primitif. Par conséquent, les sommets du cône primitif et du cône de pied se coïncident et les côtés de la dent convergent au sommet du cône primitif.

- **Conicité duplexe** : Caractérisée par une conicité de largeur entre pointe, nulle sur toute la largeur de la denture et sur les deux membres (pignon et roue).

Cette conicité est obtenue par inclinaison de la ligne du pied autour de n'importe qu'elle point de pied le long de la dent. Le sommet du cône du pied ne coïncide pas avec le sommet du cône primitif.



Afin de produire une denture conique, l'axe de la fraise frontale doit être normal à la génératrice du cône de pied (figure 1.7). [4]



## 1.6. DIFFERENTS TYPES DE FRAISES GLEASON

L'outil de taillage des engrenages spiro-coniques avec des machines Gleason se présente sous la forme de tourteaux cylindriques à la périphérie au quel sont fixées des lames tranchantes d'égales pentes. Un jeu de cales permet d'avoir plusieurs diamètres de fraise sur le même tourteau.

Il existe trois types de fraises (figure 1.8):

- a) Fraise à tranchants extérieurs destinées au taillage du flanc concave de la denture.
- b) Fraise à tranchants extérieurs destinées au taillage du flanc convexe de la denture.
- c) Fraise à tranchants alternés, intérieurs et extérieurs, destinées au taillage simultané des flancs concave et convexe de denture.

## 1.7. LES METHODES DE TAILLAGE GLEASON [3]

Le taillage des engrenages spiro-coniques peut être effectué par deux méthodes; avec génération et sans génération.

### 1.7.1. TAILLAGE AVEC GENERATION

Il y a conjugaison entre la rotation du berceau et la rotation de la pièce à tailler par un système appelé train de génération.

La fraise représente la roue génératrice imaginaire donnée par la méthode des roulettes qui s'engrène avec la pièce à tailler durant le processus de taillage, et par conséquent, elle engendre la surface de denture de la pièce (figure 1.9).

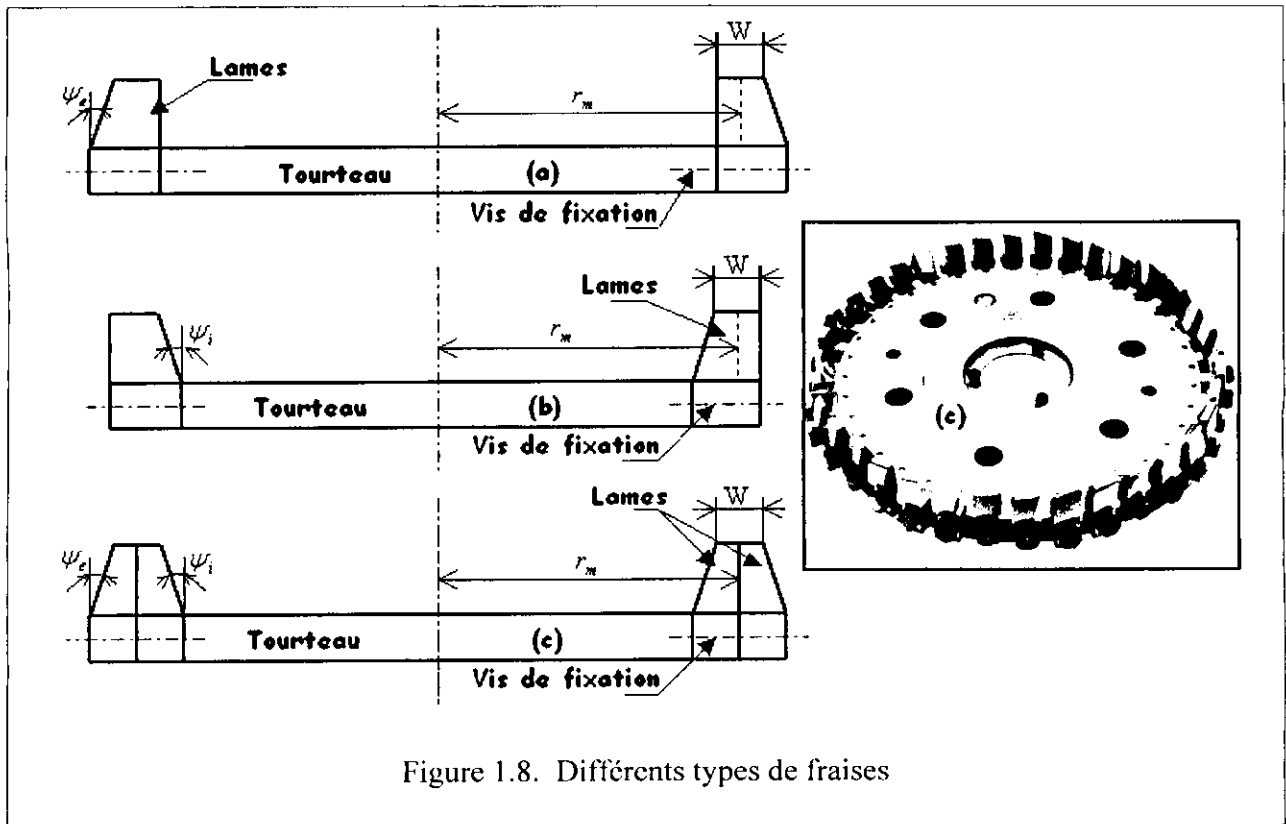


Figure 1.8. Différents types de fraises

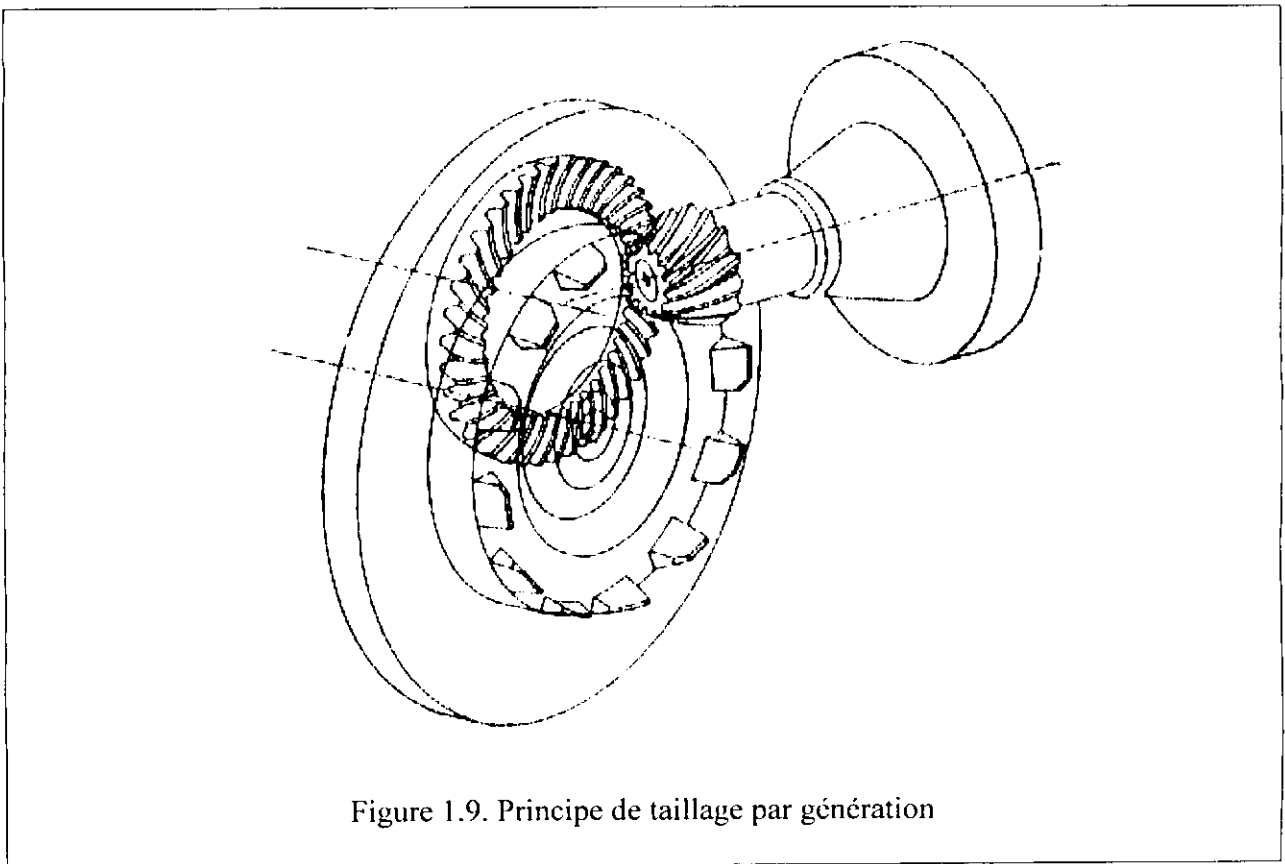


Figure 1.9. Principe de taillage par génération

### 1.7.2. TAILLAGE SANS GENERATION

Le taillage est sans génération, s'il n'y a pas de rotation entre le berceau et la pièce à tailler durant le processus de taillage.

Cette méthode de taillage ne peut être utilisée que pour le taillage des roues dont l'angle primitif est relativement grand.

La roue est taillée sans génération par une sorte de brochage en une seule passe (taillage de forme), la surface de chaque flanc de la denture n'est qu'une copie de la surface des lames.

### 1.8. CONDITIONS DE CONJUGAISON [2][4][13]

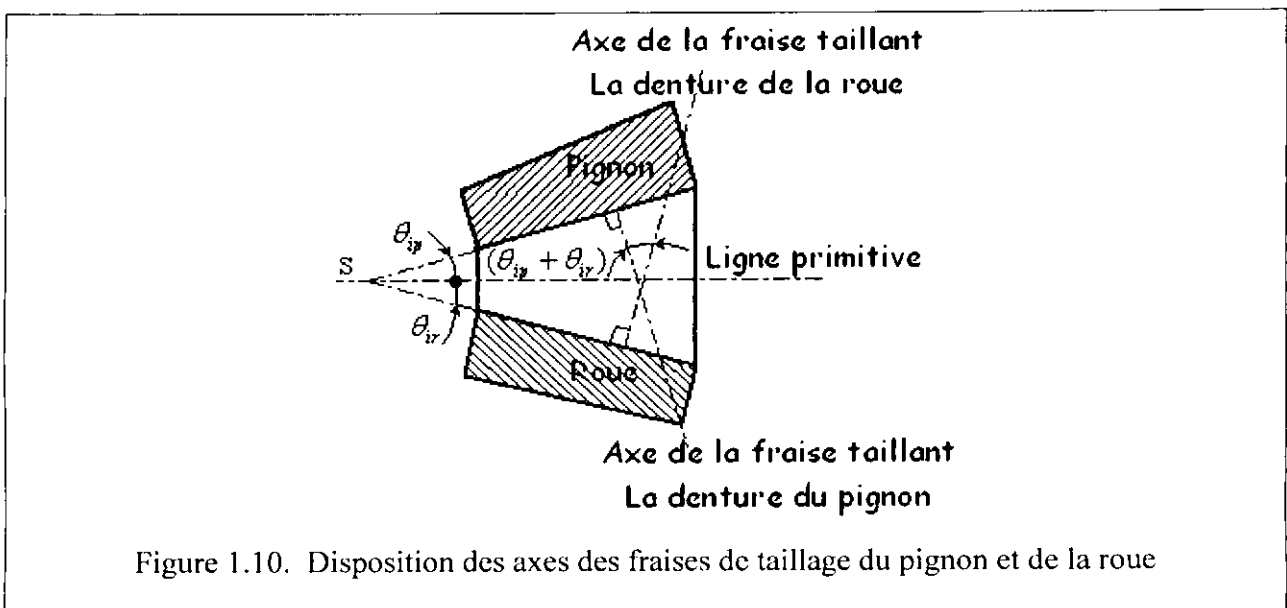
Les surfaces de dentures des flancs sont dites conjuguées, si elles sont constamment tangentes suivant une ligne dite la ligne de contact.

Pour obtenir des surfaces de dentures conjuguées, certaines conditions géométriques et cinématiques doivent être remplies par les machines de taillage. Ces conditions sont les suivantes :

- Les surfaces génératrices des flancs conjugués doivent être en coïncidence parfaite.
- Les axes de rotation des roues génératrices doivent être identiques.
- Le plan de contact du pignon et de la roue est identique avec la roue génératrice (ligne de contact, même nombre de dents sur la roue génératrice).

Dans les méthodes de taillage Gleason, les axes des fraises sont normaux respectivement au cône du pied de pignon et au cône du pied de la roue. Etant donné que les lames sont à tranchants rectilignes, les surfaces génératrices sont des cônes. Dans cette situation, les axes des cônes font entre eux un angle égal à la somme des angles des creux ( $\theta_{ip} + \theta_{ir}$ ) (figure 1.10).

Par conséquent, il est impossible d'avoir une coïncidence parfaite entre les deux cônes, les surfaces obtenues ne sont pas conjuguées et la transmission n'est pas exacte (le rapport de transmission n'est pas constant, des erreurs cinématiques dans la transmission existent. Ces erreurs sont la source majeure des bruits et des vibrations).



## **I.9. CYCLES DE TAILLAGE [2]**

Il existe plusieurs cycles de taillage, on peut citer quatre, les plus souvent utilisés pour la finition des engrenages spiro-coniques:

### **I.9.1. PASSE UNIQUE (SPREAD -BLADE) :**

La finition est effectuée avec une fraise à lames alternées taillant simultanément les deux flancs d'un même creux de denture. Cette méthode n'est pratiquement utilisée que pour les roues.

### **I.9.2. REGLAGE UNIQUE (SINGLE - SETTING)**

Cette méthode est rarement utilisée, uniquement sur des dentures de grandes largeurs afin d'éviter que deux lames consécutives travaillent simultanément, ce qui pourrait produire une ondulation sur la surface. La fraise utilisée a une largeur de pointe inférieure d'environ 0,25 mm à celle qui serait utilisée par la méthode SPREAD -BLADE.

Une première passe est faite, puis la couronne est tournée sur son axe de la quantité laissée par la réduction de la largeur de pointe avant l'exécution de la passe sur le deuxième flanc. Le réglage de la fraise n'est pas modifié.

### **I.9.3. PASSES ET REGLAGES SEPARES (SINGLE -SIDE)**

La pièce est généralement un pignon taillé avec une fraise à lames alternées, taillant sur les deux flancs en deux passes séparées, avec des réglages différents de la machine et une certaine rotation de la pièce avant l'exécution de la deuxième passe comme dans la méthode SINGLE -SETTING.

### **I.9.4. PASSES SEPARÉES ET REGLAGES FIXES (FIXED SETTING)**

Le flanc convexe est taillé avec une fraise à lames intérieures sur une machine possédant certains réglages. Le flanc concave est taillé sur une autre machine, avec une fraise à lames extérieures.

Afin d'avoir un couple d'engrenage spiro-conique, on envisage quatre combinaisons des différents cycles cités précédemment. Ces combinaisons sont les suivantes: [4]

- Spread Blade-Single Side.
- Spread Blade-Fixed Setting.
- Duplex Spread Blade.
- Single Side-Single Side.

## I.10. CONCLUSION

La théorie définit les principes et les méthodes de taillages pour avoir les différents types de denture, en vérifiant les conditions qui doivent être accomplies par la pratique telles que les contraintes technologiques. Ces dernières doivent tenir compte d'autres conditions que la performance de la denture tel que le prix de revient et le temps d'exécution.

Pour cela il faut avoir le couple "pignon -roue", le plus performant avec un prix de revient minimum qui peut être réalisé sur les machines disponibles avec des exigences technologiques.

Dans le chapitre suivant, nous allons décrire les machines de taillage des engrenages spiro-coniques de type Gleason.

# CHAPITRE II

## DESCRIPTION GENERALE DES MACHINES DE TAILLAGE GLEASON

### II.1. INTRODUCTION

La simulation de taillage des engrenages spiro-coniques nécessite obligatoirement la connaissance détaillée des machines de taillage à cause du manque de la documentation sur leurs chaînes cinématiques, qui ne peut être livrée que par le constructeur.

Nous allons s'intéresser seulement aux machines de taillage de type Gleason, et mentionner les différents réglages qui peuvent être effectués sur ce type de machine, et tout cela sera basé sur l'observation extérieure de la machine.

En Algérie, on peut envisager trois machines de type Gleason dans l'atelier de fabrication de SNVI-DVI : Gleason 116, Gleason 608 et Gleason 609.

### II.2. PRESENTATION DE LA MACHINE GLEASON

Nous allons décrire une machine Gleason universel sur laquelle on peut effectuer le taillage d'un pignon ou d'une roue suivant la majorité des méthodes, mais bien sur reste des spécification qui demandent des exigences industrielles très sévères qui ne peuvent être effectués que sur des machines spécialisées, destinées à usiner selon une méthode bien déterminé.

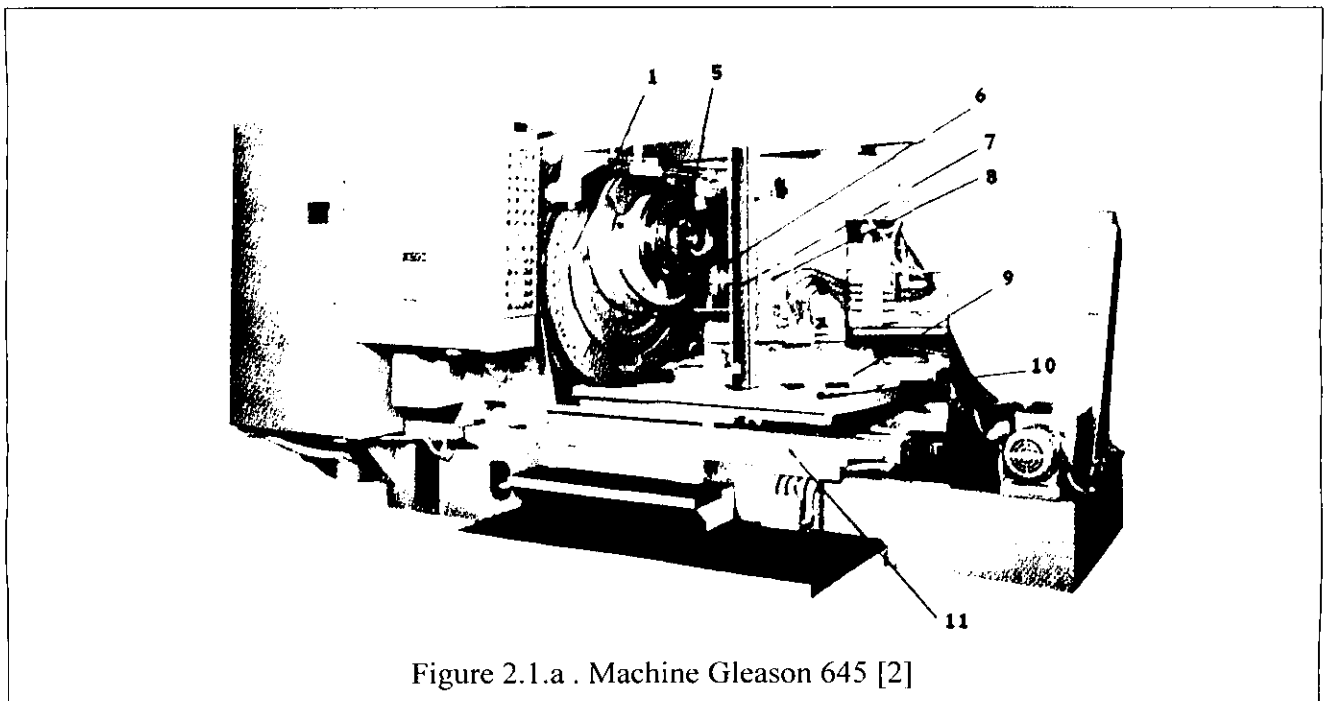


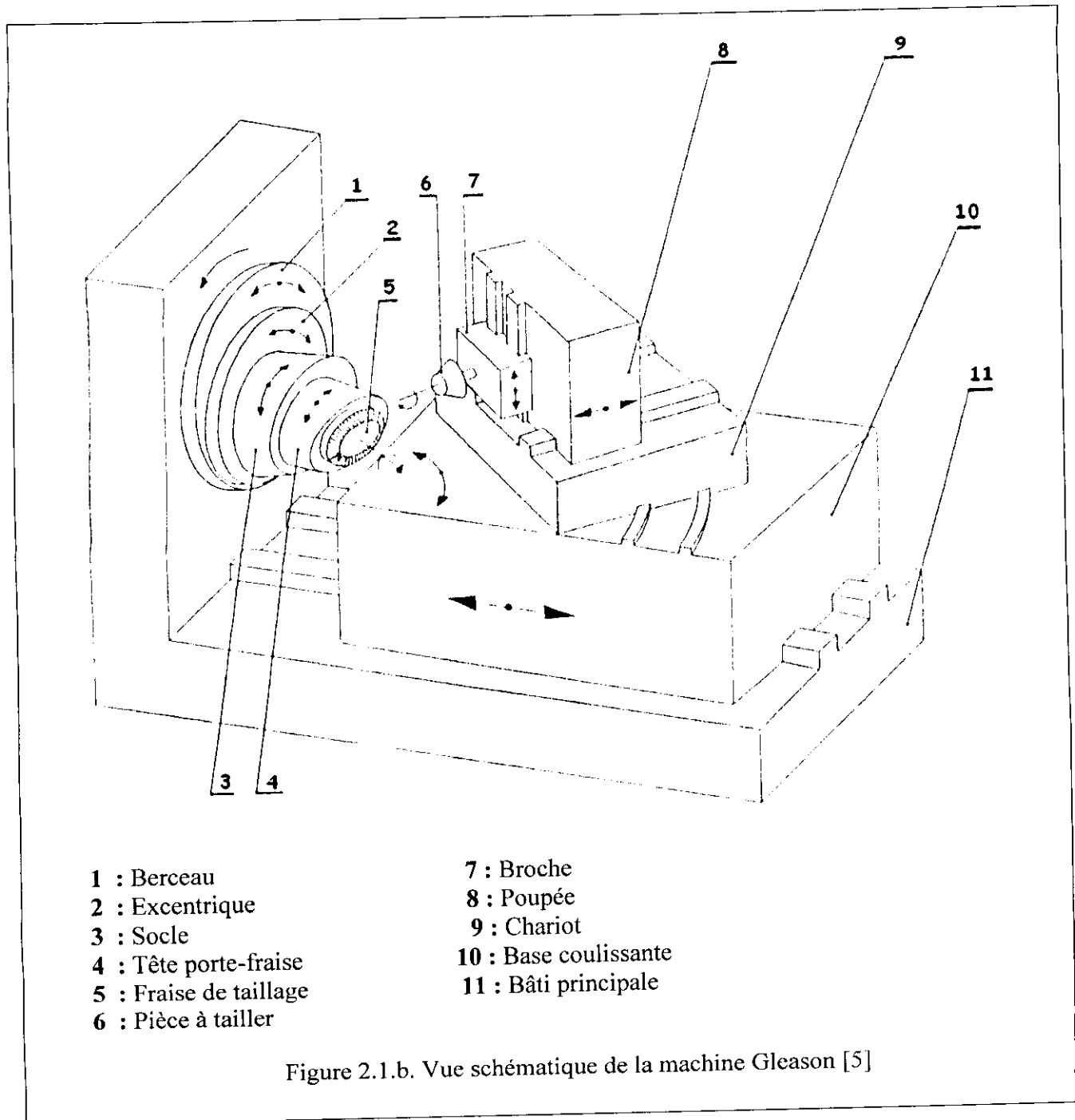
Figure 2.1.a . Machine Gleason 645 [2]



La figure 2.1.a représente la machine Gleason de type 645 qui peut tailler jusqu'à 754 mm de diamètre des roues.

La figure 2.1.b représente une vue schématique d'une machine Gleason, dont on peut envisager qu'elle est composée de trois parties principales :

- L'ensemble berceau - fraise.
- La base coulissante.
- Le bâti principal.



La fraise (5) est supportée par le berceau (1) d'axe horizontal, et réglable en position sur ce berceau. La roue ou le pignon à tailler (6), supporté par la broche (7) réglable en hauteur sur la poupée (8) (cas de taillage d'un pignon hypoïde). La poupée est réglable en position sur une glissière du chariot (9), suivant la direction de l'axe de la broche, de manière à amener le sommet du cône primitif de la roue ou le pignon à tailler sur l'axe de rotation du berceau (réglable par échelle graduée et verniée). Le chariot (9) peut pivoter sur une glissière circulaire de la base coulissante (10). Cette base coulissante peut se déplacer sur des glissières du bâti principal (11), parallèlement à l'axe du berceau en position finale de travail, les axes x,y,z doivent être concourants en S (figure 2.2).

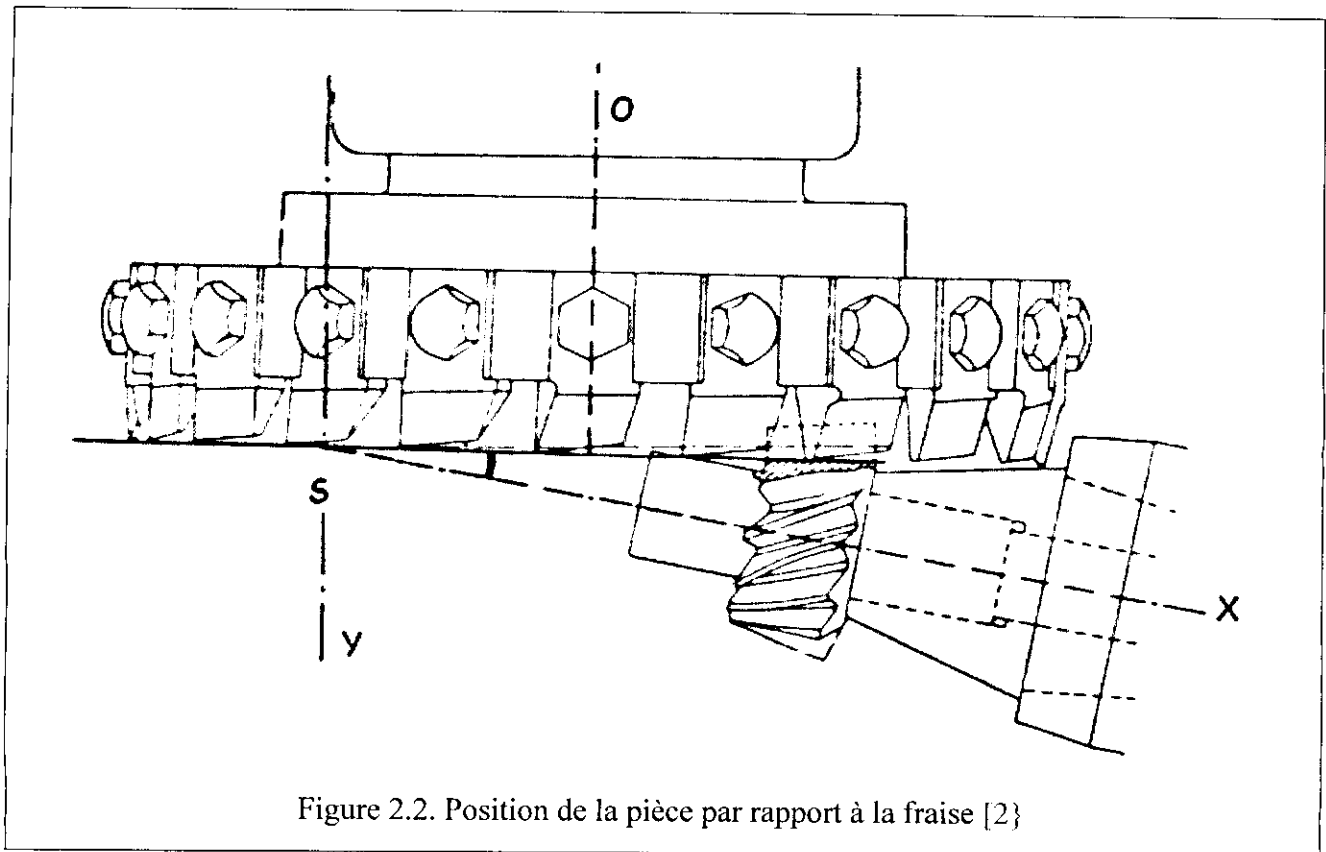


Figure 2.2. Position de la pièce par rapport à la fraise [2]

### II.3. LA CHAÎNE CINÉMATIQUE DE LA MACHINE GLESON [2]

La figure 2.3 représente une vue schématique de la chaîne cinématique de la machine Gleason 106 qui est très caractéristique de ces machines universelles.

Le moteur principal (14), commande la rotation de la fraise (5) et le mouvement de génération.

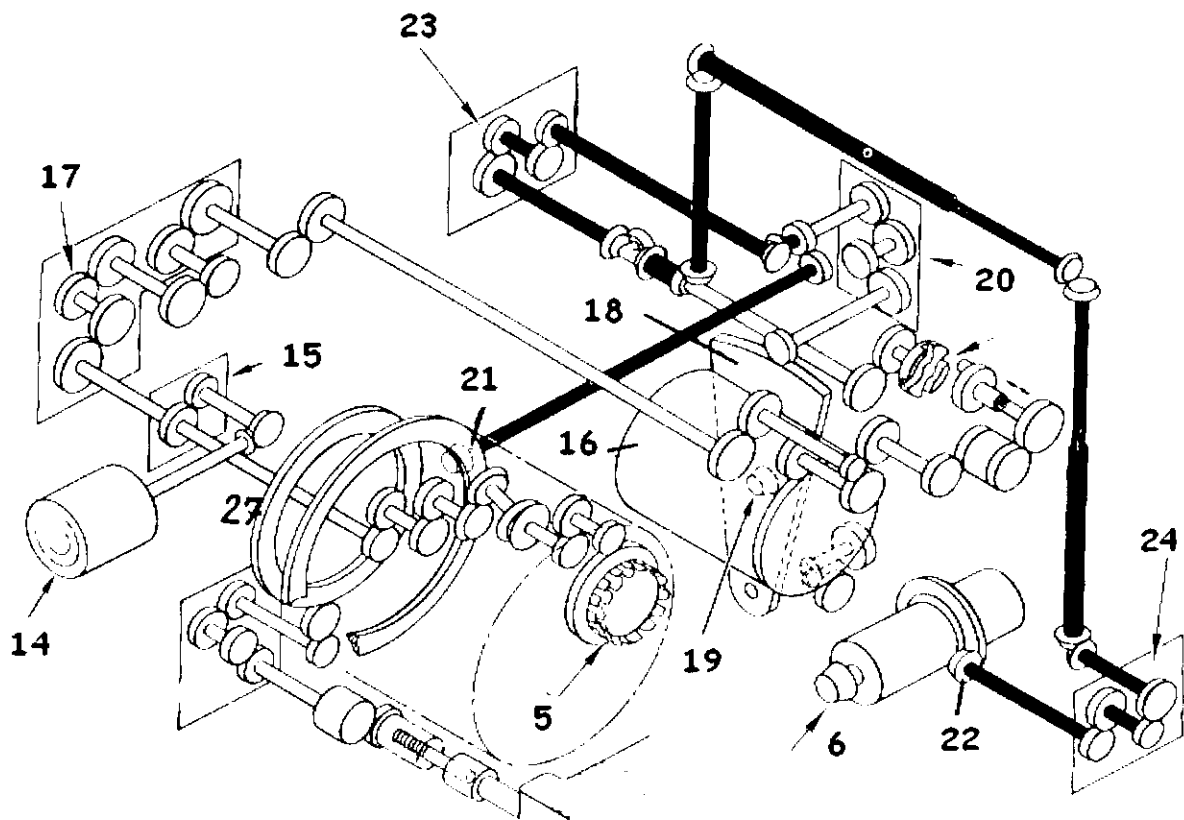
#### II.3.1. COMMANDE DE LA FRAISE

L'engrenage interchangeable (15) permet de régler la vitesse de cette fraise.

### II.3.2. COMMANDE DU MOUVEMENT

On considère le tambour (16), l'organe de base du mouvement de génération animé d'un mouvement de rotation uniforme et faisant un tour par cercle de taillage. Le train de roue de rechange (17) permet de régler l'avance de la génération. Durant la génération, le secteur (18) est entraîné en rotation par l'intermédiaire du doigt (19) alors engagé dans la rainure inclinée. Lorsque la rainure est normale à l'axe de tambour, le mouvement de génération est supprimé. Lorsque le doigt arrive dans la zone d'inversion de sens de la rainure, le sens du mouvement de génération est inversé. Le train de roue de rechange (20) permet le réglage de l'amplitude du mouvement de génération suivant les caractéristiques de la denture à tailler.

La rotation du berceau est commandée par le couple conique (21). La rotation de la roue ou du pignon à tailler (6) est également commandé par un couple conique (22). La conjugaison entre les deux rotations est réglée par le train de roue de rechange (23). Le train de roue interchangeable pour le diviseur est aperçu en (24).



- 14 : Moteur principal
- 15 : Engrenage interchangeable
- 16 : Tambour
- 17.20.23 : Train de roue de rechange
- 18 : Secteur
- 19 : Doigt
- 22.23 : Couple conique
- 24 : Train de roue interchangeable

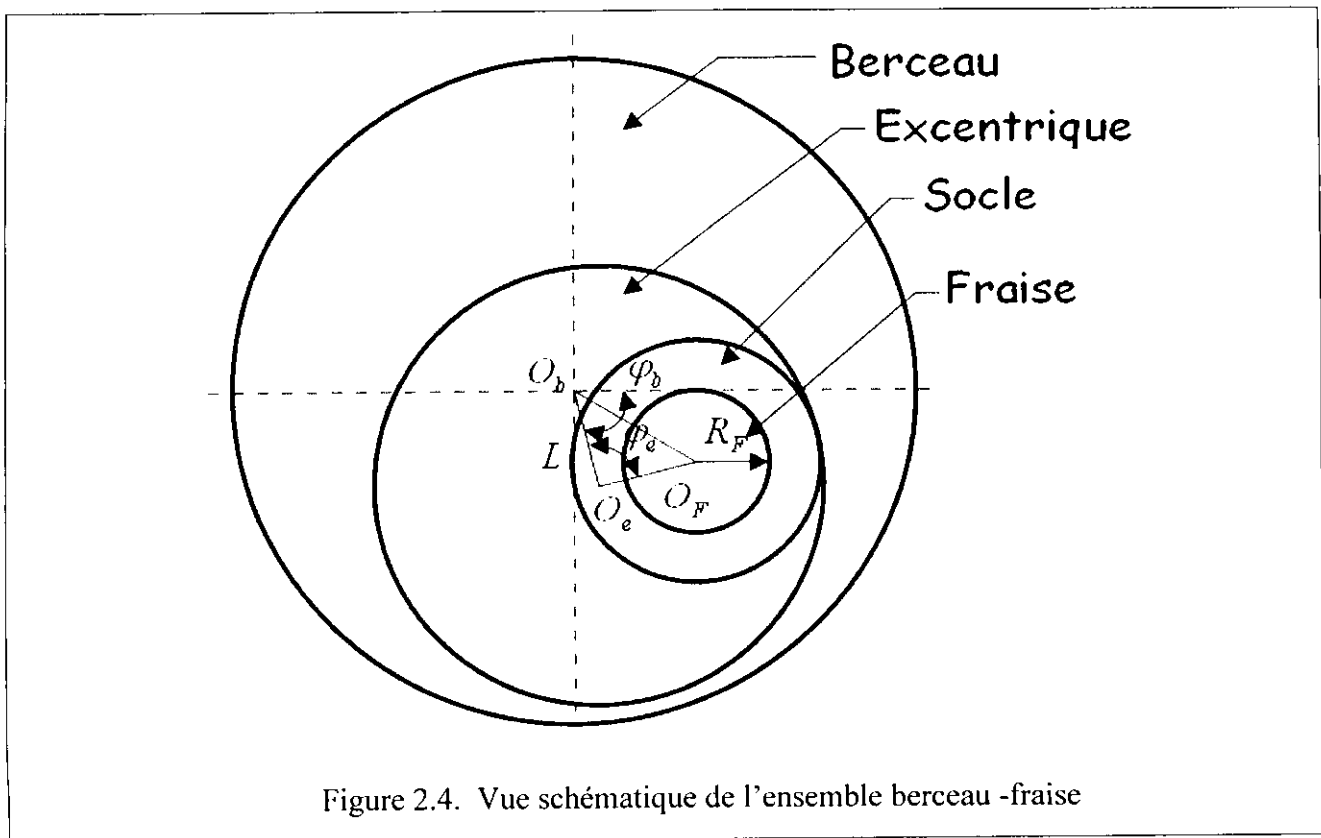
Figure 2.3. La chaîne cinématique de la machine Gleason [2]

## II.4. LES DIFFERENTS REGLAGES EFFECTUES SUR LA MACHINE GLEASON

Pour ce taillage des engrenages spiro-coniques, le réglage machine doit être divisé en trois parties; la première celle qui assure le positionnement de la fraise, la seconde, qui assure le positionnement de la pièce et finalement le réglage du mouvement relatif entre la pièce et la fraise.

### II.4.1. POSITIONNEMENT DE LA FRAISE

La figure (2.4) présente une vue schématique de face de l'ensemble berceau -fraise.



Le berceau (1) de centre  $O_b$ , réglable en position angulaire autour de son axe  $\vec{Z}_b$  d'un angle  $\varphi_b$  tel que  $\varphi_b \in [0, 2\pi]$ . Il permet de positionner l'axe de rotation de l'excentrique par rapport au centre de la machine.

