

10/00

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE**

PROJET DE FIN D'ETUDES  
EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME  
D'INGENIEUR D'ETAT EN AUTOMATIQUE

المركز الوطني المتعدد التقنيات  
المكتبة — المصنعة  
Ecole Nationale Polytechnique

**COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE GENERALISEE**

**DES SYSTEMES INTERCONNECTES :**

**APPLICATION AU ROBOT PUMA 560**

Proposé et dirigé par :

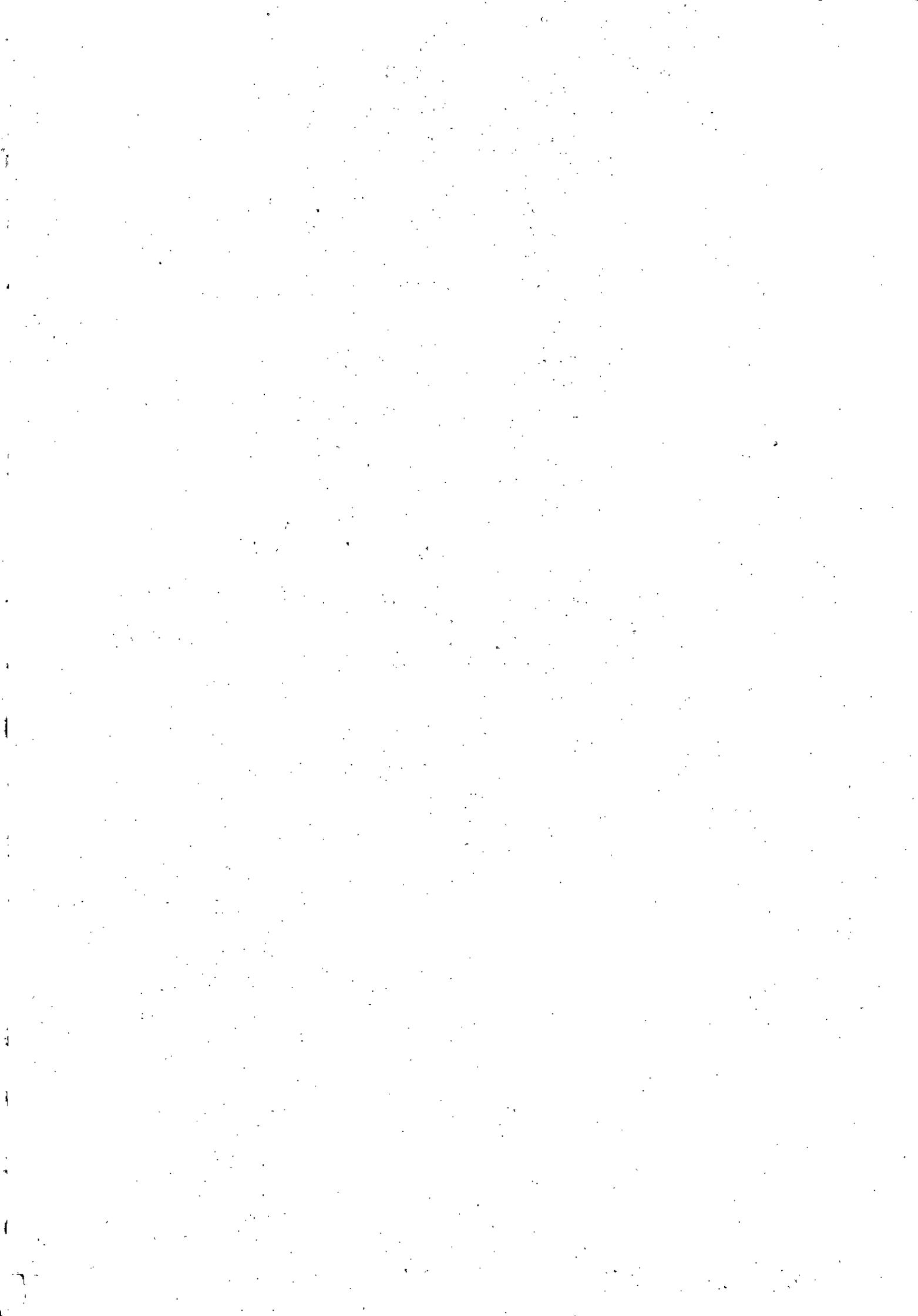
Mr F. BOUDJEMA  
Mr D. BOUKHETALA

Présenté par :

Nadjim Mehdi HORRI

PROMOTION  
1999/2000

ENP 10, Avenue Hassen Badi, 16200, El Harrach, Alger



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES  
EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME  
D'INGENIEUR D'ETAT EN AUTOMATIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

**COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE GENERALISEE**

**DES SYSTEMES INTERCONNECTES :**

**APPLICATION AU ROBOT PUMA 560**

Proposé et dirigé par :

Mr F. BOUDJEMA  
Mr D. BOUKHETALA

Présenté par :

Nadjim Mehdi HORRI

PROMOTION  
1999/2000

ENP 10, Avenue Hassen Badi, 16200, El Harrach, Alger

*A ma mère*

*A mon père*

*A mes sœurs*

*A ma grand mère*

*A mes tantes et oncles*

*A mes cousines et cousins*

*Et tout particulièrement*

*A mes neveux et nièces*



*Je ne saurais clore ce mémoire sans adresser mes vifs remerciements à Messieurs F.BOUDJEMA et D.BOUKHETALA pour leur disponibilité tout au long de ce travail et pour leurs précieux conseils qui m'ont été d'un apport déterminant afin de mener mon travail à son terme. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.*

*Je tiens également à remercier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation et tout particulièrement messieurs R.ILOUL, H.CHEKIREB et M.TADJINE pour leur soutien.*

*Que tous mes amis de la promotion Automatique ainsi que ceux des années précédentes et des autres spécialités trouvent ici l'expression de mes meilleures salutations.*

*Je ne saurais oublier dans cette énumération, nécessairement incomplète, tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, particulièrement tout le personnel de la scolarité, de la direction des études (et en particulier Mr Boubaker), de la bibliothèque et du service des périodiques pour leur disponibilité et leur aide précieuse tout au long de l'année.*

*Naturellement, que ma famille trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour son soutien et tout simplement pour sa présence.*

*Nadjim Mehdi HORRI*

## ملخص

في هذه المذكرة تم تقديم طريقة التحكم اللامركزي المتعددة البنيات بشكليها الغير المعممة ثم المعممة مع أخذ مشتقات المداخل بعين الاعتبار.

هاتين الطريقتين تم تطبيقهما على آلية من نوع PUMA 560. فيما يخص الشكل المعمم، إعتبرنا في بادئ الأمر النموذج الخطي المستمد من طرق المطابقة، ثم النموذج اللاخطي مع أخذ الثوابت الزمنية الميكانيكية بعين الاعتبار.

نموذج التحكم المعمم مكثنا من إزالة ظاهرة الرم التي لا تزال قائمة مع النموذج غير المعمم، و ذلك مع تحسن خصائص ملاحقة المسار باعتبار مساحات انزلاق متعددة.

الكلمات المفتاحية : بنيات متعددة معممة ، نمط الانزلاق ، مساحات الانزلاق ، تحكم لامر كزي.

## Abstract

In this work, the decentralised variable structure control using sliding modes is presented in the two forms, non generalised then generalised by considering the control derivatives .

These two control approaches have been applied to the PUMA 560 robot arm .As regards to the generalised approach ,we first considered the presumed linear model obtained from identification then the nonlinear one by considering the mechanical time constants .

The generalised form of the control has enabled the elimination of chattering that still appears in the non generalised form and gives better performances for the following trajectory by considering different sliding surfaces.

key words: generalised variable structure ,sliding modes ,sliding surfaces ,decentralised control .

## Resumé

Dans ce memoire, la commande à structure variable décentralisée par les modes glissants est présentée sous ses deux formes , non généralisée puis généralisée en tenant compte des dérivées des entrées .

Ces deux approches de commande ont été appliquées au bras manipulateur PUMA 560. Concernant l'approche généralisée, on a d'abord considéré le modèle présumé linéaire issu de l'identification puis le modèle non-linéaire en tenant compte des constantes de temps mécaniques.

La forme généralisée de la commande a permis l'élimination du broutement encore présent dans la forme non généralisée tout en assurant de meilleures performances pour la poursuite en considérant différentes surfaces de glissement.

mots clés: structure variable généralisée , modes glissants, surfaces de glissement, commande décentralisée.

# TABLE DES MATIERES



**INTRODUCTION GENERALE .....1**

## **I MODELISATION CINEMATIQUE ET DYNAMIQUE DU ROBOT PUMA 560**

<b>I.1 INTRODUCTION .....</b>	<b>3</b>
<b>I.2 MODELISATION CINEMATIQUE .....</b>	<b>3</b>
<b>I.2.1 MODELISATION CINEMATIQUE DIRECTE .....</b>	<b>3</b>
<b>I.2.2 CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG.....</b>	<b>4</b>
<b>I.2.3 PRESENTATION DU ROBOT PUMA 560 .....</b>	<b>6</b>
<b>I.2.4 MODELISATION GEOMETRIQUE .....</b>	<b>8</b>
<b>I.2.5 MODELISATION CINEMATIQUE INVERSE .....</b>	<b>9</b>
<b>I.3 GENERATION DE TRAJECTOIRE .....</b>	<b>11</b>
<b>I.4 MODELISATION DYNAMIQUE .....</b>	<b>12</b>
<b>I.4.1 INTRODUCTION .....</b>	<b>12</b>
<b>I.4.2 APPROCHE D'EULER-LAGRANGE .....</b>	<b>12</b>
<b>I.4.2.1 METHODE DIRECTE 1 .....</b>	<b>15</b>
<b>I.4.2.2 METHODE DIRECTE 2 .....</b>	<b>16</b>
<b>I.4.3 MODELE DYNAMIQUE GENERAL .....</b>	<b>18</b>
<b>I.4.4 MODELE DYNAMIQUE DU ROBOT PUMA 560 .....</b>	<b>19</b>
<b>I.5 RESULTATS DES SIMULATIONS .....</b>	<b>22</b>
<b>I.6 CONCLUSION .....</b>	<b>22</b>

## **II COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE DECENTRALISEE**

<b>II.1 INTRODUCTION .....</b>	<b>24</b>
<b>II.2 DEFINITIONS.....</b>	<b>25</b>
<b>II.3 PRINCIPE DE LA METHODE .....</b>	<b>28</b>
<b>II.4 METHODE DE SYNTHESE DE LA COMMANDE .....</b>	<b>28</b>
<b>II.4.1 METHODE DE FILIPPOV .....</b>	<b>28</b>
<b>II.4.2 METHODE D'UTKIN .....</b>	<b>29</b>
<b>II.5 INTRODUCTION A L'APPROCHE DE DECENTRALISATION...31</b>	
<b>II.6 MODELE DYNAMIQUE DECENTRALISE .....</b>	<b>32</b>
<b>II.7 SYNTHESE DE LA COMMANDE DECENTRALISEE.....34</b>	
<b>II.7.1 SELECTION DES SURFACES DE GLISSEMENT.....34</b>	

<b>II.7.2 CONSTRUCTION DE LA COMMANDE</b>	
<b>DECENTRALISEE .....</b>	<b>37</b>
<b>II.8 APPLICATION DE LA COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE</b>	
<b>DECENTRALISEE .....</b>	<b>42</b>
<b>II.9 RESULTATS DES SIMULATIONS .....</b>	<b>44</b>
<b>II.10 CONCLUSION .....</b>	<b>44</b>
<b>III COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE GENERALISEE</b>	
<b>III.1 INTRODUCTION .....</b>	<b>47</b>
<b>III.2 FORMULATION DE LA STRUCTURE VARIABLE DANS LE</b>	
<b>CONTEXTE DE L'ALGEBRE DIFFERENTIELLE .....</b>	<b>48</b>
<b>III.2.1 CORPS DIFFERENTIELS .....</b>	<b>48</b>
<b>III.2.1.1 EXTENSION NON DIFFERENTIELLEMENT</b>	
<b>ALGEBRIQUE .....</b>	<b>48</b>
<b>III.2.1.2 EXTENSION NON DIFFERENTIELLEMENT</b>	
<b>TRANSCENDANTE .....</b>	<b>49</b>
<b>III.2.1.3 EXTENSION DIFFERENTIELLEMENT</b>	
<b>ALGEBRIQUE .....</b>	<b>49</b>
<b>III.2.1.4 EXTENSION DIFFERENTIELLEMENT</b>	
<b>TRANSCENDANTE .....</b>	<b>49</b>
<b>III.2.1.5 ESPACES VECTORIELS DIFFERENTIELS .....</b>	<b>50</b>
<b>III.3 DYNAMIQUES .....</b>	<b>52</b>
<b>III.3.1 DYNAMIQUES NON-LINEAIRES .....</b>	<b>52</b>
<b>III.3.2 DYNAMIQUES LINEAIRES .....</b>	<b>53</b>
<b>III.4 ELEMENTS PRIMITIF ET CYCLIQUE .....</b>	<b>54</b>
<b>III.5 FORME CANONIQUE DE COMMANDE GENERALISEE .....</b>	<b>55</b>
<b>III.5.1 FORME NON-LINEAIRE .....</b>	<b>55</b>
<b>III.5.2 FORME LINEAIRE .....</b>	<b>56</b>
<b>III.6 COMMANDE A REGIME GLISSANT GENERALISEE .....</b>	<b>57</b>
<b>III.6.1 FORMES CANONIQUES DE COMMANDE ET</b>	
<b>D'OBSERVABILITE D'UN SYSTEME DYNAMIQUE</b>	
<b>III.6.2 BOUCLAGE LINEAIRE .....</b>	<b>60</b>
<b>III.6.3 INFLUENCE DES DERIVEES DE L'ENTREE SUR LA</b>	
<b>SORTIE .....</b>	<b>64</b>
<b>III.6.3.1 CAS MONOVARIABLE .....</b>	<b>64</b>
<b>III.6.3.2 CAS MULTIVARIABLE .....</b>	<b>70</b>
<b>III.6.4 DYNAMIQUE GENERALISEE DANS L'ESPACE DE</b>	
<b>L'ERREUR .....</b>	<b>75</b>
<b>III.6.4.1 FORME CANONIQUE DE COMMANDE</b>	
<b>GENERALISEE D'UN SYSTEME MONOVARIABLE</b>	
<b>NONLINEAIRE DANS LE MODE DE POURSUITE .....</b>	<b>76</b>

III.6.4.2	FORME CANONIQUE DE COMMANDE GENERALISEE D'UN SYSTEME MULTIVARIABLE NONLINEAIRE DANS LE MODE DE POURSUITE .....	83
III.7	METHODE DE SYNTHESE DES CORRECTEURS A STRUCTURE VARIABLE GENERALISEE POUR UN SYSTEME DECOUPLE DU SECOND ORDRE .....	85
III.7.1	COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE GENERALISEE AVEC MODELE DE LA TRAJECTOIRE DE REFERENCE .....	85
III.7.2	SYNTHESE DE LA LOI DE COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE GENERALISEE .....	86
III.8	IDENTIFICATION DU BRAS MANIPULATEUR .....	89
III.8.1	RAPPEL SUR LES METHODES D'IDENTIFICATION PARAMETRIQUE .....	89
III.8.1.1	PRINCIPE D'IDENTIFICATION PARAMETRIQUE .....	89
III.8.1.2	STRUCTURE DU MODELE .....	89
III.8.2	IDENTIFICATION PAR UN PROCESSUS ARX MULTIVARIABLE .....	91
III.8.2.1	PROCESSUS ARX MULTIVARIABLE .....	92
III.8.2.2	RESULTATS DE L'IDENTIFICATION AVEC LE PROCESSUS ARX MULTIVARIABLE .....	93
III.9	APPLICATION DE LA COMMANDE GVS .....	95
III.9.1	SYNTHESE A PARTIR DU MODELE PRESUME LINEAIRE .....	95
III.9.1.1	SURFACE DE GLISSEMENT LINEAIRE .....	95
III.9.1.2	SURFACE DE GLISSEMENT NON-LINEAIRE.....	96
III.9.2	SYNTHESE A PARTIR DU MODELE NON-LINEAIRE....	97
III.9.2.1	SURFACE DE GLISSEMNT LINEAIRE .....	98
III.9.2.2	SURFACE DE GLISSEMENT NON-LINEAIRE ...	100
III.10	RESULTATS DES SIMULATIONS .....	101
III.11	CONCLUSIONS .....	104
	CONCLUSION GENERALE .....	122

# INTRODUCTION GENERALE

La problématique de la commande des systèmes non-linéaires de grande dimension et des systèmes interconnectés que constituent les robots manipulateurs est à l'heure actuelle l'une des préoccupations majeures et l'un des axes de recherche privilégiés dans le domaine de la robotique. En effet, la complexité de la dynamique des robots, due aux interconnexions entre les différents axes d'un bras manipulateur mais aussi aux variations paramétriques par rapport à la charge manipulée généralement inconnue, rend le contrôle pratiquement impossible par les régulateurs standards à action proportionnelle, intégrale et dérivée.

En règle générale, un robot se compose de sept parties principales: la structure mécanique articulée constituant son squelette et qui comprend des segments placés les uns à la suite des autres, la source d'énergie (électrique dans notre cas), les actionneurs, les transmissions, les capteurs internes et externes ainsi que le système de commande. Les segments du robot sont mobiles les uns par rapport aux autres et cette mobilité s'exprime en termes de degrés de liberté. La structure mécanique dans le cas de robots à base fixe (cas traité dans ce projet) comporte deux parties fonctionnelles: le porteur, généralement doté de trois degrés de liberté permettant de positionner son extrémité en un point quelconque de l'espace atteignable et l'organe terminal, doté de possibilités d'orientation (1, 2 ou 3 degrés de liberté).

Par ailleurs, les exigences de l'industrie concernant les performances statiques et dynamiques en rapidité et en précision mais aussi les considérations pratiques font que la production exige des manipulateurs de plus en plus légers réalisant des tâches à grandes vitesses et précision en gardant une bonne répétabilité.

Les recherches effectuées dans ce sens ont abouti à un certain nombre d'algorithmes de commande robuste dont la commande à structure variable classique par les modes glissants illustre un parfait exemple. C'est en URSS que depuis les années soixante, plusieurs algorithmes ont vu le jour et ceci à partir des résultats théoriques du mathématicien russe A.F.Filippov qui a résolu le problème de l'équation différentielle à second membre discontinu. L'équipe du professeur S.V.Emelianov est celle dont les résultats ont été les plus connus. De nombreuses suites ont été données à cet axe de recherche, notamment avec V.I.Utkin qui a mis en évidence le principe de la commande équivalente. Parmi les applications qui ont suivi et qui concernent l'application de la technique en robotique, on peut citer par exemple les articles de V.I.Utkin, J.J.E.Slotine, F.Harashima, T.Ueshiba, H.Hashimoto.

Malgré les améliorations ainsi apportées pour la commande, un certain nombre de problèmes continuent à compromettre l'application des modes glissants classiques. Le problème de la centralisation de la commande qui rend la synthèse plus difficile peut être résolu par différentes approches de décentralisation. L'autre problème de taille, propre à la méthode de la commande à structure variable classique, est le phénomène de broutement « chattering » correspondant à un phénomène d'oscillations à haute fréquence compromettant la précision et qui constitue ainsi le principal inconvénient de cette technique.

L'élimination du « chattering » est donc devenue elle-même un sujet de recherche. Plusieurs solutions ont été proposées, La plus en vogue a consisté à remplacer la fonction SIGN ayant l'allure d'un relais par des fonctions plus douces « smooth function » au prix

d'une faible détérioration des performances. Néanmoins, le recours à ces fonctions d'amélioration, caractérisées par un gain élevé afin d'obtenir une faible erreur d'approximation ne garantit pas la disparition des oscillations. En effet, l'approximation du mode glissant ainsi généré garantit la convergence dans un petit voisinage de la surface de commutation mais rien ne peut être dit sur le comportement dans ce voisinage. D'autres approches ont été envisagées par la suite, le plus souvent basées sur un préfiltrage au niveau de l'entrée en faisant intervenir les dynamiques de la commande. Ces approches dites « integral sliding mode control » ou encore « second order sliding mode control » étaient donc globalement basées sur un même principe.

Par la suite, l'introduction de l'algèbre différentielle comme nouvel outil de synthèse en automatique et les résultats des travaux théoriques de Fliess et Messenger concernant les formes canoniques généralisées et la stabilisation discontinue des systèmes a donné naissance à une approche plus générale dans le sens des deux dernières citées, désormais connue sous le nom de commande à structure variable généralisée « generalised variable structure control ». Cette dernière méthode avec une approche décentralisée constituera donc la technique adoptée dans cette étude en vue de la commande d'un système interconnecté représentant un bras manipulateur de type série et de structure rotoïde (R-R-R) à 3 rotations principales (par rapport à la base, à la poignée et au coude) et 3 degrés de liberté (du porteur) pris en considération (parmi 6 dans le cas porteur + effecteur). Ce bras manipulateur est le robot PUMA 560 fabriqué essentiellement par la société américaine Unimation, constituant l'un des robots d'assemblage les plus utilisés en industrie et dans les laboratoires.

L'objectif de cette étude est la comparaison entre deux(2) formes de commande à structure variable décentralisée, la forme non généralisée et la forme généralisée faisant intervenir les dérivées des entrées. Cette comparaison sera entreprise du point de vue de l'élimination du phénomène de broutement mais aussi par rapport aux performances en termes de précision (en régimes transitoire et permanent), de rapidité et de robustesse.

Ce travail est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la modélisation cinématique et dynamique du robot PUMA 560 basée sur les formalismes de Denavit-Hartenberg et d'Euler-Lagrange et à la simulation du système d'équations obtenues à vide.

Le second chapitre concerne la commande à structures variables non généralisée dans le cas décentralisé sans l'utilisation de fonctions d'amélioration.

Enfin en troisième partie, on appliquera la commande décentralisée par les modes glissants généralisés avec deux approches différentes pour la synthèse de la commande :

- La première consistera en la détermination d'un modèle présumé linéaire, faisant apparaître les commandes avec leurs dérivées, par identification paramétrique du bras manipulateur, ce qui revient en réalité à la synthèse de la commande en linéaire.
- Dans la seconde approche, on considérera le modèle dynamique décentralisé du bras manipulateur (qui est non-linéaire) mais en faisant cette fois intervenir les dérivées des entrées en tenant compte des constantes de temps mécaniques dont on aura au préalable étudié l'influence. On étudiera également les performances du système ainsi que l'atténuation ou élimination du phénomène de broutement en fonction des différents types de surfaces de glissement choisies (linéaires ou non).

## I.1 INTRODUCTION

La naissance de la production automatisée telle qu'on la connaît s'est produite aux environs des années 1975 et fût adoptée d'emblée au Japon. Le recours à cette nouvelle façon de produire dans les entreprises industrielles s'est accompagné d'une croissance de la productivité. Ceci a été rendu possible grâce à des robots manipulateurs à fonctions multiples et à tâches répétitives dont les performances en termes de rapidité, précision et répétabilité ont considérablement modifié le processus de production en milieu industriel.

Parmi les robots d'assemblage les plus utilisés dans l'industrie et dans les laboratoires d'université, les robots Puma sont probablement les plus communs. Conçus par Vic Schienmann et financés par General Motors au M.I.T ( Massachusetts Institute of Technology) au milieu des années 70, les robots Puma (Programmable Universal Machine for Assembly) ont été produits pendant de nombreuses années par la société américaine Unimation avant que d'autres sociétés ne le produisent sous licence (Westinghouse puis Staubli en suisse).

Le robot étudié dans ce travail est le robot PUMA560 . Ce robot est de structure sphérique à six axes alors que son poignet décrit trois rotations autour de trois axes rectangulaires et nous ne considérerons dans notre modélisation que les trois axes principaux à articulations rotoïdes (structure R-R-R).

Pour décrire convenablement le mouvement des trois axes, on adoptera la modélisation cinématique (convention de Denavit-Hartenberg) puis dynamique (formalisme d'Euler-Lagrange).

## I.2 MODELISATION CINEMATIQUE [ 4 ], [ 19 ], [ 21 ]

### I.2.1 MODELISATION CINEMATIQUE DIRECTE

Le modèle cinématique d'un robot manipulateur vise à repérer le déplacement du terminal par rapport au référentiel fixe dit espace de tâche. Ceci est rendu possible grâce à des transformations homogènes déterminant l'orientation d'un repère par rapport à l'autre en considérant le manipulateur comme une chaîne de liaisons connectées par des charnières ou glissières d'articulation.

#### ▪ Coordonnées homogènes d'un vecteur :

Pour simplifier les transformations entre repères, il est judicieux de ramener les informations cinématiques et dynamiques au repère d'inertie de la base en les localisant par rapport à leurs articulations avec des informations ramenées à la base.

Avec des rotations, on se contente d'une matrice de transformation de troisième ordre, mais avec une translation on augmente l'ordre de cette matrice à 4 afin de permettre le déplacement en translation entre référentiels. Dans ce cas, on augmente le vecteur position  $p = [p_x, p_y, p_z]$  pour avoir un vecteur position  $p' = [vp_x, vp_y, vp_z, v]$ . Le vecteur sera exprimé avec ses coordonnées physiques si  $v = 1$ .

L'expression de la matrice augmentée de transformation sera :

$$T = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Et on aura :  $p'_{xyz} = T \cdot p'_{uvw}$

Avec : OXYZ référentiel fixe au niveau du socle.

OUVW référentiel en mouvement par rapport à OXYZ.

T matrice de transformation entre ces deux référentiels.

## 1.2.2 CONVENTION DE DENAVIT –HARTENBERG

Le robot manipulateur est une chaîne de liaisons interconnectées à travers des articulations(charnières ou glissières).Chaque liaison fait des rotations ou translations par rapport au repère d'inertie représentant le référentiel fixe . La convention de Denavit-Hartenberg permet le passage d'un référentiel à l'autre grâce à des transformations homogènes préalablement définies. La principale difficulté pour l'application de cette méthode systématique est le choix adéquat des repères au niveau des liaisons afin de simplifier autant que possible le calcul des matrices homogènes et pour arriver à exprimer les informations de la base (espace de tâche) vers l'élément terminal ou l'inverse.

Cette méthode systématique concerne les chaînes cinématiques ouvertes où l'articulation possède un seul degré de liberté. Les surfaces adjacentes doivent rester en contact, et on utilisera à cet effet des charnières ou glissières.

La technique se présente sous forme d'étapes successives à suivre :

1. Numérotation des segments constitutifs du bras manipulateur de la base vers l'élément terminal en associant le zéro à la base et l'ordre n à l'élément terminal.
2. Définition des axes principaux de chaque segment :
  - $Z_{i-1}$  est l'axe de déplacement(translation ou rotation) du segment i dans le référentiel i-1.
  - L'axe  $x_i$  est perpendiculaire à  $Z_i$  et  $Z_{i-1}$ .
  - Si  $Z_i$  et  $Z_{i-1}$  ne se coupent pas, on prend  $x_i$  parallèle à l'axe perpendiculaire au plan formé par  $Z_i$  et  $Z_{i-1}$ .
  - Si par contre  $Z_i$  et  $Z_{i-1}$  sont colinéaires , on choisit  $x_i$  dans le plan perpendiculaire à  $Z_{i-1}$ .
3. Définition des paramètres de chaque articulation d'indice i :
  - $d_i$  : Coordonnée de l'origine  $O_i$  dans l'axe  $Z_{i-1}$ .  
C'est autrement dit la distance entre  $O_{i-1}$  et l'intersection de  $Z_{i-1}$  avec  $x_i$ .  
Cette distance est constante pour une charnière et variable pour une glissière.
  - $\theta_i$  : Angle obtenu par vissage de  $x_{i-1}$  vers  $x_i$  autour de  $Z_{i-1}$ .Cet angle représente constante pour le cas d'une glissière et une variable d'état pour celui d'une charnière.

- $a_i$  : Distance entre les axes  $z_i$  et  $z_{i-1}$  mesurée sur l'axe  $x_i$  négatif à partir de son origine jusqu'à l'intersection avec l'axe  $z_{i-1}$ .
- $\alpha_i$  : Angle entre  $z_i$  et  $z_{i-1}$  obtenu en vissant  $z_{i-1}$  vers  $z_i$  autour de  $x_i$ .

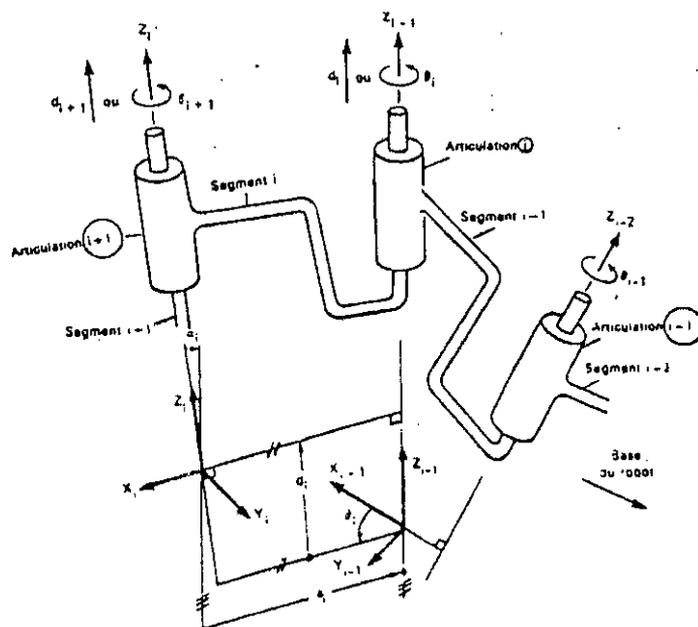


Fig I.1 : Systèmes de coordonnées associés au segments d'un robot et leurs paramètres selon la convention de Denavit-Hartenberg

4. Cette dernière étape consiste à former les matrices homogènes de transformation de Denavit-Hartenberg reliant rotation et translation.

La rotation est définie par la partie supérieure gauche de la matrice de transformation ; et la translation est définie par le vecteur à droite de la matrice.

$$T_{i-1}^i = \begin{bmatrix} C_{i-1}^i & d_{i-1}^i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I.1)$$

Avec :

$$C_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix} \quad (I.2)$$

Et :

$$d_{i-1}^i = [a_i \cos \theta_i \quad a_i \sin \theta_i \quad d_i]^T \quad (I.3)$$

Ce qui donne la matrice homogène de transformation en passant du référentiel  $i-1$  au référentiel  $i$  :

$$T_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I.4)$$

### I.1.3 PRESENTATION DU ROBOT PUMA 560 [ 4 ]

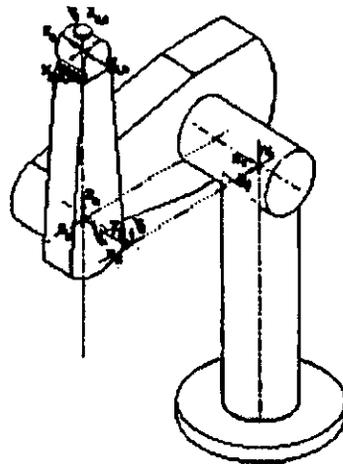


Fig I.2 : Représentation du robot Puma 560 à la position  $(\theta_1=0, \theta_2=0, \theta_3=0)$   
« Zero position angle »

En considérant les trois degrés de liberté caractérisant les trois rotations du robot, on dresse le tableau suivant :

N° de la liaison	Variable	$\theta_i$	$a_i$	$d_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$\theta_1$	0	0	$-90^\circ$
2	$q_2$	$\theta_2$	$l_2$	$d_2$	0
3	$q_3$	$\theta_3$	$l_3$	0	0

Tableau I.1 : Informations géométriques sur le robot Puma 560

■ DEFINITION DES REPERES ET MATRICES DE TRANSITION

1.  $R_0(X_0, Y_0, Z_0)$  : L'origine de ce repère d'inertie est prise à l'intersection entre l'axe de la première articulation et l'axe de liaison 1 avec :

$Z_0$  parallèle à la première articulation .

$X_0$  parallèle à l'axe de la liaison 1.

2.  $R_1(X_1, Y_1, Z_1)$  : L'origine de ce repère coïncide avec celle du repère  $R_0$  .L'axe  $Z_1$  est parallèle à l'axe de la première articulation.

3.  $R_2(X_2, Y_2, Z_2)$  : Ce repère repose sur la seconde articulation avec  $X_2$  suivant la direction de la liaison 3.

4.  $R_3(X_3, Y_3, Z_3)$  : Ce repère est sur le centre de masse de l'effecteur.

Les transformations obtenues en utilisant le formalisme de Denavit-Hartenberg sont :

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_1^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_1 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2^3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 & l_2 c_1 c_2 - d_2 s_1 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & l_2 c_2 s_1 + d_2 c_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & -l_2 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 & c_1 (l_2 c_2 - l_3 c_{23}) - d_2 s_1 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 & s_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) + d_2 c_1 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -(l_2 s_2 + l_3 s_{23}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Avec  $c_i = \cos \theta_i$  ;  $s_i = \sin \theta_i$  ;  $c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$  ;  $s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$ .

## I.2.4 MODELISATION GEOMETRIQUE [ 19 ]

La modélisation géométrique permet de connaître la position du bras manipulateur en fonction de sa configuration, en considérant la relation entre coordonnées opérationnelles et généralisées.

La portée de la charge est caractérisée par un point centrique dans l'espace qui définit une position en coordonnées cartésiennes et donne à l'élément terminal la position et l'orientation pour manipuler les objets.

Les transformations précédentes permettent d'exprimer la position de l'organe terminal par rapport au repère  $R_0$  sous la forme d'une fonction  $r(R_0)$ , à partir de variables articulaires  $q_i$ , comme suit :

$$\begin{cases} r = [P_x, P_y, P_z, 1]^T \\ q = [q_1, q_2, q_3]^T \\ r(R_0) = T_0^3 \cdot r_3^3 \end{cases} \quad (I.6)$$

Où :

$r_3^3$  : Coordonnées de l'outil terminal dans le référentiel  $R_3 \Rightarrow r_3^3 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ .

$T_0^3$  : Transformation homogène du référentiel  $R_0$  au référentiel  $R_3$ .

On obtient, en remplaçant la transformation homogène précédente par sa valeur :

$$\begin{cases} P_x = c_1(l_3c_2 + l_3c_{23}) - d_2s_1 \\ P_y = s_1(l_2c_2 + l_3c_{23}) + d_2c_1 \\ P_z = -(l_2s_2 + l_3s_{23}) \end{cases} \quad (I.7)$$

Cette dernière relation nous donne la modélisation géométrique du bras manipulateur . En considérant cette relation , on pourra retrouver la relation inverse reliant les coordonnées généralisées  $q_i$  aux coordonnées cartésiennes, ce qui revient à considérer le modèle cinématique inverse.

### 1.2.5 MODELISATION CINEMATIQUE INVERSE [ 4 ],[ 19 ]

Le problème cinématique direct a toujours une solution en considérant les relations entre variables articulaires et position géométrique. Le problème inverse est plus délicat, car on ne peut pas atteindre une position géométrique donnée de manière quelconque. La solution proposée repose sur l'approche géométrique de LEE et ZEIGLER en 1984.

Pour le PUMA 560, on définit trois indicateurs de configuration dans la configuration géométrique qui constituent les singularités de ce robot :

-la singularité Alignment (ou Arm,Bras) : décrivant le fait que le poignet est aussi près de la première liaison qu'il le peut.

-La configuration **Right Arm**, pour  $\theta_2 > 0$ , fait mouvoir le poignet dans le sens des  $z_0$  positifs alors que la troisième articulation est inactive.

-La configuration **Left Arm** est identique à la précédente mais avec un mouvement dans le sens des  $z_0$  négatifs.

-la singularité Elbow(Coude) : Décrivant la limite d'extension ou de repliement du coude.

-La configuration **Above Arm** est telle que la position du poignet dans la configuration **Right Arm** ( Respectivement **Left Arm** ) par rapport au référentiel de l'épaule a une coordonnée négative( Respectivement positive) le long de l'axe  $y_2$ .

-La configuration **Blow Arm** est telle que la position du poignet dans la configuration **Right Arm** ( Respectivement **Left Arm** ) par rapport au référentiel de l'épaule a cette fois une coordonnée positive( Respectivement négative) le long de l'axe  $y_2$ .

-La singularité Wrist(Poignet) : Pour le cas où les 4<sup>ème</sup> et 6<sup>ème</sup> liaisons sont alignées. Les configurations **Wrist down** et **Wrist up** décrivent les mouvements du poignet.

Avec :

$$\text{Arm} = \begin{cases} +1 & \text{right arm} \\ -1 & \text{left arm} \end{cases} \quad \text{Elbow} = \begin{cases} +1 & \text{above arm} \\ -1 & \text{below arm} \end{cases} \quad \text{Wrist} = \begin{cases} +1 & \text{wrist down} \\ -1 & \text{wrist up} \end{cases}$$

### SOLUTION POUR LES TROIS ARTICULATIONS

Le vecteur position est défini comme suit :

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(l_2c_2 + l_3c_{23}) - d_2c_1 \\ s_1(l_2c_2 + l_3c_{23}) + d_2c_1 \\ -(l_2s_2 + l_3s_{23}) \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Les calculs consistent en des projections de plans  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  des différentes articulations.

## SOLUTION DE LA PREMIERE ARTICULATION

$$\begin{aligned}\sin\theta_1 &= \frac{-\text{arm } p_y \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_x d_2}{p_x^2 + p_y^2} \\ \cos\theta_1 &= \frac{-\text{arm } p_x \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} + p_y d_2}{p_x^2 + p_y^2} \\ \theta_1 &= \tan^{-1} \left[ \frac{\text{arm } p_y \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} + p_x d_2}{\text{arm } p_x \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_y d_2} \right]\end{aligned}\quad (I.9)$$

## SOLUTION DE LA SECONDE ARTICULATION

$$\begin{aligned}\sin\theta_2 &= \sin\alpha \cos\beta + \text{arm elbow} \cos\alpha \sin\beta \\ \cos\theta_2 &= \cos\alpha \cos\beta + \text{arm elbow} \sin\alpha \sin\beta \\ \theta_2 &= \tan^{-1} \left[ \frac{\sin\alpha \cos\beta + \text{arm elbow} \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta + \text{arm elbow} \sin\alpha \sin\beta} \right]\end{aligned}\quad (I.10)$$

avec :

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{-\text{arm} \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} & \sin\alpha &= \frac{p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} \\ \cos\beta &= \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} & \sin\beta &= \sqrt{1 - \cos^2\beta}\end{aligned}$$

## SOLUTION DE LA TROISIEME ARTICULATION

$$\cos\varphi = \frac{l_2^2 + l_3^2 - p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}{l_3^2} \quad \sin\varphi = \text{arm elbow} \sqrt{1 - \cos^2\varphi} \quad (I.11)$$

avec :

$$\varphi = \theta_3 + \frac{\pi}{2}$$

### I.3 GENERATION DE TRAJECTOIRE [ 4 ],[ 19 ]

Dans le but d'assurer le déplacement de l'élément terminal d'un robot d'une position initiale à une position finale avec des commandes admissibles sur les articulations , on impose au robot une trajectoire de référence réalisable. Cette trajectoire de référence donne l'évolution de la position, vitesse et accélération désirées au niveau des trois articulations. La commande consistera ainsi à ramener la position de chaque articulation d'une position initiale à une position finale désirée en poursuivant une trajectoire bien déterminée (dynamique imposée).

L'une des trajectoires les plus utilisées en robotique est la trajectoire cycloïdale assurant la continuité de la position, vitesse et accélération désirées.

#### ◆ TRAJECTOIRE CYCLOÏDALE

La  $i^{ème}$  trajectoire de référence de type cycloïdale pour l'articulation  $i$  est donnée par la fonction du temps suivante :

$$q_{id}(t) = \begin{cases} q_{id}(0) + \frac{D_i}{2\pi} \left[ 2\pi \frac{t}{t_f} - \sin\left(2\pi \frac{t}{t_f}\right) \right] & \text{pour } 0 \leq t \leq t_f \\ q_{id}(t_f) & \text{pour } t > t_f \end{cases} \quad (I.12)$$

Où  $D_i = q_{id}(t_f) - q_{id}(0)$  est le déplacement de l'articulation  $i$ , et  $t_f$  est l'instant final du mouvement qui doit être, de préférence, le même au niveau des trois axes du bras manipulateur.

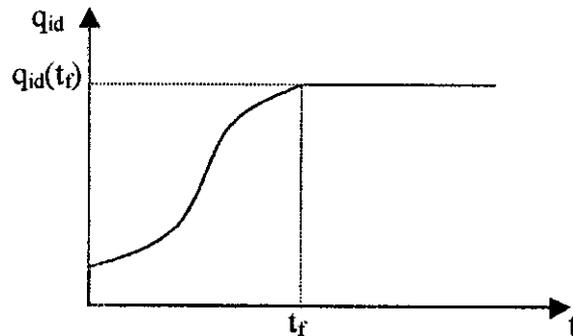


Fig I.3 : Trajectoire cycloïdale

#### ◆ TRAJECTOIRE DE LEAHVY

Concernant notre robot Puma560, on adoptera la trajectoire cycloïdale proposée par LEAHVY. Cette dernière est définie par le déplacement des trois articulations du robot de la position  $\{-50^\circ, -135^\circ, 135^\circ\}$  à la position  $\{45^\circ, -85^\circ, 30^\circ\}$  en un temps de mouvement égal à 1.5 secondes. L'intérêt du choix de cette trajectoire réside dans le fait qu'elle active le mouvement du bras manipulateur dans toute son amplitude.

## I.4 MODELISATION DYNAMIQUE [ 4 ], [ 19 ]

### I.4.1 INTRODUCTION

Les modèles dynamiques des bras manipulateurs sont décrits par un ensemble d'équations contenant les dynamiques du système. Ce système d'équations peut être déterminé par les lois classiques de la mécanique Newtonienne et Lagrangienne. Nous nous considérerons donc les approches d'Euler-Lagrange et de Newton-Euler pour établir les équations dynamiques du mouvement du robot.

### I.4.2 APPROCHE D'EULER-LAGRANGE

Cette méthode s'adapte fort bien aux calculs assistés par ordinateur et vise à modéliser la dynamique du robot avec les équations du mouvement. Un autre avantage de la méthode est que le formalisme d'Euler-Lagrange peut très bien être combiné avec la transformation homogène de Denavit-Hartenberg et amène dans ce cas à un algorithme compact pour représenter les équations dynamiques du mouvement.

La forme générale de l'équation de Euler-Lagrange est la suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_i} = T_i \quad i = 1, \dots, n \quad (I.13)$$

Où L désigne le Lagrangien qui s'exprime par :

$$L = E_C - E_P \quad (I.14)$$

$E_C$  : énergie cinétique totale de toutes les liaisons.

