

6/03

République algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Ecole Nationale Polytechnique



Département de génie mécanique

Projet de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en
Génie mécanique

Thème

Modélisation d'un simulateur
de vol basée sur le modèle de
la plate forme de Stewart

Proposé par M^r : Madani

Etudié par :
Belaidi Mohammed Amokrane

Année universitaire 2002-2003

ملخص:

خصص هذا العمل لإستخراج وسائل النمذجة لمسوحة ستوروت بغرض إستعمالها لدراسة محاكي طيران بهدف إعداد نظام يسمح بتصميمها لاحقا.

قسم هذا العمل إلى ثلاثة أجزاء أساسية حسب التسلسل التالي :

- دراسة هندسية تهدف إلى تحديد النموذج الهندسي الذي يسمح بالتحكم في المسوحة، يلي ذلك تقديم طريقة رقمية لتحديد حيز العمل لهذا الإنسان الآلي المتوازي .

- دراسة حركية تهدف إلى تحديد النموذج الحركي للمسوحة وكذا السرعات الكرتيزية التي يمكن محاكاتها .

- دراسة ديناميكية تهدف إلى تحييد النموذج الديناميكي للمسوحة الذي يمكننا من الحصول على وضعية هندسية ، حركية وديناميكية مستهدفة.

كلمات مفتاحية: مسوحة ستوروت ، محاكي طيران ، حيز العمل ، نموذج هندسي ، نموذج حركي و نموذج ديناميكي.

Résumé :

Ce travail est consacré à la détermination des outils de modélisation d'une plate forme de stewart afin de l'utiliser dans l'étude et pour une éventuelle conception d'un simulateur de vol.

Il est partagé en trois parties élémentaires :

- Une étude géométrique qui a pour but la détermination du modèle géométrique qui nous permettra de commander ce manipulateur et suivra après la présentation d'une méthode numérique pour déterminer l'espace de travail du manipulateur parallèle.
- Une étude cinématique qui a pour but la détermination de modèle cinématique de la plate forme ainsi que les vitesses opérationnelles qu'elles peut simuler.
- L'étude dynamique qui a pour but la détermination du modèle dynamique de la plate forme afin de réaliser une géométrie , une cinématique et une dynamique ciblée.

Mot clé : plate forme de stewart , simulateur de vol , espace de travail , modèle géométrique , modèle cinématique , dynamique .

Abstract:

This work is devoted to the determination of the tools of modeling Stewart plats forms in order to use them in studying and for a possible design of a flight simulator.

It is divided in three elementary parts:

- A geometrical study the purpose of which is the determination of the geometrical model which will enable us to order this manipulator and will follow after with the numerical method presentation to determinate the space work of the parallel manipulator.
- A kinematic study the purpose of which is the kinematic determination of model of plat forms as operational speeds can simulate.
- Dynamic the purpose of which is the determination of the dynamic model of Stewart plat forms in order to carry out a geometry, a kinematics and a targeted dynamics

Key words : Stewart plat-form ,fly simulator, work space, geometric model , kinematics model , dynamic model.

Dédicace

*Ce travail est dédié à ma mère , mon père ;
ma sœur, mes tantes ainsi qu'à tous mes oncles
sans oublier mes cousines à toute ma famille.*

A tous ,mes amis.

A tous mes enseignants ..

A monsieur Madani .

A monsieur Belhanache

Belhadef

Tazi

A la mémoire de Malik

*Je remercie tous ceux qui de loin ou de près ont
contribué et aidé durant la période de ma
formation*

Savoir se que tout le monde sait , c'est ne rien savoir , le savoir
commence là où commence ce que tout le monde ignore , la vraie
science aussi est située au delà de la science .

Rémy de gourmont

Sommaire

Introduction	01
1. Les plates formes de Stewart.....	08
1.1. les robots parallèles.....	09
1.1.1. définition d'un robot parallèle.....	09
1.1.2. comparaison des robots parallèles aux robots série.....	10
1.1.2.1. Avantages des robots parallèles.....	10
1.1.2.2. Inconvénients des robots parallèles	11
1.1.3. classification des manipulateurs parallèles	12
1.1.4. Notation et paramétrage des éléments constituant un robots parallèles.....	13
1.1.4.1. Notation des corps et des liaisons.....	13
1.2. la plate forme de Stewart	18
1.2.1. description	18
1.2.2. classification des plates formes de Stewart	20
1.3. domaine d'application des plates formes de Stewart.....	22
1.4. conclusion.....	25
2. La modélisation géométrique d'une Plate forme de Stewart.....	26
2.1. introduction.....	27
2.2. Détermination des modèles géométriques inverse et direct.....	28
2.2.1. modèle géométrique inverse	29
Définition du <i>MGI</i>	29
Formulation mathématique du MGI.....	29
2.2.2. modèle géométrique direct.....	33
Définition du <i>MGD</i>	33
Formulation mathématique du MGD	33

2.3.Espace de travail	37
2.3.1. Etat de l'art	38
2.3.2.volume de l'espace de travail	40
2.3.3.modélisation, et représentation de l'espace de travail	42
A) La méthode CAO.....	43
B) La méthode numérique (approximative)	44
2.4.conclusion.....	48
3.La modélisation cinématique d'une plate forme de Stewart.....	49
3.1. introduction	50
3.2. la matrice jacobienne.....	50
3.2.1.Définition.....	50
3.2.2.determination de la matrice jacobienne inverse	51
3.3. Modélisation cinématique.....	53
3.3.1.Le modèle cinématique d'une plate-forme de Stewart.....	53
3.3.2.détermination des vitesses articulaires	54
3.3.3.détermination des accélérations articulaires	55
3.3.4.vitesses opérationnelles autorisées	57
3.3.5.recherche des extremums des vitesses articulaires.....	60
3.3.6.recherche des extremums des vitesses opérationnelles.....	63
3.4.Les Configurations singulières	64
3.4.1.Généralités	64
3.4.2.types de singularités	64
3.4.3.Méthodes d'analyse des singularités	67
3.4.3.1.méthode géométrique	67
3.4.3.2.méthode analytique	68
3.5.conclusion.....	70
4.La modélisation statique et dynamique D'une plate forme de Stewart	71
4.1. introduction	72
4.2.statique	72
4.2.1.recherche des efforts généralisés extrémaux.....	73
4.2.2.La raideur d'une plate forme de Stewart	75

4.3. dynamique.....	79
4.3.1.Modélisation dynamique des plates formes de Stewart	79
4.3.2.Formalisation mathématique	80
Formalisme de Lagrange.....	80
Formalisme de Newton-Euler.....	81
4.4.Dynamique de la plate-forme de Stewart	82
4.5.conclusion.....	90
conclusion	91
Bibliographie	
Annexe	

Nomenclature

A_i : le centre de l'articulation "i" proche de la nacelle exprimé dans le repère lié à la base.

A_i' : le centre de l'articulation "i" proche de la nacelle exprimé dans le repère lié à la nacelle.

B_i : le centre de l'articulation "i" proche de la base exprimé dans le repère lié à la base.

C : centre de la nacelle .

C_i : le corps "i" du mécanisme.

$C(q, \dot{q})$ vecteur des efforts de Coriolis .

F : vecteur des efforts généralisés.

g : accélération de la gravitation terrestre.

$G(q)$: vecteur des efforts gravitationnel .

I matrice d'inertie de la nacelle lié au repère de la base.

I_{ii} matrice identité de dimension i.

J matrice jacobienne

J^{-1} matrice jacobienne inverse.

J^{-T} matrice transposée de la matrice jacobienne inverse.

\dot{J}^{-T} la dérivée par rapport au temps de la matrice jacobienne inverse.

k raideur élastique d'un segment.

K la matrice de rigidité de la nacelle.

M vecteur moment généralisé.

M_G vecteur moment au centre de la nacelle.

O : origine du repère (o, x, y, z) lié à la base.

P : position du centre de la nacelle C à un instant donné.

Q : matrice de passage de R' à R .

Q_a : l'espace articulaire lié aux articulations.

Q_p : l'espace articulaire lié aux articulations passives

q : variable articulaire.

Liste des figures

Fig.0.1.simulateur de vol.....	03
Fig.0.2.simulateur de vol.....	03
Fig.0.3.schéma global de commande d'un simulateur de vol.....	04
Fig.0.4 schématisation de la structure de Pollard.....	05
Fig.0.5 Photo d'origine de la plate forme de Gough.....	06
Fig. 1.1 : Chaîne cinématique d'un robot parallèle.....	09
Fig.1.2.notation des corps et liaisons dans un manipulateur.....	13
Fig.1.3.repérage des liaison sur une chaîne.....	14
Fig.1.4.cas ou le degrés de connectivité est supérieur à deux.....	16
Fig.1.5.types d'articulations.....	19
Fig.1.6.une plate forme de Stewart.....	20
Fig.1.7.classification des plates formes de Stewart.....	21
Fig.1.8.une plate forme de Stewart dans une unité industrielle.....	22
Fig.1.9.une antenne orientée à l'aide d'une PFS.....	23
Fig.1.10.un robot parallèle qui travail sur un organe orthopédique.....	24
Fig.1.11.un simulateur de vol.....	25
Fig.2.1.chaine cinématique dans une plate forme de Stewart.....	29
Fig.2.2.changement de posture d'un manipulateur 3-RRR.....	33
Fig.2.3.Schématization d'un robot parallèle plan à 3 DDL.....	34
Fig.2.4.mode d'assemblage obtenus pour une hexapode.....	36
Fig.2.5. Variation du volume de travail en fonction de la disposition des articulations.....	41
Fig.2.6.Variation du volume de travail en fonction des débattements articulaires.....	41
Fig.2.7.le cylindre qui cerne l'espace de travail.....	42
Fig.2.8.principe de la méthode CAO.....	43
Fig.2.9.espace de travail obtenu à l'aide de la méthode CAO.....	44
Fig.2.10.modélisation de la frontière de l'espace de travail total.....	45
Fig. 2.11.Espace de travail à orientation (0,0,0).....	46
Fig.2.12.espace de travail à orientation(10,15,0).....	46
Fig.2.13.espace de travail total et sa projection horizontale.....	47
Fig.3.1.chaine cinématique d'une plate forme de Stewart.....	54

Fig.3.2.vitesses autorisées suivant les axes x et y pour une vitesse de rotation et Vz nulles..	59
Fig.3.3.vitesses autorisées suivant les axes x et z pour une vitesse de $W_x=W_z=0, V_y=0$	59
Fig.3.4.configuration singulières d'une plate forme de Stewart.....	66
Fig.3.5.vecteur de Plücker.....	67
Fig.3.6.presentation de singularité par la géométrie de Grassmann.....	68
Fig.4.1.efforts admissibles pour des moments nuls et $F_z=0$	75
Fig.4.2.distribution des efforts sur la plate forme mobile.....	82
Fig.4.3.les efforts aux actionneurs pour une accélération constante égale à 0.5g.....	88
Fig.4.4.Efforts aux actionneurs pour une translation de la nacelle suivant l'axe z.....	88
Fig.4.5.Les forces aux actionneurs pour un pivotement de la nacelle autour de l'axe Z.....	89

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Introduction

Introduction

Introduction

La survie de toute entreprise dépend de sa capacité à assurer une rénovation continue de ses produits pour s'imposer sur le marché, d'autre part et vu le coût et le danger que présentent certaines applications, il est important de se doter de mécanismes qui peuvent assurer un cadre pratique de vérification et d'analyse pour rendre crédible et confirmer ces applications. C'est dans cette perspective que sont conçus les simulateurs.

Dans le domaine de l'aéronautique, la formation des pilotes est une étape incontournable dans la vie d'une société aérienne ; néanmoins, l'entraînement de l'équipage d'un avion sur des appareils réels présente à la fois un sacrifice et un danger pour le pilote et pour les appareils qui sont excessivement chères, c'est pour cela qu'on fait appel à des systèmes appelés simulateurs de vol.

Simulateur de vol

Un simulateur est un système complexe composé de plusieurs parties qui travaillent en synchronisme pour émuler un comportement ou un phénomène naturel.

Un simulateur de vol (figure.0.1 et figure.0.2) est un robot parallèle (plate forme de Stewart) destiné à reproduire fidèlement les différents mouvements qu'effectue un avion soit sur terre ou dans l'air (crashing et tangag).

Le pilote en instruction doit ressentir les différentes accélérations fournies par la plate forme, se voir déplacer dans l'espace par l'effet des séquences vidéos et ressentir la majorité de facteurs que vit un pilote lors d'un vol, tel que les sons, le vent et de plus voir et apprécier la réponse des systèmes de commande.

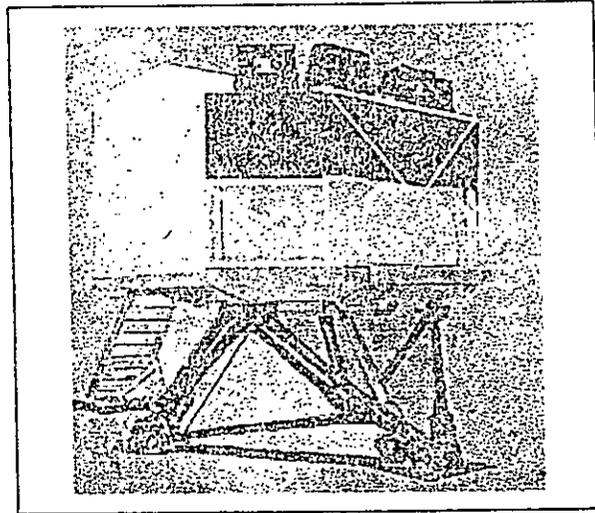


Fig.0.1.simulateurs de vol

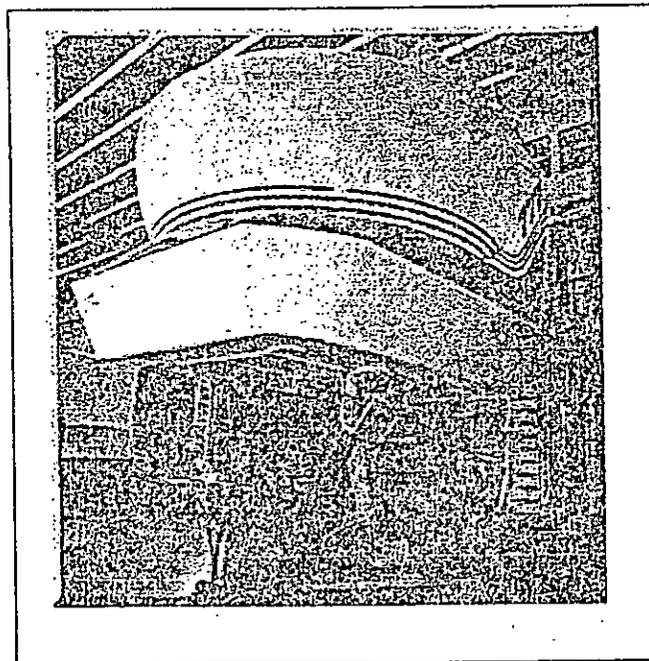


Fig.0.2.simulateur de vol

Composition d'un simulateur de vol

Le simulateur de vol est constitué de trois parties principales :

- **La partie mécanique :**

C'est un mécanisme sur lequel est placée la cabine de pilotage, il permet de générer les différents mouvements commandés par le pilote ; ce mécanisme est un robot parallèle, qui est appelé plate forme de Stewart.

Les degrés de liberté de ces systèmes sont généralement de six ; Mais parfois on peut trouver des architectures à cinq ou quatre degrés de liberté.

▪ La partie vidéographique

C'est un dispositif de génération de séquences d'images permettant au pilote de se voir déplacer dans l'espace. La génération de ce flux d'image doit être en temps réel pour pouvoir synchroniser les mouvements de la plate forme et le type d'image pour assurer une meilleure simulation.

▪ La partie commande

Elle comporte le circuit de puissance qui est généralement une station hydraulique qui assure l'alimentation des vérins et une partie informatique qui regroupe les unités de calculs et l'interface homme machine.

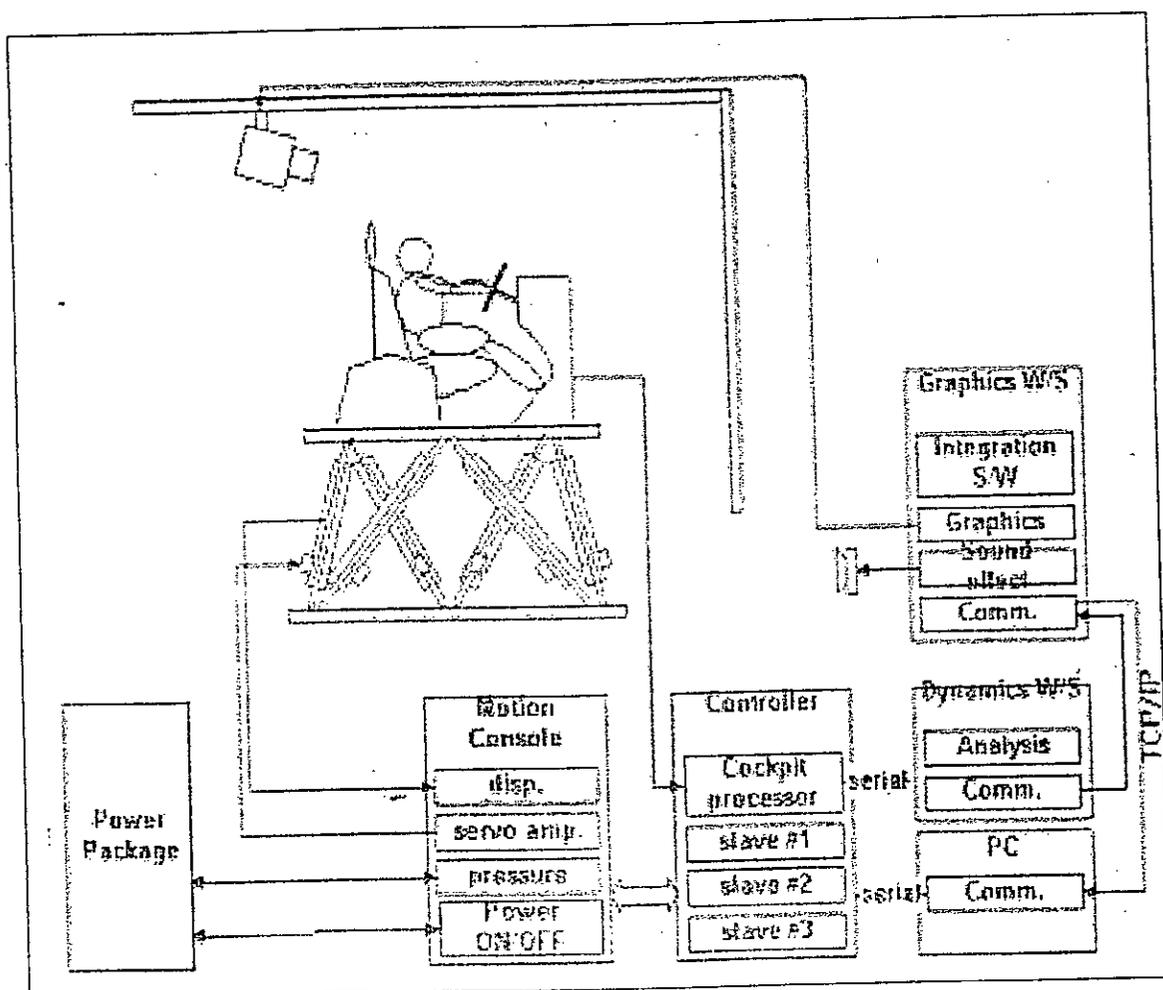


Fig.0.3. schéma global de commande d'un simulateur de vol

Les simulateurs de vol sont donc des coques de pilotages complètes comportant tous les accessoires existant sur un appareil réel. Le travail de modélisation et de conception de ces simulateurs est une tâche très délicate et regroupe plusieurs disciplines.

Dans ce travail on va se consacrer à l'étude mécanique de ces simulateurs, ce qui revient à l'étude du robot parallèle qui génère le comportement mécanique du simulateur, de ce fait tous ce qui suivra sera consacré à l'étude de la plate forme de Stewart dont on abordera l'histoire dans les lignes suivantes :

La robotique parallèle est une science très récente ; mais elle ne cesse de connaître des progrès de jour en jour, vu l'importance et l'efficacité des mécanismes qu'elle développe, elle présente un intérêt certain à l'industrie, ainsi qu'à la recherche scientifique dans le domaine de la robotique.

Les architectures parallèles sont connues depuis le moyen âge, du temps de *Léonard de Vinci*, [Luc] mais le départ réel remonte à 1938 où un ingénieur du domaine automobile dénommé Pollard dépose un brevet d'invention concernant une architecture mécanique pour peindre automatiquement les carrosseries de voitures. Il était réellement le précurseur de la robotique parallèle ; mais malheureusement le manque d'une technologie de pointe (moyen informatique et électronique) pour commander son invention l'ont contraint à l'abandonner.

Monsieur Pollard a mis au point une structure à trois chaînes cinématique que l'on nomme maintenant Tripodes, son principe assurait les mobilités d'orientations en ajoutant un poignet à trois degrés de liberté en série avec la structure parallèle c'est le système présenté par la figure.0.3. Son idée préfigure bien ce que vont faire la plupart des concepteurs de robots classiques : 3 degrés de libertés pour localiser l'extrémité du robot et 3 autres distincts pour l'orienter.

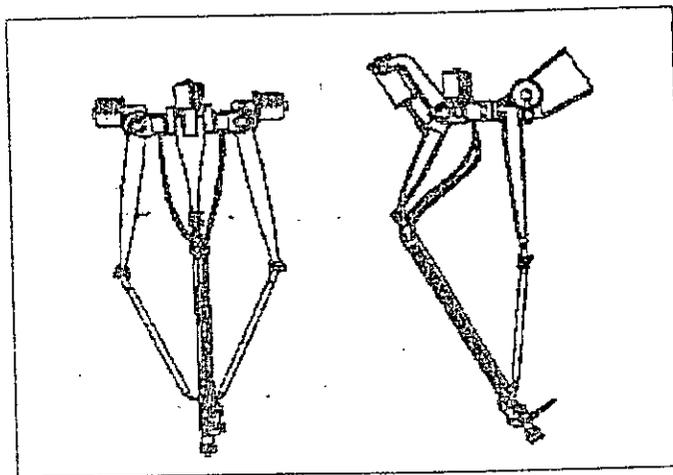


fig.0.4 schématisation de la structure de Pollard

Il a fallu attendre les années cinquante, et attendre encore *Gough*, un ingénieur mécanicien en aéronautique ; ce dernier concevra et construira un mécanisme à structure parallèle dont le but était de tester les pneus des avions à l'aide d'une plate-forme mobile.

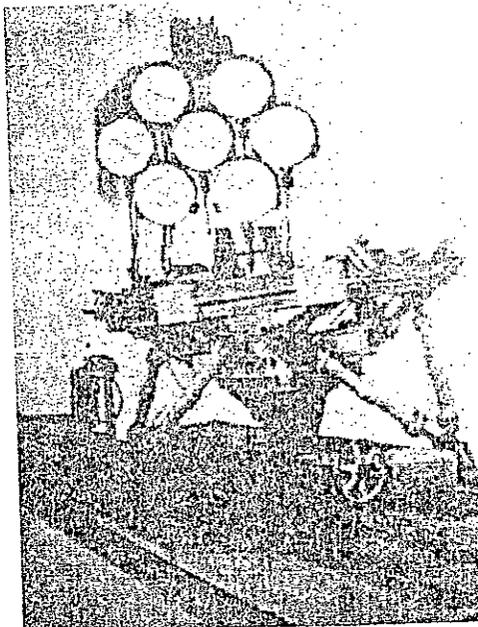


fig.0.4 Photo d'origine de la plate forme de Gough

La plate-forme mobile de ce mécanisme possède 6 degrés de liberté (les trois translations et les trois rotations de l'espace). La nacelle (partie mobile) est reliée à la base (partie fixe) à l'aide de 6 pattes identiques. Chacune de ces pattes est reliée, d'une part à la base par un joint de cardan et d'autre part à la nacelle par une liaison rotule. La longueur de chacune des pattes est modifiée à l'aide d'un vérin. Les variations par rapport à la plate-forme originale sont liées à la position des points d'ancrage des pattes sur la base et sur la nacelle.

Gough est le premier à avoir mis au point une structure à six chaînes cinématique nommée actuellement « Hexapode » voir la figure.0.4.

Le principe de Gough fut légèrement modifié, est repris en 1965 par Stewart pour réaliser un simulateur de vol à six degrés de liberté.

Les architectures à six degrés de liberté utilisées de nos jours sont des plates-formes qui combinent les travaux de Gough et de Stewart, elles sont appelées plates-formes de Gough - Stewart mais souvent appelées abusivement " plate-forme de Stewart ".

La robotique parallèle est réellement conçue pour prendre en charge certaines applications que la robotique sérielle ne peut pas satisfaire, il y a lieu de citer les domaines qui exigent une haute dynamique couplée à une haute précision, c'est de là que vient l'idée de

répartir la charge supportée par un seul bras sur plusieurs structures simples connectées entre elles par un système adéquat.

L'étude des robots parallèles généralement et des plates-formes de Stewart en particulier consiste à déterminer les différents modèles qui nous informent sur les caractéristiques géométriques, cinématiques et dynamiques de notre manipulateur.

Dans ce travail nous avons choisi de faire une étude générale sur les robots parallèles à six degrés de libertés dont la plate forme de Stewart est un cas spécifique le plus répandu ; on a par ailleurs choisi de traiter ce projet selon le plan suivant :

Le premier chapitre est considéré comme une initiation à la robotique parallèle donc il portera sur les définitions élémentaires ainsi qu'aux outils de base pour le paramétrage d'un robot parallèle et sera suivi par l'énumération des différents domaines d'applications de ces robots.

Le deuxième chapitre est consacré à l'aspect géométrique de la plate forme de Stewart dont on étudiera l'espace de travail d'un robot parallèle et l'ensemble des calculs consacrés à la modélisation géométrique directe et inverse.

