

6/02

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Ecole Nationale Polytechnique
Département de Génie Mécanique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Projet de Fin d'Etudes

Sujet

**Etude des écoulements transsoniques
le long des surfaces de courant S_1 et S_2
d'une turbomachine axiale**

Proposé par

Etudié par

Dirigé par

Mrs H. BENNOUR, A. BILEK

Mr. Mokhtar LIAMINI

Mrs H. BENNOUR, A. BILEK

Promotion
Juin 2002

E.N.P 10, avenue Hassen Badi – El Harrach - Alger

Remerciements

Je tiens, au début de ce mémoire, à remercier l'ensemble des enseignants et du personnel de l'Ecole Nationale Polytechnique pour les efforts qu'ils fournissent afin de former des ingénieurs.

Un remerciement particulier va à Mrs Bilek, Khelladi et Boudjemaa pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apporté dans l'accomplissement de ce travail.

Enfin, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Bennour qui m'a accordé beaucoup de son temps et de sa compétence pour mener à bien ce travail.

Résumé

Ce travail consiste à exposer la méthode générale de résolution d'un problème d'écoulement tridimensionnel dans une turbomachine axiale par sa décomposition en problèmes d'écoulements sur des familles de surfaces de courant désignées par S_1 et S_2 respectivement. Ainsi, la résolution du problème consistera à résoudre alternativement des problèmes d'écoulement sur des surfaces de courant rendant la formulation mathématique bidimensionnelle.

Nous effectuons ensuite le calcul des écoulements sur trois surfaces de courant S_1 de forme cylindrique.

Abstract

This work shows how a threedimensional flow problem in an axial turbomachine can be solved by the use of a combination of flows on relative stream surfaces named S_1 and S_2 respectively. The resolution will consist hence in solving the problems of flows on the relative stream surfaces by a mathematically bidimensional manner through an iterative process.

Then we calculate the flows on three S_1 cylindrical surfaces.

ملخص

يهدف العمل المقدم هنا إلى عرض طريقة لحل مسألة سيلان ثلاثي الأبعاد في آلة ضاغطة مثلا إثر استعمال تركيب عائلات سطوح مدعوة S_1 و S_2 . بهذه الطريقة تبسط المسألة الثلاثية الأبعاد إلى سلسلة من المسائل الثنائية الأبعاد. نقوم بعد ذلك بحل مسائل سيلانات فوق ثلاثة سطوح S_1 ذات شكل أسطواني.

Mots clefs : écoulement, turbomachine, quasi-tridimensionnel, subsonique, incompressible, permanent.

Sommaire :

Page

Liste des figures

Nomenclature

Introduction

1

1. Théorie générale de l'écoulement d'un fluide non visqueux à travers une turbomachine	4
1.1 Equation de continuité	5
1.2 Equations du mouvement	5
1.3 Equation de l'énergie	6
1.4 Equations phénoménologiques	6
1.5 Elaboration du problème de l'écoulement à travers une turbomachine	7
1.6 Analyse d'un écoulement relatif, permanent et irrotationnel	
Approche tridimensionnelle	10
1.7 Approche quasi-tridimensionnelle du problème et formulation dans un repère relatif	13
1.7.1 Surface de courant de première espèce (S_1)	14
1.7.2 Surface de courant de seconde espèce (S_2)	15
1.7.3 Comment faire intervenir les surfaces de courant dans la modélisation mathématique du problème ?	18
2. Analyse de l'écoulement permanent sur les surfaces de courant de deuxième espèce (S_2)	19
2.1 Equations de continuité et du mouvement	20
2.2 Equation principale	23
2.2.1 Cas où $(V_{u,r})$ est donné	24
2.2.2 Cas où le rapport W_u/W_z est imposé	27
2.3 Procédure de résolution	28
2.3.1 Cas d'un problème direct	29
2.3.2 Cas d'un problème inverse	30
3. Analyse de l'écoulement permanent sur les surfaces de courant de première espèce (S_1)	31
3.1 Equations de continuité et du mouvement	32
3.2 Equation principale	36
3.3 Procédure de résolution	41
3.4 Ecoulement sur une surface de révolution	43
3.5 Ecoulement sur une surface cylindrique	45

4. Résolution du problème de l'écoulement permanent, incompressible et isentropique sur une surface de première espèce de forme cylindrique	47
4.1 Méthode de relaxation pour la résolution de l'équation (4.1)	49
4.2 Calcul des vitesses	51
4.3 Calcul de la température	53
4.4 Calcul du nombre de Mach	53
4.5 Processus de calcul	53
4.5.1 Critère de convergence	53
4.5.2 Organigramme de calcul	54
4.6 Profil de l'aube	55
4.7 Construction du maillage considéré	56
4.7.1 Détermination des pas de maillage et de la géométrie	58
4.7.2 Premier point et dernier point de tout segment parallèle à l'axe (oy)	59
4.7.3 Calcul des distances	60
4.8 Données du problème	61
4.8.1 Données concernant chaque surface	61
5. Résultats et commentaires	64
5.1 Commentaires sur les résultats obtenus	77
Conclusion	78
Bibliographie	80
Annexe	82

Liste des figures :

1- influence d'un nombre d'aubes fini sur la distribution des vitesses à travers une turbomachine	1
2- écoulements secondaires dans une pompe centrifuge	2
3- Tourbillons relatifs dans la théorie simplifiée des turbomachines	3
1.1- Représentation des surfaces S_1 et S_2	13
1.2- Surface de courant de 1 ^{ère} espèce (S_1)	14
1.3- Surface de courant de 2 ^{ème} espèce (S_2)	15
1.4- Surface $S_{2,m}$	16
1.5- Surfaces $S_{2,m}$ pour des turbines à gaz axiales	17
2.1- Bilan sur un élément de nappe pour une surface S_2	24
3.1- Bilan sur un élément de nappe pour une surface S_1	38
4.1- Schéma du domaine physique	48
4.2- Schéma général de maillage	49
4.3- Nouvelle notation	50
4.4- Schéma du profil d'aube	55
4.5- Représentation du domaine et du maillage effectué	57



Nomenclature :

t : temps

ρ : masse volumique

\vec{W} : vitesse relative

ω : vitesse de rotation

r : coordonnée radiale

φ : coordonnée angulaire par rapport à l'aube

z : coordonnée axiale

p : pression

u : énergie interne

c_p, c_v : chaleurs spécifiques à pression constant et à volume constant respectivement

\dot{Q} : puissance thermique

k : conductivité thermique

R : constante des gaz parfaits

T : température

h : enthalpie

γ : rapport des chaleurs spécifiques

s : entropie

\vec{V} : vitesse absolue

\vec{U} : vitesse d'entraînement

H : enthalpie totale

I : rothalpie

a : vitesse du son

Φ : potentiel des vitesses

INTRODUCTION

L'écoulement dans une turbomachine est extrêmement complexe pour plusieurs raisons. Il y a d'abord la viscosité du fluide qui est à l'origine des couches limites qui se développent au contact des surfaces des aubes, du moyeu et du carter et qui divisent l'écoulement en zones de caractéristiques différentes.