$E_P$  : énergie potentielle totale de toutes les liaisons.

$E_D$  : énergie de dissipation en cas de présence de frottements visqueux.

$q_i$  :  $i^{\text{ème}}$  coordonnée généralisée.

$\dot{q}_i$  : dérivée de la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée généralisée.

$n$  : nombre de degrés de liberté.

### ENERGIE CINETIQUE

L'énergie cinétique est calculée à partir de l'expression de la vitesse.

$$\begin{aligned} V_0^i &= \frac{dr_0^i}{dt} \\ r_0^i &= T_0^i r_i^i \end{aligned} \quad (I.15)$$

Où  $r_i^i$  est la coordonnée homogène du point  $i$  exprimée dans le repère  $R_i$ .

Comme nous sommes dans le cas de liaisons qui ne sont pas flexibles, on peut écrire :

$$\frac{dr_i^i}{dt} = 0$$

Cette dernière égalité implique :

$$V_0^i = \sum_{j=1}^i \frac{\partial T_0^i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} r_i^i \quad (I.16)$$

Où  $T_0^i$  est la matrice de transformation homogène entre la base (référentiel fixe) et la  $i^{\text{ème}}$  articulation. Nous pouvons désormais écrire l'équation précédente sous une forme plus compacte comme suit :

$$V_0^i = \sum_{j=1}^i (U_{ij} \dot{q}_j) r_i^i \quad (I.17)$$

Avec :

$$U_{ij} = \begin{cases} T_0^{j-1} Q_j T_{j-1}^i & j \leq i \\ 0 & j > i \end{cases}$$

Et  $Q_j$  telle que :

Pour une liaison rotative, on a :

$$Q_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour une liaison translationnelle, on a :

$$Q_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'énergie cinétique de l'élément  $i$  dans la liaison  $i$  est :

$$dE_{ci} = \frac{1}{2} \text{trace}(V_i V_i^T) dm \quad (I.18)$$

En développant l'expression précédente, on obtient :

$$dE_{ci} = \frac{1}{2} \text{trace} \left( \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i U_{ij} (r_i^i r_i^{iT} dm) U_{ik}^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right)$$

L'énergie cinétique de la liaison  $i$  est :

$$E_{Ci} = \frac{1}{2} \text{trace} \left( \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i U_{ij} J_j U_{ik}^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \quad (1.19)$$

Avec :

$$J_i = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int x_i y_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int x_i z_i dm & \int y_i z_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix}$$

L'énergie cinétique des actionneurs est donnée par :

$$E_{Ca} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \dot{q}_i^2 \quad (1.20)$$

Où  $I_i$  caractérise un moment d'inertie dans le cas d'une rotation et une masse dans le cas d'une translation de l'actionneur  $i$ . L'énergie cinétique totale sera :

$$E_C = \sum_{i=1}^n E_{Ci} + E_{Ca} \quad (1.21)$$

L'énergie potentielle est donnée par :

$$E_P = \sum_{i=1}^n -m_i g^T r_0^i = - \sum_{i=1}^n m_i g^T T_0^i r_i^i \quad (1.22)$$

Avec :

$$g^T = [0 \quad 0 \quad -|g| \quad 1]$$

Où  $g$  est la gravité ( $g=9.81 \text{ m/s}^2$ ).

Enfin l'énergie de dissipation est donnée par :

$$E_D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_{vi} \dot{q}_i^2 \quad (1.23)$$

Où  $f_{vi}$  est le coefficient de frottement visqueux pour  $i=1, n$ .

L'expression finale du Lagrangien sera :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{trace} (U_{ij} J_j U_{ik}^T) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{i=1}^n m_i g^T T_0^i r_i^i \quad (1.24)$$

En appliquant la formule d'Euler-Lagrange à la fonction Lagrangienne donnée ci-dessus, on aboutit à l'expression de la force ou couple généralisé :

$$\bar{E}_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \text{trace} (U_{jk} J_j U_{ji}^T) \dot{q}_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^j \text{trace} (U_{jkl} J_j U_{ji}^T) \dot{q}_k \dot{q}_l - \sum_{j=1}^n m_j g^T U_{ji} r_j^j + f_{vi} \dot{q}_i \quad (1.25)$$

Avec :

$$U_{ijk} = \begin{cases} T_0^{k-1} Q_k T_{k-1}^{j-1} Q_j T_{j-1}^i & k \leq j \leq i \\ T_0^{j-1} Q_j T_{j-1}^{k-1} Q_k T_{k-1}^i & j \leq k \leq i \\ 0 & j < i < k \end{cases}$$

#### 4.2.1 METHODE DIRECTE 1

Cette méthode est basée essentiellement sur les équations d'Euler-Lagrange , sa forme générale est :

$$T_i = \sum_{j=1}^n M_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n N_{ijk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k + G_i(q) + H_i(\dot{q}_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (I.26)$$

Avec :

$$M_{ij}(q) = \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{trace}(U_{kj} J_k U_{ki}^T) \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n \quad (I.27)$$

$$G_i(q) = - \sum_{j=1}^n m_j g^T U_{ji} r_j^j \quad (I.28)$$

$$N_{ijk}(q) = \sum_{l=\max(i,j,k)}^n \text{trace}(U_{ijk} J_l U_{li}^T) \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n \quad (I.29)$$

$$H_i(\dot{q}_i) = f_{vi} \dot{q}_i \quad (I.30)$$

On peut finalement réécrire l'équation dynamique sous forme matricielle comme suit :

$$M(q) \ddot{q} + N(q, \dot{q}) + G(q) + H(\dot{q}) = T(t) \quad (I.31)$$

Avec  $q \in \mathbb{R}^n, \dot{q} \in \mathbb{R}^n, \ddot{q} \in \mathbb{R}^n$  représentant respectivement les positions, vitesses et accélérations articulaires et :

-  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  : Matrice symétrique définie positive des accélérations inertielles . L'élément  $M_{ij}$  de cette matrice est l'inertie de la  $i^{\text{ème}}$  articulation sur la  $j^{\text{ème}}$  articulation.

-  $N(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$  : Vecteur des forces ou couples dus aux accélérations centrifuge et de Coriolis.

-  $G(q) \in \mathbb{R}^n$  : vecteur des forces ou couples dus à la gravitation.

-  $H(\dot{q}) \in \mathbb{R}^n$  : Représente les frottements visqueux.

-  $T(t) \in \mathbb{R}^n$  : Vecteur des forces ou couples moteurs.

### 1.4.2.2 METHODE DIRECTE 2

La méthode qui vient d'être abordée est efficace mais la détermination du vecteur dû aux accélérations centrifuges et de Coriolis est longue. Ceci a conduit à la recherche d'une nouvelle formulation pour le calcul rapide de ce vecteur.

Le modèle dynamique est alors calculé en trois étapes :

1. Calcul des éléments de la matrice d'inertie par la méthode directe 1.
2. Calcul de deux matrices centrifuges et de Coriolis (obtenues par dérivation de la matrice d'inertie) qui seront multipliées par leurs vecteurs respectifs. La somme des deux vecteurs obtenus par des produits nous donne le vecteur N précédemment défini.
3. Enfin le calcul des vecteurs de viscosité et de gravitation par la méthode directe 1.

En appliquant la procédure ci-dessus, on obtient le modèle final qui est le suivant :

$$M(q)\ddot{q} + D(q)[\dot{q}\dot{q}] + C(q)[\dot{q}^2] + G(q) + H(\dot{q}) = T(t) \quad (I.32)$$

Avec  $q \in \mathbb{R}^n, \dot{q} \in \mathbb{R}^n, \ddot{q} \in \mathbb{R}^n$  représentant respectivement les positions, vitesses et accélérations articulaires et :

-  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  : Matrice symétrique définie positive des accélérations inertielles dans l'élément  $M_{ij}$  de cette matrice est l'inertie de la  $i^{\text{ème}}$  articulation sur la  $j^{\text{ème}}$  articulation.

-  $D(q) \in \mathbb{R}^{n \times \frac{n(n-1)}{2}}$  : Matrice des couples de Coriolis.

-  $C(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  : Matrice des couples centrifuges.

-  $G(q) \in \mathbb{R}^n$  : Vecteur des accélérations gravitationnelles.

-  $H(\dot{q}) \in \mathbb{R}^n$  : Représente les frottements visqueux..

-  $T(t) \in \mathbb{R}^n$  : Vecteur des forces ou couples généralisés.

-  $[\dot{q}\dot{q}] \in \mathbb{R}^{\frac{n \times (n-1)}{2}}$  : vecteur de produit des vitesses généralisées

-  $[\dot{q}^2] \in \mathbb{R}^n$  : Vecteur de carré des vitesses généralisées.

Où on a :

$$[\dot{q}\dot{q}] = [\dot{q}_1\dot{q}_2, \dots, \dot{q}_1\dot{q}_n, \dot{q}_2\dot{q}_3, \dots, \dot{q}_2\dot{q}_n, \dots, \dot{q}_{n-2}\dot{q}_n, \dot{q}_{n-1}, \dot{q}_n]^T \quad (I.33)$$

Et :

$$[\dot{q}^2] = [\dot{q}_1^2, \dot{q}_2^2, \dots, \dot{q}_n^2]^T \quad (I.34)$$

La matrice D de Coriolis est calculée par la formule suivante :

$$D_{ij} = 2\beta^{i,kj} \quad (I.35)$$

Où le symbole de Christoffel est défini par :

$$\beta^{i,jk} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right] \quad (I.36)$$

Puisque la matrice d'inertie est définie positive, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} &= \frac{\partial M_{ji}}{\partial q_k} & \forall i, j, k \\ \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} &= 0 & i \geq k, j \geq k \end{aligned} \quad (I.37)$$

Par ailleurs, les éléments de la matrice centrifuge sont donnés par l'équation suivante :

$$C_{ij} = \beta^{i,jj} \quad (I.38)$$

Cette dernière méthode permet la déduction du modèle dynamique décentralisé qui sera présenté ultérieurement.

### I.4.3 MODELE DYNAMIQUE GENERAL [ 4 ]

Le modèle dynamique général d'un robot manipulateur rigide à  $n$  degrés de liberté peut être représenté par un système d'équations différentielles non linéaires de second ordre à entrées formant le vecteur de forces ou couples généralisées  $T$ , et  $n$  sorties qui forment le vecteur position  $q$ . Les équations de ce système à  $n$  liaisons, décrites dans l'espace des coordonnées articulaires, sont données sous forme matricielle comme suit :

$$M(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q})\dot{q} + K(q, \dot{q})q + G(q) + H(\dot{q}) = T_p(t) + T(t) \quad (I.39)$$

Avec  $q \in \mathbb{R}^n, \dot{q} \in \mathbb{R}^n, \ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ .

- $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  : La matrice d'inertie.
- $B(q, \dot{q})\dot{q} + K(q, \dot{q})q \in \mathbb{R}^n$  : Englobe les couples dus aux forces de Coriolis et centrifuges.
- $G(q) \in \mathbb{R}^n$  : Vecteur des forces ou couples dus à la gravitation.
- $H(\dot{q}) \in \mathbb{R}^n$  : Vecteur des frottements visqueux.
- $T_p(t) \in \mathbb{R}^n$  : Vecteur des forces ou couples de perturbation externes.
- $T(t) \in \mathbb{R}^n$  : Le vecteur des forces ou couples moteurs.

Le modèle du robot tel qu'il vient d'être défini est complexe car les éléments de  $M, B, K, G$  et  $H$  ont généralement des expressions très compliquées et non linéaires par rapport aux coordonnées généralisées du bras manipulateur. C'est pourquoi le modèle ainsi défini doit vérifier des propriétés fondamentales pouvant être exploitées pour simplifier l'analyse du comportement du système et le calcul de la loi de commande.

▪ **Propriété 1 :**

La matrice  $M(q)$  est symétrique et définie positive, ce qui signifie que tous ses éléments diagonaux sont positifs.

▪ **Propriété 2 :**

Les matrices  $M, B, K$  et les vecteurs  $G$  et  $H$  sont uniformément bornées.

▪ **Propriété 3 :**

L'entrée de commande est indépendante pour chaque articulation du bras manipulateur.

▪ **Propriété 4 :**

Le vecteur des frottements visqueux et secs  $H(\dot{q})$  est caractérisé par les  $n$  éléments  $H_i(\dot{q}_i) \quad i=1, \dots, n$  tels que :

$$H_i(\dot{q}) = f_{v_i}\dot{q}_i + f_{s_i}\text{sign}(\dot{q}_i)$$

Où  $f_{v_i}$  et  $f_{s_i}$  désignent respectivement les coefficients de frottements visqueux et secs de la  $i^{\text{ème}}$  articulation.

Toutes les hypothèses précédentes découlent de la nature physique du bras manipulateur. La 3<sup>ème</sup> propriété est due au fait que les flexibilités des articulations et structures ne sont pas prises en compte (articulations rigides). Dans notre cas, chaque degré de liberté (articulation) est piloté par un actionneur représentant un moteur à courant continu.

### I.4.4 MODELE DYNAMIQUE DU ROBOT PUMA560 [ 19 ]

Le bras manipulateur effectue trois rotations, la première suivant l'axe horizontal, la seconde et la troisième suivant deux axes verticaux.

Le modèle dynamique est le suivant :

$$T = (M(q) + \Delta M(q))\ddot{q} + N(q, \dot{q}) + G(q) + T_m \quad (I.40)$$

Avec :

$$M(q) = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 c_{23}^2 + I_3 c_2^2 + I_4 c_2 c_{23} & I_5 s_{23} + I_6 s_2 & I_5 s_{23} \\ I_5 s_{23} + I_6 s_2 & I_7 + I_4 c_3 & I_8 + 0.5 I_4 c_3 \\ I_5 s_{23} & I_8 + 0.5 I_4 c_3 & I_9 \end{bmatrix} \quad (I.41)$$

$$N(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -\left(2(I_3 s_2 c_2 + I_2 s_{23} c_{23}) + I_4 (c_2 s_{23} + s_2 c_{23})\right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - (2I_2 s_{23} c_{23} + I_4 c_2 s_{23}) \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ + (I_6 c_2 + I_5 c_{23}) \dot{q}_2^2 + (2I_5 c_{23}) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + (I_5 c_{23}) \dot{q}_3^2 \\ (I_3 c_2 s_2 + I_2 c_{23} s_{23} + 0.5 I_4 (s_2 c_{23} + c_2 s_{23})) \dot{q}_1^2 - (I_4 s_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 - (0.5 I_4 s_3) \dot{q}_3^2 \\ (I_2 s_{23} c_{23} + 0.5 I_4 c_2 c_{23}) \dot{q}_1^2 + (0.5 I_4 s_3) \dot{q}_2^2 \end{bmatrix} \quad (I.42)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_3 l_2 + 0.5 m_2 l_2) g c_2 - 0.5 m_3 l_3 g c_{23} \\ -0.5 m_3 l_3 g c_{23} \end{bmatrix} \quad (I.43)$$

$$T = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{bmatrix} \quad (I.44)$$

Où :

$$\begin{array}{ll} c_i = \cos(q_i) & c_{ij} = \cos(q_i + q_j) \\ s_i = \sin(q_i) & s_{ij} = \sin(q_i + q_j) \end{array}$$

Les équations précédentes dépendent des paramètres  $I_i$  qui valent :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_{yy1} + I_{xx2} + m_2 d_2 (d_2 + e) + m_3 d_2^2 + I_{xx3} + I_{xx1} + m_1 d_2^2 + I_{m1} \\
 I_2 &= I_{yy3} - I_{xx3} + I_{yy1} - I_{xx1} + m_1 l_3^2 \\
 I_3 &= I_{yy2} - I_{xx2} + m_3 l_2^2 + m_1 l_2^2 \\
 I_4 &= m_3 l_2 l_3 + 2m_1 l_2 l_3 \\
 I_5 &= 0.5m_3 l_3 d_2 + 2m_1 l_2 l_3 \\
 I_6 &= 0.5m_2 l_2 (d_2 + e) + m_3 d_2 l_2 + m_1 d_2 l_2 \\
 I_7 &= I_{zz2} + I_{zz3} + m_3 l_2^2 + I_{zz1} + m_1 (l_2^2 + l_3^2) + m_1 d_2 l_2 \\
 I_8 &= I_{zz3} + I_{zz1} + m_1 l_3^2 \\
 I_9 &= I_8 + I_{m3}
 \end{aligned} \tag{I.45}$$

La matrice  $\Delta M$  représente les effets de l'effecteur car la masse de ce dernier est non négligeable. On a :

$$\begin{aligned}
 \Delta M_{11} &= I_{xxT} + m_T d_2^2 + I_{M1} + (I_{yyT} - I_{xxT} + m_T l_3^2) c_{23}^2 + m_T l_2^2 c_2^2 + 2m_T l_2 l_3 c_2 c_{23} \\
 \Delta M_{12} &= m_T l_3 d_2 s_{23} + m_T d_2 l_2 s_2 \\
 \Delta M_{13} &= m_T l_3 d_2 s_{23} \\
 \Delta M_{22} &= I_{zzT} + m_T (l_2^2 + l_3^2) + I_{M2} + 2m_T l_2 l_3 c_3 \\
 \Delta M_{23} &= I_{zzT} + m_T l_3^2 + m_T l_2 l_3 c_3 \\
 \Delta M_{33} &= I_{zzT} + m_T l_3^2 + I_{M3} \\
 \Delta M_{21} &= \Delta M_{31} = \Delta M_{32} = 0
 \end{aligned} \tag{I.46}$$

Avec :

$I_{mi}$  : Moments d'inertie des différents moteurs.

$I_{xxT}$ ,  $I_{yyT}$ ,  $I_{zzT}$  : Moments d'inertie totale par rapport aux principaux axes de l'effecteur.

Le vecteur des couples additifs  $T_{m0}$  représente l'effet de la charge, il est calculé à partir de la matrice Jacobienne, Cette dernière est la dérivée du vecteur position de l'effecteur.

$$J_j(q) = \frac{\partial P}{\partial q_j} \tag{I.47}$$

En particulier, pour le robot PUMA 560, on a 3 articulations, ce qui donne :

$$J(q) = [J_1(q) \quad J_2(q) \quad J_3(q)]$$

$$p = [c_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) - d_2 s_1 \quad s_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) + d_2 c_1 \quad -(l_2 s_2 + l_3 s_{23})]^T$$

D'où la matrice Jacobienne :

$$J(q) = \begin{bmatrix} -s_1(l_2s_2 + l_3c_{23}) - d_2c_1 & -c_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) & -c_1(l_3s_{23}) \\ c_1(l_2c_2 + l_3c_{23}) - d_2s_1 & -s_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) & -(s_1l_3s_{23}) \\ 0 & -(l_2c_2 + l_3c_{23}) & -(l_3c_{23}) \end{bmatrix} \quad (I.48)$$

Le couple dû à la portée de la charge sera :

$$T_{m0} = m_0 J^T(q) [J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q, \dot{q})\dot{q} + g] \quad (I.49)$$

Avec :

$$g = [0 \quad 0 \quad 9.81]^T$$

Notons que la dérivée par rapport au temps de J intervient dans le calcul précédent, il faut donc l'introduire dans le programme de la simulation à vide.

Les paramètres du bras manipulateur sont :

- Masses des différentes liaisons et articulations :

$$m_2=17.40\text{kg} \quad m_3=5.04\text{kg} \quad m_4=0.82\text{kg} \quad m_5=0.35\text{kg} \quad m_6=0.09\text{kg}$$

$$m_T=m_4+m_5+m_6=1.26\text{kg.}$$

- Paramètres géométriques :

$$d_2=149.09\text{mm} \quad l_2=431.8\text{mm} \quad l_3=433.07\text{mm.}$$

- Paramètres d'inertie :

N° de la liaison	$I_{xxi} \text{ (kg.m}^2\text{)}$	$I_{yyi} \text{ (kg.m}^2\text{)}$	$I_{zzi} \text{ (kg.m}^2\text{)}$	$I_{Mi} \text{ (kg.m}^2\text{)}$
1	-	$350 \cdot 10^{-3}$	-	1.14
2	$130 \cdot 10^{-3}$	$524 \cdot 10^{-3}$	$539 \cdot 10^{-3}$	4.71
3	$192 \cdot 10^{-3}$	$15.4 \cdot 10^{-3}$	$212 \cdot 10^{-3}$	0.83
4	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	-
5	$0.3 \cdot 10^{-3}$	$0.3 \cdot 10^{-3}$	$0.4 \cdot 10^{-3}$	-
6	$0.04 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-3}$	-
4+5+6	$1.64 \cdot 10^{-3}$	$2.25 \cdot 10^{-3}$	$2.35 \cdot 10^{-3}$	-

Tableau I.2 : Paramètres d'inertie du Puma 560

## I.5 RESULTATS DES SIMULATIONS

Les simulations des réponses à vide (en boucle ouverte) des trois articulations du bras manipulateur PUMA 560 sont données par la figure ( I.4 ). Chacune des trois articulations est soumise à une excitation indicielle. Cet essai effectué sans charge ( $m_0=0$ ) met en évidence le comportement instable du robot. En effet, on observe une instabilité divergente au niveau des première et troisième articulations , et un comportement oscillatoire au niveau de la seconde articulation.

## I.6 CONCLUSION

D'après le modèle cinématique et dynamique du bras manipulateur PUMA 560, et au vu des résultats des simulations en boucle ouverte sans charge, notre robot présente de fortes interconnexions non-linéaires. Ainsi, l'application d'une commande non-linéaire stabilisante s'avère nécessaire. La commande par mode de glissement est intéressante de ce point de vue. Pour résoudre le problème des interconnexions, notre commande sera décentralisée et il restera par la suite à étudier le phénomène de broutement.

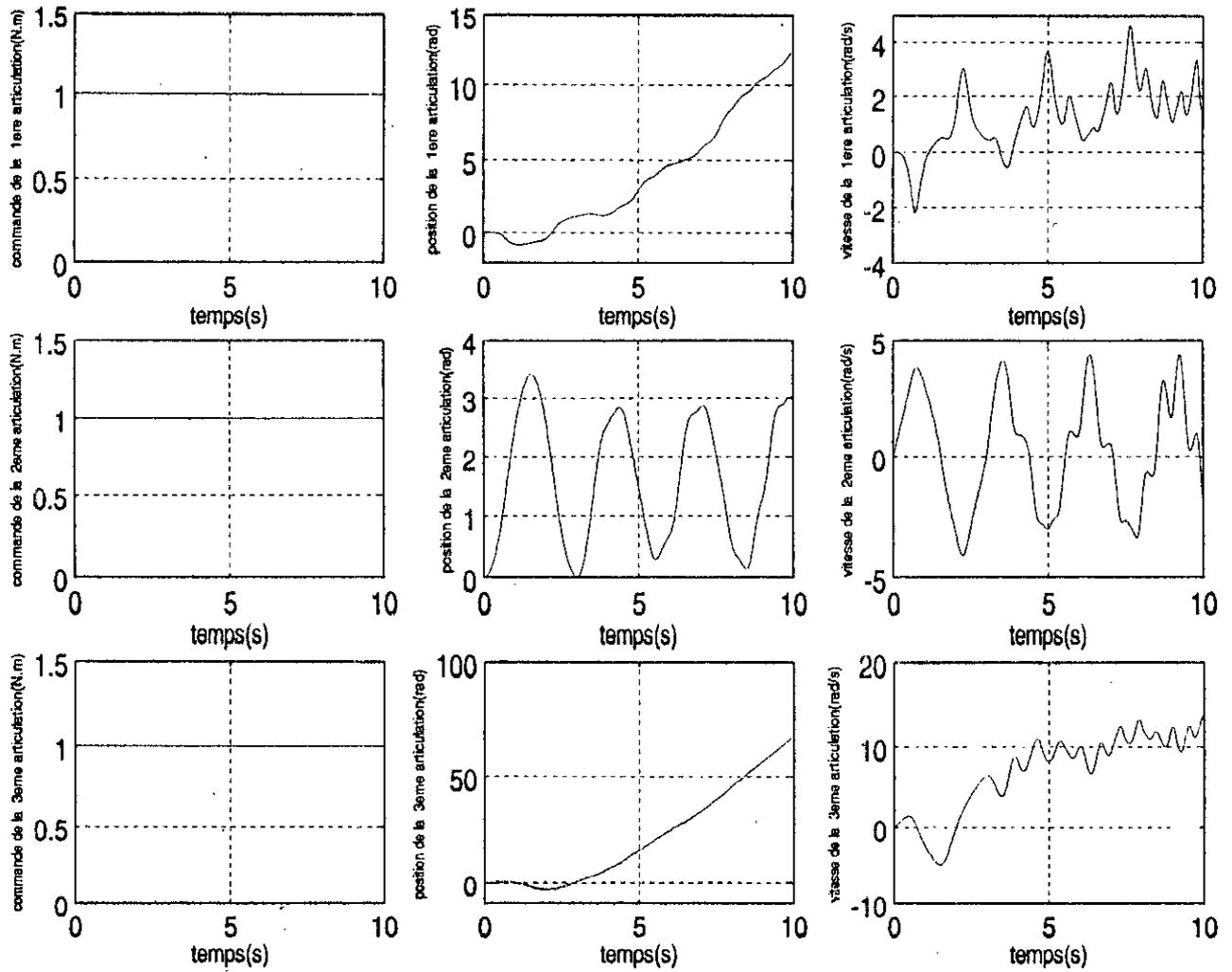


Fig I.4 : Réponse indicielle du robot Puma 560 en position et en vitesse

## II.1 INTRODUCTION [ 2 ],[ 4 ],[ 14 ]

Les équations dynamiques du robot sont non linéaires et présentent de fortes interconnexions. L'approche utilisée ici est celle de la commande à structure variable par les modes glissants dont l'origine est dans les résultats théoriques mis en évidence par le mathématicien russe F.FILIPPOV en 1960. On avait ainsi permis la résolution de systèmes d'équations différentielles à second membre discontinu.

Ces résultats ont permis à plusieurs auteurs en ex-URSS dont l'équipe du professeur EMELYANOV, de développer des algorithmes à structures variables. Ce n'est qu'à la fin des années 70 que V.I.UTKIN a mis en évidence le principe de la commande équivalente permettant de remplacer la commande discontinue par une commande continue représentant la moyenne de la fonction de commutation.

Pour la commande elle-même, il faut noter que le régulateur peut prendre deux valeurs distinctes. La commutation d'une valeur à l'autre se fait alors suivant le signe d'une fonction qui est la surface de glissement (que l'on définira ultérieurement) dans le but d'améliorer les performances. Le changement de structure se fera donc par commutation au niveau de l'organe de commande.

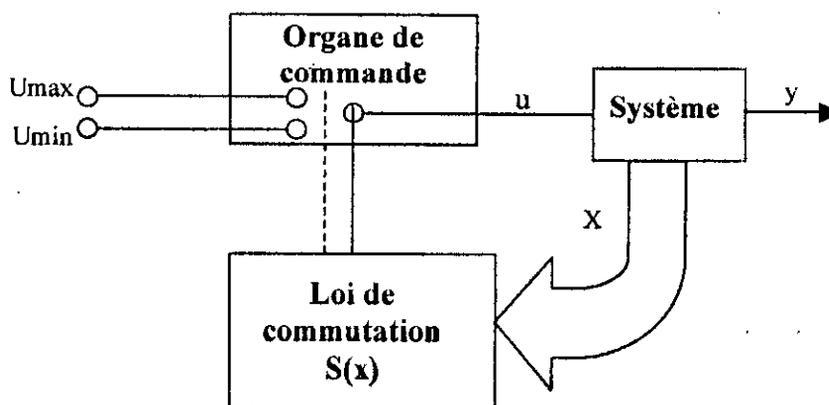


Fig II.1 :Schéma de principe de la commande à structure variable

## II.2 DEFINITIONS

### 1. SYSTEME A STRUCTURE VARIABLE :

Un système est dit à structures variables lorsque sa structure ou celle du correcteur prend d'une façon discontinue  $n$  valeurs. Plus précisément, il doit vérifier le système d'équations différentielles suivant :

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x) & \text{si condition 1 vérifiée} \\ \vdots & \\ f_n(x) & \text{si condition n vérifiée} \end{cases} \quad f_j \in C^k, k \geq 1, \quad (\text{II.1})$$

Lorsque la condition  $i$  est vérifiée le système commute vers la structure associée. On s'intéressera donc particulièrement au choix d'une fonction et d'une logique de commutation.

### 2. MODE GLISSANT

La commande par modes glissants correspond au cas particulier du système à structures variables précédent avec  $n = 2$ . Elle retrouve ses origines dans la théorie de la commande optimale de type Bang-Bang mais aussi celle des systèmes à relais ou en électronique de puissance.

### 3. SURFACE DE GLISSEMENT (OU DE COMMUTATION)

C'est la surface désirée vers laquelle le système doit évoluer et converger afin d'assurer la régulation de la variable correspondante à celle-ci.

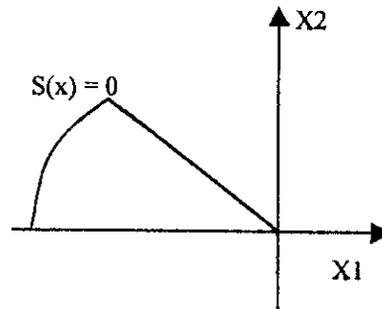
### 4. MODE DE CONVERGENCE

C'est le comportement avec lequel la variable à réguler se déplace à partir de l'état initial jusqu'à la surface de glissement. Ce comportement est bien observé dans le diagramme de phase.

### 5. REGIME DE GLISSEMENT

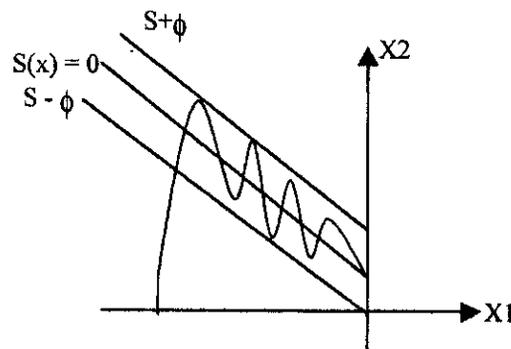
C'est le comportement du système le long de la surface de commutation. La dynamique de ce mode est fonction du choix de la surface de glissement.

- Le régime glissant idéal correspond à une oscillation de fréquence infinie et d'amplitude nulle. Dans ce cas, le système glisse parfaitement sur la surface de glissement.



FigII.2 :Régime de glissement idéal

- Concernant le régime de glissement réel ,on peut dire qu'en pratique, l'organe de commutation est réalisé à partir de relais présentant des imperfections telles que les retards de commutation. La trajectoire de phase en régime glissant reste au voisinage de la surface de commutation, produisant ainsi des oscillations indésirables diminuant la précision du système tout en gardant la stabilité.

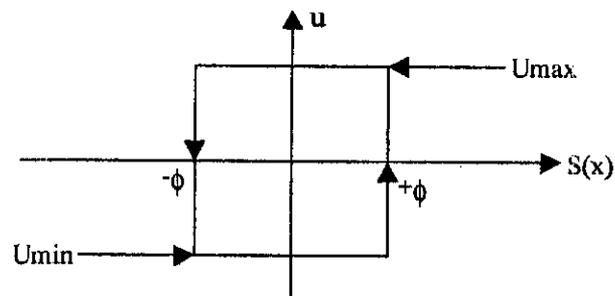


FigII.3 :Régime de glissement réel

#### ϕ Explication du phénomène :

En supposant qu'à un instant , le point de fonctionnement du système coupe la surface de glissement avec la commande  $U_{min}$  et dès qu'il atteint le point de basculement A(seuil inférieur de basculement du relais) la commande bascule alors vers la valeur  $U_{max}$  et de nouveau le point représentatif coupe la surface mais la commande ne bascule de nouveau vers  $U_{min}$  que quand le seuil supérieur ( B ) de basculement est atteint.

C'est ainsi qu'un mouvement continu à l'intérieur de la zone dite d'hystérésis du relais force le point de fonctionnement à commuter autour de la surface de glissement et lorsque le point représentatif atteint la zone de zéro, il continuera à commuter sans s'en éloigner.



FigII.4 :Relais à hystérisis

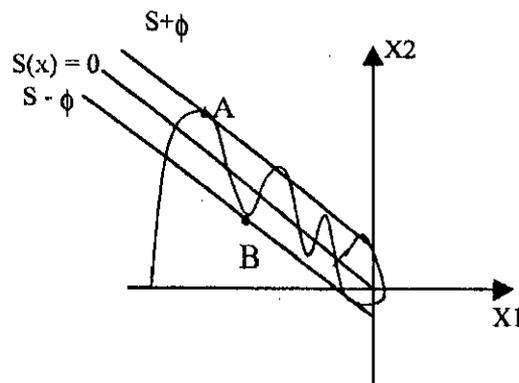


Fig II.5 :Mode de glissement

## 6. REGIME PERMANENT

Ce régime est considéré afin d'étudier la réponse du système autour du point d'équilibre. Il caractérise la qualité de la commande et les performances de la régulation.

### II.3 PRINCIPE DE LA METHODE [ 4 ] [ 6 ]

Soit le système décrit par les équations suivantes :

$$\dot{x} = \begin{cases} f^+(x, u^+) & \text{si } s(x, t) > 0 \\ f^-(x, u^-) & \text{si } s(x, t) < 0 \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Où les champs de vecteurs  $f^+$  et  $f^-$  sont bien définis avec :

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{si } s(x, t) > 0 \\ u^- & \text{si } s(x, t) < 0 \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Avec  $u^-$  et  $u^+$  étant les bornes inférieure et supérieure de  $u$ .

### II.4 METHODE DE SYNTHESE DE LA COMMANDE [ 4 ], [ 2 ]

#### II.4.1 METHODE DE FILLIPOV

En 1960, le mathématicien russe FILIPPOV a donné une méthode de résolution pour les équations différentielles à second membre discontinu en démontrant l'existence et l'unicité de la solution des systèmes dynamiques en régime glissant.

Sa méthode consiste à déterminer le résultat de la vitesse du champ de vecteur  $f^0$  qui est piloté par deux champs de vecteurs convexes  $f^+$  au dessus et  $f^-$  en dessous de l'intersection dans l'intersection de la surface avec la tangente en un point donné.

Soit le système non linéaire décrit par l'équation :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t) \\ u &= \begin{cases} u^+ & \text{si } s(x, t) > 0 \\ u^- & \text{si } s(x, t) < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

La trajectoire d'état en régime glissant s'écrit :

$$\dot{x} = f^0 = \mu f^+ + (1 - \mu) f^- \quad \text{avec } 0 \leq \mu \leq 1 \quad (\text{II.5})$$

Avec  $\mu$  dépendant de la direction des vecteurs  $f^+$  et  $f^-$  et du vecteur gradient de  $s(x, t)$ .

$$\mu = \frac{[\text{grad}[s(x, t)]] f^-}{[\text{grad}[s(x, t)]] (f^+ - f^-)} \quad (\text{II.6})$$

et en substituant  $\mu$  par son équation dans (II.3)

$$\dot{x} = \frac{\text{grad } s \cdot f^-}{\text{grad } s \cdot (f^- - f^+)} f^+ - \frac{\text{grad } s \cdot f^+}{\text{grad } s \cdot (f^- - f^+)} f^- \quad (\text{II.7})$$

Ainsi la méthode de FILLIPOV permet de trouver une trajectoire d'état en mode de glissement idéal.

## II.4.2 METHODE D'UTKIN

Soit le système non linéaire (linéaire par rapport à la commande) décrit par l'équation :

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t) u \quad (\text{II.8})$$

En régime de glissement idéal, la loi de commutation s'annule ( $\dot{s}(x, \dot{x}, t) = 0$ ) avec :

$$\dot{s}(x, \dot{x}, t) = \left[ \frac{\partial s}{\partial x} \right]^T \dot{x} + \frac{\partial s}{\partial t} \quad (\text{II.9})$$

On aura donc :

$$\dot{s}(x, \dot{x}, t) = \left[ \frac{\partial s}{\partial x} \right]^T (f(x) + g(x) u_{eq}) + \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.10})$$

De ce qui précède, nous obtenons finalement la commande équivalente en mode de glissement idéal :

$$u_{eq} = - \left[ \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^T g(x, t) \right] \bullet \left[ \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^T f(x, t) \right] + \frac{\partial s}{\partial t} \quad (\text{II.11})$$

Avec la condition de transversalité :

$$\det \left[ \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^T g(x) \right] \neq 0 \quad (\text{II.12})$$

Ce régime idéal n'est pratiquement jamais réalisable, c'est pourquoi on ajoute un second terme dans l'expression de la commande pour ramener l'état du système à la surface dès qu'il s'en écarte. Ce second terme sera donné par :

$$u_s = \dot{s}(x, t) \quad (\text{II.13})$$

### • CONDITION D'EXISTENCE DU MODE DE GLISSEMENT:

Construisons le critère autour d'une fonction de LYAPUNOV (positive et de dérivée négative afin de garantir la stabilité du système)

Choisissons :

$$v_i(x) = \frac{1}{2} s_i^2(x) \quad (\text{II.14})$$

En dérivant, on obtient :

$$\dot{v}_1(x, t) = s_i(x) \dot{s}_i(x) \quad (\text{II.15})$$

Ainsi , pour que le carré de  $s_i$  diminue et pour obliger les trajectoires du système à commuter autour de cette surface, il faut vérifier :

$$s_i(x) \dot{s}_i(x) < 0 \quad (\text{II.16})$$

Cette dernière condition est dite condition d'attractivité .

Généralement ,on choisit donc :

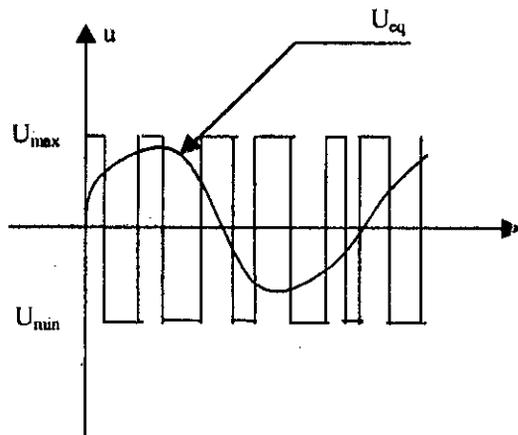
$$\begin{cases} u_s = \dot{s}(x) = -\mu s(x) - K \text{sign}(s(x)) \\ u = u_{eq} + u_s \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

Avec  $\mu > 0, K > 0$ .

On a dans ce cas la forme d'un relais.

#### ● SIGNIFICATION PHYSIQUE DE LA COMMANDE EQUIVALENTE : [ 9 ]

La commande équivalente a un sens physique, elle représente en effet la valeur moyenne que prend la grandeur de commande lors de la commutation rapide entre  $U_{max}$  et  $U_{min}$  telle que l'état du système soit maintenu sur la surface de glissement ( $s(x) = 0$ ). Cette commande doit être comprise entre  $U_{min}$  et  $U_{max}$  et sa caractéristique peut être représentée comme suit :



FigII.6 :Caractéristique de la commande équivalente

## II.5 INTRODUCTION DE L'APPROCHE DE DECENTRALISATION [ 23 ],[ 17 ],[ 4 ]

L'approche proposée est valable pour des robots manipulateurs à plusieurs degrés de liberté. Le robot est considéré comme un système interconnecté dans lequel chaque articulation constitue un sous système commandé par une station de commande locale. La commande à structure variable est basée sur la forme générale de la surface de glissement synthétisée pour chaque sous système. Nous sommes dans le cas particulier du robot PUMA560 à 3 degrés de liberté.

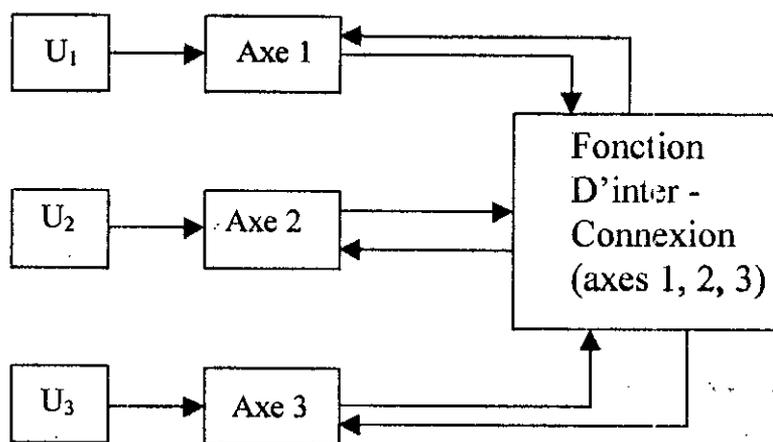


Fig II.7 : Représentation de l'approche décentralisée

L'objectif de la décentralisation est d'assurer une bonne poursuite de trajectoire pour chaque axe pris séparément. Les trois lois de commande relatives aux trois axes du robot dépendent des surfaces de glissement correspondantes et aussi des termes d'interconnexion. Le signal de commande est ainsi la combinaison de trois signaux par contre réaction.

Pour pouvoir appliquer cette approche, il est nécessaire d'écrire le système d'équations sous une nouvelle forme car le système matriciel présenté dans la première partie ne permet pas de prendre chaque articulation séparément. C'est pour cette raison que le modèle dynamique général est transformé à l'aide d'artifices mathématiques en un modèle dynamique décentralisé où l'équation de chaque axe est présentée et dépend de la commande de l'axe et de la variable correspondante.

L'approche décentralisée nous évitera les méthodes de découplage utilisées pour la commande à structure variable généralisée.

## II.6 MODLE DYNAMIQUE DECENTRALISE [ 4 ]

D'après le chapitre 1, le bras manipulateur rigide à n degrés de liberté peut être représenté par un système matriciel d'équations différentielles non linéaires du second ordre :

$$M(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q})\dot{q} + K(q, \dot{q})q + G(q) + H(q) = T(t) + T_p(t) \quad (\text{II.18})$$

Où :

$q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}^n$  : Position, vitesse et accélération articulaires.

$M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  : Matrice d'inertie.

$B(q, \dot{q})\dot{q} + K(q, \dot{q})q \in \mathbb{R}^n$  : Vecteur des couples dus aux forces de Coriolis et centrifuges.

$G(q) \in \mathbb{R}^n$  : Vecteur des forces ou couples dus à la gravitation.

$H(\dot{q}) \in \mathbb{R}^n$  : Vecteur des frottements visqueux et secs.

$T_p(t) \in \mathbb{R}^n$  : Vecteur des forces ou couples de perturbation externe.

$T(t) \in \mathbb{R}^n$  : Vecteur des forces ou couples moteurs.