Le chapitre 3 portera sur la cinématique de la plate forme. Dans cette partie on déterminera les relations entre les entités cinématique vitesses et accélérations ; par la suite rechercher les extremums de ses variables qui sont d'une importance majeure pour la conception. On s'intéressera ensuite à la notion de singularités, leurs définitions ainsi que la manière de les localisées.

Le chapitre 4 sera consacré à l'étude des relations régissant la dynamique afin d'explicitier les relations qui donnent les efforts et les moments caractérisant notre système d'étude en faisant usage des différentes formulations de la dynamique des solides (méthode de Lagrange et méthode de Newton - Euler), mais avant cela on va faire un bilan des caractéristiques statiques de la PFS pour tenir en compte les efforts et moments dans une situation stationnaire.

Concernant la programmation les programmes seront réalisés s en C++ version 5 ou en Matlab 5.3 suivant la facilité que nous offrions ces deux outils , sur un PC ; Pintium III de 533Mhz .Les graphés seront réalisés à l'aide du Matlab 5.3.

Chapitre 1

Chapitre1

Les plates formes de Stewart

1.1. les robots parallèles1.1.1. définition d'un robot parallèle▪ *Première définition*

L'association de normalisation française AFNOR : portant le code NF E 61-100 et qui concerne les définitions élémentaires en robotique ; donne à un robot parallèle la définition suivante :

Un robot parallèle est un robot comportant au moins deux corps reliés par plus d'une chaîne cinématique, en excluant les robots qui diffèrent des robots à structure série uniquement par le fait qu'ils comportent une ou plusieurs boucles formant chacune un polygone plan.

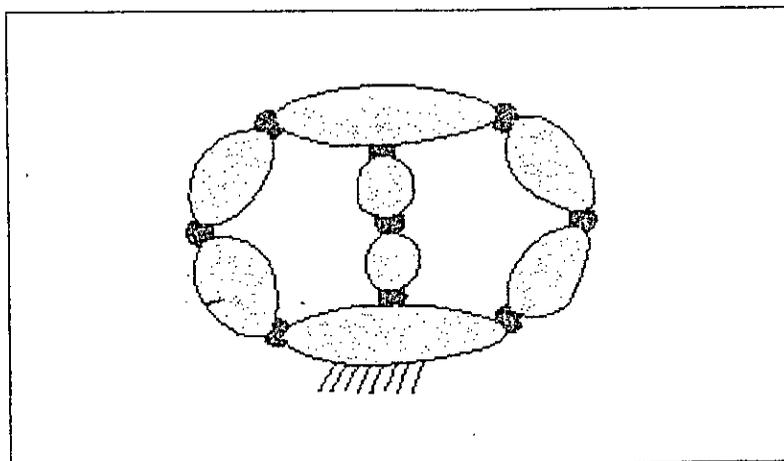


Fig. 1.1 : Chaîne cinématique d'un robot parallèle

• Deuxième définition

Jean pierre Merlet ; l'un des spécialistes les plus renommé dans le domaine de la robotique parallèle présente ces derniers comme étant des manipulateurs, en chaîne cinématique fermée, constitués d'un organe terminal (nommé nacelle) à n degrés de liberté et d'une base fixe, reliés entre eux par des chaînes cinématique indépendantes [Merlet 97].

Cette définition restreint considérablement les possibilités de conception des manipulateurs possédant des chaînes cinématique fermées. Nous pouvons par exemple remarquer que ce type de manipulateur ne possède qu'un seul organe terminal. En faisant varier le nombre et la topologie des chaînes du manipulateur, nous obtenons un grand nombre de manipulateurs parallèles. De plus, nous pouvons trouver des manipulateurs parallèles redondants pour lesquels le nombre d'actionneurs est supérieur au nombre de degrés de liberté commandés de La plate-forme mobile, ce qui permet de supprimer des configurations singulières [Kock 98].

1.1.2.comparaison des robots parallèles aux robots série :

C'est dans le but de diminuer les masses en mouvement, que certains robots comportent une ou plusieurs boucles fermées formant un polygone articulé plan. Toutes les articulations d'une boucle n'étant pas indépendantes, il est possible de choisir dans la boucle celle que l'on veut motoriser. Ceci permet de ramener les moteurs vers la base, donc de diminuer les masses en mouvement.

De plus on remarque que les manipulateurs parallèles présentent certaines avantages comparés aux robots sériels ; ainsi que quelques restrictions et inconvénients que l'on citera[Grou 02] :

1.1.2.1.Avantages des robots parallèles

- capacité de charge élevée,
- possibilité de mouvements à haute dynamique (accélérations élevées),
- rigidité mécanique élevée,
- faible masse mobile,
- fréquence propre élevée, donc peu d'erreur de répétitivité due à une oscillation incontrôlée de la structure mobile,

- Possibilité de positionner les actionneurs directement sur la base fixe ou très proche de celle-ci ; cette particularité a les conséquences positives suivantes :
- grand choix de moteurs et de réducteurs par le fait que leur masse n'intervient pas dans l'inertie du manipulateur,
- simplification importante des problèmes de liaisons entre les moteurs, les capteurs et le contrôleur (câblage plus simple et plus fiable),
- facilité de refroidissement des actionneurs, donc diminution des problèmes de précision dus aux dilatations .
- Facilité d'isoler les moteurs de l'espace de travail pour des activités en atmosphère propre ou avec risque de déflagration ou encore pour les applications nécessitant des lavages à grande eau.
- facilité d'intégration de capteurs,
- construction mécanique modulaire, simplicité de fabrication et possibilité de série par la présence de plusieurs composants identiques sur un robot,
- Effet des tolérances de fabrication sur la précision limité ; cette propriété fait des robots parallèles de bons candidats pour la micro-manipulation.

1.1.2.2. Inconvénients des robots parallèles

- volume de travail limité,
- modèles géométriques parfois difficiles à déterminer,
- pas de trajectoire « naturelle » facilitant des opérations telles que l'insertion par exemple,
- Présence de singularités qui conduisent à une perte de contrôle de la structure mobile, voir à une détérioration de la mécanique.
- Couplage fortement variable entre les différentes chaînes cinématique ; cette particularité peut compliquer le réglage ; le surdimensionnement des actionneurs est une solution pour contourner cette difficulté.

Le tableau suivant présente une comparaison entre les robots séries et les robots parallèles :

Manipulateur sériel	Manipulateur parallèle
Faible précision	Grande précision
Chaîne cinématique ouverte	Chaîne cinématique fermée
Faible rigidité	Très rigide
Faible charge transportable	Lourde charge transportable
Large Espace de travail	Espace de travail restreint
Succession de segments en série de la base vers l'effecteur	Tout segment au contact de la base et de l'effecteur

1.1.3. classification des manipulateurs parallèles :

□ Manipulateur pleinement parallèle :

C'est un mécanisme parallèle doté d'une extrémité à n DDL solidaire de la base par les biais de n chaînes cinématique indépendantes, chacune possédant un joint actionné par un moteur.

□ Manipulateur hybride parallèle :

Mécanisme parallèle doté d'une extrémité à n DDL solidaire de la base par le biais de m ($m < n$) chaînes cinématiques indépendantes, chacune possédant un ou plusieurs joints actionnés par un ou plusieurs moteurs. [Bon 01]

□ Manipulateur parallèle orientable :

Mécanisme parallèle dont les points de la plate forme mobile décrivent des trajectoires situées sur des sphères concentriques.

Dans la suite de notre étude, nous étudierons un cas spécifique des manipulateurs pleinement Parallèles : plate forme de Stewart . [Bon 01]

1.1.4. Notation et paramétrage des éléments constituant un robot parallèle

L'étude des systèmes robotisés passe tout d'abord par un cadre géométrique et algébrique qui nous permet de nommer et de repérer toutes les parties qui constituent le manipulateur, pour ensuite déterminer les relations algébriques permettant de passer d'un système de repère à un autre.

1.1.4.1. Notation des corps et des liaisons

- Notation

Les corps d'un manipulateur parallèle sont notés C_i où i est le numéro du corps considéré. La base est considérée comme un corps de départ elle est donc notée C_0 .

Les liaisons sont notées L_{ij} où i et j sont les numéros des corps en liaisons ; Elles sont représentées par des points.

Par convention, sur un schéma les points blancs indiquent les liaisons passives (non motorisées) et les noires indiquent les liaisons actives (motorisées).

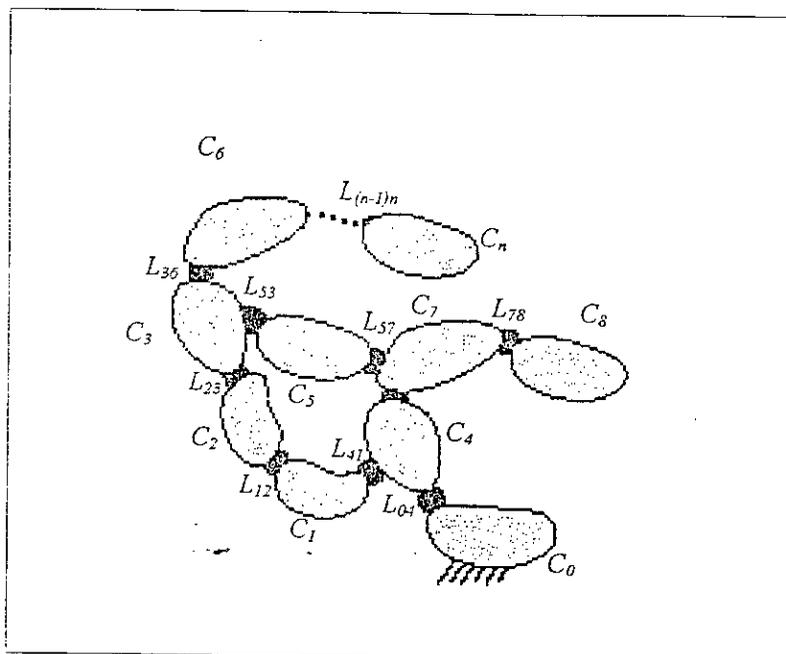


fig.1.2. notation des corps et liaisons dans un manipulateur

- Repérage

Le repérage des corps se fera par rapport aux liaisons, ainsi Chaque liaison est repérée par un référentiel R_j qui sera déterminé à l'aide des angles d'Euler.

Par ailleurs chaque liaison aura autant de repères que le nombre de degrés de liberté qui la caractérise, Ce qui veut dire que si la liaison est de degré de liberté supérieur à un (joint de cardan par exemple), un référentiel est affecté à chaque degré de liberté.

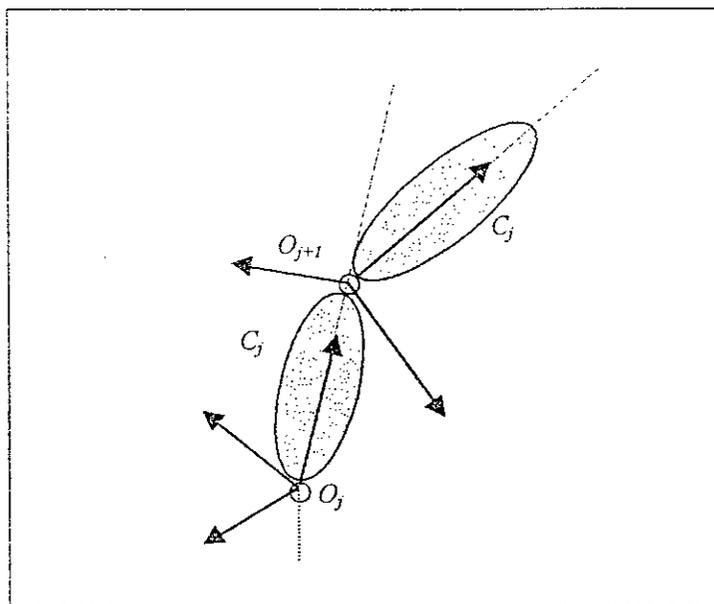


Fig.1.3.repérage des liaisons sur une chaîne

- Paramétrage

Le paramétrage permet une numérotation de corps et le repérage des liaisons d'une manière à rendre les calculs plus simples et systématiques. En robotique on utilise fréquemment un paramétrage dit de **Denavit- Hartenberg**.

Paramétrage de Denavit- Hartenberg

Ce paramétrage permet une numérotation de corps et repérage des liaisons d'une manière à rendre les calculs plus simples et systématiques.

Son principe est basé sur les règles suivantes :

- ❖ Les corps sont supposés parfaitement rigides. Ils sont reliés par des articulations considérés comme idéales (pas de jeu, pas d'élasticité), soit rotoïdes, soit prismatiques .
- ❖ Le corps associé est noté C_j .
- ❖ La variable de l'articulation j est notée q_j .
- ❖ Le repère R_j est lié au corps C_j .
- ❖ L'axe z_j du repère R_j est porté par l'axe de l'articulation j .

Les paramètres qui permettent de définir R_j par rapport aux corps antécédents portent l'indice (j).

Le repère R_j fixé au corps C_j est défini de telle sorte que :

- L'axe z_j soit porté par l'axe de l'articulation j ,
- L'axe x_j soit porté par la perpendiculaire commune aux axes z_j et z_{j+1} .

Si ces deux derniers sont parallèles ou colinéaires, le choix de x_j n'est pas unique, des considérations de symétrie ou de simplicité permettent alors un choix rationnel.

Dans le cas où le corps C_j porte plus d'un corps figure (1.4) , les corps C_i et C_k par exemple, il faut alors choisir x_j sur l'une des perpendiculaires communes à z_j . Nous suggérons de retenir de préférence celle relative à la chaîne menant à l'organe terminal principal ou bien, celle qui correspond à la chaîne la plus longue en nombre de corps.

- 1) Si x_j est la perpendiculaire commune à z_j et z_i , alors le passage de R_j à R_i s'écrit comme dans le cas des chaînes simples à l'aide des quatre paramètres (α_j , d_j , θ_j , r_j).
- 2) Si x_j est la perpendiculaire commune à z_j et z_k , deux paramètres supplémentaires doivent être introduits γ_j et ε_j qu'on définira plus tard.

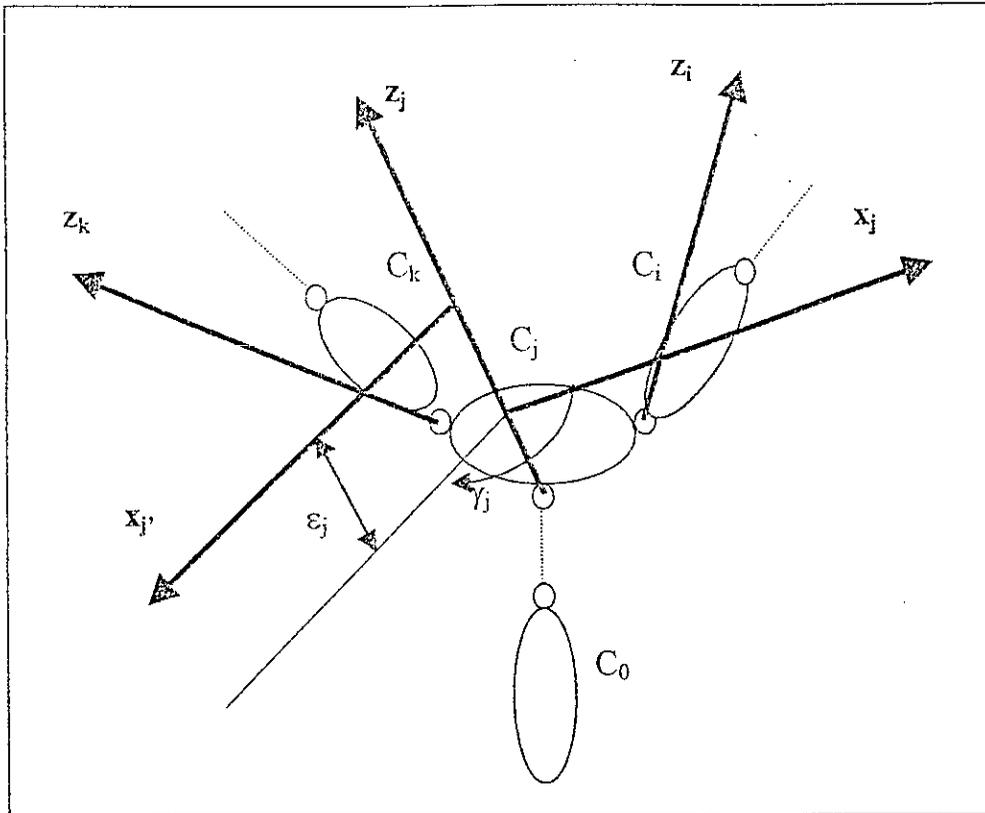


Fig.1.4.cas ou le degrés de connectivité est supérieur à deux.

Détermination de la matrice de passage

Le passage de R_{j-1} à R_j s'exprime en fonction des paramètres de Denavit-Hartenberg suivants :

- α_j : angle entre les axes z_{j-1} et z_j correspondant à une rotation autour de x_{j-1} ,
- d_j : distance entre z_{j-1} et z_j le long de x_{j-1} ,
- θ_j : angle entre les axes x_{j-1} et x_j correspondant à une rotation autour de z_j ,
- r_j : distance entre x_{j-1} et x_j le long de z_j ,
- ϵ_j : distance entre x_j et $x_{j'}$ le long de z_j ,
- γ_j : angle entre x_j et la perpendiculaire commune aux axes z_j et $z_{j'}$, notée $x_{j'}$, autour de z_j .

La variable articulaire q_j , associée à l'articulation j est soit θ_j , soit r_j , selon que cette articulation est rotoïde ou prismatique. Elle est exprimée par la relation suivante :

$$q_j = \bar{\sigma}_j \theta_j + \sigma_j r_j$$

avec :

$\sigma_j = 0$ si l'articulation est rotoïde,

$\sigma_j = 1$ si l'articulation est prismatique.

$$\bar{\sigma}_j = 1 - \sigma_j$$

La matrice de passage du repère R_{j-1} à R_j se présente d sous deux formes différentes selon que les deux paramètres γ_j et ε_j existent ou non.

- Dans le cas où le passage s'effectue directement, la matrice de passage est [] :

$${}^{i-1}\mathbf{T}_j = \text{Rot}(x, \alpha_j) \text{Trans}(x, d_j) \text{Rot}(z, \theta_j) \text{Trans}(z, r_j) \quad (1.1)$$

$${}^{i-1}\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j & 0 & d_j \\ \cos\alpha_j \sin\theta_j & \cos\alpha_j \cos\theta_j & -\sin\alpha_j & -r_j \sin\alpha_j \\ \sin\alpha_j \sin\theta_j & \sin\alpha_j \cos\theta_j & \cos\alpha_j & r_j \cos\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

- Si le passage est indirect, ce la veut dire que les paramètres γ_j et ε_j existent, alors la matrice de passage est :

$${}^{i-1}\mathbf{T}_j = \text{Rot}(z, \gamma_j) \text{Trans}(z, \varepsilon_j) \text{Rot}(x, \alpha_j) \text{Trans}(x, d_j) \text{Rot}(z, \theta_j) \text{Trans}(z, r_j) \quad (1.3)$$

$${}^{i-1}\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} C\gamma_j C\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -C\gamma_j S\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & S\gamma_j S\alpha_j & d_j C\gamma_j + r_j S\gamma_j S\alpha_j \\ S\gamma_j C\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -S\gamma_j S\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & -C\gamma_j S\alpha_j & d_j S\gamma_j - r_j C\gamma_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C & r_j C\alpha_j + \varepsilon_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

1.2. la plate forme de Stewart

1.2.1. description

la plate forme de Stewart est un manipulateur parallèle à six degrés de liberté, constituée de quatre parties fondamentales qui sont :

▪ La base

C'est un corps fixe considéré comme un socle et qui supporte les autres éléments de la plate forme ; pratiquement elle est inactive mais d'une considérable importance pour l'ensemble de la structure (surtout on ce qui concerne la rigidité). Généralement la base n'a pas de forme géométrique standard , elle est souvent triangulaire ou hexagonale.

Il est à signaler que les points d'angles des polygones constituant la base sont notés B_i où i est l'indice de l'articulation et de la liaison correspondante.

▪ Les segments

C'est les éléments qui permettent d'obtenir les mouvements de la plate forme ; ils sont au nombre de six ; chaque segment se décompose en deux corps. Ces segments sont des vérins (généralement hydraulique) prismatique appuyés sur des liaisons rotules pour satisfaire à la fois les mouvements de rotation et de translation ou simplement à verrou (translation et rotation).

▪ Les articulations

Les chaînes cinématiques ouvertes sont habituellement décrites par l'ordre d'apparition de leur joints qui sont aussi appelés des articulations, notées de la façon suivante :

- P : Prismatique.
- R : Rotoïde.
- S : Rotule.
- H : vis ou glissière hélicoïdale.

On utilise souvent le symbole U ou C pour désigner un cardan (joint rotoïde à 2 DDL, joint universel). Comme il est possible de représenter un cardan par (RR) .

On note qu'une articulation est actionnée (motorisée) en soulignant la lettre correspondante (i.e., \underline{P} or \underline{R}).

Les chaînes cinématique sérielles d'une plate forme de Gough -Stewart sont du type $(RR)\underline{PS}$.

Les mécanismes parallèles avec des chaînes cinématique identiques sont notés $n-JJJJ$ où n est le nombre de chaînes cinématique et $JJJJ$ décrit le type de chaîne cinématique dont la dernière lettre précise l'articulation rattachée à la plate forme mobile.

Puisque la connaissance du type de chaînes et du nombre d'actionneurs ne nous permet pas de déterminer le nombre de DDL du mécanisme final, celui-ci doit être précisé.

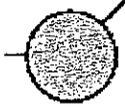
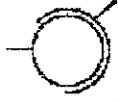
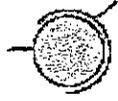
Nom	Schéma de l'articulation	
Pivot ou rotoïde		non motorisée R
		motorisée \underline{R}
Prismatique		non motorisée P
		motorisée \underline{P}
Sphérique		non motorisée S
		motorisée \underline{S}

fig. 1.5. types d'articulations

▪ **La nacelle**

C'est l'organe mobile de la plate forme ; elle est le support d'un effecteur qui est destiné à une application bien déterminée (antenne ; cabine de pilotage etc..) ; comme la base, la nacelle n'a pas de forme standard mais toujours est-il ; on la trouve dans la majorité des cas soit hexagonale (régulière ou non) soit triangulaire.

Il est à signaler que les points d'angles des polygones constituant la nacelle sont notés A_i , où i est l'indice de l'articulation et de la liaison correspondante.

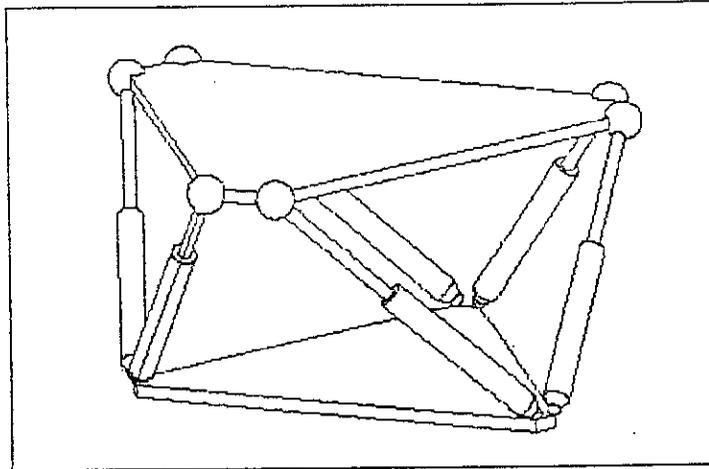


Fig.1.6.une plate forme de Stewart

1.2.2.classification des plates formes de Stewart

Les architectures de Stewart sont classées suivant leurs formes ; plus précisément, selon la géométrie de la base et de la nacelle . Généralement on trouve des PFS (plate forme de Stewart) à base et nacelle triangulaire ou base hexagonale et nacelle triangulaire ou l'inverse soit une forme hexagonale pour la nacelle et triangulaire pour la base; toutes ces formes sont à géométrie régulière, mais il est toute fois possible d'être en face de cas à géométrie irrégulière.

Dans la littérature, la classification de ces plates formes est distinguée pour celles à géométrie régulière, les plus répandues sont :

- ✦ **SSM** : appellation qui vient de l'abréviation de **Simplified Symetric Manipulator** , ces manipulateurs sont à base et nacelle hexagonale figure 1.7.e.
- ✦ **MSSM** : Minimal Simplified Symétric Manipulator, la base et la nacelle sont triangulaires figure 1.7.b,c,d,f,g.
- ✦ **TSSM** : Triangular Simplified Symetric Manipulator, nacelle triangulaire et base hexagonale figure 1.7.a.