Ensuite, il y a la géométrie de l'écoulement à travers la turbomachine qui est fortement irrégulière, favorisant ainsi les décollements des couches limites, accompagnés par l'apparition de petits tourbillons dans différentes zones de la machine. Il y a aussi les jeux fonctionnels, notamment entre la tête des aubes mobiles et le carter, à travers lesquels le fluide s'écoule de l'intrados vers l'extrados, mû par le gradient de pression transversale existant entre les deux faces d'une aube mobile (figure 1).

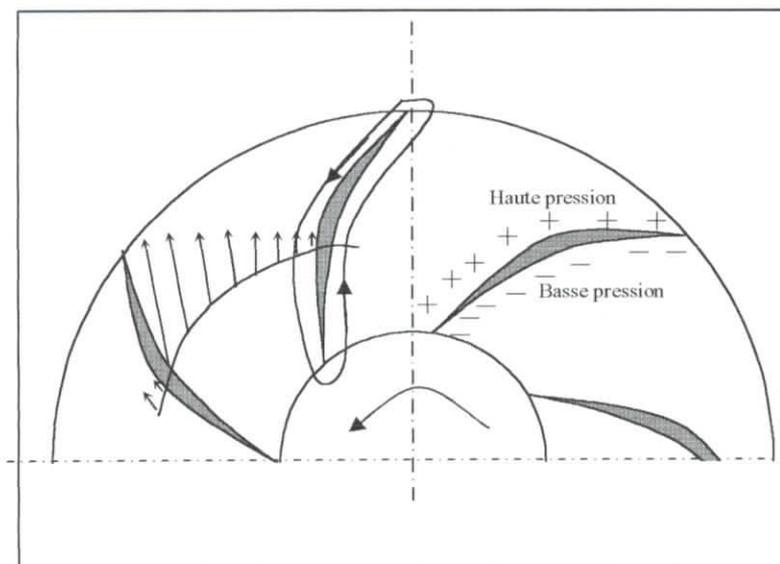


Figure 1 : influence d'un nombre d'aubes fini sur la distribution des vitesses à travers une turbomachine

Ces phénomènes et d'autres plus complexes encore, liés aussi bien au comportement dynamique et thermique de la machine qu'à la compressibilité du fluide, se traduisent par des écoulements localisés, à caractère permanent ou transitoire dits 'écoulements secondaires' (Figure 2).

La prise en compte complète de tous ces aspects dans une analyse quantitative est quasiment impossible. Aussi, il est d'usage de construire des modèles mathématiques simplifiés. Ces modèles ont un double objectif :

- une compréhension physique des mécanismes des écoulements,
- l'élaboration d'une technique de prédiction fondée sur une formulation analytique du problème.

Le modèle le plus simplifié est un modèle unidimensionnel, dont les fondements théoriques sont dus entre autres à Lorenz, Euler, Stodola, Stanitz, Busemann... Ce modèle tente, en quelque sorte, de définir un écoulement moyen à travers la turbomachine. Dans sa version la plus simplifiée, il suppose un nombre d'aubes infini et introduit des hypothèses qui rendent l'écoulement axisymétrique et ignore complètement l'existence des écoulements secondaires.