Les éléments de M, B, K, G, et H sont généralement des fonctions non linéaires avec des expressions compliquées.

Les commandes à synthétiser sont les couples à appliquer par les moteurs à chaque charge. Comme les moteurs considérés sont des moteurs à courant continu, celles-ci peuvent être calculées en termes de tensions en prenant :  $u = K_c^{-1} \cdot T$  (en volts) où  $K_c$  est une matrice diagonale traduisant les constantes de couples des moteurs. Néanmoins, pour le cas traité du robot PUMA 560, les commandes seront directement prises égales aux éléments du vecteur des couples moteurs :  $u = T$  (i.e : Les commandes sont des couples et non des tensions) car ceci constitue la convention habituelle pour le PUMA 560 dans la littérature.

Le schéma de commande décentralisée à structure variable est développé en considérant chaque axe du robot comme un sous système, le tout formant un système interconnecté. Traduisons l'équation précédente en un système de n équations ( $i = 1, \dots, n$ ) :

$$\begin{aligned} & \left[ \dot{M}_{ii}(q)\ddot{q}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n M_{ij}(q)\ddot{q}_j(t) \right] + \left[ B_{ii}(q, \dot{q})\dot{q}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n B_{ij}(q, \dot{q})\dot{q}_j(t) \right] \\ & + \left[ K_{ii}(q, \dot{q})q_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K_{ij}(q, \dot{q})q_j(t) \right] + G_i(q) + H_i(\dot{q}) = T_{pi}(t) + T_i(t) \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad \dots(\text{II.19})$$

L'indice i est celui de la  $i^{\text{ème}}$  articulation ou  $i^{\text{ème}}$  sous système. Les termes faisant intervenir l'indice j seront tous considérés comme termes d'interaction ou d'interconnexion avec la  $i^{\text{ème}}$  articulation.

Nous avons :

$$q = (q_1, \dots, q_i, \dots, q_n)^T, \quad \dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_n)^T, \quad \ddot{q} = (\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_i, \dots, \ddot{q}_n)^T$$

$$G(q) = (G_1(q), \dots, G_i(q), \dots, G_n(q))^T$$

$$H(\dot{q}) = (H_1(\dot{q}), \dots, H_i(\dot{q}), \dots, H_n(\dot{q}))^T$$

$$T_p(t) = (T_{p1}(t), \dots, T_{pi}(t), \dots, T_{pn}(t))^T$$

$$T(t) = (K_{c1} u_1(t), \dots, K_{ci} T_i(t), \dots, K_{cn} T_n(t))^T$$

Notons que si les commandes sont considérées comme étant des couples comme c'est le cas avec le robot PUMA 560, alors les termes  $K_{ci}$  disparaissent de l'équation précédente puisque ce gain est un facteur de tous les termes la constituant.

L'équation précédente peut être mise sous forme plus simple et plus compacte comme suit :

$$m_{ij}(q)\ddot{q}_i(t) + b_{ij}(q, \dot{q})\dot{q}_i(t) + K_{ij}(q, \dot{q})q_i(t) + d_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) = u_{pi}(t) + u_i(t) \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{II.20})$$

Avec :

$$m_{ij}(q) = k_{ci}^{-1} M_{ij}(q)$$

$$b_{ij}(q, \dot{q}) = k_{ci}^{-1} [B_{ij}(q, \dot{q}) + f_{vi}]$$

$$k_{ij}(q, \dot{q}) = k_{ci}^{-1} K_{ij}(q, \dot{q})$$

$$g_i(q) = k_{ci}^{-1} G_i(q)$$

$$u_{pi}(t) = k_{ci}^{-1} T_{pi}(t)$$

$$u_i = k_{ci}^{-1} T_i(t)$$

$$d_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \left[ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_{ij}(q)\ddot{q}_j(t) + b_{ij}(q, \dot{q})\dot{q}_j(t) + k_{ij}(q, \dot{q})q_j(t) \right] + g_i(q) + k_{ci}^{-1} f_{si} \text{sign}(\dot{q}_i) \quad (\text{II.21})$$

Ces dernières équations représentent le modèle dynamique de la  $i^{\text{ème}}$  articulation (axe d'indice  $i$ ) avec la commande locale  $u_i(t) \in \mathbb{R}$ .  $q_i(t) \in \mathbb{R}$ ,  $\dot{q}_i(t) \in \mathbb{R}$ ,  $\ddot{q}_i(t) \in \mathbb{R}$  représentent respectivement la position, vitesse et accélération relatives à la  $i^{\text{ème}}$  articulation.

Le terme  $d_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbb{R}$  est la clé du passage à un modèle dynamique décentralisé. En effet, ce dernier est considéré comme une perturbation par rapport au  $i^{\text{ème}}$  sous système représentant le terme de couplage entre celui-ci et toutes les autres articulations (axes ou sous systèmes) du robot. C'est donc un terme d'interconnexion.

L'approche de commande décentralisée qui sera développée consiste donc à synthétiser une loi de commande indépendante ne nécessitant pas la mesure des grandeurs des autres sous-systèmes.

## II.7 SYNTHÈSE DE LA COMMANDE DÉCENTRALISÉE

Une fois le modèle dynamique décentralisé établi, il reste à synthétiser la commande à structures variable. Ceci a lieu en deux étapes qui sont : sélection de la surface de glissement et construction de la commande. Pour le cas de notre bras manipulateur, la surface sélectionnée doit être stable avec une forme générale non linéaire et variable dans le temps.

Notons que la commande utilisée pour le robot Puma560 est le couple  $T_i$  et non la tension  $u_i$ . Notons également que dans la commande VSC non généralisée, les constantes de temps mécaniques ne sont pas prises en compte.

### II.7.1 SÉLECTION DES SURFACES DE GLISSEMENT [ 11 ], [ 4 ]

Dans la plupart des travaux de recherche sur l'application de la commande à structure variable dans le domaine de la robotique, la surface de glissement était linéaire et exponentiellement stable. Dernièrement, une forme plus générale de cette surface a été proposée sous forme non linéaire et variable dans le temps incluant toutes les formes de surfaces linéaires rencontrées précédemment. Cette surface de glissement a pour forme générale :

$$\begin{cases} S = v - \dot{q} \\ S = (S_1, \dots, S_i, \dots, S_n)^T \in \mathbb{R}^n \\ v = (v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

Où :

$S$  est le vecteur des lois de commutation des différentes articulations  
 $v$  est un vecteur arbitraire fixé par les conditions de stabilité.

Nous sommes dans le cas d'une commande décentralisée, donc :

$$S_i = v_i - \dot{q}_i \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{II.23})$$

Avec  $v_i(q_i, q_{id}, \dot{q}_{id}, t) \in \mathbb{R}$  : une fonction arbitraire de plusieurs variables (position réelle, position désirée, vitesse désirée, temps). L'objectif étant de pouvoir réaliser une poursuite de la trajectoire  $(q_{id}, \dot{q}_{id}, \ddot{q}_{id}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Dans la loi de commutation, on choisit la fonction  $v_i(q_i, q_{id}, \dot{q}_{id}, t) \in \mathbb{R}$  de sorte que l'expression générale de la surface non linéaire avec intégrateur soit :

$$v_i = \dot{q}_{id} + \Lambda_i(\tilde{q}_i) + \eta_i \int_{-\infty}^t \tilde{q}_i(\tau) d\tau \quad (\text{II.24})$$

Avec  $\tilde{q}_i = q_{id} - q_i$  représentant l'erreur de poursuite et  $\Lambda_i$  une fonction de classe  $C^1$  pouvant être non linéaire par rapport à l'erreur de poursuite.

En substituant  $v_i$  par son expression dans l'équation de la loi de commutation, on a :

$$S_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t) = \dot{\tilde{q}}_i + \Lambda_i(\tilde{q}_i) + \eta_i \int_{-\infty}^t \tilde{q}_i(\tau) d\tau \quad (\text{II.25})$$

Avec  $\tilde{\dot{q}}_i = \dot{q}_{id} - \dot{q}_i$  représentant l'erreur de vitesse.

La loi de commutation locale  $S_i(\tilde{q}_i, \tilde{\dot{q}}_i, t)$  peut être non linéaire par rapport à l'erreur de poursuite à cause de la fonction non linéaire  $\Lambda_i$  et variable dans le temps à cause du terme de l'intégration de l'erreur de poursuite par rapport au temps. On peut néanmoins se placer dans le cas d'une forme linéaire avec intégrateur (de type PID) donnée par Slotine :

$$S(\tilde{q}_i, \tilde{\dot{q}}_i, t) = \tilde{\dot{q}}_i + 2\lambda_i \tilde{q}_i + \lambda_i^2 \int_{-\infty}^t \tilde{q}_i(\tau) d\tau \quad (II.26)$$

Cette dernière forme n'est qu'un cas particulier de la forme non linéaire avec intégrateur. Il suffit en effet de poser :  $\Lambda_i(\tilde{q}_i) = 2\lambda_i \tilde{q}_i$  et  $\eta_i = \lambda_i^2$ .

En régime de glissement idéal, la surface de glissement doit être associée à une équation différentielle équivalente stable. Si  $\dot{v}_i = \dot{q}_{id} + \alpha_{i1} \tilde{\dot{q}}_i + \alpha_{i0} \tilde{q}_i$  en régime glissant idéal  $\sigma_i = 0$  nous avons l'équation dynamique équivalente  $\ddot{\tilde{q}}_i + \alpha_{i1} \tilde{\dot{q}}_i + \alpha_{i0} \tilde{q}_i = 0$  et les performances désirées sont alors liées au choix de  $\alpha_{i0}$  et  $\alpha_{i1}$ .

Dans la commande des robots manipulateurs la surface de glissement doit être choisie de sorte que l'erreur de poursuite  $\tilde{q}_i$  converge uniformément vers zéro en régime de glissement idéal. Il faut donc que la surface de glissement soit asymptotiquement stable.

**PROPOSITION**

Il existe deux conditions suffisantes pour la stabilité asymptotique de la surface de glissement ( $S_i = 0$ ) données par la loi de commutation en régime glissant idéal. Ces deux conditions sont :

1. La constante d'intégration doit être positive ou nulle ( $\eta_i \geq 0$ ).
2. La fonction non linéaire  $\Lambda_i(\tilde{q}_i)$  doit être globalement située dans les premier et troisième quadrant, ce qui signifie que la fonction  $\Lambda_i$  et l'erreur de poursuite sont de même signe ( $\tilde{q}_i \Lambda_i(\tilde{q}_i) \geq 0$ ).  
Ainsi, la fonction non linéaire  $\Lambda_i(\tilde{q}_i)$  doit passer par l'origine (Elle s'annule lorsque la poursuite est parfaite ( $\Lambda_i(0) = 0$ )).

**DEMONSTRATION**

Supposons en effet que les deux conditions énoncées soient vérifiées et soit la fonction de Lyapunov suivante relative à la  $i^{ème}$  articulation :

$$V_i(\tilde{q}_i, t) = \frac{1}{2} \left[ \tilde{q}_i^2 + \eta_i \left( \int_{-\infty}^t \tilde{q}_i(\tau) d\tau \right)^2 \right] \quad (II.27)$$

Il est clair que  $V_i(\tilde{q}_i, t)$  est toujours positive ( car  $\eta_i$  est supposée positive d'après la condition 1).

D'après le théorème de Lyapunov, nous savons que la convergence asymptotique de l'erreur de poursuite  $\tilde{q}_i$  vers zéro est assurée si :

$$\frac{dV_i(\tilde{q}_i, t)}{dt} = \frac{\partial V_i(\tilde{q}_i, t)}{\partial \tilde{q}_i} \frac{d\tilde{q}_i}{dt} + \frac{\partial V_i(\tilde{q}_i, t)}{\partial t} < 0 \quad (II.28)$$

En dérivant cette fonction par rapport au temps , on a :

$$\frac{dV_i(\tilde{q}_i, t)}{dt} = \tilde{q}_i \dot{\tilde{q}}_i + \eta_i \tilde{q}_i \int_{-\infty}^t \tilde{q}_i(\tau) d\tau \quad (II.29)$$

Donc , la surface de glissement est asymptotiquement stable (d'après le théorème de Lyapunov) si :

$$\frac{dV_i(\tilde{q}_i, t)}{dt} = \tilde{q}_i \left( \dot{\tilde{q}}_i + \eta_i \int_{-\infty}^t \tilde{q}_i(\tau) d\tau \right) \leq 0 \quad (II.30)$$

Par ailleurs, en régime de glissement idéal on a  $S_i = 0$ , ce qui implique :

$$\dot{\tilde{q}}_i + \eta_i \int_{-\infty}^t \tilde{q}_i(\tau) d\tau = -\Lambda_i(\tilde{q}_i) \quad (II.31)$$

Ainsi, d'après la condition 2 :

$$\frac{dV_i(\tilde{q}_i, t)}{dt} = \tilde{q}_i \left( \dot{\tilde{q}}_i + \eta_i \int_{-\infty}^t \tilde{q}_i(\tau) d\tau \right) = -\tilde{q}_i \Lambda_i(\tilde{q}_i) \leq 0 \quad (II.32)$$

Finalement , on peut affirmer d'après les deux inégalités que le système est asymptotiquement stable et qu'on a aussi  $\Lambda_i(0) = 0$  et  $\Lambda_i$  passe par le premier et le troisième quadrant d'après l'équation  $\tilde{q}_i \Lambda_i(\tilde{q}_i) \geq 0$ .

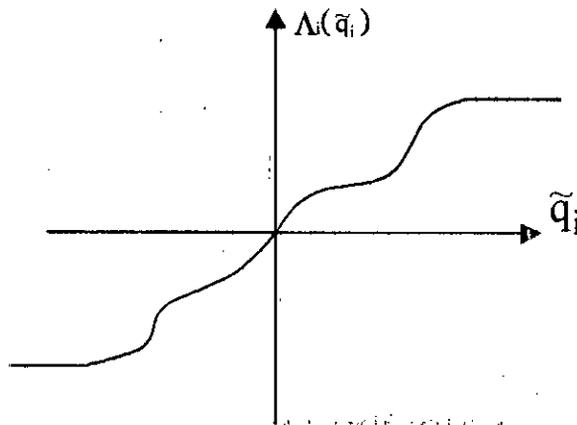


Fig II.8 : Représentation de la fonction non-linéaire  $\Lambda_i(\tilde{q}_i)$

## II.7.2 CONSTRUCTION DE LA COMMANDE DECENTRALISEE [ 4 ]

La commande décentralisée à structure variable consiste à calculer des commandes locales pour chaque sous système représentant l'axe(ou l'articulation) d'indice  $i$  permettant d'une part d'assurer le maintien du régime de glissement et d'autre part de suivre la trajectoire d'état désirée avec une bonne précision.

La commande locale décentralisée de la  $i^{\text{ème}}$  articulation est donnée par :

$$u_i(t) = \begin{cases} u_i^+(q_i, \dot{q}_i, q_{id}, \dot{q}_{id}, \ddot{q}_{id}, t) & \text{si } S_i > 0 \\ u_i^-(q_i, \dot{q}_i, q_{id}, \dot{q}_{id}, \ddot{q}_{id}, t) & \text{si } S_i < 0 \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

Avant la synthèse de la commande décentralisée à structure variable, il est indispensable de considérer les hypothèses suivantes :

1. La trajectoire désirée  $q_{id}(t)$ ,  $\dot{q}_{id}(t)$  est de classe  $C^1$  dans  $[0, +\infty[$ .
2. La perturbation locale est bornée de la manière suivante :

$$\min_t [u_{pi}(t)] \leq u_{pi}(t) \leq \max_t [u_{pi}(t)] \quad (\text{II.34})$$

3. Tous les termes variables du modèle dynamique décentralisé sont bornés :

$$\begin{aligned} \min_q [m_{pi}(q)] &\leq m_{ii}(q) \leq \max_q [m_{ii}(q)] \\ \min_{q, \dot{q}} [b_{pi}(q, \dot{q})] &\leq b_{ii}(q, \dot{q}) \leq \max_{q, \dot{q}} [b_{ii}(q, \dot{q})] \\ \min_{q, \dot{q}} [k_{pi}(q, \dot{q})] &\leq k_{ii}(q, \dot{q}) \leq \max_{q, \dot{q}} [k_{ii}(q, \dot{q})] \\ \min_{q, \dot{q}, \ddot{q}} [d_{pi}(q, \dot{q}, \ddot{q})] &\leq d_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) \leq \max_{q, \dot{q}, \ddot{q}} [d_i(q, \dot{q}, \ddot{q})] \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

4. Initialement, le robot est en régime glissant idéal :  $S_i(\tilde{q}_i(0), \dot{\tilde{q}}_i(0), 0) = 0$ .

L'erreur de poursuite et l'erreur de vitesse initiales sont nulles, par conséquent, comme le système est causal, on a :

$$\int_{-\infty}^t \tilde{q}_i(\tau) d\tau = 0 \quad (\text{II.36})$$

### ▪ CONDITION D'EXISTENCE DU REGIME GLISSANT

La condition suffisante pour l'existence du régime glissant dite condition d'attractivité est la suivante :

$$S_i \dot{S}_i < 0 \quad (\text{II.37})$$

En multipliant par le terme positif  $m_{ii}(q)$  :

$$m_{ii}(q)S_i\dot{S}_i < 0 \quad (\text{II.38})$$

En dérivant la loi de commutation par rapport au temps, on trouve :

$$\frac{dS_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t)}{dt} = \frac{\partial S_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t)}{\partial \tilde{q}_i} \frac{d\tilde{q}_i}{dt} + \frac{\partial S_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t)}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \frac{d\dot{\tilde{q}}_i}{dt} + \frac{\partial S_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t)}{\partial t} \quad (\text{II.39})$$

Et à partir de l'expression de la loi de commutation, on a :

$$\dot{S}_i = \ddot{\tilde{q}}_i + \tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i)\dot{\tilde{q}}_i + \eta_i\tilde{q}_i \quad (\text{II.40})$$

Où la notation simplificatrice  $\tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i)$  désigne la dérivée de la fonction non linéaire  $\Lambda_i(\tilde{q}_i)$  par rapport à l'erreur de poursuite. Plus précisément, on a :

$$\tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i) = \frac{\partial S_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t)}{\partial \tilde{q}_i} = \frac{d\Lambda_i(\tilde{q}_i)}{d\tilde{q}_i} \quad (\text{II.41})$$

En multipliant l'équation (II.20) par le terme positif  $m_{ii}(q)$ , on trouve :

$$m_{ii}(q)\dot{S}_i = m_{ii}(q)\ddot{\tilde{q}}_i + m_{ii}(q)\tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i)\dot{\tilde{q}}_i + \eta_i m_{ii}(q)\tilde{q}_i \quad (\text{II.42})$$

En développant l'expression précédente et à partir de (3.4) et (3.22), on obtient :

$$m_{ii}(q)\dot{S}_i = \sum_{j=0}^2 \psi_{ij}q_{id}^{(j)} + \sum_{j=0}^1 \phi_{ij}q_i^{(j)} + \gamma_i - u_i(t) \quad (\text{II.43})$$

avec l'exposant (j) représentant la  $j^{\text{ème}}$  dérivée par rapport au temps et :

$$\begin{aligned} \psi_{i0} &= \eta_i m_{ii}(q) \\ \psi_{i1} &= m_{ii}(q)\tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i) \\ \psi_{i2} &= m_{ii}(q) \\ \phi_{i0} &= k_{ii}(q, \dot{q}) = -\eta_i m_{ii}(q) \\ \phi_{i1} &= b_{ii}(q, \dot{q}) - m_{ii}(q)\tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i) \\ \gamma_i &= d_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) - u_{pi}(t) \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

D'après les 4 hypothèses considérées précédemment, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \psi_{ij} &= \bar{\psi}_{ij} + \Delta\psi_{ij} \quad j = 0, 1, 2 \\ \phi_{ij} &= \bar{\phi}_{ij} + \Delta\phi_{ij} \quad j = 0, 1 \\ \gamma_i &= \bar{\gamma}_i + \Delta\gamma_i \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

Où  $\bar{\psi}_{ij}, \bar{\phi}_{ij}, \bar{\gamma}_i$  sont les valeurs moyennes de  $\psi_{ij}, \phi_{ij}, \gamma_i$  et  $\Delta\psi_{ij}, \Delta\phi_{ij}, \Delta\gamma_i$  sont des termes variables limités tels que :

$$\begin{aligned} |\Delta\psi_{ij}| &< \hat{\psi}_{ij} \quad j=0, 1, 2 \\ |\Delta\phi_{ij}| &< \hat{\phi}_{ij} \quad j=0, 1 \\ |\Delta\gamma_i| &< \hat{\gamma}_i \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

La  $i^{\text{ème}}$  approche de commande décentralisée proposée pour la  $i^{\text{ème}}$  articulation a la forme suivante :

$$u_i(t) = \sum_{j=0}^2 \psi_{ij}^{\pm}(t) q_{id}^{(j)} + \sum_{j=0}^1 \phi_{ij}^{\pm}(t) q_i^{(j)} + \gamma_i^{\pm}(t) \quad (\text{II.47})$$

En substituant cette dernière commande locale dans l'égalité (3.23) on obtient :

$$m_{ii} \dot{S}_i = \sum_{j=0}^2 (\psi_{ij} - \psi_{ij}^{\pm}(t)) q_{id}^{(j)} + \sum_{j=0}^1 (\phi_{ij} - \phi_{ij}^{\pm}(t)) q_i^{(j)} + (\gamma_i - \gamma_i^{\pm}(t)) \quad (\text{II.48})$$

En multipliant cette dernière expression par la loi de commutation  $S_i$ , on trouve :

$$m_{ii} \dot{S}_i S_i = \sum_{j=0}^2 (\psi_{ij} - \psi_{ij}^{\pm}(t)) q_{id}^{(j)} S_i + \sum_{j=0}^1 (\phi_{ij} - \phi_{ij}^{\pm}(t)) q_i^{(j)} S_i + (\gamma_i - \gamma_i^{\pm}(t)) S_i \quad (\text{II.49})$$

Et d'après l'équation précédente, pour que la condition d'existence du mode de glissement soit satisfaite, il suffit de poser :

$$\begin{cases} \psi_{ij}^{\pm}(t) = \bar{\psi}_{ij} + \hat{\psi}_{ij} \text{sign}(q_{id}^{(j)} S_i) + \chi_{ij} q_{id}^{(j)} S_i \\ \bar{\psi}_{ij}(t) = \frac{\psi_{ij}^+ + \psi_{ij}^-}{2}, \quad \hat{\psi}_{ij} = \frac{\psi_{ij}^+ - \psi_{ij}^-}{2} & j=0, 1, 2 \\ \phi_{ij}^{\pm}(t) = \bar{\phi}_{ij} + \hat{\phi}_{ij} \text{sign}(q_i^{(j)} S_i) + \rho_{ij} q_i^{(j)} S_i \\ \bar{\phi}_{ij}(t) = \frac{\phi_{ij}^+ + \phi_{ij}^-}{2}, \quad \hat{\phi}_{ij} = \frac{\phi_{ij}^+ - \phi_{ij}^-}{2} & j=0, 1 \\ \gamma_i^{\pm}(t) = \bar{\gamma}_i + \hat{\gamma}_i \text{sign}(S_i) + \mu_{ij} S_i \\ \bar{\gamma}_i(t) = \frac{\gamma_i^+ + \gamma_i^-}{2}, \quad \hat{\gamma}_i = \frac{\gamma_i^+ - \gamma_i^-}{2} \end{cases} \quad (\text{II.50})$$

Où  $\chi_{ij}, \rho_{ij}, \mu_i$  sont des constantes positives ou nulles et :

$$\begin{cases}
 \psi_{i0}^+ > \max_q [\eta_i m_{ii}(q)] \\
 \psi_{i0}^- < \min_q [\eta_i m_{ii}(q)] \\
 \psi_{i1}^+ > \max_{q, \tilde{q}_i} [m_{ii}(q) \tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i)] \\
 \psi_{i1}^- < \min_{q, \tilde{q}_i} [m_{ii}(q) \tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i)] \\
 \psi_{i2}^+ > \max_q [m_{ii}(q)] \\
 \psi_{i2}^- < \min_q [m_{ii}(q)]
 \end{cases} \quad (II.51)$$

$$\begin{cases}
 \phi_{i0}^+ > \max_{q, \dot{q}} [k_{ii}(q, \dot{q}) - \eta_i m_{ii}(q)] \\
 \phi_{i0}^- < \min_{q, \dot{q}} [k_{ii}(q, \dot{q}) - \eta_i m_{ii}(q)] \\
 \phi_{i1}^+ > \max_{q, \dot{q}, \tilde{q}_i} [b_{ii}(q, \dot{q}) - m_{ii}(q) \tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i)] \\
 \phi_{i1}^- < \min_{q, \dot{q}, \tilde{q}_i} [b_{ii}(q, \dot{q}) - m_{ii}(q) \tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i)] \\
 \gamma_i^+ > \max_{q, \dot{q}, \ddot{q}, t} [d_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) - u_{pi}(t)] \\
 \gamma_i^- < \min_{q, \dot{q}, \ddot{q}, t} [d_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) - u_{pi}(t)]
 \end{cases} \quad (II.52)$$

La commande locale désirée aura la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 u_i(t) = & \sum_{j=0}^2 [\bar{\psi}_{ij} + \hat{\psi}_{ij} \text{sign}(q_{id}^{(j)} S_i) + \chi_{ij} q_{id}^{(j)} S_i] q_{id}^{(j)} \\
 & + \sum_{j=0}^1 [\bar{\phi}_{ij} + \hat{\phi}_{ij} \text{sign}(q_i^{(j)} S_i) + \rho_{ij} q_i^{(j)} S_i] q_i^{(j)} \\
 & + [\bar{\gamma}_i + \hat{\gamma}_i \text{sign}(S_i) + \mu_i S_i]
 \end{aligned} \quad (II.53)$$

Le schéma de principe de cette approche est illustré par :

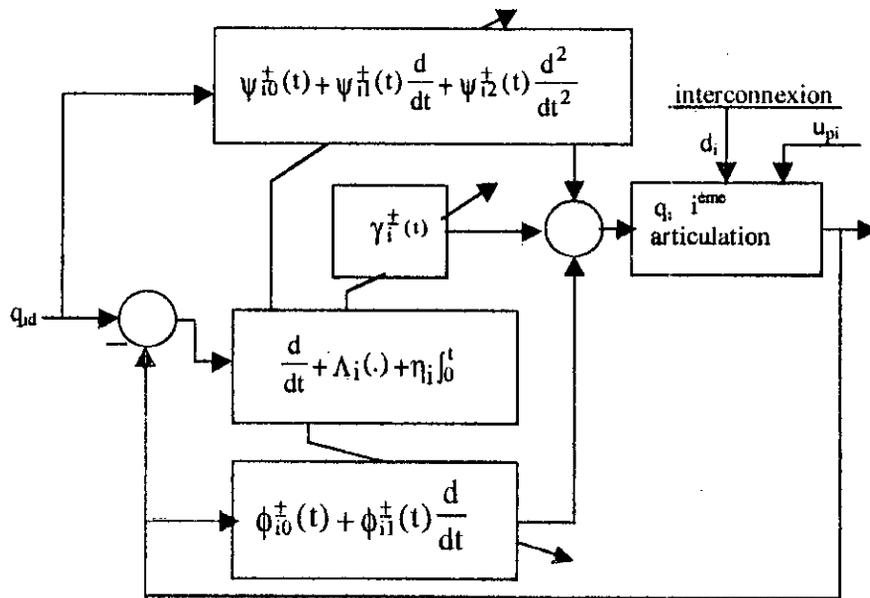


Fig II.9 : Principe de la commande à structure variable décentralisée

Cette dernière formule de commande locale peut également s'écrire :

$$u_i(t) = \sum_{j=0}^2 \left[ \bar{\psi}_{ij} + \hat{\psi}_{ij} \text{sign}(q_{id}^{(j)} S_i) \right] q_{id}^{(j)} + \sum_{j=0}^1 \left[ \bar{\phi}_{ij} + \hat{\phi}_{ij} \text{sign}(q_i^{(j)} S_i) \right] q_i^{(j)} + \left[ \bar{\gamma}_i + \hat{\gamma}_i \text{sign}(S_i) \right] + \xi_i(t) S_i \quad (\text{II.54})$$

Ainsi, la formule de la commande locale  $u_i(t)$  de la  $i^{\text{ème}}$  articulation peut être décomposée en quatre termes. Le premier caractérisant un changement de structure par intervention directe de la grandeur de consigne en position, vitesse et accélération ( $PD^2$  feedforward), le second caractérisant un retour d'état variable (PD feedback), le troisième représentant un changement de structure par l'organe de commande dont le but est d'éliminer les perturbations et les interconnexions, le quatrième et dernier terme représentant la forme d'un correcteur PID avec un gain variable  $\xi_i(t)$  avec une action proportionnelle non linéaire et une action intégrale et dérivée dans l'expression de la surface de glissement.

## II.8 APPLICATION DE LA COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE

La commande à structure variable décentralisée peut désormais être appliquée à notre bras manipulateur. Pour cela, on considère le modèle dynamique décentralisé du robot donné par l'équation (II.20).

On a :

Pour la première articulation :

$$\begin{aligned}
 k_{11}(q, \dot{q}) &= 0 \\
 m_{11}(q) &= a_1 + a_2 c_{23}^2 + a_3 c_2^2 + a_4 c_2 c_{23} \\
 b_{11}(q, \dot{q}) &= -2(I_1^* + I_2^*) \dot{q}_2 - 2I_1^* \dot{q}_3 \\
 d_1(q, \dot{q}, \ddot{q}) &= (a_5 s_{23} + a_6 s_2) \ddot{q}_2 + (a_5 s_{23}) \ddot{q}_3 + (I_3^* + I_4^*) \dot{q}_2^2 \\
 &+ 2I_3^* \dot{q}_2 \dot{q}_3 + I_3^* \dot{q}_3^2 - u_{p1} - f_{s1} \text{sign}(\dot{q}_1)
 \end{aligned} \tag{II.55}$$

Pour la seconde articulation :

$$\begin{aligned}
 k_{22}(q, \dot{q}) &= 0 \\
 m_{22}(q) &= a_7 + a_4 c_3 \\
 b_{22}(q, \dot{q}) &= -2I_5^* \dot{q}_3 \\
 d_2(q, \dot{q}, \ddot{q}) &= (a_5 s_{23} + a_6 s_2) \ddot{q}_1 + (a_8 + 0.5a_4 c_3) \ddot{q}_3 + (I_1^* + I_2^*) \dot{q}_1^2 \\
 &- I_5^* \dot{q}_3^2 - a_9 c_{23} - a_{10} c_2 - u_{p2} - f_{s2} \text{sign}(\dot{q}_2)
 \end{aligned} \tag{II.56}$$

Pour la troisième articulation, on a :

$$\begin{aligned}
 k_{33}(q, \dot{q}) &= 0 \\
 m_{33}(q) &= a_{11} \\
 b_{33}(q, \dot{q}) &= 0 \\
 d_3(q, \dot{q}, \ddot{q}) &= (a_5 s_{23}) \ddot{q}_1 + (a_8 + 0.5a_4 c_3) \ddot{q}_2 + I_1^* \dot{q}_1^2 + I_5^* \dot{q}_2^2 - a_9 c_{23} - f_{s3} \text{sign}(\dot{q}_3)
 \end{aligned} \tag{II.57}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 I_1^* &= (a_2 c_{23} + 0.5a_4 c_2) s_{23} \\
 I_2^* &= (a_3 c_2 + 0.5a_4 c_{23}) s_2 \\
 I_3^* &= a_5 c_{23} \\
 I_4^* &= a_6 c_2 \\
 I_5^* &= 0.5a_4 s_3
 \end{aligned}$$

Et en notant bien que les  $a_i$  qui sont fonction des paramètres du robot sont donnés par :

$a_1 = I_1 = 2.34, a_2 = I_2 = 0.058, a_3 = I_3 = 1.56, a_4 = I_4 = 1.41, a_5 = I_5 = 0.24, a_6 = I_6 = 0.96$   
 $a_7 = I_7 = 6.874, a_8 = I_8 = 0.45, a_9 = 0.5m_3l_3g = 16.05, a_{10} = m_3l_2 + 0.5m_2l_2, a_{11} = I_9 = 1.28$

La commande est réalisée de sorte que les hypothèses (contraintes) suivantes soient vérifiées :

$$|\dot{q}_i| < 1 \text{ rad s}^{-1}, |\ddot{q}_i| < 1 \text{ rad s}^{-2}, |u_{pi}| < 1 \text{ N.m} \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{II.58})$$

Les contraintes concernant les vitesses et accélérations sont introduites dans le programme de résolution des équations différentielles par la méthode de Runge Kutta.

Les paramètres des régulateurs  $\Psi_{ij}^{\pm}, \Phi_{ij}^{\pm}, \gamma_i^{\pm}$  sont donnés par le tableau suivant :

Paramètres des régulateurs	Liaison 1	Liaison2	Liaison3
$\Psi_{i0}^+$	540	830	185
$\Psi_{i0}^-$	-540	-830	-185
$\Psi_{i1}^+$	162	250	55
$\Psi_{i1}^-$	-9	-50	18
$\Psi_{i2}^+$	5.5	9	2
$\Psi_{i2}^-$	-0.5	-5	1.2
$\Phi_{i0}^+$	540	550	185
$\Phi_{i0}^-$	-540	-550	-185
$\Phi_{i1}^+$	-1	-50	-17
$\Phi_{i1}^-$	-170	-250	-55
$\gamma_i^+$	7	160	100
$\gamma_i^-$	-7	-160	-100

Tableau II.1 : Paramètres du régulateur

Concernant les autres fonctions positives, on fixe :  $\chi_{ij} = \rho_{ij} = \mu_{ij} = 100$  pour chaque articulation.

Rappelons que la commande est décentralisée et donnée par :

$$u_i(t) = \sum_{j=0}^2 \Psi_{ij}^{\pm}(t) q_{id}^{(j)} + \sum_{j=0}^1 \Phi_{ij}^{\pm}(t) q_i^{(j)} + \gamma_i^{\pm}(t)$$

On n'aura pas recours aux fonctions d'amélioration car l'objectif de la simulation est son utilisation en vue d'une comparaison avec les résultats obtenus avec la commande GVS concernant l'élimination ou au moins l'atténuation du Chattering.

## II.9 RESULTATS DES SIMULATIONS

On observe d'une part que la commande est très fortement oscillatoire ,ce phénomène d'oscillations à haute fréquence étant dû aux sollicitations trop fortes des moteurs à courant continu et à la discontinuité de la fonction sign.

D'autre part , l'erreur atteignant plusieurs degrés est assez grande et cette perte dans la précision est naturellement liée au phénomène de broutement.

## II.10 CONCLUSION

La commande à structure variable décentralisée non généralisée présente l'inconvénient d'une sollicitation trop forte en amplitude et surtout en fréquence au niveau des actionneurs. D'autre part, la précision de la poursuite de référence est affectée par ce phénomène et on observe toujours des oscillations au niveau des surfaces de glissement.

La solution envisagée habituellement est la mise en place d'un dispositif de filtrage permettant de remplacer la fonction discontinue SIGN intervenant au niveau des organes de commande par des fonctions continues dites fonctions d'amélioration(Boundary layer).

La solution proposée est d'arriver, sans avoir recours à ce dispositif, et en reformulant simplement la modélisation cinématique et dynamique du système sous une nouvelle forme faisant apparaître la dérivée de la commande , a l'élimination du chattering tout en assurant une poursuite de trajectoire rapide et précise.

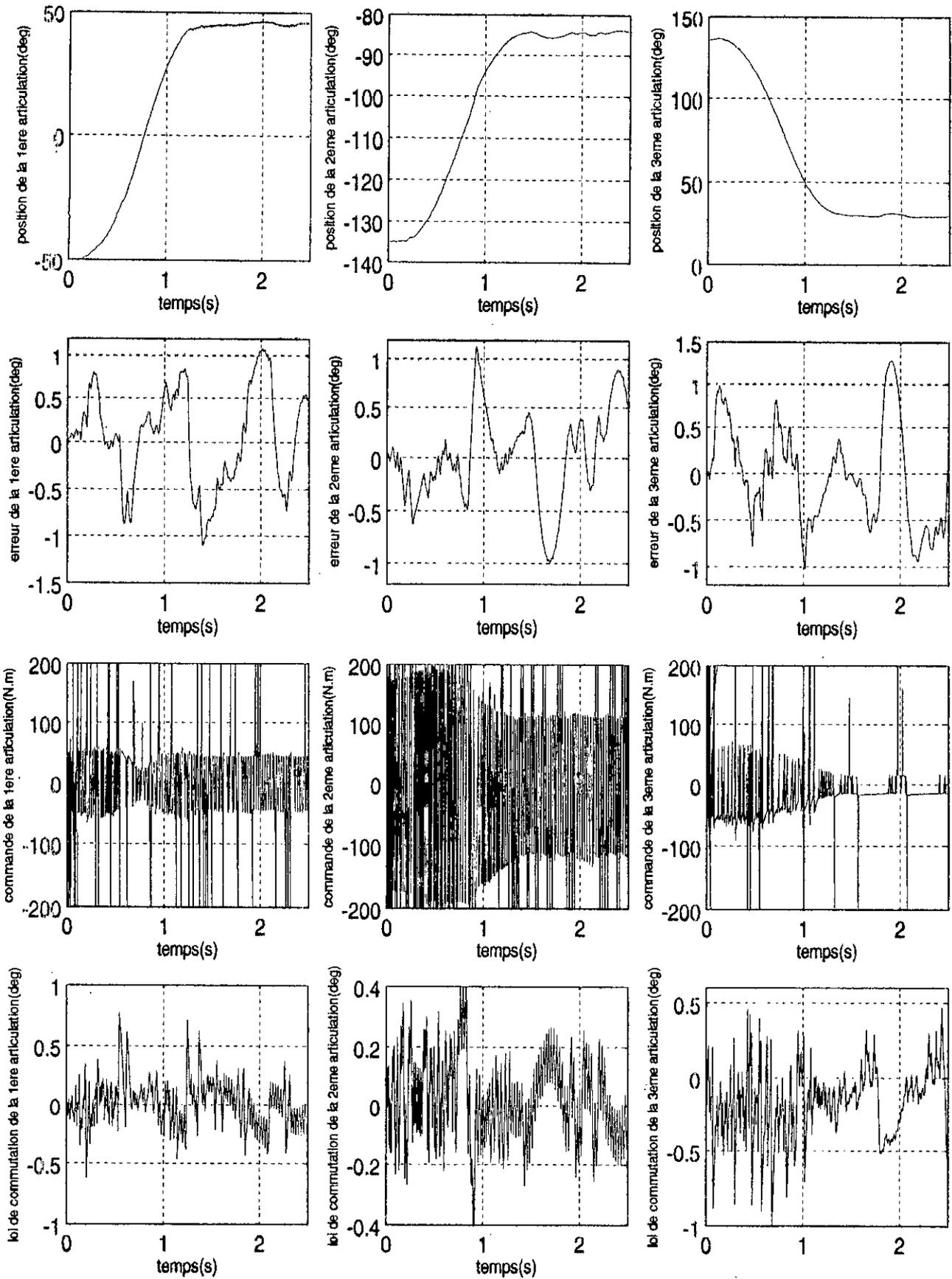


Fig II.9 : Commande à structure variable décentralisée du robot Puma 560  
Poursuite à vide, surface de glissement de type PD

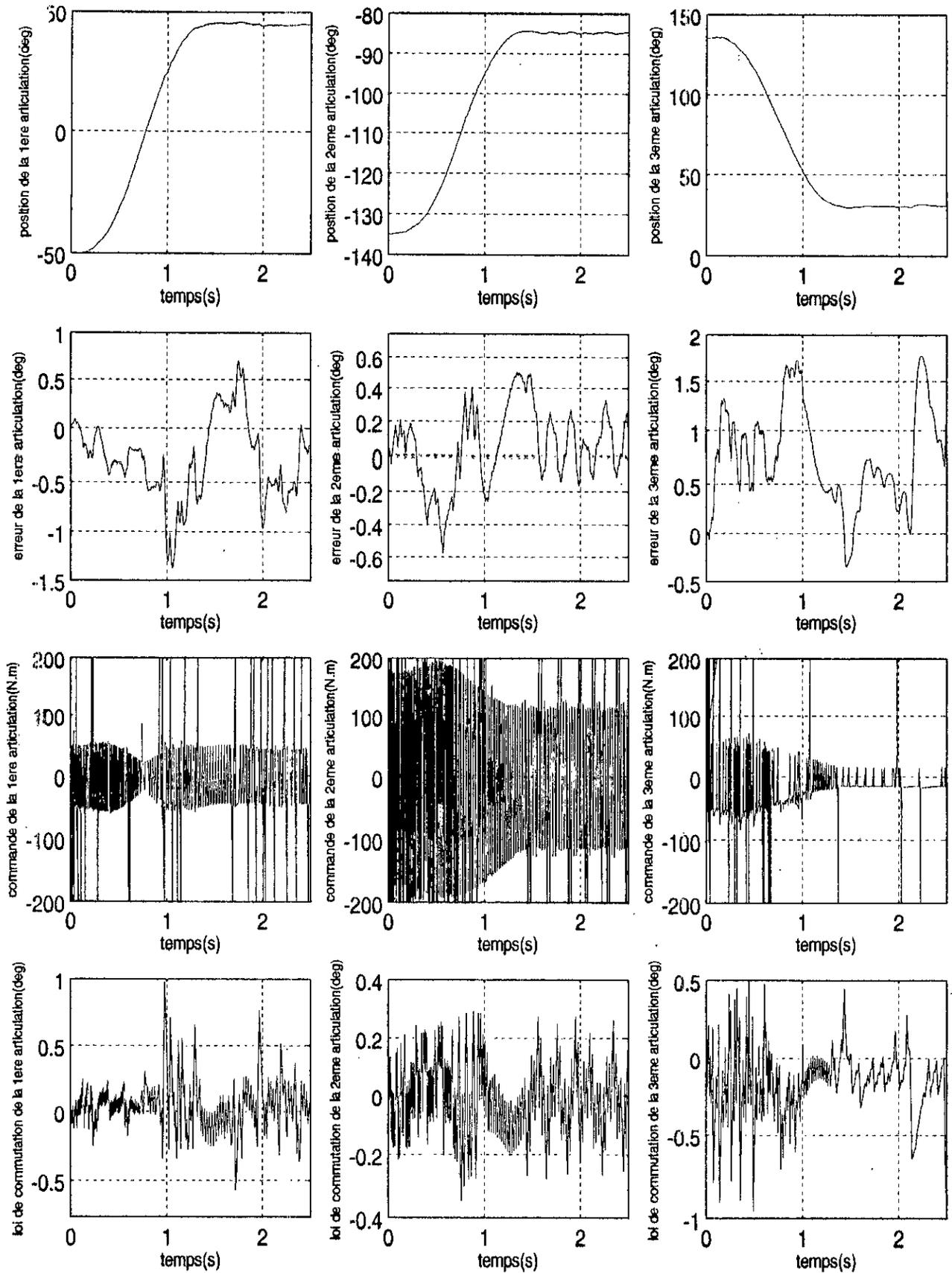


Fig II.10 : Commande à structure variable décentralisée du robot Puma 560  
Poursuite à vide, surface de glissement de type non-linéaire

### III.1 INTRODUCTION [ 1 ],[ 3 ],[ 10 ]

L'algèbre différentielle a été introduite entre les deux guerres mondiales par le mathématicien Américain RITT après les développements qu'a connue l'algèbre classique en Allemagne à travers les travaux de DEDEKIND, KRONECKER, HILBERT, NOETHER et beaucoup d'autres. Cette discipline a été développée par son élève KOLCHIN. Depuis, elle constitue un langage fondamental et un outil essentiel pour l'étude des équations différentielles. Ce nouveau langage n'a été introduit en automatique théorique que depuis les travaux de FLIESS et Messenger qui ont abouti à la généralisation des formes canoniques de commande et d'observabilité et plus généralement de la représentation d'état d'un système.