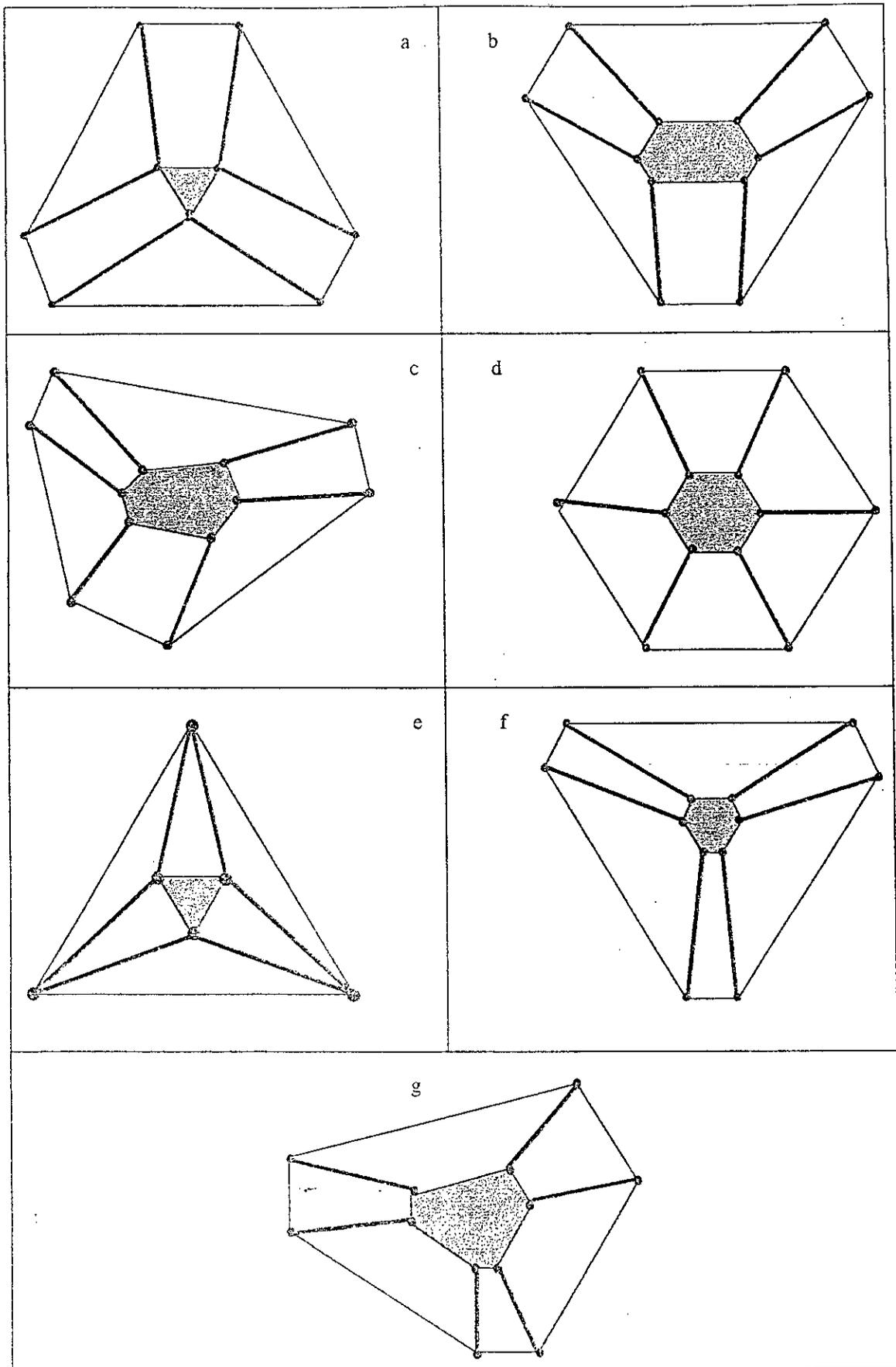


Fig. 1.7. classification des plates formes de Stewart

1.3. domaine d'application des plates formes de Stewart

Comme toute technique efficace, les robots de Stewart sont largement utilisés dans différents milieux industriels et technologiques ; cela est dû à leur stabilité, précision et la haute dynamique qu'ils assurent et qui suscitent un intérêt pour beaucoup de disciplines dont :

← Industrie

L'industrie de haute précision est l'un des domaines qui a bénéficié le plus de l'apport des architectures parallèles en générale est des PFS en particulier. En usinage, la plate forme de Stewart est utilisée comme support pour des machines outils qui en exploitant la précision du robot nous permettent de fabriquer des pièces de hautes qualités surtout par le biais de la technique de suivi de trajectoire.

Comme il est fréquent de trouver les PFS dans les chaînes de montages, pour peindre les carrosseries des véhicules et pour le soudage des structures.

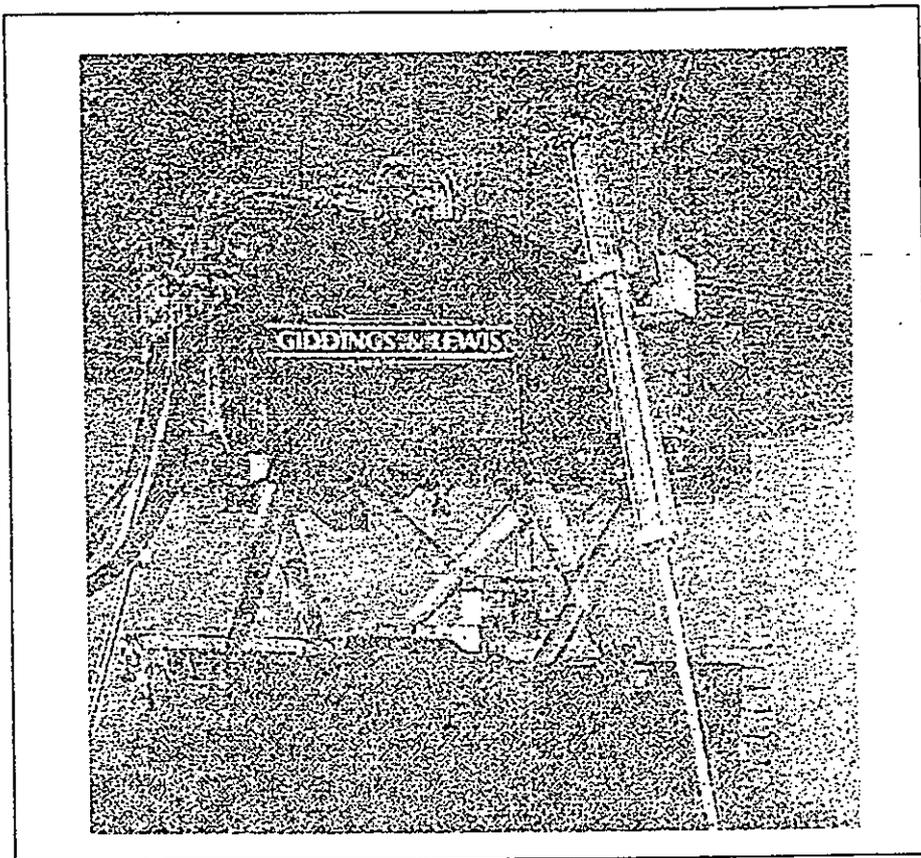


Fig.1.8.une plate forme de Stewart dans une unité industrielle

♦ Médecine

Les manipulateurs parallèles ont donné l'occasion aux médecins de perfectionner certaines opérations orthopédiques et d'éliminer les erreurs humaines de manque de précision dû aux vibrations et la faiblesse.

D'autre part la fabrication des prothèses a connu une nette amélioration depuis le recours à l'usage des PFS.

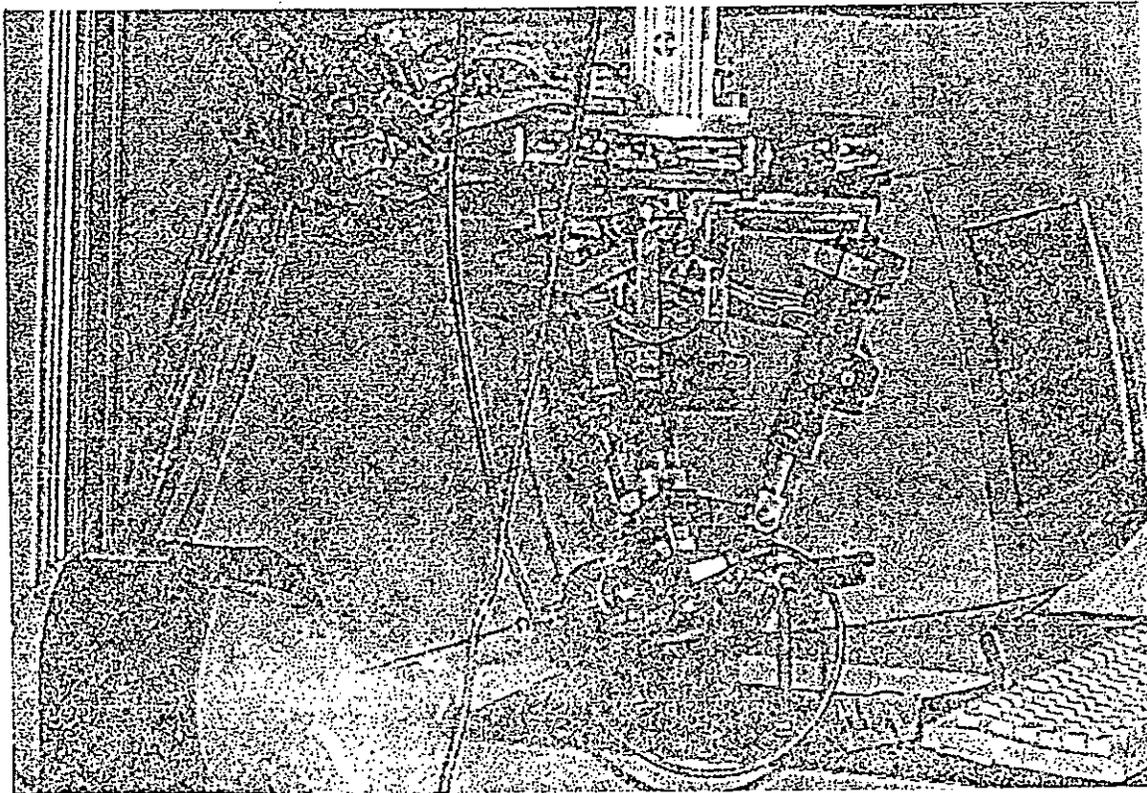


Fig.1.10.un robot parallèle qui travail sur un organe orthopédique

♦ Militaire

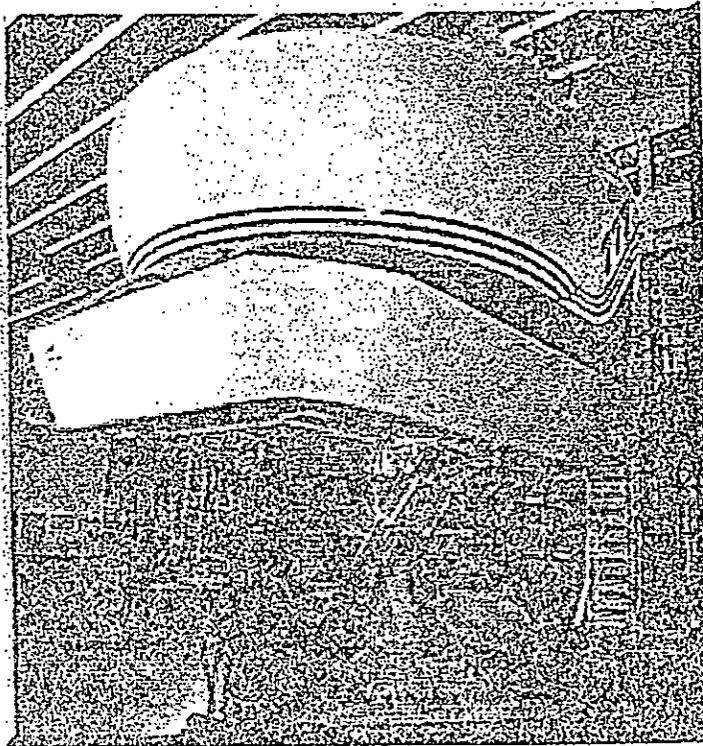
Dans un souci d'amélioration des performances des armes de tirs et afin d'assurer une rigidité de plus et une meilleure précision plusieurs armes de tirs (obusiers) utilisent actuellement des manipulateurs parallèles comme support de tirs et d'orientation.

◆ Aéronautique

Dans cette discipline deux opérations élémentaires nécessitent l'utilisation des robots de Stewart :

La première utilisation est la formation des pilotes, sur simulateurs de vols qui sont comme déjà dit rien d'autres que des chambres équipées fixées sur la nacelle de la PFS qui a pour rôle de simuler des vitesses et des accélérations, comme c'est le cas dans un vol réel.

La deuxième utilisation concerne le test de l'usure des roues d'avions.



1.11. un simulateur de vol

1.4. conclusion

Les manipulateurs parallèles en général et les plates formes de Stewart en particulier présentent un grand intérêt pour de nombreux domaines, c'est dans cette perspective que leur étude s'avère intéressante, dans les chapitres qui suivent on va expliciter d'une manière détaillée les différentes caractéristiques et les modèles d'études d'une PFS.

Chapitre 2

Chapitre 2

La modélisation géométrique d'une Plate forme de Stewart

2.1. introduction

La modélisation géométrique d'une plate forme de Stewart ou de n'importe quel manipulateur consiste à trouver les relations qui lient les positions et les orientations de la nacelle d'une part et les variables articulaires d'une autre part ; de se fait on détermine deux formes de modélisations la première est dite modélisation directe et l'autre indirecte.

Dans cette partie nous ferons lumière sur les modèles géométrique inverse et directe, et on mettra en évidence les difficultés liées au sens direct de la modélisation ainsi que l'ensemble des techniques analytiques qui permettent de dépasser cet obstacle, après quoi la résolution des modèles géométriques nous permettrons de déterminer les modes d'assemblages des PFS.

En second lieu, on se penchera sur l'espace de travail d'une PFS, ses caractéristiques et les méthodes de calcul utilisées pour le déterminer.

Pour entamer se chapitre il est important de rappeler quelques notions :

- **Configuration articulaire**

Nous appellerons *configuration articulaire* q d'un manipulateur l'ensemble des n coordonnées généralisés, liées aux articulations motorisées, notées $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$.

- **Configuration de la plate-forme mobile**

Nous appellerons *configuration de la plate-forme mobile* X d'un manipulateur, l'ensemble des m coordonnées généralisées, notées X_1, \dots, X_m , permettant de définir la position et l'orientation de la plate-forme mobile, tel que. $X = [X_1, X_2, \dots, X_m]$.

▪ Configuration d'un manipulateur

Nous appellerons *configuration* $[X, q]$ d'un manipulateur, l'ensemble des $n + m$ coordonnées généralisées, notées $[q_1, q_2, \dots, q_n, X_1, X_2, \dots, X_m]$.

Ainsi, pour les manipulateurs pleinement parallèles et en dehors de toute configuration singulière, une configuration $[X, q]$ permet de définir la situation de tous les solides le constituant, c'est-à-dire la configuration d'un manipulateur.

▪ Espace articulaire et espace opérationnel

Toute relation entre les variables articulaires motorisées et les sorties (X), c'est-à-dire les configurations de la plate-forme mobile d'un manipulateur peut se ramener à la forme suivante :

$$F(X, q) = 0 \quad (2.1)$$

On définira [Baron 98] les espaces suivant :

- Q_n : l'espace articulaire lié aux articulations motorisées où n désigne le nombre d'articulations motorisées.
- Q_r : l'espace articulaire lié aux articulations passives où r désigne le nombre d'articulations passives, ou non motorisées.
- Θ : l'espace opérationnel lié aux configurations de la plate-forme mobile.
- χ : l'espace des configurations du manipulateur défini sur le produit cartésien de $Q_n \times \Theta$.

2.2. Détermination des modèles géométriques inverse et direct :

C'est la partie la plus importante dans l'étude d'un manipulateur car dans toute application on se trouve confronté aux deux situations, à savoir connaître l'ensemble des configurations articulaires permettant de placer la plate-forme du manipulateur dans une configuration voulue qu'est le modèle géométrique inverse, ou bien trouver l'ensemble des configurations de la plate-forme mobile du manipulateur en fonction d'une configuration articulaire donnée, qu'est le modèle géométrique direct.

2.2.1. modèle géométrique inverse

pour commander en position et en orientation un manipulateur parallèle on a toujours recours à étudier le modèle géométrique inverse MGI.

le MGI des robots parallèles est très facile à déterminer et à résoudre en comparaison aux même modèle pour des robots séries

□ Définition du MGI :

Le *MGI* est une application de l'espace des configurations Θ dans l'espace opérationnel χ tel que

$$\begin{aligned} MGI : \chi &\mapsto \Theta \\ MGI(x \in \chi) &\rightarrow q \in \Theta \end{aligned} \quad (2.2)$$

□ Formulation mathématique du MGI

Il est question donc de déterminer la longueur des vérins pour une position donnée de la nacelle ; comme on sait que les chaînes cinématique d'une PFS sont identiques on peut donc indiquer par un paramètre i une chaîne quelconque figure (2.1) puis généraliser pour les autres.

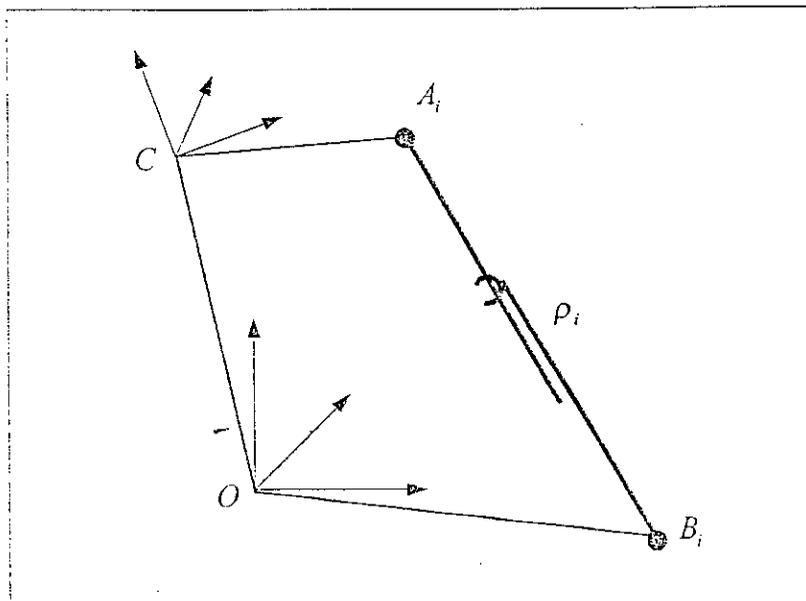


fig.2.1. chaîne cinématique dans une plate forme de Stewart

Sous forme vectorielle on peut écrire :

$$\mathbf{OB}_i + B_i \mathbf{A}_i = \mathbf{OC} + C \mathbf{A}_i \quad (2.3)$$

d'autre part on a :

$$\mathbf{OB}_i + \rho_i \mathbf{u} = \mathbf{OC} + Q \cdot C \mathbf{A}'_i \quad (2.4)$$

Où \mathbf{u} est le vecteur unitaire $\frac{BA}{\|BA\|}$.

Et Q étant la matrice de passage du repère R lié à la base à R' lié à la nacelle.

l'expression de ρ_i est donc donnée par :

$$\rho_i \mathbf{u} = \mathbf{OC} + Q C \mathbf{A}'_i - \mathbf{OB}_i$$

la valeur de ρ_i est donc la norme de la somme vectorielle du second membre :

$$\rho_i = \|\mathbf{OC} + Q C \mathbf{A}'_i - \mathbf{OB}_i\| \quad (2.5)$$

détermination de la matrice de passage

soit les angles d'Euler associés aux repères R , et R' liés respectivement à la base et la nacelle tel que :

θ la rotation autour de \bar{x} .

ϕ la rotation autour de y_2 .

ψ la rotation autour de x_3 .

la matrice Q s'exprime comme suit :

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Les résultat obtenus pour différentes valeurs de la position et de l'orientation de la nacelle sont inscrits sur le tableau suivant :

x (m)	y (m)	Z (m)	θ (°)	ψ (°)	ϕ (°)	ρ (m)
<u>0.29</u>	<u>0.85</u>	<u>0.70</u>	<u>70</u>	<u>70</u>	<u>70</u>	[0.6869 1.2871 0.9215 0.4578 1.4341 1.2294]
<u>0.43</u>	<u>0.68</u>	<u>1.40</u>	<u>45</u>	<u>58</u>	<u>71</u>	[0.6620 1.3892 1.0585 0.4845 1.6107 1.4101]
<u>0.0</u>	<u>0.0</u>	<u>0.70</u>	<u>70</u>	<u>0.0</u>	<u>0.0</u>	[1.3567 1.2126 0.8446 0.8446 1.2126 1.3567]
<u>0.0</u>	<u>0.0</u>	<u>1.70</u>	<u>0.0</u>	<u>0.0</u>	<u>65</u>	[1.0789 1.6270 1.0699 1.0699 1.6270 1.0789]
<u>0.70</u>	<u>0.0</u>	<u>0.70</u>	<u>45</u>	<u>0.0</u>	<u>45</u>	[0.7592 1.9630 1.1501 1.0040 2.4935 1.8042]

Changement de posture

Les différentes *postures des jambes* d'un manipulateur parallèle sont dues à l'existence de plusieurs solutions au modèle géométrique inverse. Nous associons ainsi plusieurs postures pour la même configuration de la plate-forme mobile du manipulateur. Un changement de posture revient à changer de solution du modèle géométrique inverse [Chablat 98].

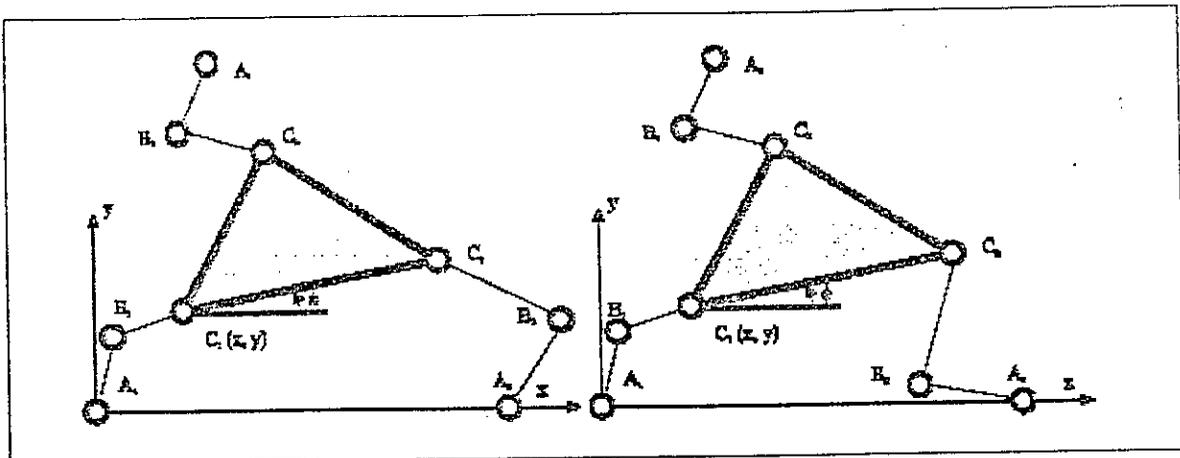


fig.2.2.Changement de posture d'un manipulateur 3-RRR

2.2.2.modèle géométrique direct

□ Définition du MGD :

Le *MGD* est une application de l'espace opérationnel χ dans l'espace des configurations Θ tel que :

$$MGD : \Theta \mapsto \chi \quad (2.8)$$

$$MGD(q \in \Theta) \rightarrow (x \in \chi)$$

□ Formulation mathématique du MGD

La résolution du MGD des manipulateurs pleinement parallèles est un problème complexe. Le problème qui se pose est que pour une configuration articulaire connue (longueurs de vérins connus), correspondent plusieurs postures de la nacelle d'après les résultats obtenus par Ronga et Dietmaier il existe 40 solutions différentes pour le modèle géométrique d'une plate forme de Stewart.

La résolution analytique du MGD est très délicate ; elle peut être même impossible. pour cette raison beaucoup de travaux de recherche basés sur des méthodes numériques sont menés pour :

- ♣ La recherche du nombre maximal de solutions réelles.
- ♣ La recherche rapide d'une solution à partir d'une configuration connue.

Pour des manipulateurs particuliers, et à partir du polynôme caractéristique issu du système d'équations obtenu pour la résolution du modèle géométrique inverse, il est possible de connaître le nombre de solution du modèle géométrique direct. Ainsi, pour le manipulateur 3-RPR, Gosselin propose une méthode dite méthode polynomiale pour la résolution du MGD [Gos 90] elle consiste à ramener la résolution d'un système d'équation à la résolution d'une seule équation polynomiale mono-variable. Cette méthode est faite pour la première fois par Nanua et Waldron [Merlet97] puis adaptée et améliorée par Gosselin.

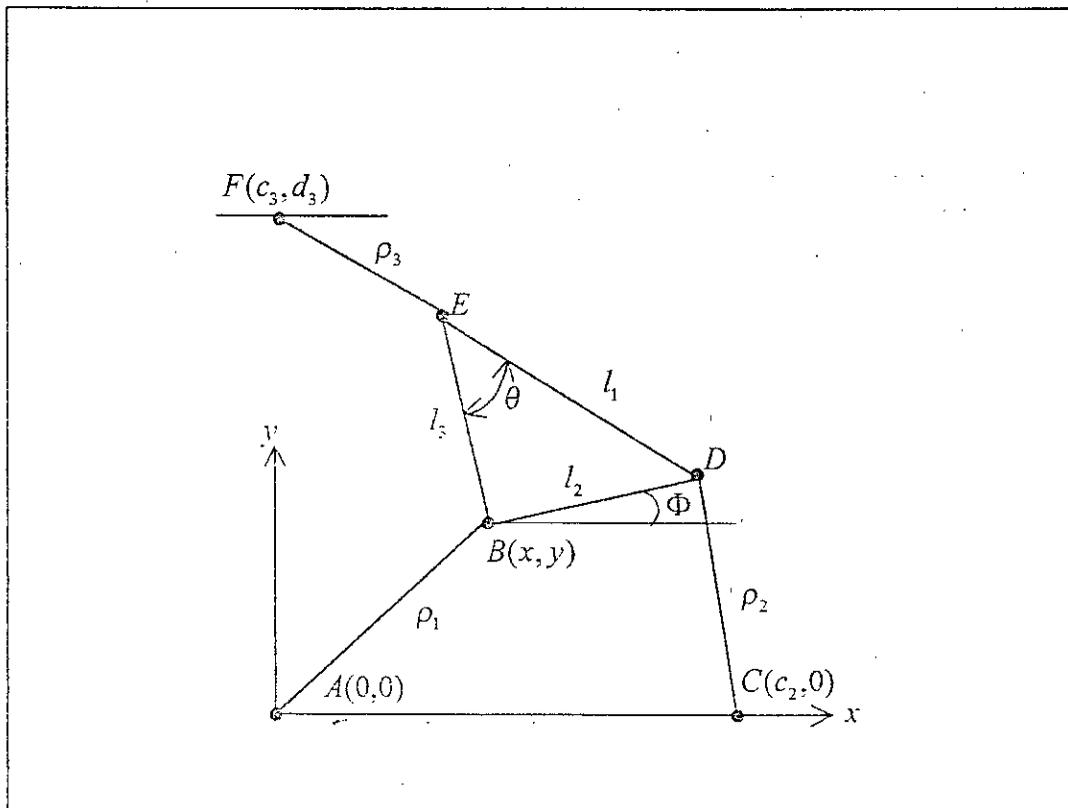


fig.2.3.Schématization d'un robot parallèle plan à 3 DDL

Pour un manipulateur tripode plan on peut écrire :

$$\rho^2_1 = x^2 + y^2$$

$$\rho^2_2 = (x + l_2 \cos \Phi - c_2)^2 + (y + l_2 \sin \Phi)^2$$

$$\rho^2_3 = (x + l_3 \cos(\Phi + \theta) - c_3)^2 + (y + l_3 \sin \Phi - d_3)^2$$

Le développement de ces trois équations nous mène au système suivant :

$$\rho^2_1 = x^2 + y^2$$

$$\rho^2_2 = x^2 + y^2 + Rx + Sy + Q$$

$$\rho^2_3 = x^2 + y^2 + Ux + Vy + W$$

en développant ce système d'équation on obtient

$$x = -(SA - VB) / (RV - SU)$$

$$y = (RA - UB) / (RV - SU)$$

avec :

$$A = \rho^2_3 - \rho^2_1 - W \quad B = \rho^2_2 - \rho^2_1 - Q$$

$$(SA - VB)^2 + (RA - UB)^2 - \rho^2_1 (RV - SU)^2 = 0$$

cette équation ne dépend que de la variable angulaire Φ , et en exprimant le cosinus et le sinus de cette variable comme suite :

$$t = \tan\left(\frac{\Phi}{2}\right) \quad \cos(\Phi) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin(\Phi) = \frac{2t}{1+t^2}$$

on obtient un polynôme de degré 6 en t .

$$C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + C_4 t^4 + C_5 t^5 + C_6 t^6 = 0$$

Les constantes c sont dépendantes des paramètres de formes de la nacelle et de sa position.