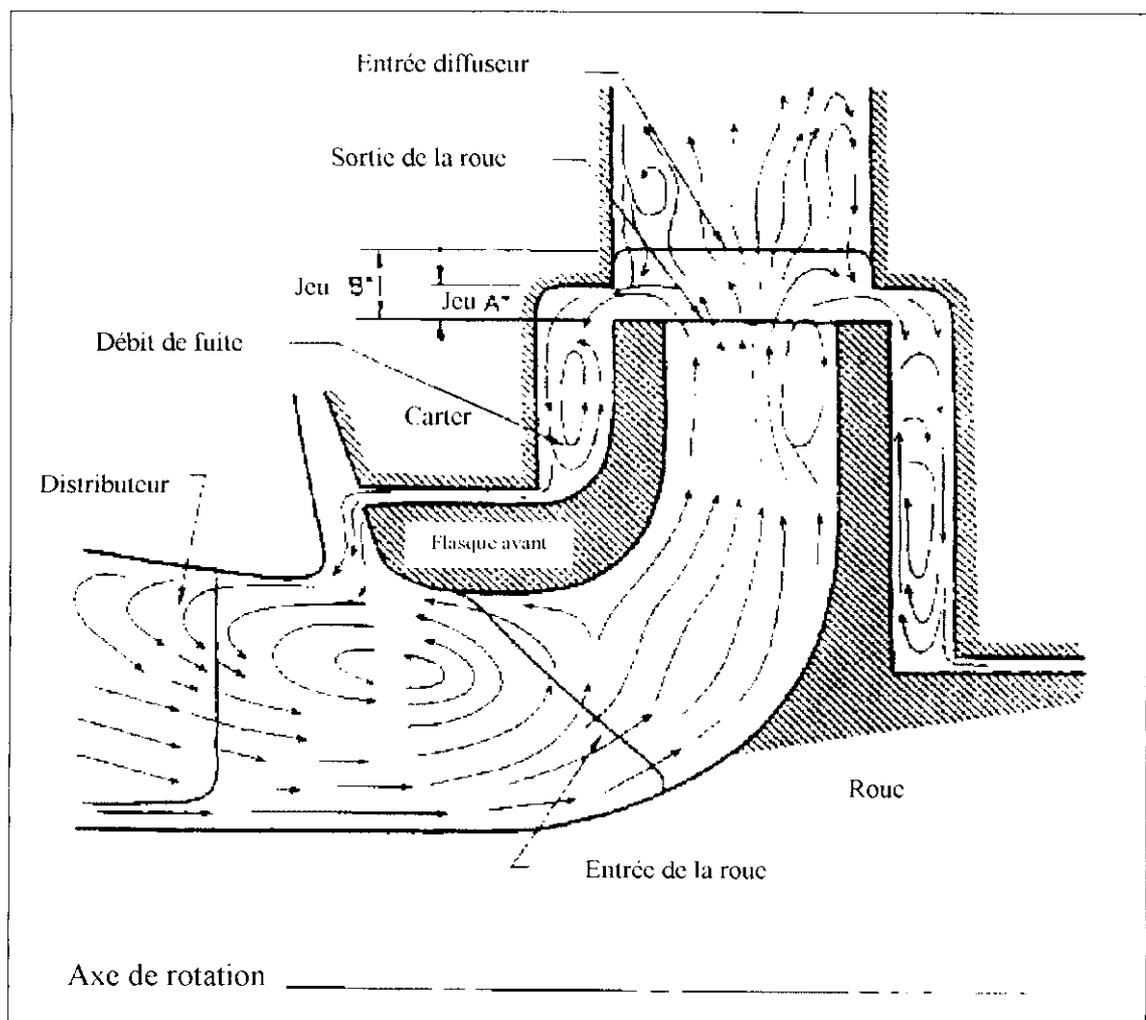


Figure 2 [1] : écoulements secondaires dans une pompe centrifuge

Ensuite, des corrections sont apportées progressivement pour tenir compte de l'existence d'un nombre d'aubes fini et d'une distribution non uniforme de la vitesse à travers le canal interaube qui est imputée à la superposition d'un écoulement uniforme qui traverse l'aube en entier et d'un écoulement secondaire qui ne fait que tourner à l'intérieur du canal interaube dans la direction opposée à la rotation de la machine (voir figures 1 et 3). De cette manière l'écoulement moyen est toujours vu comme un écoulement unidimensionnel représenté par un seul triangle de vitesse à l'entrée et un seul à la sortie.

Ce modèle s'avère insuffisant dès qu'il s'agit de s'intéresser à l'organe de transfert d'énergie qui est la roue. Le tracé de cette dernière, nécessite une connaissance précise du comportement du fluide dans le canal interaube. Pour les raisons invoquées précédemment, cette connaissance est tributaire de la construction de modèles mathématiques qui tiendraient compte de la nature foncièrement tridimensionnelle de l'écoulement et de ses aspects instationnaires.

Dans certains cas, l'utilisation de modèles bidimensionnels suffit à décrire avec une précision suffisante le comportement du fluide à travers la machine. C'est par exemple le cas dans les turbomachines axiales, lorsque le rapport du diamètre au pied de l'aube sur le diamètre à la tête est élevé ; car pour ces machines les composantes radiales des vitesses sont négligeables. Lorsque le rapport des diamètres est faible, les aubes devraient normalement présenter un degré de torsion appréciable suivant leur longueur ; dans ce cas les composantes

radiales des vitesses ne doivent plus être négligées et le modèle bidimensionnel ne peut plus raisonnablement représenter une approximation satisfaisante de l'écoulement à travers la machine.

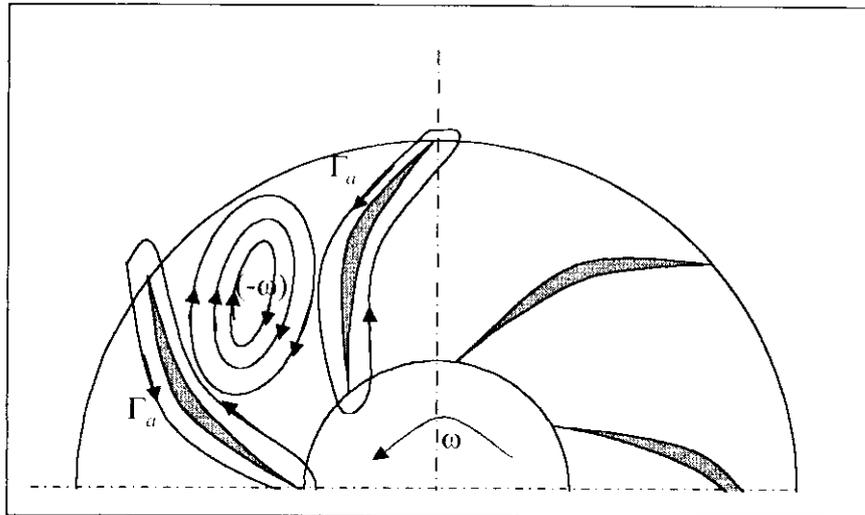


Figure 3 : tourbillons relatifs dans la théorie simplifiée des turbomachines

Le calcul précis d'une machine, seul garant d'une performance élevée, suppose une détermination de plus en plus fine de l'écoulement pour comprendre ce qui se produit en tout point et puis agir dans le sens d'une amélioration du comportement du fluide en faisant la chasse à toutes les causes locales de pertes. Un tel procédé ne peut reposer que sur un modèle de calcul tridimensionnel.

Cependant, la résolution d'un problème tridimensionnel est considérablement plus compliquée que celle d'un problème bidimensionnel. Le traitement des problèmes en 3D nécessite donc la disponibilité de moyens de calcul très puissants.

Certains auteurs, proposent de recourir à des méthodes quasi-tridimensionnelles pour tirer avantage à la fois de la précision des méthodes tridimensionnelles et de la simplicité relative des calculs en bidimensionnel. Ces modèles quasi-3D considèrent l'écoulement tridimensionnel comme une composition d'écoulements bidimensionnels suivant des surfaces de courant dont la combinaison permet de reconstituer le domaine de l'écoulement actuel.

L'objectif de cette étude est de présenter les fondements théoriques de l'une de ces approches quasi-3D ainsi que les techniques utilisées pour la résolution du problème. Cette approche est due à Chung-Hua Wu du « Lewis Flight Propulsion Laboratory » à Cleveland, Ohio.

L'écoulement d'un fluide non visqueux à travers une turbomachine est régi principalement par les lois fondamentales suivantes :

- L'équation de continuité qui découle directement du principe de conservation de la masse ;
- La loi fondamentale de la dynamique qui traduit la seconde loi de Newton ;
- L'équation de l'énergie qui représente le premier principe de la thermodynamique.