De la forme canonique de commande généralisée introduite par FLIESS découle un bouclage, pouvant être linéaire ou non-linéaire, générant différents types de correcteurs dont ceux qui utilisent un bouclage discontinu avec régime glissant et des commutations sur l'entrée d'où l'importance de ces nouveaux résultats concernant la stabilisation des systèmes.

Le principe de base sur lequel reposent les systèmes à structure variable généralisée est la prise en compte des dérivées successives de l'entrée dans la représentation d'état et dans le bouclage. Ceci permet de résoudre les problèmes liés au broutement « Chattering ». En effet, les intégrations successives permettent le lissage de la commande discontinue avant son application sur la dynamique du système.

On s'intéressera donc en premier lieu à la formulation du problème des systèmes à structure variable généralisée dans le contexte de l'algèbre différentielle faisant intervenir les dérivées et dynamiques de l'entrée dans la représentation du système. On procédera ensuite à l'étude de la commande à régime glissant généralisée en utilisant la dynamique d'un système non linéaire dans le cas monovarié et multivarié. Dans une deuxième partie, on utilisera les modèles où les sorties sont présumées du second ordre, et où les commandes interviennent avec leurs dérivées. Ces modèles sont obtenus par l'identification du système multivarié que représente le bras manipulateur. Enfin on présentera la méthode de synthèse du correcteur à structure variable généralisée. Dans l'implémentation de la commande, on utilisera les trois entrées simultanément pour la régulation de la trajectoire du bras manipulateur.

## III.2 FORMULATION DE LA STRUCTURE VARIABLE DANS LE CONTEXTE DE L'ALGÈBRE DIFFÉRENTIELLE

L'utilisation croissante de l'algèbre différentielle en automatique théorique depuis les travaux de M.FLISS a donné de nouveaux outils pour l'étude des systèmes décrits par des équations différentielles non-linéaires.

Ainsi, nous définirons un certain nombre de concepts fondamentaux de l'algèbre différentielle en commençant par définir le corps différentiel dans lequel différentes règles seront établies.

### III.2.1 CORPS DIFFÉRENTIEL [ 3 ], [ 8 ]

Un corps différentiel est un corps commutatif  $K$  muni d'une seule opération de dérivation notée  $\frac{d}{dt} = "$ .", qui vérifie les règles usuelles :

$$\forall a, b \in K : \begin{cases} \frac{d(a+b)}{dt} = \dot{a} + \dot{b} \\ \frac{d(a \cdot b)}{dt} = \dot{a}b + a\dot{b} \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

1. Une constante  $c$  dans  $K$  est un élément tel que  $\dot{c} = 0$ . L'ensemble des constantes est un sous corps de  $K$  appelé corps des constantes. (Ex :  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  sont des corps de constantes)

2. Une extension différentielle  $L/K$  est donnée par deux corps différentiels  $K$  et  $L$  tels que le corps  $K$  est un sous corps de  $L$  et la dérivation dans  $K$  est une restriction de la dérivation dans  $L$ . Les propriétés élémentaires des extensions différentielles sont identiques à celles des extensions non différentielles.

Il existe deux types d'extensions non différentielles : extensions non différentielles algébriques et transcendentes. On se limite au cas d'une seule opération de dérivation car le cas d'équations aux dérivées partielles ne nous concerne pas.

#### III.2.1.1 EXTENSION NON DIFFÉRENTIELLE ALGÈBRE

Soient  $E$  et  $F$  deux corps non différentiels. Alors, un élément  $a \in E$  est dit algébrique dans  $F$  si et seulement si celui-ci satisfait une équation dont les coefficients sont dans le corps de base  $F$ . Ainsi, l'extension non différentielle est dite algébrique si et seulement si tout élément de  $E$  est algébrique sur  $F$ .

• Exemple :

L'équation algébrique  $x^2 - 2 = 0$  à coefficients dans le corps de base  $\mathbb{Q}$  des rationnels ayant pour racine  $\sqrt{2}$  du corps des réels est algébrique sur  $\mathbb{Q}$ .

### III.2.1.2 EXTENSION NON DIFFERENTIELLE TRANSCENDANTE

Un élément  $a \in E$  est dit transcendant dans  $F$  si et seulement si ce dernier n'est pas algébrique sur  $F$ , ce qui signifie que pour cet élément, il n'existe pas de polynôme monovarié  $P(x)$  dans le corps de base  $F$  tel que  $P(a)=0$ . Plus généralement, on dit de l'extension  $E / F$  qu'elle est transcendante si et seulement s'il existe au moins un élément de  $E$  qui soit transcendant sur  $F$ .

▪ **Exemple :**

L'extension non différentielle  $R/Q$  est transcendante car les éléments  $e$  et  $\pi$  du corps  $R$  sont transcendants sur le corps  $Q$ .

◆ **REMARQUES**

Les concepts utilisés pour les extensions algébriques sont analogues à ceux utilisés dans le cas plus général des espaces vectoriels :

Un ensemble d'éléments  $[\xi_i / i \in I]$  de  $E$  est dit  $F$ -algébriquement dépendant si et seulement s'il existe au moins un polynôme  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sur  $F$  tel que  $P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0$ .

Un ensemble qui n'est pas  $F$ -algébriquement dépendant est dit  $F$ -algébriquement indépendant.

Il est possible de définir des ensembles de dimension maximale  $F$ -algébriquement indépendants. Ces derniers seront appelés des bases de transcendance de  $E / F$ . Deux bases de ce type ont le même cardinal appelé degré de transcendance de  $E/F$  qui est noté :  $d^{\circ} \text{tr } E / F$ . D'où une extension non différentielle  $E / F$  est algébrique si et seulement si  $d^{\circ} \text{tr } E / F = 0$ .

Par analogie avec le cas non différentiel, il existe deux types d'extensions différentielles  $L / K$ , en considérant à présent deux corps différentiels  $L$  et  $K$ , telles que  $K$  est un sous corps de  $L$  : extension différentiellement algébrique et différentiellement transcendante.

### III.2.1.3 EXTENSION DIFFERENTIELLEMENT ALGEBRIQUE :

Un élément  $\xi$  de  $L$  est dit différentiellement algébrique sur  $K$  si et seulement si celui-ci satisfait une équation différentielle  $P(\xi, \xi', \dots, \xi^{(\alpha)}) = 0$ , où  $P$  est un polynôme à coefficients dans  $K$ , de variable  $\xi$  et de ses  $\alpha$  premières dérivées. Donc l'extension  $L / K$  est différentiellement algébrique si et seulement si tout élément de  $L$  est différentiellement algébrique sur  $K$ .

### III.2.1.4 EXTENSION DIFFERENTIELLEMENT TRANSCENDANTE :

Un élément  $a$  de  $L$  est dit différentiellement transcendant si et seulement s'il n'est pas différentiellement algébrique sur  $K$ , ce qui signifie qu'il n'existe pas d'équation différentielle algébrique sur  $K$  satisfaite par  $a$ . En généralisant, on peut dire que l'extension  $L / K$  est dite différentiellement transcendante si et seulement s'il existe au moins un élément de  $L$  qui soit différentiellement transcendant sur  $K$ .

### ◆ REMARQUES

Un ensemble d'éléments  $[\xi_i, i \in I]$  de  $L$  est dit différentiellement  $K$ -algébriquement dépendant si et seulement si l'ensemble des dérivées  $[\xi_i^{v_i} / i \in I, v_i = 1, 2, \dots, \alpha_i]$  est

$K$ -algébriquement dépendant, ce qui signifie que les éléments  $[\xi_i]$  satisfont des équations différentielles algébriques.

Un système qui n'est pas différentiellement  $K$ -algébriquement dépendant est dit  $K$ -algébriquement indépendant.

Un ensemble d'éléments  $K$ -algébriquement indépendants par rapport à l'inclusion est appelé une base de transcendance différentielle de  $L / K$ . Deux bases de ce type ont le même cardinal, appelé degré de transcendance différentielle de  $L / K$  qui est noté :  $d^\circ \text{tr diff } L / K$ .

Ainsi, une extension  $L / K$  est différentiellement algébrique si et seulement si :  $d^\circ \text{tr diff } L / K = 0$ .

#### ▪ Exemple

Soit  $u = [u_i, i \in I]$  une base de transcendance différentielle de  $L / K$ . On note  $K \langle u \rangle$  le corps différentiel engendré par  $K$  et  $u$ .

Les corps différentiels  $K \langle u \rangle$  et  $L$  ne coïncident en général pas mais l'extension  $L / K \langle u \rangle$  est différentiellement algébrique.

#### ▪ Théorème :

Une extension différentielle finiment engendrée est algébrique si et seulement si son degré de transcendance différentielle est fini.

#### ▪ Remarque :

Le degré de transcendance différentielle correspond au nombre de conditions initiales nécessaires à la résolution des équations différentielles algébriques.

### III.2.1.5 ESPACES VECTORIELS DIFFÉRENTIELS

Soit un corps différentiel  $K$  et  $V$  un  $K$ -espace vectoriel différentiel doté de l'opération de dérivation notée  $\frac{d}{dt} = "$ , telle que :  $\forall a_1, a_2 \in K$  et  $\forall v_1, v_2 \in V$ .

$$\frac{d(a_1 v_1 + a_2 v_2)}{dt} = \dot{a}_1 v_1 + a_1 \dot{v}_1 + \dot{a}_2 v_2 + a_2 \dot{v}_2 \quad (\text{III.2})$$

Un morphisme  $K$ -linéaire différentiel  $\varphi : V \rightarrow W$  de  $K$ -espaces vectoriels est un morphisme  $K$ -linéaire qui commute avec l'opérateur de dérivation tel que :

$$\forall v \in V : \frac{d\varphi(v)}{dt} = \varphi(\dot{v}) \quad (\text{III.3})$$

Donc la notion d'isomorphisme différentiel  $K$ -linéaire est évidente.

Un ensemble d'éléments  $[v_i, i \in I]$  de  $V$  est dit différentiellement  $K$ -linéairement dépendant si et seulement si l'ensemble des dérivées  $[v_i^{y_i} / i \in I, v_i = 0, 1, 2, \dots, \alpha_i]$  est  $K$ -linéairement dépendant. Un ensemble qui n'est pas différentiellement  $K$ -linéairement dépendant est dit différentiellement  $K$ -linéairement indépendant. Il existe de tels ensembles qui sont maximaux par rapport à l'inclusion, ils sont appelés bases différentielles de  $V$ . Deux bases de ce type ont le même cardinal. Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel différentiel finiment engendré, alors la dimension différentielle de  $V$  est nulle si et seulement si sa dimension non différentielle est finie.

➤ **Exemple :** L'ensemble  $R(t)$  des polynômes de la variable  $t$  est un espace vectoriel différentiel  $R$ -linéaire par rapport à l'opération de dérivation par rapport au temps.

### III.3 DYNAMIQUES [ 3 ]

Afin de relier les notions précédentes de l'algèbre différentielle aux méthodes d'analyse et de synthèse de l'automatique, on introduit la notion de dynamique. C'est ainsi que M.FLEISS a montré que par l'utilisation des extensions de corps différentiels et des espaces vectoriels différentiels, on pouvait introduire une forme de dynamique linéaire et non-linéaire. La dynamique linéaire est dite généralisée si la commande intervient avec ses dérivées.

#### III.3.1 DYNAMIQUE NON-LINEAIRES

Une dynamique est une extension différentiellement algébrique  $K / k \langle u \rangle$  finiment engendrée. Notons que  $k$  est le corps différentiel de base,  $k \langle u \rangle$  le corps différentiel engendré par  $k$  et les composantes de l'entrée  $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]$ . L'entrée  $u$  est dite indépendante si et seulement si  $u$  est une base de transcendance différentielle de  $K / k$ . Le degré de transcendance non différentielle de  $K / k \langle u \rangle$  est fini et noté  $n$ .

Prenons un ensemble d'éléments fini appartenant à  $K$  :

$\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_v]$  avec  $v \geq n$  et  $\xi$  est muni d'une base de transcendance de  $K / k \langle u \rangle$ . Ainsi chacune des dérivées  $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dots, \dot{\xi}_v$  est  $k \langle u \rangle$  algébriquement dépendante de  $\xi$ .

Il existe alors  $v$  polynômes  $A_1, A_2, \dots, A_v$  à coefficients dans  $k$  tels que :

$$\begin{cases} A_1(\dot{\xi}_1, \xi, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = 0 \\ A_2(\dot{\xi}_2, \xi, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = 0 \\ \vdots \\ A_v(\dot{\xi}_v, \xi, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = 0 \end{cases} \quad (III.4)$$

Ces dernières équations sont des équations différentielles implicites.

#### ▪ MATRICE JACOBIENNE

La matrice Jacobienne s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_1} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{\partial A_v}{\partial \xi_v} \end{bmatrix} \quad (III.5)$$

Lorsque la matrice Jacobienne est de rang plein égale à  $v$ , le recours au théorème des fonctions implicites nous fournit une représentation sous forme d'équations explicites comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = a_1(\xi, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \\ \dot{\xi}_2 = a_2(\xi, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_v = a_v(\xi, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Les fonctions  $a_i$  sont des fractions rationnelles à coefficients dans le corps de base  $k$ . Cette forme n'est en général valide que localement car elle ne l'est que si la matrice Jacobienne est de rang plein.

L'ensemble  $\xi$  est appelé état généralisé ou état de la dynamique de dimension  $v$ . Un état de dimension minimale est dit base de transcendance de  $K / k\langle u \rangle$  ayant une dimension finie  $n$ . Un tel état est caractérisé par la dépendance  $k\langle u \rangle$ -algébrique de ses composantes.

Soient deux états minimaux  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  et  $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]$ , alors toute composante de  $\bar{x}$  est  $k\langle u \rangle$ -algébriquement dépendante des composantes de  $x$ . Donc, il existe  $n$  polynômes à coefficients dans  $k$  reliant  $x$  et  $\bar{x}$  tels que :

$$\begin{cases} P_1(\bar{x}_1, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = 0 \\ P_2(\bar{x}_2, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = 0 \\ \vdots \\ P_n(\bar{x}_n, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

### ▪ DEFINITIONS ET PROPRIETES

- ◆ Soit  $K / k\langle u \rangle$  une dynamique, alors la représentation d'état est le plus souvent implicite et ne peut être mise sous forme explicite que localement.
- ◆ Un état minimal est une base de transcendance non différentielle de  $K / k\langle u \rangle$ .
- ◆ Deux états minimaux sont liés par des équations dépendantes des entrées d'un nombre fini de leurs dérivées.

### III.3.2 DYNAMIQUES LINEAIRES

Une dynamique linéaire, notée sous la forme  $(V, [u])$  est un  $k$ -espace vectoriel différentiel finiment engendré  $V$  contenant  $[u]$  tel que la dimension différentielle du quotient  $V/[u]$  soit nulle.

L'entrée  $u$  est dite indépendante si et seulement si elle est une base différentielle de  $V$ . La dimension non différentielle de  $W=V/[u]$  est finie et égale à  $n$ .

Soit  $\eta = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\mu]$ ,  $\mu \geq n$  un ensemble fini de  $W$  contenant une base. Alors les dérivées  $\dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \dots, \dot{\eta}_\mu$  sont  $k$ -linéairement dépendantes des composantes de  $\eta$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{\eta}_\mu \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_\mu \end{bmatrix} \tag{III.8}$$

Soit un ensemble fini  $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu]$  dans  $V$  tel que son image dans  $V$  tel que son image dans  $W$  soit  $\eta$ .

Alors, la relation précédente devient :

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{\xi}_\nu \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_\nu \end{bmatrix} + \sum_{\mu=0}^{\alpha} B_\mu \cdot \begin{bmatrix} u_1^\mu \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m^\mu \end{bmatrix} \tag{III.9}$$

Les matrices  $B_\mu$  de dimension  $(\nu \times m)$ , sont à coefficients dans  $k$  et l'état  $\xi$  généralisé est de dimension  $(\nu \times 1)$ . Un état généralisé minimal, c'est à dire de dimension minimale, est caractérisé par le fait que son image dans  $W$  est une base, alors  $\nu = n$ .

Deux états minimaux  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  et  $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]$  sont liés par l'équation :

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{x}_\nu \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_\nu \end{bmatrix} + \sum_{\mu=0}^{\alpha} Q_\mu \cdot \begin{bmatrix} u_1^\mu \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m^\mu \end{bmatrix} \tag{III.10}$$

Les éléments des matrices  $P$  et  $Q_\mu$  sont dans  $k$ , la matrice  $P$  est carrée, inversible, de dimension  $(n \times n)$  et les matrices  $Q_\mu$  sont de dimension  $(n \times m)$ .

### III.4 ELEMENTS PRIMITIF ET CYCLIQUE [ 7 ], [ 8 ], [ 3 ]

Considérons d'abord une extension non différentielle algébrique finiment engendrée  $E / F$ , alors les théorèmes suivants constituent des résultats fondamentaux de l'algèbre différentielle:

### ▪ THEOREME DE L'ELEMENT PRIMITIF NON DIFFERENTIEL

Il existe un seul et unique élément  $\gamma \in E$ , qui est l'élément primitif, tel que  $E = F(\gamma)$ , ou autrement dit, tel que  $E$  est engendré par  $\gamma$  et les éléments de  $F$ .

### ▪ THEOREME DE L'ELEMENT PRIMITIF DIFFERENTIEL

Le théorème précédent peut être étendu au cas différentiel. Soit en effet une extension différentielle algébrique finiment engendrée  $L / K$  avec l'hypothèse que  $K$  n'est pas un corps de constantes, dans ces conditions, il existe un seul et unique élément  $\delta \in L$  dit élément primitif différentiel, tel que  $L = K \langle \delta \rangle$ , ou autrement dit, tel que  $L$  est différentiellement engendré par  $\delta$  et les éléments de  $K$ .

### ▪ THEOREME DE L'ELEMENT CYCLIQUE DIFFERENTIEL

Dans le cas linéaire, nous avons un résultat similaire applicable aux espaces vectoriels différentiels. Soient en effet deux  $k$ -espaces vectoriels différentiels  $V \subset W$  tels que leur quotient  $W/V$  soit finiment engendré et de dimension différentielle nulle, alors, toujours sous l'hypothèse que  $k$  n'est pas un corps de constantes, il existe cette fois un élément dit cyclique  $w \in W - V$  tel que  $W = V + [w]$ , c'est-à-dire que  $W$  est différentiellement engendré par  $w$  et les éléments de  $V$ .

### ➤ REMARQUE

On assumera que toute combinaison linéaire des éléments d'une base de transcendance d'une extension différentielle est un élément primitif différentiel, cela étant vrai sauf dans des cas théoriques très particuliers. Le problème est donc de trouver le bon élément primitif différentiel donnant une forme canonique explicite et simple. Il n'existe en effet aucune technique pour la détermination d'un élément primitif différentiel ou non.

## III.5 FORME CANONIQUE DE COMMANDE GENERALISEE [ 6 ], [ 8 ]

### III.5.1 FORME NON-LINEAIRE

Dans le but d'appliquer le théorème de l'élément primitif différentiel aux dynamiques non-linéaires  $K / k \langle u \rangle$ , on assume le fait que le corps différentiel  $k \langle u \rangle$  n'est pas un corps de constantes ce qui est le cas effectivement lorsque la commande  $u$  n'est pas de dimension nulle et que les composantes de l'entrée sont indépendantes entre elles. On peut donc appliquer le théorème de l'élément primitif différentiel à la dynamique non linéaire  $K / k \langle u \rangle$ .

#### ◆ Lemme :

Soit  $\delta$  un élément primitif différentiel de  $K/k \langle u \rangle$ , l'ensemble de ses dérivées successives  $[\delta, \dot{\delta}, \dots, \delta^{(v)}]$  est  $K \langle u \rangle$ -algébriquement dépendant si  $v \geq n$  (Réciproquement,  $[\delta, \dot{\delta}, \dots, \delta^{(v)}]$  est  $K \langle u \rangle$ -algébriquement indépendant si  $v \leq n-1$ ), où  $n$  est le degré de transcendance de  $K / k \langle u \rangle$ .

◆ Preuve :

En effet , si pour  $v \leq n - 1$ , l'ensemble  $[\delta, \dot{\delta}, \dots, \delta^{(v)}]$  est  $k\langle u \rangle$  algébriquement dépendant, cela implique que  $\text{tr } d^\circ K / k\langle u \rangle$  n'est pas inférieur ou égal à  $n$  car  $\delta$  est un élément primitif différentiel.

◆ Le résultat précédent signifie que si  $v = n - 1$ ,  $[\delta, \dot{\delta}, \dots, \delta^{(v)}]$  est une base de transcendance de  $K / k\langle u \rangle$  et il devient par conséquent possible d'écrire :

$$C(\delta^{(n)}, \dots, \dot{\delta}, \delta, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = 0 \tag{III.11}$$

Où  $C$  est un polynôme à coefficients dans  $k$ .

Si on pose :

$$x_1 = \delta, x_2 = \dot{\delta}, \dots, x_n = \delta^{(n-1)} \tag{III.12}$$

Alors l'ensemble  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  est ce qu'on a appelé un état minimal des dynamiques  $K / k\langle u \rangle$ . On peut donc écrire l'expression précédente sous la nouvelle forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ C(\dot{x}_n, x_n, \dots, x_1, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = 0 \end{cases} \tag{III.13}$$

Cette dernière forme canonique de commande généralisée est implicite.

La forme canonique généralisée de commande sous forme explicite est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = C(x_1, \dots, x_n, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = 0 \end{cases} \tag{III.14}$$

Cette dernière forme n'est valable que localement comme on l'a expliqué dans la partie consacrée aux dynamiques non-linéaires. C'est ainsi le théorème de l'élément primitif différentiel qui permet d'aboutir a une forme canonique généralisée de commande explicite.

### III.5.2 FORME LINEAIRE

Le théorème de l'élément cyclique ne peut s'appliquer à une dynamique linéaire  $(V, [u])$  dont le corps de base  $k$  est un corps de constantes. Nous nous limiterons donc à des systèmes linéaires non stationnaires (à temps variant).

Soit  $\varepsilon \in V - [u]$  un élément cyclique, alors l'image dans  $V / [u]$  de l'ensemble  $[\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dots, \varepsilon^{(v)}]$  est  $k$ -linéairement dépendante si  $v \geq n$  (Réciproquement  $[\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dots, \varepsilon^{(v)}]$  est  $k$ -linéairement indépendante si  $v < n$ ) et si  $n = \dim(V / [u])$ .

On peut déduire de ce qui précède que si  $v = n - 1$ , l'image de  $[\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dots, \varepsilon^{(v)}]$  dans  $V / [u]$  est une base. En posant  $x_1 = \varepsilon, x_2 = \dot{\varepsilon}, \dots, x_n = \varepsilon^{(n-1)}$ , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = L(x_1, \dots, x_n, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \end{array} \right. \quad (\text{III.15})$$

Où  $L$  est un polynôme linéaire homogène à coefficient dans  $k$ .

Cette dernière représentation où les coefficients du polynôme  $L$  peuvent dépendre du temps représente la forme canonique de commande généralisée d'un système linéaire non stationnaire.

### III.6 COMMANDE A REGIME GLISSANT GENERALISEE [ 6 ], [ 9 ]

Les systèmes à structure variable classique sont étudiés et décrits par une représentation d'état dite Kalmanienne ne faisant pas intervenir les dérivées de l'entrée, et ceci depuis les années soixante. Ces dernières années, la technique de commande classique a été généralisée par la prise en compte des dérivées successives de l'entrée dans une nouvelle représentation d'état non Kalmanienne dite représentation généralisée. Les lois de commande à structure variable généralisée sont explicitées à travers le formalisme de l'algèbre différentielle pour décrire la dynamique d'un système auquel on associe les formes canoniques de commande et d'observabilité généralisées.

Dans ce paragraphe, on s'intéressera à la technique de commande à structure variable généralisée (GVS), nous rappelons tout d'abord le passage d'une représentation d'état non Kalmanienne à une forme canonique de commande et d'observabilité généralisée, puis nous introduisons le bouclage linéarisant en régime glissant donné par M.FLISS. Nous présenterons par la suite le phénomène de déphasage non minimal dû à l'influence des dérivées de l'entrée sur la sortie et causant l'instabilité du système. On aboutira ainsi à la nécessité d'un précompensateur dans le cas où ce phénomène se manifeste.

Nous débuterons par le cas monovarié avec quelques exemples illustrant les procédures de synthèse de la commande GVS. On abordera par la suite la technique utilisée

dans le cas multivariable en procédant par diverses techniques de découplage, on appliquera ensuite les méthodes développées en monovariabale à chaque sous-système. On détaillera ensuite la procédure à travers un exemple de système multivariable.

On donnera enfin une formulation de la commande GVS dans le diagramme de phase de l'erreur pour un système non-linéaire dans les cas monovariabale puis multivariable.

Nous traiterons dans ce travail le cas multivariable.

### III.6.1 FORMES CANONIQUES GENERALISEES DE COMMANDE ET D'OBSERVABILITE D'UN SYSTEME DYNAMIQUE [ 3 ], [ 6 ], [ 8 ], [ 13 ]

Considérons un système dynamique monovariabale non-linéaire de dimension  $n$  représenté en boucle ouverte sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

Où :

$x$  : vecteur d'état de dimension  $n$ .

$u$  : entrée de commande.

$y$  : Sortie du système.

Par élimination de  $x$  dans l'équation précédente, on peut représenter le système étudié par une équation différentielle faisant intervenir l'entrée et la sortie avec leurs dérivées successives :

$$C(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = 0 \quad (\text{III.17})$$

En utilisant le formalisme de l'algèbre différentielle présenté précédemment, donc en prenant  $x_1 = y$  comme élément primitif différentiel, on peut associer au système étudié, au moins localement, une forme canonique de commande ou d'observabilité généralisée.

Cette dernière existe pour tous les systèmes nonlinéaires, commandables ou non et pouvant se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = C(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

Dans cette dernière représentation,  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  est un état généralisé minimal et l'entrée  $u$  et ses  $\alpha$  premières dérivées interviennent dans la dynamique du système.

### ➤ REMARQUE

Lorsque l'état sort de la zone de validation locale, une singularité apparaît et la dernière expression n'est alors plus valable, d'où la nécessité de changer l'élément primitif différentiel ce qui donne une nouvelle forme canonique de commande. Par ailleurs, comme il existe une infinité d'éléments primitifs différentiels, il existe de même une infinité de formes canoniques de commande. Par conséquent, il suffit dans le cas monovarié de prendre comme élément primitif la sortie du système :  $y = x_1$ .

Une fois ce changement de variable effectué, la forme canonique de commande généralisée n'est plus qu'une reformulation de l'équation entrée-sortie du processus. Cette approche présente l'intérêt de la prise en compte des dérivées de la sortie. Ceci permet d'aboutir à la forme canonique d'observabilité généralisée (GOCF), donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = C(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

Dans cette représentation  $x = [y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}]$  est un état ayant une signification physique.

Par ailleurs, en associant à la forme canonique de commande généralisée l'équation de la sortie  $y = x_1$ , on obtient  $(n+1)$  équations constituant la forme canonique d'observabilité généralisée :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = C(x_1, \dots, x_n, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

Si la forme canonique de commande généralisée ne contient pas les dérivées de l'entrée, la dynamique du système est dite dégénérée, mais dans le cas où les dérivées de l'entrée interviennent, la dynamique du système est dite généralisée (non dégénérée). Cette dynamique non dégénérée peut être celle du système bouclé quand la  $n^{\text{ème}}$  équation du système est considérée comme une équation de bouclage :

$$\dot{x}_n = C(x_1, \dots, x_n, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \quad (\text{III.21})$$

### ► EXEMPLE 1

Considérons le cas classique d'un système monovarié non linéaire représenté dans l'espace d'état décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_1^2 + \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = \eta_3 + u \\ \dot{\eta}_3 = c \cdot \eta_3 \\ y = \eta_1 \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

Où :

$y$  : Sortie du système.

$\eta = [\eta_1, \eta_2, \eta_3]^T$  : Vecteur d'état du système.

$u$  : entrée du système

$c$  : paramètre réel (constante).

Par élimination de  $\eta$  dans les équations précédentes, on obtient une équation différentielle ne faisant intervenir que l'entrée  $u$  et la sortie  $y$  avec leurs dérivées successives :

$$\ddot{y} - (2y + c)\dot{y} + 2cy\dot{y} - 2\dot{y}^2 + cu - \dot{u} = 0 \quad (\text{III.23})$$

En prenant comme élément primitif différentiel la sortie comme suit :

$$y = \eta_1 = x_1 \quad (\text{III.24})$$

On peut définir un nouvel état  $[x_1, x_2, x_3]$  comme suit :

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y} \\ x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{y} \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

On peut désormais définir une dynamique généralisée définie par les formes canoniques associées au système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = 2(x_1x_3 + x_2^2) + c(x_3 - 2x_1x_3 - u) + \dot{u} \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

### III.6.2 BOUCLAGE LINEARISANT [ 6 ], [ 3 ], [13]

A partir de la forme canonique explicite de commande généralisée , FLIESS a introduit un bouclage linéarisant comme suit :

$$C(x_1, \dots, x_n, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^{\alpha} b_i v_i \quad (\text{III.27})$$

On aura alors  $v = [v_1, \dots, v_{\alpha}]$  est la nouvelle entrée (consigne ) et les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  sont choisis dans le corps de base  $k$  .

Ce bouclage est introduit de sorte que la commande  $u$  vérifiant l'équation précédente soit obtenue soit par une linéarisation exacte soit par une linéarisation numérique.

#### ◆ LINEARISATION EXACTE

Une linéarisation exacte est obtenue par découplage d'état statique donnant à un système non-linéaire un comportement linéaire.

#### ◆ LINEARISATION NUMERIQUE

Une linéarisation numérique est obtenue par un bouclage dynamique d'état discontinu donnant un comportement linéaire à un système non-linéaire.

Le bouclage linéarisant d'un système dégénéré s'écrit :

$$C(x_1, \dots, x_n, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^{\alpha} b_i v_i \quad (\text{III.28})$$

Où les  $a_i$  et  $b_i$  sont des constantes réelles et le vecteur  $v = [v_1, v_2, \dots, v_{\alpha}]$  représente la nouvelle entrée du système. Cette dernière équation est représentative des systèmes localement linéarisables par bouclage d'état statique.

#### ➤ EXEMPLE

Reprenons le système de l'exemple 1 auquel on associe le couple (GOCF, GCCF), un bouclage linéarisant peut être écrit sous la forme suivante :

$$2.(x_1 x_3 + x_2^2) + c.(x_3 - 2x_1 x_2 - u) + \dot{u} = \sum_{i=1}^3 a_i x_i + v_i \quad (\text{III.29})$$

Ce bouclage est effectué en choisissant les paramètres  $a_i$  de sorte que le système linéaire d'équation caractéristique  $a_1 + a_2 s + a_3 s^2$  soit stable.

Le théorème des fonction implicites permet d'écrire l'expression sous forme explicite par rapport à  $n$ 'importe quelle entrée  $u_i$  et donc d'engendrer un bouclage linéarisant .En notant  $\bar{u}_i = [u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_{\alpha}]$  , on peut écrire :

$$u_i = d(x_1, \dots, x_n, \bar{u}_i) - \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^{\alpha} b_i v_i \quad (\text{III.30})$$

Ce qui représente le bouclage d'état statique linéarisant du système.

### ➤ REMARQUES

- ◆ Une étude préalable du système prenant en compte les conditions de commandabilité et les singularités est nécessaire pour le choix de la composante de bouclage  $u_i$ .
- ◆ Les composantes de  $\bar{u}_i$  sont utilisées pour lever certains problèmes de perte de commandabilité liés à des singularités.

Une linéarisation par bouclage statique n'est pas applicable pour des dynamiques généralisées.

Par contre, l'introduction de la forme GCCF et l'utilisation de commandes discontinues permettent l'une des deux possibilités suivantes :

- De linéariser le système exactement, mais sans connaissance a priori de la stabilité de la commande.
- De linéariser le système numériquement à l'aide d'un bouclage discontinu de l'état.

Par l'application du théorème des fonctions implicites à l'équation du bouclage linéarisant donnée par FLIESS, on peut écrire :

$$u_i^{(\alpha)} = e_i(x_1, \dots, x_n, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha-1)}, \bar{u}_i^{(\alpha)}) - \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^{\alpha} b_i v_i \quad (\text{III.31})$$

Cette dernière équation exprime localement le bouclage linéarisant du système pour l'une des dérivées d'ordre supérieur des entrées de commande. L'élément primitif différentiel a donc un comportement linéaire par rapport à la nouvelle entrée  $v$ .

Un problème de stabilité de la commande se pose. Dans le cas linéaire, cette étude est effectuée par l'analyse des zéros de la fonction ou matrice de transfert suivant que le système soit monovarié ou multivarié. Dans le cas non-linéaire, l'analyse de ces zéros au voisinage de l'origine : La dynamique des zéros.

Si la dynamique des zéros est stable à l'origine, alors le système correspondant est localement stabilisable de façon continue par la dérivée d'ordre le plus élevé de l'une des composantes de la commande. Dans le cas contraire, une partie de la dynamique ne tendra pas vers l'origine et fera exploser la commande alors que l'autre partie aura été stabilisée.

### ■ PROPRIETES

#### ◆ CAS MONOVARIALE

La dimension de la dynamique des zéros est égale à la différence entre la dimension minimale du système et le degré relatif de la sortie à l'origine. Cette dimension est égale à

l'ordre le plus élevé parmi les dérivées successives de l'entrée dans la forme canonique de commande généralisée si l'élément primitif différentiel choisi est la sortie.

#### ◆ CAS MULTIVARIABLE

La dimension de la dynamique des zéros est égale à la somme des différences entre la dimension du système et les degrés relatifs de chaque sortie à l'origine.

La différence entre la dimension minimale du système et le degré relatif de chaque sortie par rapport à une entrée est égal à l'ordre le plus élevé parmi les dérivées successives de l'entrée de commande dans la forme canonique de commande généralisée.

#### ➤ REMARQUE

Un système non-linéaire mis sous forme canonique de commande généralisée peut toujours être linéarisé sauf dans le cas de phénomènes de perte de commandabilité dus à des singularités.

#### ➤ EXEMPLE

Considérons de nouveau le système donné dans l'exemple 1 (de dimension  $n = 3$ )

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_1^2 + \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = \eta_3 + u \\ \dot{\eta}_3 = c \cdot \eta_3 \\ y = \eta_1 \end{cases} \quad (\text{III.32})$$

La dynamique des zéros à l'origine se calcule par l'annulation des dérivées successives de la sortie. Cette procédure fournit une dynamique des zéros de dimension 1 :

$$\dot{u} = -c \cdot \eta_3 \quad \text{avec } u = -\eta_3 \quad (\text{III.33})$$

La stabilisation de cette dynamique dépend donc du signe du paramètre  $c$ . Si  $c$  est négatif, alors la dynamique est stable.

Faisons l'analogie avec la dynamique de la commande dans la représentation canonique de commandabilité généralisée donnée par le couple (GOCF, GCCF). On remarque que le degré relatif de la sortie  $y$  est  $r = 2$ .

La dimension de la dynamique des zéros est égale à l'ordre le plus élevé parmi les dérivées successives de l'entrée qui est  $n - r = 1$ . La dynamique de la commande est régie à l'origine par l'équation :

$$\dot{u} - c \cdot u = 0 \quad (\text{III.34})$$

La dynamique de la commande à les mêmes propriétés que la dynamique des zéros, ce qui signifie qu'elle est stable si le paramètre  $c$  est négatif.

Les équations dynamiques caractérisant la commande à l'origine peuvent être données aussi par l'annulation des sorties et leurs dérivées dans les équations entrées-sortie du système.

### III.6.3 INFLUENCE DES DERIVEES DE L'ENTREE SUR LA SORTIE

Dans le cas monovarié, si le degré relatif de la sortie (nombre de dérivations nécessaires pour faire apparaître la commande) est égal à l'ordre de la dérivée de la sortie où apparaît la perturbation, alors les régimes glissants seront utilisés de façon robuste par rapport aux perturbations.

Dans le cas multivariable, si les conditions géométriques de colinéarité entre les matrices d'application des entrées et des perturbations sont vérifiées alors les régimes glissants auront des qualités de robustesse.

L'utilisation d'une des dérivées de la commande pour générer les régimes glissants permet de résoudre les problèmes liés au phénomène du broutement. En effet, les intégrations successives lissent la commande discontinue avant son application sur la dynamique du système empêchant ainsi l'apparition des vibrations à haute fréquence liées aux discontinuités de l'entrée.

#### III.6.3.1 CAS MONOVARIABLE [ 3 ], [ 6 ]

Soit le système monovarié suivant :

$$a \left( \frac{d}{dt} \right) \cdot y = b \left( \frac{d}{dt} \right) \cdot u + \varepsilon \quad (\text{III.35})$$

avec :

$u$  : entrée du système

$y$  : sortie du système

$\varepsilon$  : Perturbation externe supposée bornée.

Les opérateurs différentiels linéaires sont définis par :

$$\begin{aligned} a \left( \frac{d}{dt} \right) &= \sum_{i=0}^{\alpha} a_i \cdot \frac{d^i}{dt^i} \\ b \left( \frac{d}{dt} \right) &= \sum_{j=0}^{\beta} b_j \cdot \frac{d^j}{dt^j} \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

Ces derniers appartiennent à l'anneau  $\mathbb{R} \left[ \frac{d}{dt} \right]$ , avec  $a_{\alpha} \neq 0$  et  $b_{\beta} \neq 0$ .

Un système linéaire est le plus souvent une approximation linéaire par troncature des termes nonlinéaires du système réel. De même la perturbation intervient de façon linéaire par la même approximation.

Les polynômes  $a$  et  $b$  sont supposés premiers entre eux pour satisfaire aux conditions de commandabilité. Cette hypothèse permet également d'affirmer par symétrie que le système est observable.

En posant :

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n = y^{(n)} \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

On peut réécrire le système sous forme observable généralisée :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, i = 1, \dots, \alpha - 1 \\ \dot{x}_\alpha = \frac{1}{a_\alpha} \cdot \left[ - \sum_{i=1}^{\alpha-1} a_i x_i + \sum_{j=0}^{\beta} b_j u^{(j)} + \varepsilon \right] \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

Les dérivées de la commande représentent l'influence instantanée des variations de l'entrée sur la  $\alpha^{\text{ème}}$  dérivée de la sortie. Un tel système est soumis aux contraintes de déphasage, minimal ou non.

#### ➤ REMARQUE

Si l'ordre  $\alpha$  du système est inférieur ou égal à  $\beta$ , alors la sortie du système est influencée directement par les dérivées de l'entrée d'ordres  $\beta, \beta - 1, \dots, \beta - \alpha$ .

#### a) PRECOMPENSATEUR

L'application d'une précompensation de l'entrée a pour but d'éviter les phénomènes d'instabilité dus au déphasage non minimal du système. Ceci n'est possible que par adjonction d'une série d'intégrateurs dont le nombre est égal à l'ordre maximal de la dérivée de l'entrée dans la forme canonique d'observabilité, ce qui signifie que la nouvelle commande sera la dérivée la plus élevée de l'entrée. Les dérivées d'ordre inférieur de l'entrée se déduisent par intégrations successives de la nouvelle entrée.

Ce principe permet d'effectuer une précompensation de la partie instable de la dynamique de la commande en posant :

$$\sum_{j=0}^{\beta} b_j \cdot u^{(j)} = \sum_{k=0}^{\beta-1} c_k \cdot u^{(k)} + v \quad (\text{III.39})$$

où  $v$  est la nouvelle entrée.

La stabilité de la nouvelle commande  $v$  sera assurée si les pôles du précompensateur sont à partie réelle strictement négative, ce qui revient à vérifier que les solutions de l'équation :

$$\sum_{j=0}^{\beta} b_j \cdot p^j = \sum_{k=0}^{\beta-1} c_k \cdot p^k \quad (\text{III.40})$$

appartiennent à  $C^*$ .

De plus, aucun des pôles du précompensateur ne doit masquer un zéro du système afin de ne pas le déstabiliser. Cela est fait par un choix judicieux des paramètres  $c_k$ .

### b) HYPERPLANS DE COMMUTATION

On choisit un hyperplan de commutation de dimension  $\alpha-1$  afin de stabiliser le système à l'origine de façon robuste par rapport à la perturbation. Cet hyperplan est choisi comme étant la sous variété d'évolution du système lors de l'application de la commande discontinue.

Le choix de cet hyperplan de commutation  $s(x) = 0$  doit être fait de sorte à vérifier les deux conditions suivantes :

- ◆ L'hyperplan doit contenir l'origine (point final de stabilisation) donnée par :  $s(0) = 0$  où est l'origine de l'espace considéré de dimension  $\alpha$ .
- ◆ L'équation du plan est choisie comme une fonction linéaire de l'état (pour des raisons de stabilité) :

$$s(x) = \sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i x_i = 0 \quad (\text{III.41})$$

Où les  $\lambda_i$  sont des réels. On peut également considérer la surface donnée par l'équation (II.25).