La résolution de ce polynôme nous donne dans certains cas six racines ; pour chaque solution t on peut déduire Φ donc une solution du MGD.

Changement de mode d'assemblage

Les différents *modes d'assemblage* d'un manipulateur parallèle sont dus à l'existence de plusieurs solutions au modèle géométrique direct. Il est ainsi possible d'associer plusieurs modes d'assemblage pour les mêmes configurations articulaires. Un changement de mode d'assemblage revient à changer de solution du modèle géométrique direct [chabiat 98] .

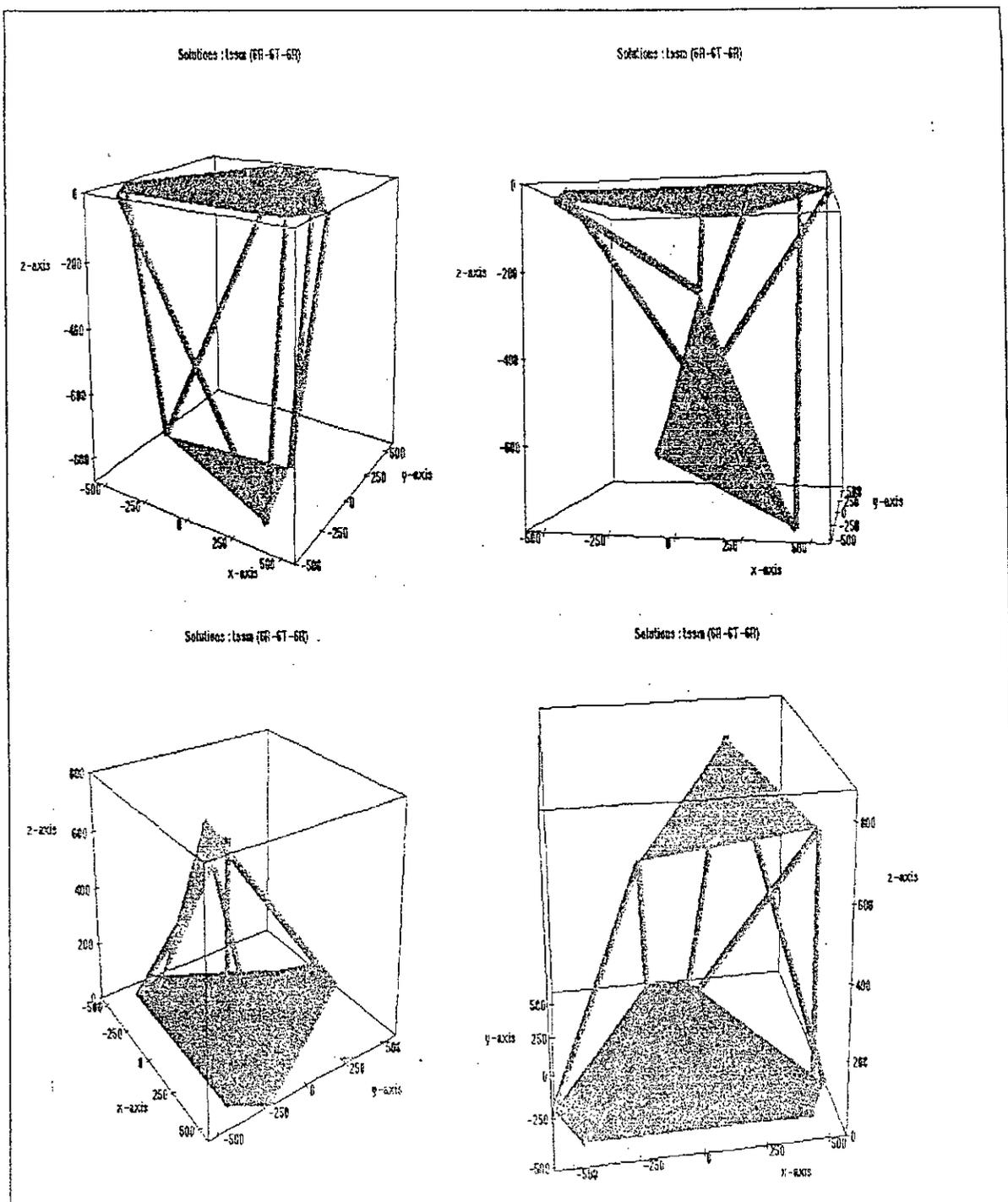


fig.2.4.mode d'assemblage obtenus pour une hexapode

2.3.Espace de travail :

L'espace de travail est défini comme étant l'ensemble des configurations accessibles de la plate-forme mobile, Il se caractérise par l'ensemble des positions et orientations que peut atteindre l'organe terminal (nacelle).

Pour les manipulateurs parallèles, la détermination de l'espace de travail total est très difficile est coûteuse en matière temps , pour cette raison que les chercheurs dans ce domaine en choisi de subdiviser l'espace de travail en plusieurs types dont les plus répandus **Bon01** [Merlet 93] sont :

➤ Espace de travail complet :

Il est parfois noté espace de travail total il représente l'ensemble de tous les points que peut atteindre la nacelle, exprimées en entité à six dimensions, il est symbolisé W_T .

➤ Sous-espace de travail :

Un sous-ensemble de l'espace de travail complet.

➤ Espace de travail à orientation constante :

L'ensemble de toutes les positions que peut atteindre la nacelle avec une orientation bien déterminée, fixe.

Cette espace est noté : W_{θ_0} *telque* θ_0 *est l'orientation fixe*

➤ Espace de travail en orientation :

L'ensemble de toutes les orientations atteignables quand la position de *la nacelle* est fixe. Il est noté W_θ

➤ Espace de travail maximal :

L'ensemble des positions de la nacelle qui peuvent être atteintes avec au moins une orientation de la plate-forme mobile.

Il est noté W_{max}

➤ Espace dextre :

L'ensemble des positions de la plate forme mobile pour lesquelles toutes les orientations sont permises. il est noté W_D

2.3.1. Etat de l'art

La détermination de l'espace de travail est une étape importante et critique dans la conception ou l'étude générale d'un manipulateur parallèle, la difficulté ainsi que les problèmes rencontrés dans l'étude de l'espace de travail total d'une PFS ont contraint les roboticiens à axer leurs travaux sur le cas où l'orientation de l'organe terminal est fixe donc à l'étude de l'espace de travail à orientation fixe. mais en contre partie plusieurs articles ont été consacrés à l'étude des autres espaces de travail d'une manière globale ; ont utilisant Pour les calculer les trois méthodes suivantes [Merlet 93].

- ▶ Méthode géométrique.
- ▶ Méthode algébrique.
- ▶ Méthode numérique (discrétisation).

Les méthodes géométriques permettent de calculer rapidement la frontière de l'espace de travail. Elles peuvent intégrer les contraintes liées aux limites articulaires et des collisions entre segments. Dans le cas des manipulateurs plans ou spatiaux, il est possible de trouver la frontière de l'espace de travail, pour une orientation et une hauteur donnée [Merlet 97].

Cependant, la reconstruction de l'espace de travail totale est difficile. Cette méthode est le plus souvent utilisée pour calculer des espaces de travail de manipulateurs dont les articulations motorisées sont des articulations prismatiques. Nous utilisons cette méthode pour le calcul de l'espace de travail du manipulateur pleinement parallèle RR-RRR.

Les méthodes algébriques sont plus difficiles à appliquer car elles augmentent la dimension du problème en introduisant des variables supplémentaires. Elles consistent à résoudre un problème d'optimisation en introduisant des pénalités (contraintes) aux frontières [Chablat 98] tels que:

- ⊗ Les limitations sur les coordonnées articulaires : les segments ont une longueur minimum et une longueur maximum.
- ⊗ Les butées mécaniques sur les articulations passives : (joint de Cardan et rotule), d'une autre façon les limites technologiques imposées par les articulations passives nommées débattements articulaires.
- ⊗ Les collisions entre segments.

D'un point de vue analytique les équations d'écrivant ces contraintes sont complexes, de type inégalités, et la détermination des bornes pour la manipulation de ces équations semi-algébriques; semble difficile, même avec nos hypothèses simplificatrices.

La traduction de ces contraintes en langages formelles peut être sous la forme suivante :

Limites sur les vérins (segments) :

Chaque vérin est caractérisé par deux valeurs limites

$$\rho_{min} \leq \rho_i \leq \rho_{max}$$

Les débattements articulaires :

A une posture donnée cette variable peut être définie comme étant l'angle entre l'axe de l'articulation et la droite définie par le segment considéré.

Pour les articulations A_i sur la nacelle On a le modèle suivant :

$$\cos^{-1}(\mathbf{u}_{A_i} \cdot \mathbf{u}_i) \leq \alpha_{A_i}$$

Pour les articulations B_i sur la base On a :

$$\cos^{-1}(\mathbf{u}_{B_i} \cdot \mathbf{u}_i) \leq \alpha_{B_i}$$

où α_{A_i} et α_{B_i} sont respectivement les plages de variations des articulations sur la nacelle et sur la base.

collisions entre segments :

Les segments sont considérés comme des cylindres de rayon r . L'intersection entre deux segments est testée en calculant la distance d entre eux. Cette contrainte est modélisée par l'inéquation suivante :

$$distance(B_i A_i, B_j A_j) \geq d, i \neq j$$

La méthode numérique utilise le modèle géométrique direct et inverse pour calculer l'ensemble des configurations que le manipulateur peut atteindre. Ces données sont enregistrées dans une structure hiérarchique.

L'approche numérique est cependant lourde en temps de calcul et nécessite une implantation soignée. De plus une représentation graphique obtenue à partir de cette méthode est peu satisfaisante car elle ne fournit aucune information sur la géométrie de la frontière de l'espace de travail. Pour la même raison le stockage des résultats nécessite une place mémoire importante et le calcul de certaines caractéristiques de l'espace de travail (volume, facteur de forme) est délicat avec ce type de données[Merlet 97]

2.3.2.volume de l'espace de travail :

La notion du volume pour un espace de travail nous informe sur l'enceinte du mouvement du manipulateur d'une manière quantitative.

le volume de l'espace de travail est influencé par plusieurs paramètres:

1. La course des vérins :

Par la course des vérins on sous-entend la différence entre la longueur maximale et minimale du vérin.

D'après Merlet [Merlet 97] le volume de l'espace de travail est proportionnel au cube de la course des vérins.

2. la géométrie de la base et de la nacelle :

Le volume est maximal pour des formes identiques de la nacelle et de la base ; il est minimal pour des formes géométriques où la nacelle est trop petite par rapport à la base ; il est très acceptable dans le cas contraire (nacelle plus large que la base)[Mas93].

3. localisation et débattement articulaire :

Le volume de l'espace de travail est influencé par la nature des articulations, il est aussi large que l'ouverture des articulations est large, mais par contre il est peu influencé par le positionnement de ses articulations.

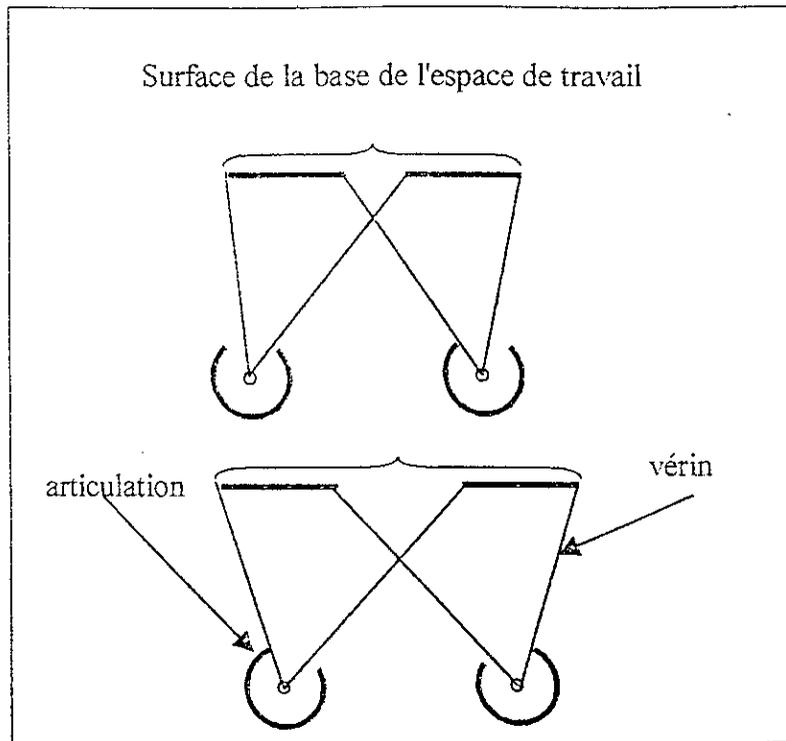
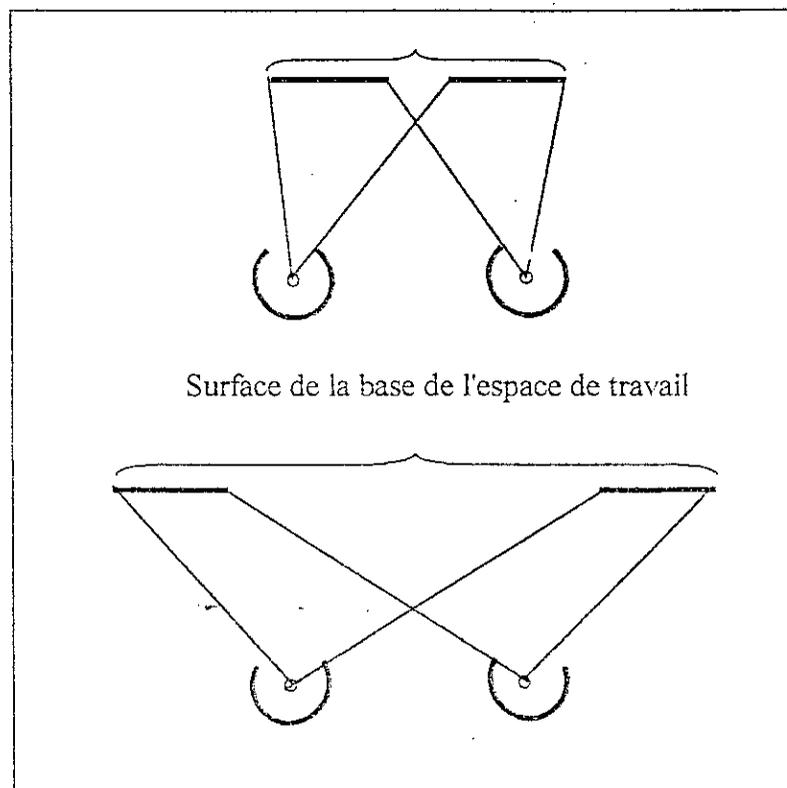


Fig.2.5. Variation du volume de travail en fonction de la disposition des articulations.



2.6. Variation du volume de travail en fonction des débattements articulaires.

2.3.3. modélisation et représentation de l'espace de travail :

L'espace de travail *total* de la plate-forme de Stewart est à l'intérieur d'un cylindre d'axe central z :

- Sa hauteur est la différence des niveaux, haut et bas, que peut atteindre le centre de la nacelle. Ils peuvent être déterminés en calculant le modèle géométrique inverse associé aux cas où les longueurs des segments égales à leurs valeurs limites (min. et max.)

$$H = z_{haut} - z_{bas}$$

- Son diamètre est la distance entre le point le plus éloigné atteignable et l'axe vertical de symétrie de la plate-forme au repos.

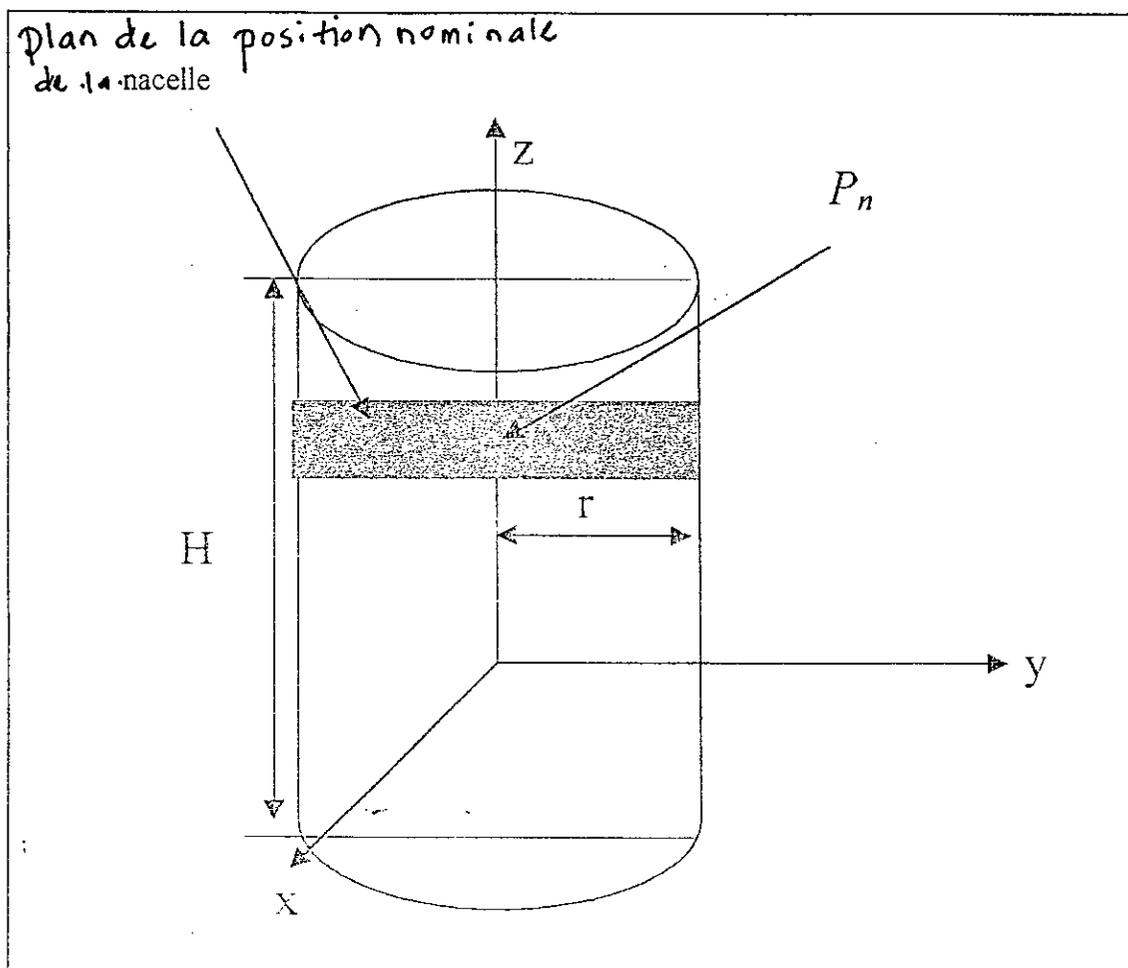


Fig.2.7. le cylindre qui cerne l'espace de travail

A) La méthode CAO

Dans un repère tridimensionnel on fixe la coordonnée $z = Cte$, on trace pour chaque vérin et pour une orientation connue fixe un cercle de mouvement. On aura donc un plan de travail qui résulte de l'intersection de 6 couronnes.

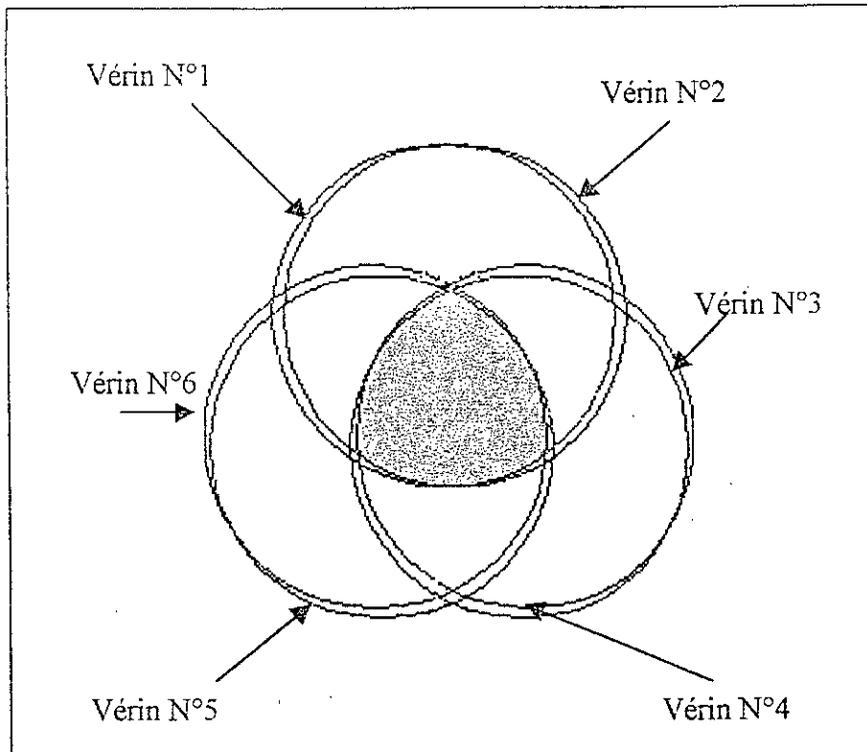


fig.2.8.principe de la méthode CAO

En faisant varier le z entre les deux limites ; La succession des plans de travail obtenus nous donne un volume qui correspond à l'espace de travail du manipulateur pour cette orientation.

La figure (2.9) est obtenue à l'aide d'un logiciel de CAO qui nous permet de représenter le volume de travail de la PFS pour une orientation constante ($\theta = 0, \varphi = 0, \psi = 0$).

En remplaçant la matrice Q dans la relation (2.5) on déterminera les longueurs des vérins et donc le MGI :

Pour $i = 1;6$

$$\rho_i^2 = \left[(q_{11} + q_{12} + q_{13})x_{a_i} + x - x_{b_i} \right]^2 + \left[(q_{21} + q_{22} + q_{23})y_{a_i} + y - y_{b_i} \right]^2 + \left[(q_{31} + q_{32} + q_{33})z_{a_i} + z - z_{b_i} \right]^2 \quad (2.7)$$

Exemple de calcul

Soit:

Les coordonnées des centres des articulations sur la nacelle :

	X	Y	Z
A_1	0.100	-0.895	0.0
A_2	0.825	0.361	0.0
A_3	0.725	0.534	0.0
A_4	-0.725	0.534	0.0
A_5	-0.825	0.361	0.0
A_6	-0.100	-0.895	0.0

Les coordonnées des centres d'articulations sur la base :

	X	Y	Z
B_1	0.986	-0.685	0.0
B_2	1.086	-0.512	0.0
B_3	0.100	1.196	0.0
B_4	-0.100	1.196	0.0
B_5	-1.086	-0.512	0.0
B_6	-0.986	-0.685	0.0

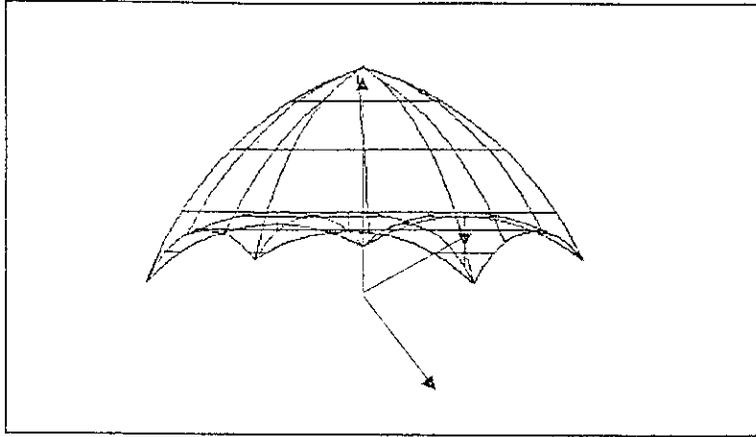


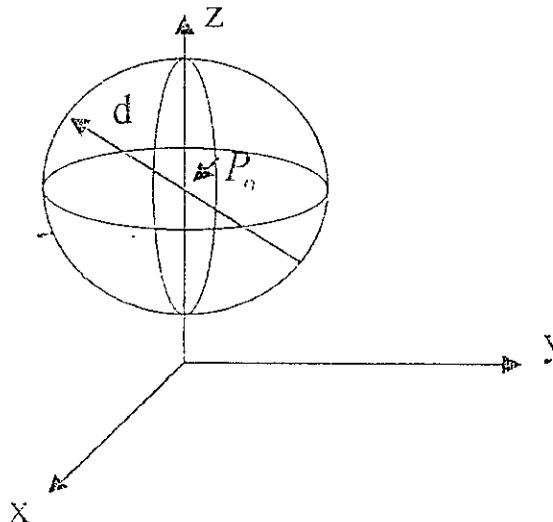
Fig.2.9.espace de travail obtenu à l'aide de la méthode CAO

B) La méthode numérique (approximative)

Pour déterminer l'espace de travail on se propose d'adapter une méthode approximative, qui nous permet de faire un inventaire de tous les points appartenant à la frontière, on vérifie l'appartenance d'un point à l'espace total en calculant le *MGI* avec satisfaction des différentes contraintes auxquelles le manipulateur est soumis.