A ces trois principes fondamentaux s'ajoutent d'autres lois phénoménologiques telles que la loi décrivant le comportement thermodynamique du fluide, dite équation d'état et les lois régissant les transferts de chaleur au sein du fluide.

1.1. Equation de continuité.

L'équation de continuité s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{W}) = 0 \quad (1.1)$$

Ou encore :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} + \frac{D \ln \rho}{Dt} = 0 \quad (1.1a)$$

1.2. Equations du mouvement.

La seconde loi de Newton, écrite pour un fluide traversant une couronne d'aubes en rotation uniforme avec la vitesse (ω) autour de l'axe (OZ) donne :

$$\frac{D\vec{W}}{Dt} - \omega^2 \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{W} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (1.2)$$

avec :

$$\frac{D\vec{W}}{Dt} = \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + (\vec{W} \cdot \vec{\nabla}) \vec{W} = \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} W^2 - \vec{W} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{W})$$

En projection suivant les directions radiale, circonférentielle et axiale, l'équation (1.2) conduit au système suivant :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_r}{\partial t} + W_r \frac{\partial W_r}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{W_u^2}{r} - \omega^2 r - 2\omega W_u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial W_u}{\partial t} + W_r \frac{\partial W_u}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_u}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial W_u}{\partial z} + \frac{W_r W_u}{r} + 2\omega W_r &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial W_z}{\partial t} + W_r \frac{\partial W_z}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial W_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1.2 \text{ bis})$$

Ces équations sont dites « équations d'Euler ».

1.3. Equation de l'énergie.

L'équation de l'énergie est obtenue par application du premier principe de la thermodynamique au fluide, soit :

$$\frac{Du}{Dt} + p \frac{D(\rho^{-1})}{Dt} = \dot{Q} \quad (1.3)$$

Où le premier terme représente le taux de variation de l'énergie interne du fluide, le second terme, le travail résultant de la détente du fluide par unité de temps et \dot{Q} , la puissance thermique mise en jeu dans les échanges de chaleur au sein du fluide.

1.4. Equations phénoménologiques.

Dans le cas où seuls les transferts de chaleur par conduction sont considérés, la puissance thermique mise en jeu sera donnée par l'équation :

$$\dot{Q} = \rho^{-1} \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) \quad (1.4)$$

Si le fluide est assimilé à un gaz parfait, on peut introduire l'équation d'état :

$$p = \rho RT \quad (1.5)$$

et la loi de Joule qui traduit la dépendance de l'énergie interne de la seule température :

$$du = c_v dT \quad (1.6)$$

L'enthalpie et l'entropie sont aussi deux notions particulièrement utiles pour obtenir des combinaisons fécondes à partir des équations des lois fondamentales présentées ci-dessus.

L'enthalpie, définie par :

$$h = u + p/\rho \quad (1.7)$$

permet d'écrire dans le cas d'un gaz parfait, en tenant compte de l'équation d'état (1.5) et de la loi de Joule (1.6) :

$$dh = du + d\left(\frac{p}{\rho}\right) = c_v dT + R dT = c_p dT$$

Soit encore :

$$dh = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R dT \quad (1.8)$$

Où γ représente le rapport des chaleurs spécifiques $\left(\frac{c_p}{c_v}\right)$ qui, comme elles, dépend de la température.

En remarquant que l'entropie est définie par :

$$ds = \frac{\delta Q}{T}, \quad (1.9)$$

il est aisé d'utiliser l'équation d'énergie (1.3) pour écrire :

$$dh - \frac{dp}{\rho} + T ds \quad (1.10)$$

Cependant, dans le cas d'un fluide en mouvement, les notions d'enthalpie totale et de rothalpie (lorsqu'il y a mouvement de rotation) sont plus usitées.

V étant la vitesse absolue du fluide, W sa vitesse relative et U la vitesse d'entraînement (vitesse de l'aube), l'enthalpie totale sera donnée par :

$$H = h + \frac{1}{2} V^2 \quad (1.11)$$

et la rothalpie par :

$$I = h + \frac{1}{2} W^2 - \frac{1}{2} U^2 = H - \omega(V_u r) \quad (1.12)$$

Où V_u représente la projection de la vitesse absolue V sur la direction tangentielle à la circonférence de rayon r .

En combinant les équations (1.5), (1.8) et (1.10), on peut écrire :

$$d\left(\frac{s}{R}\right) = \frac{\gamma}{\gamma-1} d \ln T - d \ln p \quad (1.13)$$

Soit encore en remplaçant (T) par $\left(\frac{p}{\rho R}\right)$:

$$d\left(\frac{s}{R}\right) = \frac{1}{\gamma-1} d \ln p - \frac{\gamma}{\gamma-1} d \ln \rho \quad (1.13a)$$

ou encore en remplaçant (p) par (RρT) :

$$d\left(\frac{s}{R}\right) = \frac{1}{\gamma-1} d \ln T - d \ln \rho \quad (1.13b)$$

1.5. Elaboration du problème de l'écoulement à travers une turbomachine.

Dans ce paragraphe, les équations présentées ci-dessus seront combinées entre elles de manière à nous permettre de poser le problème dans une forme mathématique qui se prête aux méthodes de résolution numérique habituelles.

En utilisant l'équation (1.13b), on peut mettre l'équation de continuité (1.1a) sous la forme :

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{W} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{D \ln T}{Dt} - \frac{D}{Dt} \left(\frac{s}{R}\right) = 0 \quad (1.14)$$

Rappelons ici que la vitesse du son dans un milieu élastique pour des perturbations de faibles amplitudes est donnée par :

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \quad (1.15)$$

Si le milieu est un gaz parfait, on a pour s-cte :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = cte \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \gamma \left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma RT$$

D'où :

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (1.15a)$$

Reprenons l'équation (1.10), divisons par (RT) et réarrangeons, on obtient après introduction de la vitesse du son :

$$d \ln \rho = \frac{dh}{a^2} - d\left(\frac{s}{R}\right) \quad (1.10a)$$

et l'équation de continuité (1.1a) pourrait se mettre sous la forme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} + \frac{1}{a^2} \frac{Dh}{Dt} - \frac{D}{Dt} \left(\frac{s}{R} \right) = 0 \quad (1.14a)$$

Appliquons l'opérateur ($\vec{\nabla}$) à l'équation (1.12) combinée à l'équation (1.10), on obtient :

$$\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{1}{2} \vec{\nabla} W^2 - \omega^2 \vec{r} = \vec{\nabla} I - T \vec{\nabla} s$$

L'équation (1.2) peut se mettre à présent sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} - \vec{W} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{W}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{W} = -\vec{\nabla} I + T \vec{\nabla} s \quad (1.16)$$

Dans le cas où $\vec{\omega}$ est porté par l'axe (OZ), on pourrait exprimer l'équation (1.16) en fonction de la vorticité.