### c) CONDITION DE GLISSEMENT

Les conditions de glissement du système sont :

$$S(x) \cdot \dot{S}(x) = \left[ \sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i x_i \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^{\alpha-1} \lambda_i x_{i+1} + \lambda_{\alpha} \cdot \left( - \sum_{i=1}^{\alpha-1} a_i x_i + \sum_{j=0}^{\beta-1} c_j u^{(j)} + v + \varepsilon \right) \right] < 0 \quad (\text{III.42})$$

La résolution de cette inégalité par rapport à la nouvelle commande  $v$  fournit le bouclage remplissant les conditions en mode glissant du système. L'une des solutions est la suivante :

$$v = - \frac{1}{\lambda_{\alpha}} \cdot \sum_{i=1}^{\alpha-1} \lambda_i x_{i+1} + \sum_{i=1}^{\alpha-1} a_i x_i - \sum_{j=0}^{\beta-1} c_j u^{(j)} - k \cdot \text{sign}(S) \quad (\text{III.43})$$

Où  $k$  est l'amplitude de la fonction  $\varepsilon$  représentant la perturbation externe.

Cette commande ne pourra être réalisée que si l'état est complètement observable..

**d) SYSTEME REDUIT**

Quand le système évolue sur l'hyperplan, la dynamique du système initial est plongée dans l'état d'un système d'ordre réduit et on a :

$$S(x) = 0 \tag{III.44}$$

Donc le système évolue sur une sous variété de dimension inférieure d'une unité  $\alpha - 1$  à la dimension du système. D'après l'hyperplan de commutation, on peut écrire :

$$x_\alpha = -\frac{1}{\lambda_\alpha} \cdot \sum_{i=1}^{\alpha-1} \lambda_i x_i \tag{III.45}$$

Le système initial évolue en régime glissant sur l'hyperplan  $S=0$  comme le système d'ordre réduit de dimension  $\alpha - 1$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, \alpha - 2 \\ \dot{x}_{\alpha-1} = -\frac{1}{\lambda_\alpha} \sum_{i=1}^{\alpha-1} \lambda_i x_i \\ y = x_1 \end{cases} \tag{III.46}$$

➤ **REMARQUE**

Le choix des coefficients de l'hyperplan de commutation doit être fait de façon appropriée afin d'assurer une bonne dynamique ou mode de stabilisation du système. Le coefficient  $\lambda_\alpha$  est généralement choisi arbitrairement comme étant égal à un.

**e) EXEMPLES**

L'approche qui vient d'être présentée sera illustrée à travers 2 exemples :

**1. DEPHASAGE MINIMAL**

Etudions la stabilisation du système à déphasage minimal par l'application de la commande à régime glissant sur la dérivée d'ordre le plus élevé de l'entrée du système dont l'équation dynamique d'entrée-sortie est donnée par :

$$\ddot{y} = u + \dot{u} + \varepsilon \tag{III.47}$$

En prenant comme variables d'état  $x_1 = y$  et  $x_2 = \dot{y}$ , on obtient la forme canonique généralisée d'observabilité comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u + \dot{u} + \varepsilon \\ y = x_1 \end{cases} \tag{III.48}$$

En appliquant une commande discontinue  $v$  sur la première dérivée de l'entrée afin de suivre la courbe de commutation, on a :

$$S(x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \quad (\text{III.49})$$

Pour des raisons de stabilité, les coefficients de la courbe de commutation sont choisis tels que :  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 = 1$ .

La condition d'existence du régime glissant peut alors s'écrire :

$$S(x) \cdot \dot{S}(x) = (\lambda_1 x_1 + x_2) \cdot (\lambda_1 x_2 + u + \dot{u} + \varepsilon) < 0$$

Pour stabiliser le système, la commande discontinue avec bouclage est prise égale à la dérivée de l'entrée et aucune précompensation n'est nécessaire .

$$v = \dot{u} = -(\lambda_1 x_2 + u) - k \cdot \text{sign}(S) \quad (\text{III.50})$$

Où  $k > \left| \text{Max}_t(\varepsilon) \right|$ .

La dynamique de la commande est stable et converge avec l'état  $x$  vers l'origine. Seule la dérivée de l'entrée continuera de commuter entre plus ou moins  $k$ , ce qui engendrera un cycle limite autour de l'origine.

En régime glissant, on a :

$$S(x) = 0 \Leftrightarrow x_2 = -\lambda_1 x_1 \quad (\text{III.51})$$

Donc, le système initial est plongé dans l'état du système d'ordre réduit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\lambda_1 x_1 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{III.52})$$

## 2. DEPHASAGE NON MINIMAL

On considère cette fois un système perturbé avec un déphasage non minimal et donné par :

$$\ddot{y} = u - \dot{u} + \varepsilon \quad (\text{III.53})$$

La représentation sous forme canonique de commande généralisée est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - \dot{u} + \varepsilon \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{III.54})$$

La précompensation est nécessaire avant l'application de la commande à régime glissant . On introduit en effet une nouvelle entrée  $v$  telle que :

$$v + c \cdot u = u - \dot{u} \quad \text{avec } c > 1 \quad (\text{III.55})$$

Appliquons une commande discontinue afin de suivre la courbe de commutation  $S(x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$  avec les coefficients de la courbe choisis comme suit :

$$\lambda_1 > 0 \text{ et } \lambda_2 = 1 \quad (\text{III.56})$$

La condition d'existence du régime glissant s'écrit alors :

$$S(x) \cdot \dot{S}(x) = (\lambda_1 x_1 + x_2) \cdot (\lambda_1 x_2 + v + c \cdot u + \varepsilon) < 0 \quad (\text{III.57})$$

D'où l'expression du bouclage continu qui est la suivante :

$$v = -(\lambda_1 x_2 + c \cdot u) - k \cdot \text{sign}(S) \quad (\text{III.58})$$

avec  $k > \text{Max}|\varepsilon|$

Comme pour le système précédent , la dynamique du système en régime glissant est donnée par :

$$S(x) = 0 \Leftrightarrow x_2 = -\lambda_1 x_1 \quad (\text{III.59})$$

D'où l'équivalence avec le système d'ordre réduit suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\lambda_1 x_1 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{III.60})$$

### III.6.3.2 CAS MULTIVARIABLE [ 3 ], [ 6 ]

Soit un système multivariable donné par :

$$A \left( \frac{d}{dt} \right) \cdot y = B \left( \frac{d}{dt} \right) \cdot u + \varepsilon \quad (\text{III.61})$$

Où:

$u = [u_1, \dots, u_p]$  est le vecteur d'entrée du système.

$y = [y_1, \dots, y_p]$  est le vecteur de sortie du système.

$\varepsilon = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p]$  est le vecteur de perturbation externe.

Les matrices polynomiales A et B sont à coefficients dans l'anneau  $R\left[\frac{d}{dt}\right]$ , où R est le corps des réels.

▪ PROPOSITION GENERALE

Tout système multivariable de la forme considérée est stabilisable de façon robuste vis-à-vis des perturbations externes par régimes glissants généralisés si les matrices A et B sont carrées, premières à gauche entre elles et non singulières. Le domaine de stabilisation est lié aux bornes des perturbations et de certaines de leurs dérivées ainsi qu'à l'amplitude de l'entrée.

La notion de primarité à gauche entre les deux matrices A et B exprime une condition de commandabilité du système. De plus, la non singularité de la matrice A est un condition d'existence du système linéaire considéré.

a) PRECOMPENSATION

Sous l'hypothèse de la notion de singularité de la matrice B, le système est découplable par bouclage dynamique. Donc, on peut écrire en ayant recours à des manipulations algébriques élémentaires, que le système est équivalent à :

$$\begin{cases} a_1\left(\frac{d}{dt}\right)y_1 = \sum_{j=1}^p b_{1j}\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot u_j + \sum_{j=1}^p e_{1j}\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \varepsilon_j \\ \dots \\ a_i\left(\frac{d}{dt}\right)y_i = \sum_{j=1}^p b_{ij}\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot u_j + \sum_{j=1}^p e_{ij}\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \varepsilon_j \\ \dots \\ a_p\left(\frac{d}{dt}\right)y_p = \sum_{j=1}^p b_{pj}\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot u_j + \sum_{j=1}^p e_{pj}\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \varepsilon_j \end{cases} \quad (III.62)$$

Où  $a_i, b_{ij}, e_{ij}$  sont des polynômes différentiels à coefficients réels et de degrés respectifs  $\alpha_i, \beta_{ij}, \delta_{ij}$ .

Chaque composante de sortie d'un sous système d'entrée-sortie est influencée par une combinaison linéaire des entrées et de leurs dérivées. La perturbation qui intervient dans chaque sous système est aussi une combinaison linéaire des composantes de la perturbation initiale et de ses dérivées.

L'introduction d'une précompensation de la forme :

$$\sum_{j=1}^p b_{ij}\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot u_j = \sum_{j=1}^p b'_{ij}\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot u_j + v_i \quad \text{avec } i = 1, \dots, p \quad (III.63)$$

Où  $v$  est la nouvelle commande permettant de découpler le système original.

Le système initial peut se mettre sous la forme :

$$a_i \left( \frac{d}{dt} \right) \cdot y_i = \sum_{j=1}^p b'_{ij} \left( \frac{d}{dt} \right) \cdot u_j + v_i + \sum_{j=1}^p e_{ij} \left( \frac{d}{dt} \right) \cdot \varepsilon_j \quad \text{avec } i = 1, \dots, p \quad (\text{III.64})$$

Où les coefficient  $b'_{ij}$  appartiennent à l'anneau  $R \left[ \frac{d}{dt} \right]$ .

La nouvelle commande  $u$  est la dérivée d'ordre le plus élevé de la  $i^{\text{ème}}$  composante de l'entrée appliquée à la sortie  $y_i$ .

L'introduction du précompensateur a aussi pour but d'éviter les problèmes d'instabilité des commandes dus au déphasage non minimal du système. Comme dans le cas monovariable, le compensateur consiste à l'introduction d'une série d'intégrateurs sur chaque entrée de façon à commander le système par la dérivée d'ordre le plus élevé de la commande. Les pondérateurs  $b'_{ij}$  sont choisis de sorte que l'on ait un précompensateur pour chaque entrée stable.

Devant de telles conditions, nous sommes en présence d'un système multivariable découplé et admettant une dynamique de commande stable pour chaque entrée. Le système est alors composé de  $p$  systèmes sous forme canonique d'observabilité :

$$\text{Pour } i = 1, \dots, p : \begin{cases} \dot{x}_{ik} = x_{ik+1} & k = 1, \dots, \alpha_i - 1 \\ \dot{x}_{i\alpha_i} = - \sum_{l=1}^{\alpha_i-1} a_{il} x_{il} + \sum_{j=1}^p b'_{ij} \left( \frac{d}{dt} \right) \cdot u_j + v_i + \sum_{j=1}^p e_{ij} \left( \frac{d}{dt} \right) \cdot \varepsilon_j \\ y_i = x_{i1} \end{cases} \quad (\text{III.65})$$

Ces  $p$  systèmes sont indépendants entre eux et ne sont pas nécessairement de même dimension.

### b) HYPERPLANS DE COMMUTATION

Les hyperplans de commutation seront définis pour stabiliser, de façon indépendante, chaque composante de la sortie du système découplé lors du régime glissant. Le choix de ces hyperplans  $S_i$  est fait de manière à contenir le point final de stabilisation, d'où :

$$S_i(0) = 0 \quad (\text{III.66})$$

Avec  $0 = [0, \dots, 0]$  : origine de l'espace considéré de dimension  $\alpha_i$ .

Les équations de ces hypersurfaces sont du type :

$$S_i(x) = \sum_{j=1}^{\alpha_i} \lambda_{ij} \cdot x_{ij} \quad \text{avec } i = 1, \dots, p \quad (\text{III.67})$$

Où les  $\lambda_{ij}$  appartiennent au corps de base.

**c) CONDITIONS DE GLISSEMENT**

Les conditions de glissement pour chaque surface de commutation sont :

$$S_i(x) \cdot \dot{S}_i(x) \leq 0 \quad (III.68)$$

avec :

$$\dot{S}_i(x) = \sum_{j=1}^{\alpha_i-1} \lambda_{ij} \cdot x_{ij+1} + \lambda_{i\alpha_i} \cdot \left[ - \sum_{j=1}^{\alpha_i-1} a_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^p b'_{ij} \left( \frac{d}{dt} \right) \cdot u_j + v_i + \sum_{j=1}^p e_{ij} \left( \frac{d}{dt} \right) \cdot \epsilon_j \right] \quad (III.69)$$

Les nouvelles commandes  $v_i$  assurant les conditions de glissement sont :

$$v_i = - \frac{1}{\lambda_{i\alpha_i}} \sum_{j=1}^{\alpha_i-1} \lambda_{ij} x_{ij+1} + \sum_{j=1}^{\alpha_i-1} a_{ij} x_{ij} - \sum_{j=1}^p b'_{ij} \left( \frac{d}{dt} \right) \cdot u_j - k_i \cdot \text{sign}(S_i) \quad (III.70)$$

Où les coefficients  $k_i$  sont choisis pour assurer les conditions de robustesse de la commande par rapport aux perturbations et leurs dérivées.

**d) SYSTEME REDUIT**

Chaque sous système évolue en régime glissant sur son hyperplan de commutation . Donc, la dynamique de chaque sous système est plongée dans l'état d'un système d'ordre réduit, ce qui permet d'écrire :

$$S_i(x) = 0 \quad (III.71)$$

D'après l'hyperplan de commutations, on peut écrire :

$$x_{i\alpha_i} = - \frac{1}{\lambda_{i\alpha_i}} \sum_{j=1}^{\alpha_i-1} \lambda_{ij} x_{ij} \quad (III.72)$$

Le  $i^{\text{ème}}$  système évolue donc en régime glissant sur l'hyperplan comme le système d'ordre réduit de dimension  $p_i-1$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_{ij} = x_{ij+1} & , j = 1, \dots, \alpha_i - 2 \\ \dot{x}_{i\alpha_i-1} = - \frac{1}{\lambda_{i\alpha_i}} \sum_{l=1}^{\alpha_i-1} \lambda_{il} x_{il} \\ y_i = x_{i1} \end{cases} \quad (III.73)$$

Si les conditions de glissement sont respectées, alors chaque sous système est indépendant et évolue en régime glissant sur son hypersurface de commutation.

## e) EXEMPLE

Soit un système multivariable bruité :

$$A(s).y = B(s).u + C(s).\varepsilon \quad (\text{III.74})$$

Où :

$u = [u_1, u_2]$  est le vecteur d'entrée.

$y = [y_1, y_2]$  est le vecteur de sortie.

$\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$  est une perturbation bornée.

$$\text{Avec : } A(s) = \begin{bmatrix} s^2 & s+1 \\ s-1 & s \end{bmatrix}, B(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \text{ et } C(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice A est diagonalisée par la matrice P, définie par :

$$P(s) = \begin{bmatrix} s^2 & -(s^2 + s) \\ 1-s & s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.75})$$

Le système entrée-sortie devient alors :

$$A \left( \frac{d}{dt} \right) \cdot y = B \left( \frac{d}{dt} \right) \cdot u + C \left( \frac{d}{dt} \right) \cdot \varepsilon \quad (\text{III.76})$$

avec :

$$A'(s) = P(s).A(s) = \begin{bmatrix} s(s^3 - s^2 + 1) & 0 \\ 0 & s(s^3 - s^2 + 1) \end{bmatrix} \quad (\text{III.77})$$

$$B'(s) = P(s).B(s) = \begin{bmatrix} s^2(s+1) & 0 \\ 1-s^2 & s^3 - 2s^2 + s \end{bmatrix} \quad (\text{III.78})$$

$$C'(s) = P(s).C(s) = \begin{bmatrix} s^2 & -(s^2 + s) \\ 1-s & s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.79})$$

d'où :

$$\begin{cases} \overset{\dots}{y}_1 - \overset{\dots}{y}_1 + \dot{y}_1 = \overset{\dots}{u}_1 + \ddot{u}_1 + \dot{u}_2 + w_1 \\ \overset{\dots}{y}_2 - \overset{\dots}{y}_2 + \dot{y}_2 = -\overset{\dots}{u}_1 + u_1 + \ddot{u}_2 - 2 \cdot \ddot{u}_2 + \dot{u}_2 + w_2 \end{cases} \quad (\text{III.80})$$

Où on a posé les perturbations :

$$\begin{cases} w_1 = \ddot{\varepsilon}_1 - \ddot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_2 \\ w_2 = -\dot{\varepsilon}_1 + \varepsilon_1 + \ddot{\varepsilon}_2 \end{cases} \quad (\text{III.81})$$

Ces deux perturbations sont supposées bornées.

L'introduction du précompensateur découplant sur chaque composante de l'entrée  $u$  permet de commander le système par la nouvelle commande  $v = [v_1, v_2]$  telle que :

$$\begin{cases} v_1 + \sum_{j=1}^3 (a_{1j} \cdot u_1^{(j)} + a_{2j} \cdot u_2^{(j)}) = \ddot{u}_1 + \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \\ v_2 + \sum_{j=1}^3 (b_{1j} \cdot u_1^{(j)} + b_{2j} \cdot u_2^{(j)}) = -\ddot{u}_1 + u_1 + \ddot{u}_2 - 2\dot{u}_2 + \dot{u}_2 \end{cases} \quad (\text{III.82})$$

Les coefficients  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  sont choisis de façon à avoir un précompensateur stable.

La représentation d'état généralisée du système associée au précompensateur défini par le système d'équations précédent est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = x_4 - x_2 + \sum_{j=1}^3 (a_{1j} \cdot u_1^{(j)} + a_{2j} \cdot u_2^{(j)}) + v_1 + w_1 \\ \text{avec :} \\ y_1 = x_1 \end{cases} \quad (\text{III.83})$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = z_4 - z_2 + \sum_{j=1}^3 (b_{1j} \cdot u_1^{(j)} + b_{2j} \cdot u_2^{(j)}) + v_2 + w_2 \\ \text{avec :} \\ y_2 = z_1 \end{cases} \quad (\text{III.84})$$

Les deux nouvelles commandes  $v_1$  et  $v_2$  stabilisent le système par régime glissant sur deux hyperplans de commutations indépendants. La robustesse de cette méthode dépend du degré de dépendance des commandes  $v_1$  et  $v_2$  vis-à-vis des perturbations  $w_1$  et  $w_2$ .

### III.6.4 DYNAMIQUE GENERALISEE DANS L'ESPACE DE L'ERREUR

Nous donnons dans ce paragraphe une formulation de la commande à structure variable dans l'espace des phases de l'erreur.

## POSITION DU PROBLEME

Soit un système de dimension  $n$  représenté dans l'espace d'état par l'équation :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{III.85})$$

Où :  $x$ ,  $u$  et  $y$  désignent respectivement l'état, l'entrée et la sortie du système.

Nous considérons un asservissement pour lequel on veut déterminer une loi de commande permettant de configurer le système défini par l'équation précédente dans la position que l'on désire faire correspondre à une sortie de référence  $y_R(t)$ ,  $n$  fois différentiable par rapport au temps et une trajectoire de référence  $W_R(t) = [y_R(t), \dot{y}_R(t), \dots, y_R^{(n-1)}(t)]$ . Dans ce qui suit, on établit une dynamique pour l'erreur de poursuite  $e(t) = [e_1, e_2, \dots, e_n] = x(t) - W_R(t)$  avec  $x(t) = [y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)]$  l'état du système. Puis on introduit un bouclage linéarisant à structure variable en régime glissant dans le mode poursuite de trajectoire.

### III.6.4.1 FORME CANONIQUE DE COMMANDE GENERALISEE D'UN SYSTEME MONOVARIABLE NON-LINEAIRE DANS LE MODE DE POURSUITE [ 6 ], [ 8 ], [ 9 ]

On associe au système au moins localement une forme canonique de commande et d'observabilité généralisée définie par le couple (GOCF, GCCF) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = C(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{III.86})$$

Où  $x$  est l'état dont les composantes  $[x_i, i=1, \dots, n]$  apparaissent comme la sortie et ses  $n-1$  premières dérivées :

$$y = x_1 \text{ et } x_{i+1} = \dot{x}_i = y^i \text{ avec } i = 1, \dots, n-1 \quad (\text{III.87})$$

Dans le système d'équations précédent, on peut définir un vecteur de la variable erreur comme suit :

$$e(t) = x(t) - W_R(t) \quad \text{où } e(t) = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T \quad (\text{III.88})$$

On aura localement pour chaque variable erreur les équations :

$$\begin{cases} e_1 = y - y_R \\ e_i = e_i^{i-1} = x_i - y_R^{i-1} \quad , \quad i = 2, \dots, n \end{cases} \quad (\text{III.89})$$

En raisonnant cette fois dans l'espace d'erreur, on obtient un nouveau couple (GOCF, GCCF) relatif à l'erreur de poursuite écrite dans le cas d'une dynamique non dégénérée (les dérivées de l'entrée interviennent) :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} = e_n \\ \dot{e}_n = C(W_R(t) + e(t), u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) - y_R^{(n)}(t) \\ e_1 = y - y_R \end{cases} \quad (\text{III.90})$$

Le système bouclé avec l'équation caractéristique du bouclage  $\dot{e}_n$  d'entrée  $u$ , de sortie  $y$  et de consigne  $y_R$  peut être considéré comme commandé par  $u$  généré par le bouclage dynamique ( dans le cas d'un bouclage linéarisant  $\dot{e}_n$  peut être une fonction linéaire par rapport aux variables  $e_i$  ).

$$\dot{e}_n = C(W_R(t) + e(t), u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) - y_R^{(n)}(t) \quad (\text{III.91})$$

En régulation, la trajectoire  $W_R(t)$  devient :  $W_R(t) = [y_R, 0, 0, \dots, 0]$  (III.92)

### a) BOUCLAGE LINEARISANT A STRUCTURE VARIABLE EN REGIME GLISSANT

Considérons la même classe de systèmes nonlinéaires multivariables à laquelle on associe dans l'espace d'erreur le couple (GOCF, GCCF) relatif à l'erreur de poursuite. Supposons qu'il existe une loi de commande à structure variable permettant d'assurer un régime glissant sur une hypersurface définie par rapport au vecteur d'erreur  $e(t)$  dans le suivi d'une trajectoire définie en chacun de ses points par le vecteur  $W_R(t) = [y_R(t), \dots, y_R^{(n-1)}(t)]$ .

Cette hypersurface peut être linéaire ou nonlinéaire. Néanmoins, la surface de type linéaire reste la plus en vogue dans le cas de la commande à structure variable généralisée. Cette dernière est définie dans l'espace des phases de l'erreur par la fonction de glissement suivante :

$$S(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \quad \text{avec} \quad \lambda_n = 1 \quad (\text{III.93})$$

Où les  $\lambda_i$  sont les coefficients de la fonction de glissement  $S(t)$ .

La fonction de glissement  $S(t)$  peut être introduite dans l'équation d'un bouclage linéarisant de plusieurs manières. Nous passerons en vue l'approche proposée par H.SIRA.RAMIREZ appliquée au cas d'une surface linéaire définie par l'équation précédente.

Afin d'assurer la condition d'attractivité du système, on considère la fonction de glissement  $S(t)$  comme étant solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dS}{dt} + \mu \cdot S = -\mu \cdot \Omega \cdot \text{sign}(S) \quad (\text{III.94})$$

Pour ce dernier système, le régime glissant est atteint ( $S=0$ ) en un temps fini  $T$  et l'erreur s'annule :

$$T = \mu^{-1} \cdot \ln \left( 1 + \frac{S(0)}{\Omega} \right) \quad (\text{III.95})$$

Ecrivons l'équation de la surface de glissement sous la forme :

$$S(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i \quad \text{avec } \lambda_n = 1 \quad (\text{III.96})$$

La dérivée de  $S(t)$  peut s'écrire :

$$\dot{S}(t) = \dot{e}_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \dot{e}_{i+1} \quad (\text{III.97})$$

d'où :

$$\dot{e}_n = \dot{S}(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot \dot{e}_{i+1} \quad (\text{III.98})$$

En remplaçant les deux dernières expressions dans l'équation ( III.94 ), on obtient :

$$\dot{S}(t) = -\mu \cdot S - \mu \cdot \Omega \cdot \text{sign}(S) = -\mu \cdot \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + \Omega \cdot \text{sign} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \right] \quad (\text{III.99})$$

En remplaçant cette dernière égalité dans l'équation ( III.98), on obtient :

$$\dot{e}_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \dot{e}_{i+1} - \mu \cdot \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + \Omega \cdot \text{sign} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \right] \quad (\text{III.100})$$

De l'équation précédente et de l'équation ( III.91 ), on déduit un bouclage linéarisant à structure variable :

$$C(W_R(t) + e(t), u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = y_R^{(n)}(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \dot{e}_{i+1} - \mu \cdot \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + \Omega \cdot \text{sign}(S) \right] \quad (\text{III.101})$$

Cette dernière équation différentielle où  $u$  est inconnue donne une commande à structure variable dite dynamique. Elle représente l'équation d'un bouclage discontinu avec retour d'état dynamique à structure variable généralisée et à régime glissant.

**a) DYNAMIQUE DU SYSTEME BOUCLE ET LIBRE EQUIVALENT AU SYSTEME BOUCLE**

Le régime glissant est atteint lorsque  $S(t)=0$  et  $S(t).\dot{S}(t) < 0$ . La dynamique du système décrit par le couple (GOCF,GCCF) et ayant un bouclage linéarisant défini par la dernière équation devient celle du système d'ordre réduit et libre à  $n$  équations défini dans l'espace des phases de l'erreur par :

$$\begin{cases} \dot{e}_j = e_{j+1} & j = 1, \dots, n-2 \\ \dot{e}_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i \end{cases} \quad (III.102)$$

Ainsi, lorsque le régime glissant est atteint, le point représentatif du fonctionnement reste sur l'hypersurface  $S(t)=0$ . Le système devient alors insensible vis-à-vis des variations des paramètres dynamiques, et son comportement ne dépend plus que des paramètres  $\lambda_i$  définissant l'hypersurface de glissement. Le choix des paramètres  $\lambda_i$  garantit la stabilité du système en un temps fini.

➤ **EXEMPLE**

Considérons le système de l'exemple 1 auquel on associe le couple (GOCF,GCCF) rappelé ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = 2.(x_1 x_3 - x_2^2) + c.(x_3 - 2x_1 x_3 - u) + \dot{u} \\ y = x_1 \end{cases} \quad (III.103)$$

Déterminant un bouclage linéarisant à structure variable et le système d'ordre réduit et libre équivalent lorsque le régime glissant est atteint.

La trajectoire de référence étant définie par  $W_R(t) = [y_R, \dot{y}_R, \ddot{y}_R]$ , le couple (GOCF,GCCF) dans l'espace des phases de l'erreur définie par :

$$e = [e_1, e_2, e_3]^T \text{ avec } e_1 = x_1 - y_R, e_2 = x_2 - \dot{y}_R \text{ et } e_3 = x_3 - \ddot{y}_R \quad (III.104)$$

Les équation de cette trajectoire sont :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = e_3 \\ \dot{e}_3 = 2.(e_1 e_3 + e_2^2) + c.(e_3 - 2e_1 e_2 - u) + \dot{u} + 2.(\ddot{y}_R - c\dot{y}_R)e_1 + 2.(\dot{y}_R - cy_R)e_2 \\ \quad + 2.y_R e_3 + 2.(\ddot{y}_R - c\dot{y}_R).y_R + 2.\dot{y}_R^2 + c.\ddot{y}_R - \ddot{y}_R \\ e_1 = y - y_R \end{cases} \quad (III.105)$$

Etant donné que le système étudié est du troisième ordre, la surface de glissement est définie dans l'espace des phases de l'erreur par la fonction :

$$S(t) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + e_3 \quad (III.106)$$

L'équation du bouclage linéarisant ( III.101 ) en utilisant l'équation différentielle ( III.94 ) et les expressions ( III.96 ) et ( III.97 ) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} & 2(e_1 e_3 + e_2^2) + c(e_3 - 2e_1 e_2 - u) + \dot{u} + 2(\ddot{y}_R - c\dot{y}_R)e_1 + 2(\dot{y}_R - cy_R)e_2 + 2y_R e_3 \\ & + 2(\ddot{y}_R - c\dot{y}_R)y_R + 2\dot{y}_R^2 + c\ddot{y}_R = \ddot{y}_R - (\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_3) - \mu(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + e_3 + \Omega \cdot \text{sign}(S)) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (III.107)$$

Le système réduit et libre est alors donné en considérant  $s = 0$ :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -\lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 \end{cases} \quad (III.108)$$

En régime glissant , la dynamique du système est celle du système d'ordre réduit et libre du second ordre ( III.107) et la commande  $u(t)$  est solution de l'équation (III.108).

**a) REGIME GLISSANT ET COMMANDE EQUIVALENTE A STRUCTURE VARIABLE GENERALISEE**

Le régime glissant généralisé est caractérisé par une discontinuité sur la dérivée la plus élevée de la commande ( d'ordre  $\alpha$  dans l'équation (III.101)). Ceci permet de diminuer le phénomène de broutement (Chattering) caractérisant les modes glissants et dû à des commutations trop rapides car la commande est obtenue par un nombre  $\alpha$  d'intégrations successives.

Dans le même ordre d'idées que les modes glissants classiques, nous pouvons généraliser le concept de commande équivalente introduite par UTKIN, on définit pour la structure variable généralisée une commande équivalente calculée en supposant un régime glissant idéal tel que  $S = 0$  et  $\dot{S} = 0$

L'équation ( III.101 ) devient ( $u = u_{eq}$ ) :

$$C(W_R(t) + e(t), u_{eq}, \dot{u}_{eq}, \dots, u_{eq}^{(\alpha)}) = y_R^{(n)}(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} - \mu \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \quad (III.109)$$

car :  $\text{sign}(S)=0$  avec  $S=0$

La commande équivalente  $u_{eq}$  est solution de l'équation différentielle de glissement précédente.

La loi de commande doit satisfaire la condition de glissement :

$$\left( \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \cdot \left( \dot{e}_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} \right) < 0 \quad (III.110)$$

$$\left( \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \cdot \left( C(W_R(t) + e(t), u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) - y_R^n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} \right) < 0 \quad (III.111)$$

L'inégalité précédente peut également s'écrire :

$$C(W_R(t) + e(t), u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i < y_R^{(n)}(t) \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i - \left( \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \quad (III.112)$$

Pour résoudre l'équation précédente, il est nécessaire de connaître la fonction :

$$C(W_R(t) + e(t), u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \quad (III.113)$$

Le modèle utilisé ne prenant en général pas compte des dérivées de la commande, ce sera donc par l'identification que l'on obtiendra un modèle, linéaire de préférence, faisant intervenir les dynamiques de la commande.

Dans ce qui suit, on s'intéressera à la synthèse de lois de commande à structure variable généralisée appliquée aux systèmes linéaires.

### b) LOI DE COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE GENERALISEE ( GVS ) D'UN SYSTEME PRESUME LINEAIRE MONOVARIABLE

Soit un modèle présumé linéaire perturbé monovisible issu de l'identification d'un système dynamique de dimension  $n$ , où l'entrée intervient avec ses dérivées et dont la forme générale est la suivante :

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot y^k = \sum_{j=0}^{\alpha} b_j \cdot u^j + \varepsilon \quad (III.114)$$

Où  $\varepsilon$  désigne une perturbation telle que  $|\varepsilon| \leq K_0$ .

On associe à ce système le couple (GOCF, GCCF) dans l'espace des phases de la sortie sous la forme explicite locale :

$$\begin{cases} \dot{x}_k = x_{k+1}, & k = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = \frac{1}{a_n} \cdot \left( - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot x_{k+1} + \sum_{j=0}^{\alpha} b_j \cdot u^{(j)} + \varepsilon \right) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (III.115)$$

Le couple (GOCF, GCCF) dans l'espace des phases de l'erreur devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_k = e_{k+1} & k = 1, \dots, n-1 \\ \dot{e}_n = \frac{1}{a_n} \cdot \left( - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{k+1} + \sum_{j=0}^{\alpha} b_j u^{(j)} + \varepsilon \right) - y_R^{(n)}(t) \\ e_1 = y - y_R \end{cases} \quad (III.116)$$

Et en prenant la surface de glissement comme définie dans 84, l'inégalité 99 s'écrit cette fois sous la forme suivante :

$$\frac{1}{a_n} \cdot \left( - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{k+1} + \sum_{j=0}^{\alpha} b_j u^{(j)} + \varepsilon \right) \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i < y_R^{(n)}(t) \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i - \left( \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \quad (III.117)$$

La résolution par rapport à u fournit un bouclage remplissant les conditions d'évolution en mode glissant . On obtient une solution discontinue de la forme suivante :

$$u^{(\alpha)} = \frac{1}{b_{\alpha}} \left[ - a_n \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} - \sum_{j=0}^{\alpha-1} b_j u^{(j)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{k+1} + a_n y_R^{(n)}(t) - k \cdot \text{Sign}(S) \right] \quad (III.118)$$

Où k est choisi de façon appropriée par rapport à l'amplitude de la perturbation ε. Les autres dérivées de u sont déterminées par intégrations successives , ce qui explique l'intérêt de ce type de loi de commande du point de vue diminution du broutement.

• PREUVE DE L'EXISTENCE DU REGIME GLISSANT

En remplaçant u<sup>(α)</sup> par son expression, le produit S.Ṡ de la condition de glissement s'écrit :

$$\begin{aligned}
 S \cdot \dot{S} &= \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \cdot \left( e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} \right) \\
 &= \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \cdot \left( \frac{1}{a_n} \left[ - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{k+1} + \sum_{j=0}^{\alpha} b_j u^{(j)} + \varepsilon \right] - y_R^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} \right) \\
 &= \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \cdot \left( \frac{1}{a_n} \left[ - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{k+1} + \sum_{j=0}^{\alpha-1} b_j u^{(j)} + \varepsilon \right] - y_R^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} \right) + \frac{b_\alpha}{a_n} u^{(\alpha)} \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \\
 &= \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \cdot \left( \frac{1}{a_n} \left[ - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{k+1} + \sum_{j=0}^{\alpha-1} b_j u^{(j)} + \varepsilon \right] - y_R^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} \right) + \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \cdot \\
 &\quad \left( \frac{1}{a_n} \cdot \left[ - a_n \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} - \sum_{j=0}^{\alpha-1} b_j u^{(j)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{k+1} + a_n y_R^{(n)}(t) - k \cdot \text{sign}(S) \right] \right) \quad (\text{III.119})
 \end{aligned}$$

Finalement , la dernière relation donne par élimination entre les termes et leurs inverses en tenant compte du fait que  $a_n = 1$  la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 S \cdot \dot{S} &= \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \cdot (\varepsilon - k \cdot \text{Sign}(S)) \\
 S \cdot \dot{S} &= S \cdot (\varepsilon - k \cdot \text{Sign}(S))
 \end{aligned} \quad (\text{III.120})$$

Avec la condition supplémentaire  $k \geq |\varepsilon|$ , on a  $S \cdot (\varepsilon - k \cdot \text{Sign}(S)) < 0$  et la condition d'existence du mode de glissement est toujours vérifiée avec la surface linéaire donnée par (III.93).

➤ **EXEMPLE 2**

Considérons le système commandé par l'entrée  $u$  et sa première dérivée, soumis à une perturbation bornée  $\varepsilon$  et ayant la dynamique de la sortie définie par :

$$\dot{y} = u + \dot{u} + \varepsilon \quad (\text{III.121})$$

En choisissant l'état  $x = [x_1, x_2]^T$  tel que  $x_1 = y$  et  $x_2 = \dot{y}$ , on peut associer à ce système un couple (GOCF, GCCF) défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u + \dot{u} + \varepsilon \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{III.122})$$

La trajectoire de référence étant définie par  $W_R(t) = [y_R, \dot{y}_R]^T$  ; le couple (GOCF, GCCF) dans l'espace des phases de l'erreur ( $e = [e_1, e_2]^T$  avec  $e_1 = x_1 - y_R$ ,  $e_2 = x_2 - \dot{y}_R$ ) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = u + \dot{u} + \varepsilon - \ddot{y}_R \\ e_1 = y - y_R \end{cases} \quad (\text{III.123})$$

La surface de glissement choisie est définie par :

$$S(t) = \lambda_1 e_1 + e_2 \quad \text{avec } \lambda_2 = 1 \quad (\text{III.124})$$

Déterminons dans ces conditions une loi de commande  $u$  telle que la condition de glissement  $S \cdot \dot{S} < 0$  soit vérifiée :

$$S \cdot \dot{S} = (\lambda_1 e_1 + e_2) \cdot (\lambda_1 \dot{e}_1 + \dot{e}_2) < 0 \quad (\text{III.125})$$

Une solution est :

$$\dot{u} = -\lambda_1 e_2 - u + \ddot{y}_R - k \cdot \text{Sign}(S) \quad (\text{III.126})$$

Où :  $k \geq |\varepsilon|$ .

Cette solution vérifie bien la condition de glissement ( $S \cdot \dot{S} < 0$ ) et la commande  $u$  est solution de l'équation différentielle (III.126).

### III.6.4.2 FORME CANONIQUE DE COMMANDE GENERALISEE D'UN SYSTEME MULTIVARIABLE NON-LINEAIRE DANS LE MODE DE POURSUITE [ 6 ], [ 8 ], [ 9 ]

La trajectoire du régime glissant généralisé a été étendue à un système non-linéaire multivariable en ayant recours aux diverses techniques de découplage.

Nous considérons ici le cas d'un système à  $m$  entrée et  $m$  sorties supposées découplées en poursuite de trajectoire. Les résultats du paragraphe (III.3.4.1) s'appliquent à chaque sous système de dimension  $n_i$  d'entrée  $u_i$  et de sortie  $y_i$ , la trajectoire de référence correspondante étant notée  $W_{Ri}$ .

L'introduction du régime glissant s'effectue par le choix de  $m$  surfaces de commutation permettant de stabiliser chaque sortie  $y_i$ . Pour chaque sous système, la fonction de glissement correspondante dans l'espace des phases de l'erreur est :

$$S_i(e) = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} e_{ij} \quad \text{avec } \lambda_{ij} > 0, i = 1, \dots, m \quad (\text{III.127})$$

La sortie  $y_i$  étant influencée par les entrées et leurs dérivées.

Si les conditions de glissement sont vérifiées, chaque sous système évolue en régime glissant sur son hypersurface. Chaque erreur  $e_{ij}$  est stabilisée asymptotiquement sur l'origine.

La commande à structure variable hiérarchisée s'applique aux systèmes nonlinéaires multivariables. Cette approche est une simplification du problème de la commande par découplage ramenant le système multivariable à  $m$  systèmes monovariables avec une hiérarchisation des  $m$  surfaces de glissement.

La commande choisie pour le  $k^{\text{ème}}$  sous système est de la forme :

$$u_k = \begin{cases} u_k^+ & \text{si } S_k(e) > 0 \\ u_k^- & \text{si } S_k(e) < 0 \end{cases} \quad (\text{III.128})$$

Dans cette technique, le calcul de la commande  $u_k$  du  $k^{\text{ème}}$  sous système suppose que les  $k-1$  premiers sous systèmes sont en mode de glissement et la commande  $u_k$  dépend des signes de  $S_{k+1}, \dots, S_m$ . Notons que l'approche décentralisée du second chapitre permet ce découplage.

### III.7 METHODE DE SYNTHESE DES CORRECTEURS A STRUCTURE VARIABLE GENERALISEE POUR UN SYSTEME DECOUPLE DU SECOND ORDRE [ 3 ],[ 9 ]

Dans ce paragraphe, on présentera un algorithme de commande à structure variable généralisée qui sera appliqué en expérimentation aux trois axes d'un robot manipulateur.

On détaillera en premier lieu la commande GVS avec modèle de la trajectoire de référence. En second lieu, on donnera les méthodes de synthèse de ces deux correcteurs GVS pour le système étudié. Enfin, on déterminera la dynamique du système d'ordre réduit et libre en régime glissant.

Les axes du bras manipulateur ont été approchés par un modèle mathématique linéaire du second ordre fourni par identification du système multivariable aboutissant à trois systèmes découplés. On associe à ces systèmes commandés par  $u$  et sa première dérivée l'équation suivante :

$$\ddot{q}_i + a_{i1}\dot{q}_i + a_{i0}q_i = b_{i0}u_i + b_{i1}\dot{u}_i \quad (\text{III.129})$$

En choisissant l'état  $x_i = [x_{i1}, x_{i2}]^T$  tel que  $x_{i1} = q_i$  et  $x_{i2} = \dot{q}_i$ , on peut associer au système un couple (GOCF, GCCF) dans l'espace des phases défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = x_{i2} \\ \dot{x}_{i2} = -a_{i0}x_{i1} - a_{i1}x_{i2} + b_{i0}u_i + b_{i1}\dot{u}_i \\ q = x_{i1} \end{cases} \quad (\text{III.130})$$

Considérons un asservissement pour lequel on veut une loi de commande permettant de configurer le système (III.130) dans la position désirée correspondant à une sortie de référence  $q_{iR}(t)$ , deux fois différentiable par rapport au temps et une trajectoire de référence donnée par :  $w_{iR}(t) = [q_{iR}(t), \dot{q}_{iR}(t)]$ .

En raisonnant dans l'espace des phases de l'erreur  $e_i(t) = [e_{i1}, e_{i2}]^T = x_i(t) - w_{iR}(t)$ , en posant  $e_{i1} = x_{i1} - q_{iR}$  et  $e_{i2} = x_{i2} - \dot{q}_{iR}$ , le couple devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_{i1} = e_{i2} \\ \dot{e}_{i2} = -a_{i0}e_{i1} - a_{i1}e_{i2} + b_{i0}u_i + b_{i1}\dot{u}_i - a_{i0}q_{iR} - a_{i1}\dot{q}_{iR} - \ddot{q}_{iR} \\ e_{i1} = q_i - q_{iR} \end{cases} \quad (III.131)$$

Le système bouclé avec la fonction caractéristique du bouclage  $\dot{e}_{i2}$  d'entrée  $u_i$ , de sortie  $q_i(t)$  et de référence  $q_{iR}(t)$  peut être considéré comme commandé par une commande  $u_i$  générée par ce bouclage.

### III.7.1 COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE GENERALISEE AVEC MODELE DE LA TRAJECTOIRE DE REFERENCE

Le vecteur d'état du robot  $q = [q, \dot{q}]^T$  est comparé à la trajectoire de référence  $q_R = [q_R, \dot{q}_R]^T$  comme c'est souvent le cas en robotique où les signaux  $q_R$  et  $\dot{q}_R$  définissent une trajectoire de référence pouvant être fournie par le régulateur de trajectoire.