On définit un vecteur dont le point de départ est la position nominale et pivotant autour de celle-ci. Le module de ce vecteur à un instant donné est la distance entre la position courante du centre de la nacelle et la position nominale.

Il est à remarquer que si cette distance est égale dans toutes les directions, l'espace de travail total serait une sphère ayant pour centre la position nominale et pour rayon la valeur maximale de cette distance. Ceci n'est jamais le cas. Tout ce qu'on peut dire est que cet espace est compris dans cette sphère.



La recherche de la frontière revient à déterminer le $\max(\|P_n P\|)$ tel que: P_n et P sont, respectivement, les positions nominale et courante du centre de la nacelle.

L'espace de recherche étant le cylindre défini précédemment. Cet espace est discrétisé selon une grille dont les nœuds subissent des tests d'appartenance ou non-appartenance à l'espace de travail de la plate-forme.

se basant sur la recherche dichotomique du module $\|P_n P\|$, Pour chaque position P_k du centre de la nacelle, on établit un algorithme qui recherche la valeur approximative de $\|P_n P\|$. Le principe est le suivant :

A une position P_k la droite $(P_n P_k)$ coupe la frontière de l'espace de travail en un point P^* .

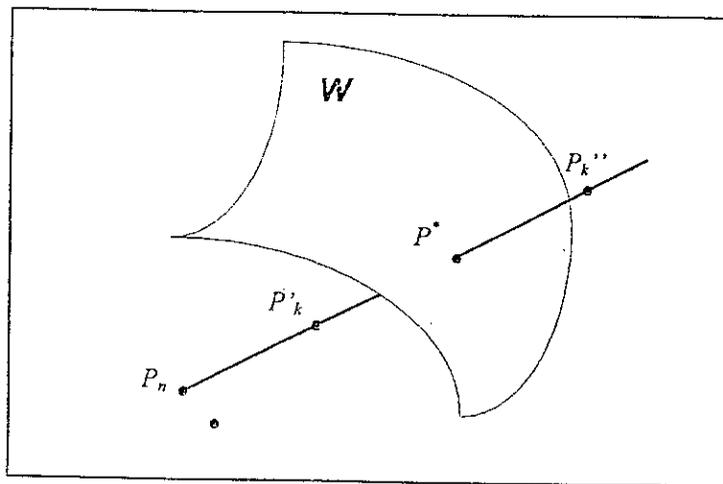


Fig.2.10. modélisation de la frontière de l'espace de travail total.

Deux cas se présentent :

- Soit le point P_k est à l'intérieur de l'espace de travail (P_k' sur la figure) y compris le cas où ce point P_k serait confondu avec P^* .
- Soit le point P_k est à l'extérieur de l'espace de travail (P_k'' sur la figure).

La recherche dichotomique se fait sur un intervalle $[\|P_n P_a\|, \|P_n P_b\|]$ où P_a est un point de la droite $(P_n P_k)$ appartenant à W et P_b un autre point de cette droite n'appartenant pas à W .

Si le point courant P_k est à l'intérieur de W (il vérifie les contraintes), alors le point P_a se déplacera en P_k . S'il est à l'extérieur de W , c'est le point P_b qui se déplacera en P_k .

Ainsi jusqu'à satisfaire une précision ε telle que : $\|P_k P_{k,j}\| \leq \varepsilon$

Résultat de simulation

En fixant les paramètres géométriques de la plate formes (en prendra comme coordonnées des points de la base et de la nacelle les mêmes que sous de la section 2.2.1 et pour des orientations différentes $[(0,0,0)$ et $(10,15,0)]$ on trace l'espace de travail .

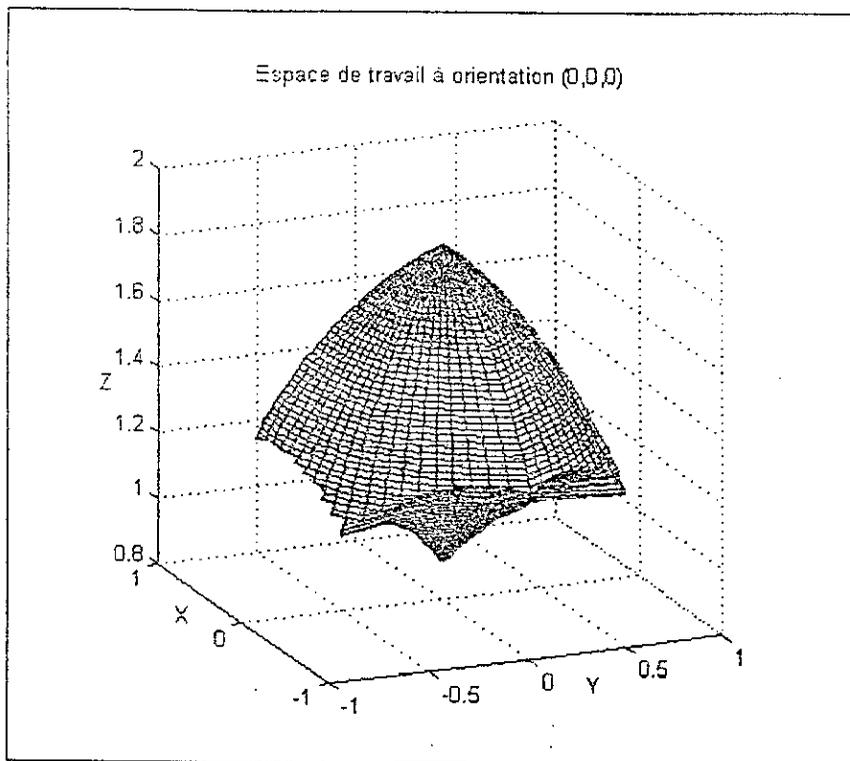


Fig. 2.11 : Espace de travail à orientation $(0,0,0)$.

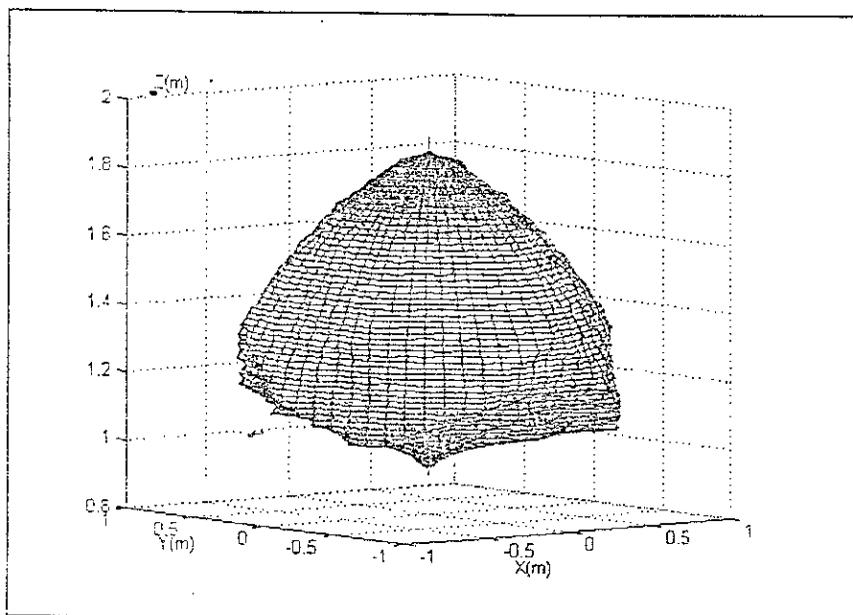


Fig.2.12.espace de travail à orientation $(10,15,0)$

L'extrapolation du programme pour le calcul de l'espace de travail complet (total) a donné:

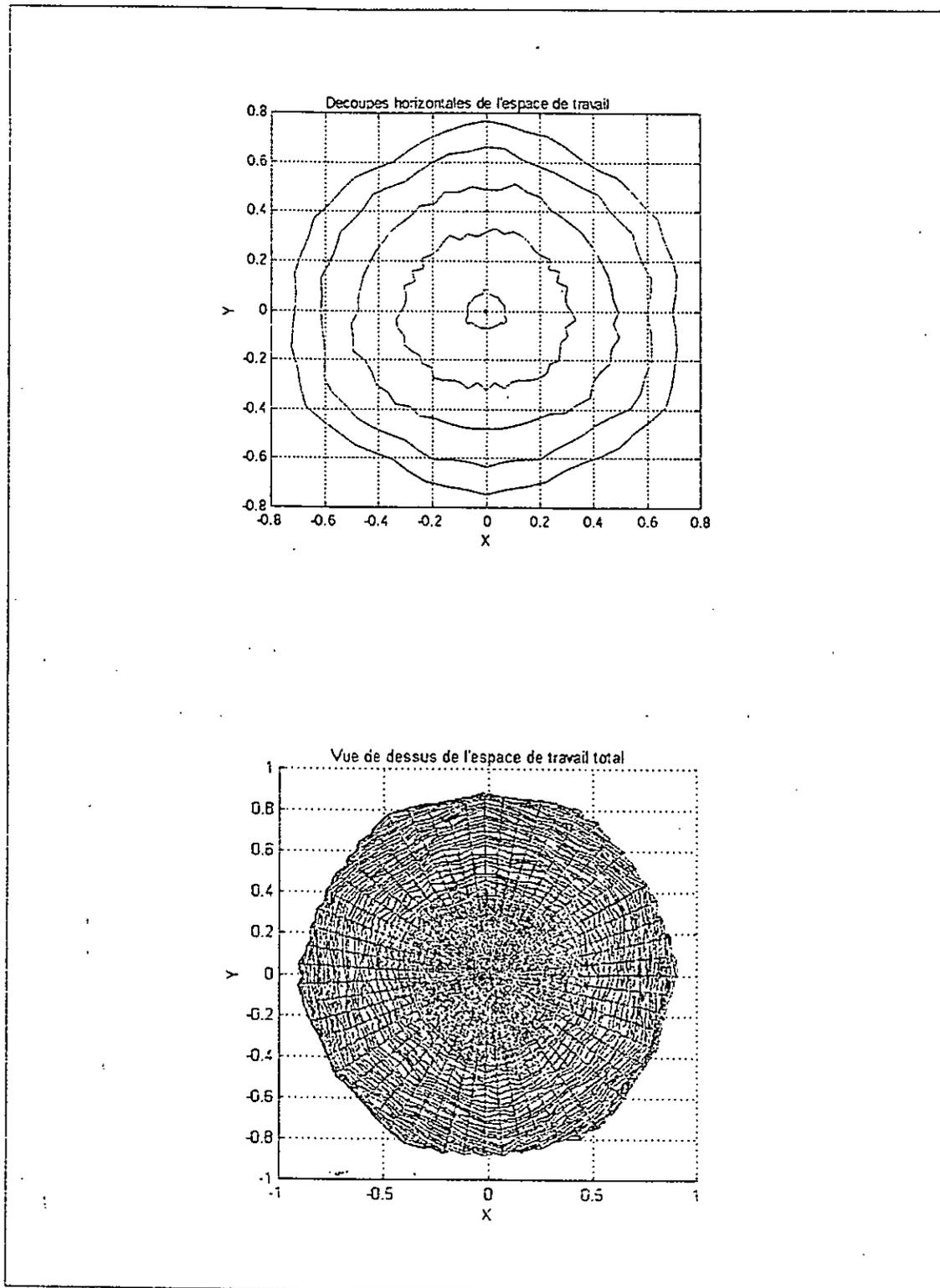


fig.2.13.espace de travail total et sa projection horizontale

Discussion des résultats

Les résultats qu'on a obtenu correspondent avec les résultats courants dans la littérature.

L'exécution du programme de calcul prend un temps considérable : pour calculer l'espace de travail à orientation constante (0,0,0) et pour une précision $\varepsilon = 0.07$ le temps de calcul est $t = 12$ min et 45 sec .

2.4.conclusion

L'étude géométrique des plates formes de Stewart est l'élément le plus important dans un travail de modélisation et de conception de ce type de manipulateur, mais il reste toujours une tâche délicate vue la difficulté retrouvée surtout lors de la recherche du modèle géométrique direct et la modélisation de l'espace de travail qui représentent des restrictions de taille dans l'étude globale.

D'autre part on a bien déterminé le modèle géométrique direct qui représente le modèle de commande en position pour une PFS.

Le chapitre suivant portera sur la cinématique des PFS.

Chapitre 3

Chapitre3

La modélisation cinématique
D'une plate forme de Stewart

3.1. introduction

Dans ce chapitre nous allons traiter les aspects concernant les caractéristiques cinématique des PFS, à savoir les vitesses et les accélérations articulaires pour les vérins et les vitesses et accélérations angulaires et linéaires de la nacelle, de plus on va analyser les relations entre les paramètres cinématique articulaires et les vitesses opérationnelles et enfin déduire l'influence des paramètres de formes de la plate forme sur sa cinématique.

3.2. la matrice jacobienne3.2.1. Définition

La jacobienne de la plate-forme de Stewart, comme l'est d'ailleurs pour tout manipulateur, exprime la relation entre la vitesse de l'effecteur (Plate-forme mobile) et les vitesses articulaires.

$\dot{\theta}$ le vecteur vitesse articulaire

\dot{X} le vecteur vitesse operationnel

La relation entre ces deux vecteurs est donnée par la formule suivante :

$$\dot{X} = J\dot{\theta} \quad (3.1)$$

où J est la matrice jacobienne qui est une matrice 6×6 .

En réalité la relation entre les vecteurs vitesses articulaires et opérationnels s'écrit :

$$B \dot{\theta} = A \dot{x} \quad (3.2)$$

où :

- ♣ A est dite la matrice jacobienne sérielle ; elle est, dans la plupart des cas, une matrice diagonale simple.
- ♣ B est la matrice jacobienne parallèle, c'est une matrice du sixième rang.

on peut écrire donc :

$$\dot{X} = A^{-1} B \dot{\theta}$$

Ce qui donne

$$J = A^{-1} B \quad (3.3)$$

3.2.2.determination de la matrice jacobienne inverse

La matrice jacobienne inverse est la plus utilisée et la plus facile à déterminer ; elle s'exprime comme suit:

$$\dot{\theta} = J^{-1} \dot{X}$$

Elle peut être déduite à partir de deux méthodes différentes.

- ♣ Equations de la mécanique du solide.
- ♣ en dérivant les équations du modèle géométrique inverse

Dans notre cas nous utiliserons la méthode qui se base sur les lois de la mécanique du solide.

➤ Utilisation des lois de la mécanique du solide

La vitesse d'un point A_i appartenant à la nacelle est exprimée par:

$$V_{A_i} = V_c + \Omega \times \underline{QA_iC} \quad (3.4)$$

La vitesse de l'actionneur, ou la vitesse articulaire associé à cette chaîne est la projection de la vitesse du point A_i sur la droite portant ce segment. Ce qui donne :

$$\dot{\rho}_i = V_{A_i} \cdot u_i = (V_c + \Omega \times \underline{QA_iC}) \cdot u_i \quad (3.5)$$

Ω est le vecteur vitesse angulaire de la nacelle.

V_c le vecteur vitesse du centre de la nacelle

où u_i le vecteur unitaire suivant l'actionneur i .

$$u_i = \frac{B_i A_i}{\|B_i A_i\|}$$

En écriture matricielle, on aura :

$$[\dot{\rho}_i] = \begin{pmatrix} \frac{B_i A_i}{\|B_i A_i\|} & \frac{B_i A_i \times A_i C}{\|B_i A_i\|} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \Omega \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

la ligne i de la matrice jacobienne inverse sera donc

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{B_i A_i}{\|B_i A_i\|} & \frac{B_i A_i \times A_i C}{\|B_i A_i\|} \end{pmatrix}$$

où

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{B_i A_i}{\rho_i} & \frac{B_i A_i \times A_i C}{\rho_i} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

plus généralement en note la matrice jacobienne

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{BA}{\rho} & \frac{BA \times AC}{\rho} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

3.3. Modélisation cinématique

3.3.1. Le modèle cinématique d'une plate-forme de Stewart :

La modélisation cinématique d'un manipulateur parallèle consiste à rechercher les relations qui existent entre les vitesses et accélérations de l'organe terminal de ce manipulateur et celles articulaires ou de ses actionneurs. En d'autres termes, déterminer dans une posture donnée (position/orientation), la vitesse et l'accélération de l'effecteur connaissant les vitesses et accélérations aux niveaux des articulations actives, et inversement [Shim 99].

Globalement, Cette modélisation ne diffère pas de la précédente, c'est-à-dire la modélisation géométrique. Le modèle inverse est très simple à construire tandis que le direct n'est possible que par calcul numérique.

Soit $\dot{\chi}$ un espace de vecteurs de la forme : $\dot{x}^T = \{v^T \quad \Omega^T\}$ où v^T et Ω^T sont, respectivement, la vitesse linéaire et angulaire de l'élément terminal.

$\dot{\Theta}$ l'espace des vecteurs de la forme : $\dot{\rho} = \{\dot{\rho}_i\}$ où les $\dot{\rho}_i$ $i = 1 \dots 6$, sont les vitesses au niveau des articulations motorisées.

□ Le modèle cinématique inverse est :

$$MCI: \dot{\chi} \mapsto \dot{\Theta}$$

$$MCD(\dot{x} \in \dot{\chi}) \rightarrow (\dot{\rho} \in \dot{\Theta}) \quad \dot{\rho} = J^{-1} \dot{X}$$

□ Le modèle cinématique direct est :

$$MCD: \dot{\Theta} \mapsto \dot{\chi}$$

$$MCD(\dot{\rho} \in \dot{\Theta}) \rightarrow (\dot{x} \in \dot{\chi}) \quad \dot{X} = J \dot{\rho}$$

L'établissement du modèle cinématique d'un manipulateur peut être effectué de deux manières :

□ Par dérivation directe du modèle géométrique,

□ Par le principe de composition des vitesses.

3.3.2. détermination des vitesses articulaires

□ *Méthode de composition des vitesses :*

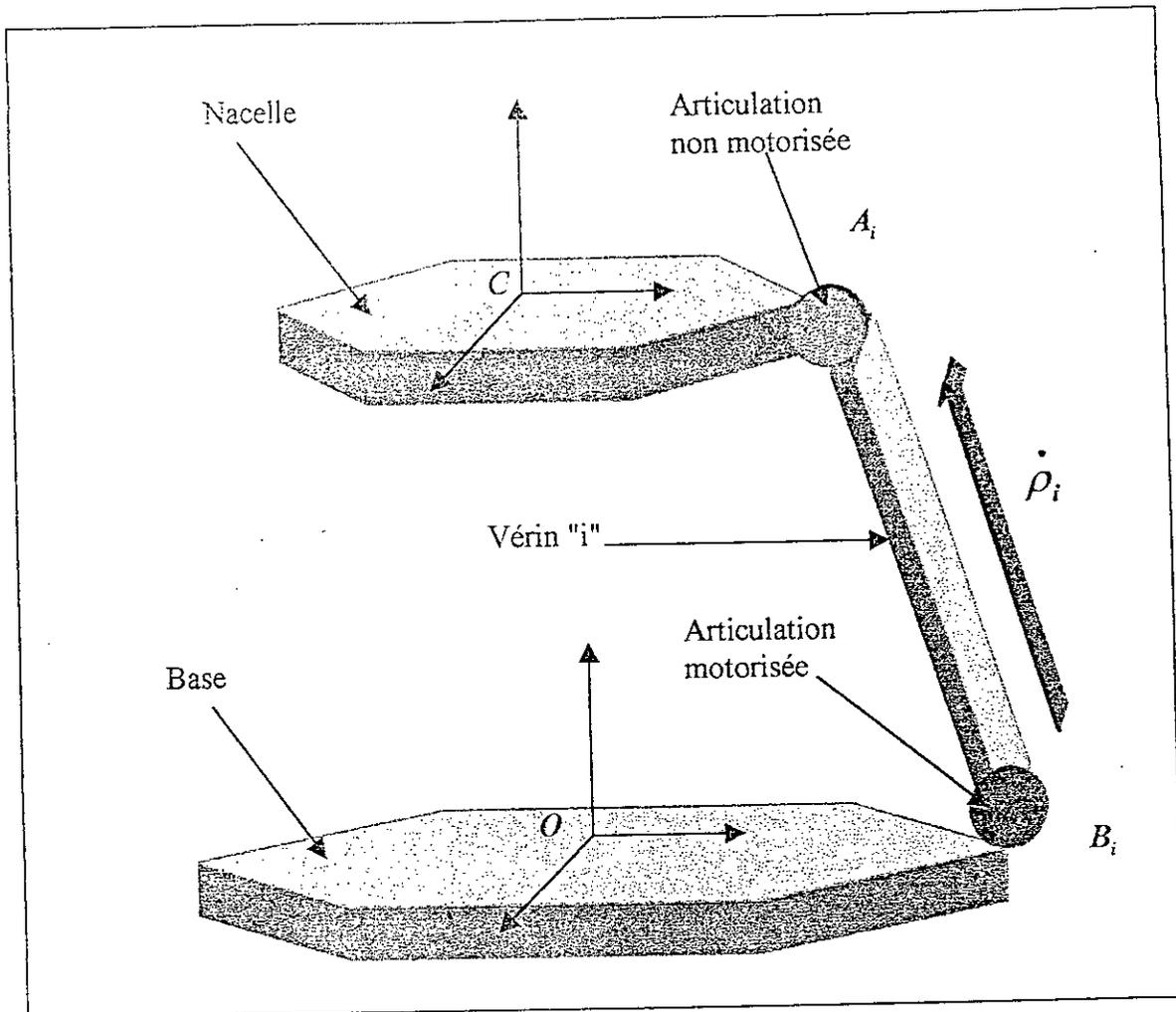


Fig.3.1.chaine cinématique d'une plate forme de Stewart

La chaîne cinématique i est composée de trois solides :

OB_i base ; B_iA_i segment ; CA_i nacelle .

Si V et Ω sont respectivement la vitesse linéaire et angulaire de la nacelle ou de l'élément CA_i , alors la mécanique du solide nous permet d'écrire :

$$V_{A_i} = V_{B_i} + \omega_{B_iA_i} \times A_iB_i \quad (3.9)$$

or : $V_{B_i} = V_O = 0$

d'où :

$$V_{A_i} = \omega_{B_i A_i} \times A_i B_i$$

d'autre part :

$$V_{A_i} = V + \Omega \times CA_i \quad (3.10)$$

en exprimant le point A_i dans le repère lié à la nacelle on aura l'expression suivante :

$$V_{A_i} = V + \Omega \times Q \cdot CA'_i \quad (3.11)$$

où :

A'_i est le point A_i exprimé dans le repère de la nacelle.

Q est la matrice de passage entre le repère lié à la base à celui de la nacelle.

La vitesse ρ_i de déplacement le long du segment $B_i A_i$ est, en fait, la projection de la vitesse V_{A_i} sur ce segment.

$$\rho_i = V_{A_i} \cdot u_i \quad i=1,6 \quad (3.12)$$

u_i est le vecteur unitaire : $\frac{B_i A_i}{\|B_i A_i\|}$.

3.3.3.détermination des accélérations articulaires

Les manipulateurs parallèles sont connus pour être des manipulateurs à haute dynamique à cause de leur pouvoir de générer des accélérations importantes qui peuvent atteindre cinq fois l'accélération gravitationnelle pour les robots delta ; pour les plates formes de Stewart les accélérations peuvent avoisiner les 2.g.

Pour déterminer les accélérations on a le choix entre deux méthodes. la première c'est de dériver l'équation (3.11), la seconde par dérivation du modèle cinématique inverse.

□ Méthode de composition des accélérations

La dérivation directe de l'équation (3.11) nous donne

$$V_{A_i} = V + \Omega \times Q.CA'_i$$

$$\dot{V}_{A_i} = \dot{V} + \dot{\Omega} \times Q.CA'_i + \Omega \times (\Omega \times Q.CA'_i) \quad (3.13)$$

i=1,6

\dot{V} et $\dot{\Omega}$ sont les accélérations linéaires et angulaires de la nacelle.

$$\dot{V}_{A_i} = \dot{V} + \dot{\Omega} \times Q.CA'_i + \Omega \times (\Omega \times Q.CA'_i) \quad (3.14)$$

L'accélération $\ddot{\rho}_i$ de déplacement le long du segment B_iA_i est, en fait, la projection de l'accélération \dot{V}_{A_i} sur ce segment.

$$\ddot{\rho}_i = \dot{V}_{A_i} \cdot u_i \quad (3.15)$$

i=1,6

u_i est le vecteur unitaire : $\frac{B_iA_i}{\|B_iA_i\|}$

□ Dérivation direct du MCI :

Cette méthode consiste à dériver directement les équations du modèle cinématique inverse.