Les vecteurs vitesses sont liés par l'équation :

$$\vec{V} = \vec{W} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Calculons le rotationnel de la vitesse absolue. En remarquant que le double produit vectoriel :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{r} + \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{r}) - \vec{r} (\nabla \cdot \vec{\omega}) = 2\vec{\omega}$$

on obtient :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{W} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} - 2\vec{\omega}$$

En portant cette expression dans l'équation (1.16), on obtient :

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} - \vec{W} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = -\vec{\nabla} I + T \vec{\nabla} s \quad (1.16a)$$

Une autre façon de combiner les équations aérodynamiques des paragraphes précédents est la suivante :

L'équation (1.10) se prête aisément aux manipulations suivantes :

$$\frac{Dh}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{W} \cdot \vec{\nabla}) p \right]$$

En opérant avec la dérivation particulière sur l'équation (1.12) et en y portant l'expression ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned} \frac{DI}{Dt} &= T \frac{Ds}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} (\vec{W} \cdot \vec{\nabla}) p + \vec{W} \cdot \frac{D\vec{W}}{Dt} - \vec{U} \frac{D\vec{U}}{Dt} \\ &= T \frac{Ds}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{W} \cdot \left[\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{D\vec{W}}{Dt} \right] - \vec{U} \frac{D\vec{U}}{Dt} \end{aligned}$$

Soit en faisant usage de l'équation du mouvement (1.2) pour le terme entre crochets :

$$\frac{DI}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{W} \cdot (\omega^2 \vec{r} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{W}) - \vec{U} \frac{D\vec{U}}{Dt} \quad (1.17)$$

mais on a :

$$\vec{U} \frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{U} \cdot \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{W} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} \right] = \vec{U} \cdot \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \vec{U} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 0 \\ r\omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r\omega \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\omega^2 \\ \omega \frac{\partial r}{\partial t} \\ 0 \end{pmatrix} = r\omega^2 \frac{\partial r}{\partial t} = r\omega^2 W_r$$

par ailleurs on a :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} W_r \\ W_\varphi \\ W_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega W_\varphi \\ \omega W_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

et par suite :

$$\vec{W}(\vec{\omega} \wedge \vec{W}) = -\omega W_r W_\varphi + \omega W_\varphi W_r = 0$$

D'où :

$$\vec{W}(\omega^2 \vec{r} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{W}) = \omega^2(\vec{W} \cdot \vec{r}) - 2\vec{W} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{W}) = \omega^2(\vec{W} \cdot \vec{r}) = r\omega^2 W_r$$

Finalement les deux derniers termes de l'équation (1.17) se neutralisent et on obtient :

$$\frac{DI}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.17a)$$

avec :

$$Q = T \frac{Ds}{Dt} \quad (1.18)$$

On voit d'après cette équation que, pour un écoulement relatif stationnaire, le taux de variation de la rothalpie le long d'une ligne de courant est proportionnel au taux de variation d'entropie le long de la même ligne de courant.

Si les rangées d'aubes ne sont pas trop resserrées entre elles de sorte que la traînée de tourbillons résultant de la rangée d'aubes précédentes s'évanouisse avant de parvenir à la rangée suivante (ou bien si les effets de cette traînée peuvent être simplement négligés), les propriétés du fluide en un point fixe relativement à l'aube peuvent être considérées constantes dans le temps ; et par suite, d'après l'équation (1.17a), l'entropie (s) et la rothalpie (I) du gaz restent constantes le long d'une ligne de courant pour un écoulement adiabatique.

L'invariance de (I) signifie que le taux de variation de l'enthalpie totale (H) le long d'une ligne de courant sera égal au produit de la vitesse de rotation de l'aube (ω) par le taux de variation du moment cinétique de la particule fluide le long de sa ligne de courant, par rapport à l'axe de la machine. Ce résultat, bien connu dans la théorie simplifiée des turbomachines sous la dénomination de « théorème d'Euler », est habituellement obtenu sous des conditions moins générales.

Dans une turbine refroidie, où les flux de chaleur mis en jeu peuvent être importants, les taux de variation de l'entropie et de la rothalpie le long d'une ligne de courant peuvent être obtenus en résolvant conjointement les équations (1.17a) et (1.18) pour une valeur estimée de \dot{Q} .

Par ailleurs, pour un écoulement relatif stationnaire, l'équation (1.16a) montre que lorsque les gradients de la rothalpie et de l'entropie sont nuls ou lorsque la différence $(\vec{\nabla}I - T\vec{\nabla}s)$ est nulle, la vorticité absolue sera soit nulle soit parallèle à la vitesse relative.

Dans le cas d'un écoulement à travers une rangée d'aubes fixes, $\omega=0$, (\vec{W}) devient (\vec{V}) , (I) devient (H) ; et l'équation (1.16a) devient :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = -\vec{\nabla}H + T\vec{\nabla}s \quad (1.16b)$$

Il est intéressant de remarquer que lorsqu'on passe d'un écoulement absolu à travers des aubes fixes à un écoulement relatif à travers des aubes mobiles, $(\vec{V} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}))$ devient $(\vec{W} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}))$ et (H) devient (I).

Si l'on suppose que le fluide attaque les vanes de guidage (distributeur)   l'entrée d'une turbomachine avec une enthalpie totale (H) et une entropie (s) uniformes et une vorticité nulle et si, en plus, l'écoulement est adiabatique, alors (s) ne doit pas varier à travers les vanes de guidage et par conséquent, d'après l'équation (1.13a), la pression (p) ne sera fonction que de

la masse volumique (ρ). Dans ces conditions, la vorticité absolue restera nulle tout au long des vanes de guidage et l'écoulement y sera irrotationnel.