L'excentrique (2) de centre  $O_e$  et d'axe  $\vec{O}_e Z_e$  parallèle à  $\vec{O}_b Z_b$ , réglable en position angulaire autour de son axe sur une glissière circulaire du berceau d'un angle  $\varphi_e$ , tel que  $\varphi_e \in [0, \pi]$ . Il permet d'ajuster la distance radiale entre le centre de la fraise et le centre de la machine.

Le socle (3) de centre  $O_s$  et d'axe  $\vec{O}_s Z_s$  parallèle à  $\vec{O}_e Z_e$ , passant par le centre de la fraise  $O_f$ , porte une face inclinée sur laquelle est aménagée une glissière circulaire d'axe  $\vec{O}_m Z_m$ , passant également par  $O_f$ , l'angle entre les deux axes  $\vec{O}_s Z_s$  et  $\vec{O}_m Z_m$  est  $\varepsilon$ . Il est réglable en position angulaire autour de son axe d'un angle  $\varphi_s$ .

La tête porte fraise (4) pivote à son tour sur la glissière circulaire du socle, mais la face d'appuie de la fraise fait un angle  $\varepsilon$  par rapport à la face d'appuie sur le socle. Elle est réglable en position angulaire autour de son axe  $O_{PF} \vec{Z}_{PF}$  d'un angle  $\varphi_{PF}$ .

Les centres  $O_S$ ,  $O_{in}$  et  $O_{PF}$  sont confondus avec  $O_F$ , ce qui veut dire que  $O_F$  reste fixe en position lors de la rotation du socle et de la tête porte fraise.

En faisant varier la position angulaire du socle et de la tête porte fraise, on peut obtenir toute inclinaison de la fraise par rapport au berceau comprise entre 0 et  $2\varepsilon$  (Figure 2.5).

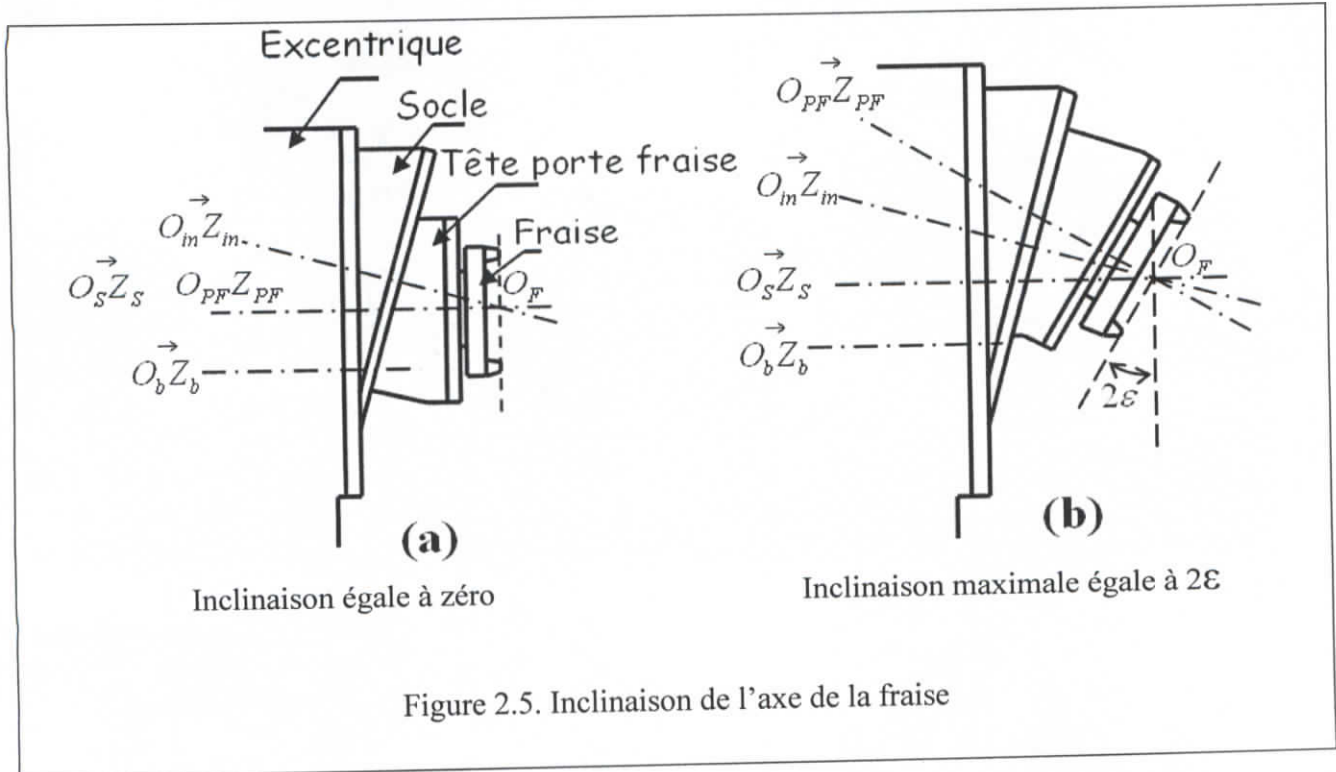


Figure 2.5. Inclinaison de l'axe de la fraise

On peut schématiser tous les réglages précédent dans le plan machine par la figure 2.6.

L'angle de l'excentrique  $\varphi_e$  et la distance radiale S sont liés entre eux par la relation :

$$S = 2 \cdot L \cdot \sin \frac{\varepsilon_e}{2} \tag{2.1}$$

D'après la relation (2.1), la valeur maximale de la distance radiale S est égale à 2L. Par conséquent, le rayon du cercle de l'excentrique est le paramètre le plus important qui détermine la dimension maximale de la pièce pouvant être taillée sur une machine donnée.

Posant  $\mu$  l'angle entre l'axe de la fraise et l'axe du berceau. Les angles  $\varphi_{PF}$ ,  $\mu$  et  $\varepsilon$  sont liés par la relation :

$$\sin \frac{\varphi_{PF}}{2} = \frac{\sin \frac{\mu}{2}}{\sin \varepsilon} \tag{2.2}$$

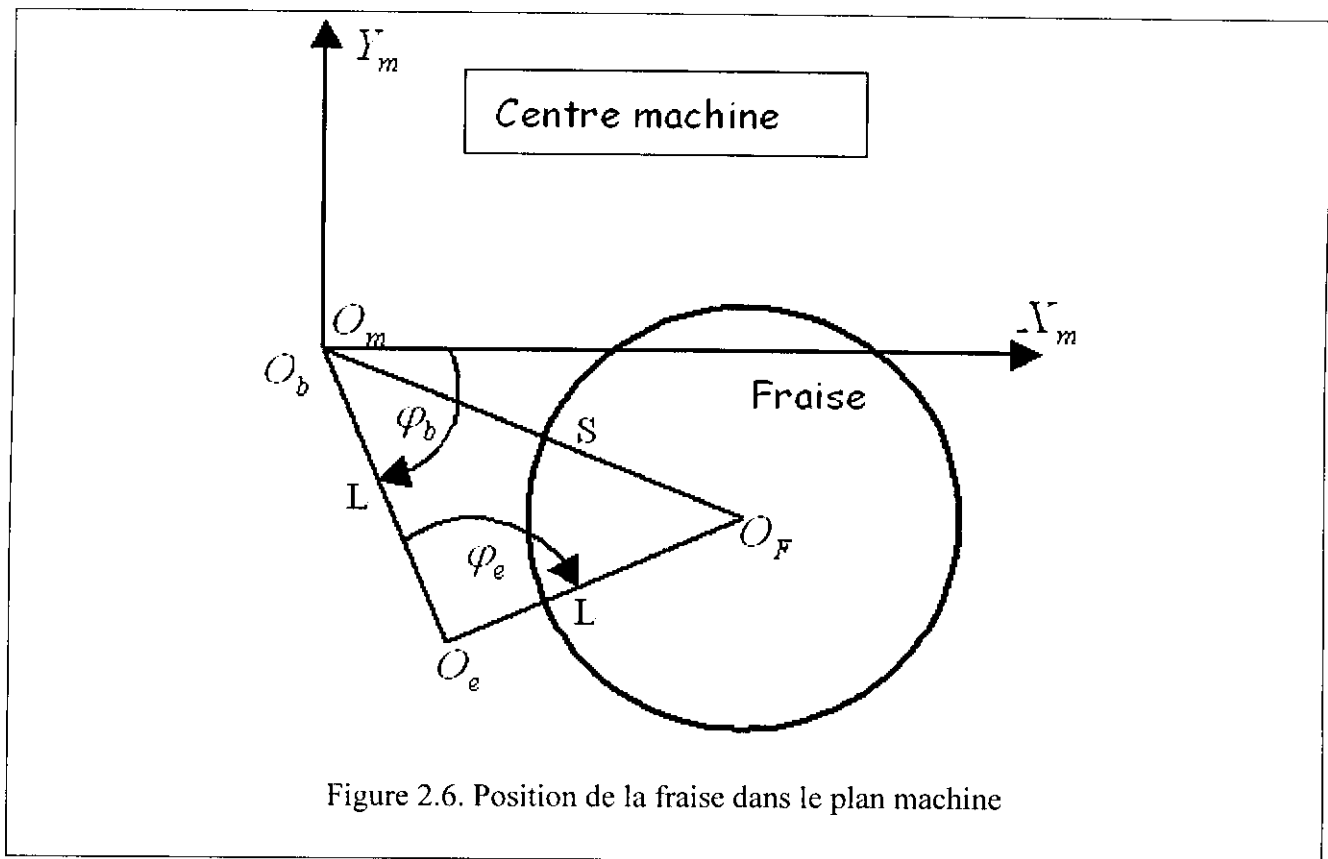


Figure 2.6. Position de la fraise dans le plan machine

#### II.4.2. POSITIONNEMENT DE LA PIÈCE [6]

Le positionnement de la pièce s'effectue par le réglage de plusieurs paramètres comme le montre la figure (2.7).

- Base coulissante  $E_S$  : c'est l'ajustement longitudinal de la base coulissante dans la direction parallèle à l'axe du berceau. Elle positionne le point d'intersection de l'axe de la pièce avec un plan parallèle au plan machine relativement au centre machine.
- Décalage hypoïde  $E_V$  ou décalage vertical : c'est le réglage vertical de la broche, il positionne l'axe de la pièce à tailler par rapport au centre machine.
- Recul de la poupée  $D$  : c'est l'ajustement longitudinal de la pièce suivant l'axe de la pièce à tailler. Il positionne le sommet du cône primitif par rapport à un plan parallèle au plan machine.
- Angle de pied machine  $\delta$  : c'est le positionnement angulaire du chariot. Cet angle oriente la poupée par rapport à l'axe du berceau et donne l'angle entre l'axe de la pièce à tailler et le plan machine.



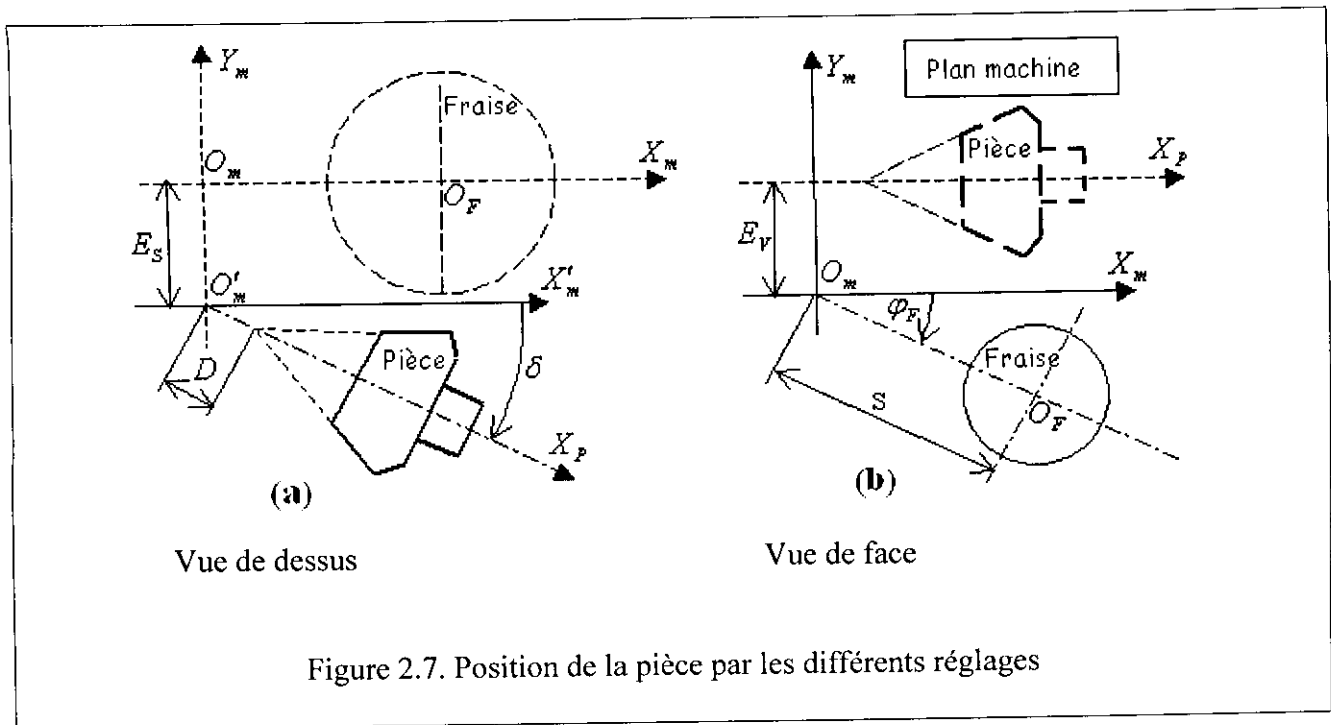


Figure 2.7. Position de la pièce par les différents réglages

L'angle  $\varphi_F$  est donné par la relation suivante :

$$\varphi_F = \varphi_b + \frac{\varphi_e}{2} - \frac{\pi}{2} \tag{2.3}$$

La distance de la base coulissante  $E_s$  par rapport au plan machine est donnée par : [10]

$$E_s = \chi_b - Kh \cdot \xi_b \tag{2.4}$$

Avec :

$E_s$  : Position de la base coulissante pendant le taillage.

$\chi_b$  : Réglage de la base coulissante.

$\xi_b$  : Angle de rotation de berceau pendant le taillage.

$Kh$  : Paramètre du mouvement hélicoïdal (mm/rad), fonction du nombre de dents des roues de train de rechange et d'une constante machine.

### II.4.3. MOUVEMENT RELATIF ENTRE LA PIÈCE ET LA BERCEAU

Le berceau et la pièce sont connectés par un système de roues dentées et arbres permettant la synchronisation de la rotation du berceau et celle de la pièce à tailler.

La vitesse de rotation de la pièce et la vitesse de rotation du berceau sont liées par le rapport de roulement défini par :

$$r_{pb} = \frac{\omega_p}{\omega_b} \tag{2.5}$$

Avec :

$\omega_b$  : Vitesse angulaire du berceau autour de son axe.

$\omega_p$  : Vitesse angulaire de la pièce autour de son axe.

## II.5. DIFFERENTS MOUVEMENTS DE LA MACHINE

On distingue trois types de mouvements : mouvement de coupe, mouvement de génération et mouvement de division.

### II.5.1. MOUVEMENT DE COUPE

Ce mouvement se concentre principalement sur la rotation de la fraise autour de son axe, les vitesses seront prises selon des considérations industrielles et économiques, il s'agit d'enlever le maximum de débit de matière tout en assurant un très bon état de surface et une durée de vie optimale des lames de taillage.

### II.5.2. MOUVEMENT DE GENERATION

Ces mouvements ont un effet direct sur la forme des surfaces de dentures, leurs nature et leurs amplitude dépendent de la méthode de taillage :

#### II.5.2.1. METHODE FORMATE [2][16]

- Pour le taillage des couronnes, il n'y a aucun mouvement de génération. L'outil pénètre directement dans la couronne dont le profil de dent est donné par la forme des lames (figure 2.8.a).

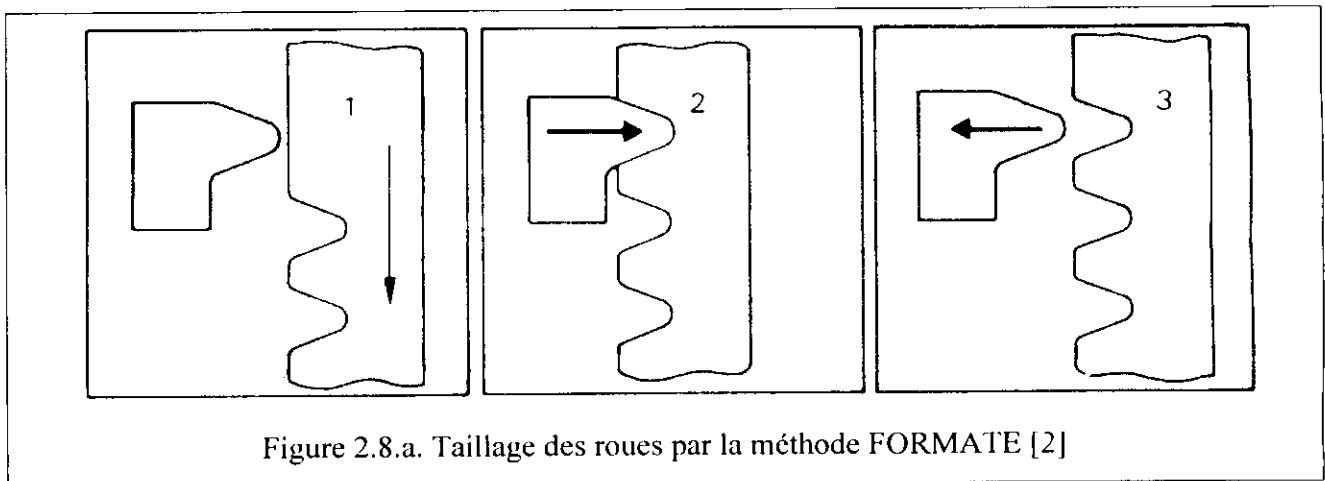


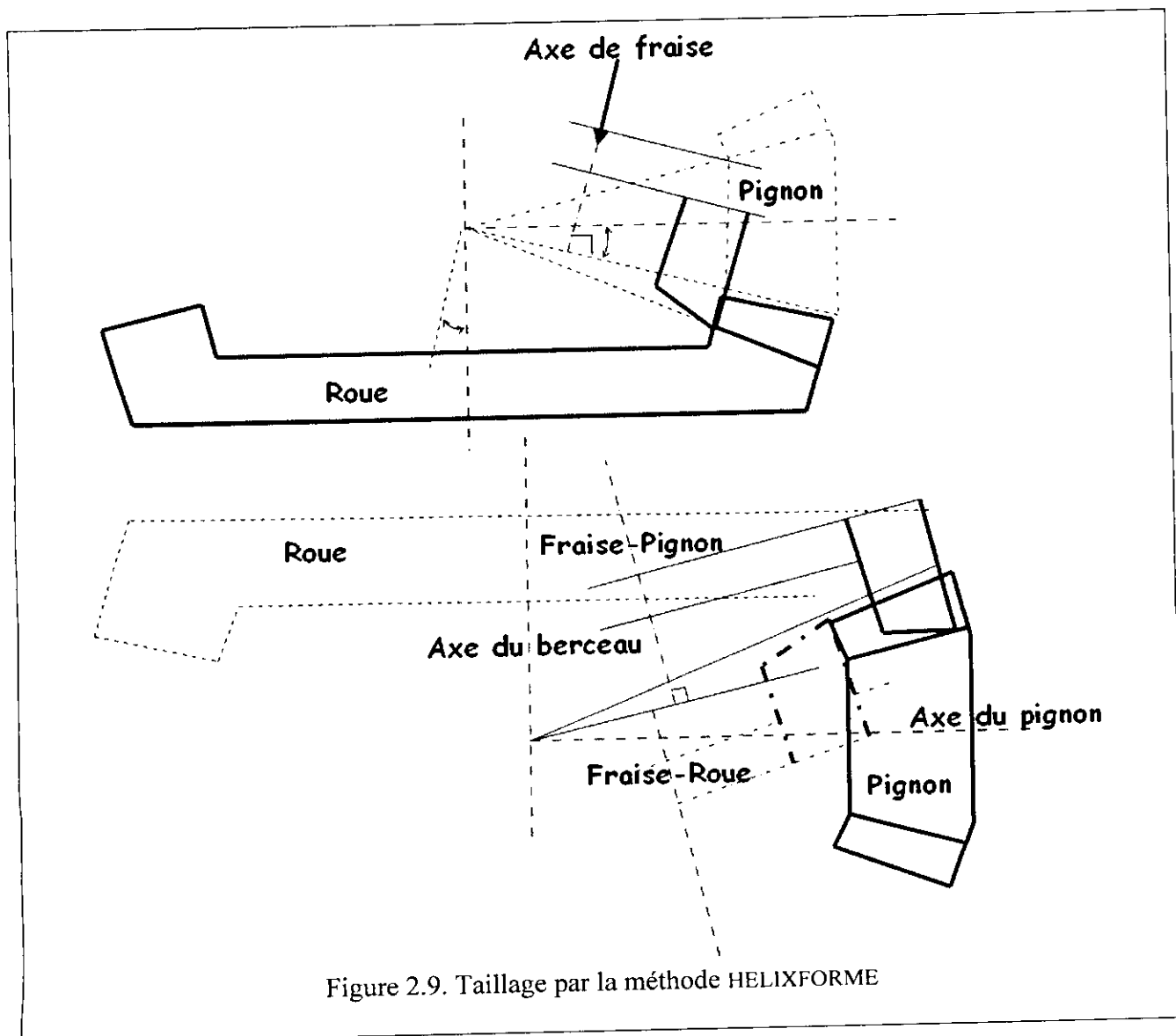
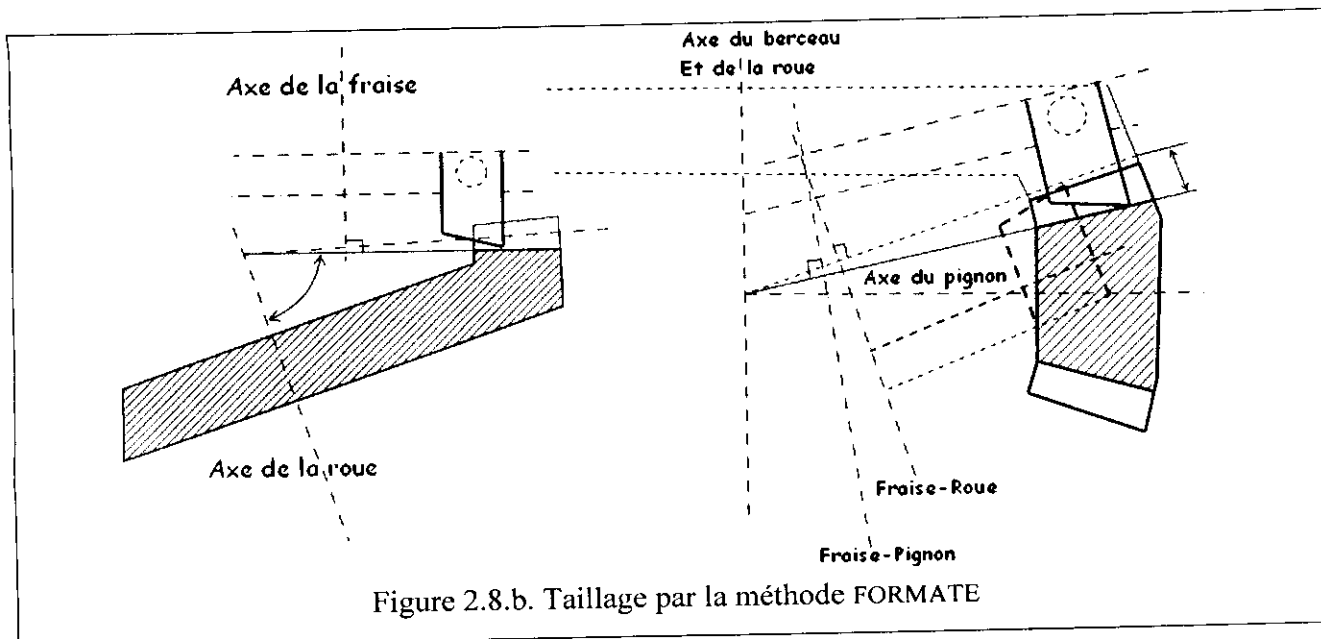
Figure 2.8.a. Taillage des roues par la méthode FORMATE [2]

- Par contre, pour le taillage des pignons, il y a un mouvement de génération configuré dans la rotation conjuguée de l'ensemble pignon -outil, chacun autour de son axe avec un rapport de rotation constant et les axes des deux fraises de taillage pignon et couronne font obligatoirement un certain angle entre eux (figure 2.8.b).

#### II.5.2.2. METHODE HELIXFORME [2][16]

- Les mêmes mouvements de la méthode FORMAT sont utilisés pour le taillage des roues, plus une avance axiale uniforme autour de son axe.

- Les mêmes mouvements de la méthode FORMAT sont utilisés pour le taillage des pignons, sauf que l'axe de la fraise de taillage du pignon est dans la même direction que celui de la fraise de taillage de la couronne (figure 2.9).



### **II.5.2.3. METHODE DU ROULEMENT MODIFIE [5]**

C'est les mêmes mouvements que la méthode FORMATE, sauf que le rapport de roulement berceau -pignon n'est pas constant au cours de la génération de la denture.

### **II.5.2.4. METHODE HELICAL DUPLEXE [5]**

En plus des mouvements de rotation conjugués du berceau et de la pièce, il y a un mouvement de translation de la base coulissante vers le berceau et parallèlement à l'axe de ce dernier.

### **II.5.3. MOUVEMENT DE DIVISION**

Ce type de mouvement se trouve dans le procédé de taillage dent par dent. Ce qui veut dire qu'à chaque cycle de taillage d'entre dent, il y a un diviseur actionné par des mécanismes, souvent pneumatiques, qui assurent la rotation de la pièce en une seule division, synchronisée avec les autres mouvements de la machine.

## **II.6. CONCLUSION**

Dans ce chapitre nous avons décrit les machines de taillages des engrenages spiro-coniques de type Gleason, cette description est nécessaire pour notre étude afin de définir l'influence des défauts géométriques sur la génération de la denture, ainsi la simulation de la génération de cette dernière ne peut être faite sans connaître les types de machines et les différents réglages qui peuvent être effectués sur elles.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter le modèle mathématique sur lequel se base la simulation de taillage pour avoir le flanc de la denture.

# CHAPITRE III

## MODELE MATHEMATIQUE ET SIMULATION DE TAILLAGE

### III.1. INTRODUCTION

La complexité de la géométrie des engrenages spiro -coniques nécessite un outil mathématique très performant, facile à présenter et à programmer, dont on utilise une représentation matricielle d'un système quatre×quatre dite représentation en coordonnées homogènes.

Dans ce présent chapitre, nous allons décrire le modèle de simulation de taillage à partir des paramètres de réglages machine qui sont considérés comme des données.

Ces valeurs de réglages machine seront modifiées après la simulation de l'engrènement en tenant compte des dimensions du pignon et de la roue, ainsi que le mouvement relatif entre la pièce et la fraise.

### III.2. COORDONNEES HOMOGENES

Soit un point M représenté dans le repère  $R_0(O_0, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ . On peut représenter ce même point dans un autre repère  $R_1(O_1, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$  d'après la relation suivante:

$$\vec{R}_1 = \overline{O_1O_0} + \Omega \cdot \vec{R}_0 \tag{3.1}$$

Où:  $\overline{O_1O_0}$  : La distance entre les centres des repères  $R_1$  et  $R_0$  suivant les trois axes  $\vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1$ .

$\Omega$  : La matrice de passage de rotation pure des trois plans du repère  $R_1$  formé par  $(\vec{X}_1, \vec{Y}_1)$ ,  $(\vec{X}_1, \vec{Z}_1)$  et  $(\vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$  par rapport au trois plans du repère  $R_0$  formé par  $(\vec{X}_0, \vec{Y}_0)$ ,  $(\vec{X}_0, \vec{Z}_0)$  et  $(\vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ .

$$\Omega = \Omega_x \cdot \Omega_y \cdot \Omega_z$$

Avec:

$\Omega_i$ : Les matrices de passage en rotation autour de l'axe i.

On définit :

$$\overline{O_1O_0} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$



$$\Omega = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{bmatrix}$$

Où:  $a_{ij}$  : Les cosinus directeurs de rotation du repère.

La relation (3.1) s'écrit sous la forme suivante:

$$\vec{R}_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{bmatrix} \cdot \vec{R}_0$$

La relation (3.5) peut se représenter sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Avec cette notation, on peut représenter les coordonnées d'un point donné lié à un repère initial dans un autre repère.

### III.3. MODELISATION DE TAILLAGE

Pour cette modélisation, on doit prendre en compte des hypothèses sur laquelle se base notre étude. Ces hypothèses sont :

- 1) Le contact entre la fraise et la pièce à tailler est ponctuel.
- 2) Si un point appartient à la surface de denture, il appartient aussi à la surface des lames de la fraise.

#### III.3.1. VECTEUR POSITION DE LA SURFACE GENERATRICE ET SA NORMALE [5]

La fraise de taillage est composée d'un certain nombre de lames.

La figure 3.1 représente une fraise de taillage en coupe.

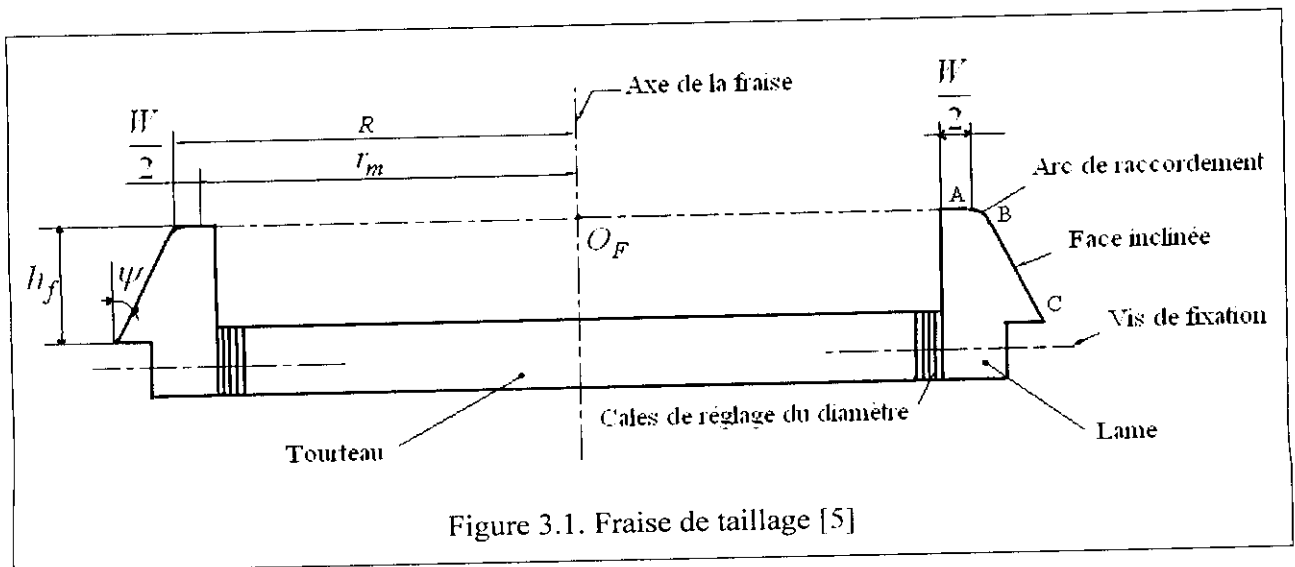


Figure 3.1. Fraise de taillage [5]

L'arrête tranchante des lames est constituées de deux parties (figure 3.2):

- Une partie linéaire destinée à générer la partie active du flanc de denture.
- Une partie circulaire destinée à générer le fond de la denture.

Dans le système de coordonnées  $R_F(O_F, \vec{X}_F, \vec{Y}_F, \vec{Z}_F)$  lié à la fraise, on peut schématiser la procédure de taillage par la figure (3.2):

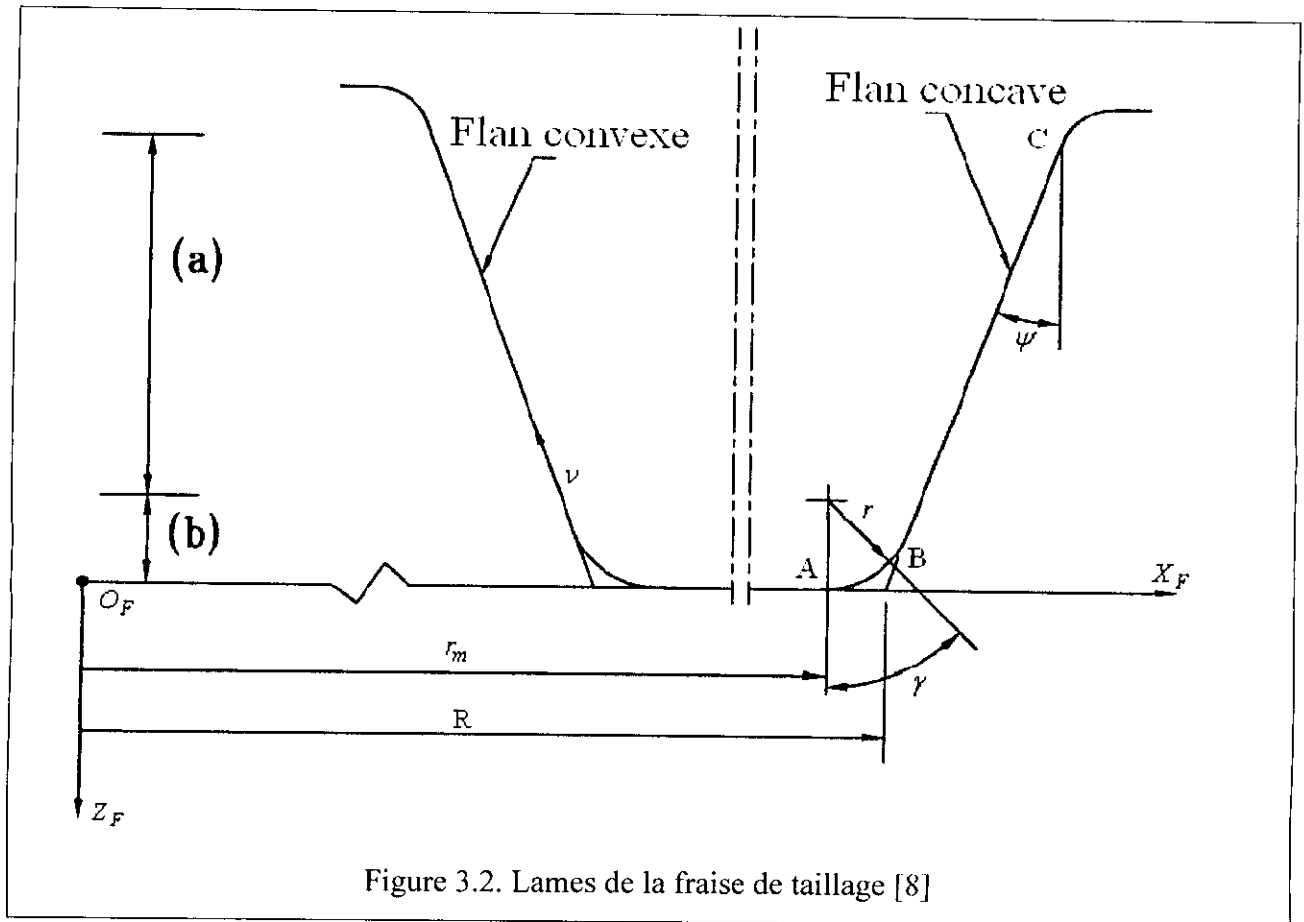


Figure 3.2. Lames de la fraise de taillage [8]

La rotation des lames autour de l'axe de la fraise  $\vec{Z}_F$  génèrent deux surfaces :

- Un tronc de cône par le segment BC (figure 3.3).
- Une portion d'un tore par l'arc AB.

Pour chaque surface engendrée par les deux parties (a) et (b), on peut définir les vecteurs positions d'un point sur la surface  $R_F^{(a)}$  et  $R_F^{(b)}$ , qui dépendent de deux variables, notant  $x_1, x_2$ .