Le MCI est donné par :

$$\dot{\theta} = J^{-1} \dot{X}$$

la dérivation par rapport au temps de cette expression donne:

$$\ddot{\theta} = J^{-1} \ddot{X} + \dot{J}^{-1} \dot{X} \quad (3.16)$$

pour compléter cette relation on doit dériver la matrice jacobienne inverse ,
une ligne de la matrice jacobienne inverse est donnée par:

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} BA & BA \times AC \\ \rho & \rho \end{pmatrix}$$

$$\dot{J}^{-1} = \frac{dJ^{-1}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d(\frac{BA}{\rho})}{dt} & \frac{d(\frac{BA \times AC}{\rho})}{dt} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

on aura donc :

$$\begin{bmatrix} \frac{d(\frac{BA}{\rho})}{dt} \\ \frac{d(\frac{BA \times AC}{\rho})}{dt} \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho^2} (\rho \dot{BA} - \dot{\rho} BA) \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \frac{d(\frac{BA \times AC}{\rho})}{dt} \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho^2} \left[\rho \frac{d(BA \times AC)}{dt} - \dot{\rho} (BA \times AC) \right]$$

d'autre part :

$$\dot{AC} = \Omega \times AC$$

$$\frac{d(BA \times AC)}{dt} = \dot{BA} \times AC + BA \times \dot{AC} = \Omega \times AC \times BA + V \times AC$$

$$\text{et } \dot{BA} = V + \Omega \times AC$$

donc une ligne de la matrice jacobienne inverse s'écrit :

$$\frac{1}{\rho^2} \left[\rho (V + \Omega \times AC) - \dot{\rho} BA ; \rho ((\Omega \times AC) \times BA + V \times AC) - \dot{\rho} (BA \times AC) \right] \quad (3.18)$$

3.3.4.vitesses opérationnelles autorisées

les vitesses articulaires des actionneurs sont bornées , la fourchette des variations de ces vitesses est $[\rho_{\min} \rho_{\max}]$ on peut donc écrire:

$$\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max} \quad (3.19)$$

de ce fait la limitation des vitesses articulaires, implique directement une limitation sur les vitesses opérationnelles, mathématiquement on a :

$$\dot{\theta} = J^{-1} \dot{X}$$

En injectant cette relation dans (3.18) on aura pour

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\min} &\leq J^{-1} \dot{X} \leq \dot{\rho}_{\max} \\ \dot{\rho}_{\min} &\leq \sum_{j=1}^6 J_{ij}^{-1} \dot{X}_j \leq \dot{\rho}_{\max} \quad (3.20) \end{aligned}$$

la décomposition de (3.20) donne

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^6 J_{ij}^{-1} \dot{X}_j &\geq \dot{\rho}_{\min x} \\ \sum_{j=1}^6 J_{ij}^{-1} \dot{X}_j &\leq \dot{\rho}_{\max} \end{aligned}$$

Les vitesses autorisées sont celles qui satisfont ses inéquations qui sont au nombre de douze. Le problème de la recherche des vitesses permises est ainsi résolu analytiquement, mais la complexité à laquelle nous serons confronté est leur représentation graphique.

Du moment que l'espace algébrique des vitesses est de six dimensions, une représentation globale de ce dernier est impossible c'est pour cela qu'on est contraint de simplifier la représentation en deux dimensions soit suivant les plans (V_x, V_y) , (V_x, V_z) , (V_z, V_y) .

En supposant connues les vitesses angulaires de la nacelle et en fixant la vitesse cartésienne suivant une direction, les inéquations se réduiront à un système à deux variables.

Par exemple si on suppose que la vitesse angulaire de la plate forme mobile est connue et en fixant la composante de vitesse suivant l'axe z on peut écrire [Merlet 97] :

$$\rho_{i\min} \leq C_{1i} V_x + C_{2i} V_y + C_{3i} \leq \rho_{i\max} \quad (3.21)$$

Les constantes C_{1i} , C_{2i} , C_{3i} sont déduites à partir du produit matrice jacobienne inverse et le vecteur vitesses opérationnelles, est en tenant compte des paramètres fixés.

La résolution graphique de l'équation (3.20) nous permet de tracer 12 droites, les vitesses autorisées sont les vitesses qui sont à l'intérieur de la zone de l'intersection de toutes ces droites.

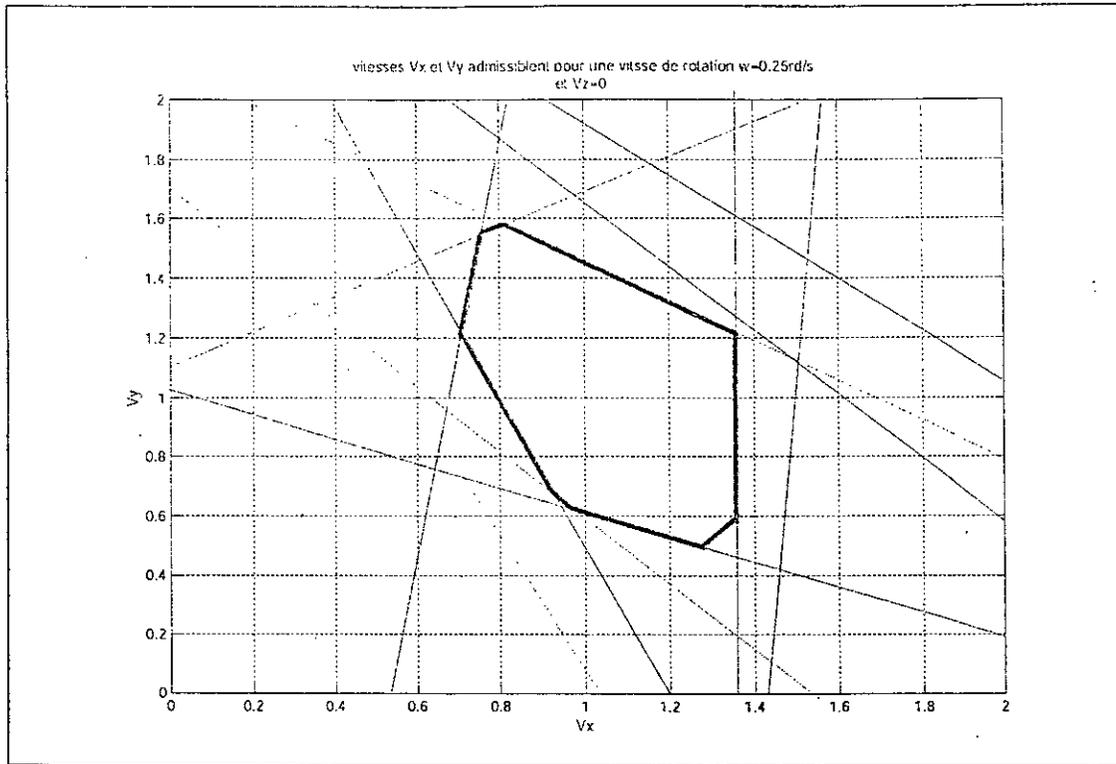


fig.3.2.vitesses autorisées suivant les axes x et y pour une vitesse de rotation et V_z nulles

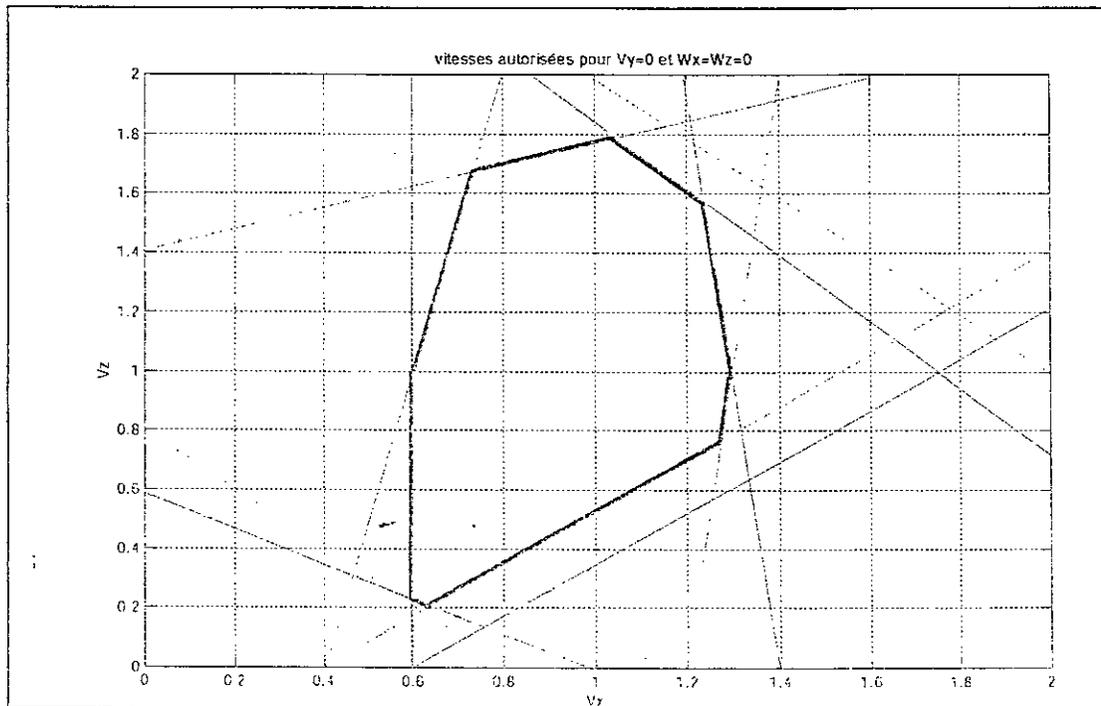


fig.3.3.vitesses autorisées suivant les axes x et z pour une vitesse de $W_x = W_z = 0$, $V_y = 0$

Les figures 3.2 et 3.3 représentent la résolution graphique des inéquations 3.21 pour différentes valeurs des vitesses cartésiennes et angulaires ; les vitesses autorisées sont les vitesses sur les frontières et à l'intérieur de la zone gras.

Un code de calcul adéquat nous permet de générer un ensemble d'abaque qui nous informe les vitesses opérationnelles permises pour la PFS.

3.3.5.recherche des extremums des vitesses articulaires

La détermination des valeurs limites des vitesses des actionneurs (vérins) dans un espace de travail d'une plate forme de Stewart présente un grand intérêt pour la conception du manipulateur, mais l'étude globale dans un espace de travail quelconque est très délicate ; C'est pour cela qu'on se propose d'étudier un cas de figure simplifié, qui nous permet de localiser l'extremum pour un déplacement de la nacelle suivant un segment bien défini.

♣ Extremum suivant un segment:

La relation qui exprime les vitesses articulaires est donnée par:

$$\dot{\rho}_i = V_{A_i} \cdot u_i$$

où

$$V_{A_i} = V + \Omega \times Q \cdot CA'_i \quad \text{et} \quad u_i = \frac{B_i A_i}{\|B_i A_i\|}$$

en peut manipuler cette équation pour avoir

$$V_{A_i} = V + \Omega \times Q \cdot CA'_i = V + CA \times \Omega$$

donc

$$\dot{\rho}_i = V_{A_i} \cdot u_i = (V + CA \times \Omega) \frac{B_i A_i}{\|B_i A_i\|}$$

plus généralement on a

$$\dot{\rho} = \frac{V \cdot BA + (CA \times BA) \cdot \Omega}{\rho} \quad (3.22)$$

Entre deux points C_1 et C_2 la position du centre C de la nacelle peut être repéré par :

$$\begin{aligned} OC &= OC_1 + \lambda C_1 C_2 \\ \lambda &\in [0 \ 1] \end{aligned} \quad (3.23)$$

En utilisant cette relation on aura

$$\begin{aligned} BA &= BC_1 + \lambda C_1 C_2 \\ CA \times BA &= CA \times BC_1 + \lambda CA \times C_1 C_2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

la norme de BA est donné par:

$$\rho = \|BA\| = \sqrt{\|BC_1\|^2 + 2\lambda \|BC_1\| \|C_1 C_2\| + \lambda^2 \|C_1 C_2\|^2} \quad (3.25)$$

Sachant que les vecteurs $BC_1, C_1 C_2, CA$, sont connus on peut donc considérer comme constant les normes de ses vecteurs dans (3.23) et (3.24)

En remplaçant (3.24) et (3.23) dans (3.21) on aura :

$$\dot{\rho} = \frac{a_1 \lambda + a_2}{\sqrt{a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5}} \quad (3.26)$$

où :

$$\begin{aligned} a_1 &= (CA \times C_1 C_2) \cdot \Omega + V \cdot C_1 C_2 \\ a_2 &= V \cdot BC_1 + (CA \times BC_1) \cdot \Omega \\ a_3 &= \|C_1 C_2\|^2 \\ a_4 &= 2 \|BC_1\| \|C_1 C_2\| \\ a_5 &= \|BC_1\|^2 \end{aligned}$$

Pour chercher le maximum de la vitesse articulaire on calculera la dérivée $\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \lambda}$, la valeur λ^*

qui annule $\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \lambda}$ sera remplacée dans (3.26) pour obtenir le maximum de la vitesse articulaire.

$$\text{et } \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \lambda} = \frac{a_1}{\sqrt{a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5}} - \frac{1}{2} \frac{a_1 a_4 \lambda + a_2 a_4}{(a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow 2a_1 a_3 \lambda^2 + a_1 a_4 \lambda + 2a_1 a_5 - a_2 a_4 = 0$$

soit:

$$\Delta = (a_1 a_4)^2 - 8a_1 a_3 (2a_1 a_5 - a_2 a_4)$$

▪ Si $\Delta = 0$

$\lambda^* = -\frac{a_4}{4a_3}$ c'est une solution de signe négatif donc elle est rejetée car elle n'appartient pas à l'intervalle $[0 \ 1]$.

▪ Si $\Delta < 0$

Pas de solutions.

▪ Si $\Delta > 0$

Deux solutions possibles :

$\lambda_1^* = \frac{-a_1 a_4 - \sqrt{\Delta}}{4a_1 a_3}$ cette solution est rejetée car elle est négative.

$\lambda_2^* = \frac{-a_1 a_4 + \sqrt{\Delta}}{4a_1 a_3}$ c'est la solution recherchée.

$$\lambda^* = \frac{-a_1 a_4 + \sqrt{\Delta}}{4a_1 a_3}$$

En remplaçant la valeur de λ^* dans l'équation (3.26) on aura la vitesse maximal recherchée.

3.3.6. recherche des extremums des vitesses opérationnelles

La vitesse du point de référence de la nacelle ne dépend pas uniquement des vitesses des actionneurs de la plate-forme. Nous allons déterminer l'extremum de cette vitesse cartésienne avant qu'un actionneur au moins ne soit saturé en vitesse.

Pour une direction donnée, la vitesse cartésienne est exprimée comme suit :

$$V = \|V\| u_v \quad (3.27)$$

u_v est le vecteur unitaire suivant la direction de la vitesse V .

sachant que $\dot{\rho} = J^{-1} \dot{X}$

alors

$$\dot{\rho} = \|V\| (J^{-1}(X)) u_v \quad (3.28)$$

une ligne de la matrice J^{-1} s'écrit :

$$[u_i, u_i \times A_i C]$$

une vitesse articulaire correspondante peut donc s'écrire :

$$\dot{\rho}_i = \|V\| u_i \cdot u_v \quad (3.29)$$

De l'équation (10), la vitesse de la nacelle $\|V\|$ est maximale lorsque le produit scalaire $u_i \cdot u_v$ est minimal et inversement.

Pour rechercher le maximum de cette vitesse dans tout l'espace de travail, il suffit de rechercher le minimum du produit scalaire $u_i \cdot u_v$.

$$\|V\|_{\max} = \frac{\dot{\rho}}{\min(u_i \cdot u_v)} \quad (3.30)$$

3.4. Les Configurations singulières

3.4.1. Généralités

Certaines configurations des manipulateurs parallèles peuvent engendrer de sérieux problèmes: Pour des positions bien particulières, le manipulateur perd totalement ses performances. Ces configurations sont appelées configurations singulières.

Ce type de problème était l'un des plus étudiés en robotique parallèle. Afin d'éviter ce genre de configurations, beaucoup de travaux lui ont été consacrés. En 1978, Hunt a trouvé qu'un manipulateur parallèle est en configuration singulière lorsque toutes les droites définies par les segments joignant ses deux plates-formes se coupent en un point. Ficher, lui aussi, détermine une autre position singulière qui se produit quand la nacelle fait, horizontalement, un angle de $\pi/2$ autour de l'axe. Aux cours des années 90, Gosselin et ses collaborateurs sont arrivés à formuler ce problème sous forme d'une équation de troisième degré en x , y , et z .

En 1997, Merlet [Merlet97] a étudié, lui aussi, le problème de singularité des manipulateurs parallèles en utilisant la géométrie de Grassman.

3.4.2. types de singularités

L'analyse mathématique des singularités, se base sur le modèle cinématique. Comme déjà vu, le modèle cinématique d'un manipulateur parallèle se présente sous la forme suivante :

$$B\dot{\theta} = A\dot{x}$$

où :

- ♣ A est la matrice jacobienne sérielle ; elle est, dans la plupart des cas, une matrice diagonale simple.
- ♣ B est la matrice jacobienne parallèle, c'est une matrice du sixième rang. [Bor 97].

La singularité en terme mathématique est la perte d'une ou plusieurs dimensions des matrices A et B ce qui se traduit par l'annulation du déterminant de celles là. dans notre cas on a trois cas de figures donc trois types de singularités [Bor 97] :

□ Singularité de type 1 :

Elle est encore appelée singularité sérielle ; la singularité est de ce type quant le déterminant de la matrice A s'annule.

$$\text{Det}(A) = 0$$

Par l'analyse mathématique, on constate que la dimension du noyau de la matrice n'est pas zéro. Ainsi, en présence des singularités du premier type, on peut trouver des vecteurs vitesses opérationnelles nuls pour lesquels le vecteur vitesse articulaire sera différent de zéro. Par conséquent, physiquement on remarque que ceci correspond à des configurations pour lesquelles l'effecteur est fixe localement même quand les actionneurs sont en mouvement. Donc, certaines vitesses ne peuvent pas être produites à la sortie avec des vecteurs vitesses finis à l'entrée.

Généralement, ce type de singularité se produit à la limite de l'espace de travail et on dit que dans ces configurations le membre de sortie perd un ou plusieurs degrés de liberté. Visuellement, le premier type de singularité correspond aux configurations pour lesquelles le membre de sortie est à un point mort.

□ Singularité de type 2 :

Elle est encore appelée singularité parallèle, la singularité est de ce type quant le déterminant de la matrice B s'annule.

$$\text{Det}(B) = 0$$

Puisque dans ce cas le noyau de la matrice B n'est pas vide, il existe des vecteurs vitesses opérationnelles non nuls pour lesquels le vecteur vitesse articulaire sera égal à zéro. Par conséquent, physiquement on remarque que ceci correspond à des configurations pour lesquelles l'effecteur est mobile localement même quand toutes les articulations normalement actionnées sont bloquées. Donc, certains vecteurs vitesses ne peuvent pas être produits à l'entrée avec des vecteurs vitesses finis à la sortie.

A l'opposé du premier type, ce type de singularité demeure à l'intérieur de l'espace de travail et on dit que le membre de sortie gagne un ou plusieurs degrés de liberté. Visuellement, le second type de singularité correspond aux configurations pour lesquelles les membres d'entrée sont à un point mort.

□ Singularité de type 3 :

Ce type est encore appelé singularité sérielle-parallèle, elle est obtenue quand les deux déterminants sont nuls en même temps.

$$\text{Det}(A) = \text{Det}(B) = 0$$

Ce troisième type de singularité a une nature quelque peu différente des deux premiers puisqu'il requiert des conditions spéciales des paramètres architecturaux. On obtient une singularité de type 3 lorsque pour des conditions spécifiques des paramètres architecturaux, on peut atteindre des configurations où la relation de position dégénère.

Ceci correspond aux configurations pour lesquelles l'effecteur peut subir un mouvement fini quand les actionneurs sont bloqués ou pour lesquelles un mouvement fini des entrées ne produit pas de mouvement à la sortie.

Donc cette singularité fait que pour quelques paramètres dimensionnels, le robot peut ne pas être fonctionnel dans une partie de son espace de travail. Ces problèmes doivent être traités pendant la phase de conception du manipulateur et une bonne planification pendant la conception élimine cette singularité.

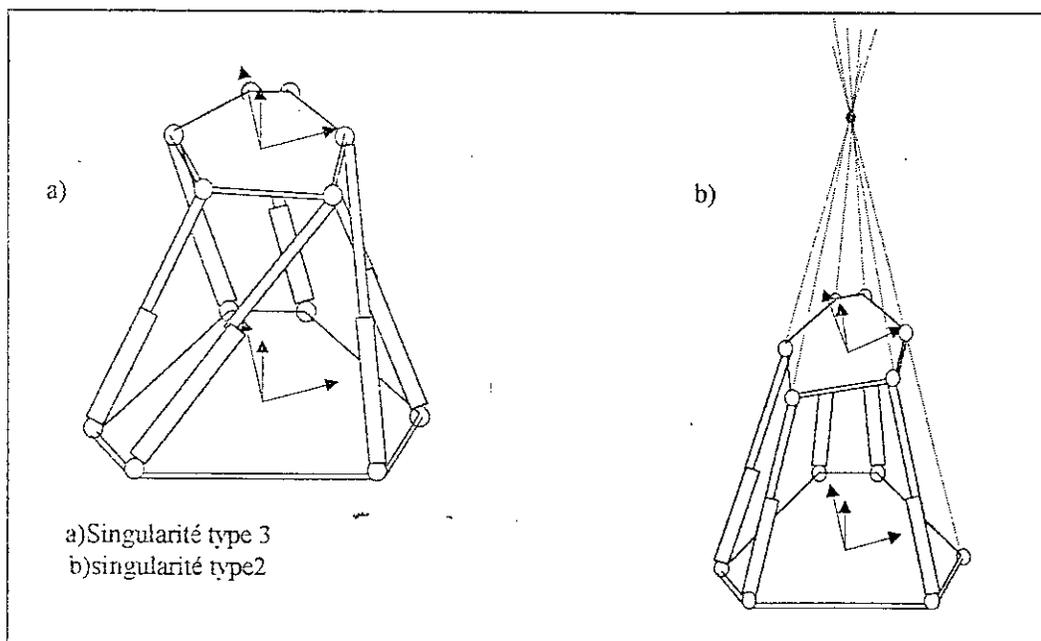


fig.3.4.configuration singulières d'une plate forme de Stewart

3.4.3. Méthodes d'analyse des singularités :

La localisation des lieux de singularités est une étape incontournable dans la conception d'une PFS. En littérature on trouve deux grands axes de recherche pour la détermination des singularités, le premier se base sur des méthodes géométriques élaborées par Merlet et la deuxième présente un outil analytique pour l'analyse des singularités cette méthode est proposée par Gosselin.

3.4.3.1. méthode géométrique

♦ Vecteurs de Plücker :

Soient deux points p_1, p_2 dans l'espace et un point de référence o . la droite joignant ces deux points (fig.3.5) est représentée par le vecteur à six degrés de liberté suivant :

$$(p_1 p_2) = [p_1 p_2, op_1 \times op_2]$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme normalisée suivante :

$$(p_1 p_2) = \left[\frac{p_1 p_2}{\|p_1 p_2\|} \quad \frac{op_1 \times op_2}{p_1 p_2} \right]$$

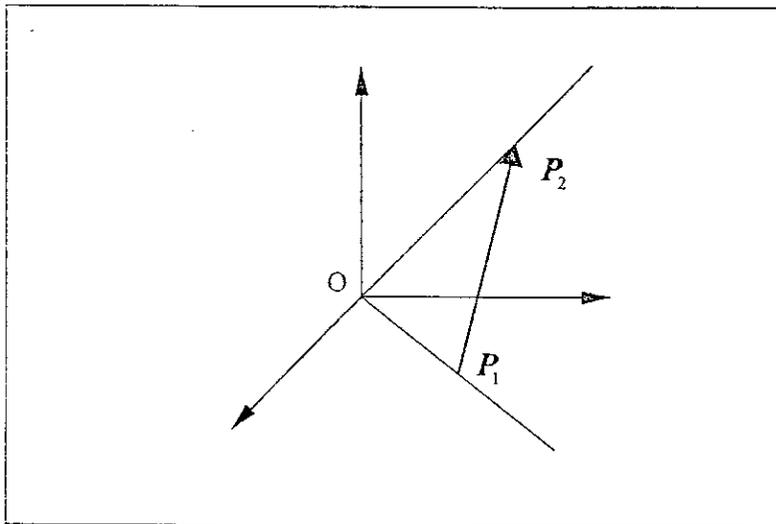


fig.3.5.vecteur de Plücker

♦ l'analyse géométrique des singularités :

Les vecteurs de Plücker, [Merlet 98] [Gos 90] selon leur disposition dans l'espace, définissent une variété géométrique de dimension n inférieure ou égale au nombre de DDL qui est appelée variété de Grassmann.

En étudiant la matrice jacobienne parallèle, on retrouve l'expression des vecteurs de Plücker associée à la géométrie du manipulateur. Aussi, la géométrie de Grassmann nous permet de trouver les configurations singulières du manipulateur. En effet, Grassmann a montré que la dépendance linéaire des vecteurs de Plücker induit des relations géométriques sur les droites associées. Ainsi, la dégénérescence de la matrice jacobienne parallèle implique donc une dépendance linéaire de ces vecteurs. Pour un manipulateur à 6 degrés de liberté possédant une matrice jacobienne parallèle de dimension 6, on peut étudier les variétés de dimension inférieure, ce qui implique l'existence de cinq variétés de Grassmann (voir annexe 1) Dans l'annexe 1 sont exposées les différentes variétés de Grassmann

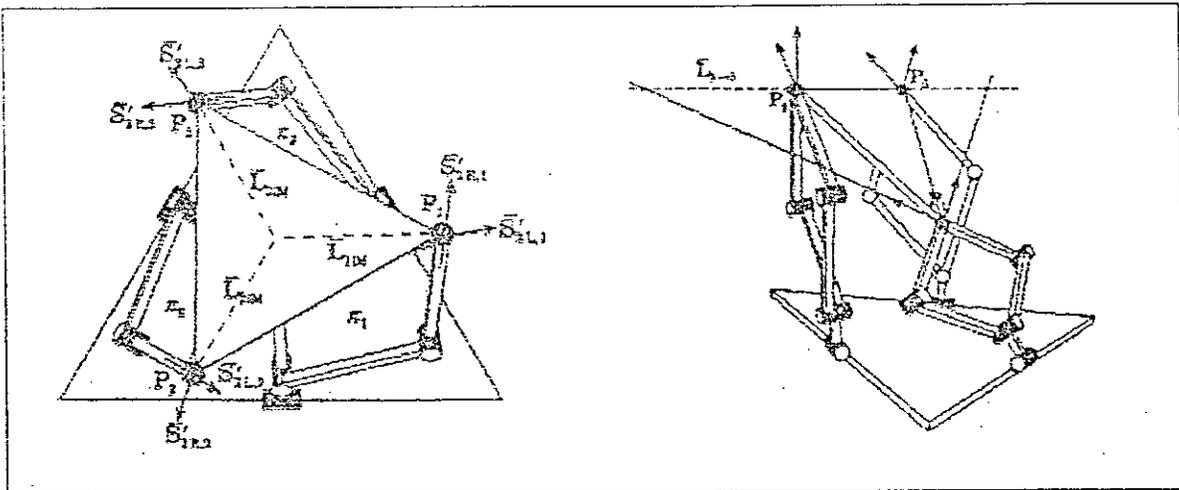


Fig.3.6. présentation de singularité par la géométrie de Grassmann

Cette méthode d'analyse des singularités est considérée comme étant fiable et exacte sauf qu'elle n'est pas systématique et, par conséquent, elle ne peut pas nous renseigner sur toutes les configurations singulières qui existent.