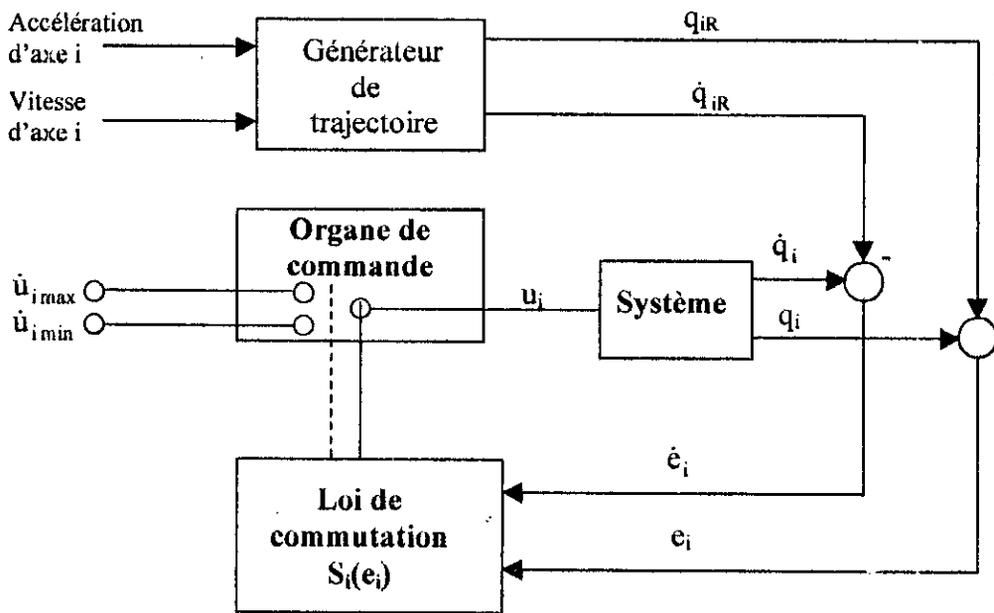


Fig III.1 :Schéma de principe de la commande à structure variable généralisée pour un système du second ordre en mode poursuite de trajectoire (Après découplage )

Dans la suite de ce chapitre , on utilisera le principe de la commande à structure variable généralisée avec un générateur de trajectoire selon la figure III.1 pour le pilotage des trois axes du robot manipulateur , chacun actionné par un moteur à courant continu.

### III.7.2 SYNTHÈSE DE LA LOI DE COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE GENERALISEE [ 3 ],[ 6 ],[ 9 ]

Dans ce paragraphe, on présente deux méthodes différentes pour la synthèse d'un correcteur GVS en mode poursuite de trajectoire.

$$\ddot{q}_i + a_1 \dot{q}_i + a_0 q_i - \varepsilon_i = b_0 u_i + b_1 \dot{u}_i \quad (\text{III.132})$$

Où  $\varepsilon_i$  est une perturbation bornée représentant dans notre cas le terme d'interconnexion.

Considérons, comme l'a proposée FLIESS, une surface de glissement définie dans l'espace des phases de l'erreur par la fonction suivante assurant la stabilité :

$$S_i(t) = \lambda_{i1} e_{i1} + e_{i2} \quad \text{avec } \lambda_{i1} > 0 \quad (\text{III.133})$$

La dérivée de la fonction de glissement peut s'écrire :

$$\dot{S}_i(t) = \dot{e}_{i2} + \lambda_{i1} e_{i2} \quad (\text{III.134})$$

Le problème est de déterminer une loi de commande  $u(t)$  pour amener le plus vite possible le vecteur d'état de l'erreur  $e_i(t) = [e_{i1}, e_{i2}]^T$  sur une variété de commutation  $S(t)=0$  et de l'y maintenir jusqu'à l'état désiré avec un minimum de broutement.

La fonction de glissement ( III.133 ) peut être introduite dans l'équation d'un bouclage linéarisant . Elle est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dS_i}{dt} + \mu_i \cdot S_i = -\mu_i \cdot \Omega_i \cdot \text{Sign}(S_i) \quad (\text{III.135})$$

En remplaçant les expressions ( III.133 ) et ( III.134 ) dans l'équation précédente, on obtient :

$$\dot{e}_{i2} + \lambda_{i1} e_{i2} + \mu_i \cdot (\lambda_{i1} e_{i1} + e_{i2}) = -\mu_i \Omega_i \cdot \text{Sign}(S_i) \quad (\text{III.136})$$

Ce qui implique :

$$\dot{e}_{i2} = -\lambda_{i1} e_{i2} - \mu_i \cdot [\lambda_{i1} e_{i1} + e_{i2} + \Omega_i \cdot \text{sign}(S_i)] \quad (\text{III.137})$$

De l'équation précédente et de l'expression du bouclage linéaire( III.131) on déduit le bouclage linéarisant à structure variable généralisée :

$$b_0 u_i + b_1 \dot{u}_i = (a_0 - \mu \lambda_1) e_{i1} + (a_1 - \lambda_1 - \mu) e_{i2} + a_{i0} q_{iR} + a_{i1} \dot{q}_{iR} + \ddot{q}_{iR} - \mu_i \Omega_i \cdot \text{Sign}(S_i) - \varepsilon_i \quad \dots(\text{III.138})$$

La résolution de cette dernière équation par rapport à la dérivée de la commande fournit le bouclage discontinu :

$$\dot{u}_i = \frac{1}{b_{i1}} \cdot \left[ -b_{i0} u_i + (a_{i0} - \mu_i \lambda_{i1}) e_{i1} + (a_{i1} - \lambda_{i1} - \mu_i) e_{i2} + a_{i0} q_{iR} + a_{i1} \dot{q}_{iR} + \ddot{q}_{iR} - \mu_i \Omega_i \cdot \text{Sign}(S_i) - \varepsilon_i \right] \quad (\text{III.139})$$

La commande  $u$  est déterminée par intégration de l'équation précédente. Le coefficient  $\lambda_i$  de la surface de glissement, les paramètres  $\mu_i$  et  $\Omega_i$  sont déterminés selon les performances au système dynamique bouclé.

L'équation différentielle en  $u$  représente l'équation du correcteur GVS à régime glissant de la première forme de synthèse puisque les commutations s'effectuent sur la dérivée de la commande, ce qui montre l'intérêt de ce type de loi de commande du point de vue réduction du broutement. La commande  $u(t)$  est dite commande dynamique parce qu'elle est solution de l'équation différentielle (III.151). La condition de glissement est toujours vérifiée et on peut en effet établir :

$$S_i \cdot \dot{S}_i = S_i \cdot \left[ -\mu_i S_i - \mu_i \Omega_i \cdot \text{Sign}(S_i) \right] = -\mu_i \cdot S_i^2 - \mu_i \Omega_i \cdot |S_i| \quad (\text{III.140})$$

Nous résumons dans le tableau III.1 la démarche à suivre pour la synthèse d'un correcteur de type GVS en mode poursuite de trajectoire dans le cas de la première méthode.

Dynamique de la sortie du système à commander	$\ddot{q}_i + a_{i1} \dot{q}_i + a_{i0} e_i = b_{i0} u_i + b_{i1} \dot{u}_i$
Surface de glissement considérée	$S_i = \lambda_{i1} e_{i1} + e_{i2} = 0 \quad e_{i1} = q_i - q_{iR}, e_{i2} = \dot{q}_i$
Dérivée de la commande Discontinue (ou fonction de bouclage)	$\dot{u}_i = \frac{1}{b_{i1}} \left[ -b_{i0} u_i + (a_{i0} - \mu_i \lambda_{i1}) e_{i1} + (a_{i1} - \lambda_{i1} - \mu_i) e_{i2} + a_{i0} q_{iR} + a_{i1} \dot{q}_{iR} + \ddot{q}_{iR} - \mu_i \Omega_i \cdot \text{Sign}(S_i) \right]$
Commande réelle	$u_i$ est calculée par intégration de $\dot{u}_i$

Tableau III.1 : Synthèse du correcteur GVS par la première méthode avec système du 2<sup>nd</sup> ordre présumé linéaire en mode poursuite de trajectoire

### ➤ REMARQUE

◆ Le tableau III.1 concerne les deux modes de fonctionnement. En mode régulation,  $q_{iR} = q_{id}$  et  $\dot{q}_{iR} = \ddot{q}_{iR} = 0$ . En mode poursuite, les trajectoires de références sont fournies par le générateur de trajectoire.

◆ La surface de glissement proposée est linéaire. Dans la partie consacrée à l'application de la commande GVS, on adoptera la même procédure avec cette surface ainsi que la surface non-linéaire étudiée au second chapitre dont la stabilité a été démontrée.

### III.8 IDENTIFICATION DU BRAS MANIPULATEUR

#### III.8.1 RAPPEL SUR LES METHODES D'IDENTIFICATION PARAMETRIQUE [ 8 ], [ 3 ]

L'identification paramétrique consiste à fixer une structure a priori et à ajuster les coefficients du modèle par estimation à partir des mesures entrées-sorties observées du système soumis à une expérimentation ou du système simulé avec un modèle complexe proche du cas réel.

##### III.8.1.1 PRINCIPE D'IDENTIFICATION PARAMETRIQUE

Le principe de la méthode est de soumettre le modèle aux mêmes entrées que le système et de réaliser un réglage des paramètres en minimisant un critère de performance donné.

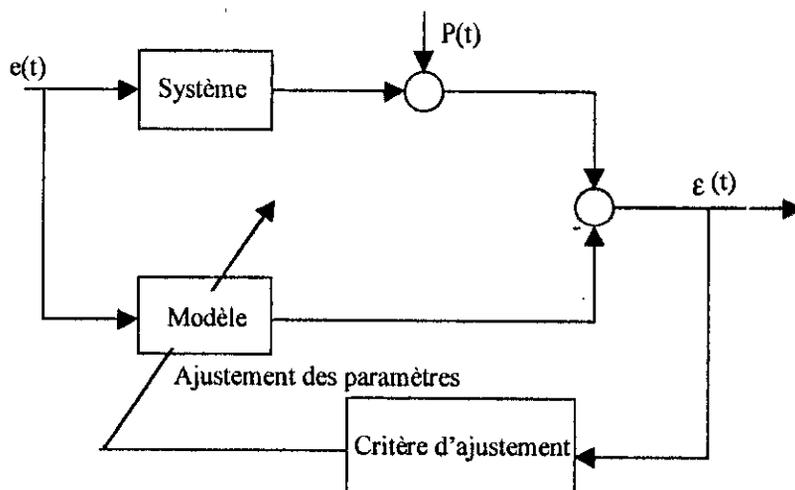


Fig III.2 : Schéma de principe de l'identification paramétrique

Les méthodes d'identification fournissent des modèles paramétriques discrets à partir des mesures entrées-sorties échantillonnées aux mêmes instants. La détermination des paramètres du modèle est basée sur la méthode des moindres carrés en considérant l'erreur comme bruit de mesure entre la sortie réelle et la sortie prédite.

##### III.8.1.2 STRUCTURE DU MODELE D'IDENTIFICATION

La configuration générale d'entrée sortie peut être représentée par le schéma suivant :

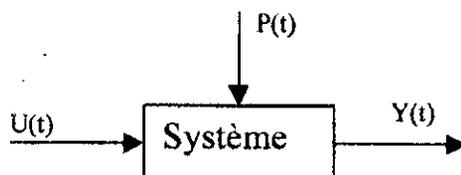


Fig III.3 : Représentation du système

Avec :

U : Entrée du système .

Y : Sortie du système .

P : Perturbation sur le système.

En supposant que le système est linéaire, on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$Y(t) = G(z^{-1})U(t) + P(t)$$

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} G(k)U(t-k) + P(t) \quad (\text{III.141})$$

La perturbation P(t) peut être modélisée comme un bruit blanc passant à travers un filtre linéaire :

$$P(t) = H(z^{-1})e(t) \quad (\text{III.142})$$

Où e(t) est un bruit blanc centré et de variance  $\lambda$ .

En remplaçant P(t) par cette dernière expression, on obtient :

$$Y(t) = G(z^{-1})U(t) + H(z^{-1})e(t)$$

$$\Rightarrow e(t) = H^{-1}(z^{-1})[Y(t) - G(z^{-1})U(t)] \quad (\text{III.143})$$

Ainsi l'erreur est fonction de G et de H pour Y et U donnés. Cette erreur de prédiction représente un critère de performance pour l'identification.

La structure paramétrique utilisée pour l'identification de notre système est le processus ARX multivariable qui sera présenté ultérieurement.

#### ◆ CRITERE D'AJUSTEMENT

Le critère le plus utilisé est celui de la détermination des estimées de G et H en minimisant le critère quadratique suivant :

$$J(t) = \sum_{i=1}^N e^2(t) \quad (\text{III.144})$$

Où e(t) est l'erreur de prédiction.

### III.8.2 IDENTIFICATION PAR UN PROCESSUS ARX MULTIVARIABLE

L'application de la commande GVS nécessite la connaissance de la dynamique de l'entrée, ou encore des constantes de temps des actionneurs au niveau de chacune des trois articulations du bras manipulateur.

Les constantes de temps du bras manipulateur n'étant pas prises en compte dans la modélisation cinématique et dynamique du robot, les paramètres caractérisant la dynamique des actionneurs pourront être déterminés par la modélisation expérimentale du robot qui est faite par l'identification paramétrique.

L'identification sera effectuée pour notre système multivariable interconnecté après avoir établi un fichier d'entrées-sorties obtenu en appliquant des séquences binaires pseudo-aléatoires (SBPA) à l'entrée du système et en recueillant l'ensemble des entrées et sorties dans un fichier.

Le modèle choisi est le processus ARX multivariable. La raison de ce choix est que l'objectif de l'identification n'est pas le filtrage d'un bruit mais plutôt la détermination du modèle multivariable présumé linéaire permettant de remplacer le système non-linéaire pour la synthèse de la loi de commande GVS.

#### III.8.2.1 PROCESSUS ARX MULTIVARIABLE

Le modèle ARX multivariable se présente sous la forme de l'équation matricielle suivante :

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) + e(t) \quad (\text{III.145})$$

Où  $A(z^{-1})$  est une matrice de dimension  $n_y \times n_y$  que l'on peut écrire sous la forme de l'équation polynomiale suivante :

$$A(z^{-1}) = I_{n_y} + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \dots + A_{n_{a \max}} z^{-n_{a \max}} \quad (\text{III.146})$$

Où  $A_1, \dots, A_{n_{a \max}}$  sont des matrices de dimension  $n_y \times n_y$ .  
Chaque élément de la matrice  $A$  s'écrit :

$$A_{kj}(z^{-1}) = \delta_{kj} + A_{kj}^1 z^{-1} + \dots + A_{kj}^{n_{a \max}} z^{-n_{a \max}} \quad (\text{III.147})$$

Où  $\delta_{kj}$  est le symbole de Kronecker tel que :

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases} \quad (\text{III.148})$$

La matrice  $A$  s'écrit :

$$A = [I_{n_y}, A_1, A_2, \dots, A_{n_{a \max}}] \quad (\text{III.149})$$

$n_a$  est en réalité une matrice de dimension  $n_y \times n_y$  et  $n_{a_{max}}$  est le plus grand élément appartenant à  $n_a$ .

Par ailleurs, on a la matrice  $B$  de dimension  $n_y \times n_u$  qui est donnée par :

$$B(z^{-1}) = B_0 + B_1 z^{-1} + \dots + B_{n_{b_{max}}} z^{-n_{b_{max}}} \quad (III.150)$$

Où  $B_0, \dots, B_{n_{b_{max}}}$  sont des matrices de dimension  $n_y \times n_u$  la matrice  $B$ . Les éléments de la matrice  $B$  sont donnés par :

$$b_{kj}(z^{-1}) = b_{kj}^1 q^{-nk_{kj}} + \dots + b_{kj}^{n_{b_{max}}} q^{-nk_{kj} - n_{b_{ij}} + 1} \quad (III.151)$$

La matrice  $B$  est donnée sous la forme :

$$B = [B_1, B_2, \dots, B_{n_{b_{max}}}] \quad (III.152)$$

$n_b$  et  $n_k$  sont des matrices de dimension  $n_y \times n_u$ .

### III.8.2.2 RESULTATS DE L'IDENTIFICATION AVEC LE PROCESSUS ARX MULTIVARIABLE

Le bras manipulateur étudié est un système multivariable à trois entrées et trois sorties. L'identification est effectuée après avoir établi un fichier d'entrées-sorties (les entrées injectées au système sont trois SBPA).

L'objectif de l'identification paramétrique est la détermination d'un modèle multivariable présumé linéaire permettant de modéliser le système.

Dans notre cas  $n_a$ ,  $n_b$  et  $n_k$  sont des matrices de dimension  $3 \times 3$ .

$A$  et  $B$  sont données par :

$$\begin{aligned} A &= [1_{3 \times 3}, A_1, A_2] \\ B &= [0_{3 \times 3}, B_1, B_2] \end{aligned} \quad (III.153)$$

Le modèle utilisé pour identifier notre système doit faire apparaître des termes d'interconnexion, celui-ci est donné par :

$$y_i(t+2) = -a_{i1} y_i(t+1) - a_{i0} y_i(t) + b_{i1} u_1(t+1) + b_{i0} u_1(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (b_{j1} u_j(t+1) + b_{j0} u_j(t)) \quad (III.154)$$

Où  $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (b_{j1} u_j(t+1) + b_{j0} u_j(t))$  est le terme d'interconnexion au niveau de l'axe  $i$ .

De plus, nous avons :

♦  $n_a = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  : car le modèle présumé linéaire est supposé d'ordre 2 et les termes

d'interconnexion ne dépendent que des commandes  $u_j, j \neq i$  et non des  $y_j, j \neq i$  car d'après (III.184), seule  $y_i$  intervient dans l'équation de l'axe  $i$  du bras manipulateur afin de pouvoir passer de la transformation en  $z$  (cas discret) à la transformation de Laplace (cas continu).

♦  $n_b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  : Car les entrées de commandes doivent agir avec l'ordre 1 pour pouvoir

appliquer la commande GVS .

$$u(t) \text{ discret} \Leftrightarrow u(t) \text{ continu}$$

$$u(t+1) \text{ discret} \Leftrightarrow \dot{u}(t) \text{ continu}$$

♦  $n_k = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  : cette matrice des délais est celle qui a donné les meilleurs résultats pour

la validation.

Les résultats de l'identification avec le processus ARX Multivariable et une période d'échantillonnage de 0.05s (prise en considérant le théorème de Shannon ) donnent les résultats suivants :

	u1	u2	u3
y1	$\frac{y_1}{u_1} = \frac{0.02706 S + 0.7178}{S^2 + 15.32 S - 0.4906}$	$\frac{y_1}{u_2} = \frac{0.03692 S - 0.5929}{S^2 + 15.32 S - 0.4906}$	0
y2	$\frac{y_2}{u_1} = \frac{-0.0211 S + 0.3347}{S^2 + 16.32 S + 0.02244}$	$\frac{y_2}{u_2} = \frac{0.002994 S + 0.08098}{S^2 + 16.32 S + 0.02244}$	0
y3	$\frac{y_3}{u_1} = \frac{0.4284 S - 6.637}{S^2 + 18.47 S - 0.5739}$	0	$\frac{y_3}{u_3} = \frac{-0.03831 S - 1.082}{S^2 + 18.47 S - 0.5739}$

Tableau III.2 : Résultats de l'identification avec le processus ARX multivariable

On remarque dans le tableau ci-dessus que pour chaque axe on aura un seul terme d'interconnexion, l'autre étant nul. Ceci est dû au fait que la matrice B obtenue par identification n'est jamais pleine et les zéros de cette matrice donnent des zéros dans certaines fonctions de transfert.

On observe également que pour chaque sortie, les fonctions de transfert ont toute le même dénominateur et c'est dû en partie à la structure du processus ARX Multivariable de Matlab et en partie au fait que seule la sortie  $i$  agit au niveau de l'axe  $i$ .

Les résultats précédents sont validés avec le critère de l'erreur de prédiction finale d'AKAIKE (Akake's final prediction error), on a  $FPE = 1.3741 \cdot 10^{-6}$ .

Nous pouvons désormais écrire le système présumé linéaire sous forme d'équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -15.32\dot{y}_1 + 0.4906y_1 + 0.02706\dot{u}_1 + 0.7178u_1 + 0.03692\dot{u}_2 - 0.5929u_2 \\ \dot{y}_2 = -16.32\dot{y}_2 - 0.02244y_2 - 0.0211\dot{u}_2 + 0.3347u_2 + 0.002994\dot{u}_1 + 0.08098u_1 \\ \dot{y}_3 = -18.47\dot{y}_3 + 0.5739y_3 + 0.4284\dot{u}_2 - 6.637u_2 - 0.03831\dot{u}_3 - 1.082u_3 \end{cases} \quad (\text{III.155})$$

Ce dernier système où les commandes interviennent avec leurs dérivées et où les termes d'interconnexion ne sont pas négligeables sera utilisé pour la synthèse de la commande GVS.

## III.9 APPLICATION DE LA COMMANDE GVS

### III.9.1 SYNTHÈSE A PARTIR DU MODELE PRESUME LINEAIRE

Le modèle présumé linéaire obtenu par identification du système est donné par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -a_{11}\dot{y}_1 - a_{10}y_1 + b_{11}\dot{u}_1 + b_{10}u_1 + b_{121}\dot{u}_2 + b_{120}u_2 \\ \dot{y}_2 = -a_{21}\dot{y}_2 - a_{20}y_2 + b_{221}\dot{u}_2 + b_{220}u_2 + b_{211}\dot{u}_1 + b_{210}u_1 \\ \dot{y}_3 = -a_{31}\dot{y}_3 - a_{30}y_3 + b_{331}\dot{u}_3 + b_{330}u_3 + b_{311}\dot{u}_1 + b_{310}u_1 \end{cases} \quad (\text{III.156})$$

Où les  $a_{ij}$  et les  $b_{ijk}$  ont été calculés par le processus ARX. Leurs valeurs numériques sont obtenues par identification entre les systèmes d'équations (III.156) et (III.155).

On observe également que les fonctions de transferts entre entrées et sorties locales  $\frac{y_i}{u_i}$  ne présentent pas de déphasage non minimal du fait que les zéros de ces transferts sont dans le demi plan gauche et car les autres transferts sont considérés comme des perturbations dans notre approche décentralisée.

On peut désormais appliquer les deux approches de commande GVS en considérant ce modèle présumé linéaire. La commande, une fois synthétisée sera appliquée aux systèmes linéaire et non-linéaire afin de pouvoir conclure concernant la robustesse de la commande.

### III.9.1.1 SURFACE DE GLISSEMENT LINEAIRE

La surface de glissement linéaire proposée est de type ( P.D ) présenté dans ce dernier chapitre et très couramment utilisée en commande GVS. Cette dernière se présente sous la forme suivante :

$$S_i = \lambda_i e_i + \dot{e}_i \quad i = 1,2,3 \quad (\text{III.157})$$

Le modèle présumé linéaire peut s'écrire sous forme de commande généralisée , en tenant compte du fait que  $x_{i1}=q_i$  est un élément primitif différentiel comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = x_{i2} \\ \dot{x}_{i2} = -a_{i1}x_{i2} - a_{i0}x_{i1} + b_{i11}\dot{u}_i + b_{i10}u_i + d_i \end{cases} \quad (\text{III.158})$$

où :  $x_{i1} = q_i, x_{i2} = \dot{q}_i$ .

Où le terme d'interconnexion  $d_i$  issu de l'identification est donné par :

$$d_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (b_{ij1}\dot{u}_j + b_{ij0}u_j) \quad (\text{III.159})$$

et les erreurs  $e_i$  données par :

$$\begin{cases} e_{i1} = e_i = x_i - x_{id} = x_{i1} - x_{id} \\ e_{i2} = \dot{e}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{id} = x_{i2} - \dot{x}_{id} \end{cases} \quad (\text{III.160})$$

Et les surface  $S_i$  peuvent s'écrire :

$$S_i = \lambda_i e_{i1} + e_{i2} \quad (\text{III.161})$$

Cette dernière surface doit vérifier la condition d'attractivité (ou d'existence du régime glissant) qui est la suivante :

$$\dot{S}_i = -\mu_i S_i - k_i \text{sign}(S_i) \quad (\text{III.162})$$

Cette dernière relation peut s'écrire :

$$\dot{e}_{i2} + \lambda_i e_{i2} = -\mu_i (e_{i2} + \lambda_i e_{i1}) - k_i \text{sign}(S_i) \quad (\text{III.163})$$

La commande synthétisée doit par voie de conséquence vérifier la condition suivante :

$$\begin{aligned} b_{i11}\dot{u}_i + b_{i10}u_i &= (a_{i1} - \lambda_i - \mu_i)e_{i2} + (a_{i0} - \lambda_i\mu_i)e_{i1} + a_{i1}\dot{x}_{id} + a_{i0}x_{id} \\ &\quad - d_i^+ - k_i \text{sign}(S_i) \quad i = 1,2,3 \end{aligned} \quad (\text{III.164})$$

Où  $d_i^+$  est un terme utilisé afin de compenser la perturbation  $d_i$  donné par :

$$d_{i\pm}^+ = \left( \frac{d_i^+ + d_i^-}{2} \right) + \left( \frac{d_i^+ - d_i^-}{2} \right) \cdot \text{sign}(S_i) \quad (\text{III.165})$$

Où  $d_i^+$  et  $d_i^-$  sont les valeurs maximales et minimales des interactions issues de l'identification et intervenant au niveau de l'axe  $i$ . (obtenues en simulant ces interactions).

La commande appliquée au système sera donc décentralisée puisque fonction uniquement de variables locales ( $i^{\text{ème}}$  articulation) et devra donc être solution de l'équation différentielle (III.164), que l'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$\dot{u}_i = \frac{1}{b_{i11}} \left( -b_{i10} u_i (a_{ii} - \lambda_i - \mu_i) e_{i2} + (a_{i0} - \lambda_i \mu_i) e_{i1} + a_{ii} \dot{x}_{id} + a_{i0} x_{id} - d_{i\pm}^+ - k_i \text{sign}(S_i) \right) \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.166})$$

### III.9.1.2 SURFACE DE GLISSEMENT NON-LINEAIRE

L'expression de la surface de glissement non-linéaire est celle qui a été utilisée dans le second chapitre et dont la stabilité a été démontrée. Cette surface est de type PID avec un terme non-linéaire passant dans les premier et troisième quadrant. Son expression est la suivante :

$$S_i = \dot{e}_i + \lambda_i e_i + \Delta_i \tanh\left(\frac{\beta_i}{\varepsilon_i} e_i\right) + \eta_i \int_0^t e_i(\tau) d\tau \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.167})$$

Notons que l'on considère toujours le système (III.158).

Pour garder la même notation que précédemment, et en raisonnant dans l'espace de l'erreur, on prend :

$$e_{i1} = e_i \quad \text{et} \quad e_{i2} = \dot{e}_i$$

En dérivant l'expression précédente, on a :

$$\dot{S}_i = \dot{e}_{i2} + \lambda_i e_{i2} + \frac{\Delta_i \beta_i}{\varepsilon_i} \left( 1 - \tanh^2\left(\frac{\beta_i}{\varepsilon_i} e_{i1}\right) \right) e_{i2} + \eta_i e_{i1} \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.168})$$

Cette surface de glissement doit vérifier la condition d'existence du mode de glissement (condition d'attractivité) qui est donnée par l'équation (III.162). Cette dernière condition s'écrit :

$$\begin{aligned} & \dot{e}_{i2} + \lambda_i e_{i2} + \frac{\Delta_i \beta_i}{\varepsilon_i} \left( 1 - \tanh^2\left(\frac{\beta_i}{\varepsilon_i} e_{i1}\right) \right) e_{i2} + \eta_i e_{i1} \\ &= -\mu_i \left( e_{i2} + \lambda_i e_{i1} + \Delta_i \tanh\left(\frac{\beta_i}{\varepsilon_i} e_{i1}\right) + \eta_i \int_0^t e_i(\tau) d\tau \right) - k_i \text{sign}(S_i) \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (\text{III.169})$$

Après simplifications, cette dernière équation permet de déterminer le système d'équations différentielles dont les commandes doivent être solutions comme suit :

$$\begin{aligned} b_{ii} \dot{u}_i + b_{ii0} u_i &= a_{i1} x_{i2} + a_{i0} x_{i1} + d_{i-}^+ + \dot{q}_{id} \\ &- \left[ \lambda_i + \mu_i + \frac{\Delta_i \beta_i}{\varepsilon_i} \left( 1 - \tanh^2 \left( \frac{\beta_i}{\varepsilon_i} e_{i1} \right) \right) \right] e_{i2} - [\eta_i + \mu_i \lambda_i] e_{i1} - \mu_i \Delta_i \tanh \left( \frac{\beta_i}{\varepsilon_i} e_{i1} \right) \\ &- \mu_i \eta_i \int_0^t e_{i1}(\tau) d\tau - k_i \text{sign}(S_i) \end{aligned} \quad (\text{III.170})$$

Où  $d_{i-}^+$  est donné par l'équation ( III.165 ) et  $e_{i1} = e_i = x_i - x_{id}$  et  $e_{i2} = \dot{e}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{id}$ .  
Ainsi, la commande  $u_i$  synthétisée doit être solution de l'équation différentielle ( III.170 ).

### III.9.2 SYNTHÈSE A PARTIR DU MODELE NON-LINEAIRE

Le modèle non-linéaire utilisé pour la synthèse de la commande GVS est le modèle dynamique décentralisé, déjà utilisé pour la synthèse de la commande à structure variable non généralisée dans le second chapitre .

Ce modèle est donné par l'équation suivante où  $i=1,2,3$  :

$$m_{ii}(q) \ddot{q}_i(t) + b_{ii}(q, \dot{q}) \dot{q}_i(t) + k_{ii}(q, \dot{q}) q_i(t) + d_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) = u_{pi}(t) + u_i(t) + K_{mi} \dot{u}_i(t) \quad (\text{III.171})$$

Où  $m_{ii}(q)$ ,  $b_{ii}(q, \dot{q})$ ,  $k_{ii}(q, \dot{q})$  et  $d_i(q, \dot{q}, \ddot{q})$  sont donnés par les équations du second chapitre et  $u_{pi}$  est un couple de perturbation que l'on ne considèrera que pour l'essai avec un choc permettant de tester la robustesse du système.

Le terme  $d_i$  est le terme d'interconnexion agissant sur l'axe  $i$  considéré comme une perturbation dans l'approche décentralisée.

Nous avons l'avantage que notre système soit directement donné sous forme d'équations entrées sorties car les variables d'état sont les sorties du système, ce qui nous évite l'étape parfois délicate de l'élimination des états dans les équations dynamiques.

L'équation ( III.171 ) peut s'écrire sous forme de commande généralisée, en prenant comme éléments primitifs les variables d'état ou sorties du système  $x_{i1}=q_i$ , comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = x_{i2} \\ \dot{x}_{i2} = \frac{1}{m_{ii}(x_{i1})} \left( -b_{ii}(x_{i1}, x_{i2}) x_{i2} - k_{ii}(x_{i1}, x_{i2}) x_{i1} - d_i(x_{i1}, x_{i2}, \dot{x}_{i2}) + u_{pi} + u_i + k_{mi} \dot{u}_i \right) \end{cases} \quad (\text{III.172})$$

Où  $m_{ii}(x_{i1}) \neq 0$ , et :

$x_{i1} = q_i$  et  $x_{i2} = \dot{q}_i$ , la commande  $u_i$  représentant ici le couple appliqué .

### ◆ INFLUENCE DES CONSTANTES DE TEMPS MECANIQUES

On a remarqué en simulant les réponses pour diverses constantes de temps mécaniques que dans une plage allant de 1 à 10 ms ( Voir Fig III.5), que ce paramètre avait la même influence et qu'un léger phénomène de broutement a lieu lorsqu'on dépasse les 50ms , or la majorité des robots manipulateurs de puissance équivalente ont une constante de temps dans ce domaine, ce qui nous a amené à considérer des constantes de temps mécaniques de  $K_{mi} = 5ms$ .

Comme pour le cas de la synthèse en linéaire, on utilisera deux types de surfaces de glissement.

#### III.9.2.1 SURFACE DE GLISSEMENT LINEAIRE

En notant  $e_{i1} = e_i = x_{i1} - x_{id}$  et  $e_{i2} = \dot{e}_i = \dot{x}_{i2} - \dot{x}_{id}$  , la surface de glissement a pour équation :

$$S_i = \lambda_i e_{i1} + e_{i2} \quad (III.173)$$

En dérivant l'équation précédente, on obtient :

$$\dot{S}_i = \lambda_i e_{i2} + \dot{e}_{i2} \quad (III.174)$$

La surface de glissement doit cette fois être solution de l'inégalité ,ou équation d'attractivité suivante :

$$S_i \dot{S}_i \leq 0 \quad (III.175)$$

Dans le second chapitre, et plus précisément dans la partie consacrée à la commande décentralisée, il a été démontré que la commande de l'axe d'indice  $i$  devait être en fonction des variables locales et trajectoires désirées. Cette approche reste valable dans le cas présent en considérant que les commandes locales interviennent avec leurs dérivées multipliées par les constantes de temps mécaniques comme suit :

$$\dot{u}_i + k_{mi} \dot{u}_i = \sum_{j=0}^2 \Psi_{Lij}^{\pm}(t) q_{id}^{(j)}(t) + \sum_{j=0}^1 \Phi_{Lij}^{\pm}(t) q_i^{(j)}(t) + \gamma_{Li}^{\pm} \quad (III.176)$$

Ainsi, la commande synthétisée devra être solution de l'équation différentielle précédente qui peut également s'écrire :

$$\dot{u}_i = \frac{1}{k_{mi}} \left( -u_i + \sum_{j=0}^2 \Psi_{Lij}^{\pm}(t) q_{id}^{(j)}(t) + \sum_{j=0}^1 \Phi_{Lij}^{\pm}(t) q_i^{(j)}(t) + \gamma_{Li}^{\pm} \right) \quad (III.177)$$

Où  $\Psi_{L_i}^{\pm}$ ,  $\Phi_{L_i}^{\pm}$ , et  $\gamma_{L_i}^{\pm}$  sont données par les équations du second chapitre ( II.50 ), mais avec un choix différent des paramètres des régulateurs puisque le changement apporté par la prise en compte des constantes de temps mécaniques l'impose.

La surface linéaire donnée par (III.173) sera utilisée dans les expressions des fonctions  $\Psi_{L_i}^{\pm}$ ,  $\Phi_{L_i}^{\pm}$ , et  $\gamma_{L_i}^{\pm}$ .

Ce choix des paramètres du régulateur est donné par le tableau ci-dessous :

Paramètres des régulateurs	Liaison 1	Liaison2	Liaison3
$\Psi_{i0}^+$	54	83	18.5
$\Psi_{i0}^-$	-54	-83	-18.5
$\Psi_{i1}^+$	16	25	5
$\Psi_{i1}^-$	-1	-5	2
$\Psi_{i2}^+$	.5	5	2
$\Psi_{i2}^-$	-0.05	-2	1.2
$\Phi_{i0}^+$	54	55	18.5
$\Phi_{i0}^-$	-54	-55	-18.5
$\Phi_{i1}^+$	-1	-5	-2
$\Phi_{i1}^-$	-17	-25	-5
$\gamma_i^+$	0.7	16	10
$\gamma_i^-$	-0.7	-16	-10

Tableau III.3 : Paramètres du régulateur GVS avec approche décentralisée

### III.9.2.2 SURFACE DE GLISSEMENT NON-LINEAIRE

La surface de glissement non-linéaire est donnée par l'équation ( III.167 ) que l'on rappelle ci dessous :

$$S_i = \dot{e}_i + \lambda_i e_i + \Delta_i \tanh\left(\frac{\beta_i}{\varepsilon_i} e_i\right) + \eta_i \int_0^t e_i(\tau) d\tau \quad i = 1,2,3 \quad (\text{III.178})$$

On observe que la surface linéaire présentée précédemment n'est qu'un cas particulier de cette dernière expression où les facteurs des termes non-linéaire et intégral sont nuls.

Et en considérant toujours le cas d'une commande décentralisée et la condition d'existence du mode de glissement ( III.175 ), on aura pour  $i=1,2,3$  :

$$u_i + k_{mi} \dot{u}_i = \sum_{j=0}^2 \Psi_{NLij}^{\pm}(t) q_{id}^{(j)}(t) + \sum_{j=0}^1 \Phi_{NLij}^{\pm}(t) q_i^{(j)}(t) + \gamma_{NLi}^{\pm} \quad (\text{III.179})$$

Cette dernière équation pouvant également s'écrire :

$$\dot{u}_i = \frac{1}{k_{mi}} \left( -u_i + \sum_{j=0}^2 \Psi_{NLij}^{\pm}(t) q_{id}^{(j)}(t) + \sum_{j=0}^1 \Phi_{NLij}^{\pm}(t) q_i^{(j)}(t) + \gamma_{NLi}^{\pm} \right) \quad (\text{III.180})$$

Les variables  $\Psi_{NLi}^{\pm}$ ,  $\Phi_{NLi}^{\pm}$ , et  $\gamma_{NLi}^{\pm}$  auront les mêmes expressions que  $\Psi_{Li}^{\pm}$ ,  $\Phi_{Li}^{\pm}$ , et  $\gamma_{Li}^{\pm}$  données par l'équation ( II.50 ), mais en remplaçant cette fois les surfaces de glissement par la forme non-linéaire donnée en ( III.178 ).

La commande synthétisée doit donc être solution de cette dernière équation différentielle .

◆ Les commandes ainsi synthétisées dans les 4 cas considérés seront appliquées au système non-linéaire. La commande est à chaque fois solution d'une équation différentielle et c'est l'effet d'intégration de celle-ci qui permet l'élimination du chattering en passant de la dérivée de la commande à sa valeur réelle. Le modèle non-linéaire considéré est le modèle dynamique décentralisé .

Synthèse à partir du système présumé linéaire Surface de type PD	$K_1=50, K_2=70, K_3=50$ $\lambda_1=15, \lambda_2=35, \lambda_3=15$ $\mu_1=10, \mu_2=35, \mu_3=10$ $\eta_i=0, \Delta_i=0$
Synthèse à partir du système présumé linéaire Surface de type non linéaire	$K_1=50, K_2=90, K_3=100$ $\lambda_1=15, \lambda_2=35, \lambda_3=25$ $\mu_1=10, \mu_2=35, \mu_3=10$ $\eta_i=10, \Delta_i=0.1$
Synthèse à partir du système non-linéaire Surface de type PD	$\lambda_1=15, \lambda_2=35, \lambda_3=15$ $\mu_1=1, \mu_2=1, \mu_3=1$ $\eta_i=0, \Delta_i=0$ $i=1,2,3$
Synthèse à partir du système non-linéaire Surface de type PID	$\lambda_1=15, \lambda_2=35, \lambda_3=15$ $\eta_1=60, \eta_2=60, \eta_3=100$ $\mu_1=1, \mu_2=1, \mu_3=1$ $\Delta_i=0, \beta_i=2, \varepsilon_i=0.1$ $i=1,2,3$
Synthèse à partir du système non-linéaire Surface de type non-linéaire	$\lambda_1=15, \lambda_2=35, \lambda_3=15$ $\eta_1=60, \eta_2=60, \eta_3=100$ $\mu_1=1, \mu_2=1, \mu_3=1$ $\Delta_i=1, \beta_i=2, \varepsilon_i=0.1$ $i=1,2,3$

Paramètres de synthèse par les différentes méthodes

### III.10 RESULTATS DES SIMULATIONS

En observant les simulations effectuées avec les différentes méthodes de synthèse, en linéaire puis en non-linéaire avec les deux types de surface de glissement, on peut dire que le chattering est très fortement atténué et qu'il disparaît complètement lorsque la commande est synthétisée en non-linéaire.

On note en comparant l'utilisation des deux types de surfaces que pour la surface de glissement de type PD, bien que la stabilité soit assurée par la théorie, on observe que cette surface n'assure pas la convergence de l'erreur vers l'origine. C'est par contre le cas pour la seconde surface considérée de type PID avec et sans terme non-linéaire.

En conséquence, on peut affirmer en comparant les résultats de la commande GVS avec ceux de la commande à structure variable non généralisée que la première méthode permet l'élimination du broutement, soit en tenant compte de la dynamique des actionneurs comme dans le cas de la synthèse en non-linéaire, soit en identifiant le robot sous forme d'un système multivariable présumé linéaire où les commandes interviennent avec leurs dérivées.

On arrive ainsi sans avoir recours aux fonctions d'améliorations habituellement utilisées (fonction smooth, fonction sat à un seuil ou à deux seuils) à éliminer le chattering en assurant la convergence de l'erreur vers l'origine et sa limitation en régime transitoire.

Afin de comparer les performances des différentes commandes appliquées (synthèse en linéaire et en non-linéaire avec les surfaces considérées en termes de précision et d'avoir une idée plus précise de l'erreur en régime permanent, on considérera le critère quadratique sur l'erreur de position dans l'espace d'état dans l'espace des coordonnées généralisées caractérisant l'erreur de position du bras manipulateur avec ses trois articulations dans l'espace tridimensionnel. Ce critère est donné par :

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \tilde{q}_j^2(t_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n e_{ji}^2(t_i) \quad (\text{III.181})$$

Où :

N : Nombre d'itérations.

$t_i$  : instant correspondant à la  $i$ ème itération.

n : nombre de degrés de liberté.

En plus de ce dernier critère, il convient également de considérer un autre similaire au niveau de chaque articulation car pour certains essais comme celui effectué avec rupture de la seconde commande, bien que l'erreur dans l'espace des coordonnées généralisées et sur la seconde articulation soit grande, les erreurs des deux autres articulations restent dans un domaine admissible et il serait donc intéressant d'avoir une idée précise de cette observation.