Le vecteur normal à la surface en un point donné peut être exprimé par la relation suivante :

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{R}_F}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial \vec{R}_F}{\partial x_2}$$

Le vecteur normal unitaire est donné par :

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$$

**\*) SURFACE ENGENDREE PAR LE SEGMENT RECTILIGNE [8]**

La figure 3.3. représente les surfaces engendrées par les flans concave et convexe dans le système  $R_F$  :

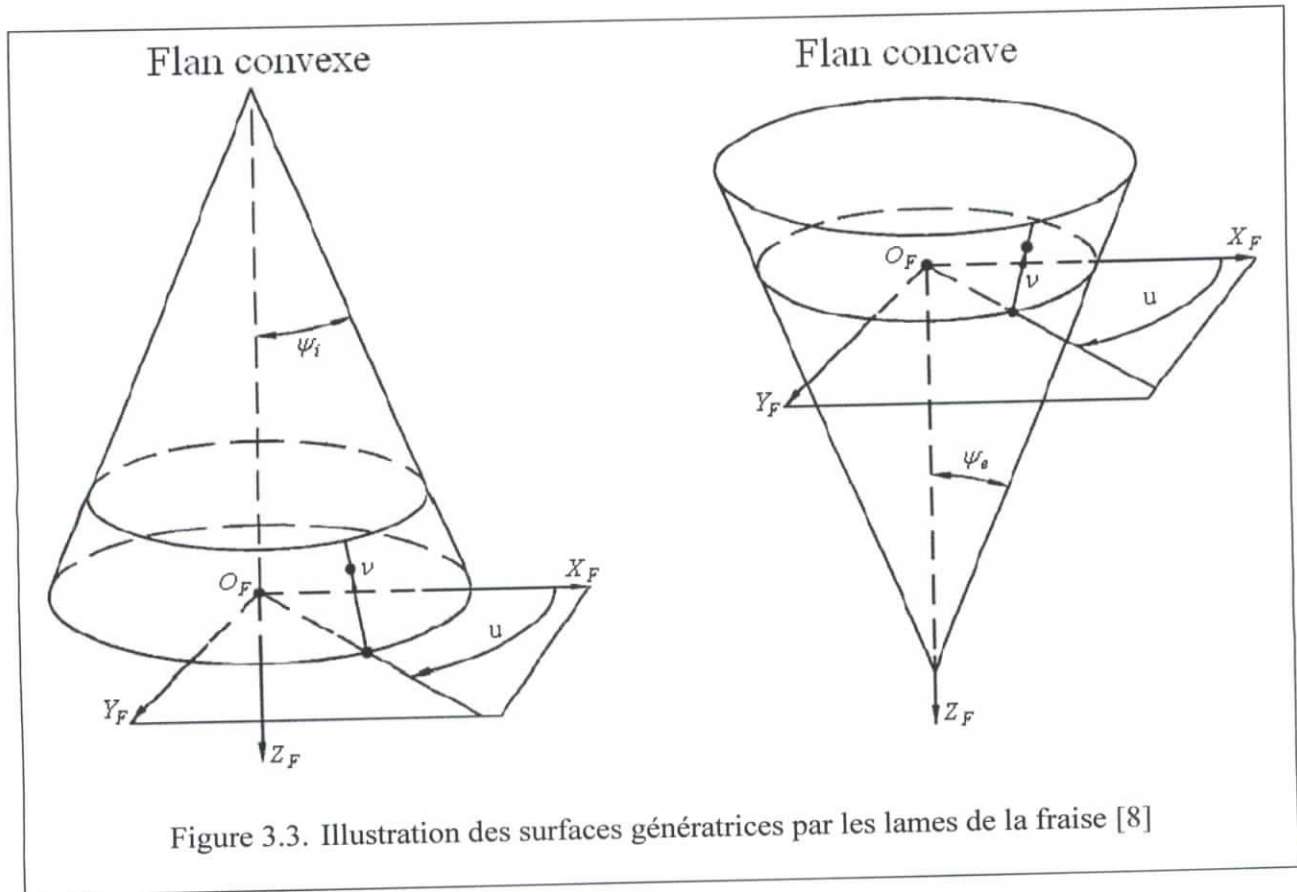


Figure 3.3. Illustration des surfaces génératrices par les lames de la fraise [8]

Le vecteur position d'un point sur la surface génératrice exprimé dans le système des coordonnées  $R_F$  es donné par :

$$R_F^{(a)}(\vec{u}, \nu) = \begin{Bmatrix} (R + \nu \cdot \sin \varphi) \cdot \cos u \\ (R + \nu \cdot \sin \varphi) \cdot \sin u \\ -\nu \cdot \cos \varphi \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Avec :

$$R = r_m + \frac{w}{2} \quad \text{et} \quad \varphi = \psi_e \quad \text{Pour le flan concave (extérieur).}$$

$$R = r_m - \frac{w}{2} \quad \text{et} \quad \varphi = -\psi, \quad \text{Pour le flan convexe (intérieur).}$$

$w$  : Largeur entre pointe de la lame.

$\varphi$  : Angle de pression des lames de la fraise.

$u, v$  : coordonnées de la surface engendrée par la partie rectiligne des lames de fraise.

La normale unitaire est définie par :

$$\vec{n}_f^{(a)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \vec{R}_f^{(a)}}{\partial u} & \frac{\partial \vec{R}_f^{(a)}}{\partial v} \end{vmatrix}}{\left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \vec{R}_f^{(a)}}{\partial u} & \frac{\partial \vec{R}_f^{(a)}}{\partial v} \end{vmatrix} \right|}$$

D'où on obtient :

$$\vec{n}_f^{(a)} = \begin{Bmatrix} \cos u \cdot \cos \varphi \\ \sin u \cdot \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 1 \end{Bmatrix}$$

### \*) SURFACE ENGENDREE PAR LE SEGMENT TORIQUE [5]

Le vecteur position d'un point sur la surface engendrée par la portion torique est donné par :

❖ **Flan concave :**

$$R_f^b(u, \gamma) = \begin{Bmatrix} \left[ r_m + \frac{w}{2} + r_e \cdot \left( \frac{\sin \psi_e - 1}{\cos \psi_e} + \sin \gamma \right) \right] \cdot \cos u \\ \left[ r_m + \frac{w}{2} + r_e \cdot \left( \frac{\sin \psi_e - 1}{\cos \psi_e} + \sin \gamma \right) \right] \cdot \sin u \\ r_e \cdot (\cos \gamma - 1) \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Avec:

$u, \gamma$  : Les coordonnées de la surface engendrée par la partie torique des lames de fraise.

$r_e$  : Le rayon de raccordement de la lame extérieure.

❖ **Flan convexe :**

$$R_F^{(b)}(u, \gamma) = \begin{Bmatrix} \left[ r_m - \frac{w}{2} - r_i \cdot \left( \frac{\sin \psi_i - 1}{\cos \psi_i} + \sin \gamma \right) \right] \cdot \cos u \\ \left[ r_m - \frac{w}{2} - r_i \cdot \left( \frac{\sin \psi_i - 1}{\cos \psi_i} + \sin \gamma \right) \right] \cdot \sin u \\ r_i \cdot (\cos \gamma - 1) \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Avec:

$u, \gamma$  : Les coordonnées de la surface engendrée par la partie torique des lames de fraise.

$r_i$  : Le rayon de raccordement de la lame intérieure.

La normale unitaire est définie par :

$$\vec{n}_F^{(b)} = \frac{\frac{\partial \vec{R}_F^{(b)}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{R}_F^{(b)}}{\partial \gamma}}{\left| \frac{\partial \vec{R}_F^{(b)}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{R}_F^{(b)}}{\partial \gamma} \right|}$$

Finalement, on obtient :

▪ **Pour le flan concave :**

$$\vec{n}_F^{(b)} = \begin{Bmatrix} -\sin \gamma \cos u \\ -\sin \gamma \sin u \\ -\cos \gamma \\ 1 \end{Bmatrix}$$

▪ **Pour le flan convexe :**

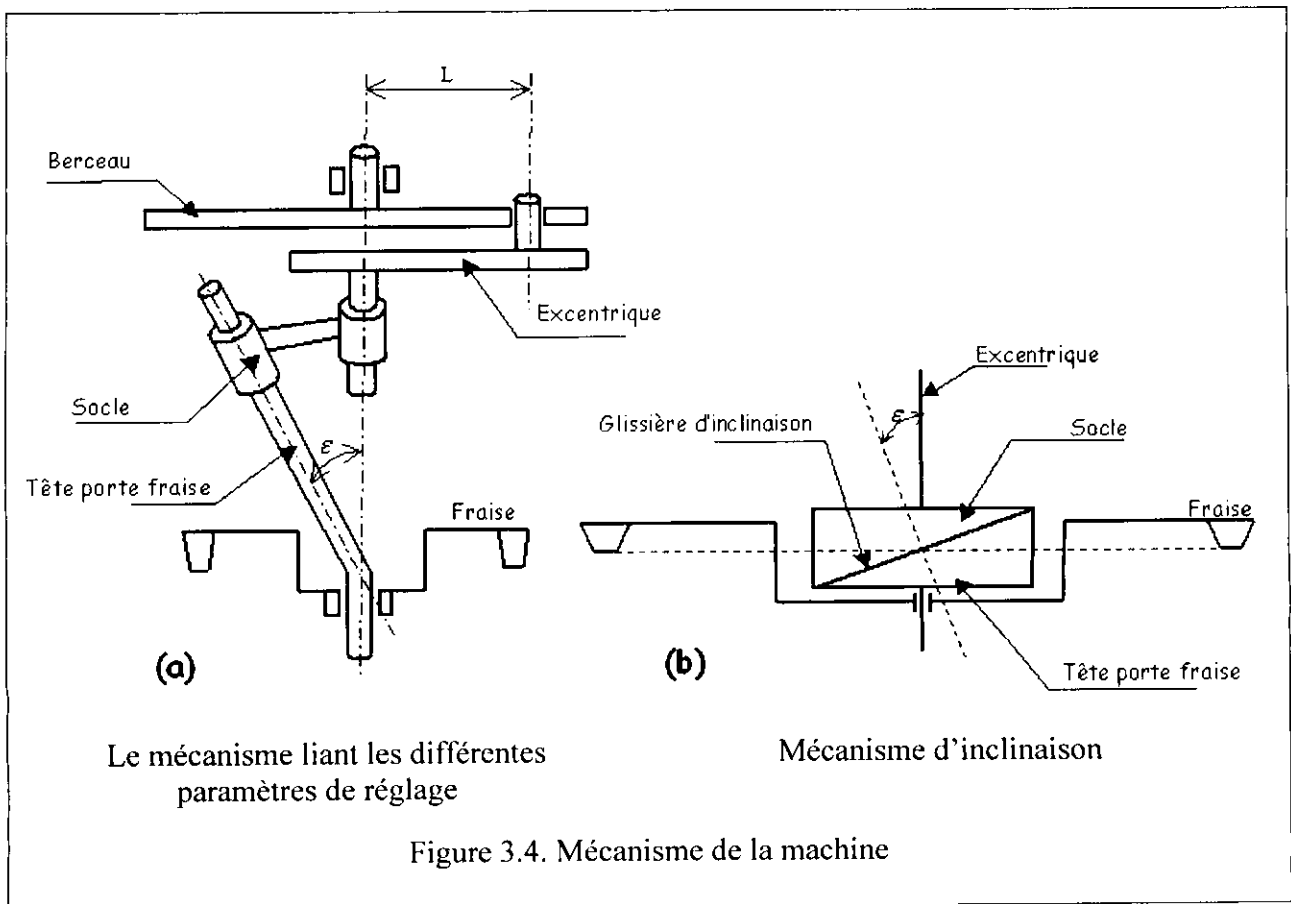
$$\vec{n}_F^{(b)} = \begin{Bmatrix} \sin \gamma \cos u \\ \sin \gamma \sin u \\ -\cos \gamma \\ 1 \end{Bmatrix}$$

**Remarque:**

Pour la démonstration détaillée voir Annexe II.

### III.3.2. PASSAGE DU REPERE LIE A LA FRAISE AU REPERE FIXE PASSANT PAR LES DIFFERENTS REGLAGES DE LA MACHINE

On peut schématiser le mécanisme de la machine par la figure 3.4 [11]



Par cette schématisation on voit tous les réglages qui peuvent être effectués sur la machine qui ont un effet direct sur le profil de la denture de la pièce à usiner. On décrit tous les réglages par détail dans ce qui suit: réglage du berceau, réglage de l'excentrique, réglage du socle, réglage de la tête porte fraise et enfin on lie tous ces réglages à un repère fixe lié au bâti de la machine.

#### III.3.2.1. REGLAGE DU BERCEAU

On lie rigidement le repère  $R_b$  au berceau dont l'origine est  $O_b$ , ce dernier est aussi le centre de la machine.

Le plan formé par les axes  $\vec{X}_b$  et  $\vec{Y}_b$  est le plan de la machine avec  $\vec{Z}_b$  est l'axe de rotation du berceau.

On lie rigidement le repère  $R_c$  à l'excentrique dont l'axe  $\vec{Z}_c$  est parallèle à l'axe  $\vec{Z}_b$  et la distance entre eux est égale au rayon du cercle d'excentrique L.

Le réglage du berceau est obtenu en faisant tourner le berceau autour de l'axe  $\vec{Z}_b$  d'un l'angle  $\varphi_b$ . Les deux centres  $O_b$  et  $O_b$  des repères liés successivement au berceau et la fraise sont confondus étant pris comme une position de référence (figure 3.5).

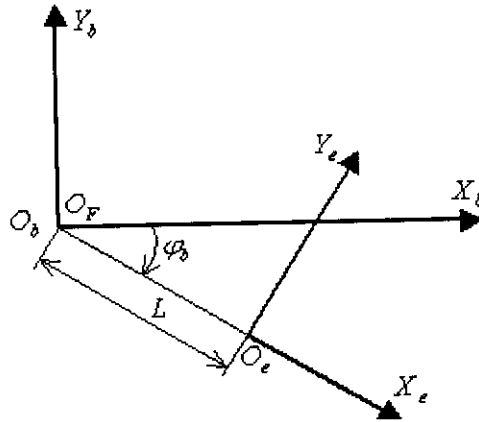


Figure 3.5. Réglage du berceau

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_b$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_b & \sin \varphi_b & 0 & L \cos \varphi_b \\ -\sin \varphi_b & \cos \varphi_b & 0 & -L \sin \varphi_b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_e \\ Y_e \\ Z_e \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Donc:

$$\vec{R}_b = [M_{b \bullet e}] \cdot \vec{R}_e$$

Avec:

$$[M_{b \bullet e}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_b & \sin \varphi_b & 0 & L \cos \varphi_b \\ -\sin \varphi_b & \cos \varphi_b & 0 & -L \sin \varphi_b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### III.3.2.2. REGLAGE DE L'EXCENTRIQUE

On lie le repère  $R_s (O_s, \vec{X}_s, \vec{Y}_s, \vec{Z}_s)$  au socle dont l'origine  $O_s$  est confondu avec le centre de la fraise. L'axe  $\vec{Z}_s$  est parallèle à l'axe du berceau  $\vec{Z}_b$ .

Le réglage de l'excentrique est obtenu en faisant tourner l'excentrique autour de l'axe  $\vec{Z}_e$  de l'angle  $\varphi_e$ .



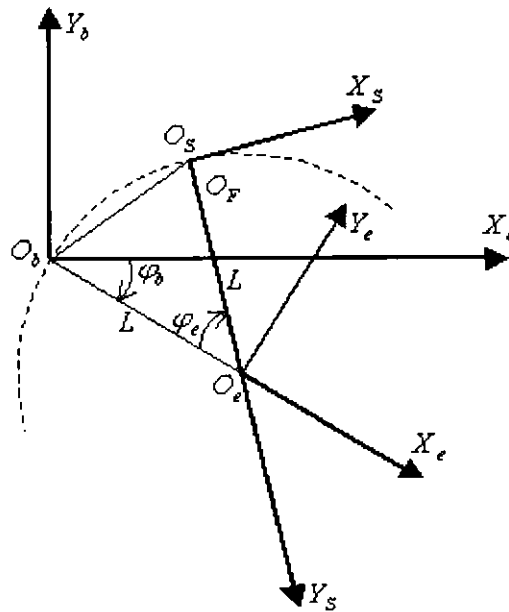


Figure 3.6. Réglage de l'excentrique

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_s$  peuvent être exprimées dans le repère  $R_e$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_e \\ Y_e \\ Z_e \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_e & \sin \varphi_e & 0 & -L \cos \varphi_e \\ -\sin \varphi_e & \cos \varphi_e & 0 & L \sin \varphi_e \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Donc:

$$\vec{R}_e = [M_{e \cdot s}] \cdot \vec{R}_s$$

Avec:

$$[M_{e \cdot s}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_e & \sin \varphi_e & 0 & -L \cos \varphi_e \\ -\sin \varphi_e & \cos \varphi_e & 0 & L \sin \varphi_e \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### III.3.2.3. REGLAGE DU SOCLE

On lie rigidement un autre repère  $R_{ss}$  au socle afin de faire apparaître son réglage dans la chaîne des réglages. Le repère  $R_{ss}(O_{ss}, \vec{X}_{ss}, \vec{Y}_{ss}, \vec{Z}_{ss})$  est de centre  $O_{ss}$  et d'axe  $\vec{Z}_{ss}$  qui sont confonds avec  $O_s$  et  $\vec{Z}_s$ .

Le réglage du socle s'obtient en le faisant tourner le socle autour de l'axe  $\vec{Z}_{ss}$  d'un angle  $\varphi_s$ .

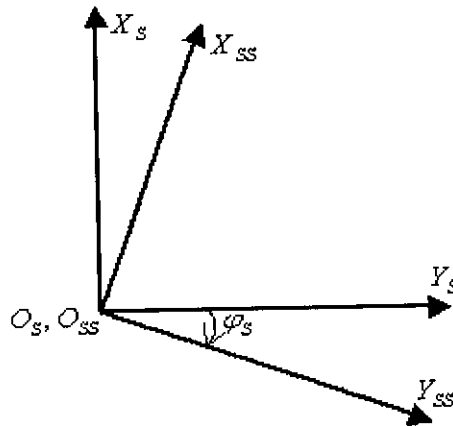


Figure 3.7. Réglage du socle

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_{SS}$ , peuvent être exprimées dans le repère  $R_S$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_S & \sin \varphi_S & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_S & \cos \varphi_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_{SS} \\ Y_{SS} \\ Z_{SS} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Donc: 
$$\vec{R}_S = [M_{S \cdot SS}] \cdot \vec{R}_{SS}$$

Avec: 
$$[M_{S \cdot SS}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_S & \sin \varphi_S & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_S & \cos \varphi_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### III.3.2.4. REGLAGE DE LA TETE PORTE FRAISE

On lie au plan incliné de la tête porte fraise, le repère  $R_{PF}(O_{PF}, \vec{X}_{PF}, \vec{Y}_{PF}, \vec{Z}_{PF})$  dont l'origine  $O_{PF}$  est confondue avec  $O_{SS}$  et l'axe  $\vec{Y}_{PF}$  est parallèle à  $\vec{Y}_{SS}$ .

L'axe  $\vec{Z}_{PF}$  est normal au plan incliné et fait un angle  $\varepsilon$  avec l'axe  $\vec{Z}_{SS}$  (figure 3.8).

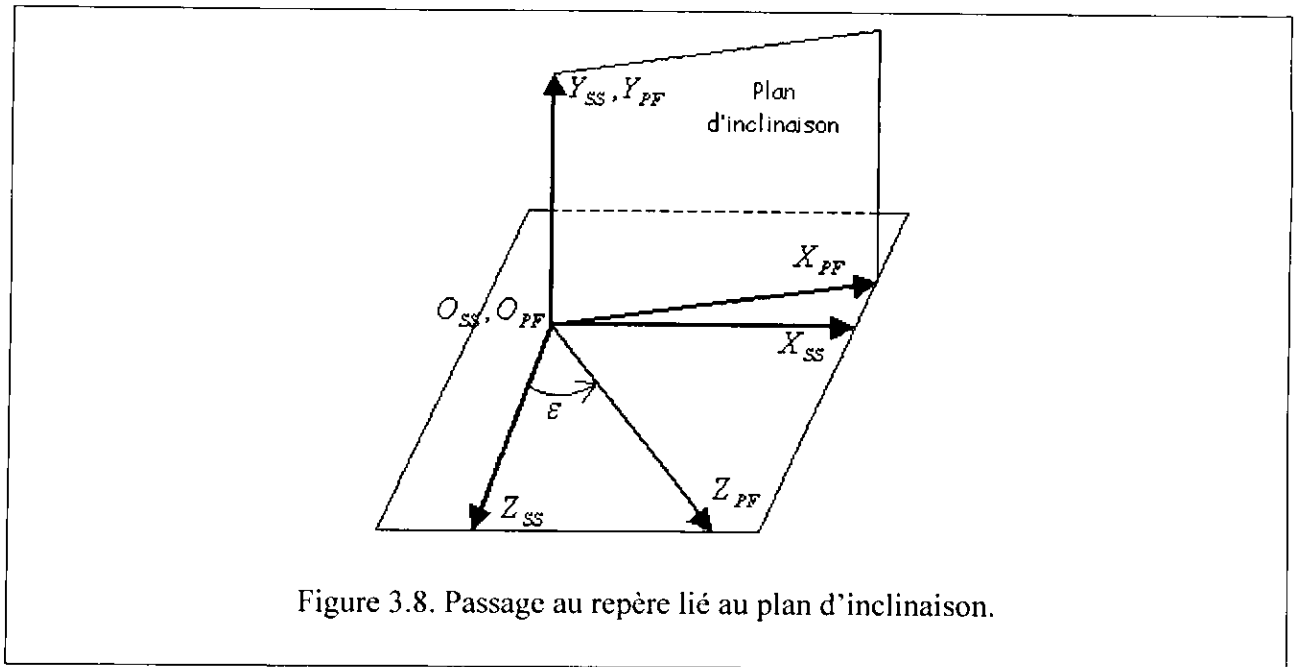


Figure 3.8. Passage au repère lié au plan d'inclinaison.

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_{PF}$ , peuvent être exprimées dans le repère  $R_{SS}$  par:

$$\begin{Bmatrix} X_{SS} \\ Y_{SS} \\ Z_{SS} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & 0 & \sin \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_{PF} \\ Y_{PF} \\ Z_{PF} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Donc:  $\vec{R}_{SS} = [M_{SS \cdot PF}] \cdot \vec{R}_{PF}$

Avec:  $[M_{SS \cdot PF}] = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & 0 & \sin \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

On lie rigidement le repère  $R_{PFR} (O_{PFR}, \vec{X}_{PFR}, \vec{Y}_{PFR}, \vec{Z}_{PFR})$  au tête porte fraise, dont l'origine  $O_{PFR}$  et l'axe  $\vec{Z}_{PFR}$  sont confondues avec  $O_{PF}$  et  $\vec{Z}_{PF}$ .

Le réglage de la tête porte fraise est obtenu en faisant tourner la tête porte fraise autour de l'axe  $\vec{Z}_{PF}$  d'un angle  $\varphi_{PF}$  (figure 3.9).

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_{PFR}$ , peuvent être exprimées dans le repère  $R_{PF}$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_{PFR} \\ Y_{PFR} \\ Z_{PFR} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{PF} & \sin \varphi_{PF} & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_{PF} & \cos \varphi_{PF} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_{PF} \\ Y_{PF} \\ Z_{PF} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{PF} = [M_{PF \cdot PFR}] \cdot \vec{R}_{PFR} \quad \text{Avec: } [M_{PF \cdot PFR}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{PF} & \sin \varphi_{PF} & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_{PF} & \cos \varphi_{PF} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

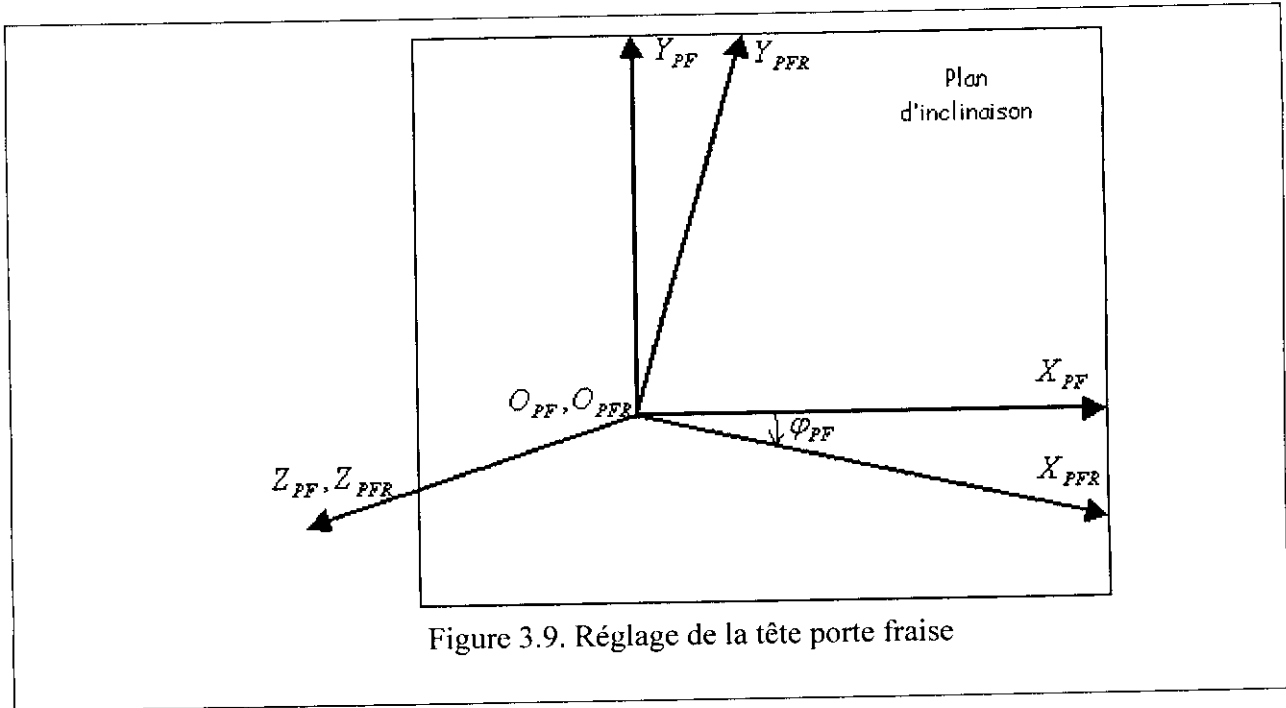


Figure 3.9. Réglage de la tête porte fraise

On lie le repère  $R_F(O_F, \vec{X}_F, \vec{Y}_F, \vec{Z}_F)$  à la fraise dont l'origine  $O_F$  du centre de la fraise est confondue avec  $O_{PFR}$ , et l'axe  $\vec{Z}_F$  fait un angle  $\varepsilon$  avec  $\vec{Z}_{PFR}$  (figure 3.10).

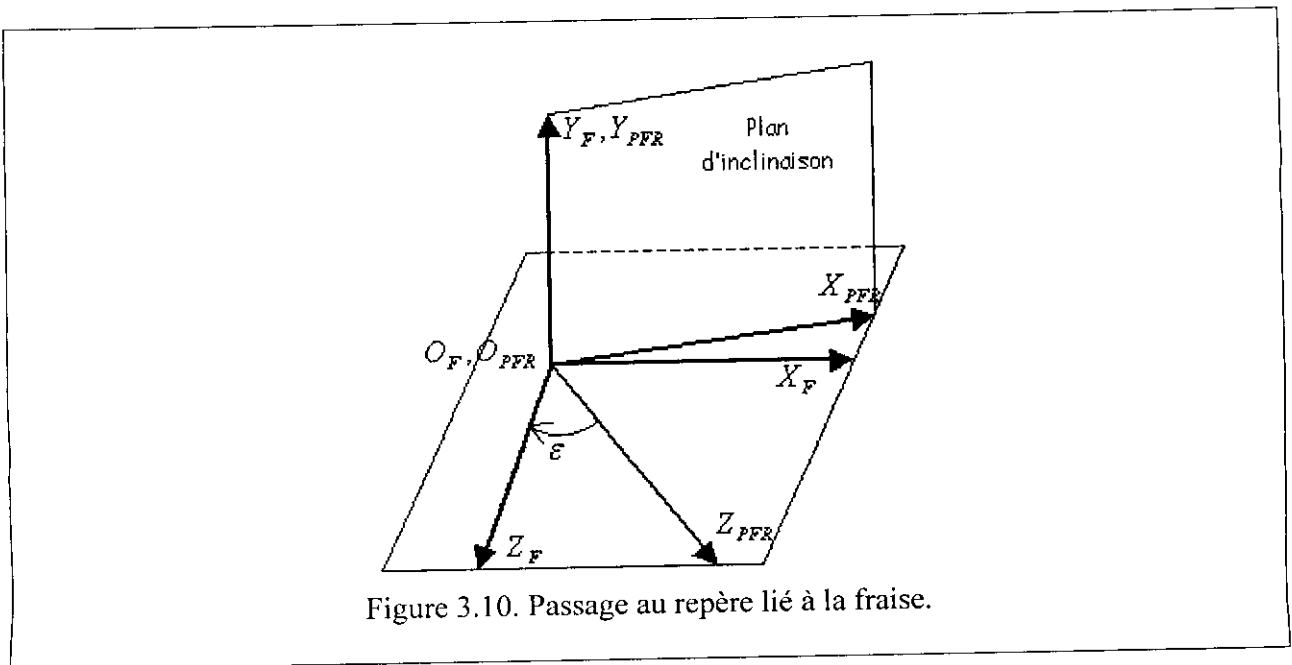


Figure 3.10. Passage au repère lié à la fraise.

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_F$ , peuvent être exprimées dans le repère  $R_{PFR}$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_{PFR} \\ Y_{PFR} \\ Z_{PFR} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & 0 & -\sin \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_F \\ Y_F \\ Z_F \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Donc: 
$$\vec{R}_{PFR} = [M_{PFR \bullet F}] \cdot \vec{R}_F$$

Avec: 
$$[M_{PFR \bullet F}] = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & 0 & -\sin \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où: 
$$\vec{R}_{SS} = [M_{SS \bullet PF}] \cdot [M_{PF \bullet PFR}] \cdot [M_{PFR \bullet F}] \cdot \vec{R}_F = [M_{SS \bullet F}] \cdot \vec{R}_F$$

Avec :

$$[M_{SS \bullet F}] = \begin{bmatrix} (\cos \varepsilon)^2 \cdot \cos \varphi_{PF} + (\sin \varepsilon)^2 & \cos \varepsilon \cdot \sin \varphi_{PF} & \frac{\sin 2\varepsilon}{2} (1 - \cos \varphi_{PF}) & 0 \\ -\cos \varepsilon \cdot \sin \varphi_{PF} & \cos \varphi_{PF} & \sin \varepsilon \cdot \sin \varphi_{PF} & 0 \\ \frac{\sin 2\varepsilon}{2} (1 - \cos \varphi_{PF}) & -\sin \varepsilon \cdot \sin \varphi_{PF} & (\sin \varepsilon)^2 \cdot \cos \varphi_{PF} + (\cos \varepsilon)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ❖ On peut simplifier tous les réglages de la machine par le passage du repère lié à la fraise jusqu'au repère lié au berceau par la forme matricielle suivante : [9][10]

$$\vec{R}_b = [M_{b \bullet e}] \cdot [M_{e \bullet S}] \cdot [M_{S \bullet SS}] \cdot [M_{SS \bullet F}] \cdot \vec{R}_F = [M_{b \bullet F}] \cdot \vec{R}_F$$

Avec: 
$$[M_{b \bullet F}] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

Et:

$$\tau = \varphi_b + \varphi_e + \varphi_S$$

$$\begin{cases}
 m_{11} = \cos \tau \cdot ((\cos \varepsilon)^2 \cdot \cos \varphi_{PF} + (\sin \varepsilon)^2) - \sin \tau \cdot \cos \varepsilon \cdot \sin \varphi_{PF} \\
 m_{12} = \cos \tau \cdot \cos \varepsilon \cdot \sin \varphi_{PF} + \sin \tau \cdot \cos \varphi_{PF} \\
 m_{13} = \cos \tau \cdot \frac{\sin 2\varepsilon}{2} \cdot (1 - \cos \varphi_{PF}) + \sin \tau \cdot \sin \varphi_{PF} \cdot \sin \varepsilon \\
 m_{14} = L \cdot (\cos \varphi_b - \cos(\varphi_b - \varphi_e)) \\
 m_{21} = -\sin \tau \cdot ((\cos \varepsilon)^2 \cdot \cos \varphi_{PF} + (\sin \varepsilon)^2) - \cos \tau \cdot \sin \varphi_{PF} \cdot \cos \varepsilon \\
 m_{22} = -\sin \tau \cdot \cos \varepsilon \cdot \sin \varphi_{PF} + \cos \tau \cdot \cos \varphi_{PF} \\
 m_{23} = -\sin \tau \cdot \frac{\sin 2\varepsilon}{2} \cdot (1 - \cos \varphi_{PF}) + \cos \tau \cdot \sin \varphi_{PF} \cdot \sin \varepsilon \\
 m_{24} = L \cdot (\sin(\varphi_b - \varphi_e) - \sin \varphi_b) \\
 m_{31} = \frac{\sin 2\varepsilon}{2} \cdot (1 - \cos \varphi_{PF}) \\
 m_{32} = -\sin \varepsilon \cdot \sin \varphi_{PF} \\
 m_{33} = (\sin \varepsilon)^2 \cdot \cos \varphi_{PF} + (\cos \varepsilon)^2 \\
 m_{34} = 0 \\
 m_{41} = 0 \\
 m_{42} = 0 \\
 m_{43} = 0 \\
 m_{44} = 1
 \end{cases}$$

- ❖ Durant le processus de taillage, le berceau effectue un mouvement de rotation autour de son axe.

On lie le repère  $R_m(O_m, \vec{X}_m, \vec{Y}_m, \vec{Z}_m)$  au bâti de la machine dont l'axe  $\vec{Z}_m$  est confondu avec l'axe  $\vec{Z}_b$  du berceau, ainsi que les origines  $O_b$  et  $O_m$ .

Le plan formé par les axes  $\vec{X}_b$  et  $\vec{Y}_b$  effectue un mouvement de rotation autour de l'axe  $\vec{Z}_b$  de vitesse angulaire  $\vec{\omega}_b$ .

On définit la rotation relative du repère  $R_b$  par rapport au repère  $R_m$  par l'angle  $\xi_c$  (figure 3.11).

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_b$ , seront exprimées dans le repère  $R_m$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \xi_b & \sin \xi_b & 0 & 0 \\ -\sin \xi_b & \cos \xi_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Donc:

$$\vec{R}_m = [M_{m \cdot b}] \cdot \vec{R}_b$$

Avec:

$$[M_{m \bullet b}] = \begin{bmatrix} \cos \xi_b & \sin \xi_b & 0 & 0 \\ -\sin \xi_b & \cos \xi_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où:

$$\vec{R}_m = [M_{m \bullet b}] \cdot [M_{b \bullet F}] \cdot \vec{R}_F$$

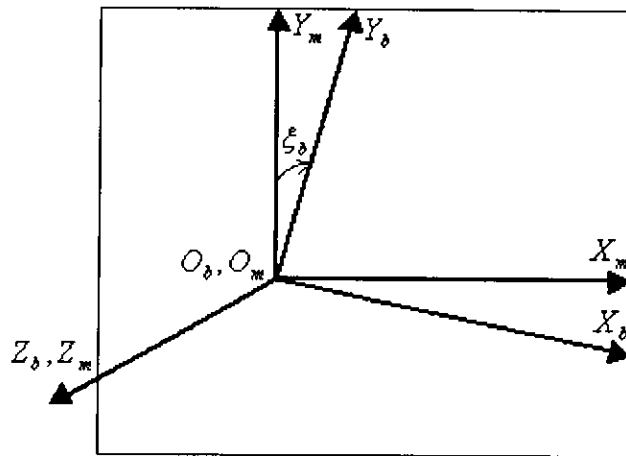


Figure 3.11. Mouvement du berceau autour de son axe

### III.3.3. PASSAGE AU REPERE LIE A LA PIECE À USINER

La position de la pièce est définie par les réglages suivants (figure 3.12):

$E_s$  : Recul de la base coulissante « sliding base » ou c'est la distance de la base coulissante par rapport au plan machine.

$E_v$  : Décalage hypoïde « hypoïd offset », en industrie on appelle « décalage vertical ».

$D$  : Recul de la poupée, en industrie on appelle génératrice.

$\delta$  : angle du pied de la machine (rotation de chariot) en industrie, on l'appelle « évidement ».