3.4.3.2. méthode analytique

Cette méthode constitue un outil très puissant pour localiser les singularités dans un espace de travail. Son auteur [Gosselin] a pu établir une équation polynomiale de troisième degré en x , y , et z régissant les singularités. Elle repose sur la propriété de décomposition des déterminants.

la matrice jacobienne inverse de la plate-forme de Stewart est de la forme :

$$J^{-1} = A^{-1}B$$

Le déterminant de J^{-1} est nul quand, au moins, l'un des déterminants de A^{-1} ou de B l'est aussi. Gosselin[Gos 90][Bor 00][Kim 99] s'intéressait uniquement à la dégénérescence de la matrice B dite jacobienne parallèle. Celle-ci s'écrit, pour $i=1\dots 6$, sous la forme :

$$B = \begin{pmatrix} BA_{ix} & BA_{iy} & BA_{iz} & (BA \times AC)_{ix} & (BA \times AC)_{iy} & (BA \times AC)_{iz} \end{pmatrix}$$

Où BA_i est le vecteur associé au segment i .

La matrice B peut s'écrire sous la forme suivante :

$$B = \begin{pmatrix} G + ux & H + uy & K + uz & Ly + Mz + N \\ -Lx + Pz + Q & -Mx - Py + R \end{pmatrix}$$

avec : u est un vecteur unitaire de dimension 6 et $G, H, K, L, M, N, Q, P, R$ sont les vecteurs de dimension 6 aussi, dont les composantes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} G_i &= -P_i - b_{ix} & i &= 1\dots 6 \\ H_i &= M_i - B_{iy} & i &= 1\dots 6 \\ K_i &= -L_i - B_{iz} & i &= 1\dots 6 \\ L_i &= -(q_{31}A'_{ix} + q_{32}A'_{iy} + q_{33}A'_{iz}) & i &= 1\dots 6 \\ M_i &= q_{21}A'_{ix} + q_{22}A'_{iy} + q_{23}A'_{iz} & i &= 1\dots 6 \\ N_i &= -B_{iy}L_i - B_{iz}M_i & i &= 1\dots 6 \\ P_i &= -(q_{11}A'_{ix} + q_{12}A'_{iy} + q_{13}A'_{iz}) & i &= 1\dots 6 \\ Q_i &= B_{ix}L_i - B_{iz}P_i & i &= 1\dots 6 \\ R_i &= B_{ix}M_i + B_{iy}P_i & i &= 1\dots 6 \end{aligned}$$

Les q_{ij} sont les éléments de la matrice de passage du repère de la nacelle à celui de la base.

Gosselin a développé l'expression du déterminant en utilisant les relations ci-dessus, et a réussi à écrire le déterminant sous une formulation polynomiale de trois variables x, y, z et du troisième ordre.

Le déterminant global s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Det}(J) = & F_1 x^3 + F_2 x^2 y + F_3 x^2 z + F_4 x^2 + F_5 x y^2 + F_6 x y z + F_7 x y + F_8 x z^2 + F_9 x z + F_{10} x + \\ & + F_{11} y^3 + F_{12} y^2 z + F_{13} y^2 + F_{14} y z^2 + F_{15} y z + F_{16} y + F_{17} z^3 + F_{18} z^2 + F_{19} z + F_{20} \end{aligned}$$

La recherche des lieux de singularité revient donc à rechercher les zéros du polynôme ci-dessus.

Les facteurs F_i sont des sous déterminants du déterminant global de la matrice jacobienne inverse. Ils ne sont fonctions que de l'orientation de la nacelle. Ainsi, pour chaque orientation donnée, on aura une équation qui régit les singularités dans tout l'espace de travail. L'expression de ces facteurs est donnée dans l'annexe 2.

3.5.conclusion

Dans ce chapitre nous avons abordé l'étude cinématique d'une plate forme de Stewart ; on a formulé la relation entre les variables articulaires et opérationnelles dont on a déterminé le modèle cinématique inverse et on a constaté l'impossibilité d'obtenir le modèle direct à l'aide d'équations analytiques à cause de la multitude de solutions que présente le MCD. En second lieu nous avons fait connaissance avec une situation où le manipulateur perd tout ses performances c'est l'étape d'étude des singularités où on a présenté les méthodes de leur analyse afin de les éviter.

Dans le chapitre suivant on va se penché sur l'étude des efforts et des moments de la PFS, cela se fera suivant deux types d'étude : l'étude statique et l'étude dynamique.

Chapitre 4

Chapitre 4

La modélisation statique
Et dynamique
D'une plate forme de Stewart

4.1. introduction

Dans ce chapitre nous allons traiter les aspects concernant les caractéristiques statique et dynamique des PFS, les besoins du concepteur le contraint à connaître les efforts et leurs distribution sur toute la plate forme dans les positions de travail et celle de repos (effort du propre poids), pour cette raison qu'on s'intéressera au premier lieu à la statique des plate formes de Stewart, de manière à décrire les relations entre efforts et moments statiques, puis calculer leur maximum et mettre en valeur la matrice qui régie la rigidité de la PFS. en second lieu on passe à l'étude de la dynamique du manipulateur.

4.2. Statique

L'étude statique traite les relations qui existent entre le torseur statique au point de référence de la plate-forme mobile et les efforts aux niveaux des actionneurs (vérins) qu'il faut fournir afin de vaincre ce torseur.

Les manipulateurs parallèles, particulièrement la plate-forme de Stewart, sont caractérisés par une rigidité variable selon la configuration de celui-ci.

L'étude statique nous permet d'identifier les efforts aux quels est soumise la plate-forme de Stewart en tout point et d'établir un atlas sur la nature de la rigidité dans tout l'espace de travail, cette étude s'avère donc indispensable pour concevoir une architecture répondant aux exigences de la tâche à accomplir.

La relation entre le torseur F statique au niveau de l'effecteur et le vecteur forces des actionneurs τ , est exprimée en suivant deux modèles, le modèle direct et le modèle inverse :

□ sens inverse :

$$\begin{aligned}
 MSD : \Gamma &\mapsto F \\
 MSD(v \in \Gamma) &\rightarrow (w \in F) \quad F = J^{-1} \cdot \tau \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

□ Sens direct :

$$\begin{aligned}
 MSI : F &\mapsto \Gamma \\
 MSI(w \in F) &\rightarrow (v \in \Gamma) \quad \tau = J \cdot F \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

J et J^{-1} sont respectivement la jacobienne et la jacobienne inverse.

Toute fois il est à signaler que le modèle statique direct est sans solution analytique explicite ; mais en contrario des modèle cinématique et géométrique il est moins complexe pour la résolution numérique mais l'exactitude des solutions dépend des méthodes et algorithmes utilisés.

4.2.1.recherche des efforts généralisés extrémaux

Les actionneurs représentent des limites technologiques sur les efforts qu'ils peuvent supporter, c'est pour cela que dans l'étude statique d'une plate forme de Stewart on s'intéresse en particuliers à la détermination des efforts généralisés sur l'organe terminale qui s'accommode aux capacités des vérins. L'effort statique représente la résistivité de la plate forme pour une configuration bien déterminée.

la limitation des efforts sur les vérins se traduit par :

$$|\tau_i| \leq M_{\max} \quad i=1;6 \quad (4.3)$$

où

$|\tau_i|$ module de l'effort sur l'actionneur "i"

M_{\max} l'effort maximale

ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$\tau \cdot \tau' \leq M \quad (4.4)$$

tel que $M = M_{max}^2$

pour déterminer les efforts au niveau de l'organe terminal on doit injecter les relations (4.1) et (4.2) dans (4.4).

on peut donc écrire :

$$F'JJ'F \leq M \quad (4.5)$$

d'où

$$\frac{1}{M}(F'JJ'F) \leq 1 \quad (4.6)$$

Cette relation est l'équation d'un ellipsoïde [Merlet 97]. Ceci veut dire que les forces générées au niveau de l'organe effecteur ne peuvent dépasser celles comprises dans cet ellipsoïde.

D'une autre manière on peut construire un ensemble d'abaque qui peuvent nous renseigner sur les efforts généralisés pour un plan de l'espace repérer par (x,y,z).

En fixant les paramètres d'orientations et une coordonnée de l'espace dans la matrice jacobienne .

Exemple

en supposant connue l'orientation de la nacelle , pour z=cst on aura :

$$-M \leq C_{1i} F_{xi} + C_{2i} F_{yi} + C_{3i} \leq M \quad i=1;6 \quad (4.7)$$

On procédera de la même manière utilisée dans le chapitre précédent (section 3.3.4) pour rechercher les vitesses opérationnelles, donc à partir de 4.7 on aura douze inéquations. On tracera pour chacune la droite correspondante. Les efforts admissibles sont les efforts qui se trouvent à l'intérieur de la zone d'intersection des douze droites (voir figure 4.1) .

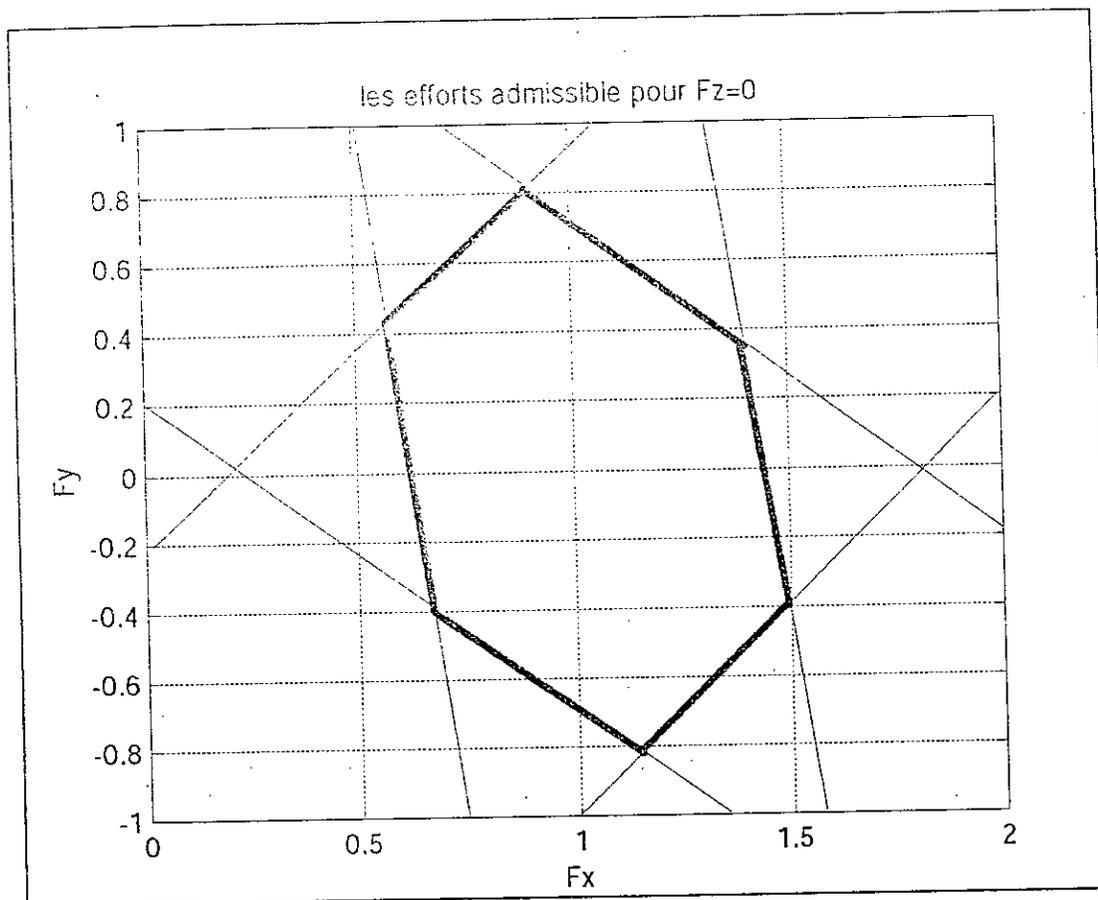


Fig.4.1 les efforts admissibles pour des moments nuls et $F_z=0$

Les efforts admissibles sont les efforts situés à l'intérieur et sur la zone en gras.

4.2.2. La raideur d'une plate forme de Stewart

La rigidité est une propriété très importante pour une plate forme de Stewart, car elle assure l'exactitude en matière de positionnement, et éviter de plus les vibrations et les fréquences propres afin de sauvegarder le mécanisme, d'un autre coté la raideur de la PFS est variable en fonction de chaque configuration, est cela représente un avantage car, elle doit être plus grande pour assuré un meilleur positionnement et donner des fréquences propres élevées et dans certains cas elle doit être souple pour éviter les dégâts survenant dans le cas d'un contact brutal du manipulateur avec l'environnement externe [Merlet 97].

□ Matrice de rigidité

L'effort sur un actionneur "i" est donné par

$$\Delta \tau_i = k_i \Delta \rho_i \quad (4.8)$$

k est la rigidité de l'actionneur "i"

ou plus généralement

$$\Delta \tau = k \Delta \rho$$

du modèle inverse on a

$$\Delta F = J^{-1} \cdot \Delta \tau \quad (4.9)$$

mais $\Delta \tau = k \Delta \rho$

Ce qui implique

$$\Delta F = k J^{-1} \cdot \Delta \rho \quad (4.10)$$

par ailleurs on a :

$$\rho = J^{-1} X$$

donc (4.11)

$$\Delta \rho = J^{-1} \Delta X$$

en injectant (4.11) dans (4.10) on aura

$$\Delta F = k J^{-T} J^{-1} \cdot \Delta X \quad (4.12)$$

on a un système de la forme $\Delta F = K \Delta X$

tel que K est la matrice de rigidité

$$K = k J^{-T} J^{-1} \quad (4.13)$$

- ◆ la matrice inverse de la matrice de rigidité est appelée matrice de complaisance elle est notée :

$$K_c = k J^{-T} J^{-1} \quad (4.14)$$

Pour le moment, on doit expliciter la matrice rigidité est ce en formulant les raideurs des actionneurs k ; pour réaliser cette tache on va simplifier l'étude et on considère comme poutre cylindrique [Had 99] chaque vérin.

La raideur sera ainsi :

$$\text{pour le vérin "i" : } k_i = \frac{E_i S_i}{\rho_i} \quad i = 1;6 \quad (4.15)$$

où

E_i : le module de young

S_i la section du vérin

ρ_i la longueur du vérin

pour notre cas on va supposer les simplifications techniques suivantes :

- ♦ Même matériau de construction pour tous les vérins ce qui implique un module de Young identique.
- ♦ Même morphologie pour tous les vérins ce qui implique une même section du travail.

Après cela la relation (4.15) devient

$$k = \frac{ES}{\rho_i} \quad (4.16)$$

la raideur de tous les vérins sera globaliser dans une matrice k diagonale :

$$k = \text{diag}\left(\frac{ES}{\rho_i}\right) \quad (4.17)$$

la matrice de rigidité de la plate forme de Stewart sera :

$$K = J^{-T} \text{diag}\left(\frac{ES}{\rho_i}\right) J^{-1} \quad (4.18)$$

pour mieux contenir et mieux comprendre le problème de rigidité Gosselin a proposé de calculer la rigidité suivant les directions principales du repère (o,x,y,z) afin de déterminer les zones d'iso-rigidités. Pour cela il a utilisé la formulation suivante :

➤ Suivant x:

$$k_x = \frac{ES}{\rho_i} \sum_{i=1}^{i=6} \frac{(A_i B_i)_x^2}{\rho_i^2} \quad (4.19.a)$$

$(A_i B_i)_x$ est la projection du vecteur $A_i B_i$ su l'axe x

➤ Suivant y

$$k_y = \frac{ES}{\rho_i} \sum_{i=1}^{i=6} \frac{(A_i B_i)_y^2}{\rho_i^2} \quad (4.19.b)$$

➤ Suivant z

$$k_z = \frac{ES}{\rho_i} \sum_{i=1}^{i=6} \frac{(A_i B_i)_z^2}{\rho_i^2} \quad (4.19.c)$$

Gosselin a mis en forme un système de projection similaire à celui des axes x, y, z pour les angles d'orientations d'Euler

➤ Suivant θ

$$k_\theta = \frac{ES}{\rho_i} \sum_{i=1}^{i=6} \frac{(A_i B_i \times A_i C)_z^2}{\rho_i^2} \quad (4.20.a)$$

➤ Suivant ϕ

$$k_\phi = \frac{ES}{\rho_i} \sum_{i=1}^{i=6} \frac{(A_i B_i \times A_i C)_y^2}{\rho_i^2} \quad (4.20.b)$$

➤ Suivant ψ

$$k_\psi = \frac{ES}{\rho_i} \sum_{i=1}^{i=6} \frac{(A_i B_i \times A_i C)_x^2}{\rho_i^2} \quad (4.20.c)$$

4.3. dynamique

L'étude dynamique des plates formes de Stewart suscite une grande importance pour pouvoir réussir une bonne conception et une commande exacte.

Vu l'intérêt suscité par la dynamique des structures des manipulateurs parallèles ,de nombreux travaux ont été réalisés par un nombre de scientifiques, dont on peut citer; Les travaux, d'Ait ahmed et Renaud [Ait 92],qui ont simplifiés l'architecture fermé jusqu'à obtenir des structures ouvertes autonomes utilisant la découpe de la structure aux niveaux des articulations passives et utiliser par la suite le formalisme de Lagrange ou de l'algorithme de Newton-Euler pour le calcul des équations dynamiques, les équations de contraintes fournissent les paramètres de liaisons ou les multiplicateurs de Lagrange,encontre partie on trouve les travaux de Merlet et Xi qui ont opté pour une modélisation numérique [Merlet 97][Xi 99].

4.3.1.Modélisation dynamique des plates formes de Stewart

La modélisation dynamique est la recherche de la relation qui lie les efforts aux niveaux des actionneurs aux efforts généralisés appliqués à la plate-forme mobile ou plus exactement sur l'effecteur.

De la même manière que les modèles géométriques et cinématique, le modèle dynamique est une application de l'espace des configurations défini par les variables articulaires dans l'espace opérationnel.

Si Γ est l'espace opérationnel dont les vecteurs sont de la forme : $v = \{f \quad m\}$. f est le vecteur force, et m le vecteur moment, appliqués à la plate-forme. F est l'espace des vecteurs de la forme : $w = \{f_1 \dots f_6\}$ où f_i , $i = 1..6$ sont les efforts aux niveaux des actionneurs. Le modèle dynamique est défini comme suit :

□ Modèle dynamique direct :

$$MDD: \Gamma \mapsto F$$

$$MDD(v \in \Gamma) \rightarrow (w \in F) \quad (4.21)$$

□ Modèle dynamique inverse :

$$MDI : F \mapsto \Gamma$$

$$MDI(w \in F) \rightarrow (v \in \Gamma) \quad (4.22)$$

4.3.2. Formalisation mathématique

L'équation générale qui exprime la relation entre les différents paramètres dynamiques est de la forme :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \sum Q_i \quad (4.23)$$

avec :

- $M(q)$: la matrice masse/Inertie de dimension $(n \times n)$ (ordre du système)
- $C(q, \dot{q})$: le vecteur des efforts centrifuges et de Coriolis
- $G(q)$: vecteur des effets gravitationnels
- Q_i : les efforts généralisés
- q : la variable articulaire

La mise en forme mathématique du modèle dynamique se présente sous deux formalismes différents en terme d'écriture mais qui aboutissent à la même finalité.

▪ Formalisme de Lagrange

Dans un manipulateur parallèle, les articulations peuvent être décomposées en articulations actives en articulations passives. Les mouvements des articulations passives est fonction des mouvements des articulations actives. Le vecteur articulaire est donc tel que :

$$q = \begin{bmatrix} q_a \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_a \\ q_p = q_p(q_a) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Sachant que la variable active dans chaque chaîne de ce manipulateur est indépendante de celle d'une autre chaîne. Le formalisme de Lagrange appliqué à chacune d'elles permet d'écrire le Lagrangien de tout le système sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_e} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_e} = \tau \quad (4.25)$$

où : $L = T + U$

T l'énergie cinétique du système.

U l'énergie potentielle du système.

▪ Formalisme de Newton-Euler

Le formalisme de Newton-Euler est global [Kour 97]. Il nous renseigne sur toutes les actions appliquées sur n'importe quel corps du manipulateur. Le principe est de lier à chaque corps et, à l'endroit désiré de celui-ci, un repère. Pour chaque corps, on doit résoudre le système ci-dessous:

$$\begin{pmatrix} mI_{33} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega \times m v \\ \Omega \times I \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

- I_{33} est la matrice identité d'ordre 3.
- I est la matrice d'inertie du corps considéré.
- F et M sont respectivement la force et le moment appliqués au centre de gravité de ce corps.

4.4. Dynamique de la plate-forme de Stewart

Dans ce qui suit on va ressortir les caractéristiques dynamiques du mécanisme de Stewart et les efforts maximaux auxquels elle est soumise:

Les différents efforts auxquels est soumise la nacelle de la plate-forme de Stewart sont représentés dans la figure ci-dessous.

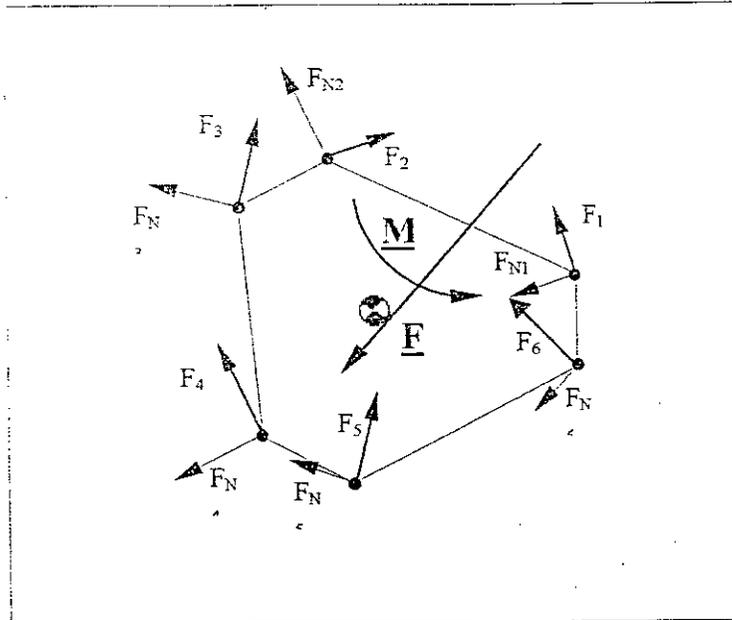


Fig.4.2. distribution des efforts sur la plate forme mobile

Pour pouvoir étudier la dynamique du manipulateur on va introduire quelques hypothèses qu'on résume comme suit:

- Les masses des segments sont supposées négligeables.
- La matrices d'inertie des segments, exprimées dans les repères liés à ceux-ci a la forme suivante :

$$I = \begin{pmatrix} j_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & j_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice d'inertie de la plate-forme, exprimée dans le référentiel principal, est \$I\$ telle que :

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

- * calcul des accélérations généralisées en fonction des efforts fournis par les actionneurs

Les forces appliquées aux points A_i peuvent se décomposer en deux composantes, axiale par rapport aux segments, et radiale ou normale aux segments. On aura donc :

$$F_i = \tau_i u_i + F_{Ni} \quad (4.27)$$

τ_i est l'effort fourni par l'actionneur i .

L'équilibre de la plate-forme s'exprime par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} F &= \sum_{i=1}^6 \tau_i u_i + F_N \\ M &= \sum_{i=1}^6 \tau_i (CA_i \times u_i) + M_N \end{aligned} \quad (4.28)$$

- F vecteur des forces généralisées.
- M vecteur des moments.
- F_N la forces résultantes des F_{Ni} .
- M_N le moment résultant des M_{Ni} .

en écriture matricielle, on aura :

$$\Gamma = J^{-T} \tau + \Gamma_N \quad (4.29)$$

avec : $\Gamma = \begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix}$, $\Gamma_N = \begin{bmatrix} F_N \\ M_N \end{bmatrix}$, J^{-T} est la matrice transposée de la matrice jacobienne inverse.

Le moment M_G appliqué au centre de gravité de la plate-forme est exprimé par :

$$M_G = M + GC \times F \quad (4.30)$$

les équations de Newton-Euler s'écrivent donc comme suit :

$$\begin{cases} F + m g = m \gamma_G \\ M_G = I \dot{\Omega} + \Omega \times I \Omega \end{cases} \quad (4.31)$$

avec :

- m : la masse de la nacelle.
- g : vecteur accélération de la gravitation.
- γ_G : accélération du centre de gravité de la nacelle.
- I : la matrice d'inertie de la nacelle.
- Ω : vitesse angulaire de la nacelle.
- $\dot{\Omega}$: accélération angulaire de la nacelle.