Ces critères au niveau de chaque articulation sont sous la forme :

$$C_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N q_i^2(t_j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_{ii}^2(t_j) \quad i = 1,2,3 \quad (\text{III.182})$$

Les critères présentés ci-dessous sont illustrés par le tableau suivant :

Critères de l'erreur		C	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>
Synthèse en non-linéaire Surface Non-Linéaire	A vide	9.0516 10 <sup>-5</sup>	1.0637 10 <sup>-5</sup>	1.8562 10 <sup>-5</sup>	6.1317 10 <sup>-5</sup>
	Avec Charge	1.5266 10 <sup>-4</sup>	1.2289 10 <sup>-5</sup>	1.8600 10 <sup>-5</sup>	1.2177 10 <sup>-4</sup>
	Avec Choc	9.1480 10 <sup>-5</sup>	1.0705 10 <sup>-5</sup>	1.8555 10 <sup>-5</sup>	6.2221 10 <sup>-5</sup>
	Rupture de u <sub>2</sub>	617.1061	1.7244 10 <sup>-5</sup>	617.1057	3.1533 10 <sup>-4</sup>
Synthèse en non-linéaire Surface PID	A vide	2.6673 10 <sup>-4</sup>	5.4113 10 <sup>-5</sup>	5.9805 10 <sup>-5</sup>	1.5281 10 <sup>-4</sup>
	Avec Charge	4.6669 10 <sup>-4</sup>	5.9136 10 <sup>-5</sup>	6.6455 10 <sup>-5</sup>	3.4110 10 <sup>-4</sup>
	Avec Choc	2.7035 10 <sup>-4</sup>	5.4785 10 <sup>-5</sup>	5.9172 10 <sup>-5</sup>	1.5639 10 <sup>-4</sup>
	Rupture de u <sub>2</sub>	663.8988	8.5773 10 <sup>-5</sup>	663.8979	8.2653 10 <sup>-4</sup>
Synthèse en non-linéaire Surface : Bouclage Linéaire	A vide	5.4732 10 <sup>-3</sup>	1.1096 10 <sup>-4</sup>	9.6233 10 <sup>-4</sup>	4.4 10 <sup>-3</sup>
	Avec Charge	6.4670 10 <sup>-3</sup>	1.2996 10 <sup>-4</sup>	8.3708 10 <sup>-4</sup>	5.5 10 <sup>-3</sup>
	Avec Choc	5.3762 10 <sup>-3</sup>	1.0987 10 <sup>-4</sup>	9.6639 10 <sup>-4</sup>	4.3 10 <sup>-3</sup>
	Rupture de u <sub>2</sub>	667.3288	2.0044 10 <sup>-4</sup>	667.3180	1.06 10 <sup>-2</sup>
Synthèse en Linéaire Surface Non-Linéaire	A vide	6.5828 10 <sup>-4</sup>	2.5588 10 <sup>-4</sup>	6.0430 10 <sup>-6</sup>	3.9636 10 <sup>-4</sup>
	Avec Charge	6.9611 10 <sup>-4</sup>	2.4410 10 <sup>-4</sup>	2.7198 10 <sup>-5</sup>	4.49 10 <sup>-4</sup>
Synthèse en Linéaire Surface : Bouclage Linéaire	A vide	0.1871	2.0774 10 <sup>-4</sup>	0.1858	10 <sup>-3</sup>
	Avec Charge	0.1958	3.1654 10 <sup>-4</sup>	0.1941	1.3 10 <sup>-3</sup>

Tableau III.4 : Comparaison des erreurs de position avec les différentes approches de commande

Ce dernier tableau récapitulatif donnant l'erreur de poursuite avec synthèse de commande en linéaire et en non-linéaire permet de dégager les observations suivantes :

- L'erreur de position obtenue pour un régulateur synthétisé à partir du système non-linéaire est inférieure à celle obtenue avec un régulateur synthétisé à partir du système linéaire.
- Pour une même méthode de synthèse, l'erreur de position en poursuite à vide est toujours inférieure aux erreurs avec un choc qui elle-même est plus faible que celle qui intervient dans le cas de l'application d'une charge et de la décharge. L'essai avec rupture de la commande u<sub>2</sub> est celui qui provoque la plus grande erreur (dans l'espace des coordonnées généralisées) bien que la précision au niveau des première et troisième articulation soit satisfaisante.
- Toujours pour la même méthode de synthèse la surface de glissement PID avec terme non linéaire (de type Tanh) assure une meilleure poursuite que la surface PID sans terme non-linéaire, ce qui montre bien l'intérêt de la prise en compte de ce terme pour une meilleure précision.

Ces deux dernières surfaces assurent l'annulation de l'erreur en régime permanent, d'où l'intérêt de l'intégrateur sans lequel cette dernière ne converge pas forcément vers l'origine comme c'est le cas concernant la surface de type bouclage linéaire (ou P.D) n'assurant que la stabilité de l'erreur et de la surface.

▪ **Poursuite avec effet de la charge (et décharge à  $t=0.75s$ ):**

La charge  $m_0 = 5Kg$  est appliquée initialement avec décharge à  $t=0.75s$  (intervenant ainsi pendant le régime transitoire).

Bien que l'erreur soit supérieure à celle de l'essai à vide, surtout au démarrage (régime transitoire), cette dernière revient à l'origine et les commandes restent dans le domaine admissible.

▪ **Poursuite avec un choc à  $t = 0.75 s$  :**

Le choc considéré est en réalité un couple de perturbation  $u_{pi}$  appliqué au niveau des trois articulation à la fois. La perturbation  $u_{pi}$  est une impulsion de Dirac (Et plus exactement un approximation de celle-ci sous forme de créneau) appliquée au voisinage de l'instant  $t=0.75s$  appartenant au régime transitoire).

Ce choc n'a d'effet sur la dynamique de l'erreur qu'au voisinage de l'instant de son application ( $t=0.75s$ ), et la variation soudaine qu'il cause (sous forme d'un léger pic) au niveau des commandes, erreur et surface de glissement reste dans le domaine admissible ne causant ainsi aucun dysfonctionnement ni sollicitation trop forte de la commande.

▪ **Poursuite avec rupture de la commande  $u_2$  à  $t=0.75s$  :**

Cette poursuite avec rupture de commande  $u_2$  à l'instant  $t=0.75s$  appartenant au régime transitoire montre bien l'intérêt de l'application d'une commande décentralisée. En effet seule l'erreur de la seconde articulation diverge. Les erreurs au niveau des deux autre articulations restent en effet dans un domaine admissible et l'effet de la rupture de commande  $u_2$  est très faible. Les deux autres commandes, quant à elles, restent dans un domaine admissible.

◆ Ces dernières observations montrent bien que l'application de la commande généralisée donne des résultats très satisfaisants du point de vue poursuite et robustesse et surtout atténuation du Chattering. De plus, cette stratégie de commande nécessite moins de moyens à mettre en œuvre que pour une commande à structure variable non généralisée puisque les fonctions d'améliorations (réalisées par des filtres) ne sont plus utilisées, la dynamique des actionneurs les remplaçant pour ce filtrage.

C'est donc pour des raisons économiques, de performances en termes de précision, de rapidité, de rejet de perturbation et de robustesse que cette technique de commande présente un intérêt certain, surtout en considérant la surface de glissement non-linéaire avec une commande décentralisée.

On peut également noter que la méthode de synthèse en non-linéaire assure une meilleure élimination du phénomène de broutement que la méthode de synthèse à partir du système linéaire et cela est en partie dû à l'éloignement du point de fonctionnement (pris autour de l'origine avec des entrées de type SBPA). Néanmoins, le broutement reste assez faible pour le système linéaire et ceci est dû à la nature de la commande par les modes glissants généralisés qui permet avec un bon choix des constantes de compenser en quelques sortes l'éloignement par rapport au point de fonctionnement.

## III.11 CONCLUSIONS

D'après les résultats des simulations et leur interprétation, il ressort les conclusions majeures suivantes :

**Concernant la précision**, les résultats des simulations montrent bien la précision et la robustesse auxquelles on arrive en ayant recours à la commande à structure variable généralisée. En effet les critères de l'erreur de position en coordonnées généralisées comme en coordonnées locales montrent que la précision est très satisfaisante.

**Concernant l'influence de la surface de glissement**, avec une surface du type bouclage linéaire (PD), l'erreur est assez faible mais celle-ci, en régime permanent, demeure non nulle et non négligeable. L'effet de l'intégration se manifeste par l'annulation de l'erreur en régime permanent. Le terme non-linéaire permet d'atteindre une plus grande précision avec une meilleure robustesse.

**Concernant la robustesse**, pour toutes les surfaces utilisées, la commande est robuste vis-à-vis d'une charge (perturbation  $m_0$ ), d'un choc (couple de perturbation égal à une impulsion) et même d'une rupture de la commande ; l'erreur, sur les variables non locales, demeure dans tous les cas dans une proportion admissible.

**Concernant l'effet de la décentralisation**, l'essai avec rupture de la commande  $u_2$  montre l'intérêt d'avoir considéré une approche décentralisée car la précision au niveau des première et troisième articulations reste très satisfaisante.

**Concernant l'élimination ou l'atténuation du broutement**, on est ainsi arrivé à mettre en évidence l'effet d'intégration au niveau de la loi de commande apporté à la fois en considérant un modèle présumé linéaire avec des entrées du premier ordre mais aussi en tenant compte des constantes de temps mécaniques des différents moteurs qui ont une influence certaine du point de vue de l'élimination du phénomène de broutement « Chattering ». Il suffit en effet de comparer ces résultats avec ceux du chapitre II pour observer l'effet de la commande généralisée sur ce dernier phénomène.

On peut également noter que la synthèse de la commande en non-linéaire donne des résultats meilleurs que la synthèse à partir du modèle présumé linéaire issu de l'identification paramétrique du système du point de vue de l'élimination du broutement comme en ce qui concerne la précision ( pour le même type de surface de glissement ).

**En matière de consommation d'énergie enfin**, la sollicitation des actionneurs reste dans un domaine admissible pour la cas où la commande est synthétisée en non-linéaire (la commande ne dépassant jamais 30N.m) .Pour le cas de la synthèse en linéaire , la commande est beaucoup plus fortement sollicitée avec des couples atteignant 500N.m ; et bien que cette valeur ne dépasse pas la valeur maximale que peuvent supporter les actionneurs ( en effet un travail expérimental mené sur le robot Puma 560 dans l'article [ 18 ] montre que les couples pouvant être mis en jeu dans la commande peuvent être de l'ordre de 1000 N.m même avec un phénomène d'oscillations à haute fréquence ) , on préfère toujours les solutions nécessitant la plus faible consommation possible car ce critère est l'un des plus importants en robotique. On peut donc affirmer que la commande synthétisée en non-linéaire est plus avantageuse en ce qui concerne la consommation d'énergie . Ainsi la commande linéaire n'a de véritable intérêt que lorsque la modélisation du système devient trop difficile, ce qui n'est pas le cas pour le robot Puma 560.

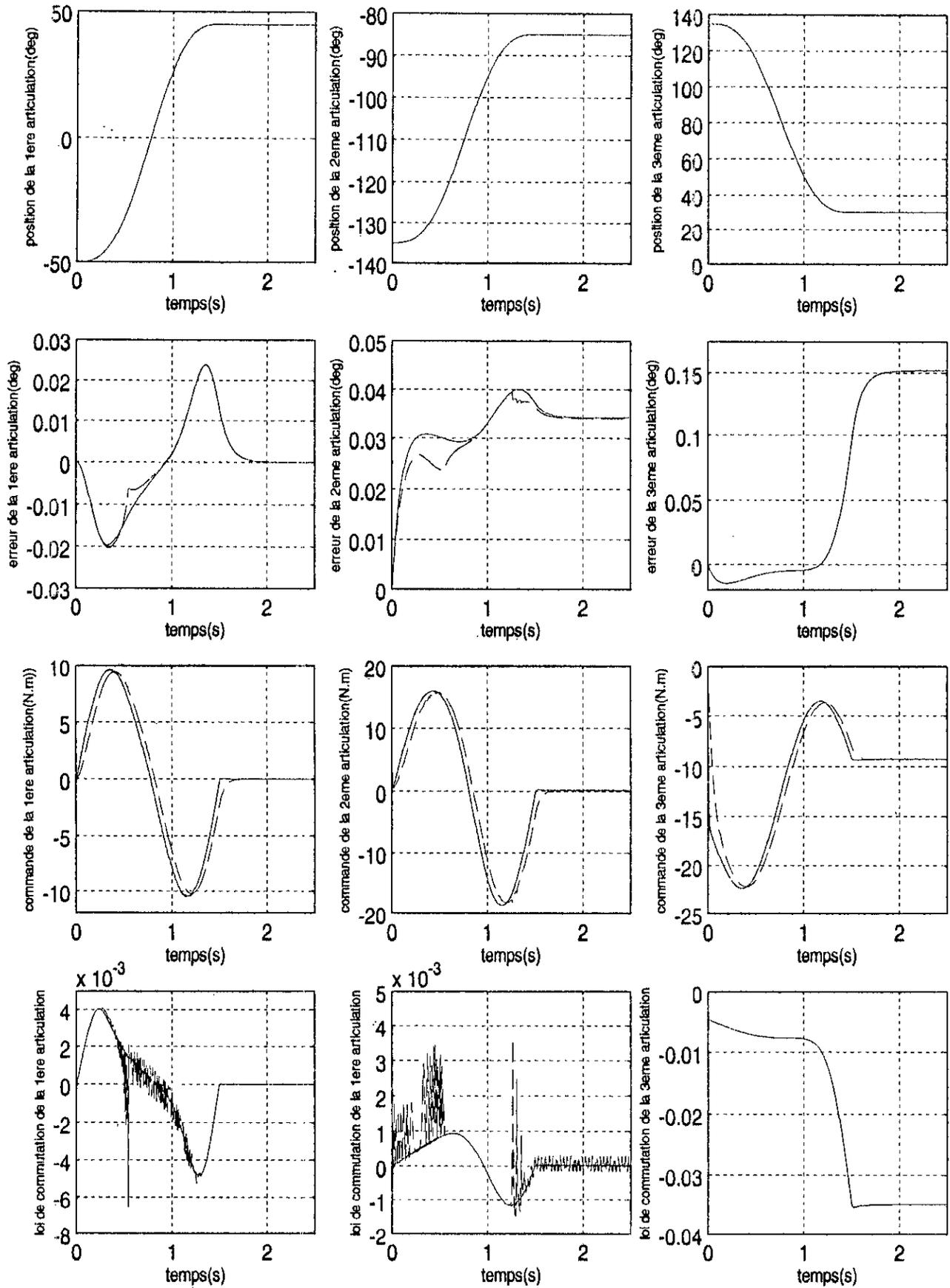


Fig III.4 : Commande GVS synthétisée en NL, Surface de glissement PD  
 Variation du paramètre  $K_{mi}$  ( $K_{mi}=1, 5, 10$ ms trait continu -  $K_{mi}=5$ ) ms trait discontinu)

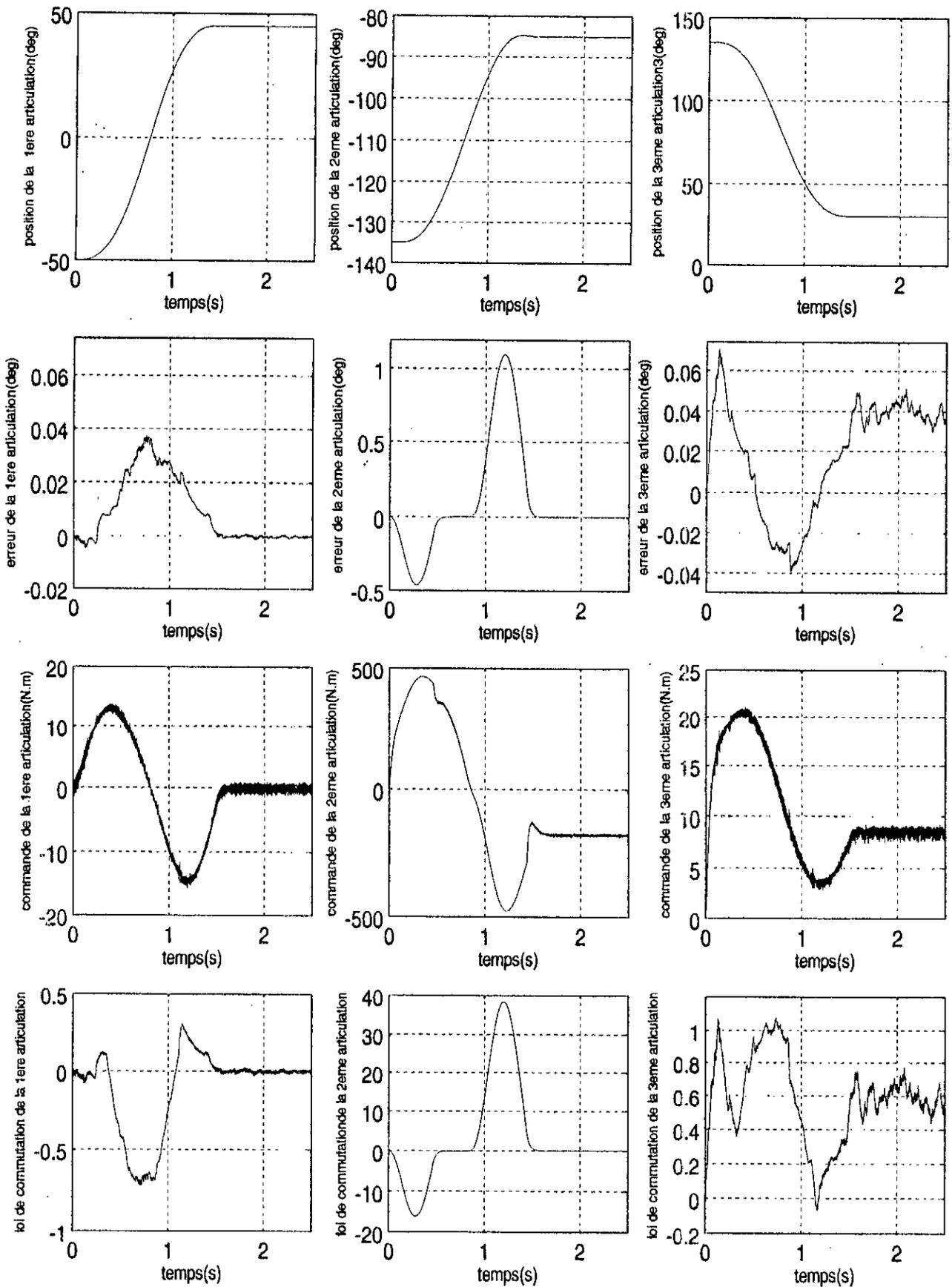


Fig III.5 : Commande GVS synthétisée en linéaire du robot Puma 560  
Surface de glissement PD , Poursuite à vide

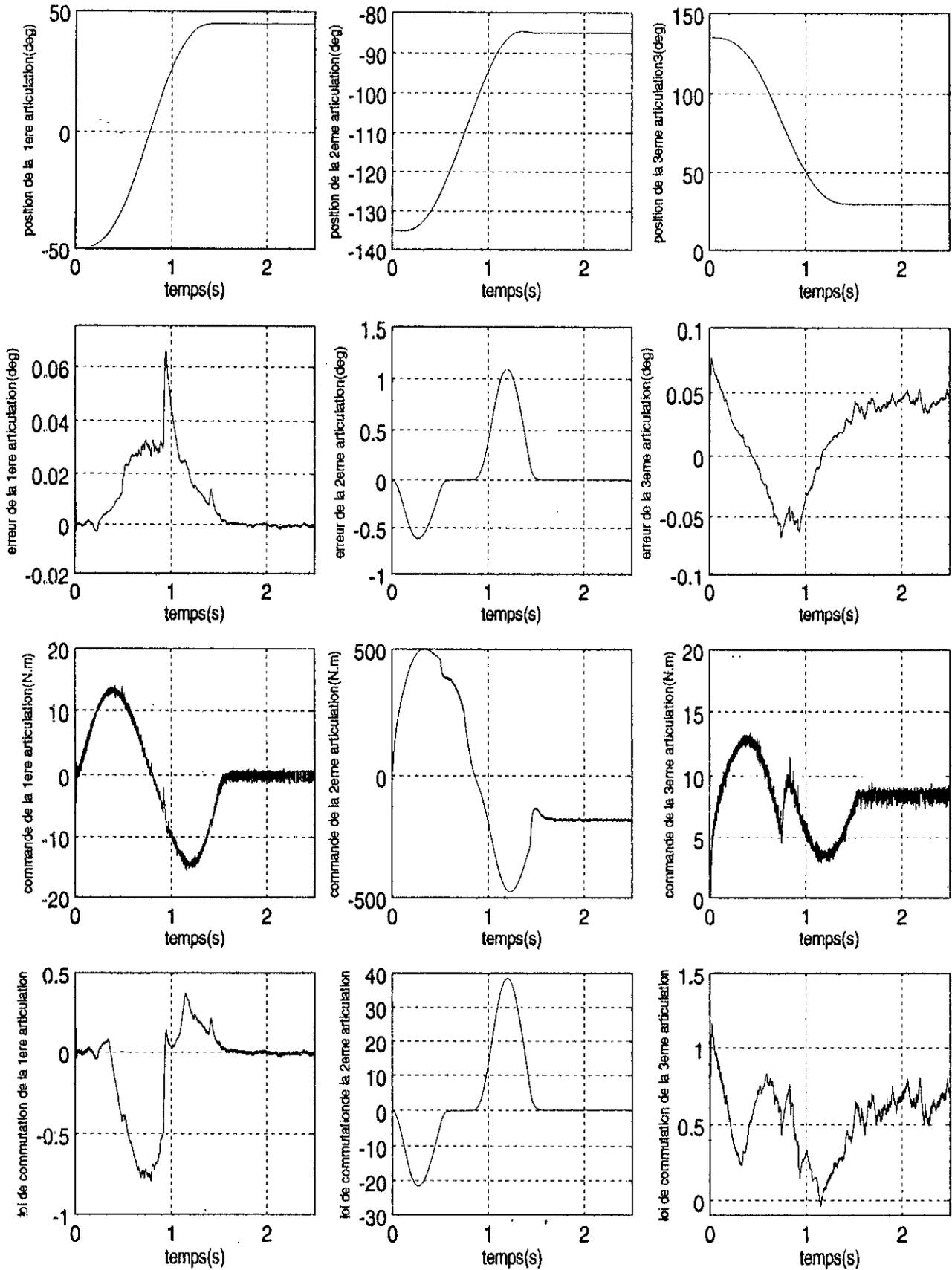


Fig III.6 : Commande GVS synthétisée en linéaire, Surface de glissement PD  
Poursuite avec charge  $m_0=2\text{Kg}$  et décharge à l'instant  $t=0.75\text{s}$

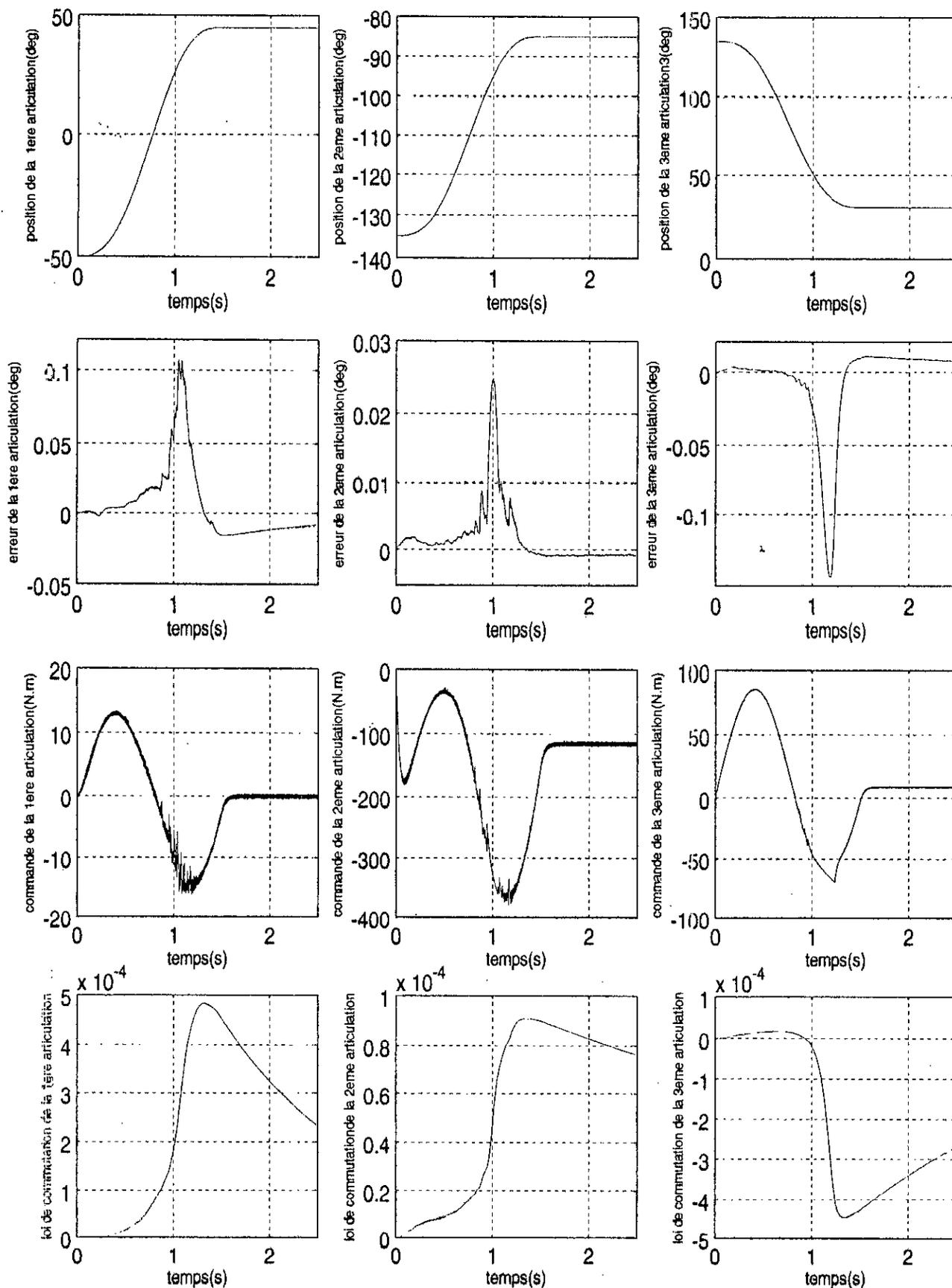


Fig III.7 : Commande GVS synthétisée en linéaire Surface de glissement NL, Poursuite à vide

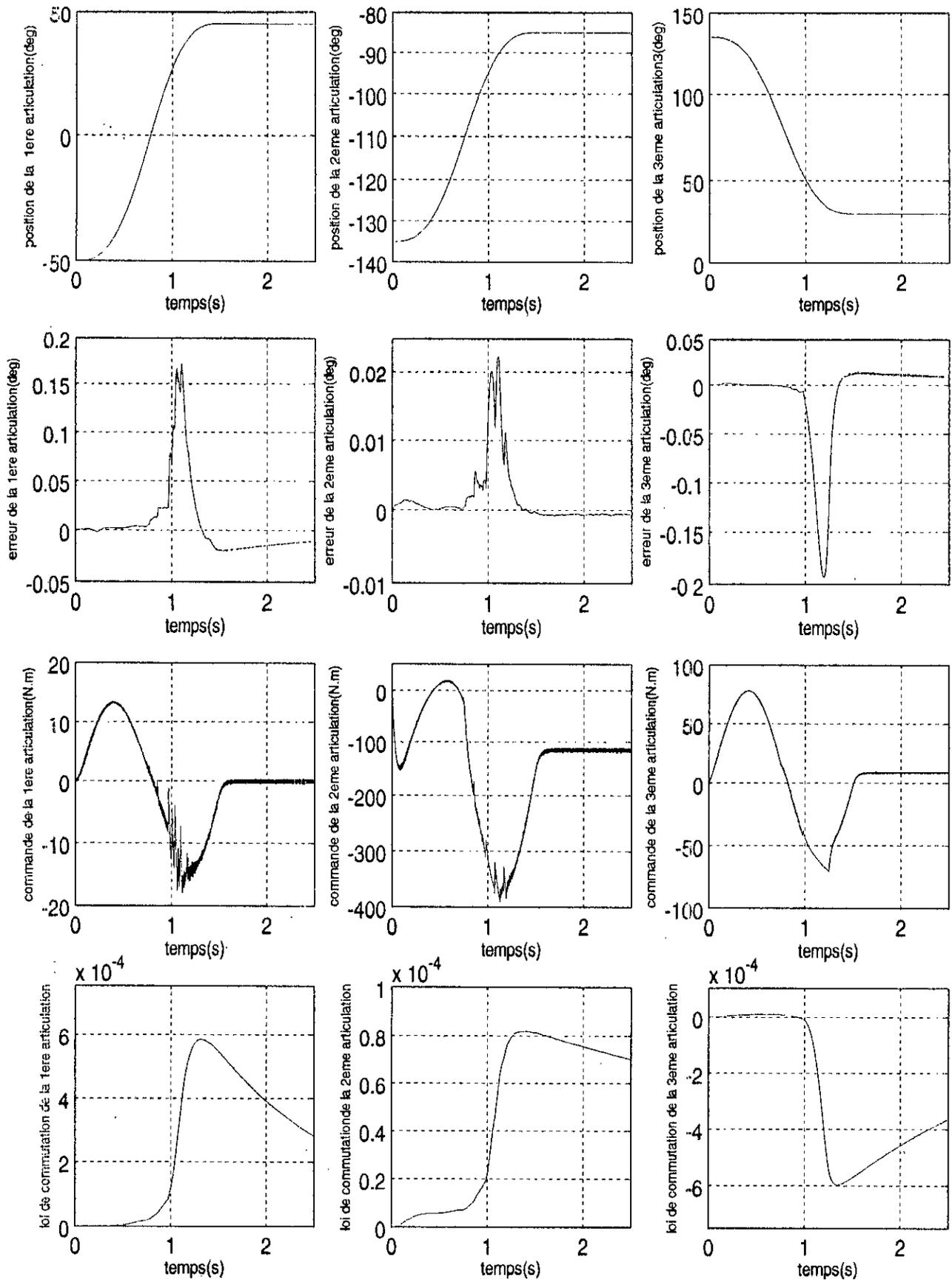


Fig III.8 : Commande GVS synthétisée en linéaire, Surface de glissement NL  
Poursuite avec charge  $m_0=2\text{Kg}$  et décharge à  $t=0.75\text{s}$

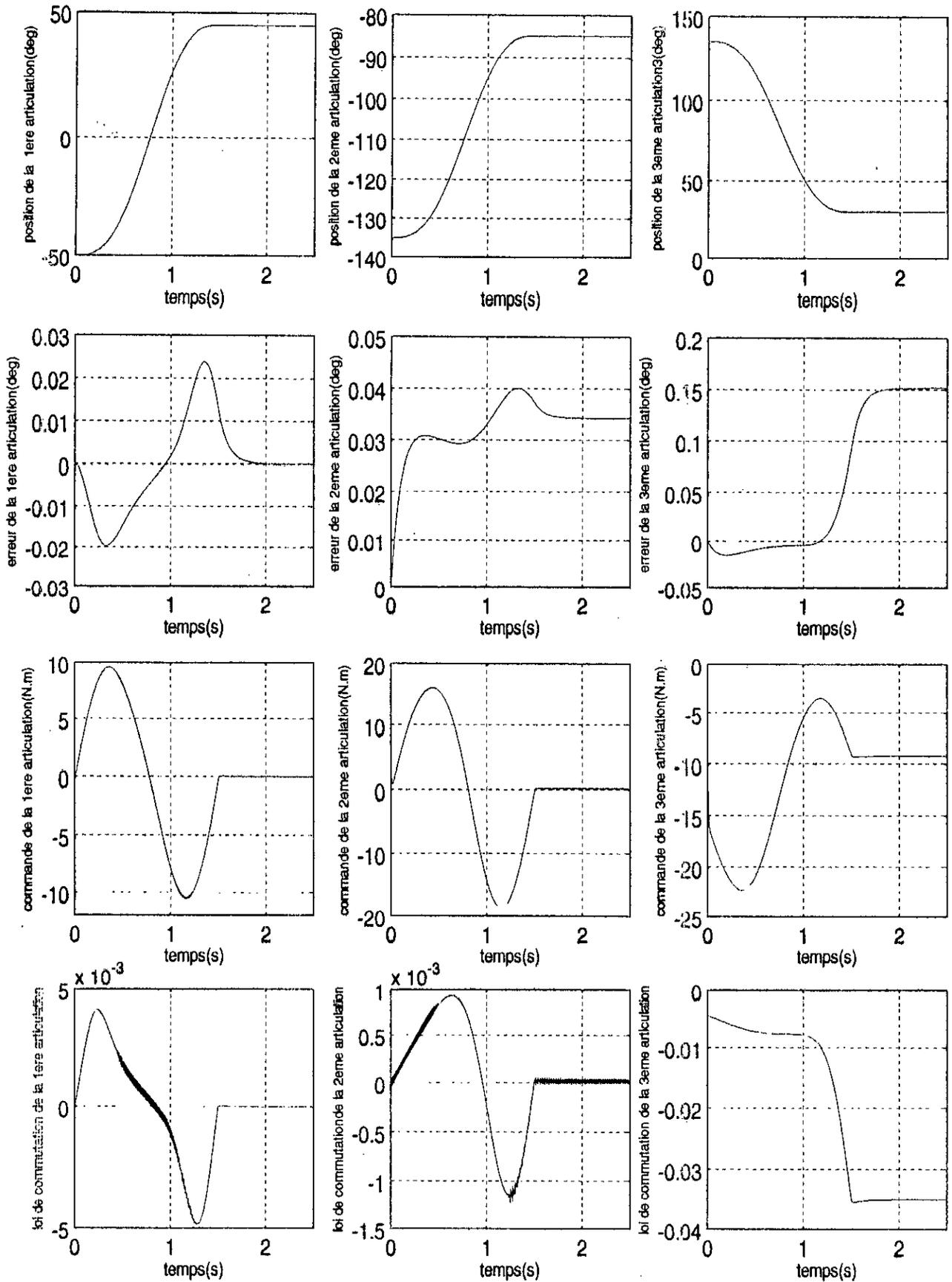


Fig III.9 : Commande GVS synthétisée en NL, Surface de glissement PD  
Poursuite à vide

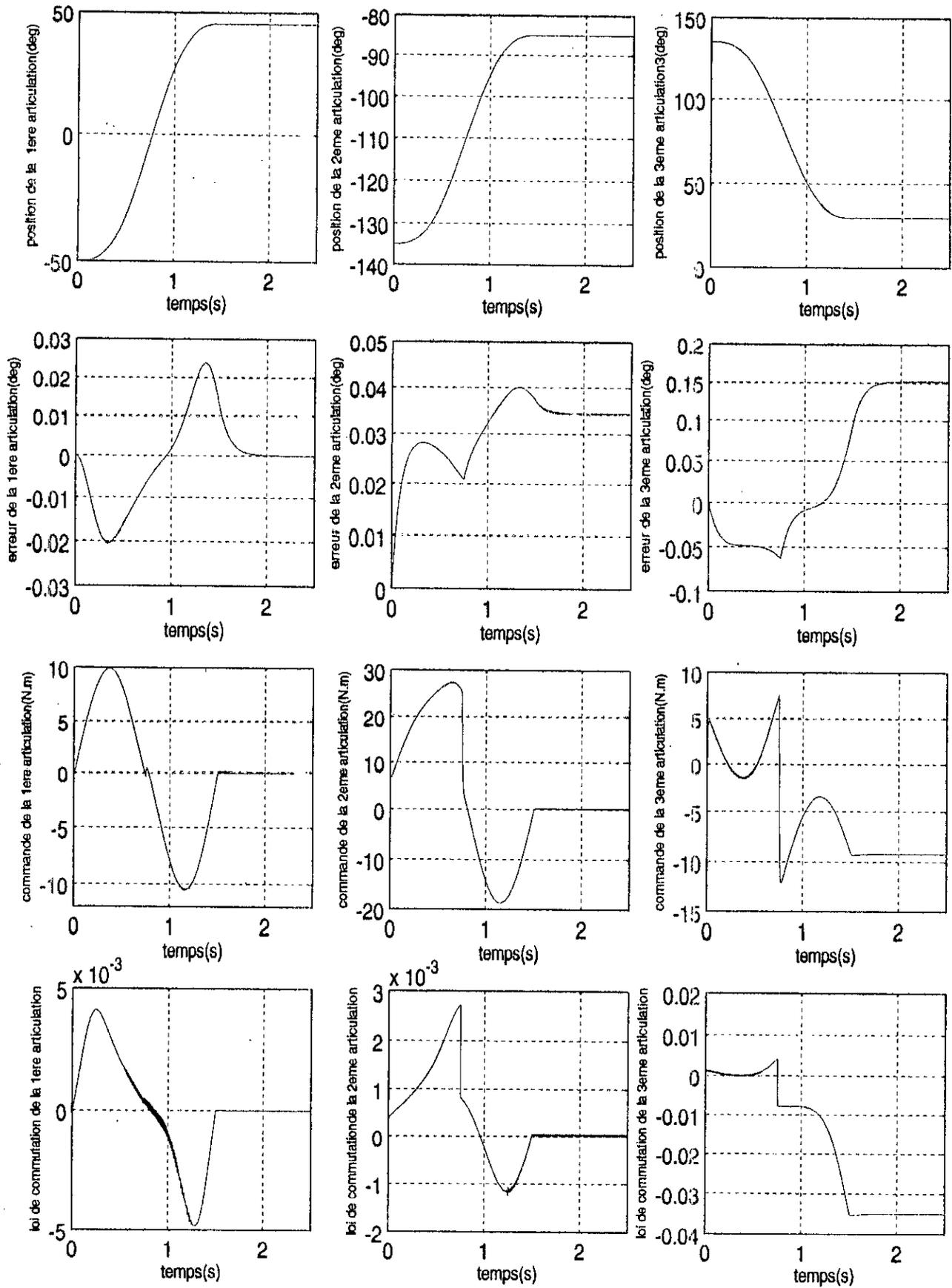


Fig III.10 : Commande GVS synthétisée en NL, Surface de glissement PD  
Poursuite avec charge  $m_0=5\text{Kg}$ , et décharge à  $t=0.75\text{s}$

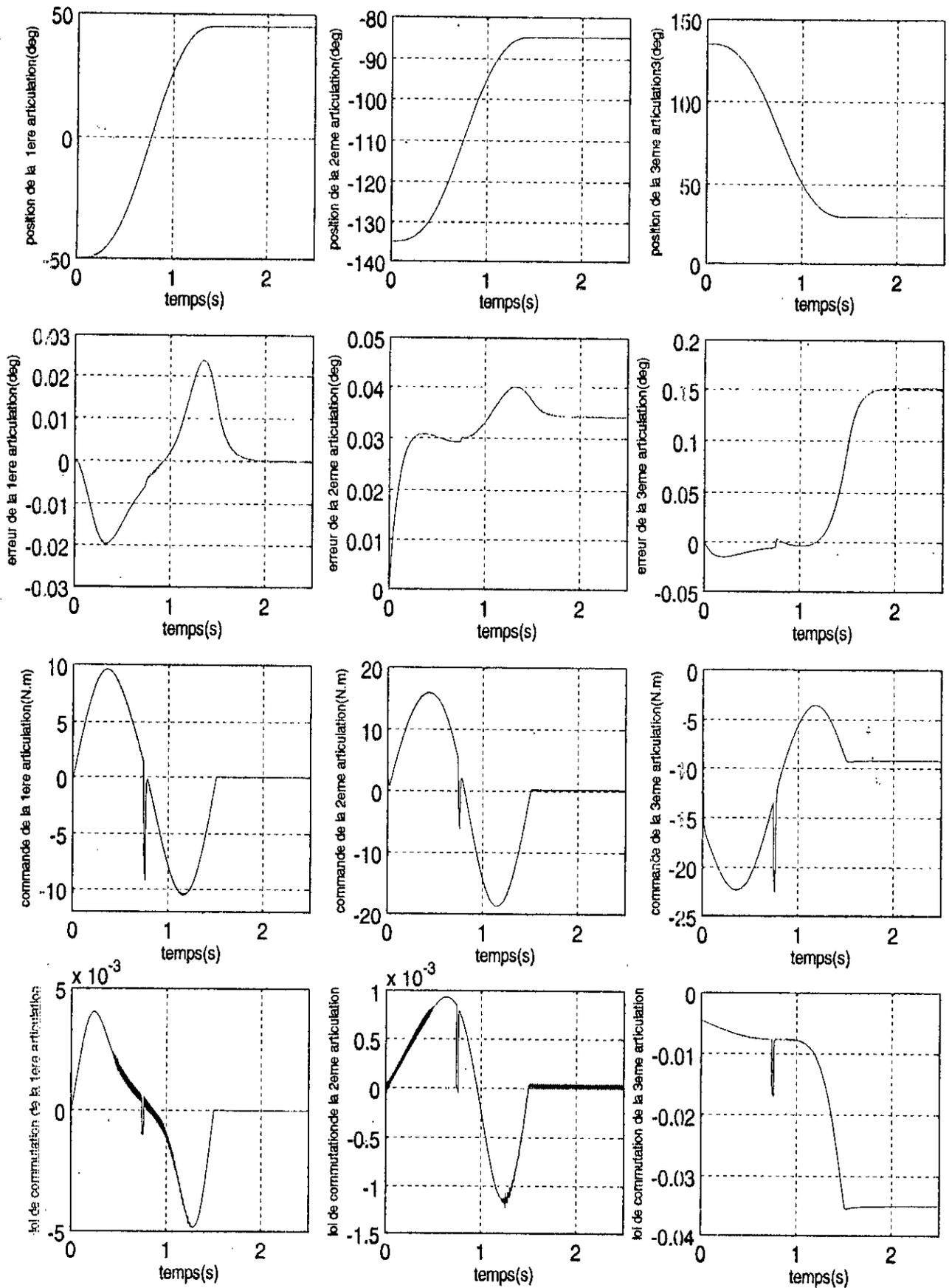


Fig III.11 : Commande GVS synthétisée en NL, Surface de glissement PD  
Poursuite avec un choc à t=0.75s