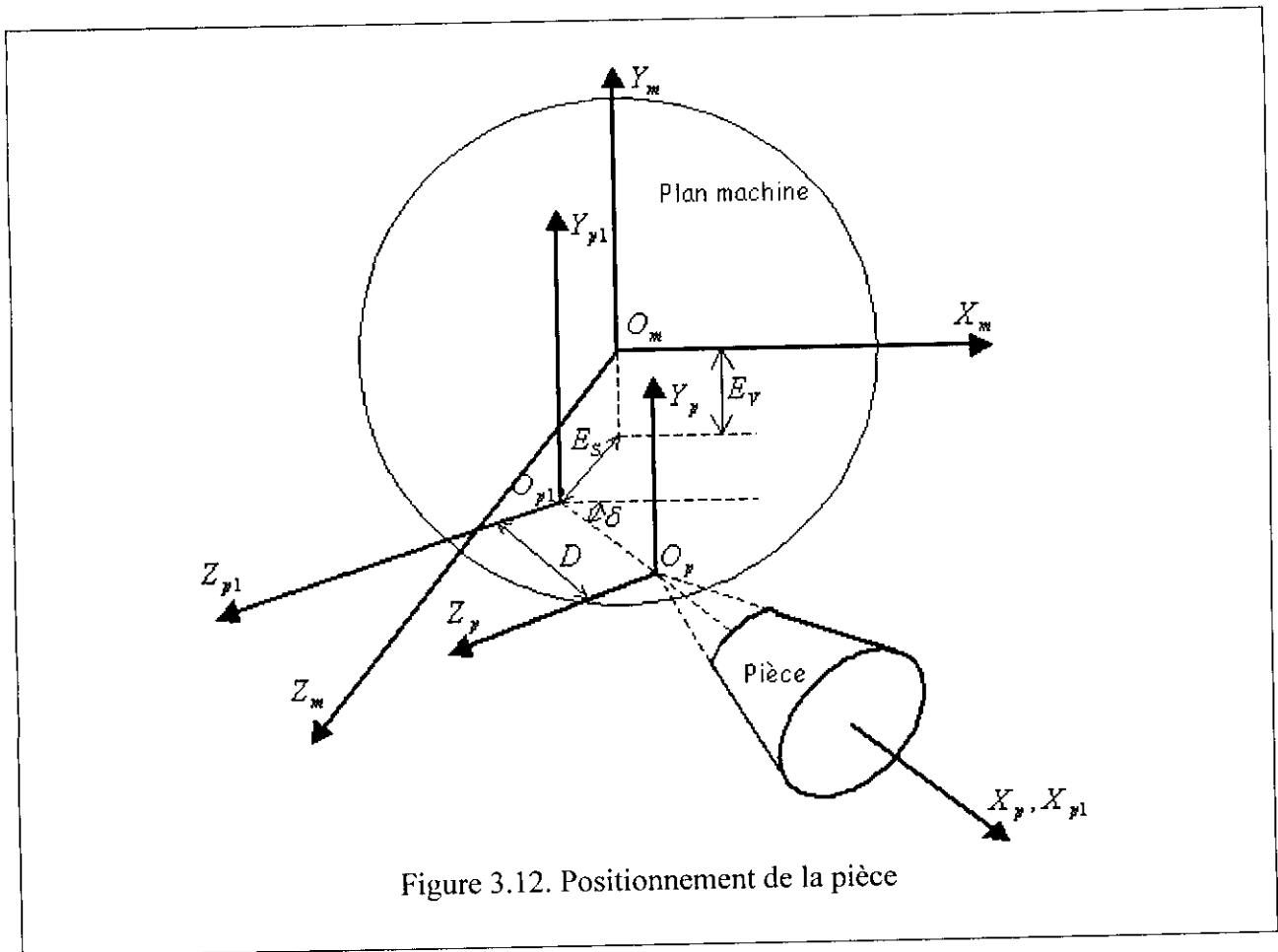


Figure 3.12. Positionnement de la pièce

On a le repère intermédiaire  $R_{p1}(O_{p1}, \vec{X}_{p1}, \vec{Y}_{p1}, \vec{Z}_{p1})$  dont le centre  $O_{p1}$  est l'intersection de l'axe de la pièce et le plan formé par  $(\vec{Y}_m, \vec{Z}_m)$ , et l'axe  $\vec{Y}_{p1}$  est parallèle à l'axe  $\vec{Y}_m$ .

Notant  $(\vec{X}'_m, \vec{Z}'_m)$  le plan formé par la projection des axes  $\vec{X}_m$  et  $\vec{Z}_m$  sur le plan  $(\vec{X}_{p1}, \vec{Z}_{p1})$  dont l'axe  $\vec{X}'_m$  fait un angle  $\delta$  avec l'axe  $\vec{X}'_{p1}$  (figure 3.13).

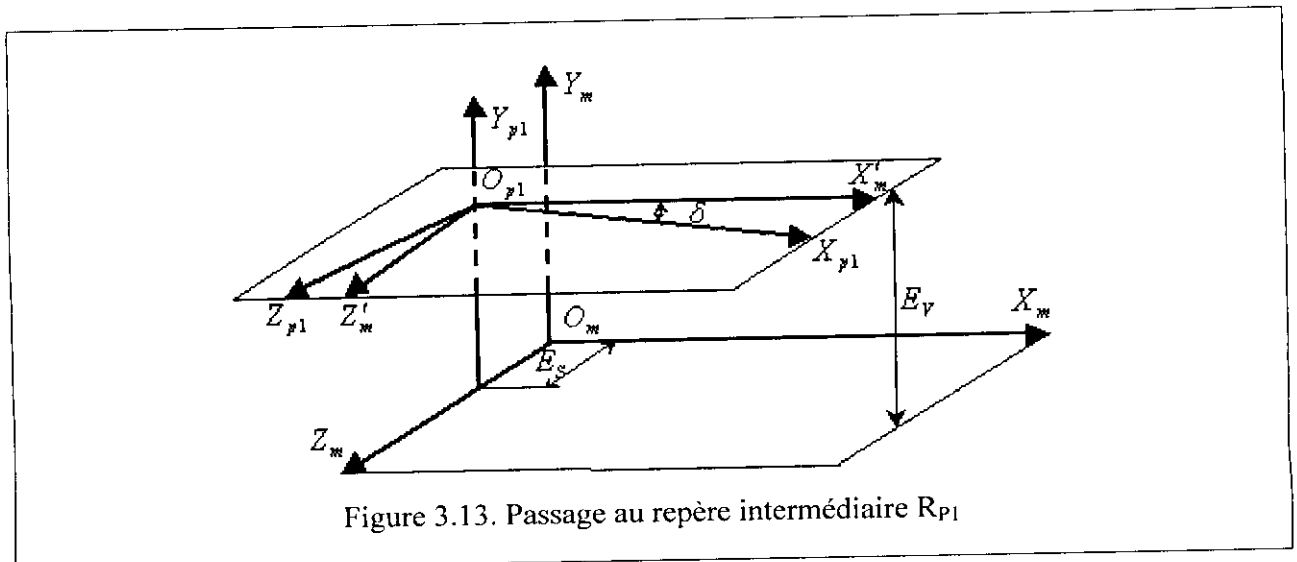


Figure 3.13. Passage au repère intermédiaire  $R_{p1}$

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_m$ , seront exprimées dans le repère  $R_{p1}$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_{p1} \\ Y_{p1} \\ Z_{p1} \\ I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & 0 & \sin \delta & -E_s \sin \delta \\ 0 & 1 & 0 & -E_v \\ -\sin \delta & 0 & \cos \delta & -E_s \cos \delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \\ I \end{Bmatrix}$$

Donc:

$$\vec{R}_{p1} = [M_{p1 \bullet m}] \cdot \vec{R}_m$$

Avec:

$$[M_{p1 \bullet m}] = \begin{bmatrix} \cos \delta & 0 & \sin \delta & -E_s \sin \delta \\ 0 & 1 & 0 & -E_v \\ -\sin \delta & 0 & \cos \delta & -E_s \cos \delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La pièce effectue un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe  $\vec{X}_p$ .

On lie rigidement le repère  $R_p(O_p, \vec{X}_p, \vec{Y}_p, \vec{Z}_p)$  à la pièce du taillage dont l'axe  $\vec{X}_p$  est confondu avec  $\vec{X}_{p1}$  et la distance  $|\overline{O_p O_{p1}}| = D$ .

Le plan formé par les axes  $\vec{Y}_p$  et  $\vec{Z}_p$  effectue un mouvement de rotation autour de l'axe  $\vec{X}_p$  de vitesse angulaire  $\vec{\omega}_p$ .

On définit la rotation relative du repère  $R_p$  par rapport au repère  $R_{p1}$  par l'angle  $\xi_p$  (figure 3.14).

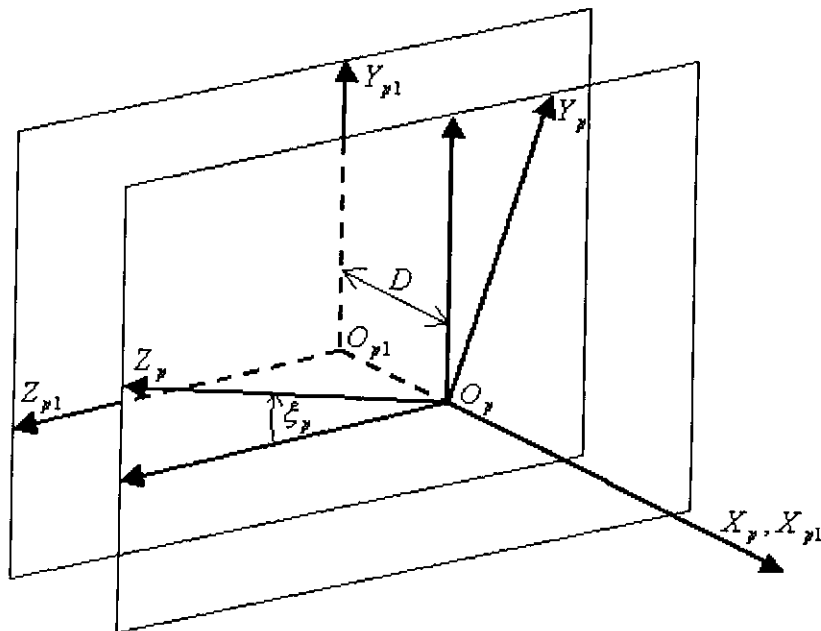


Figure 3.14. Passage au repère lié à la pièce à usiner

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_{p1}$ , seront exprimées dans le repère  $R_p$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \\ I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -D \\ 0 & \cos \xi_p & -\sin \xi_p & 0 \\ 0 & \sin \xi_p & \cos \xi_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_{p1} \\ Y_{p1} \\ Z_{p1} \\ I \end{Bmatrix}$$

Donc: 
$$\vec{R}_p = [M_{p \bullet p1}] \cdot \vec{R}_{p1}$$

Avec: 
$$[M_{p \bullet p1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -D \\ 0 & \cos \xi_p & -\sin \xi_p & 0 \\ 0 & \sin \xi_p & \cos \xi_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors: 
$$\vec{R}_p = [M_{p \bullet p1}] \cdot [M_{p1 \bullet m}] \cdot \vec{R}_m = [M_{p \bullet m}] \cdot \vec{R}_m$$

Avec:

$$[M_{p \bullet m}] = \begin{bmatrix} \cos \delta & 0 & \sin \delta & -E_S \cdot \sin \delta - D \\ \sin \xi_p \cdot \sin \delta & \cos \xi_p & -\sin \xi_p \cdot \sin \delta & -E_V \cdot \cos \xi_p + E_S \cdot \cos \delta \cdot \sin \xi_p \\ -\cos \xi_p \cdot \sin \delta & \sin \xi_p & \cos \xi_p \cdot \cos \delta & -E_V \cdot \sin \xi_p - E_S \cdot \cos \delta \cdot \cos \xi_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### III.3.4. GENERATION DES FLANCS DE DENTURE [8]

Au cours du taillage, la génération de la denture doit vérifier un contact linéaire entre la surface de l'outil et la surface de la pièce à tailler dont la surface génératrice est perpendiculaire au vecteur vitesse relative entre la fraise et la surface de denture de la pièce.

On peut exprimer cette condition par la relation suivante :

$$\vec{V}_r \cdot \vec{n} = 0 \quad (3.2)$$

Où:

$\vec{V}_r$  : La vitesse relative entre la fraise et la pièce au même point considéré.

$\vec{n}$  : Le vecteur normal à la surface génératrice et la surface générée au point de contact.

Cette relation explique que les deux surfaces partagent une normale commune, dont elle assure la tangence des deux surfaces de la fraise et la surface générée durant le processus de taillage, d'où la conséquence que les deux surfaces ne peuvent s'interpénétrer.

#### Remarque:

La génération de la denture dépend de la méthode de taillage adoptée.

### III.3.4.1. VITESSE RELATIVE [10][12][17]

Considérant le cas général et admettant que la génération de la denture est donnée par :

- 1) Une rotation du berceau autour de l'axe  $O_b \vec{Z}_b$  de vitesse angulaire  $\omega_b$ .
- 2) Une rotation de la pièce autour de l'axe  $O_p \vec{X}_p$  de vitesse angulaire  $\omega_p$ .
- 3) Une translation de la pièce le long de l'axe  $O_p \vec{X}_p$  de vitesse  $V_{pZ}$ .

Cette méthode est dite taillage avec génération. Elle est utilisée pour le taillage des pignons.

On exprime la vitesse relative entre un point sur la surface de lame et le même point sur la surface de denture par la relation :

$$\vec{V}_r = \vec{V}_l^{(m)} - \vec{V}_p^{(m)}$$

Où :

$V_l^{(m)}$  : La vitesse absolue d'un point sur la surface de lame exprimée dans le repère lié au bâti de la machine  $R_m(O_m, \vec{X}_m, \vec{Y}_m, \vec{Z}_m)$ .

$V_p^{(m)}$  : La vitesse absolue de même point sur la surface de denture exprimée dans le même repère  $R_m$ .

Alors :

$$\vec{V}_p^{(m)} = \vec{\omega}_p \wedge \left( \vec{R}_m + O_{pp} \vec{O}_m \right) + \vec{V}_{pZ}$$

Et :

$$\vec{V}_l^{(m)} = \vec{\omega}_b \wedge \vec{R}_m$$

Avec :

$$\vec{\omega}_b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_b \end{Bmatrix} ; \quad \vec{\omega}_p = \begin{Bmatrix} -\omega_p \cdot \cos \delta \\ 0 \\ -\omega_p \cdot \sin \delta \end{Bmatrix} ;$$

$$O_{pp} \vec{O}_m = \begin{Bmatrix} 0 \\ -E_V \\ -E_S \end{Bmatrix} \text{ et } \vec{V}_{pZ} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Kh \cdot \omega_b \end{Bmatrix}$$

$$E_S = \chi_b - Kh \cdot \xi_b \quad (\text{Voir équation 2.4 §II.4.2}).$$

$E_S$  : Position de la base coulissante pendant le taillage.

$\chi_b$  : Réglage de la base coulissante.

$\xi_b$  : Angle de rotation du berceau pendant le taillage.

$Kh$  : Paramètre du mouvement hélicoïdal (mm/rad), fonction du nombre de dents des roues de train de rechange et d'une constante machine.

Donc:

$$\vec{V}_L^{(m)} = \begin{Bmatrix} \omega_b \cdot Y_m \\ -\omega_b \cdot X_m \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Et:

$$\vec{V}_L^{(m)} = \begin{Bmatrix} \omega_p \cdot \sin \delta \cdot (Y_m - E_V) \\ \omega_p \cdot \cos \delta \cdot (Z_m - E_S) - \omega_p \cdot \sin \delta \cdot X_m \\ -\omega_p \cdot \cos \delta \cdot (Y_m - E_V) - Kh \cdot \omega_b \end{Bmatrix}.$$

On a:

$$r_{pb} = \frac{\omega_p}{\omega_b} \quad (\text{Voir équation 2.5 §II.4.3}).$$

De même:

$$r_{pb} = \frac{\xi_p}{\xi_b}.$$

D'où:

$$\vec{V}_r = \omega_b \cdot \begin{Bmatrix} Y_m - r_{pb} \cdot \sin \delta \cdot (Y_m - E_V) \\ -X_m - r_{pb} \cdot \cos \delta \cdot (Z_m - E_S) + r_{pb} \cdot \sin \delta \cdot X_m \\ r_{pb} \cdot \cos \delta \cdot (Y_m - E_V) + Kh \end{Bmatrix}.$$

### III.3.4.2. VECTEUR NORMAL

On note  $\vec{n}_m [n_{mx}, n_{my}, n_{mz}]^T$  le vecteur normal exprimé dans le repère  $R_m$ .

On a:

$$\begin{Bmatrix} n_{mx} \\ n_{my} \\ n_{mz} \\ 1 \end{Bmatrix} = [M_{m \bullet b}] \cdot [M_{b \bullet f}] \cdot \vec{n}_f.$$

❖ D'après l'équation (3.1), on obtient l'équation de génération du flan de la denture :

$$\begin{aligned} (Y_m - r_{pb} \cdot \sin \delta \cdot (Y_m - E_V)) \cdot n_{mx} + (-X_m - r_{pb} \cdot \cos \delta \cdot (Z_m - E_S) + r_{pb} \cdot \sin \delta \cdot X_m) \cdot n_{my} \\ + (r_{pb} \cdot \cos \delta \cdot (Y_m - E_V) + Kh) \cdot n_{mz} = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Cette équation est non linéaire de trois inconnues:  $\{(u, v, \xi_b)$  pour la partie générée par la partie rectiligne des lames et  $(u, \gamma, \xi_b)$  pour la partie générée par la partie torique des lames}.

La résolution de cette équation demande deux autres équations en fonction des mêmes variables précédentes.

Pour cette raison, on doit optimiser une méthode de calcul connaissant les dimensions générales de la pièce à usiner.

### III.3.4.3. METHODE DE CALCUL [7]

Cette méthode demande la connaissance des dimensions générales de la pièce à usiner qui sont les suivants (figure 3.15):

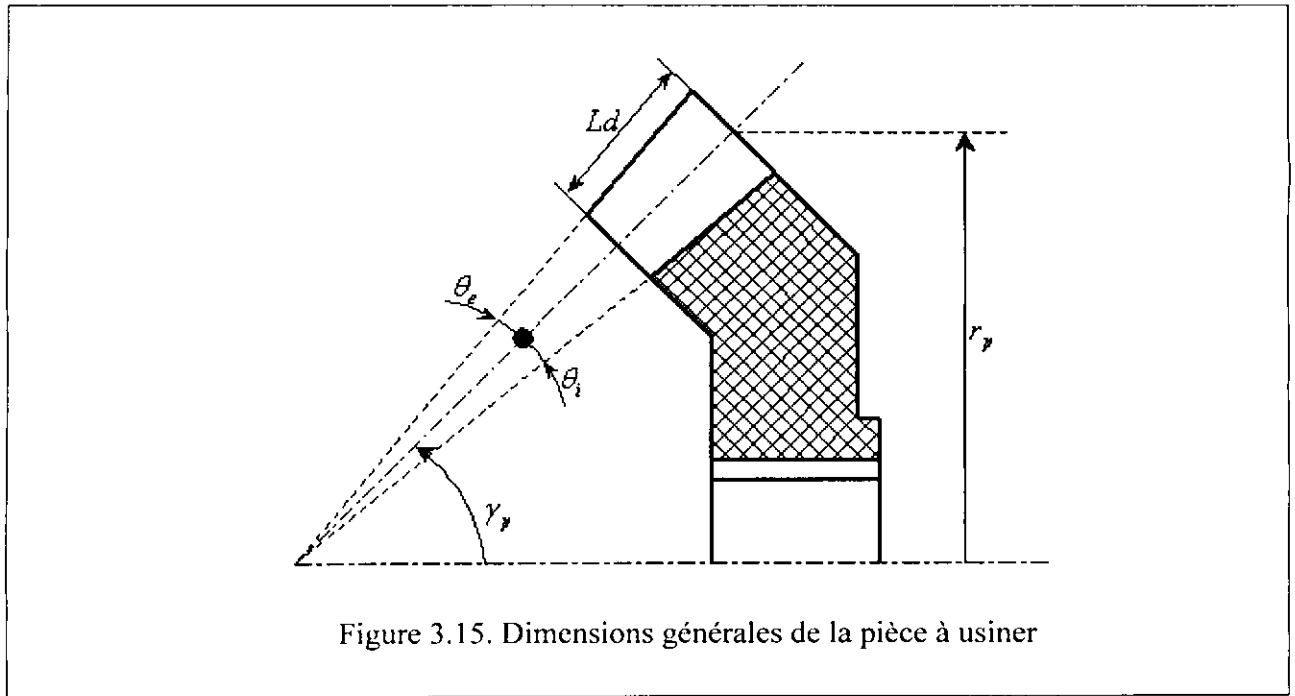


Figure 3.15. Dimensions générales de la pièce à usiner

Avec:

- $r_p$  : Rayon primitif.
- $\gamma_p$  : Angle primitif.
- $\theta_e$  : Angle de saillie.
- $\theta_i$  : Angle du creux.
- $L_d$  : Largeur de la denture.

Cette méthode consiste à résoudre un système de trois équations et trois inconnues donné par les relations suivantes [8]:

$$\begin{cases} \vec{V}_r \cdot \vec{n} = 0 \\ Y_p^2 + Z_p^2 - rr^2 = 0 \\ X_p - xx = 0 \end{cases}$$

Avec:

$\vec{V}_r \cdot \vec{n} = 0$ : C'est l'expression donnée par l'équation (3.3)

$X_p, Y_p, Z_p$ : Sont les coordonnées d'un point qui se situe sur le flan de la denture exprimées dans le repère  $R_p$ .

$xx, rr$ : Sont les composantes du même point exprimées dans le plan formé par  $(\vec{X}_p, \vec{R})$  (figure 1.16).

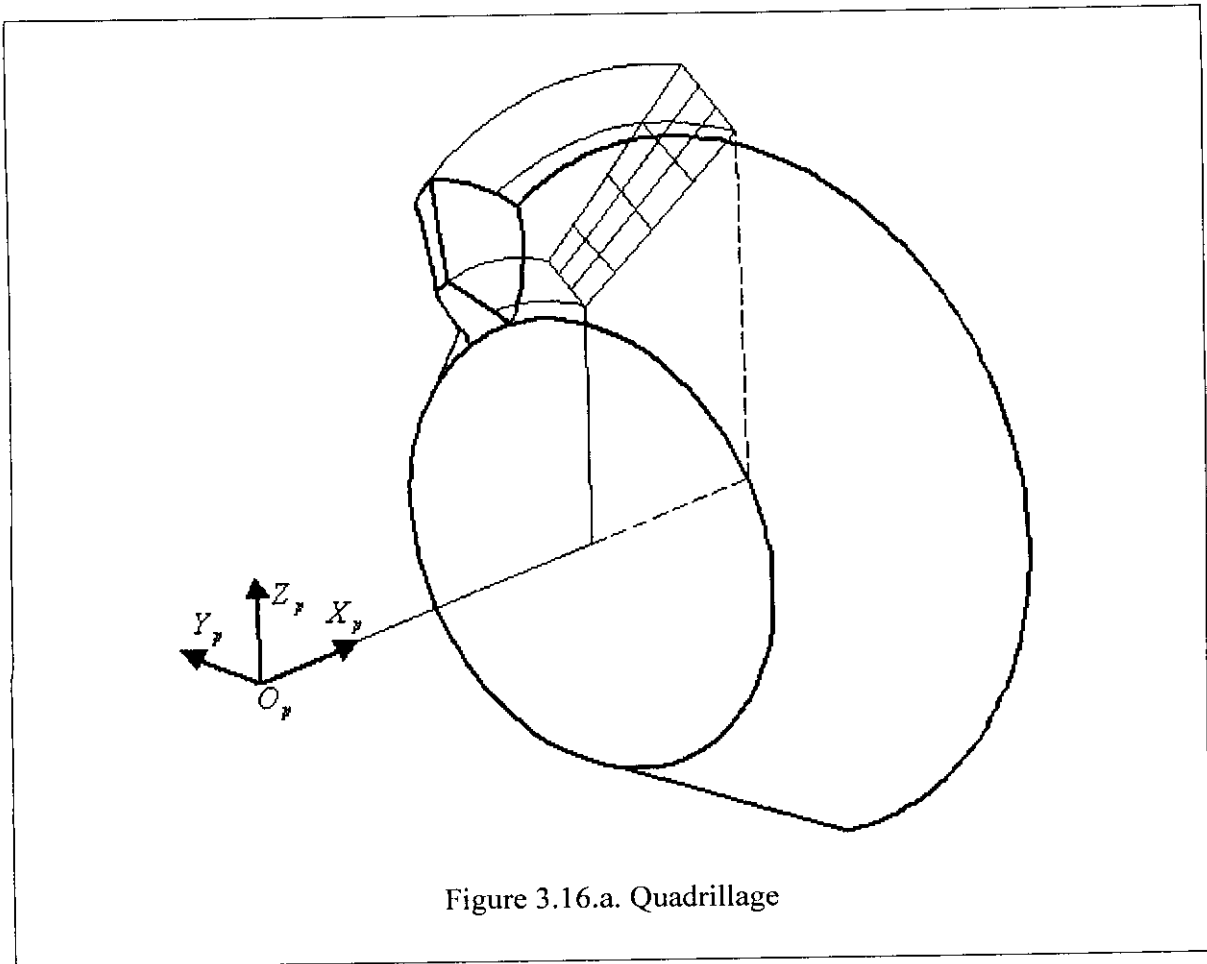


Figure 3.16.a. Quadrillage

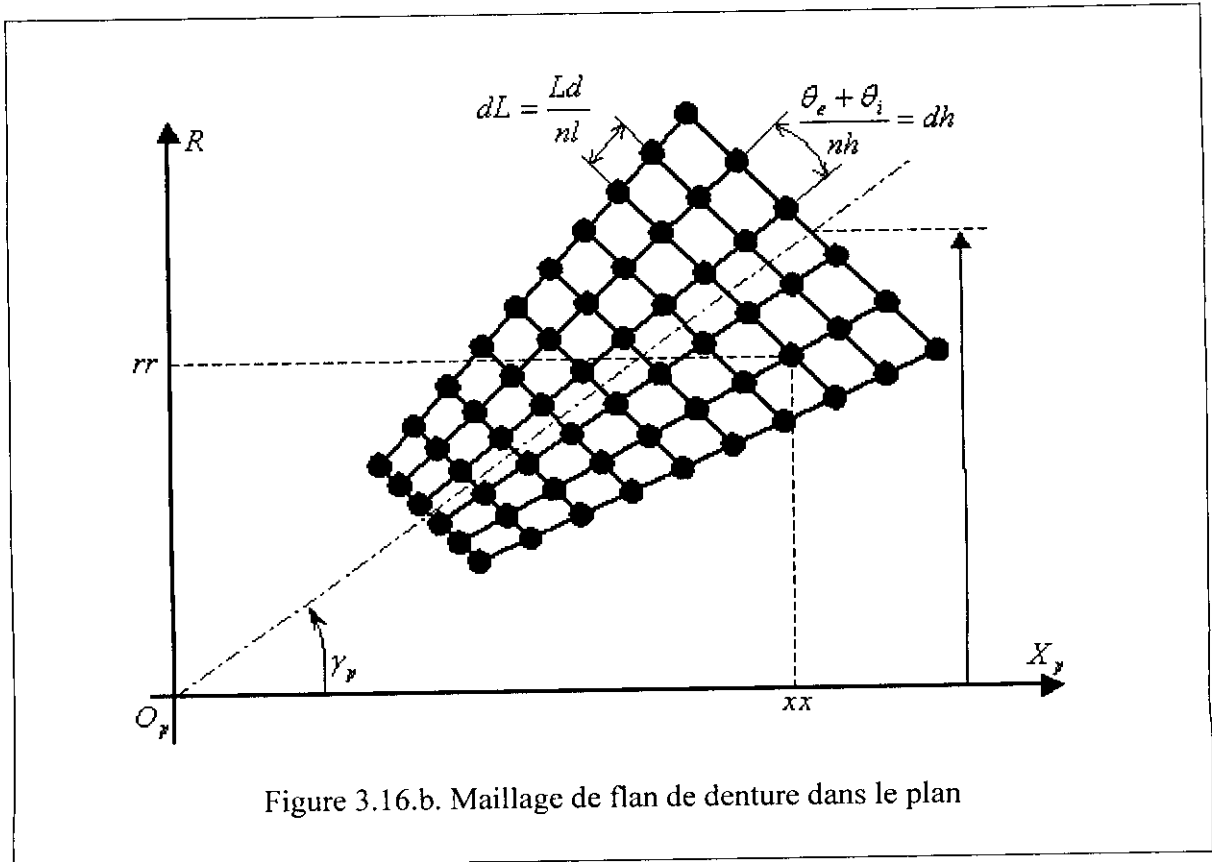


Figure 3.16.b. Maillage de flan de denture dans le plan

Le plan  $(\vec{X}_p, \vec{R})$  est donné par  $R^2 = Y_p^2 + Z_p^2$ .

L'optimisation de la solution avec cette méthode se base sur le principe ou un point situé sur le flanc de la denture exprimé dans le repère  $R_p$  a les mêmes coordonnées exprimées dans le plan  $\vec{X}_p, \vec{R}$  qui sont leur projection sur ce dernier. [3]

On procède de cette manière parce que avec la connaissance des dimensions générales de la pièce à usiner, on peut avoir les valeurs de  $xx$  et  $rr$  par discrétisation de la surface de denture dans le plan.

Pour cette discrétisation on utilise un programme dont l'algorithme est donné dans le paragraphe §III.3.4.4.

### III.3.4.4. ALGORITHME DE MAILLAGE

Les données du programme sont:

$$r_p, \gamma_p, \theta_c, \theta_i, Ld.$$

Les paramètres d'entrée sont:

$nl$  : Nombre de maille suivant la largeur.

$nh$  : Nombre de maille suivant la hauteur.

Avec :

$$dL = \frac{Ld}{nl}$$

$$dh = \frac{\theta_c + \theta_i}{nh}$$

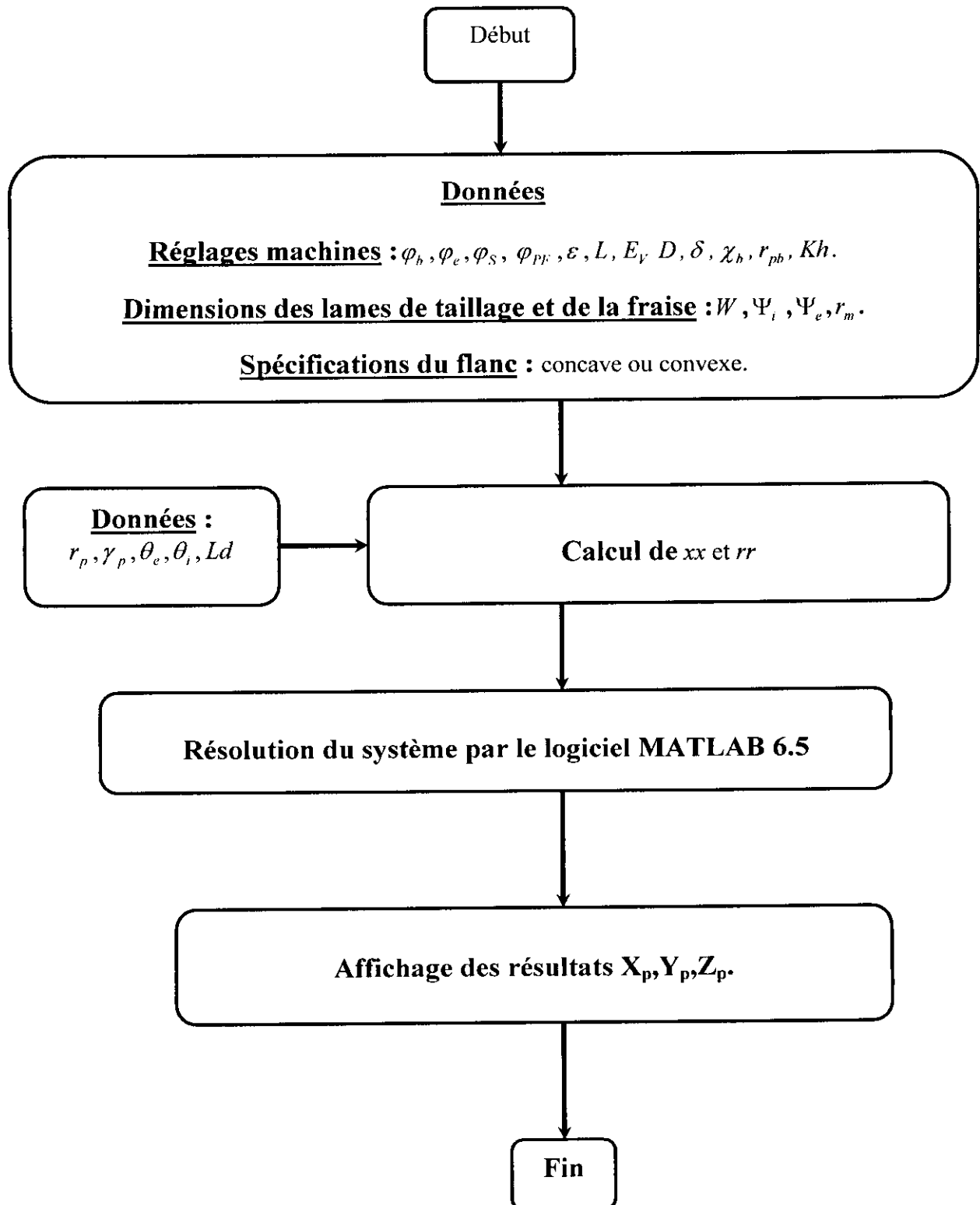
$$k = 0$$

```

pour j de 0 à nl
   $x_1 = \frac{1}{\text{tg}(\gamma_p)} \cdot r_p - (Ld - dL * j) \cdot \cos \gamma_p$ 
  pour i de 0 à nh
     $\theta = \theta_c - dh \cdot i$ 
     $G = \frac{x_1}{\cos \theta \cdot \text{cso} \gamma_p}$ 
     $k = k + 1$ 
     $xx(k) = G \cdot \cos(\gamma_p + \theta)$ 
     $rr(k) = G \cdot \sin(\gamma_p + \theta)$ 
  end
end
    
```



## III.3.4.5. ORGANIGRAMME DE RESOLUTION



### III.4. CONCLUSION

La simulation de taillage est basée sur un modèle mathématique dont la génération de la denture spiro -conique est définie directement à partir des réglages de la machine sur la géométrie du flan de la denture, ainsi nous pouvons calculer les coordonnées des points sur le flanc généré.

Dans le chapitre suivant, nous allons analyser le contact durant l'engrènement du pignon et de la roue, en se basant sur cette modélisation.

# CHAPITRE IV

## L'ANALYSE DE CONTACT

### IV.1. INTRODUCTION

Durant l'engrènement du pignon et de la roue, le contact ponctuel qui se produit entre eux forme une trajectoire qui s'appelle le chemin de contact ou bien la portée, cette dernière est le facteur le plus important du jugement de la fiabilité du fonctionnement des engrenages spiro-coniques.

Pour cette raison, il existe des machines de contrôles spécialisées pour localiser la portée sur le pignon et la roue. Cette machine s'appelle « le tester ».

Dans ce présent chapitre, nous allons simuler le contacte entre le pignon et la roue sur la base de fonctionnement des machines de contrôles.

### IV.2. DESCRIPTION DE LA MACHINE DE CONTROLE [3]

La géométrie complexe des engrenages spiro-coniques demande des machines spécialisées pour leurs contrôles, ces machines font tourner le couple formé par le pignon et la roue dans leurs positions de travail. Avant le montage du couple (pignon -roue), les flancs destinés pour le fonctionnement actif sur le pignon et sur la roue sont enduits par une mince couche de colorant.

Après avoir le couple (pignon -roue) en rotation, la roue est menée par le pignon sur la machine de contrôle. On applique un couple de freinage sur la roue qui cause l'arrêt de rotation de couple (pignon -roue). Cette opération fait chassée le colorant dans la zone de contact.

Le tester est doté de quatre degrés de liberté (figure 4.1):

- a) Déplacement vertical de la roue « E ».
- b) Déplacement axial de la roue « G ».
- c) Déplacement axial du pignon « P ».
- d) Déplacement angulaire du pignon «  $\alpha$  ».

#### Remarques:

Le tester ne fonctionne que pour des faibles charges appliquées sur le couple « pignon - roue ».

Les réglages effectués sur la machine (E, G, P,  $\alpha$ ) simulent les différents défauts d'alignement.

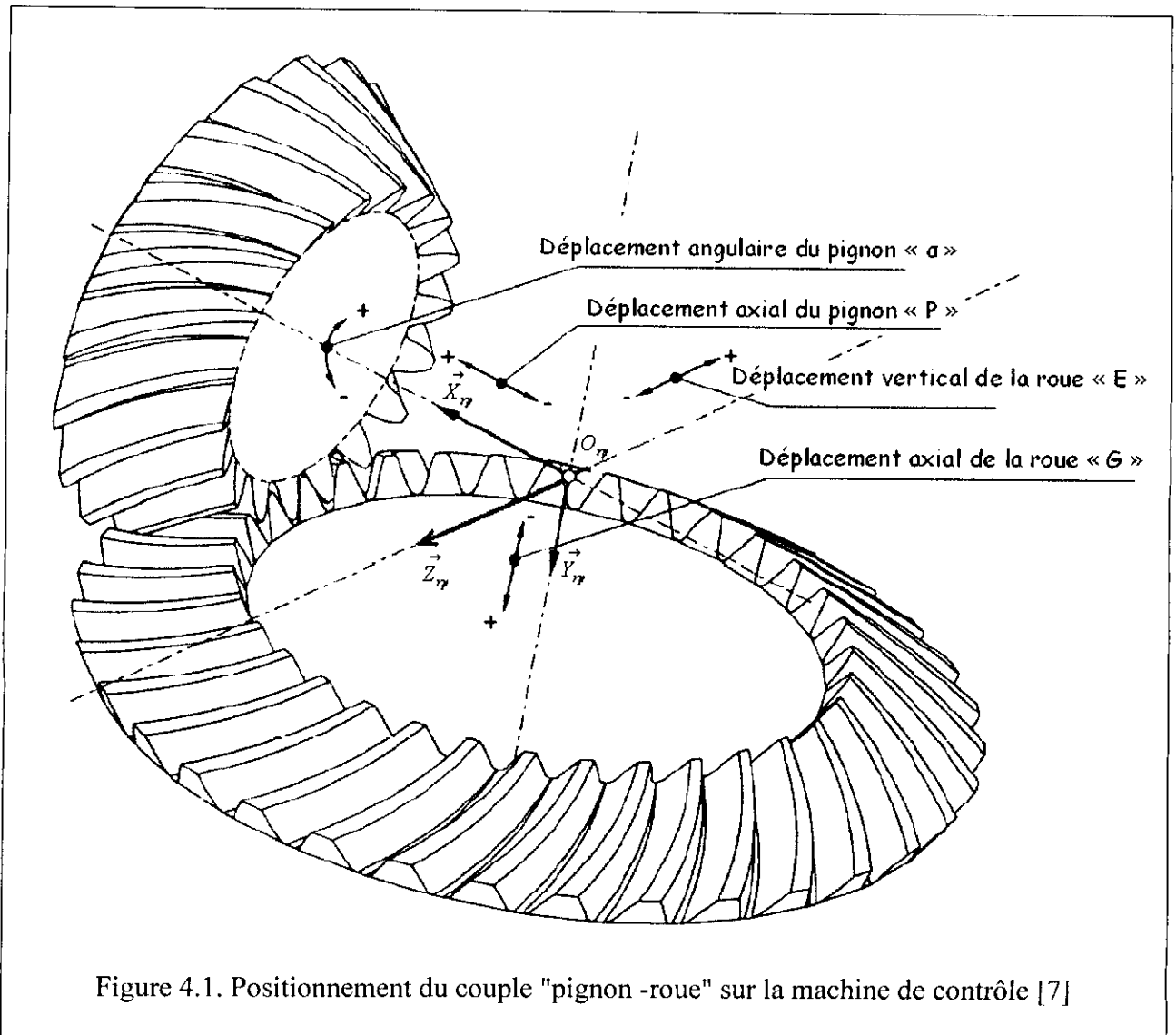


Figure 4.1. Positionnement du couple "pignon -roue" sur la machine de contrôle [7]

### IV.3. SIMULATION DE CONTACT [15][4]

La simulation de contact est basée sur la théorie de la tangence continue des surfaces de denture en contact. Elle est obtenue par une génération simultanée des surfaces principales en contact, comme la surface convexe du pignon et la surface concave de la roue.