Il est préférable d'exprimer les équations de Newton-Euler en fonction de l'accélération du point C . Pour ce faire, on a :

$$\gamma_G = \gamma_C + \dot{\Omega} \times GC + \Omega \times (\Omega \times GC) \quad (4.32)$$

les équations deviennent :

$$\begin{cases} F + m.g = m(\gamma_C + \overline{GC}.\dot{\Omega} + (\Omega \times GC) \times \Omega) \\ M = (I - m.\overline{GC}^2).\dot{\Omega} - m.\overline{GC}.\gamma_C + \Omega \times I.\Omega - m.\overline{GC}(g + \Omega \times (\Omega \times GC)) \end{cases} \quad (4.33)$$

\overline{GC} est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -z_{GC} & y_{GC} \\ -z_{GC} & 0 & -x_{GC} \\ y_{GC} & -x_{GC} & 0 \end{pmatrix}$

Le système (4.33) s'écrit, sous la forme matricielle, suivante :

$$F = A.\dot{W} + B \quad (4.34)$$

soit : $\omega = (\Omega \times GC) \times \Omega$

où : \dot{W} est la dérivée du torseur cinématique, A une matrice (6×6) et B un vecteur de dimension 6 tels que :

$$A = \begin{pmatrix} m.I_{33} & m.\overline{GC} \\ -m.\overline{GC} & I - m.\overline{GC}^2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} m.\omega \\ \Omega \times I.\Omega + m.\overline{GC}(\omega - g) \end{bmatrix}$$

I_{33} est la matrice identité d'ordre 3.

Des deux relations (4.29) et (4.34), on déduit :

$$A \cdot \dot{W} + B = J^{-T} \cdot \tau + \Gamma_N \quad (4.35)$$

- Trouver l'expression du torseur Γ_N des forces normales, en fonction de la dérivée du torseur cinématique \dot{W}

l'accélération γ_i du point A_i est donnée par la relation :

$$\gamma_i = \gamma_C + \dot{\Omega} \times CA_i + \Omega \times (\Omega \times CA_i) \quad (4.36)$$

en écriture matricielle, on aura :

$$\gamma_i = C_i \cdot \dot{W} + D_i \quad (4.37)$$

C_i est une matrice (6x6) et, définie comme suite :

$$C_i = \begin{pmatrix} I_{33} & -\overline{CA_i} \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

D_i est un vecteur de dimension 6 défini par:

$$D_i = \left[\Omega \times (\Omega \times CA_i) \right] \quad (4.39)$$

la projection de γ_i sur la normale à u_i est γ_{Ni} tel que :

$$\gamma_{Ni} = (u_i \times \gamma_i) \times u_i \quad (4.40)$$

en écriture matricielle, on a :

$$\gamma_{Ni} = -\overline{u_i} C_i \dot{W} - \overline{u_i}^2 \cdot D_i \quad (4.41)$$

D'autres part on a :

$$F_{Ni} = \frac{-j_i}{\rho_i^2} \gamma_{Ni} \quad (4.42)$$

on défini :

$$F_N = \sum_{i=1}^6 F_{Ni} \quad (4.43)$$

$$\text{et } M_N = \sum_{i=1}^6 CA_i \times F_{Ni} \quad (4.44)$$

qui sont, en fait, les composantes du vecteur F_N .

Des deux relations (4.41) et (4.42) on écrit :

$$\begin{cases} F_N = \left(\sum_{i=1}^6 \frac{j_i}{\rho_i^2} \overline{u_i}^2 C_i \right) \dot{W} + \sum_{i=1}^6 \frac{j_i}{\rho_i^2} (\overline{u_i}^2 \cdot D_i) \\ M_N = \left(\sum_{i=1}^6 \frac{j_i}{\rho_i^2} \overline{CA_i u_i}^2 C_i \right) \dot{W} + \sum_{i=1}^6 \frac{j_i}{\rho_i^2} (\overline{CA_i u_i}^2 \cdot D_i) \end{cases} \quad (4.45)$$

sous forme matricielle, le vecteur F_N s'écrit :

$$F_N = V_1 \cdot \dot{W} + V_2 \quad (4.46)$$

où V_1 et V_2 sont respectivement la matrice (6x6) et le vecteur de dimension 6, donnés par les relations suivantes :

$$V_1 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^6 \frac{j_i}{\rho_i^2} \overline{u_i}^2 C_i \\ \sum_{i=1}^6 \frac{j_i}{\rho_i^2} \overline{CA_i u_i}^2 C_i \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 \frac{j_i}{\rho_i^2} \overline{u_i}^2 D_i \\ \sum_{i=1}^6 \frac{j_i}{\rho_i^2} \overline{CA_i u_i}^2 D_i \end{bmatrix}$$

Ainsi, la relations (4.35) devient :

$$(A - V_1) \dot{W} + (B - V_2) = J^{-T} \tau \quad (4.47)$$

soit :

$$\tau = J^T (A - V_1) \dot{W} + J^T (B - V_2) \quad (4.48)$$

L'équation ci-dessus représente le modèle dynamique inverse de la plate-forme de Stewart.

Le modèle dynamique direct est déduit directement à partir du modèle inverse. Par simple inversion de matrices, ce modèle direct se présente comme suit :

$$\dot{W} = (A - V_1)^{-1} J^{-T} \tau - (A - V_1)^{-1} (B - V_2) \quad (4.49)$$

Représentation graphique des efforts

La simulation a été faite sur la MPS dont les caractéristiques inertielles sont :

- la masse est de 500 Kgs
- la matrice d'inertie est I telle que :

$$I = \begin{pmatrix} 35.5 & 0 & 0 \\ 0 & 35.5 & 0 \\ 0 & 0 & 71.0 \end{pmatrix} \quad (\text{kg.m}^2)$$

- la matrice d'inertie des segments supposée constante est J_i telle que :

$$J_i = \begin{pmatrix} 10.0 & 0 & 0 \\ 0 & 10.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{kg.m}^2)$$

Pour une consigne d'accélérations de $\gamma_x = \gamma_y = 6m/s^2$ et pour une trajectoire à orientation constante on a obtenu les graphes suivants :

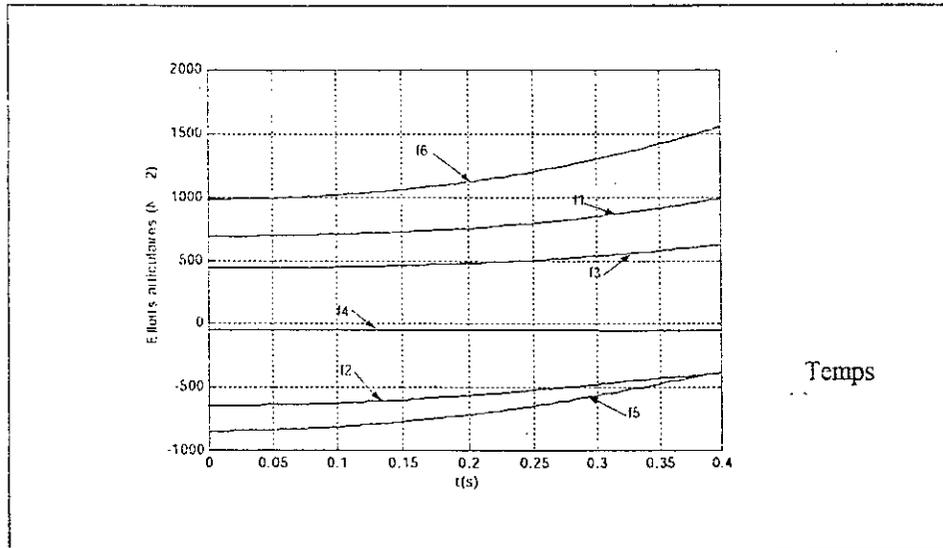


Fig.4.3.les efforts aux actionneurs pour une accélération constante égale à 0.5g.

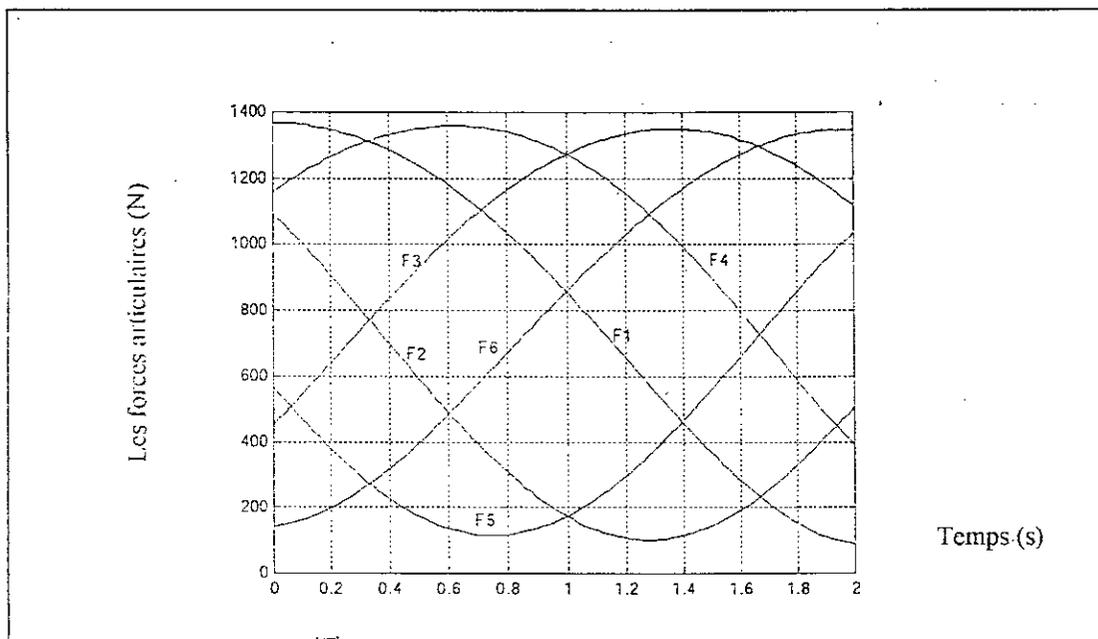


Fig.4.4.Efforts aux actionneurs pour une translation de la nacelle suivant l'axe z

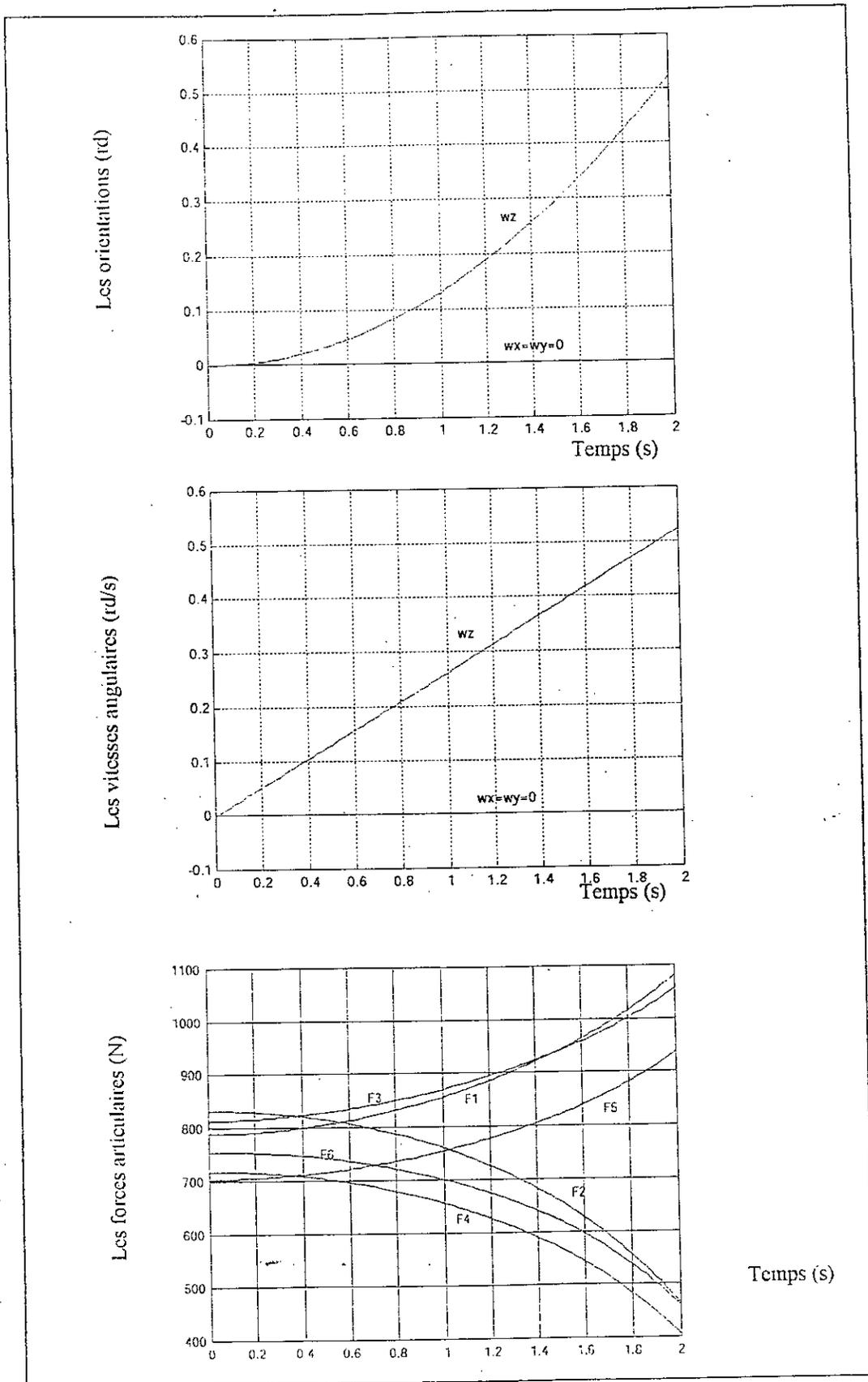


Fig.4.5. Les forces aux actionneurs pour un pivotement de la nacelle autour de l'axe Z

Interprétation des résultats

- Le graphe de la figure 4.3 présente la variation en fonction du paramètre temps des efforts fournis par les actionneurs afin de garantir une accélération linéaire de la nacelle de $\gamma_x = \gamma_y = 6m/s^2$.
- Le graphe de la figure 4.4. présente la variation en fonction du temps des efforts articulaires pour assurer une translation de la nacelle suivant l'axe z. on remarque l'effet de compensation entre les vérins afin de réaliser cette tâche ; les vérins 3,5,6 offrent un effort croissant tandis que les autre 1,2,4 sont en relaxation (à partir de $t=0.6s$ pour vérin 4).
- La figure 4.5. nous informe sur la manière de gestion des efforts pour effectuer un pivotement de la nacelle autour de l'axe z .
- Les résultats obtenus sont parfaitement en accord avec les résultats obtenus par un nombre important de chercheur notamment Jean Pierre Merlet .

4.5.conclusion

Dans ce chapitre nous avons pu faire l'étude statique et dynamique d'une plate forme de Stewart ; pour la statique de la plate forme on a pu analyser et déterminer les efforts généralisés ainsi que les efforts admissibles pour une configuration de la nacelle et en plus de ça on a fait sortir la matrice de rigidité du mécanisme. L'étude dynamique a pour but la détermination des efforts par lesquels les actionneurs sont sollicités, et leurs variations par rapport au temps afin d'assurer une commande en temps réel de la plate forme.

Conclusion

Conclusion

Ce travail rentre dans le domaine de la modélisation mécanique d'un simulateur de vol à base de plate forme de Stewart ; qui est un robot parallèle à six degrés de libertés.

La modélisation des phénomènes mécaniques (vitesses, accélérations, efforts et moments) de ce simulateur passe obligatoirement par la modélisation des même effets sur la plate forme de Stewart qui le supporte c'est pour cette raison qu'on a omet de citer dans ce travail l'expression de simulateur de vol pour la remplacer carrément par "plate forme de Stewart".

On a cru intéressant de présenter ces manipulateurs d'une manière détaillée et présenter leurs applications hors simulateur de vol.

La chronologie de modélisation passe par quatre étapes :

- La modélisation géométrique : qui nous permet de calculer les postures et les positions de l'élément terminal et de plus connaître l'espace de travail du manipulateur.
- La modélisation cinématique : elle nous permet de calculer les vitesses et les accélérations aux niveaux des actionneurs et de la plate forme mobile et d'autre part elle nous renseigne sur les vitesses opérationnelles autorisées pour une plage de variation des vitesses articulaires.

Dans cette partie on a aussi parler d'un phénomène qui gêne la procédure et le fonctionnement normal des PFS : c'est le problème des singularités dont on a proposé une méthode pour localiser les lieux afin d'éviter un dysfonctionnement du système.

- La modélisation statique : elle nous permet de calculer les efforts nécessaires pour que la plate forme supporte une charge fixe, et aussi déterminer les efforts maximums et admissibles. Le problème statique nous conduit à l'étude de la rigidité du mécanisme dont on a fait sortir la matrice de rigidité.
- La modélisation dynamique : elle nous permet de connaître les efforts nécessaires instantanément fournis par les vérins pour que la nacelle ait une dynamique ciblée.

Ce travail s'inscrit dans un cadre d'étude général des plates formes de Stewart qui représente un domaine très vaste et qui présente certaines difficultés à cerner totalement vu les problèmes rencontrés notamment on ce qui concerne l'élaboration des modèles géométrique et cinématique direct et la détermination de l'espace de travail. c'est pour cela qu'on propose de traiter dans d'autres travaux d'une manière détaillée les thèmes suivant :

- L'élaboration d'une méthode numérique pour déterminer le MGD.
- L'élaboration d'une méthode numérique pour déterminer le MCD.
- Le mariage des outils numériques et des techniques graphiques pour mieux représenter l'espace de travail d'une plate forme de Stewart.
- Etude dimensionnelle d'un simulateur de vol.

Bibliographie

[Merlet 98] Jean-Pierre Merlet

Singular configurations and Grassmann Geometry

INRIA institut national de recherche en informatique et en automatique; rapport de recherche
N° 791. Février.1988

[Merlet 97] Jean Pierre-Merlet.

Estimation efficace des caractéristiques de robots parallèles: Extremums des raideurs et des coordonnées, vitesses, forces articulaires et Singularités dans un espace de travail en translation

INRIA institut national de recherche en informatique et en automatique; rapport de recherche
N° 3243. Septembre 1997

[Merlet 93] Jean Pierre-Merlet.

Manipulateurs parallèles, 6eme partie :détermination des espaces de travail en orientation.

INRIA institut national de recherche en informatique et en automatique; rapport de recherche
N° 1921. Mai 1993

[Chablat 98] Damien Chablat

Domaines d'unicité et parcourabilité pour les manipulateurs pleinement parallèles

Thèse doctoral setenue le 6 novembre 1998 à à l'école Centrale de Nantes.

[Luc 96]Luc Tancredi, Monique Teillaud

Géométrie synthétique et robots parallèles

INRIA institut national de recherche en informatique et en automatique rapport de recherche
N° 2962 Août 1996.

[Bon01]Illian Bonev et Luc Rolland

www.parallelemic.org/Terminology/GeneralFR.htm

Mise à jour : 28 janvier 2001

[Grou 02] Stéphane Grousset

groupe de robotique parallèle 28.10.2002

[Bor.97] Boris Mayer-st-onge types de singularités

www.robot.gmc.ulaval.ca/~boris/MAITRISE/SINGULARITE

28.05.1997

[Luc] Luc Rolland

Le projet PolKA du laboratoire lorrain de recherche en informatique (LORIA)

[Gos 90] Clément Gosselin et Angeles J

singularity analysis of closed loop kinematics chains

IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS AND AUTOMATION p.281-290 juin 1990

[Had 99] M Haddad

modélisation des déformations des bras manipulateurs par les concepts de bases de la théorie des poutres. Evaluation et compensation des erreurs .

Mémoire magister EMP 28 septembre 1999.

[Kim 99] Doik Kim and Wankyun Chung

Analytic Singularity Equation and Analysis of Six-DOF Parallel Manipulators Using Local Structurization Method

IEEE transactions on robotics and automation, vol. 15, no. 4, august 1999

[Ait 92] Ait ahmed et M.renaud

dynamique modeling of closed chain mécanisms and its application for 6DDL parallal actuated manipulators .

Mai 92

[Kour 97] Kourosh E. Zanganeh, Rsario Sinatra and jorge Angeles

Kinematics and dynamics of a six-degree-of-freedom parallel manipulator with revolute legs

Robotica (1997) volume 15, pp 385-394, Printed in the United Kingdom 1997 Cambridge University Press.

[Shim 99] J.H.Shim, D.S. Kwon, and H.S. Chom

Kinematics analysis and design of a sex-D.O.F 3-PRPS in-parallel manipulator

Robotica (1999) volume 17, pp. 269-281. Printed in the United Kingdom 1999. Cambridge University Press.

[Eber 00] Eberharter, J.

Kinematic Analysis of the Hexapod Telescope, Master Thesis,

TU-Graz, 113p., 2000. University of Innsbruck, Austria

[Xi 99] Xiang-Rong Xu, Won-Jee Chung, Young-Hyu Choi and Xiang-Ffeng Ma

A new dynamic formulation for robot manipulators containing closed kinematic chains

Robotica (1999) volume 17, pp.261-267. Printed in the United Kingdom 1999 Cambridge University Press

[Bor 00] Boris Mayer St-Onge Clément M. Gosselin.

Singularity Analysis and Representation of the General Gough-Stewart Platform.

The international journal of robotics research Vol. 19, N° 3, MARSH 2000, pp. 271-288.

[Mas 93] Masory O et Wang J

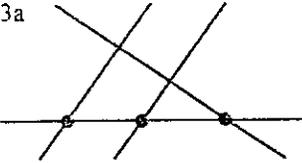
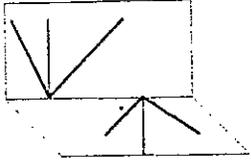
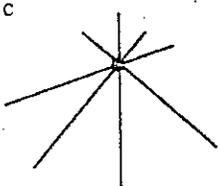
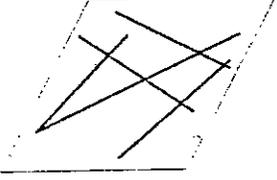
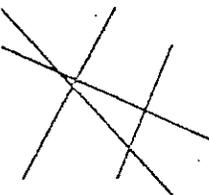
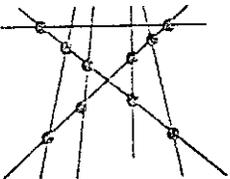
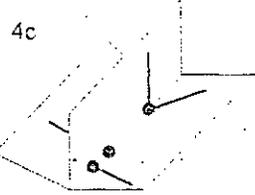
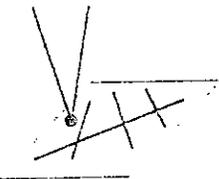
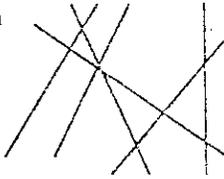
on the accuracy of a stewart platform part II : kinematic compensation and calibration

IEEE transactions on robotics and automation, Mai 1993

Annexe

Annexe 1

Conditions sur la dimension de la variété de Grassmann

d	Explication	Schématisation
1	La variété de dimension 1 appelée <i>Point</i> est engendrée par un seul vecteur	
2	La variété de dimension 2 appelée <i>ligne</i> engendrée par deux droites gauches	
3	Une variété de dimension 3 (<i>Plan</i>) apparaît quant : 3a) toutes les lignes appartiennent à un <i>regulus</i> . 3b) toutes les lignes appartiennent l'union de deux faisceaux plan de lignes non coplanaires mais qui ont une ligne commune.	3a  3b 
3	Une variété de dimension 3 (<i>Plan</i>) apparaît aussi quant : 3c) toutes les lignes ont un point commun mais ne sont pas coplanaires 3d) toutes les lignes sont coplanaires mais ne constituent pas faisceau plan	3c  3d 
4	Une variété de dimension 4 (<i>Congruence</i>) apparaît quant : 4a) variété engendrée par 4 lignes gauches. Aucune de ces lignes ne coupe le regulus engendré par les 3 autres. 4b) toutes les lignes concurrentes à deux droites gauches.	4a  4b 
4	Une variété de dimension 4 (<i>Congruence</i>) apparaît aussi quant : 4c) toutes les lignes appartiennent à l'union de trois faisceaux plan différents mais qui ont une ligne commune. 4d) toutes les lignes sont dans un plan ou passent par un point de ce plan.	4c  4d 
5	Une variété de dimension 5 (<i>Complexe</i>) apparaît quant : 5a) toutes les ligne coplanaires ont un point en commun. 5b) toutes les lignes sont concurrentes avec une ligne de l'espace.	5a  5b 

Annexe 6.

Valeurs des Coefficients de L'équation
 Des Singularités

Table 4. Linear Combinations to Obtain the Singularity Equation

Degree	Terms	Coefficient	Combination
3	x^3	F_1	$g h k n - m$
	$x^2 y$	F_2	$g n k u - m$
	$x^2 z$	F_3	$g h u n - m$
	$x y^2$	F_4	$g u k l q - m$
	$x y z$	F_5	$g h k n - m$
	$x y^2 z$	F_6	$g h u n - m$
	$x^2 y z$	F_7	$g h u k l p r$
	$x^2 y z^2$	F_8	$g h u k l p r$
	$x^2 y z^2$	F_9	$g h u k l p r$
	$x^2 y z^2$	F_{10}	$g h u k l p r$
	$x^2 y z^2$	F_{11}	$g h u k l p r$
	$x^2 y z^2$	F_{12}	$g h u k l p r$
1	x^2	F_3	$g h u n - m$
	$x y$	F_4	$g h k l q - m$
	$x z$	F_5	$g h u n - m$
	$x^2 y$	F_6	$g h u k l p r$
	$x^2 z$	F_7	$g h u k l p r$
	$x y^2$	F_8	$g h u k l p r$
	$x y z$	F_9	$g h u k l p r$
	$x y^2 z$	F_{10}	$g h u k l p r$
	$x y^2 z$	F_{11}	$g h u k l p r$
	$x y^2 z$	F_{12}	$g h u k l p r$
	$x y^2 z$	F_{13}	$g h u k l p r$
	0	CONST	F_{10}