Si les vanes de guidage impriment à l'écoulement aval une distribution de la composante tangentielle de la vitesse suivant un plan (z) identique à celle d'un vortex potentiel, où la vitesse est inversement proportionnelle au rayon, alors la circulation sera constante le long de l'envergure de l'aube et le fluide va maintenir une distribution uniforme de l'entropie et de l'enthalpie totale, de plus l'écoulement absolu à l'entrée de la rangée d'aubes mobiles suivante présentera une vorticité nulle. Si la rangée d'aubes mobiles est disposée loin des vanes de guidage, le fluide attaquera le rotor avec une rothalpie uniforme aussi bien dans la direction circonférentielle que dans la direction radiale, et l'écoulement à travers les aubes rotoriques pourra être traité sur la base d'une vorticité absolue nulle et étudié comme un écoulement relatif stationnaire. Si le rotor est trop rapproché des vanes de guidage il sera attaqué par un écoulement non encore débarrassé de la traînée de tourbillons qui prend naissance sur le bord de fuite des aubes fixes, à cause d'une variation périodique de la circulation due à l'instationnarité de l'écoulement. Dans ces conditions l'approche théorique doit considérer l'écoulement en aval du stator et à travers le rotor comme irrotationnel.

Si la distribution de la composante tangentielle de la vitesse en aval des vanes de guidage ne correspond pas à celle d'un vortex potentiel, alors la circulation sera variable le long de l'envergure des vanes de guidage, des vortex se détachent du bord de fuite et sont entraînés par l'écoulement aval dans la direction de la vitesse de sortie, et le fluide attaque les aubes rotoriques avec une distribution uniforme d'entropie et d'enthalpie totale, mais une distribution non uniforme de la rothalpie et une vorticité absolue non nulle. En conséquence, l'écoulement à travers les aubes rotoriques ne peut plus être traité sur la base d'une vorticité absolue égale à zéro, même dans le cas où elles sont suffisamment éloignées de la rangée des vanes de guidage.

Ainsi, les considérations ci-dessus montrent qu'à côté des composantes de la vitesse du gaz, son entropie (s) et son enthalpie totale (H), ou sa rothalpie (I), s'imposent en tant que variables thermodynamiques fondamentales pour toute analyse de l'écoulement du gaz à travers une turbomachine.

Les rotors des turbines et des compresseurs sont habituellement conçus de telle sorte que l'échange d'énergie entre la roue et le gaz soit uniforme suivant la direction radiale; c'est pourquoi l'enthalpie totale (H) est en général constante suivant le rayon à travers toute la machine si l'écoulement à l'entrée est uniforme (sauf au niveau de la couche limite le long des parois au moyeu et au carter). Si la vitesse circonférentielle du gaz en amont de la rangée d'aubes est nulle ou si elle est inversement proportionnelle au rayon, (I) sera alors constante dans toute la machine.

1.6. Analyse d'un écoulement relatif, permanent et irrotationnel. Approche tridimensionnelle.

Cette analyse concerne un écoulement de gaz parfait vérifiant les conditions suivantes :

- L'analyse sera faite dans un repère relatif lié au rotor ;
- L'écoulement dans le repère relatif sera considéré comme permanent ;
- L'écoulement en amont de la rangée d'aubes mobiles est irrotationnel et les distributions d'entropie et de rothalpie sont uniformes.
- L'écoulement est adiabatique à travers le rotor.

On en déduit d'après ce qui précède que l'écoulement à travers la rangée d'aubes mobiles sera lui aussi irrotationnel, c'est-à-dire qu'il pourra être étudié comme un écoulement à potentiel de vitesse. Rappelons ici, que pour un tel écoulement, le potentiel est une fonction qui vérifie les conditions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= V_r = W_r \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= V_u = W_u + \omega r \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= V_z = W_z \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Dans ce cas l'équation de continuité (1.14a) explicitée donne :

$$\frac{1}{r} \frac{d(W_r)}{dr} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_u}{\partial \varphi} + \frac{\partial W_z}{\partial z} + \frac{1}{a^2} \left(W_r \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.20)$$

D'après l'équation (1.12) on a :

$$h = I + \frac{1}{2} U^2 - \frac{1}{2} (W_r^2 + W_u^2 + W_z^2)$$

En tenant compte des relations (1.19) et en remplaçant U par $r\omega$, on obtient :

$$h = I + \omega \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (1.21)$$

En dérivant cette équation par rapport aux trois coordonnées r, φ et z et en tenant compte des relations (1.19), on obtient

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r} &= - \left(W_r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{V_u^2}{r} + W_z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi} &= - \left(\frac{W_r}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{W_u}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{W_z}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial z} \right) \\ \frac{\partial h}{\partial z} &= - \left(W_r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial z} + W_z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

L'équation (1.14a) s'écrit dans le cas d'un écoulement permanent et isentropique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} + \frac{1}{a^2} (\vec{W} \cdot \vec{\nabla} h) = 0$$

Soit encore en effectuant les produits scalaires et en réarrangeant :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{W_r^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \left(1 - \frac{W_u^2}{a^2} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \left(1 - \frac{W_z^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2 \frac{W_r W_u}{a^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} \\ - 2 \frac{W_u W_z}{a^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial z} - 2 \frac{W_z W_r}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{V_u^2}{a^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Cette équation est celle d'un écoulement potentiel, isentropique et tridimensionnel à travers une rangée d'aubes en rotation.

L'équation (1.23) est très ressemblante à l'équation d'un écoulement potentiel tridimensionnel autour d'obstacles fixes, sauf que dans cette équation, on retrouve les composantes de la vitesse relative et celles de la vitesse absolue dans les coefficients des dérivées de la fonction potentielle « Φ » et que « Φ » est directement définie par la vitesse absolue.

La difficulté de résoudre cette équation tient au fait que toutes les composantes de la vitesse changent considérablement en traversant une turbomachine de sorte que la solution obtenue après linéarisation de l'équation ne peut plus représenter une bonne approximation de la situation réelle de l'écoulement.