Les deux surfaces en contact sont présentées dans le repère  $R_{rp} = (O_{rp}, \vec{X}_{rp}, \vec{Y}_{rp}, \vec{Z}_{rp})$  (figure 4.2). En satisfaisant les équations de générations dont les surfaces idéales ont un point commun dans la position de contact (équation 4.1.a) et les vecteurs unitaires normaux des surfaces sont colinéaires (équation 4.1.b).

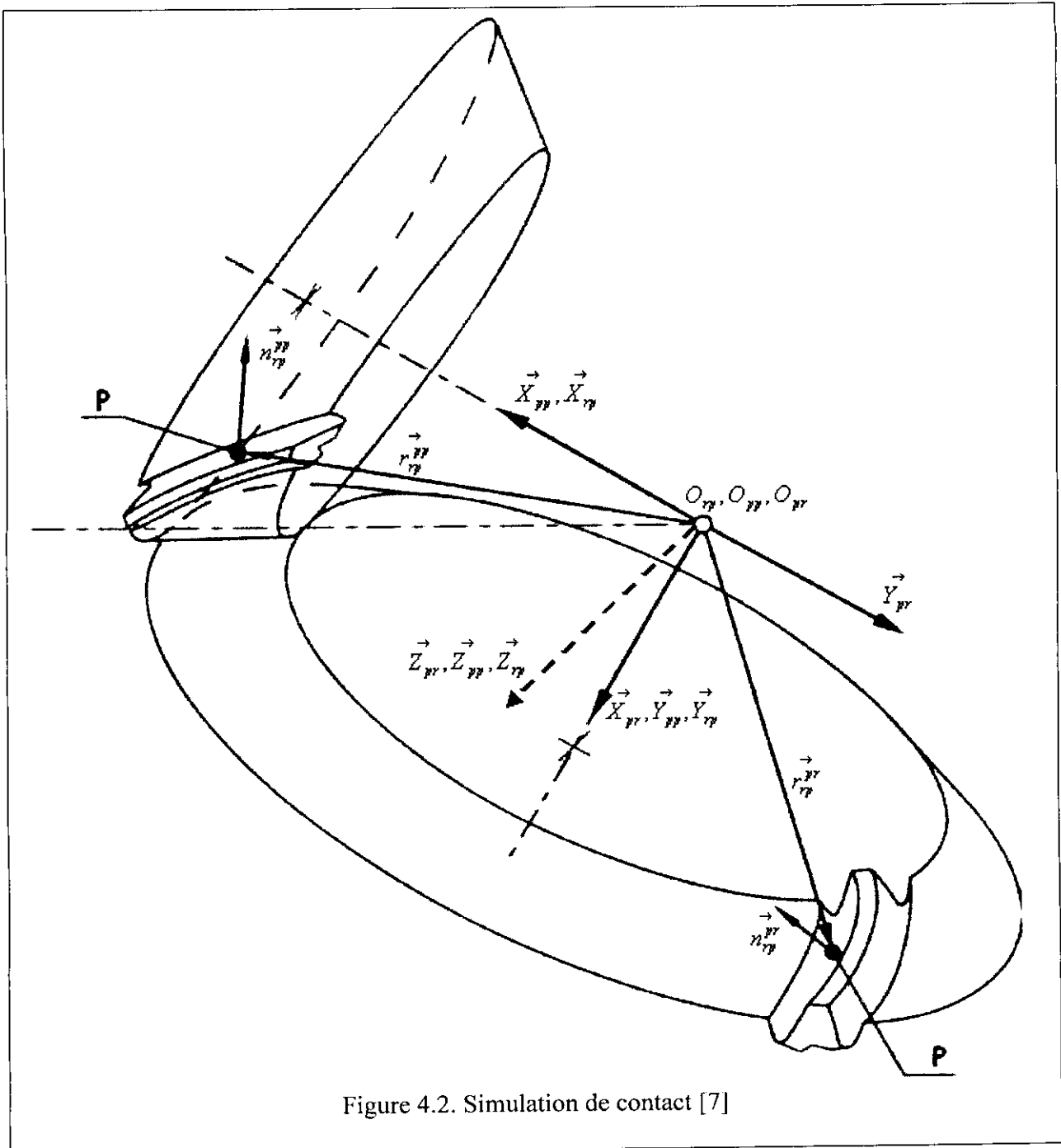


Figure 4.2. Simulation de contact [7]

On a :

- Le repère  $R_{pp} = (O_{pp}, \vec{X}_{pp}, \vec{Y}_{pp}, \vec{Z}_{pp})$  lié rigidement au pignon.
- Le repère  $R_{pr} = (O_{pr}, \vec{X}_{pr}, \vec{Y}_{pr}, \vec{Z}_{pr})$  lié rigidement à la roue.
- Le repère  $R_{rp} = (O_{rp}, \vec{X}_{rp}, \vec{Y}_{rp}, \vec{Z}_{rp})$  lié rigidement au bâti de la machine de contrôle.
- Les centres  $O_{pp}, O_{pr}$  sont respectivement les sommets des cônes de pignon et de la roue.

$$\text{Alors : } \begin{cases} \vec{r}_{rp}^{pp} = \vec{r}_{rp}^{pr} \dots\dots\dots(4.1.a) \\ \vec{n}_{rp}^{pp} = \vec{n}_{rp}^{pr} \dots\dots\dots(4.1.b) \end{cases}$$

Où:  $\vec{r}_{rp}^{pp}, \vec{r}_{rp}^{pr}$  : sont respectivement le vecteur position du pignon et de la roue exprimé dans le repère  $R_{rp}$ .

$\vec{n}_{rp}^{pp}, \vec{n}_{rp}^{pr}$  : sont respectivement le vecteur normal du pignon et de la roue exprimé dans le repère  $R_{rp}$ .

Les équations (4.1.a) et (4.1.b) donnent six équations scalaires non linéaires, les vecteurs unitaires sont utilisés et une équation peut être éliminée. Les équations appliquées dans le système d'équations pour la génération de la surface du pignon et de la roue, permettant de simuler le contact avec la prise en compte de la variation des paramètres de la machine de contrôle.

Pour notre étude, on ne s'intéresse pas aux erreurs de transmissions causées par les défauts d'alignement. Pour cette raison on suppose que les erreurs d'alignement sont nulles ( $E = 0$  ;  $P = 0$  ;  $G = 0$  ;  $\alpha = 0$ ). Dans cette étude on s'intéresse seulement aux erreurs de transmissions causées par des défauts de produit lors de sa fabrication, ce que implique, les erreurs faites sur les réglages machine.

Cette simulation peut être définie par les mouvements relatifs du couple « pignon -roue ».

### IV.3.1. ROTATION DU PIGNON

Pendant l'engrènement, le pignon effectue un mouvement de rotation autour de l'axe  $\vec{X}_{pp}$ .

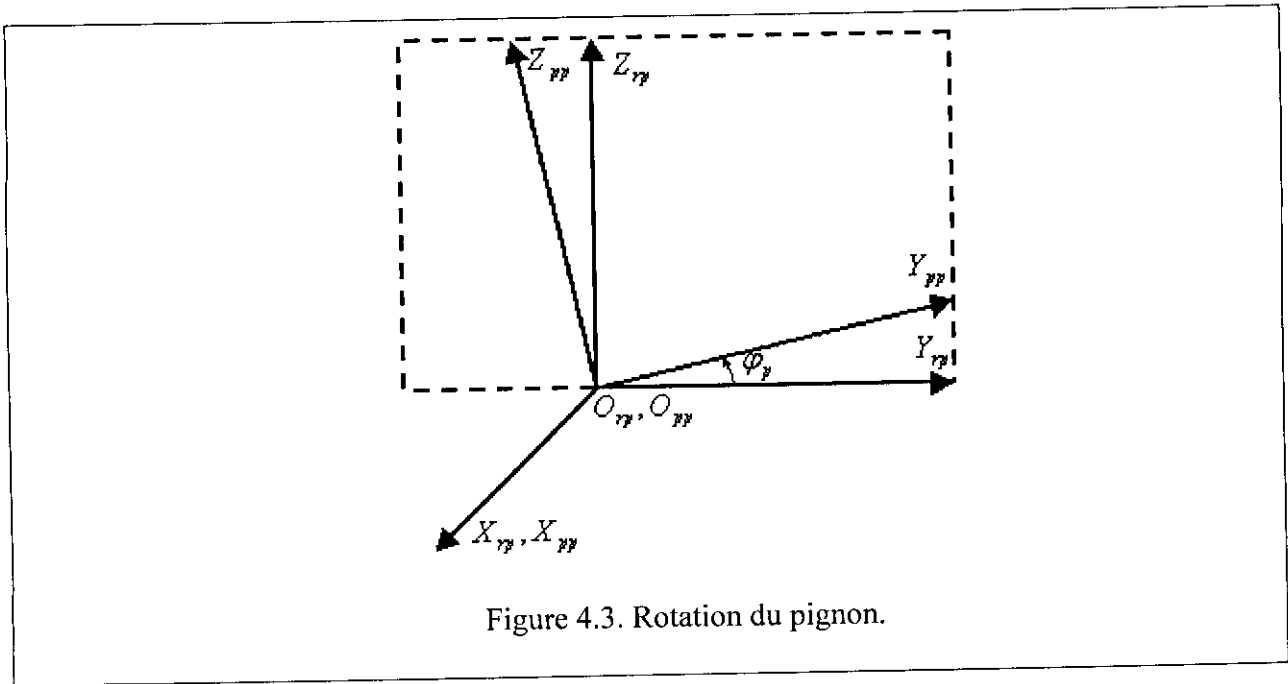
L'axe  $\vec{X}_{pp}$  et le centre  $O_{pp}$  sont confondus respectivement avec  $\vec{X}_{rp}$  et  $O_{rp}$ .

La rotation du pignon est définie par l'angle  $\varphi_p$  (figure 4.3).

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_{pp}$ , peuvent être exprimées dans le repère  $R_{rp}$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_{rp}^{pp} \\ Y_{rp}^{pp} \\ Z_{rp}^{pp} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_p & -\sin \varphi_p & 0 \\ 0 & \sin \varphi_p & \cos \varphi_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_{rp} \\ Y_{rp} \\ Z_{rp} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_{rp}^{pp} = [m_{rp \cdot pp}] \cdot \vec{R}_{pp} \\ \vec{n}_{rp}^{pp} = [m_{rp \cdot pp}] \cdot \vec{n}_{pp} \end{cases} \quad \text{Avec } [m_{rp \cdot pp}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_p & -\sin \varphi_p & 0 \\ 0 & \sin \varphi_p & \cos \varphi_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



### IV.3.2. ROTATION DE LA ROUE

Pendant l'engrènement, la roue effectue un mouvement de rotation autour de l'axe  $\vec{X}_{pr}$ . On a l'axe  $\vec{X}_{pr}$  et le centre  $O_{pr}$  qui sont confondus respectivement avec  $\vec{X}_{rp}$  et  $O_{rp}$ .

La rotation de la roue est définie par l'angle  $\varphi_R$ . (figure 4.4)

D'après la figure 4.4, on aura:

$$\begin{cases} X_{rp} = -\cos \varphi_R \cdot Y_{pr} + \sin \varphi_R \cdot Z_{pr} \\ Y_{rp} = X_{pr} \\ Z_{rp} = \sin \varphi_R \cdot Y_{pr} + \cos \varphi_R \cdot Z_{pr} \end{cases}$$

D'où les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_{pr}$ , peuvent être exprimées dans le repère  $R_{rp}$  par :

$$\begin{cases} X_{rp}^{pr} \\ Y_{rp}^{pr} \\ Z_{rp}^{pr} \\ 1 \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos \varphi_R & \sin \varphi_R & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi_R & \cos \varphi_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} X_{pr} \\ Y_{pr} \\ Z_{pr} \\ 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_{rp}^{pr} = [m_{rp \bullet pr}] \cdot \vec{R}_{pr} \\ \vec{n}_{rp}^{pr} = [m_{rp \bullet pr}] \cdot \vec{n}_{pr} \end{cases} \quad \text{Avec } [m_{rp \bullet pr}] = \begin{bmatrix} 0 & -\cos \varphi_R & \sin \varphi_R & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi_R & \cos \varphi_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

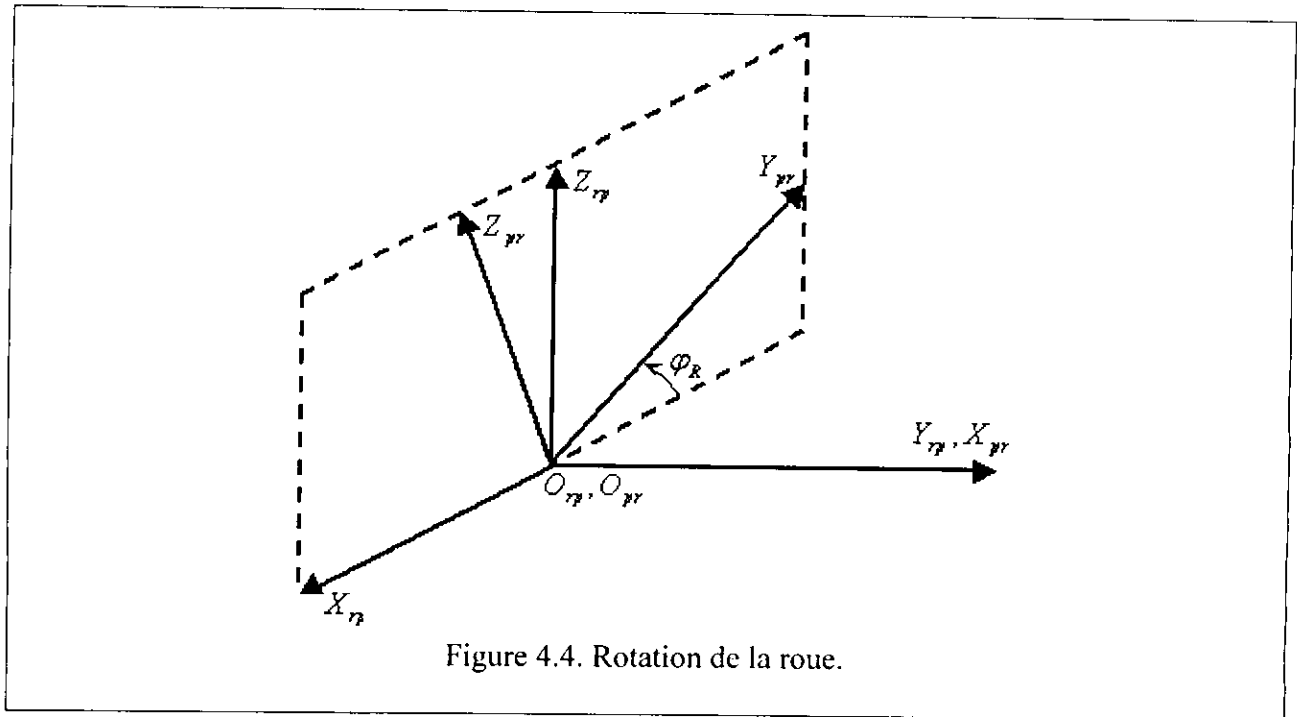


Figure 4.4. Rotation de la roue.

❖ On a:

$$\begin{cases} r_{rp} = r_{rp}(u_p, v_p, \xi_{rp}, \varphi_p) \\ r_{pr} = r_{pr}(u_r, v_r, \xi_{pr}, \varphi_R) \end{cases}$$

Alors on remarque, qu'on a à faire à déterminer huit inconnues  $(u_p, v_p, \xi_{rp}, \varphi_p, u_r, v_r, \xi_{pr}, \varphi_R)$ .

Le système (4.1) forme cinq équations non linéaires qui sont les suivantes:



$$\begin{cases} X_{rp}^{pp} = X_{rp}^{pr} \dots\dots\dots(4.2.a) \\ Y_{rp}^{pp} = Y_{rp}^{pr} \dots\dots\dots(4.2.b) \\ Z_{rp}^{pp} = Z_{rp}^{pr} \dots\dots\dots(4.2.c) \\ nx_{rp}^{pp} = nx_{rp}^{pr} \dots\dots\dots(4.2.d) \\ ny_{rp}^{pp} = ny_{rp}^{pr} \dots\dots\dots(4.2.e) \end{cases}$$

On obtient deux autres équations à partir de l'équation (3.3) :

$$\begin{cases} \vec{V}_{rp} \cdot \vec{n}_p = 0 \dots\dots\dots(4.2.f) \\ \vec{V}_{rr} \cdot \vec{n}_r = 0 \dots\dots\dots(4.2.g) \end{cases}$$

(4.2.e): C'est l'équation donnée par (3.3) pour le pignon.

(4.2.g): C'est l'équation donnée par (3.3) pour la roue.

Donc le système 4.2 est formé de sept équations algébriques non linéaires à huit inconnues.

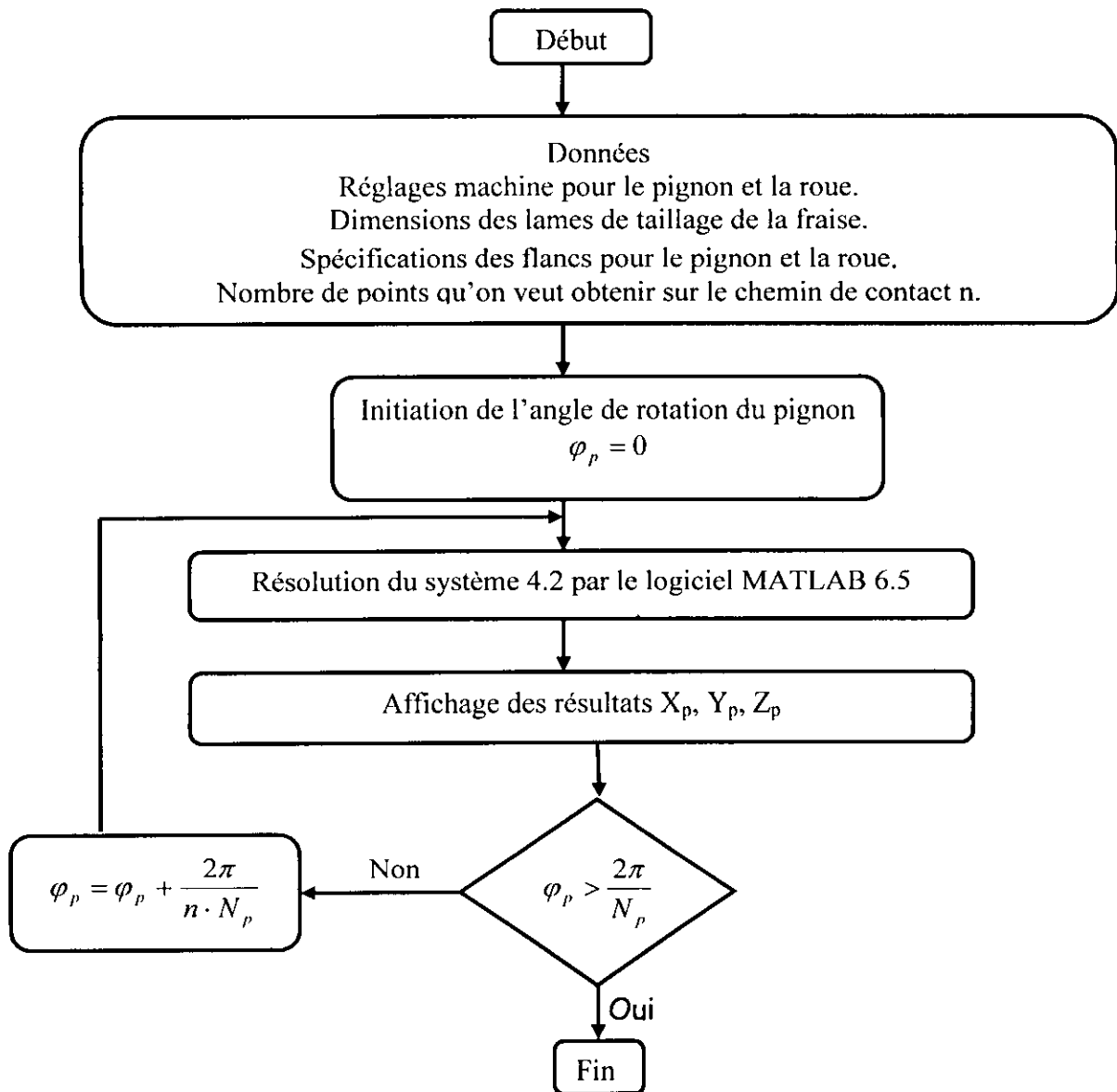
Pour la résolution de ce système, on se fixe l'une des variables afin d'avoir un système de sept équations à sept inconnues.

Pour cela on va fixer l'angle de rotation du pignon dont sa valeur est limitée dans l'intervalle  $\varphi_p \in [0, 2\pi / N_p]$ , ou  $N_p$  est le nombre de dents du pignon.

Alors pour chaque valeur de  $\varphi_p$  située dans l'intervalle  $[0, 2\pi / N_p]$  on obtient un point de contact sur le flanc du pignon et de la roue par :

$$\begin{cases} \vec{r}_{pp} = \vec{r}_{pp}(u_p, v_p, \xi_{pp}) \\ \vec{r}_{pr} = \vec{r}_{pr}(u_r, v_r, \xi_{pr}) \end{cases}$$

### IV.3.3. L'ORGANIGRAMME DE RESOLUTION



### IV.4. CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons simulé le contact entre le pignon et la roue pendant l'engrènement sur la base du modèle mathématique décrit précédemment.

Comme notre étude cherche l'influence de défauts géométriques sur le chemin de contact, c'est-à-dire, les erreurs sur les réglages effectués sur la machine de taillage. Nous n'avons pas pris en compte l'influence des défauts d'alignements ou on les a considérés nuls.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter les résultats de cette étude.

# CHAPITRE V

## RESULTATS ET INTERPRETATIONS

### V.1. INTRODUCTION

Dans ce dernier chapitre, nous allons présenter les résultats de notre étude en se basant sur un couple d'engrenage spiro -conique existant.

Nous allons d'abord présenter les flancs de denture du pignon et de la roue obtenus à partir des réglages machine donnés par le constructeur, puis le contact entre eux. Après on modifie l'un des paramètres de réglage et on analyse les changements sur le chemin de contact par rapport aux paramètres de réglages initiaux.

### V.2. REGLAGES MACHINE ET DIMENSIONS DU COUPLE D'ENGRENAGE SPIRO-CONIQUE

Dans cette étude, nous allons considéré le couple étudié par Fong et Tsay [9], dont l'usage est fait dans la machine Gleason 122.

Toutes les données et les spécifications sont présentées dans les tableaux suivants :

Dimensions générales de la pièce		
	pignon	roue
Nombre de dents	16	28
Module (mm)	6.8	6.8
Rayon primitif (mm)	54	95.2
Angle primitif (rad)	0.519235	1.051561
Largeur de dents (mm)	30	30
Angle de saillie (rad)	0.070822	0.037200
Angle du creux (rad)	0.049132	0.081803

Dimensions des lames de taillage (pignon et roue)	
Rayon de la fraise (mm)	100
Angle extérieur (rad)	0.213803
Angle intérieur (rad)	0.484329
Largeur entre pointe (mm)	3.4

Réglages machine		
	Pignon	Roue
Angle du berceau (rad)	6.260496	2.28435
Angle de l'excentrique (rad)	0.832522	0.83601
Angle du socle (rad)	3.231186	0.48084
Angle de la tête porte fraise (rad)	0.154462	0.31300
Angle du pied de la machine (rad)	0.439241	0.95440
Décalage vertical (mm)	-0.96	0
Reculé de la poupée (mm)	-0.68	0
Réglage de la base coulissante (mm)	2.65	14
Paramètre de mouvement hélicoïdal (rad/mm)	-10.179	0
Rapport de roulement (mm)	2.0059	1.460
Rayon de l'excentrique (mm)	111.125	111.125
Angle d'inclinaison (rad)	0.261799	0.261799

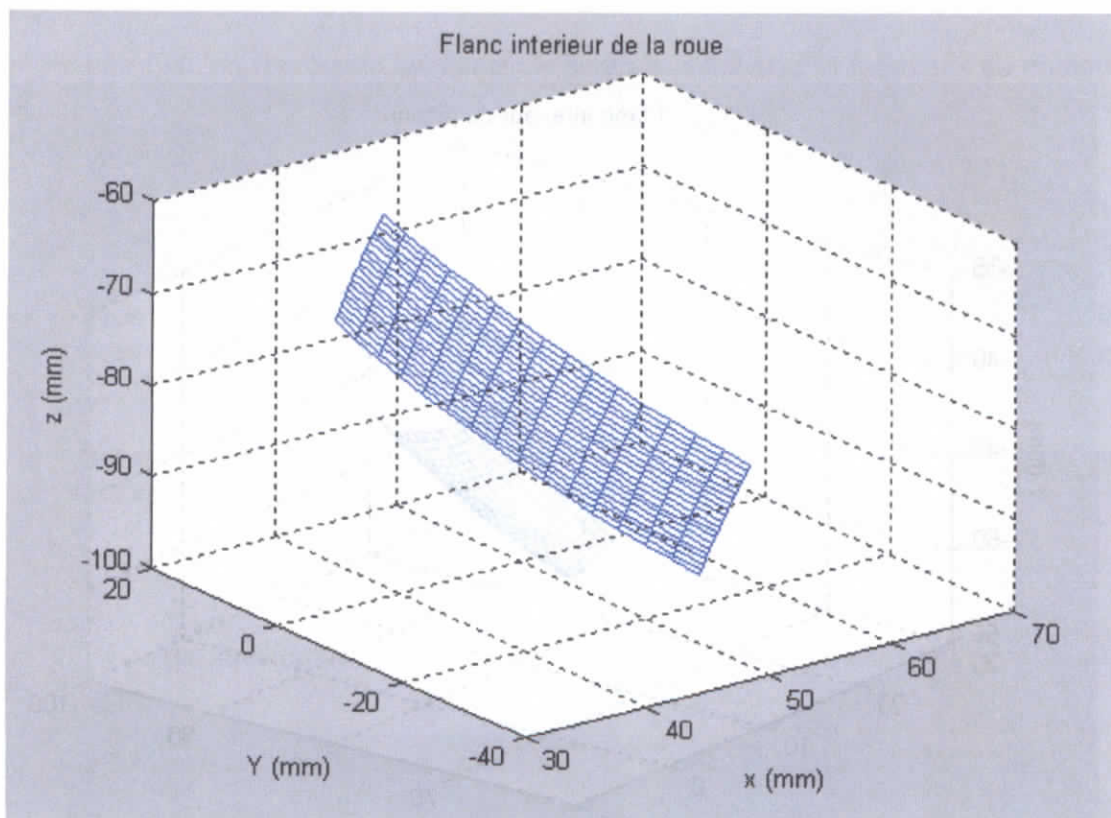
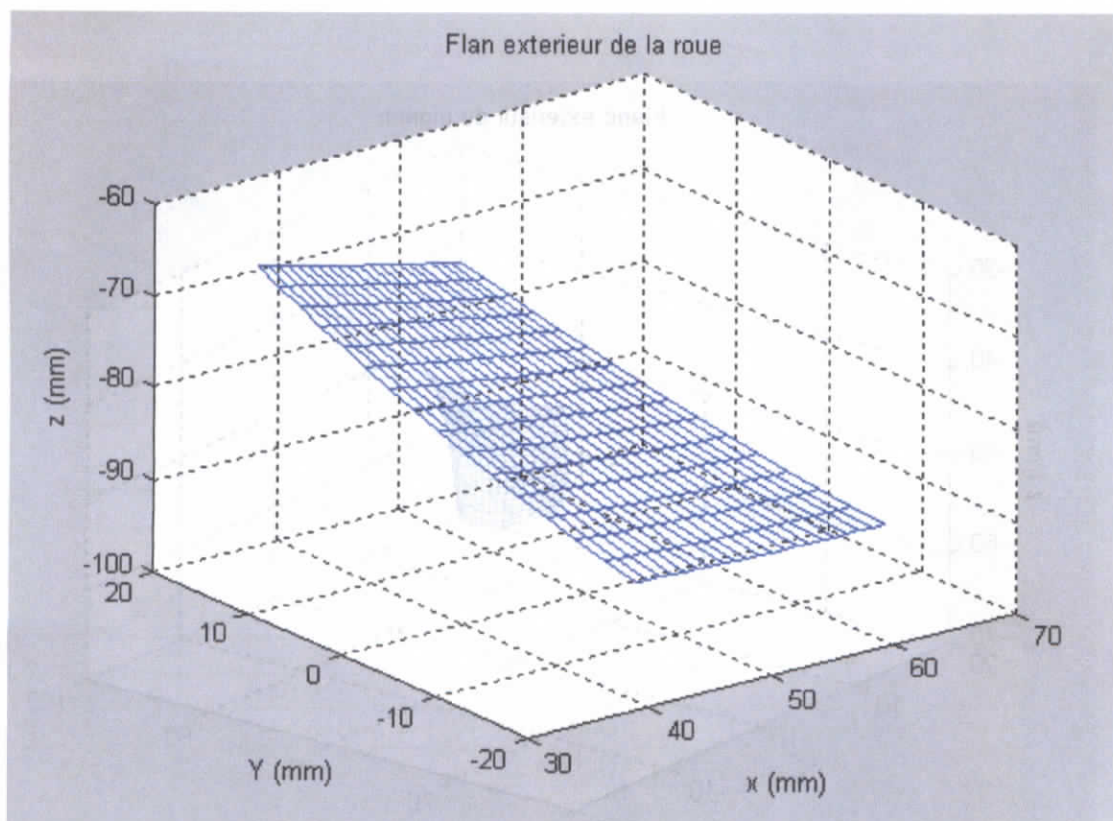
### V.3. VALIDATION DU PROGRAMME

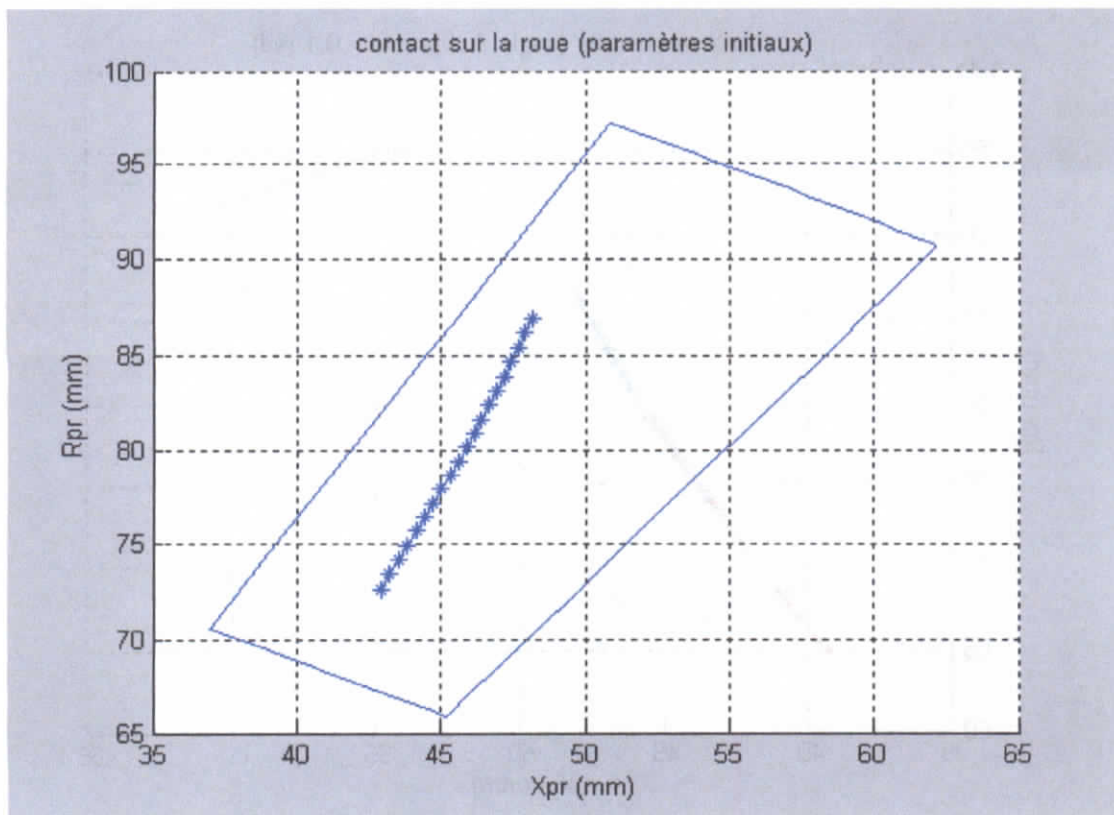
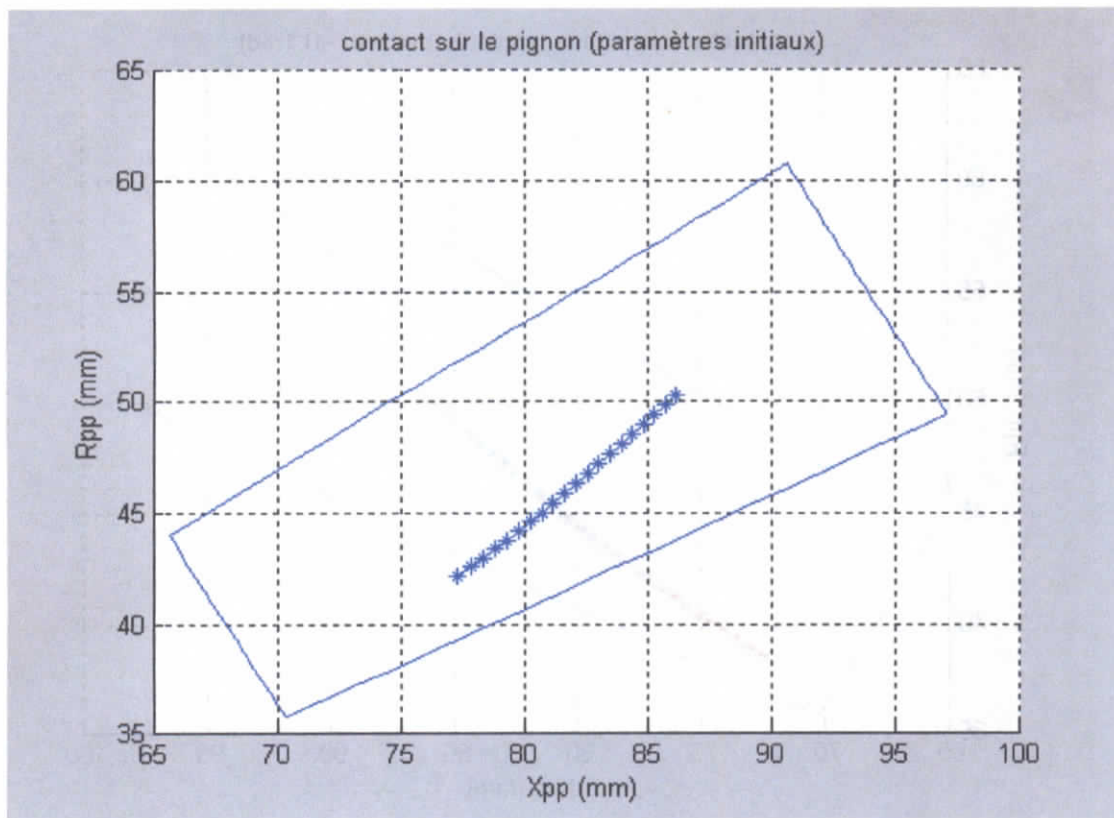
La validation du programme se fait par la comparaison entre les résultats calculés par notre programme et les valeurs mesurées par Fong et Tsay [9], données par le même document où sont indiquées les valeurs de réglages (§V.2).