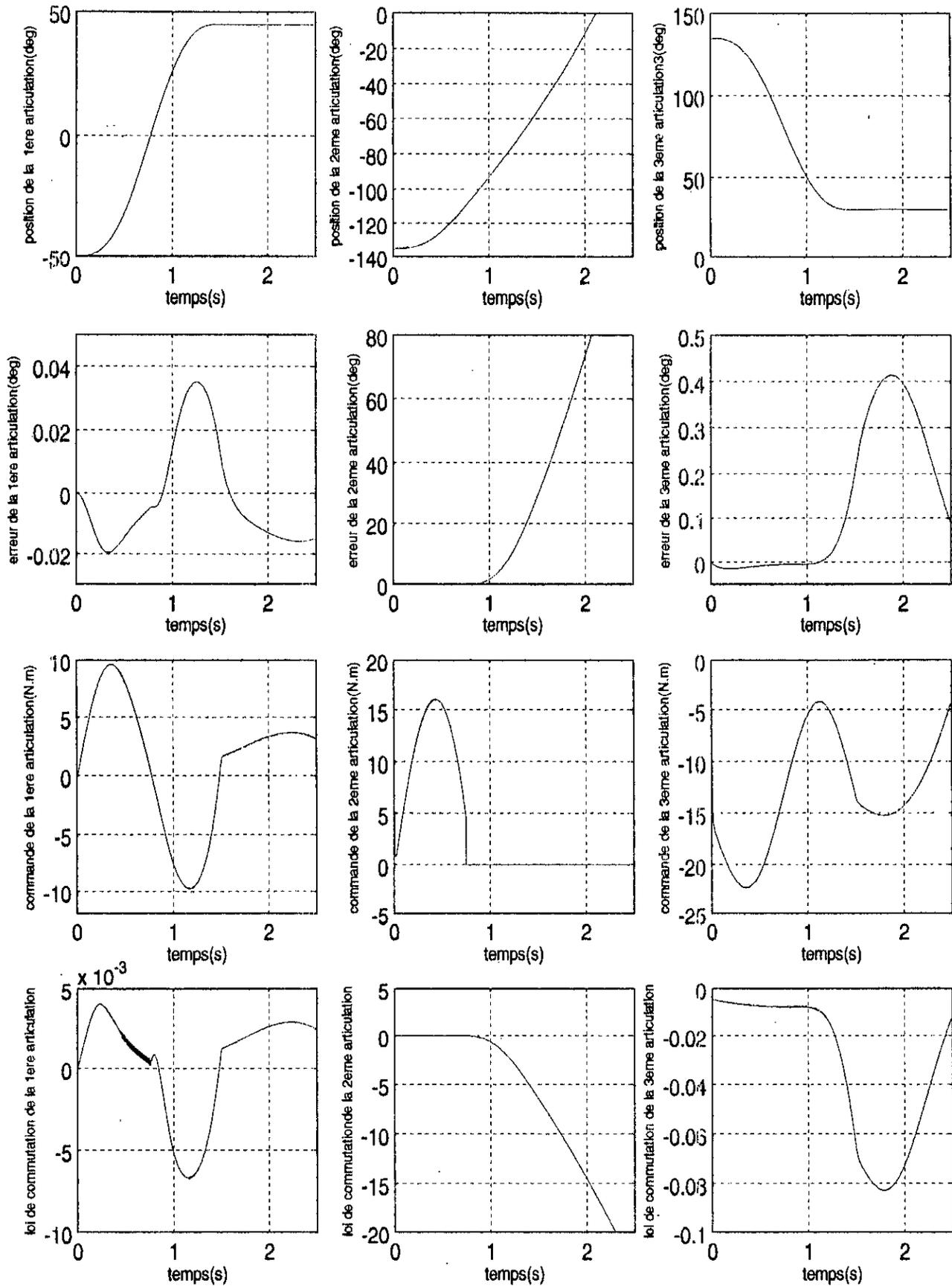


Fig III.12 : Commande GVS synthétisée en NL, Surface de glissement PD  
Poursuite avec rupture de la commande  $u_2$  à  $t=0.75s$

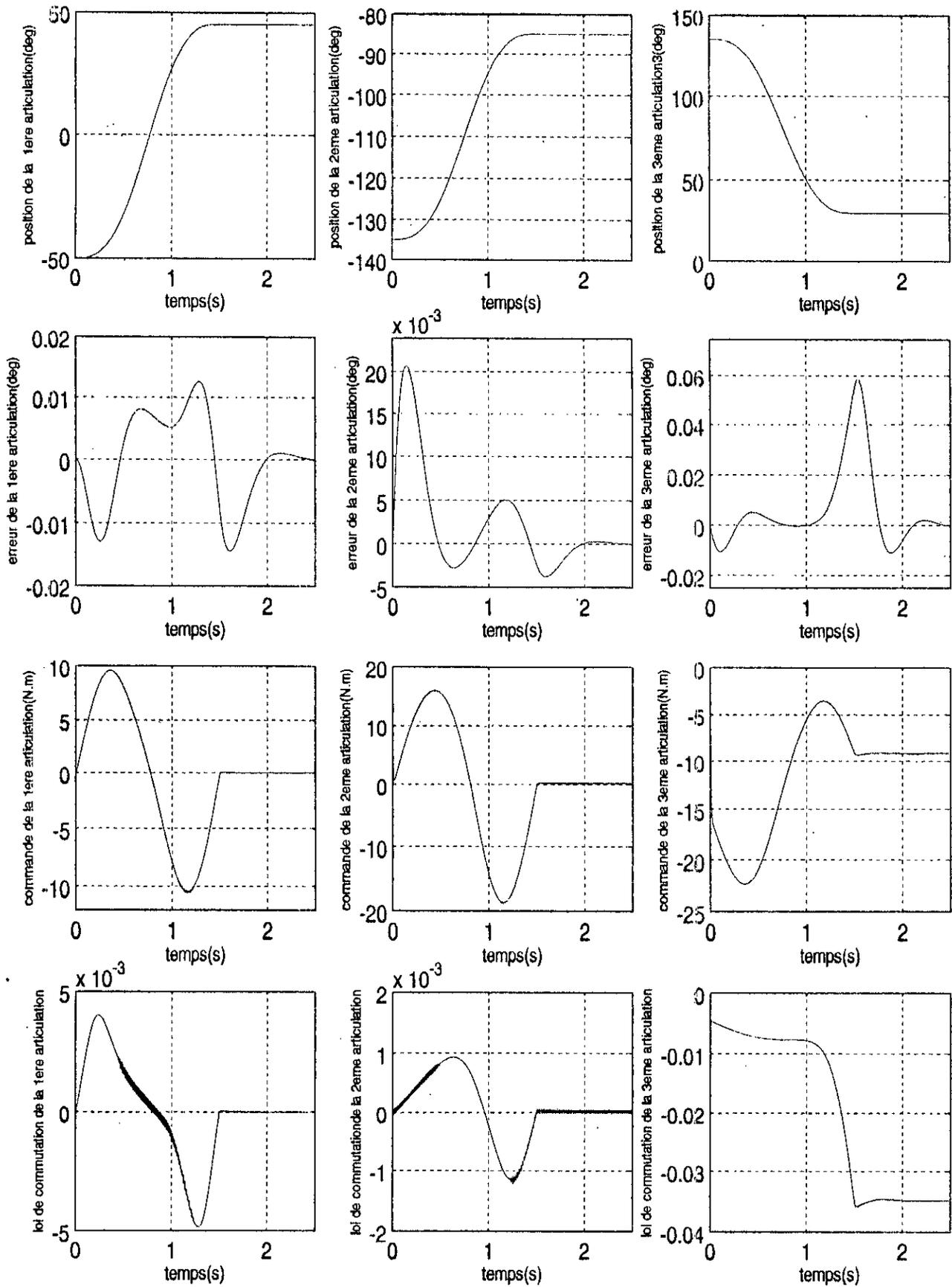


Fig III.13 : Commande GVS synthétisée en NL, Surface de glissement PID  
Poursuite à vide

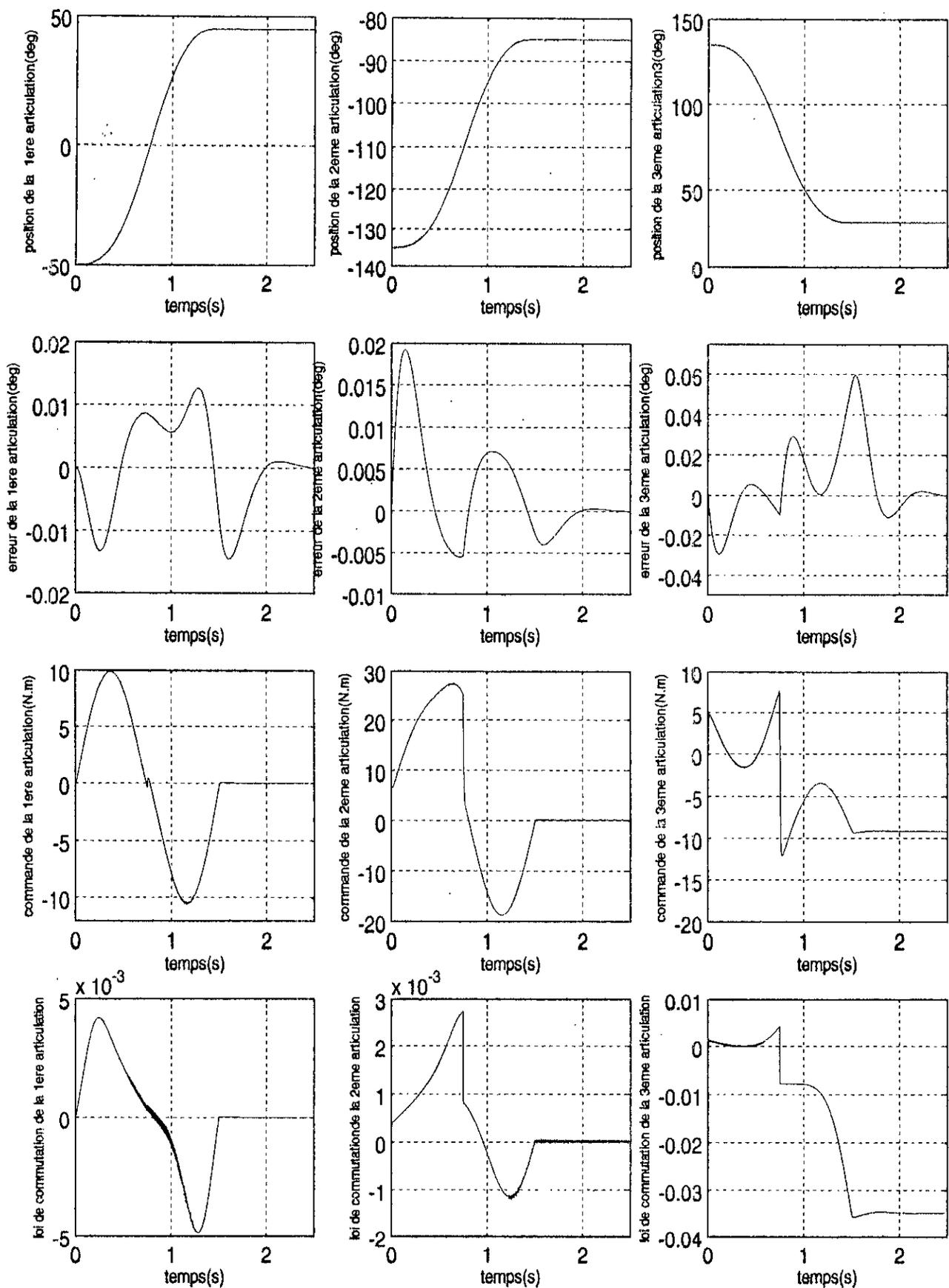


Fig III.14 : Commande GVS synthésisée en NL, Surface de glissement PID  
Poursuit avec charge  $m_0=5\text{Kg}$  et décharge à  $t=0.75\text{s}$

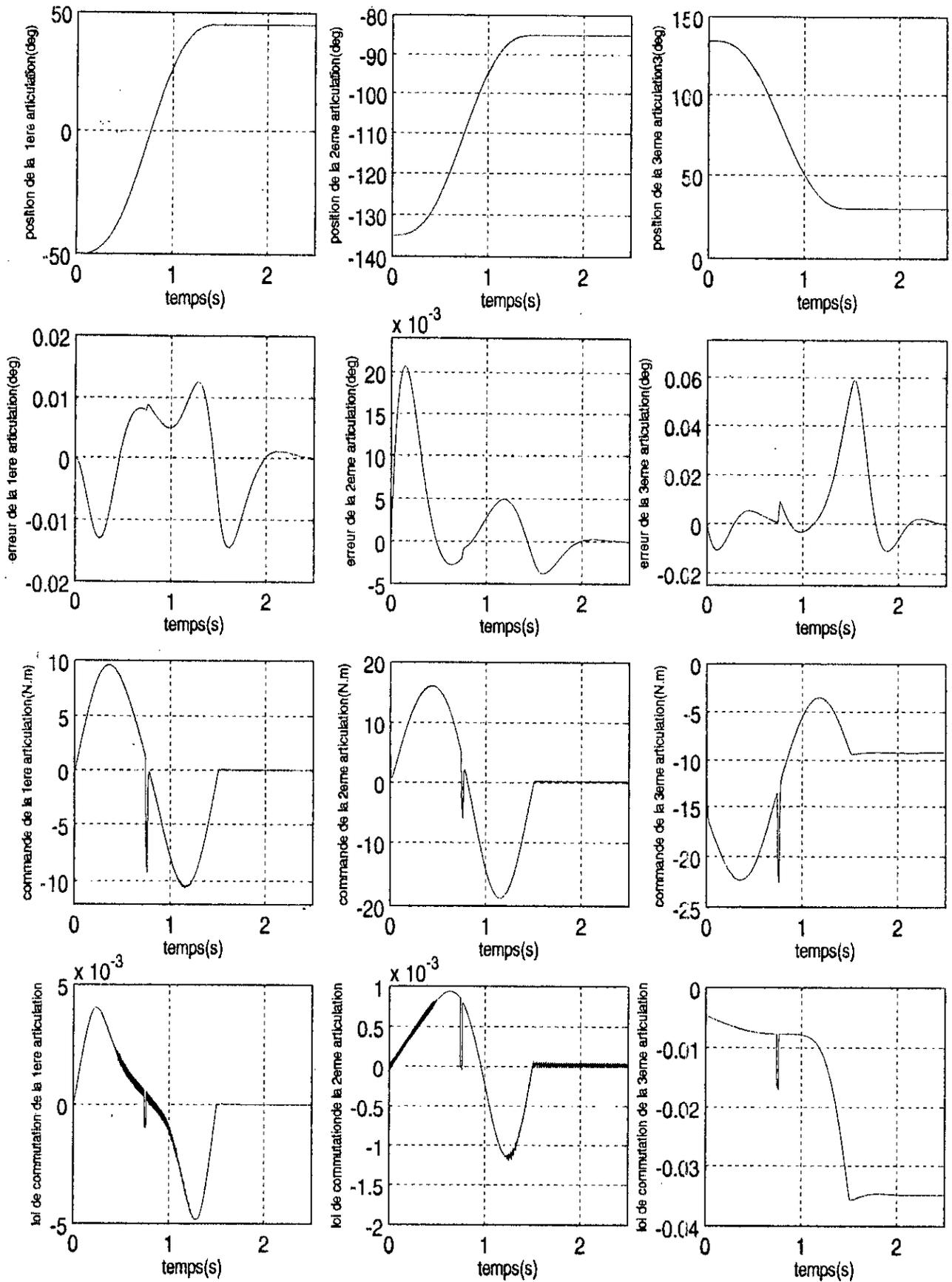


Fig III.15 : Commande GVS synthétisée en NL, Surface de glissement PID  
Poursuite avec un choc à  $t=0.75s$

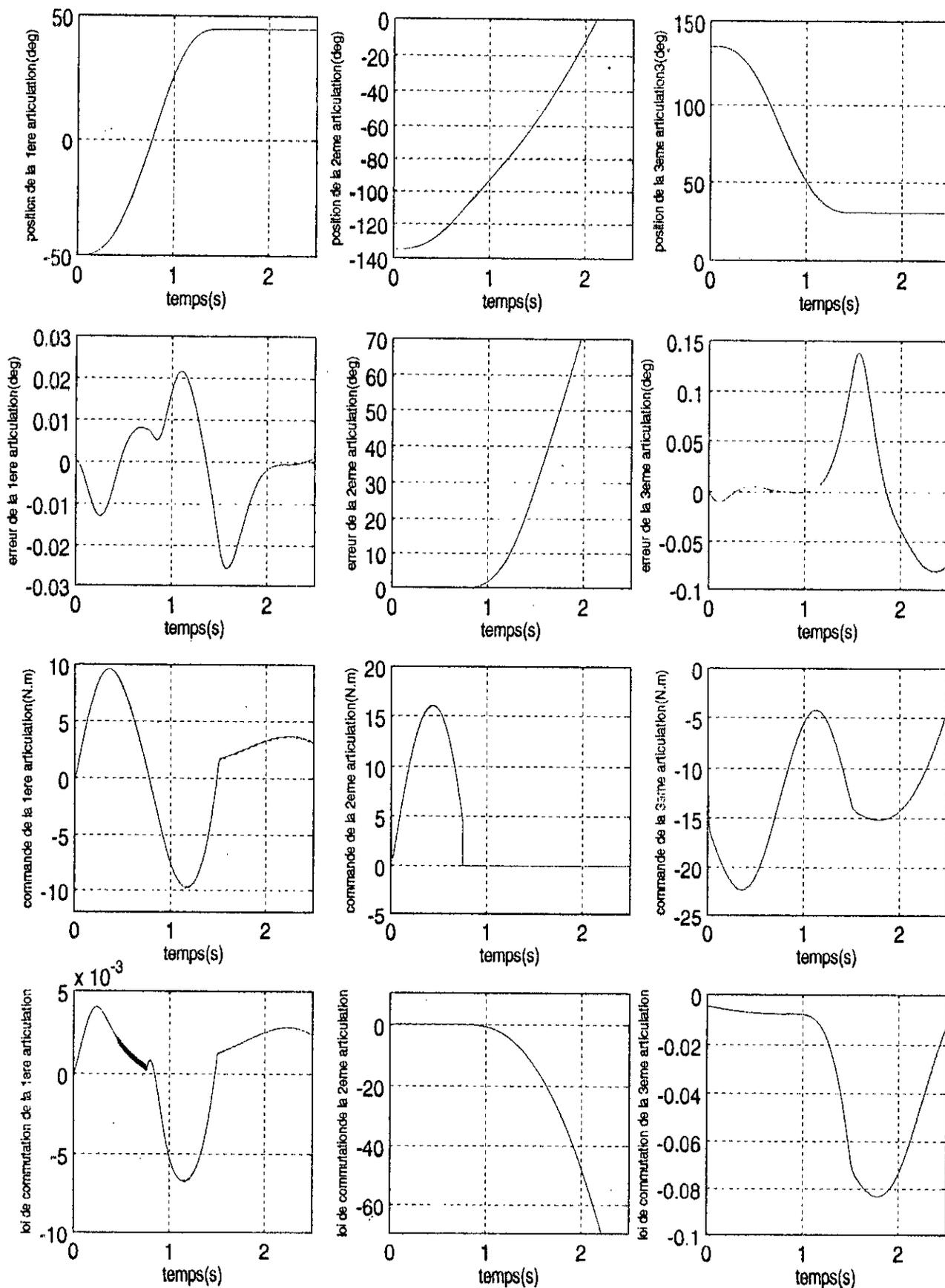


Fig III.16 : Commande GVS synthétisée en NL, Surface de glissement PID  
Poursuite avec rupture de la commande  $u_2$  à  $t = 0.75s$

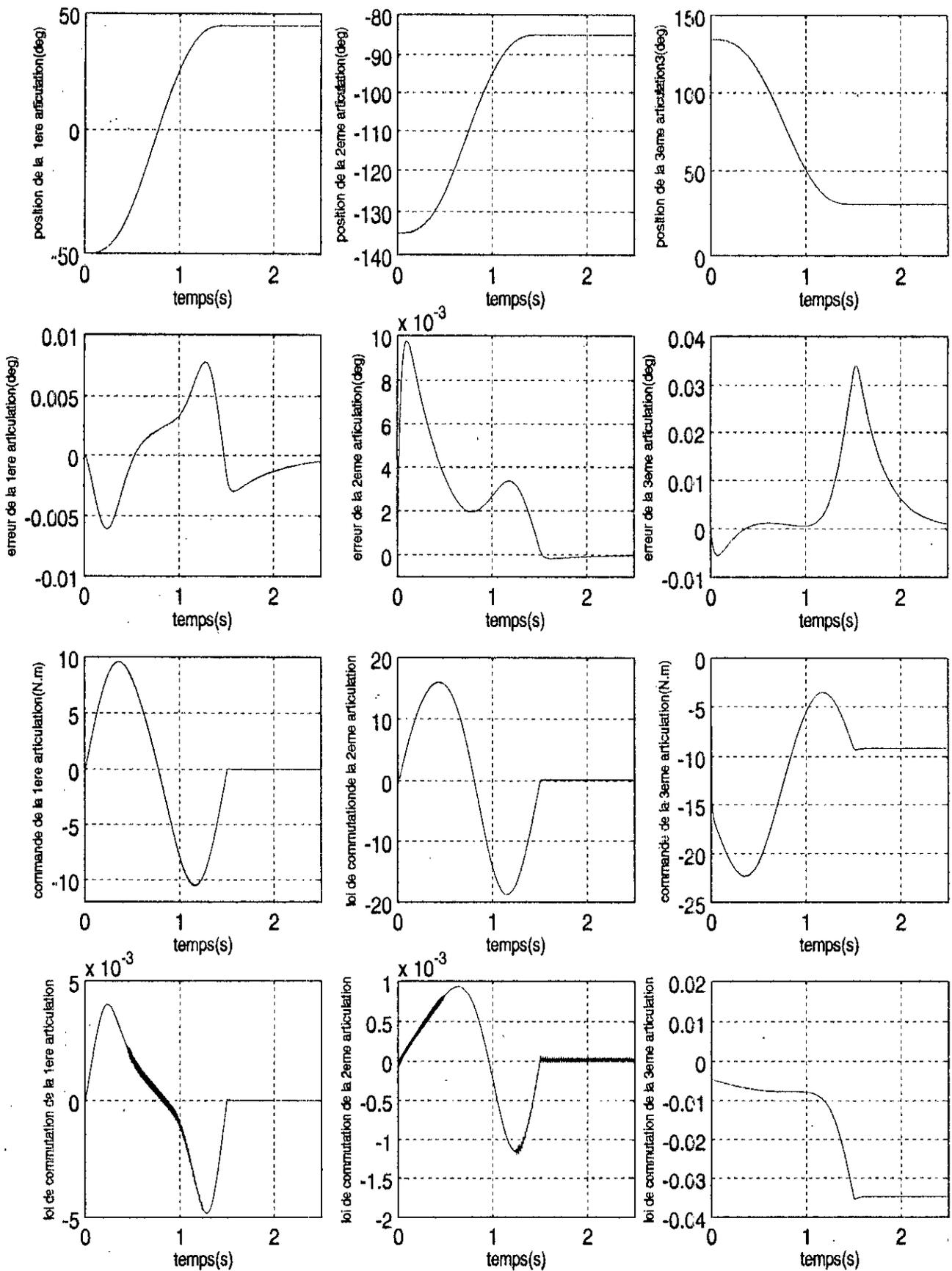


Fig III.17 : Commande GVS synthétisée en NL, Surface de glissement NL  
Poursuite à vide

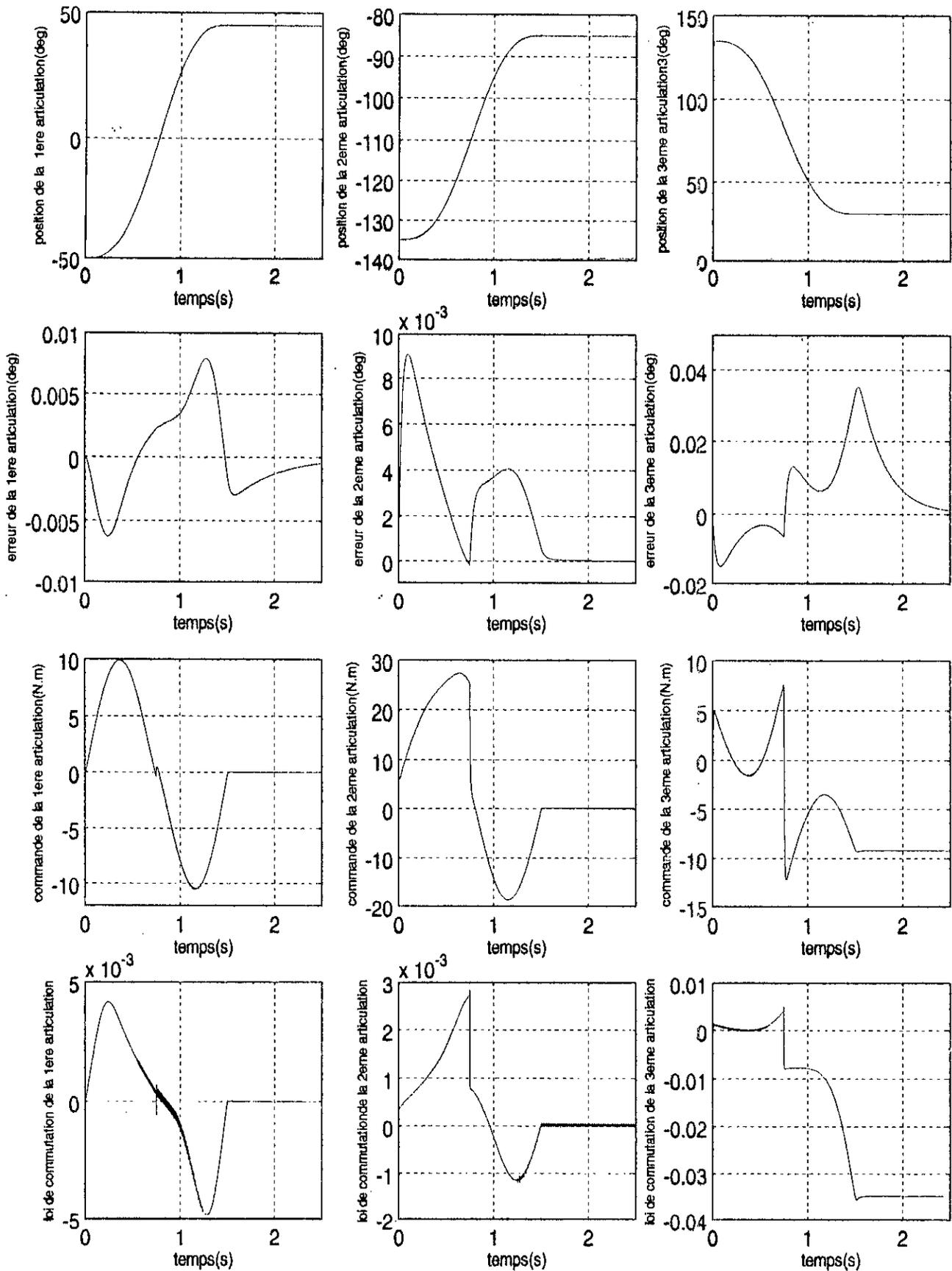


Fig III.18 : Commande GVS synthétisée en NL, Surface de glissement NL  
Poursuite avec charge  $m_0=5\text{Kg}$  et décharge à  $t=0.75\text{s}$

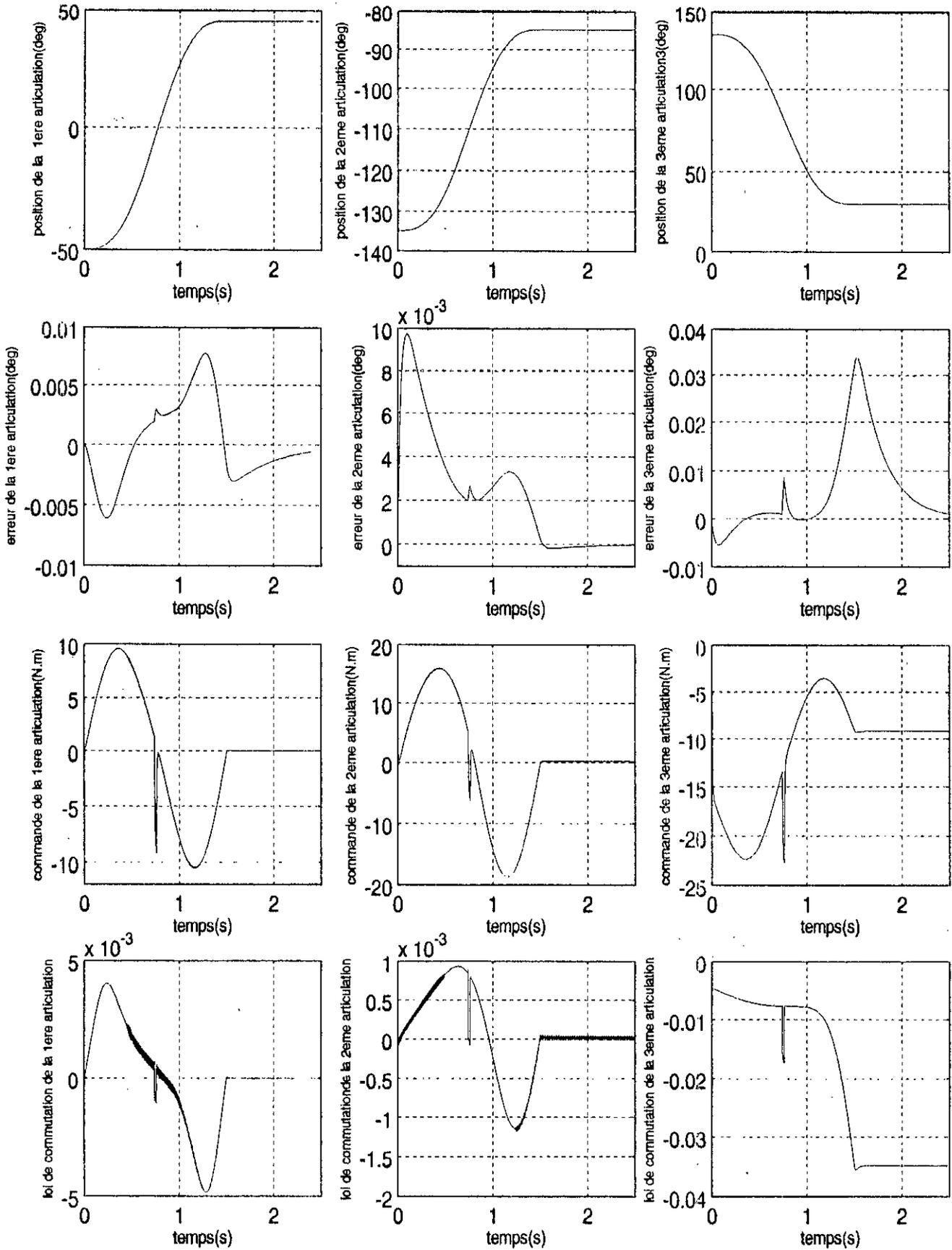


Fig III.19 : Commande GVS synthétisée en NL, Surface de glissement NL  
Poursuite avec un choc à  $t=0.75$ s

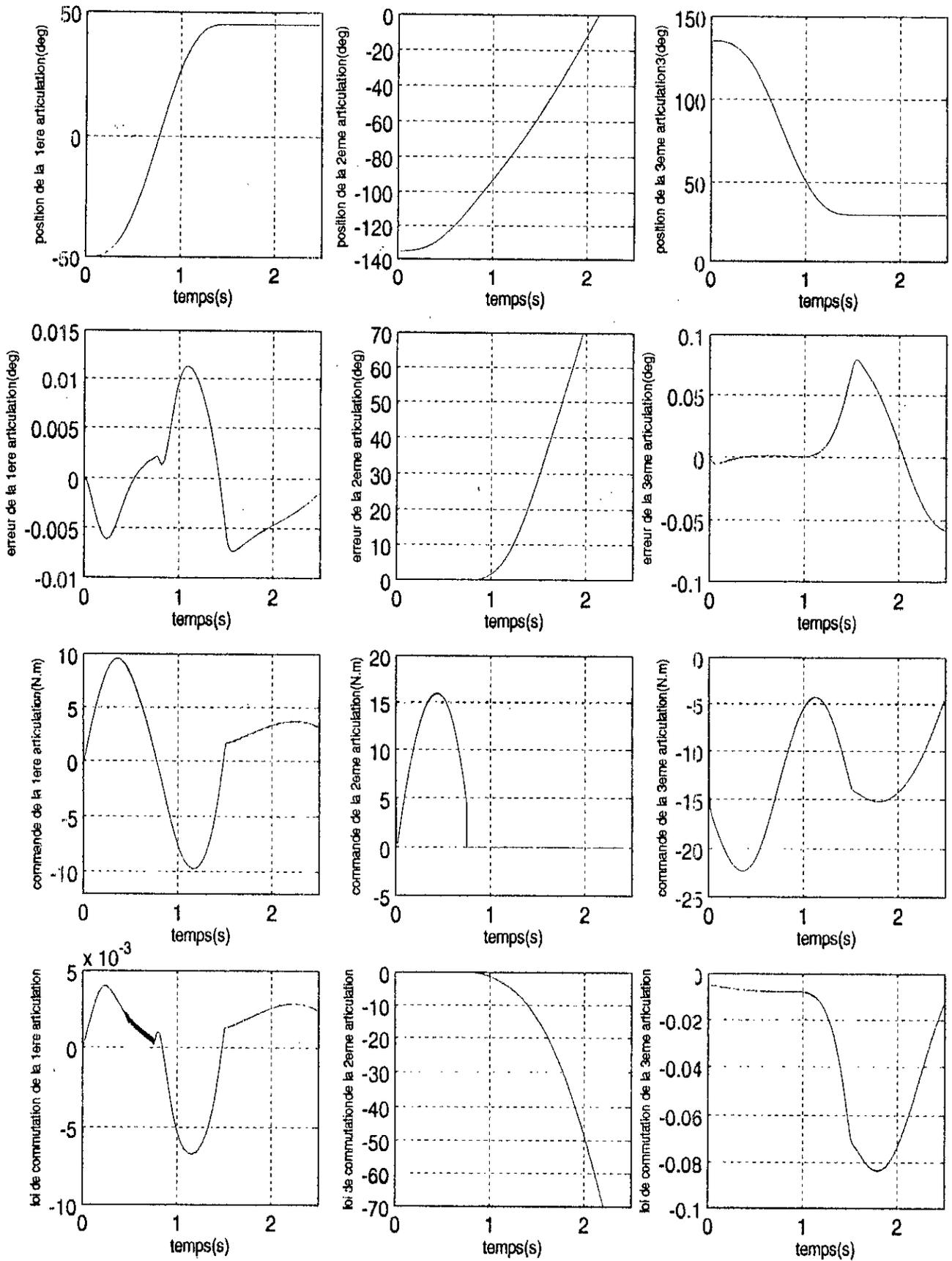


Fig III.20 : Commande GVS synthétisée en NL, Surface de glissement NL  
Poursuite avec rupture de  $u_2$  à  $t=0.75s$

# CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, une étude comparative a été menée entre la commande à structure variable non généralisée et généralisée avec application à un robot manipulateur de type Puma560. Les deux commandes concernées sont décentralisées.

Les résultats de l'application de la première commande met bien en évidence l'apparition d'un phénomène d'oscillations à haute fréquence dit broutement « Chattering ». On note également dans ce cas que ce dernier phénomène entraîne une nette détérioration des performances de la poursuite de référence du point de vue de la précision .

L'approche habituellement considérée, ( basée sur l'hypothèse que la discontinuité de la fonction Sign intervenant au niveau des organes de commande est la principale raison entraînant le phénomène de broutement), est l'introduction de fonctions d'amélioration continues visant à atténuer les oscillations.

Cette dernière approche, devenue classique assure en effet la convergence vers un voisinage de la surface mais on ignore néanmoins le comportement à l'intérieur de ce voisinage. Elle nécessite bien entendu, de prévoir un dispositif fournissant cette fonction d'amélioration .

L'approche utilisée en vue de l'élimination du chattering dans ce projet ne nécessite aucun dispositif supplémentaire, elle est basée par contre sur la prise en compte des dynamiques des commandes (les dérivées des entrées ) dans la synthèse des lois de commande.

Deux approches ont été proposées dans cette dernière direction :

◆ La première est basée sur l'identification paramétrique du système multivariable par un processus de type ARX multivariable en utilisant le Toolbox Identification de Matlab 5.2. Cette identification permet d'obtenir un système présumé linéaire équivalent à notre bras manipulateur où les commandes interviennent avec leurs dérivées. Cette approche s'avère nécessaire lorsque le système n'est pas bien modélisé. Les résultats de l'application de la commande synthétisée à partir de ce système présumé linéaire sur le système non-linéaire sont satisfaisants .En effet, le bon choix du point de fonctionnement entraîne une faible variation des paramètres identifiés par rapport à ses propres variations.

Dans des cas plus délicats, il se pourrait néanmoins qu'une identification en temps réel (impliquant une commande adaptative) soit incontournable. La principale raison de l'utilisation de l'identification paramétrique est la non disponibilité des constantes de temps mécaniques permettant d'écrire notre système non-linéaire (Modèle dynamique décentralisé) avec des entrées allant jusqu'au premier ordre.

◆ Pour la seconde approche, l'étude de l'influence du paramètre a montré que dans une Plage allant de 1 à 10 ms , on ne notait aucune réelle différence dans la poursuite de référence. Etant donné que la plupart des moteurs (Servo-moteurs) à courant continu utilisés en robotique pour des robots de même puissance que le notre ont des constantes de temps

appartenant à ce domaine, on a simulé la poursuite de la trajectoire de Leahvy en considérant des constantes de temps mécaniques de 5ms.

Des simulations ont été effectuées avec des commandes ainsi synthétisées à partir du système non-linéaire en tenant compte des constantes de temps mécaniques. Les résultats de ces simulations montrent que la synthèse à partir du système non-linéaire donne de meilleurs résultats que pour le cas de la synthèse à partir du système présumé linéaire du point de vue de la précision comme on peut l'observer avec les critères quadratiques sur l'erreur de position. On note également une meilleure robustesse du système dont les essais (test avec charge et décharge et avec choc) n'agissent que très peu sur la poursuite de trajectoire.

On a également observé que l'utilisation d'une surface de glissement non linéaire assure l'annulation des erreurs en régime permanent, grâce au terme intégral. Par ailleurs, on a constaté que le terme non linéaire permet de diminuer l'erreur en régime transitoire.

D'autre part, on a démontré que la rupture d'une des entrées de commande ne conduit pas à la détérioration des performances de la poursuite de trajectoire au niveau des deux autres sorties (les erreurs restant dans un domaine admissible). Ceci démontre également l'intérêt d'avoir considéré une commande décentralisée.

Enfin, on a pu observer que la synthèse en non-linéaire permettait une meilleure élimination du broutement que pour celle effectuée en linéaire. La consommation d'énergie, elle aussi, est moins importante donc plus avantageuse dans le cas de la synthèse en non-linéaire.

En résumé, la commande à structure variable généralisée nous a permis **l'élimination du broutement « chattering »** mais aussi d'assurer une poursuite avec de **bonnes performance statiques et dynamiques** au niveau **précision, rapidité, et robustesse** avec une **consommation d'énergie raisonnable** dans le cas de la synthèse de la commande en non-linéaire.

Concernant les perspectives possibles à partir de ce travail, on peut proposer l'application de la commande à structure variable généralisée à d'autres systèmes physiques. En particulier, la méthode appliquée avec une approche décentralisée pourrait donner de bons résultats dans le cas d'un réseau électrique. On peut également proposer l'application de la méthode dans le cas où la sortie représente la position de l'organe terminal comme c'est souvent le cas en robotique. L'application de la commande associée à une autre technique peut également être considérée en tenant compte simplement de la dynamique des entrées.

# BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] **H.BLOMBERG & R.YLINNEN** : « Algebraic of multivariable linear systems », Academic press , London,1983.
- [ 2 ] **H.BUHLER** : « Réglage par mode de glissement », Presses Polytechniques Romandes , Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne,1986.
- [ 3 ] **YOUSSEF TEWFIK** : « Commande à structure variable généralisée appliquée à un bras manipulateur », Thèse de Magister, Spécialité Automatique appliquée, INHC,1999.
- [ 4 ] **T.MADANI , S.AMRATI** : « Commande à structure variable décentralisée appliquée en robotique »,Projet de fin d'études , ENP,1997.
- [ 5 ] **M.FLISS & F.MESSAGER** : « Vers une stabilisation non linéaire discontinue », Proc. 9<sup>th</sup> Int. Conf. on Analysys and optimisation of systems ,Springer , Berlin,1990.
- [ 6 ] **M.FLISS & F.MESSAGER** : « Sur la commande en régime glissant », C.R.Acad.Sc.Paris,t.313,Série I,P.951-956,1991.
- [ 7 ] **M.FLISS & F.MESSAGER** : « Methods of nonlinear discontinuous stabilisation », Nonlinear Synthesis,Birkhäuser, C.I.Byrnes et A.Kurzhansky eds.,P.112-131,1991.
- [ 8 ] **M.FLISS** : « Generalised controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics », IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.35,N°9,September 1990.
- [ 9 ] **A.S.NOURI & P.LOPEZ** : « Generalised variable structure control of two one – link manipulators in two operating modes », Electrical Engeneering Dept, INSA Toulouse.
- [ 10 ] **HERBERT SIRA RAMIREZ** : « Differential geometric methods in variable structure control »,Int J.Control,Vol48, N°4 ,1359-1390,1988.
- [ 11 ] **RAFAEL KELLY** : « Global positionning of robot manipulators via PD Control plus a class of nonlinear integral actions », IEEE Transactions on Automatic Control,Vol43,N°7, P.934-937,1998.
- [ 12 ] **G.BARTOLINI , A.FERRARA , & E.USAI** : « Chattering avoidance by second order sliding mode control », IEEE Transaction on Automatic Control , Vol 43 ,N°2 ,February 1998,P.241-246.
- [ 13 ] **SETTE DIOP** : « Elimination in control theory », Mth. Control Signals & Systems Springer verlag New York Inc ,Vol 4, P. 17-32,1991.

- [ 14 ] **ANDRZJ BARTOSZEWICZ** : « Integral sliding mode control with constraints » ,  
3<sup>rd</sup> Int.Symposium on methods and models in Automation and Robotics,10-13 Sept  
Miedzyzdroje , Poland,1996.
- [ 15 ] **HERBERT SIRA RAMIREZ** : « Structure at infinity, zero dynamics and normal  
forms of systems undergoing sliding motions ».Int.J.Systems Sci.,N°4,P.665-674,1990.
- [ 16 ] **HARRY G KWATNY & HANDOL KIM** : « Variable structure control of nonlinear  
multi-body dynamics », Dept of mechanical engineering and mechanics, Drexell University.
- [ 17 ] **F.HARASHIMA , T.UESHIBA , H.HASHIMOTO** : « Sliding mode control for  
robotic manipulator » , Proc of EPE Conf. Brussels, P.251-256,Oct1985.
- [ 18 ] **F.HARASHIMA , H.HASHIMOTO,K.MARUYAMA** : « Practical robust control of  
a robot arm using sliding mode control » , Proc of EPE Conf. On robotics and automation  
,San Fransisco, P.532-538,1986.
- [ 19 ] **HADJ MILOUD** : « Commande adaptative décentralisée par la méthode du  
backstepping : Application en robotique »,PFE de l'ENP,1998
- [ 20 ] **M.HAMERLAIN** : « Sliding mode control for a single link manipulator »,Revue  
internationale des technologies avancées,CDTA, N°6,Sep 1994.
- [ 21 ] **J.D.LANDAU** : « Identification et commande des systèmes »,Hermès, Paris,1988.
- [ 22 ] **J.P LALLEMAND & S.ZEGHLOUL** : « Robotique ,Aspects fondamentaux :  
Modélisation mécanique-CAO robotique-Commande »,Edition Masson,1994.
- [ 23 ] **H.KHURANA , SYED LAHSON & SURRINDER S.LAMBA** : « Variable structure  
control design for large-scale systems », IEEE Transactions on systems, man and cybernetics,  
Vol SMC-16, N°4, July/August 1986.