Pour des vitesses relatives supersoniques, l'équation (1.23) peut être résolue par la méthode des surfaces caractéristiques. Pour un écoulement relatif subsonique, il serait plus commode d'écrire l'équation sous une forme différente qui résulte directement de l'équation de continuité (1.1a) :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + W_r \frac{\partial \ln \rho}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial \ln \rho}{\partial z} = 0 \quad (1.23a)$$

Cette équation peut être résolue par la méthode de relaxation et par d'autres méthodes numériques. Les trois derniers termes de l'équation sont calculés en utilisant les valeurs de Φ obtenues à l'itération (i-1) et sont considérés comme constants à l'itération (i). Le processus itératif est poussé jusqu'à ce que le test de précision soit satisfait.

En fait, une fonction de courant tridimensionnelle ne peut pas être définie et l'utilisation du potentiel de vitesse conduit dans ce cas à un problème de seconde espèce concernant la valeur de la fonction de courant sur les parois, problème qui rend très difficile la conduite des calculs [2]. La condition aux limites à satisfaire est que la vitesse relative doit être nulle dans la direction normale à l'aube mobile, condition qu'on peut traduire par l'équation :

$$\vec{W} \cdot \vec{n} = 0 \quad (1.24)$$

Où \vec{n} est la normale principale à la surface.

Il faut aussi qu'à l'entrée et à la sortie, suffisamment loin des aubes, la vitesse soit parallèle aux parois limites côté moyeu et côté carter ; condition qui peut être traduite dans le cas d'une turbomachine axiale par :

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \text{ à } z = \pm \infty \quad (1.24a)$$

Aussi bien dans le cas subsonique que dans le cas supersonique, la solution exige un temps extrêmement important. Par ailleurs, une telle approche directe du problème tridimensionnel, nécessite que la vitesse absolue à l'entrée de la rangée d'aubes soit irrotationnelle et que l'écoulement soit isentropique. Cependant dans les turbomachines, l'écoulement à l'entrée d'une rangée d'aubes est toujours rotationnel, suite à une distribution non uniforme de l'enthalpie totale et de l'entropie à l'entrée de la machine, à la production d'entropie par les ondes de choc ou à sa variation due au transfert de chaleur, ou enfin à cause des effets de la couche limite le long du moyeu et du carter.

Une autre approche du problème, à la fois plus facile à mettre en œuvre et applicable dans le cas d'un écoulement rotationnel à l'entrée est donc recherchée. Une telle approche nous est suggérée par Chung-Hua Wu [2].

1.7. Approche quasi-tridimensionnelle du problème et formulation dans un repère relatif.

Dans le but de résoudre le problème de l'écoulement permanent tridimensionnel de manière relativement simple, aussi bien dans le cas où l'écoulement absolu en amont de la rangée d'aubes est irrotationnel que dans le cas où il est rotationnel, il est possible d'adopter une approche qui permettra d'obtenir la solution du problème tridimensionnel par une combinaison judicieuse d'écoulements bidimensionnels, d'un point de vue mathématique, le long de deux familles de surfaces de courant relatives.

Pour identifier les deux espèces de surfaces de courant considérées ici, disons d'abord qu'une surface de courant de première espèce est une surface dont l'intersection avec un plan perpendiculaire à l'axe (oz) de la machine, aussi bien en amont de la rangée d'aubes que quelque part à l'intérieur de cette rangée, donne un arc de cercle. Tandis qu'une surface de courant de seconde espèce est une surface dont l'intersection avec un même plan perpendiculaire à l'axe (oz) donne une droite suivant le rayon. Ces deux espèces de surfaces relatives seront désignées dans la suite de la présente étude par S_1 et S_2 respectivement (figure 1.1).

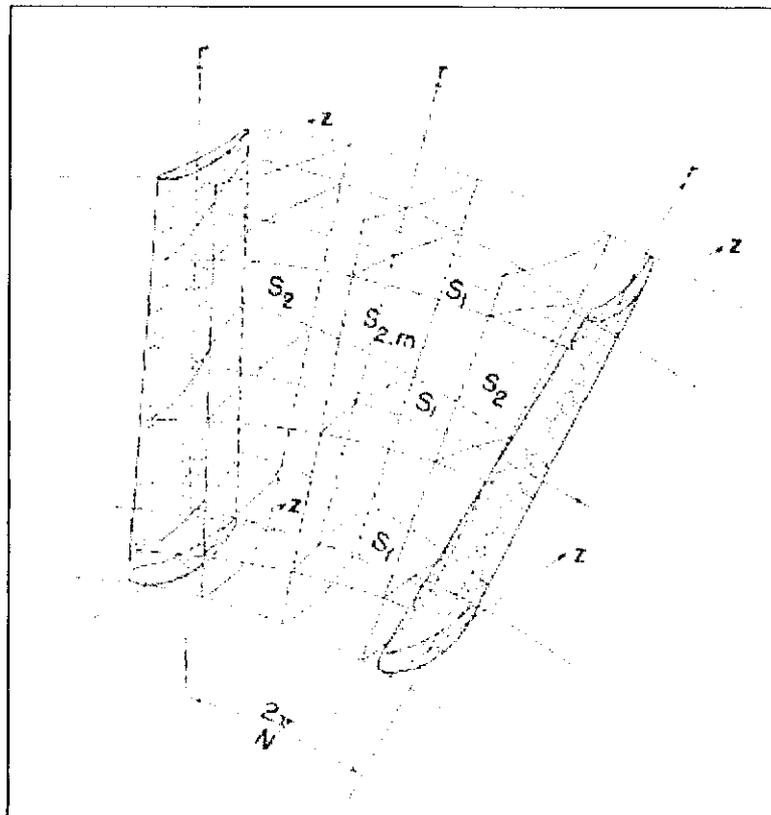


Figure 1.1 [2]: représentation des surfaces S_1 et S_2

1.7.1. Surface de courant de première espèce (S_1).

Sur la figure (1.2), on voit une surface de courant de première espèce (S_1). Cette surface est générée par l'écoulement à travers la rangée d'aubes, de particules fluides qui, à un instant donné, formaient un arc de cercle (ab) de rayon (oa) en amont de la rangée d'aubes. Habituellement, dans l'analyse ordinaire des écoulements bidimensionnels, il est supposé que les surfaces de courant ainsi formées sont des surfaces de révolution.

Dans ce qui suit, nous allons considérer que la surface pourrait prendre n'importe quelle forme qu'elle devrait pour satisfaire toutes les équations qui gouvernent l'écoulement tridimensionnel. Cependant, il est utile de noter que dans la majorité des cas, la forme des surfaces n'est pas très différente d'une surface de révolution.