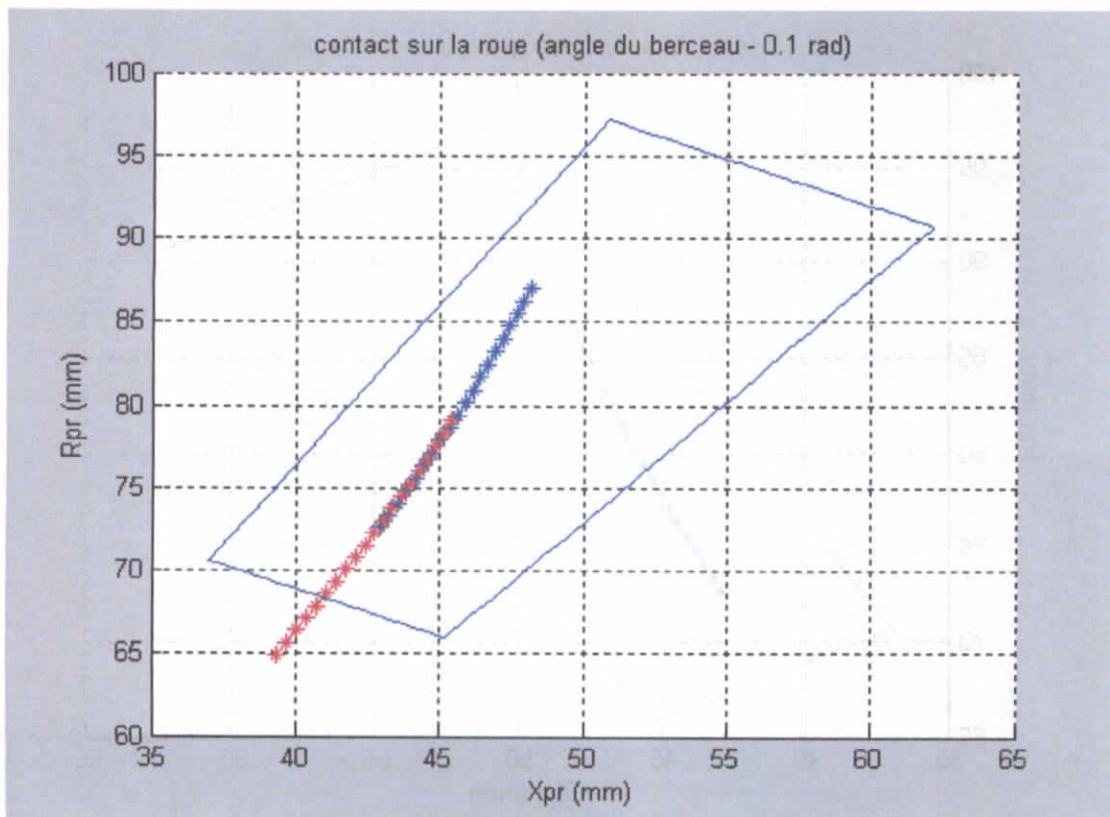
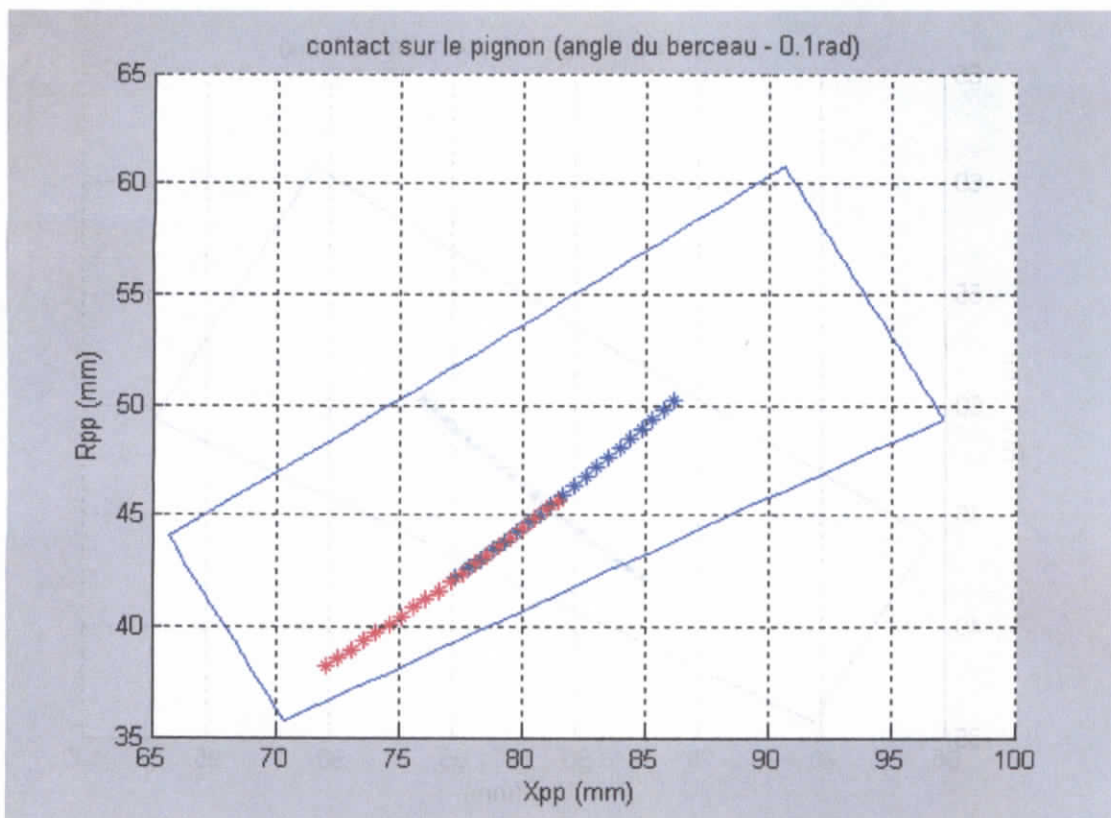
La comparaison des valeurs est illustrée dans les tableaux suivants :

X = 88 mm (flanc convexe « intérieur » du pignon)				
Valeurs mesurées			Valeurs calculées	
Y	Z	R	Y	Z
21.403	-52.639	56.82387	21.44660	-52.62122
19.746	-51.885	55.51538	19.78525	-51.87017
16.408	-50.061	52.68136	16.43626	-50.05177
13.358	-47.979	49.80382	13.41354	-47.96349
10.436	-45.337	46.52261	10.48050	-49.32673

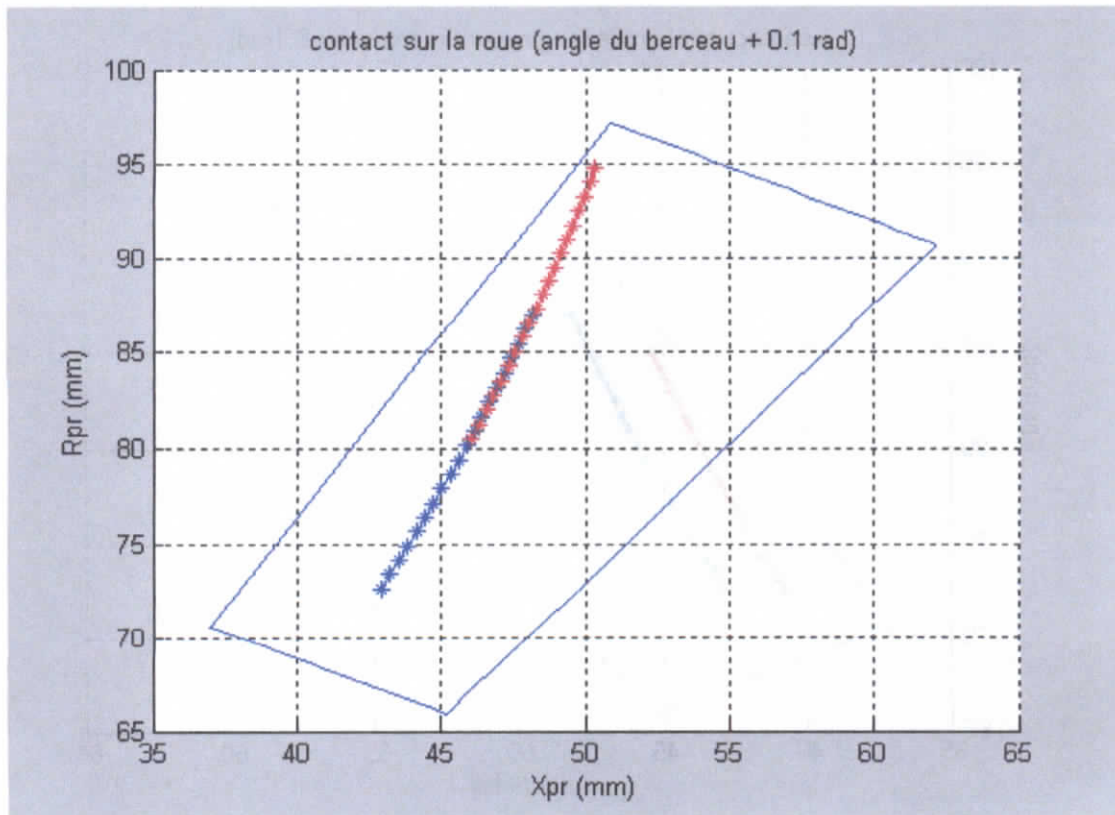
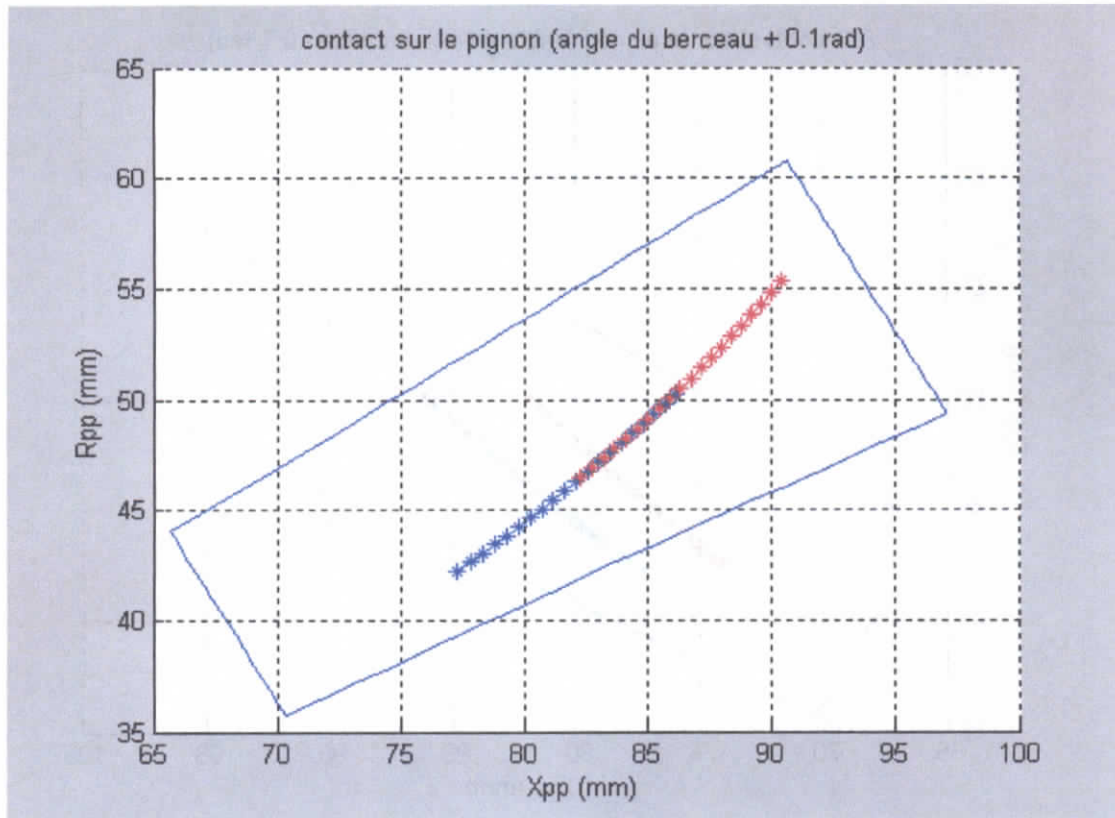
X = 83 mm (flanc convexe « intérieur » du pignon)				
Valeurs mesurées			Valeurs calculées	
Y	Z	R	Y	Z
13.973	-50.200	52.10839	14.05797	-50.17627
11.804	-48.696	50.10624	11.87323	-48.67929
10.428	-47.625	48.75330	10.50852	-47.60730
8.619	-46.004	46.80444	8.71073	-45.98672
7.319	-44.623	45.21924	7.403028	-44.60913



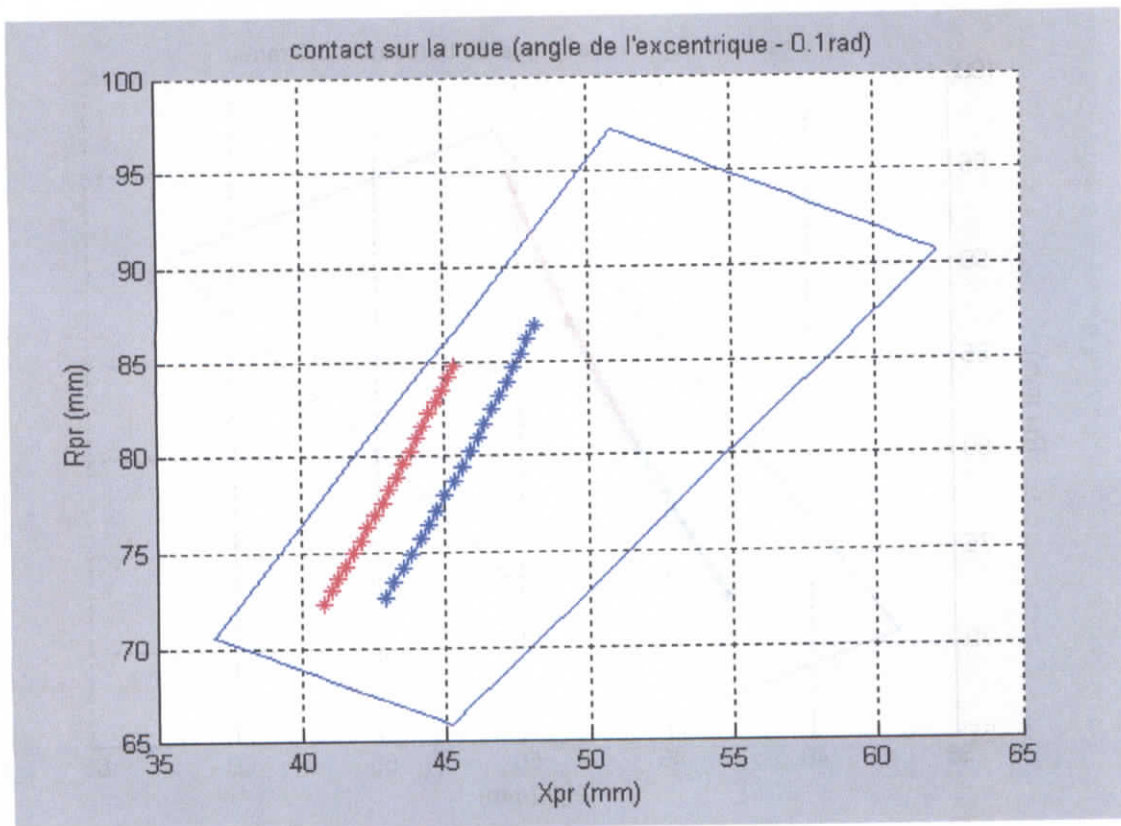
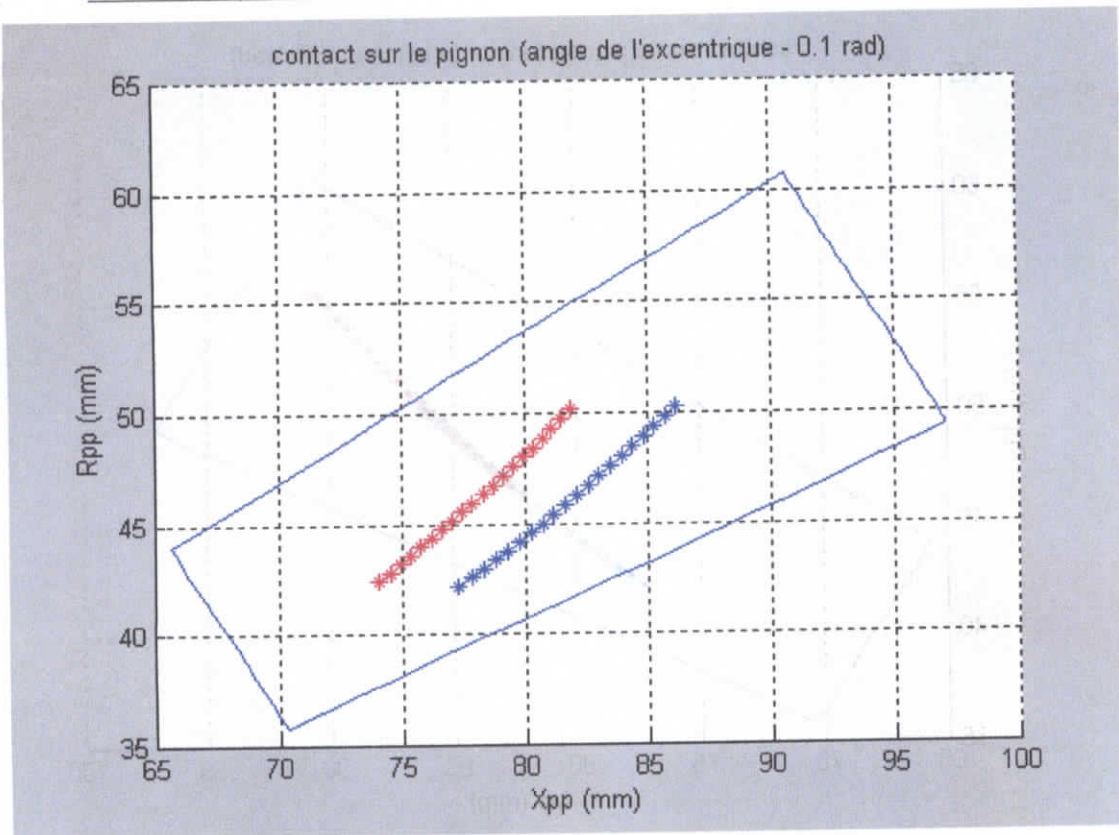


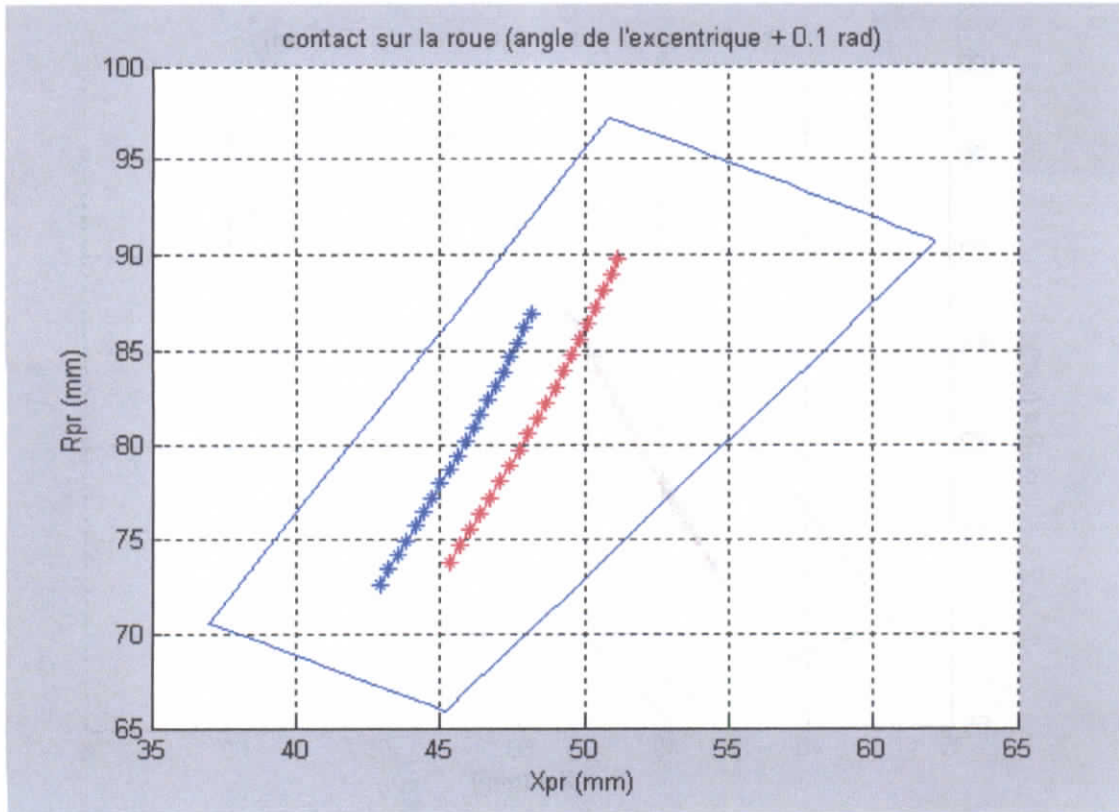
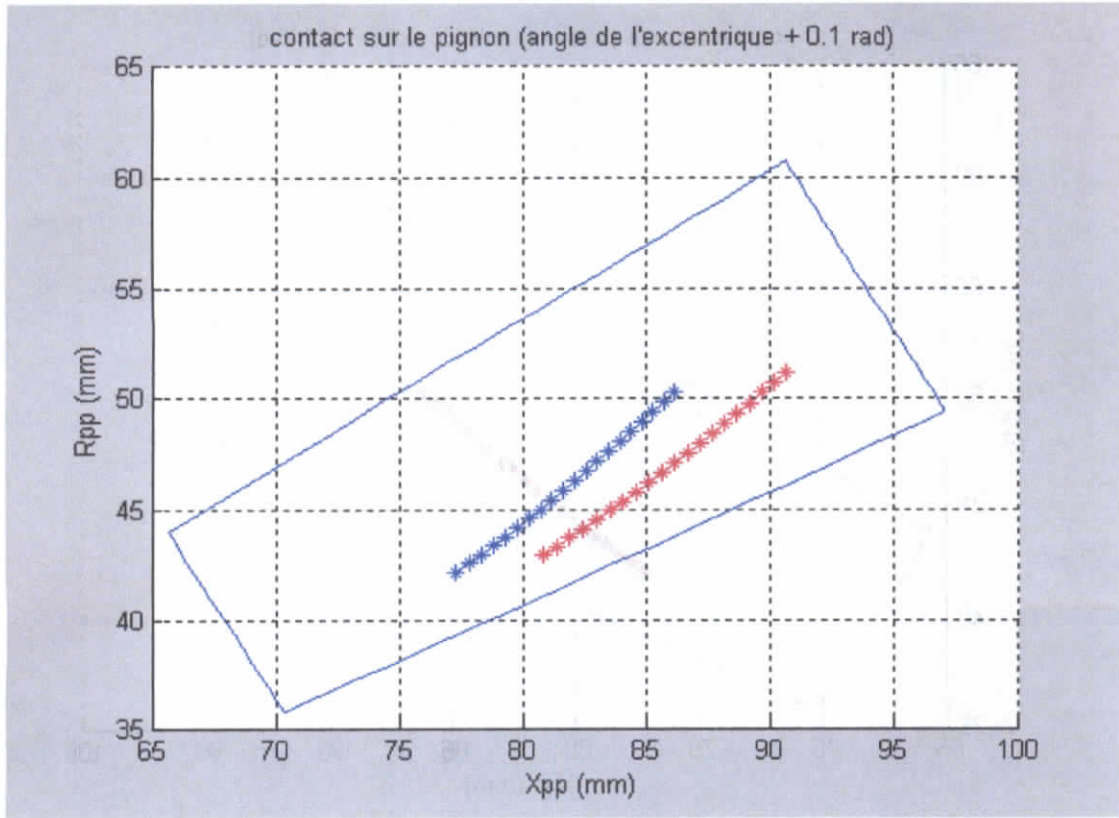


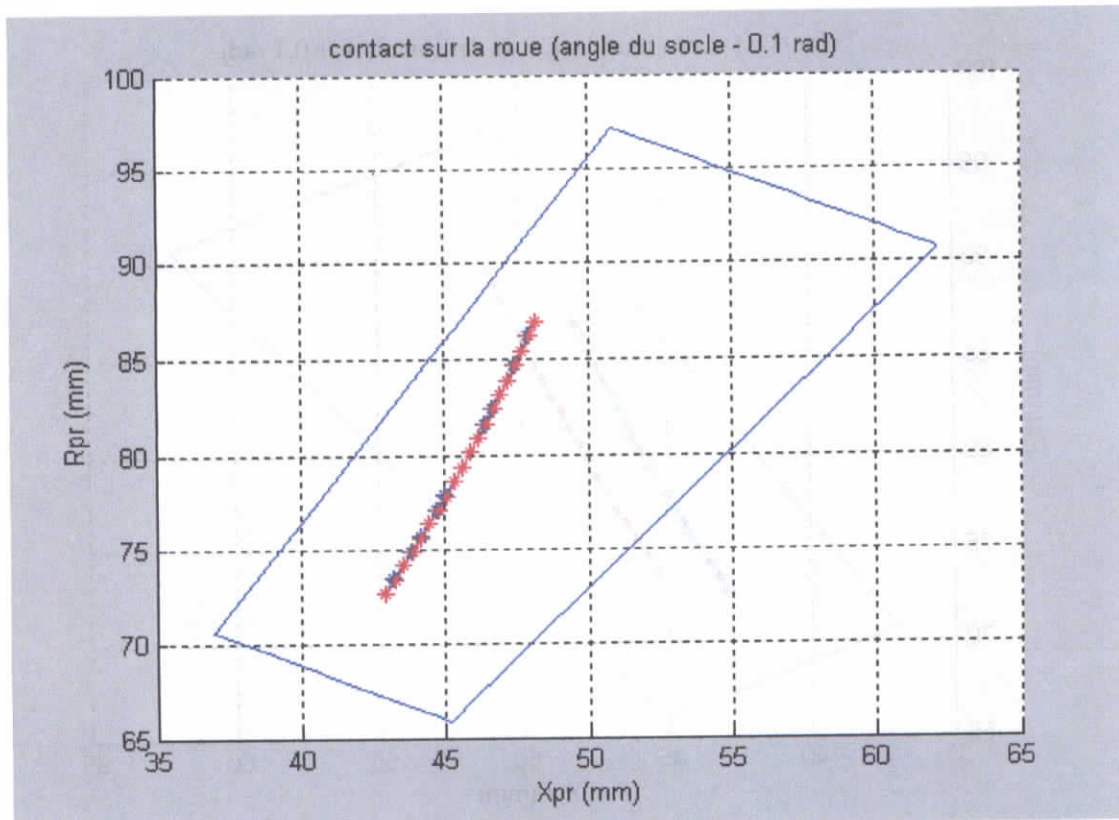
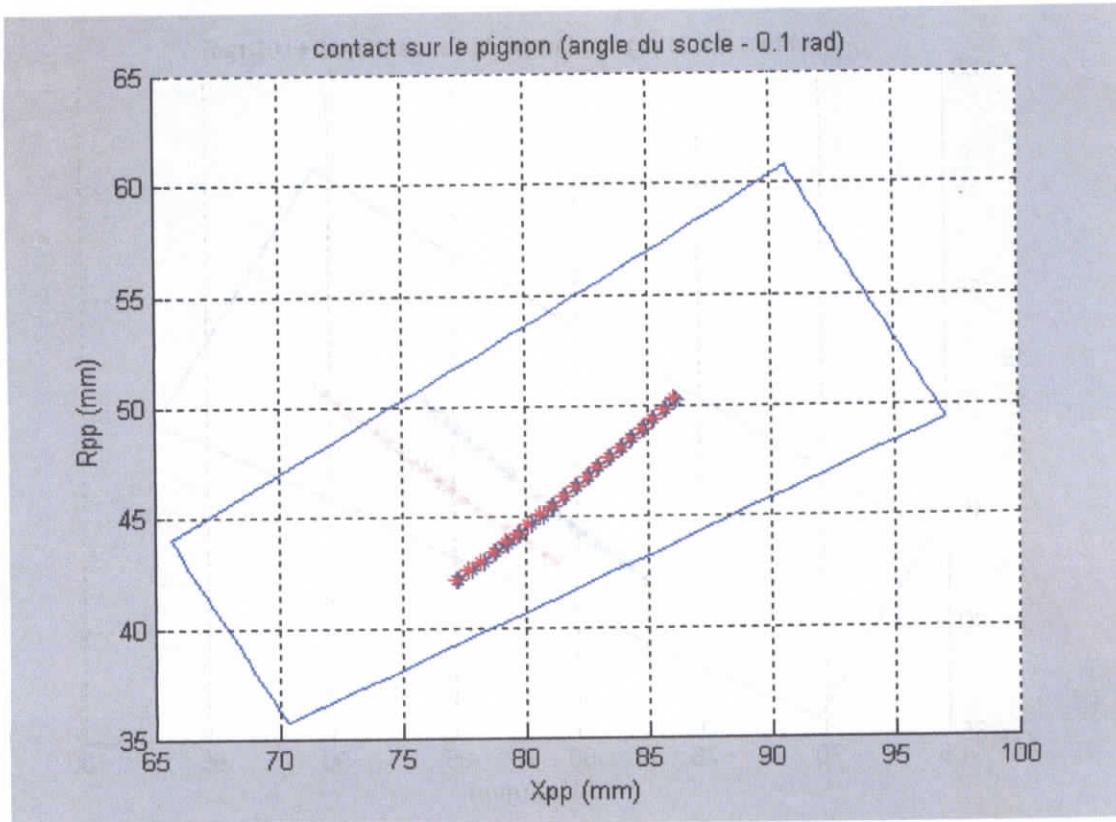


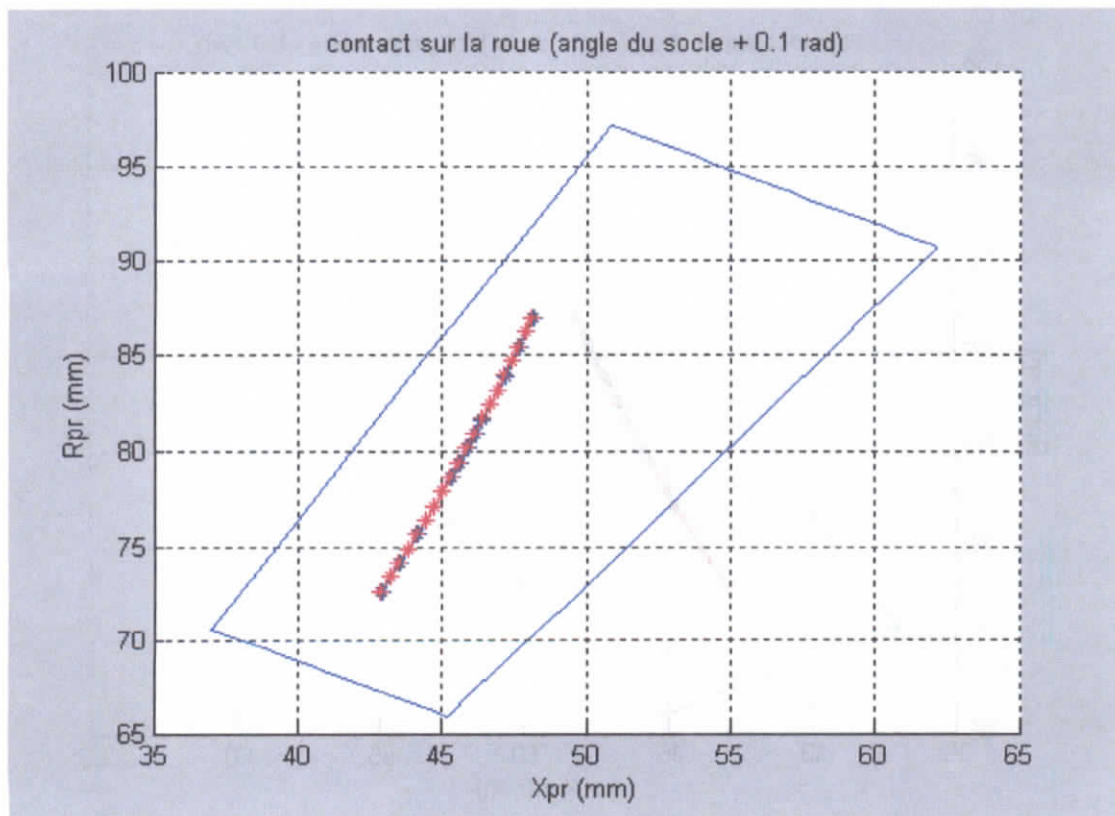
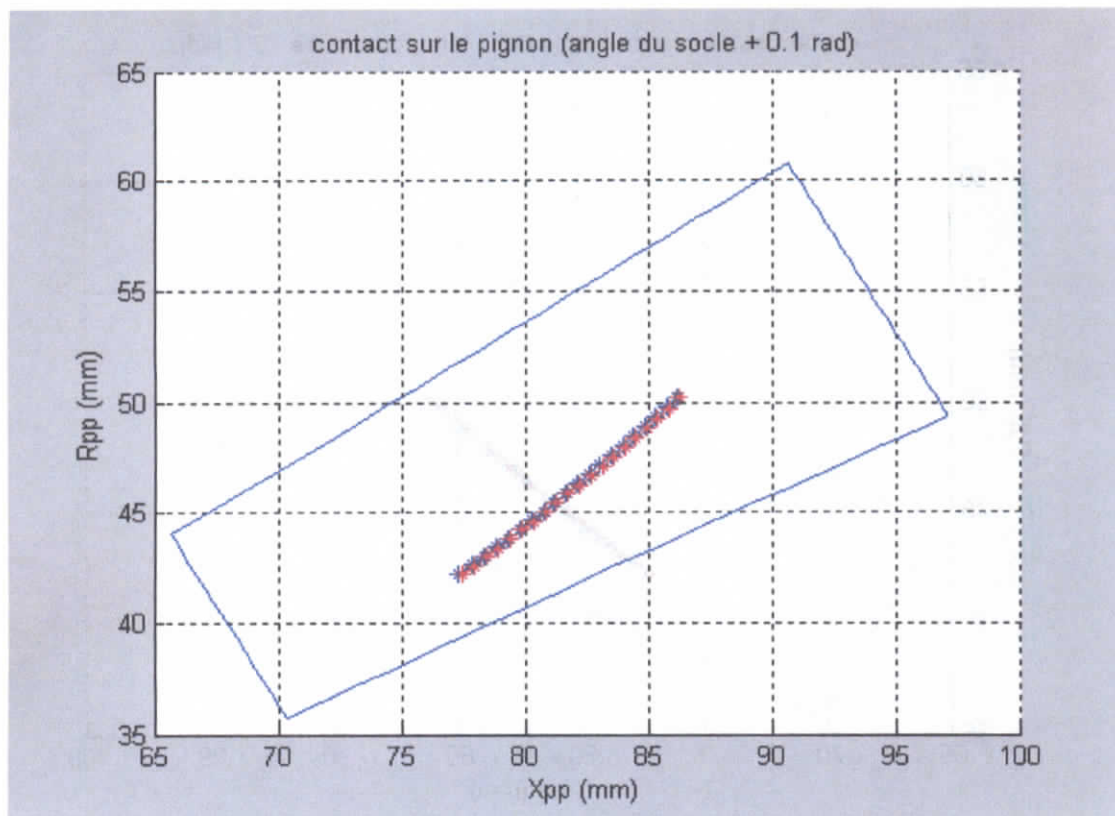




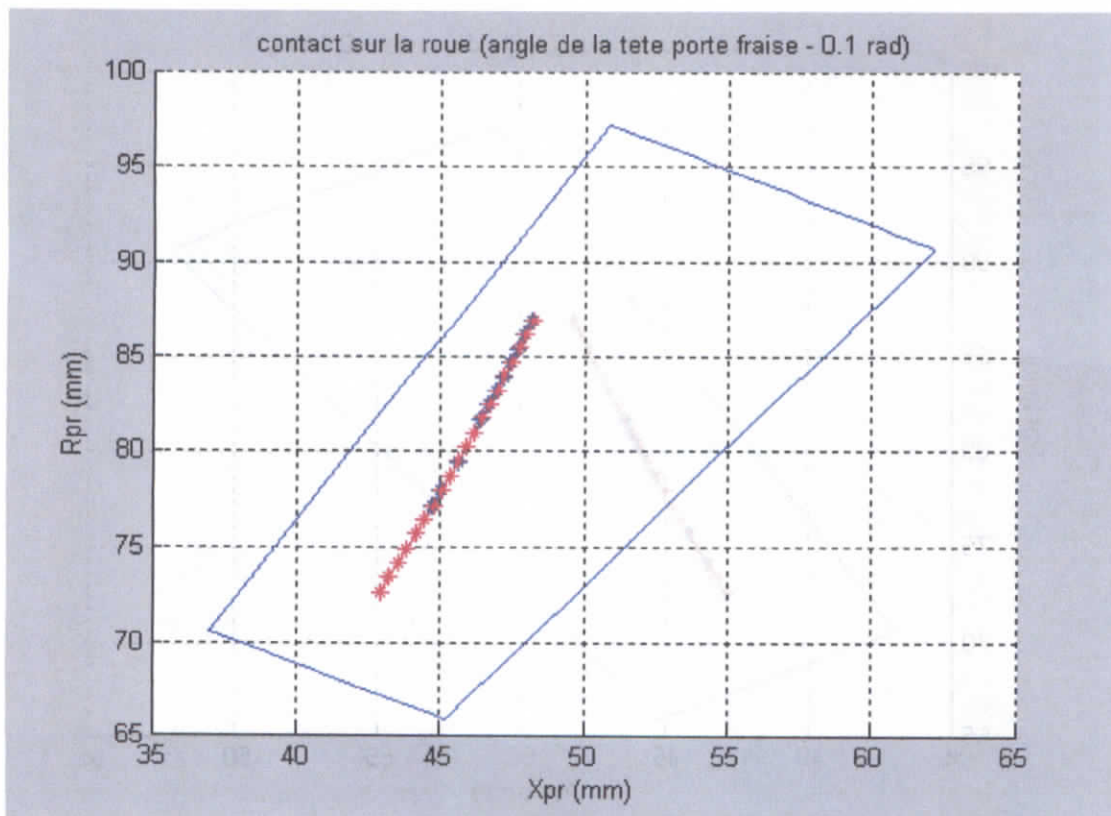
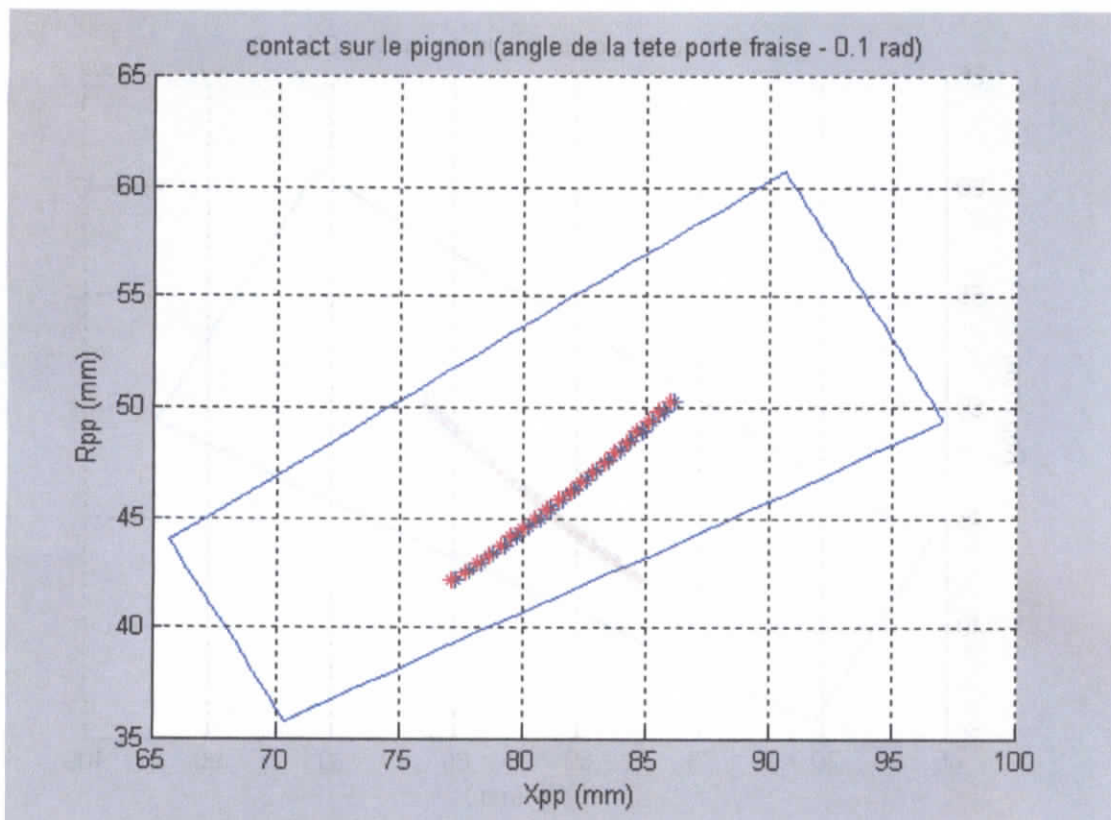


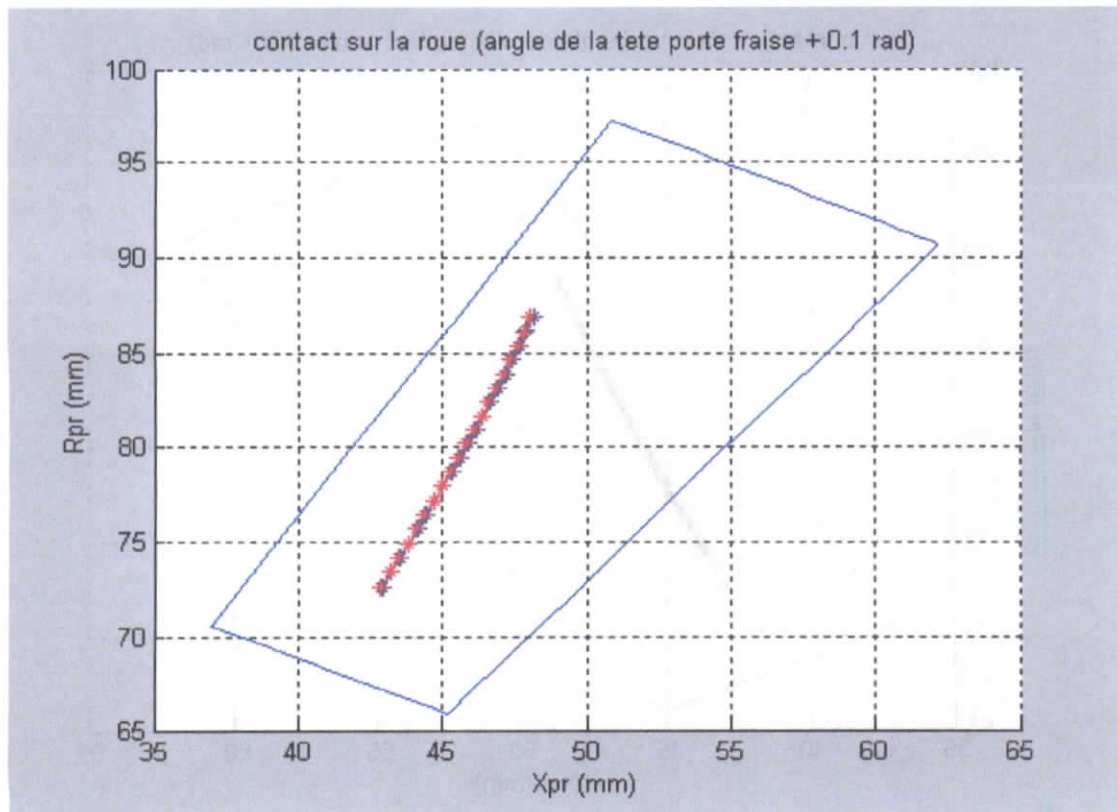
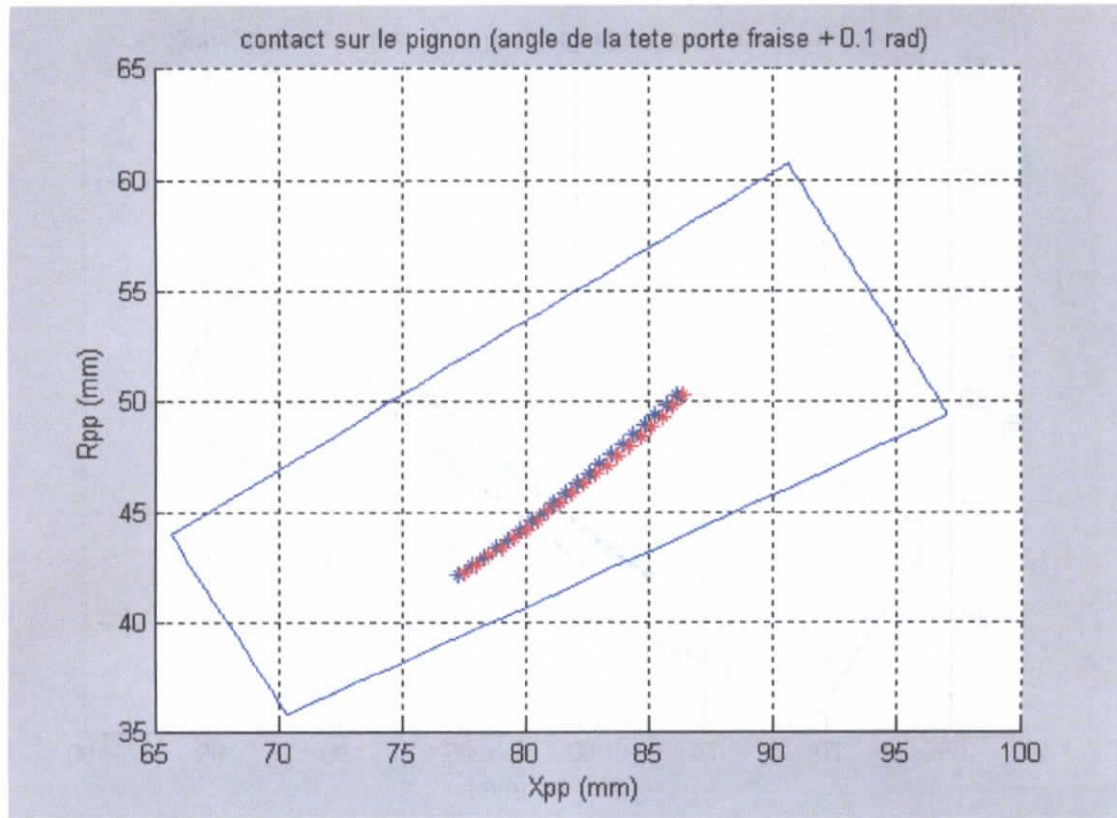


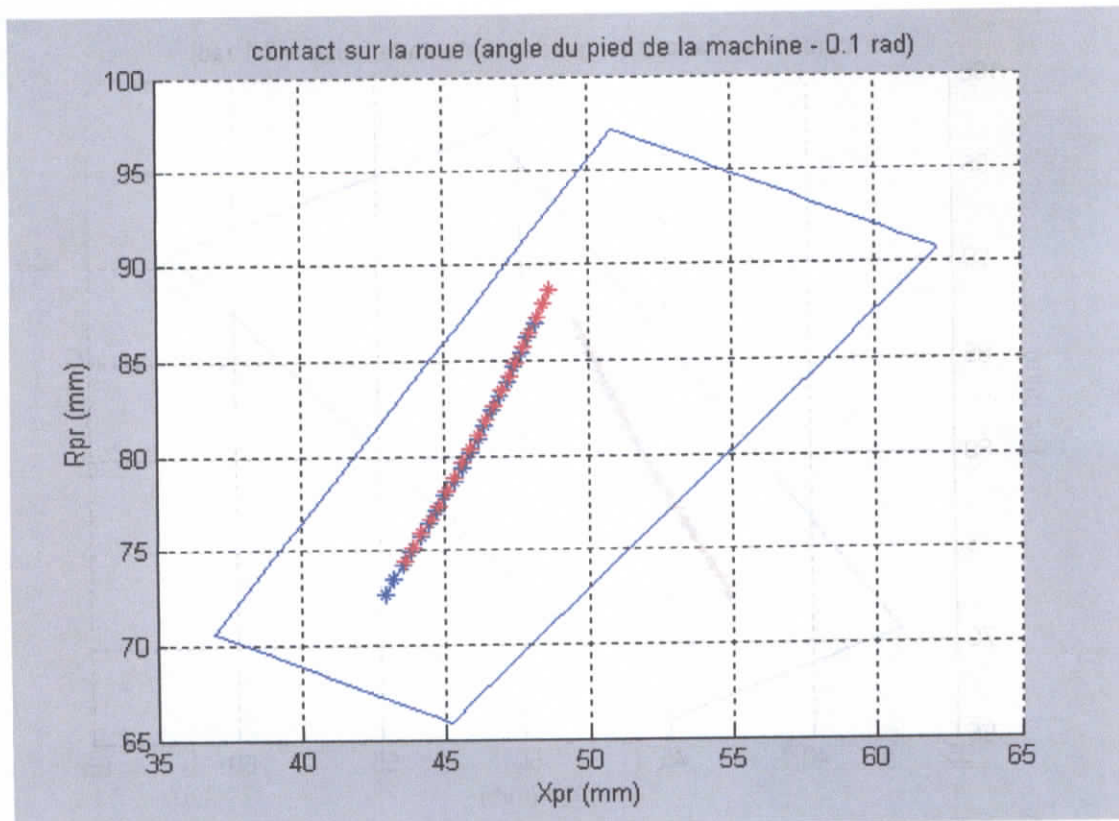
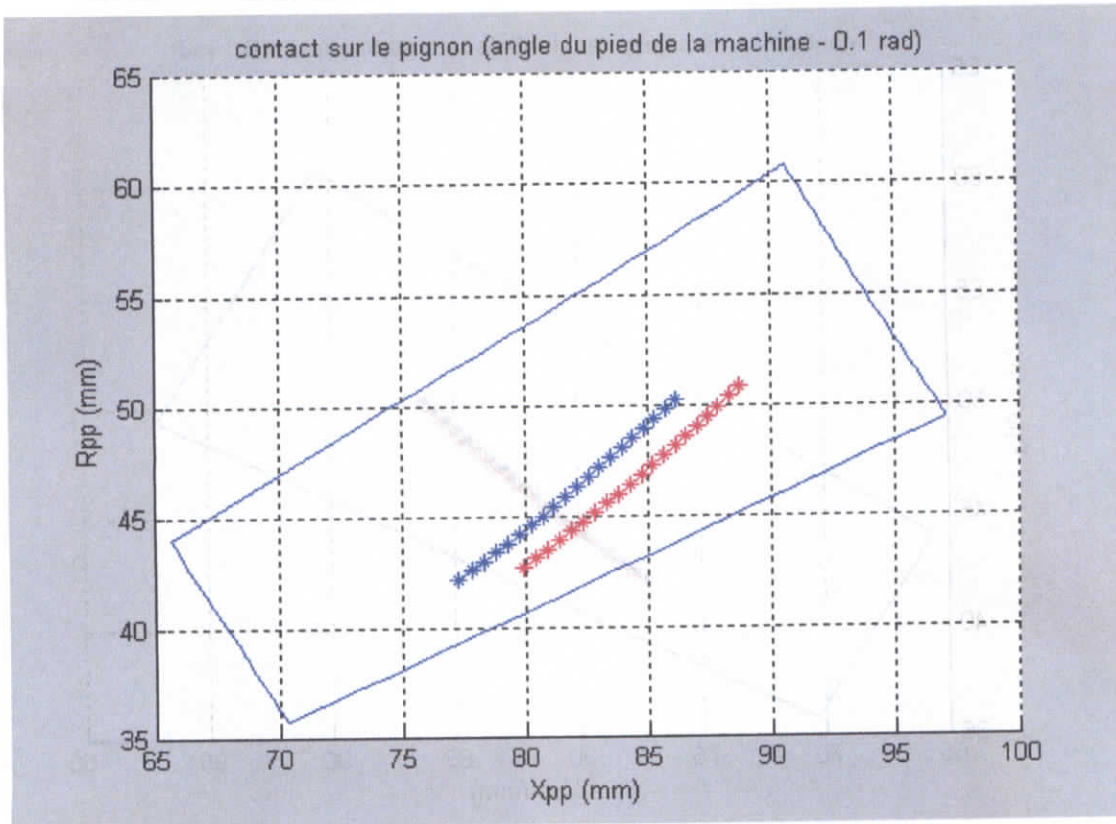


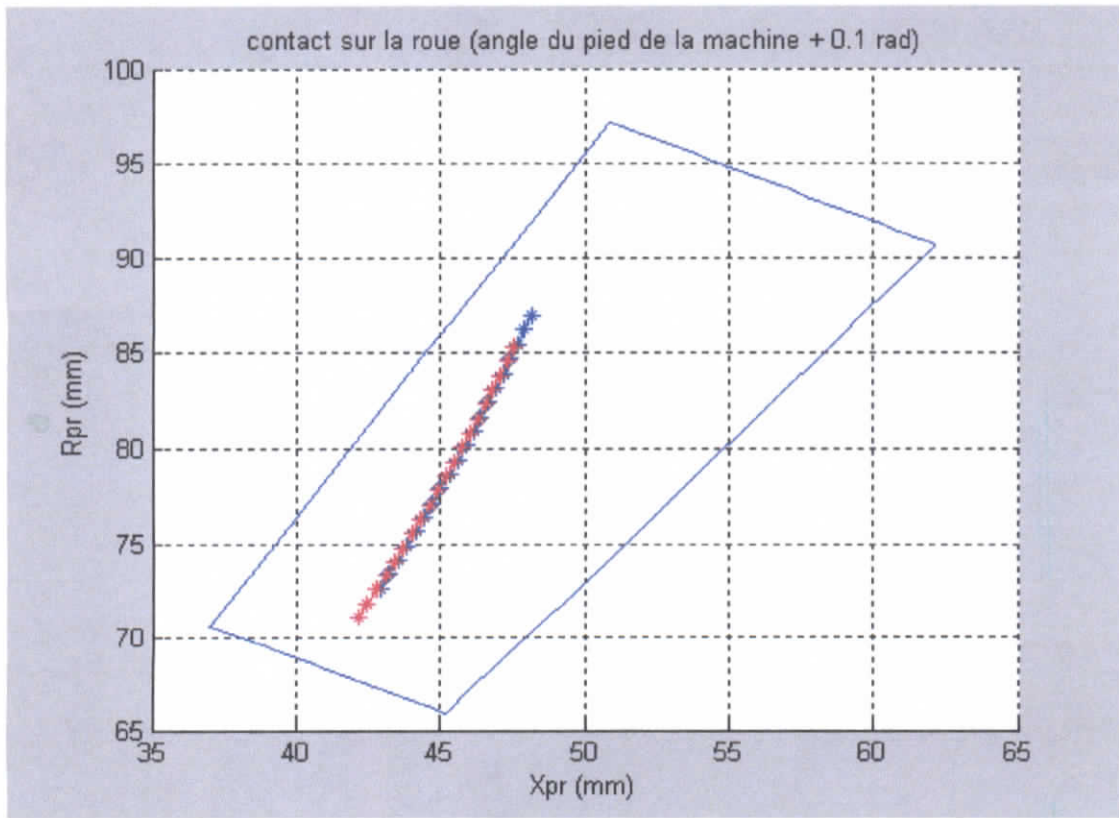
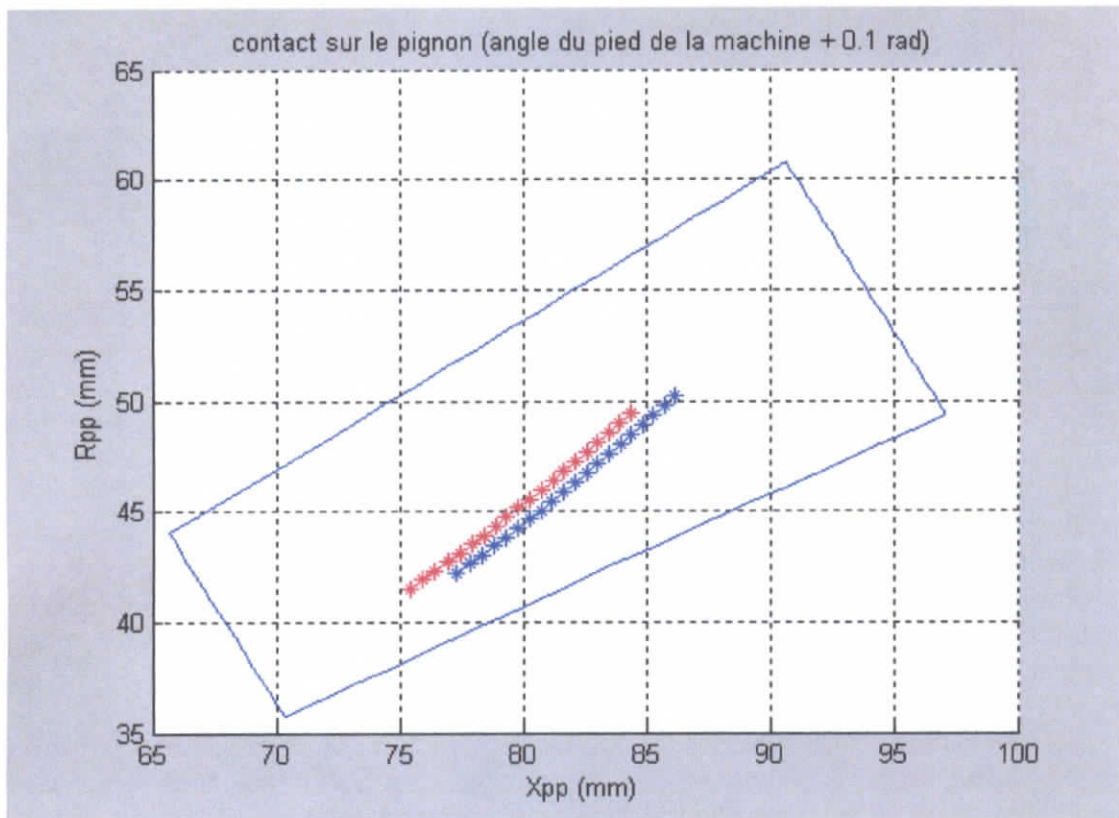














Les résultats présentés montre bien l'influence des paramètres de réglages de la machine sur le chemin de contact.

On obtient un déplacement de chemin de contact qui est différent pour les modifications de chaque paramètre de réglage de la machine.

Les modifications effectuées sur l'angle du berceau influent très sensiblement sur le chemin de contact sur le pignon et sur la roue. Pour une modification négative le chemin de contact se déplace vers le petit bout suivant l'allure de chemin de contact de référence. La modification en sens contraire fait déplacer le chemin de contact vers le grand bout de la même façon.

Les modifications effectuées sur l'angle de l'excentrique influent aussi très sensiblement sur le chemin de contact sur le pignon et sur la roue. Pour une modification négative le chemin de contact se déplace parallèlement par rapport au chemin de contact de référence vers l'extérieure de la dent. La modification en sens inverse donne un déplacement pareil au précédent, mais vers le font de la dent.

Les modifications effectuées sur l'angle du socle et l'angle de la tête porte fraise n'ont pas de grande influence sur le chemin de contact sur le pignon et sur la roue. Ces deux paramètres de réglage font partie de système d'inclinaison de la machine, leurs influences est sensible sur la géométrie du flanc de la denture et donnent un bombé selon les réglages.

Les modifications effectuées sur l'angle du pied de la machine influent sur le chemin de contact sur le pignon et sur la roue. Comme les modifications sont faite sur l'angle de pied de la machine pour le taillage du pignon, le déplacement de chemin de contact sur le pignon et sur la roue sont différents. Pour une modification négative, le chemin de contact sur le pignon se déplace suivant l'allure de chemin de contact de référence vers le grand bout et l'extérieure de la dent, le chemin de contact sur la roue se déplace seulement vers le grand bout suivant l'allure de chemin de contact de référence et vis versa pour une modification en sens contraire.

# CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, nous avons traité l'effet des défauts géométriques, qui sont les erreurs faites sur les paramètres de réglage de la machine de taillage, et sur le chemin de contact des engrenages spiro-coniques.

Cette étude est purement théorique, basée sur des outils mathématiques et numériques, vu la complexité du développement analytique, et aussi pour la perfection des résultats demandés à obtenir.

L'intérêt de cette étude est de vérifier le chemin de contact lors de la conception d'un nouveau couple d'engrenage spiro -conique avant de passer directement à la production des prototypes, et optimiser les réglages machines pour un contact optimum entre le pignon et la roue.

Cette étude a été divisée en deux parties principales :

- La première, simule la génération du flanc de denture à partir des réglages machines.
- La deuxième, simule l'engrènement et le contact entre le pignon et la roue.

## ANNEXE I

# BASES MATHÉMATIQUES ET MECANIQUES [7]

## A1.1 TRANSFORMATIONS DES COORDONNEES :

Les transformations matricielles permettent de systématiser les opérations relatives à plusieurs transformations de coordonnées et de contrôler ces opérations. Par la matrice inverse, la transformation dans l'autre sens peut être facilement faite. Pour les transformations d'espace, les matrices de rang quatre sont les plus appropriées car si on change le repère, on peut décrire la rotation autour des axes du repère original et même le déplacement de l'origine du repère.

On utilise exclusivement le repère direct de Descartes. Dans le repère direct, la rotation de l'axe x à l'axe y si l'on observe de l'axe positif z se réalise dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Il y a deux repères  $S_j(x_j, y_j, z_j)$  et  $S_i(x_i, y_i, z_i)$ . Le repère  $S_j$  diffère du repère  $S_i$  parce qu'il est tourné d'un angle  $\varphi$  autour l'axe  $x_j$ , et l'origine est déplacée (figure A1.1). Les valeurs a, b et c déterminent la position de l'origine  $O_j$  dans le nouveau repère. Les coordonnées du même point dans les repères  $S_i$  et  $S_j$  peuvent être décrites en utilisant les relations de la géométrie analytique par les équations suivantes :

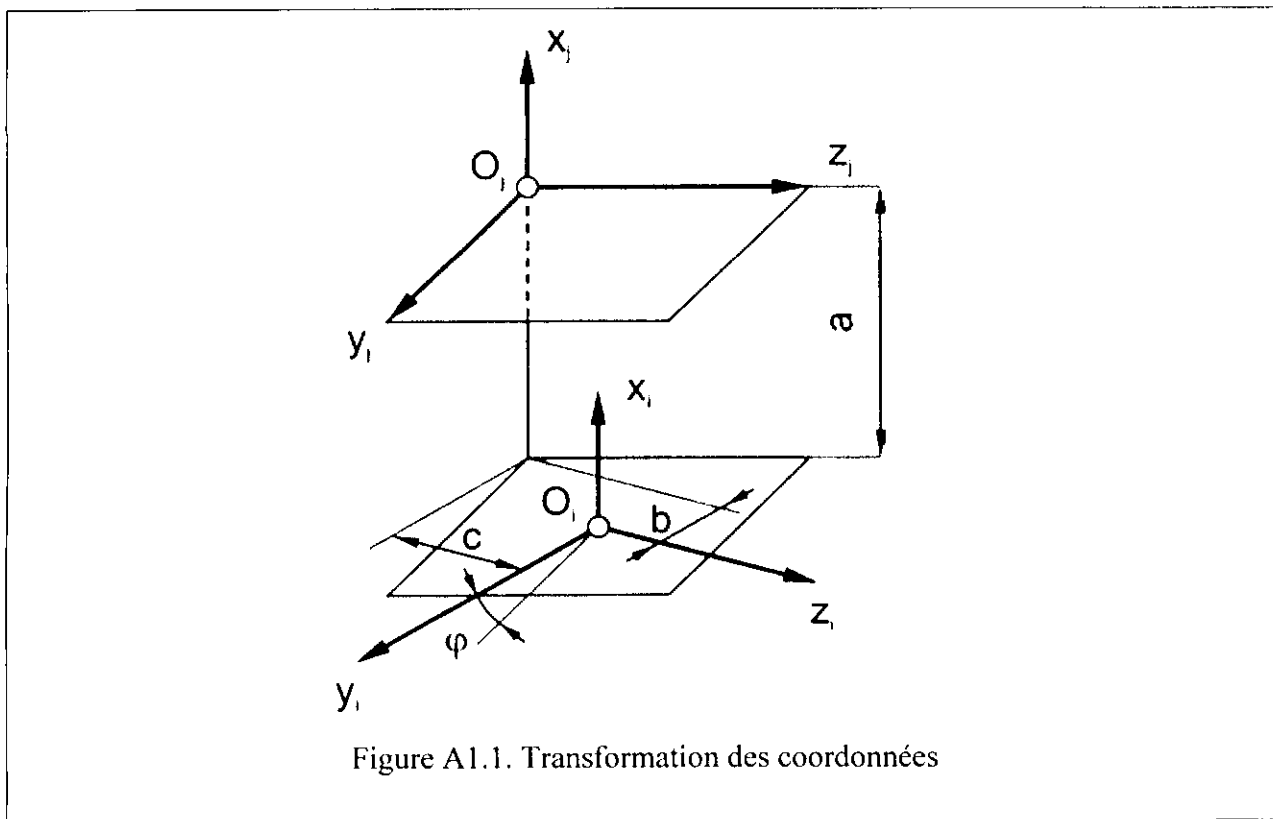
$$\begin{cases} x_i = x_j + a \\ y_i = \cos \varphi \cdot y_j - \sin \varphi \cdot z_j - b \\ z_i = \sin \varphi \cdot y_j + \cos \varphi \cdot z_j - c \end{cases} \quad (\text{A1.1})$$

Pour utiliser la matrice de rang quatre, on introduit les coordonnées homogènes, ainsi la position du point  $M_j(x_j, y_j, z_j)$  peut être décrite par quatre quantités :  $x'_j, y'_j, z'_j, t'_j$ , cela peut être appliqué pareillement dans l'autre repère  $S_i$ . La position du point  $M$  dans les repères correspondants est :

$$M_j(x_j, y_j, z_j, t_j) \text{ et } M_i(x_i, y_i, z_i, t_i)$$

Où  $t_j = t_i$ . En considérant les nouvelles désignations, les équations (A1.1) peuvent être décrites dans les formes suivantes :

$$\begin{cases} x_i = x_j + t_j \cdot a \\ y_i = \cos \varphi \cdot y_j - \sin \varphi \cdot z_j - t_j \cdot b \\ z_i = \sin \varphi \cdot y_j + \cos \varphi \cdot z_j - t_j \cdot c \end{cases} \quad (\text{A1.2})$$



les coefficients devant les coordonnées  $x_j, y_j, z_j, t_j$  peuvent être décrits comme des éléments d'une matrice dans les expressions  $x_i, y_i, z_i, t_i$  :

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & -b \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A1.3})$$

dans la matrice  $M_{ij}$ , les indices « ij » montrent que la transformation est effectuée au repère  $S_i$  du repère  $S_j$ . si le point est donné dans une forme vectorielle alors la transformation sous une forme réduite est la suivante :

$$r_i = M_{ij} \cdot r_j \quad (\text{A1.4})$$

où  $r_i$  et  $r_j$  sont les matrices colonnes des vecteurs de position du même point dans les repères  $S_i$  et  $S_j$ .

**A1.2 RAYONS DE COURBURES SURFACIQUES :**

Si la surface est donnée sous la forme paramétrique  $r = r(u, v)$ , les rayons de courbure sont calculés par les équations suivantes dans le point surfacique  $P$  :

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} \quad (\text{A1.5})$$

$$r_v = \frac{\partial r}{\partial v} \quad (\text{A1.6})$$

La normale  $n$  en  $P$  au plan tangent est définie par:

$$n = r_v \wedge r_u = \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.7})$$

Les valeurs  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons de courbure principaux de la surface en  $P$  qui vérifient:

$$R_i = \rho_i \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad (i=1,2) \quad (\text{A1.8})$$

ou  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont les racines de l'équation de second degré en  $\rho$  :

$$(\rho \cdot D' - F)^2 - (\rho \cdot D - E) \cdot (\rho \cdot D'' - G) = 0 \quad (\text{A1.9})$$

ou

$$E = r_u \cdot r_u, \quad G = r_v \cdot r_v, \quad F = r_u \cdot r_v$$

$$D = n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial u^2}, \quad D' = n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial u \cdot \partial v}, \quad D'' = n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial v^2}$$

**Remarque :**

- Racines  $\rho_1$  et  $\rho_2$  de l'équations sont toujours réelles.
- rayons de courbure calculés sont positifs si le centre de courbure est à l'intérieur du solide correspondant et sont négatifs dans le cas contraire.

### A1.3 VITESSE RELATIVE :

En considérant deux corps 1 et 2 qui tournent autour d'axes concourants avec des vitesses de rotation  $\omega_1$  et  $\omega_2$  respectivement (figure A1.2). Les axes forment un angle  $\gamma$ , et la plus petite distance entre eux est  $C$ . Nous supposons que le point  $M$  est un point commun des corps en rotation. La vitesse  $V_1$  du point  $M$  du corps 1 :

$$V_1 = \omega_1 \times r_1 \quad (\text{A1.10})$$

où  $r_1$  est le vecteur de position entre le point  $M$  et un point arbitraire de la ligne d'action de  $\omega_1$ .

Similairement :

$$V_2 = \omega_2 \times \rho_2 \quad (\text{A1.11})$$

où  $\rho_2$  est le vecteur de position entre le point  $M$  et un point arbitraire de la ligne d'action de  $\omega_2$ .

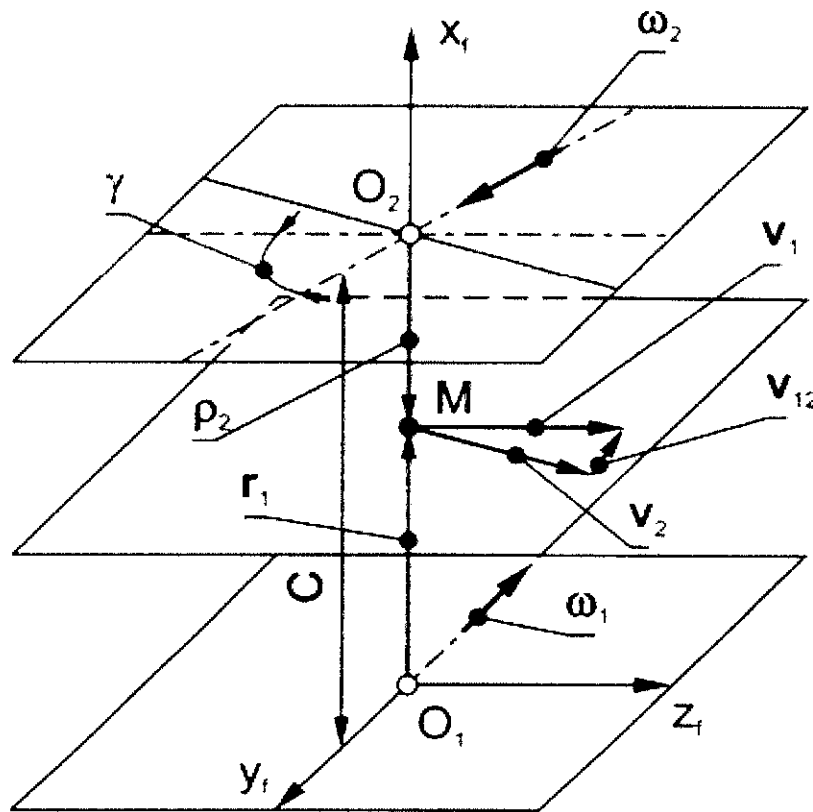


Figure A1.2. Détermination de la vitesse relative.

La vitesse relative  $v_{12}$  est :

$$V_{12} = V_1 - V_2 = (\omega_1 \times r_1) - (\omega_2 \times \rho_2) \quad (\text{A1.12})$$

En posant :

$$V_{21} = V_2 - V_1 = (\omega_2 \times \rho_2) - (\omega_1 \times r_1) = -V_{12} \quad (\text{A1.13})$$

La vitesse relative  $V_{12}$  est déterminée en terme physique comme la vitesse du point  $M$  du corps 1 vu par un observateur lié au point  $M$  du corps 2. Similairement,  $v_{21}$  est déterminée en terme physique comme la vitesse du point  $M$  du corps 2 par un observateur lié au point  $M$  du corps 1.

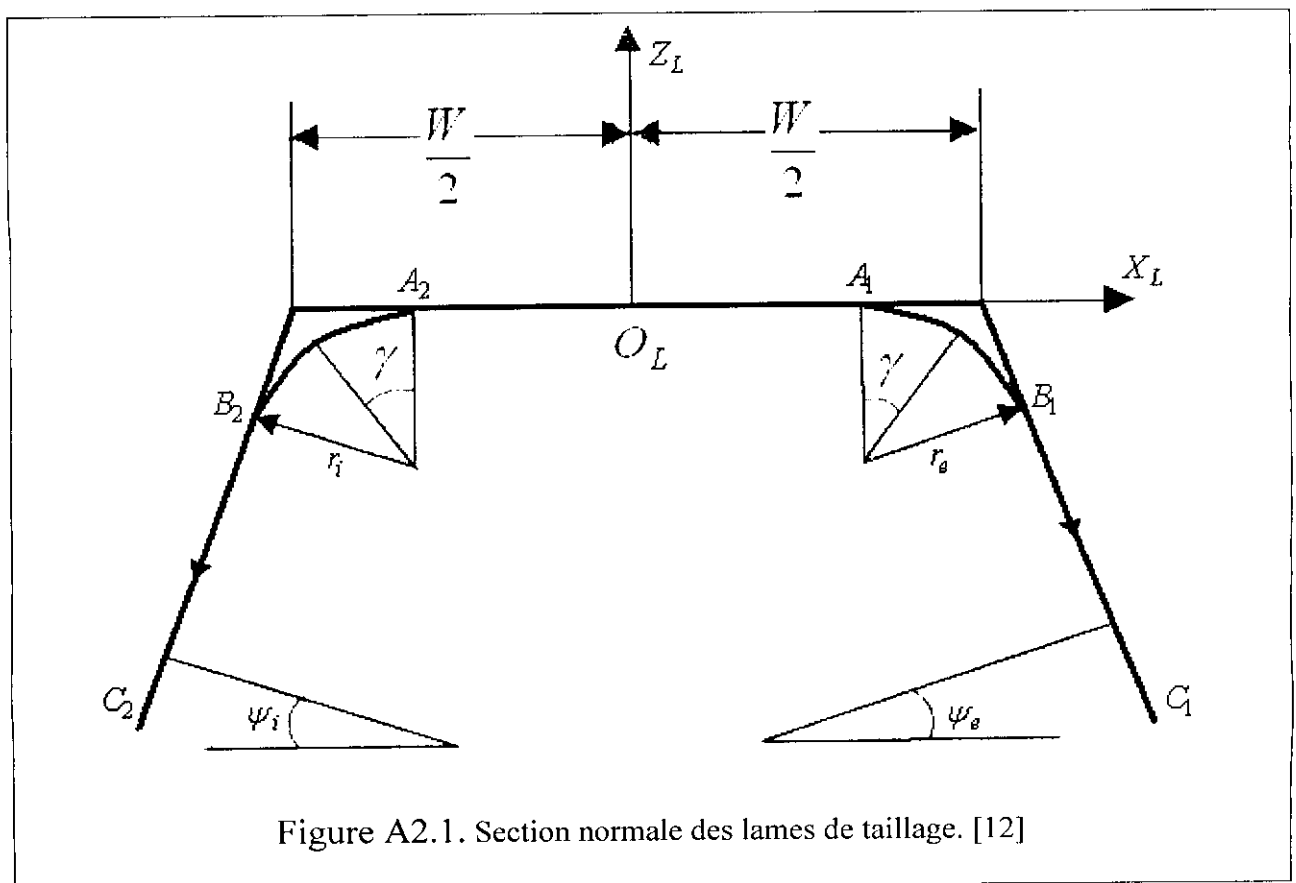
## ANNEXE II

# COORDONNEES D'UN POINT SUR LES LAMES EXPRIMEES DANS LE REPERE $R_F$ [9],[12]

On schématise la section normale des lames de taillage des flancs concave et convexe de la denture par la figure A2.1.

Le schéma montre bien le positionnement du repère  $R_L(O_L, \vec{X}_L, \vec{Y}_L, \vec{Z}_L)$  par rapport aux lames de taillage.

Le centre  $O_L$  est au milieu de la largeur des deux lames l'axe  $O_L \vec{Z}_L$  est parallèle à l'axe de rotation de la fraise.





### A2.1 LAMES DE TAILLAGE DES FLANCS CONCAVES (EXTERIEURS):

- pour un point M qui se situe sur la partie tranchante circulaire  $A_1B_1$ .

On peut exprimer ces coordonnées dans le repère  $R_L$  par :

$$\begin{cases} X_{L}^{A_1B_1} = \frac{W}{2} - r_e \left( \frac{\cos \Psi_e}{1 + \sin \Psi_e} \right) + r_e \sin \gamma \\ Y_{L}^{A_1B_1} = 0 \\ Z_{L}^{A_1B_1} = -r_e (1 - \cos \gamma) \end{cases} \quad \text{Avec } 0 \leq \gamma \leq 90^\circ - \Psi_e \quad (\text{A2.1})$$

- pour un point M qui se situe sur la partie tranchante rectiligne  $B_1C_1$ .

Où on désigne :  $v = B_1M$ .

On exprime ces coordonnées dans le repère  $R_L$  par :

$$\begin{cases} X_{L}^{B_1C_1} = \frac{W}{2} + v \sin \Psi_e \\ Y_{L}^{B_1C_1} = 0 \\ Z_{L}^{B_1C_1} = -v \cos \Psi_e \end{cases} \quad \text{Avec } v \geq r_e \left( \frac{\cos \Psi_e}{1 + \sin \Psi_e} \right) \quad (\text{A2.2})$$

### A2.2 LAMES DE TAILLAGE DES FLANCS CONVEXES (INTERIEURS) :

- pour un point M qui se situe sur la partie tranchante circulaire  $A_2B_2$ .

On peut exprimé ces coordonnées dans le repère  $R_L$  par :

$$\begin{cases} X_{L}^{A_2B_2} = -\frac{W}{2} + r_i \left( \frac{\cos \Psi_i}{1 + \sin \Psi_i} \right) - r_i \sin \gamma \\ Y_{L}^{A_2B_2} = 0 \\ Z_{L}^{A_2B_2} = -r_i (1 - \cos \gamma) \end{cases} \quad \text{Avec } 0 \leq \gamma \leq 90^\circ - \Psi_i \quad (\text{A2.3})$$

- pour un point M qui se situe sur la partie tranchante rectiligne  $B_2C_2$ .

Où on désigne :  $v = B_2M$ .

On exprime ces coordonnées dans le repère  $R_L$  par :

$$\begin{cases} X_L^{B_2C_2} = \frac{W}{2} + v \sin \Psi_i \\ Y_L^{B_2C_2} = 0 \\ Z_L^{B_2C_2} = -v \cos \Psi_i \end{cases} \quad \text{Avec} \quad v \geq r_i \left( \frac{\cos \Psi_i}{1 + \sin \Psi_i} \right) \quad (\text{A2.4})$$

Le positionnement des lames de la fraise par rapport au repère  $R_F$  est montré dans la figure A2.2.

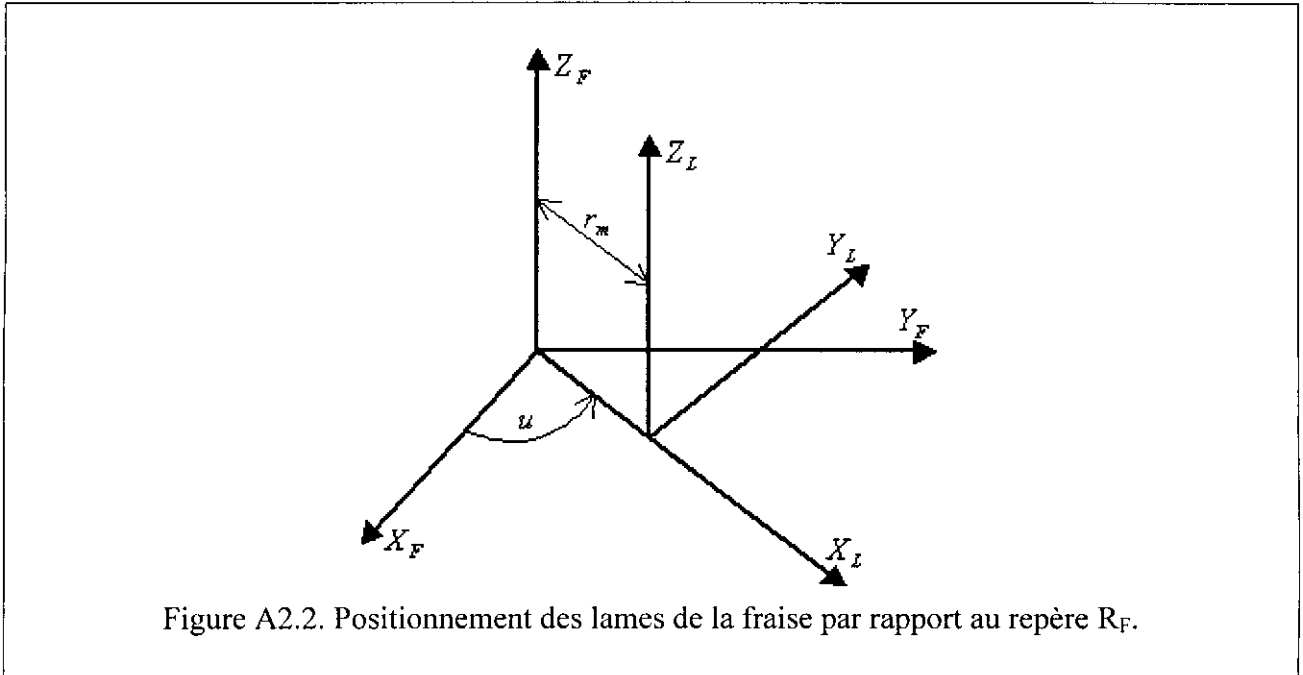


Figure A2.2. Positionnement des lames de la fraise par rapport au repère  $R_F$ .

A partir de la figure A2.2, on montre le positionnement des lames par le paramètre  $u$  qui est due à la rotation de la fraise autour de son axe  $\vec{Z}_F$ .

Les coordonnées d'un point sur la lame peuvent être exprimées dans le repère  $R_F$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_F \\ Y_F \\ Z_F \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos u & 0 & -\sin u & r_m \cos u \\ \sin u & 0 & \cos u & r_m \sin u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.5})$$

$$\Rightarrow \vec{R}_F = [M_{F \bullet L}] \cdot \vec{R}_L \quad \text{Avec} \quad [M_{F \bullet L}] = \begin{bmatrix} \cos u & 0 & -\sin u & r_m \cos u \\ \sin u & 0 & \cos u & r_m \sin u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## ANNEXE III

# RESULTATS NUMERIQUES

Le contact sur le pignon (paramètres initiaux)			
Xpp	Ypp	Zpp	Rpp
86.2618	6.1492	-49.8129	50.1910
85.8280	5.5718	-49.4219	49.7350
85.3903	5.0054	-49.0277	49.2826
84.9487	4.4498	-48.6306	48.8337
84.5034	3.9050	-48.2307	48.3885
84.0544	3.3708	-47.8282	47.9469
83.6018	2.8473	-47.4234	47.5088
83.1456	2.3341	-47.0164	47.0743
82.6861	1.8312	-46.6074	46.6434
82.2231	1.3384	-46.1966	46.2160
81.7569	0.8557	-45.7841	45.7921
81.2875	0.3829	-45.3701	45.3717
80.8149	-0.0802	-44.9548	44.9549
80.3392	-0.5336	-44.5383	44.5415
79.8606	-0.9775	-44.1207	44.1315
79.3791	-1.4120	-43.7022	43.7250
78.8948	-1.8373	-43.2829	43.3219
78.4077	-2.2534	-42.8630	42.9222
77.9180	-2.6606	-42.4425	42.5258
77.4257	-3.0590	-42.0216	42.1328

Le contact sur la roue (paramètres initiaux)			
Xpr	Ypr	Zpr	Rpr
48.1454	-11.7879	-86.1439	86.9466
47.9108	-10.7785	-85.5162	86.1927
47.6714	-9.7827	-84.8769	85.4388
47.4272	-8.8005	-84.2263	84.6848
47.1783	-7.8320	-83.5647	83.9309
46.9246	-6.8775	-82.8923	83.1771
46.6663	-5.9369	-82.2093	82.4234
46.4034	-5.0103	-81.5160	81.6698
46.1357	-4.0979	-80.8126	80.9164
45.8635	-3.1997	-80.0993	80.1632
45.5867	-2.3158	-79.3765	79.4103
45.3053	-1.4462	-78.6444	78.6577
45.0194	-0.5912	-77.9032	77.9054
44.7290	0.2494	-77.1531	77.1535
44.4342	1.0754	-76.3945	76.4020
44.1349	1.8867	-75.6275	75.6510
43.8312	2.6834	-74.8524	74.9005
43.5231	3.4653	-74.0695	74.1505
43.2108	4.2324	-73.2789	73.4010
42.8941	4.9847	-72.4810	72.6522

Le contact sur le pignon (angle du berceau -0.1 rad)			
Xpp	Ypp	Zpp	Rpp
81.4729	10.0141	-44.4809	45.5942
81.0011	9.4722	-44.1715	45.1757
80.5261	8.9396	-43.8590	44.7607
80.0480	8.4160	-43.5433	44.3492
79.5671	7.9015	-43.2248	43.9411
79.0832	7.3959	-42.9036	43.5364
78.5966	6.8991	-42.5799	43.1352
78.1072	6.4111	-42.2537	42.7373
77.6153	5.9316	-41.9252	42.3427
77.1208	5.4606	-41.5945	41.9515
76.6238	4.9981	-41.2619	41.5635
76.1245	4.5438	-40.9274	41.1788
75.6228	4.0976	-40.5911	40.7974
75.1190	3.6596	-40.2532	40.4192
74.6130	3.2295	-39.9137	40.0441
74.1049	2.8072	-39.5728	39.6722
73.5949	2.3927	-39.2305	39.3034
73.0830	1.9858	-38.8870	38.9377
72.5693	1.5865	-38.5424	38.5750
72.0539	1.1946	-38.1967	38.2153

Le contact sur la roue (angle du berceau - 0.1 rad)			
Xpr	Ypr	Zpr	Rpr
45.4337	-1.9279	-79.0433	79.0668
45.1508	-1.0644	-78.3069	78.3141
44.8633	-0.2154	-77.5615	77.5618
44.5712	0.6190	-76.8073	76.8097
44.2749	1.4390	-76.0445	76.0582
43.9741	2.2442	-75.2736	75.3070
43.6688	3.0348	-74.4946	74.5564
43.3592	3.8106	-73.7078	73.8062
43.0453	4.5715	-72.9135	73.0566
42.7270	5.3177	-72.1119	72.3077
42.4045	6.0490	-71.3032	71.5593
42.0778	6.7653	-70.4878	70.8117
41.7468	7.4667	-69.6657	70.0647
41.4117	8.1532	-68.8374	69.3185
41.0725	8.8247	-68.0029	68.5731
40.7293	9.4811	-67.1627	67.8286
40.3820	10.1226	-66.3168	67.0849
40.0306	10.7490	-65.4655	66.3421
39.6754	11.3603	-64.6091	65.6002
39.3162	11.9566	-63.7477	64.8593

Le contact sur le pignon (angle du berceau + 0.1 rad)			
Xpp	Ypp	Zpp	Rpp
90.4481	1.7098	-55.2473	55.2738
90.0592	1.0941	-54.7679	54.7788
89.6656	0.4911	-54.2853	54.2875
89.2674	-0.0991	-53.7997	53.7997
88.8647	-0.6767	-53.3113	53.3156
88.4575	-1.2418	-52.8205	52.8351
88.0459	-1.7946	-52.3274	52.3581
87.6300	-2.3352	-51.8322	51.8848
87.2098	-2.8637	-51.3353	51.4151
86.7855	-3.3803	-50.8367	50.9490
86.3570	-3.8850	-50.3368	50.4865
85.9246	-4.3782	-49.8357	50.0276
85.4882	-4.8598	-49.3336	49.5723
85.0480	-5.3300	-48.8306	49.1207
84.6040	-5.7891	-48.3271	48.6726
84.1563	-6.2371	-47.8231	48.2281
83.7050	-6.6742	-47.3188	47.7872
83.2500	-7.1006	-46.8144	47.3499
82.7916	-7.5164	-46.3100	46.9161
82.3298	-7.9218	-45.8058	46.4858

Le contact sur la roue (angle du berceau + 0.1 rad)			
Xpr	Ypr	Zpr	Rpr
50.3441	-23.1057	-91.9580	94.8164
50.1602	-21.9624	-91.4654	94.0652
49.9713	-20.8313	-90.9587	93.3136
49.7774	-19.7125	-90.4382	92.5616
49.5785	-18.6062	-89.9041	91.8092
49.3749	-17.5124	-89.3566	91.0565
49.1662	-16.4314	-88.7960	90.3035
48.9525	-15.3633	-88.2225	89.5502
48.7340	-14.3083	-87.6364	88.7967
48.5106	-13.2664	-87.0379	88.0431
48.2824	-12.2377	-86.4273	87.2894
48.0493	-11.2225	-85.8047	86.5355
47.8115	-10.2208	-85.1706	85.7816
47.5688	-9.2327	-84.5250	85.0277
47.3215	-8.2584	-83.8683	84.2739
47.0694	-7.2979	-83.2006	83.5201
46.8126	-6.3513	-82.5224	82.7664
46.5511	-5.4188	-81.8337	82.0129
46.2850	-4.5004	-81.1348	81.2596
46.0143	-3.5962	-80.4261	80.5065

Le contact sur le pignon (angle de l'excentrique – 0.1 rad)			
Xpp	Ypp	Zpp	Rpp
81.8966	2.8843	-50.0355	50.1185
81.5096	2.2430	-49.6367	49.6874
81.1195	1.6128	-49.2327	49.2591
80.7264	0.9935	-48.8238	48.8339
80.3305	0.3852	-48.4100	48.4115
79.9316	-0.2123	-47.9916	47.9921
79.5300	-0.7990	-47.5689	47.5756
79.1257	-1.3750	-47.1420	47.1620
78.7187	-1.9403	-46.7111	46.7513
78.3091	-2.4951	-46.2764	46.3436
77.8970	-3.0393	-45.8381	45.9387
77.4825	-3.5732	-45.3963	45.5367
77.0656	-4.0967	-44.9513	45.1376
76.6463	-4.6100	-44.5032	44.7414
76.2248	-5.1131	-44.0522	44.3480
75.8011	-5.6061	-43.5985	43.9574
75.3753	-6.0891	-43.1421	43.5697
74.9475	-6.5622	-42.6833	43.1848
74.5177	-7.0255	-42.2222	42.8027
74.0859	-7.4790	-41.7589	42.4234

Le contact sur la roue (angle de l'excentrique - 0.1 rad)			
Xpr	Ypr	Zpr	Rpr
45.3321	-9.9666	-84.2633	84.8507
45.1218	-9.1063	-83.6922	84.1861
44.9080	-8.2572	-83.1129	83.5221
44.6905	-7.4195	-82.5257	82.8586
44.4696	-6.5933	-81.9308	82.1957
44.2450	-5.7785	-81.3283	81.5334
44.0170	-4.9753	-80.7186	80.8717
43.7856	-4.1837	-80.1017	80.2108
43.5507	-3.4037	-79.4779	79.5507
43.3125	-2.6355	-78.8474	78.8914
43.0709	-1.8791	-78.2104	78.2330
42.8260	-1.1344	-77.5672	77.5755
42.5779	-0.4016	-76.9179	76.9190
42.3265	0.3193	-76.2628	76.2635
42.0719	1.0283	-75.6020	75.6090
41.8143	1.7254	-74.9358	74.9557
41.5535	2.4105	-74.2644	74.3035
41.2897	3.0837	-73.5880	73.6526
41.0228	3.7448	-72.9068	73.0030
40.7530	4.3940	-72.2210	72.3546

Le contact sur le pignon (angle de l'excentrique +0.1 rad)			
Xpp	Ypp	Zpp	Rpp
90.6463	9.1596	-50.2906	51.1179
90.1694	8.6392	-49.9037	50.6460
89.6877	8.1297	-49.5156	50.1785
89.2011	7.6311	-49.1264	49.7156
88.7096	7.1430	-48.7364	49.2570
88.2136	6.6655	-48.3456	48.8029
87.7129	6.1982	-47.9544	48.3533
87.2077	5.7410	-47.5628	47.9080
86.6980	5.2938	-47.1710	47.4671
86.1840	4.8564	-46.7793	47.0307
85.6658	4.4286	-46.3876	46.5985
85.1434	4.0102	-45.9963	46.1708
84.6169	3.6010	-45.6054	45.7473
84.0865	3.2010	-45.2150	45.3281
83.5521	2.8098	-44.8253	44.9132
83.0140	2.4274	-44.4363	44.5026
82.4721	2.0535	-44.0482	44.0960
81.9266	1.6880	-43.6612	43.6938
81.3775	1.3307	-43.2752	43.2956
80.8250	0.9814	-42.8903	42.9015

Le contact sur la roue (angle de l'excentrique + 0.1 rad)			
Xpr	Ypr	Zpr	Rpr
51.1672	-14.8822	-88.5830	89.8244
50.9148	-13.7067	-87.9235	88.9855
50.6562	-12.5469	-87.2483	88.1458
50.3915	-11.4028	-86.5576	87.3055
50.1207	-10.2747	-85.8517	86.4644
49.8438	-9.1627	-85.1310	85.6227
49.5607	-8.0670	-84.3956	84.7803
49.2716	-6.9876	-83.6460	83.9373
48.9764	-5.9248	-82.8823	83.0937
48.6752	-4.8786	-82.1048	82.2496
48.3679	-3.8493	-81.3138	81.4048
48.0545	-2.8368	-80.5096	80.5595
47.7350	-1.8414	-79.6924	79.7137
47.4095	-0.8631	-78.8625	78.8672
47.0779	0.0980	-78.0203	78.0203
46.7403	1.0416	-77.1659	77.1729
46.3967	1.9679	-76.2996	76.3249
46.0471	2.8765	-75.4216	75.4765
45.6914	3.7676	-74.5324	74.6275
45.3297	4.6409	-73.6320	73.7781

Le contact sur le pignon (angle du socle -0.1 rad)			
Xpp	Ypp	Zpp	Rpp
86.0983	6.2743	-49.8741	50.2673
85.6632	5.6956	-49.4836	49.8103
85.2241	5.1279	-49.0898	49.3569
84.7812	4.5710	-48.6931	48.9072
84.3345	4.0249	-48.2936	48.4610
83.8842	3.4895	-47.8914	48.0184
83.4303	2.9645	-47.4869	47.5794
82.9728	2.4500	-47.0802	47.1439
82.5119	1.9458	-46.6714	46.7120
82.0476	1.4517	-46.2608	46.2836
81.5801	0.9676	-45.8485	45.8587
81.1093	0.4935	-45.4347	45.4374
80.6354	0.0291	-45.0195	45.0195
80.1585	-0.4257	-44.6030	44.6051
79.6785	-0.8709	-44.1855	44.1941
79.1957	-1.3067	-43.7671	43.7866
78.7103	-1.7332	-43.3479	43.3826
78.2217	-2.1508	-42.9278	42.9817
77.7307	-2.5593	-42.5073	42.5843
77.2372	-2.9590	-42.0863	42.1902

Le contact sur la roue (angle du socle - 0.1 rad)			
Xpr	Ypr	Zpr	Rpr
48.1782	-11.7669	-86.1419	86.9419
47.9434	-10.7564	-85.5132	86.1871
47.7039	-9.7594	-84.8730	85.4323
47.4595	-8.7761	-84.2214	84.6774
47.2104	-7.8067	-83.5588	83.9227
46.9566	-6.8511	-82.8853	83.1679
46.6980	-5.9095	-82.2012	82.4133
46.4348	-4.9820	-81.5067	81.6588
46.1669	-4.0686	-80.8022	80.9045
45.8943	-3.1696	-80.0878	80.1505
45.6172	-2.2848	-79.3638	79.3967
45.3355	-1.4145	-78.6305	78.6432
45.0493	-0.5587	-77.8880	77.8900
44.7585	0.2826	-77.1367	77.1373
44.4633	1.1092	-76.3768	76.3849
44.1636	1.9212	-75.6086	75.6330
43.8595	2.7184	-74.8322	74.8816
43.5511	3.5009	-74.0480	74.1307
43.2383	4.2685	-73.2562	73.3804
42.9211	5.0213	-72.4570	72.6307



Le contact sur le pignon (angle du socle +0.1 rad)			
Xpp	Ypp	Zpp	Rpp
86.2618	6.1492	-49.8129	50.1910
85.8280	5.5718	-49.4219	49.7350
85.3903	5.0054	-49.0277	49.2826
84.9487	4.4498	-48.6306	48.8337
84.5034	3.9050	-48.2307	48.3885
84.0544	3.3708	-47.8282	47.9469
83.6018	2.8473	-47.4234	47.5088
83.1456	2.3341	-47.0164	47.0743
82.6861	1.8312	-46.6074	46.6434
82.2231	1.3384	-46.1966	46.2160
81.7569	0.8557	-45.7841	45.7921
81.2875	0.3829	-45.3701	45.3717
80.8149	-0.0802	-44.9548	44.9549
80.3392	-0.5336	-44.5383	44.5415
79.8606	-0.9775	-44.1207	44.1315
79.3791	-1.4120	-43.7022	43.7250
78.8948	-1.8373	-43.2829	43.3219
78.4077	-2.2534	-42.8630	42.9222
77.9180	-2.6606	-42.4425	42.5258
77.4257	-3.0590	-42.0216	42.1328

Le contact sur la roue (angle du socle + 0.1 rad)			
Xpr	Ypr	Zpr	Rpr
48.1133	-11.8099	-86.1466	86.9523
47.8787	-10.8017	-85.5198	86.1993
47.6394	-9.8069	-84.8815	85.4462
47.3953	-8.8258	-84.2320	84.6931
47.1465	-7.8584	-83.5714	83.9400
46.8931	-6.9048	-82.9000	83.1871
46.6350	-5.9652	-82.2181	82.4342
46.3722	-5.0396	-81.5259	81.6815
46.1048	-4.1280	-80.8236	80.9289
45.8327	-3.2307	-80.1115	80.1766
45.5562	-2.3476	-79.3899	79.4246
45.2750	-1.4789	-78.6589	78.6728
44.9894	-0.6246	-77.9189	77.9214
44.6993	0.2153	-77.1701	77.1704
44.4047	1.0406	-76.4127	76.4198
44.1058	1.8513	-75.6470	75.6697
43.8025	2.6473	-74.8732	74.9200
43.4948	3.4286	-74.0916	74.1709
43.1829	4.1952	-73.3024	73.4224
42.8666	4.9470	-72.5059	72.6744

Le contact sur le pignon (angle de la tête porte fraise -0.1 rad)			
Xpp	Ypp	Zpp	Rpp
85.9763	6.1880	-49.8551	50.2377
85.5434	5.6048	-49.4611	49.7776
85.1066	5.0328	-49.0637	49.3212
84.6662	4.4717	-48.6633	48.8683
84.2220	3.9215	-48.2601	48.4191
83.7743	3.3820	-47.8542	47.9735
83.3230	2.8532	-47.4458	47.5315
82.8683	2.3350	-47.0352	47.0931
82.4103	1.8271	-46.6225	46.6583
81.9489	1.3296	-46.2079	46.2270
81.4844	0.8422	-45.7916	45.7993
81.0167	0.3648	-45.3737	45.3752
80.5460	-0.1027	-44.9544	44.9545
80.0723	-0.5604	-44.5338	44.5374
79.5957	-1.0084	-44.1122	44.1237
79.1165	-1.4468	-43.6897	43.7137
78.6342	-1.8761	-43.2661	43.3068
78.1494	-2.2960	-42.8420	42.9034
77.6621	-2.7068	-42.4172	42.5035
77.1722	-3.1086	-41.9920	42.1069

Le contact sur la roue (angle de la tête porte fraise - 0.1 rad)			
Xpr	Ypr	Zpr	Rpr
48.2152	-11.8176	-86.1802	86.9867
47.9765	-10.8061	-85.5509	86.2306
47.7331	-9.8084	-84.9100	85.4746
47.4849	-8.8245	-84.2579	84.7188
47.2320	-7.8547	-83.5948	83.9630
46.9745	-6.8988	-82.9209	83.2074
46.7122	-5.9572	-82.2366	82.4521
46.4453	-5.0298	-81.5420	81.6970
46.1738	-4.1167	-80.8374	80.9422
45.8977	-3.2180	-80.1231	80.1877
45.6171	-2.3338	-79.3994	79.4336
45.3319	-1.4641	-78.6664	78.6800
45.0423	-0.6090	-77.9244	77.9268
44.7482	0.2314	-77.1737	77.1740
44.4497	1.0570	-76.4145	76.4219
44.1469	1.8679	-75.6472	75.6702
43.8396	2.6640	-74.8718	74.9192
43.5281	3.4452	-74.0888	74.1688
43.2123	4.2115	-73.2983	73.4192
42.8923	4.9628	-72.5005	72.6702

Le contact sur le pignon (angle de la tête porte fraise + 0.1 rad)			
Xpp	Ypp	Zpp	Rpp
86.4456	6.1977	-49.8129	50.1969
86.0097	5.6253	-49.4254	49.7445
85.5698	5.0638	-49.0348	49.2956
85.1260	4.5130	-48.6414	48.8503
84.6783	3.9728	-48.2452	48.4085
84.2268	3.4431	-47.8466	47.9703
83.7717	2.9239	-47.4456	47.5357
83.3129	2.4149	-47.0426	47.1045
82.8507	1.9160	-46.6376	46.6769
82.3849	1.4272	-46.2308	46.2528
81.9158	0.9482	-45.8224	45.8322
81.4434	0.4791	-45.4125	45.4150
80.9677	0.0195	-45.0013	45.0013
80.4889	-0.4305	-44.5889	44.5910
80.0070	-0.8712	-44.1756	44.1842
79.5222	-1.3027	-43.7613	43.7807
79.0345	-1.7250	-43.3463	43.3806
78.5439	-2.1384	-42.9306	42.9838
78.0506	-2.5430	-42.5144	42.5904
77.5546	-2.9388	-42.0977	42.2002

Le contact sur la roue (angle de la tête porte fraise + 0.1 rad)			
Xpr	Ypr	Zpr	Rpr
48.0531	-11.7729	-86.1089	86.9100
47.8227	-10.7664	-85.4836	86.1589
47.5875	-9.7732	-84.8466	85.4077
47.3475	-8.7935	-84.1983	84.6563
47.1029	-7.8271	-83.5390	83.9049
46.8535	-6.8745	-82.8687	83.1534
46.5993	-5.9356	-82.1878	82.4018
46.3404	-5.0105	-81.4965	81.6504
46.0769	-4.0993	-80.7950	80.8990
45.8087	-3.2022	-80.0837	80.1477
45.5359	-2.3191	-79.3626	79.3965
45.2585	-1.4502	-78.6321	78.6455
44.9765	-0.5956	-77.8925	77.8947
44.6901	0.2447	-77.1439	77.1443
44.3991	1.0705	-76.3866	76.3941
44.1037	1.8819	-75.6208	75.6442
43.8038	2.6788	-74.8468	74.8947
43.4995	3.4611	-74.0648	74.1457
43.1908	4.2287	-73.2751	73.3971
42.8777	4.9817	-72.4779	72.6489

Le contact sur le pignon (angle du pied de la machine - 0.1 rad)			
Xpp	Ypp	Zpp	Rpp
88.7621	5.0908	-50.5687	50.8243
88.3336	4.5212	-50.1601	50.3634
87.9010	3.9627	-49.7488	49.9063
87.4641	3.4154	-49.3349	49.4529
87.0232	2.8790	-48.9186	49.0033
86.5783	2.3534	-48.5003	48.5573
86.1295	1.8386	-48.0799	48.1151
85.6769	1.3343	-47.6578	47.6765
85.2204	0.8404	-47.2341	47.2416
84.7603	0.3569	-46.8090	46.8104
84.2966	-0.1165	-46.3827	46.3828
83.8294	-0.5799	-45.9552	45.9589
83.3587	-1.0334	-45.5268	45.5386
82.8847	-1.4772	-45.0977	45.1218
82.4074	-1.9114	-44.6678	44.7087
81.9269	-2.3361	-44.2375	44.2991
81.4432	-2.7516	-43.8068	43.8931
80.9566	-3.1579	-43.3758	43.4906
80.4669	-3.5552	-42.9446	43.0915
79.9744	-3.9436	-42.5134	42.6960

Le contact sur la roue (angle du pied de la machine - 0.1 rad)			
Xpr	Ypr	Zpr	Rpr
48.6619	-14.2363	-87.5796	88.7291
48.4367	-13.1910	-86.9774	87.9720
48.2068	-12.1589	-86.3629	87.2146
47.9719	-11.1403	-85.7365	86.4572
47.7321	-10.1353	-85.0982	85.6997
47.4875	-9.1441	-84.4485	84.9421
47.2381	-8.1667	-83.7875	84.1845
46.9840	-7.2031	-83.1155	83.4270
46.7251	-6.2537	-82.4327	82.6695
46.4614	-5.3183	-81.7393	81.9122
46.1931	-4.3971	-81.0357	81.1550
45.9201	-3.4903	-80.3221	80.3979
45.6425	-2.5979	-79.5988	79.6412
45.3603	-1.7199	-78.8659	78.8846
45.0735	-0.8564	-78.1237	78.1284
44.7821	-0.0076	-77.3726	77.3726
44.4863	0.8265	-76.6127	76.6171
44.1859	1.6459	-75.8442	75.8621
43.8812	2.4505	-75.0675	75.1075
43.5720	3.2403	-74.2828	74.3535

Le contact sur le pignon (angle du pied de la machine + 0.1 rad)			
Xpp	Ypp	Zpp	Rpp
84.3900	7.1452	-48.9129	49.4321
83.9489	6.5659	-48.5402	48.9822
83.5041	5.9973	-48.1640	48.5359
83.0557	5.4393	-47.7845	48.0931
82.6038	4.8918	-47.4020	47.6538
82.1486	4.3546	-47.0167	47.2180
81.6900	3.8277	-46.6287	46.7856
81.2281	3.3110	-46.2383	46.3567
80.7631	2.8043	-45.8455	45.9312
80.2950	2.3074	-45.4507	45.5092
79.8239	1.8204	-45.0538	45.0906
79.3498	1.3431	-44.6552	44.6754
78.8728	0.8754	-44.2549	44.2635
78.3930	0.4170	-43.8531	43.8551
77.9106	-0.0320	-43.4499	43.4499
77.4255	-0.4718	-43.0456	43.0481
76.9378	-0.9025	-42.6401	42.6496
76.4477	-1.3243	-42.2336	42.2544
75.9552	-1.7372	-41.8263	41.8624
75.4604	-2.1415	-41.4183	41.4736

Le contact sur la roue (angle du pied de la machine + 0.1 rad)			
Xpr	Ypr	Zpr	Rpr
47.5606	-9.6457	-84.7645	85.3116
47.3153	-8.6705	-84.1151	84.5608
47.0653	-7.7090	-83.4548	83.8101
46.8106	-6.7612	-82.7838	83.0594
46.5513	-5.8273	-82.1024	82.3089
46.2874	-4.9073	-81.4107	81.5585
46.0188	-4.0013	-80.7091	80.8082
45.7457	-3.1094	-79.9978	80.0582
45.4681	-2.2317	-79.2771	79.3085
45.1860	-1.3682	-78.5471	78.5590
44.8994	-0.5190	-77.8081	77.8099
44.6084	0.3158	-77.0604	77.0611
44.3130	1.1362	-76.3042	76.3127
44.0131	1.9421	-75.5398	75.5648
43.7090	2.7334	-74.7673	74.8173
43.4005	3.5101	-73.9871	74.0703
43.0877	4.2722	-73.1994	73.3239
42.7707	5.0196	-72.4043	72.5781
42.4495	5.7523	-71.6022	71.8329
42.1241	6.4702	-70.7933	71.0884

# REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] HENRIOT. G : Traité Théorique et pratique des engrenages. (Tome 1 :6<sup>ème</sup> édition ; Tome 2 : 5<sup>ème</sup> édition).
- [2] HENRIOT. G: Engrenages, Conception, Fabrication, Mis en ouvre. Dunod édition. Paris 1999.
- [3] STADTFELD. H. J: Handbook of bevel and hypoid gears. 1<sup>ère</sup> édition RIT. March 1993.
- [4] BEY. M: Modélisation statique des engrenages spiro-coniques par la méthode des éléments finis. Thèse de magistère - ENP - Février 1999.
- [5] ABDESSAMED. K: Géométrie des engrenages spiro-coniques et hypoïde. Thèse de magistère – Université de Batna.
- [6] RIACHE. L: Etude de la lubrification élastohydrodynamique des engrenages spiro-coniques. Thèse de magistère – ENP – juin 2000.
- [7] LELKES.M: Definition des engrenages KLINGELNBERG. Thèse de doctorat – L’institut national des sciences appliquées de Lyon - INSA 2002.
- [8] FAYDOR.L, LITVIN, ALFONSO.F, BAXTER.R, MULLINS, RON.W: Computerized design, Generation, Simulation of meshing and contact, and stress analysis of formate cut spiral bevel gear drives. NASA/CR-2003-212336, ARL-GR-525, June 2003.
- [9] FONG.Z.H, TSAY.C.B: A study on the tooth geometry and cutting machine mechanisms of spiral bevel gear. ASME journal of mechanical design, Vol 113, September 1991, pp 346 – 351.
- [10] FONG.Z.H, TSAY.C.B: The undercutting of circular-cut spiral bevel gears. ASME journal of mechanical design, Vol 114, June 1992, pp 317-325.

- [11] LITVIN.F.L, ZHANG.Y, LUNDY.M, HEINE.C: Determination of setting of a tilted head cutter for generation of hypoid and spiral bevel gears. ASME journal of mechanical design, Vol 110, December 1988, pp 495 – 500.
- [12] FONG.Z.H, TSAY.C.B: A mathematical model for the tooth geometry of circular- cut spiral bevel gears. ASME journal of mechanical design, Vol 113, June 1991, pp 174 – 181.
- [13] LITVIN.F.L, TSUNG.W.J, COY.J.J, HEINE.C: Method for generation of spiral bevel gears with conjugate gears tooth surface. ASME journal of mechanical design, Vol 109, June 1987, pp 163 – 170.
- [14] ROCHAT. F: Les engrenages coniques, Procédés, Machines et outils utilisés pour leurs fabrication. Conférence donnée le 25 janvier 1965 au club des ingénieurs et techniciens de la machine-outil.
- [15] MERIWETHER, BAXTER.L: Basic geometry and tooth contact of hypoid gears. The Gleason Work Rochester, New York ZG474977.
- [16] Gleason Work: Exact Determination of tooth surfaces for spiral bevel and hypoid gears.
- [17] LITVIN.F.L: New developments on theory of gearing. Department of mechanical engineering (m/c 251), University of Linois at Chicago, USA.
- [18] FENWICH: Méthode Gleason pour l'étude des couples hypoïdes. Edition 1971.