Si l'écoulement absolu à l'entrée est fortement irrotationnel, si les aubes sont dessinées pour un diagramme des vitesses très différent du type à vortex libre, ou bien si la longueur des aubes est importante dans la direction de l'écoulement moyen (comme c'est le cas dans les machines à écoulement radial et dans les machines à écoulement mixte), la surface S_1 pourrait présenter une torsion assez importante, produisant des dérivées circonférentielles très élevées.

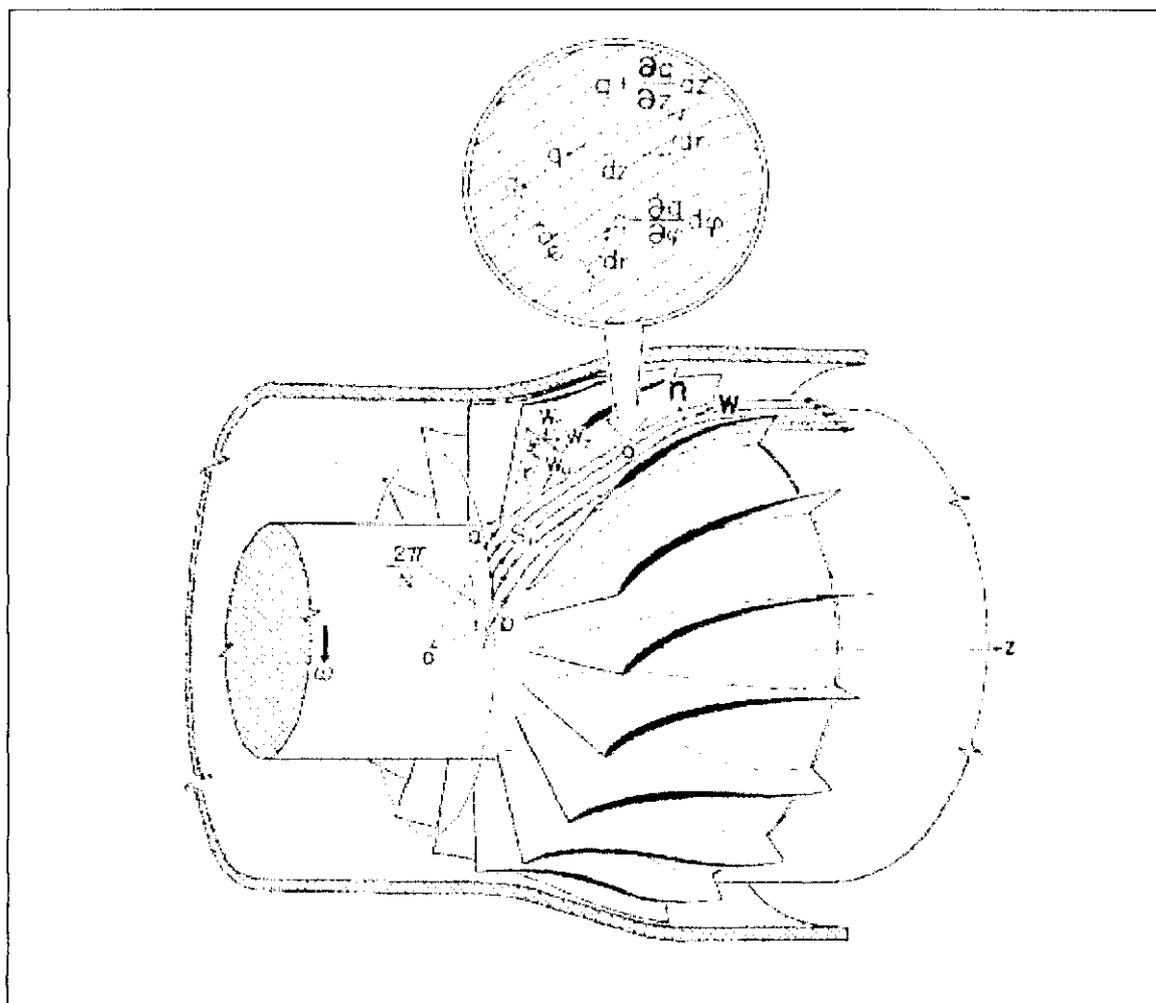


Figure 1.2 [2] : surface de courant de 1^{ère} espèce (S_1)

Si un tel effet se manifeste lors des calculs ou si l'on sait d'expérience qu'il sera présent, il serait plus satisfaisant de considérer les surface S_1 comme étant générées par des particules

fluides, à l'origine disposées sur des courbes inclinées, au niveau de l'arc de cercle amont, dans la direction opposée à la torsion de la surface. Dans ces circonstances, l'intersection de la surface S_1 avec un plan (z) au milieu de la rangée d'aubes donne quasiment un arc de cercle, et la torsion totale de la surface sera également distribuée sur les directions amont et aval de l'écoulement (voir figure 1.1).

Si cette manière de distribuer la torsion de la surface de courant s'avère insuffisante pour la satisfaction des équations de l'écoulement, alors il pourrait être nécessaire de diviser le parcours complet du fluide à travers la rangée d'aubes en un certain nombre de parcours plus petits et de considérer une surface (S_1) pour chacun d'eux. Dans ces conditions, les surfaces S_1 générées par des particules fluides qui collaient à l'origine au moyeu et au carter, en amont de la rangée d'aubes, ne doivent pas être choisies afin d'éviter toute complication résultant de la possibilité que des particules puissent quitter la paroi du moyeu et du carter pour venir s'écouler le long de la surface des aubes.

Dans ces cas, il est préférable de considérer des surfaces S_1 à une petite distance du moyeu et du carter. Sinon, pour une solution approximative, on peut considérer que le fluide suit les parois du moyeu et du carter, qui forment des surfaces de révolution, rendant ainsi les calculs beaucoup plus aisés que dans le cas de surfaces de forme générale.

1.7.2. Surface de courant de seconde espèce (S_2).

Sur la figure (1.3), on voit une surface de courant de seconde espèce (S_2). La plus représentative et la plus importante des surfaces appartenant à cette famille est la surface médiane entre deux aubes, cette surface est médiane dans le sens qu'elle partage le débit massique à travers le canal interaube en deux parties approximativement égales.

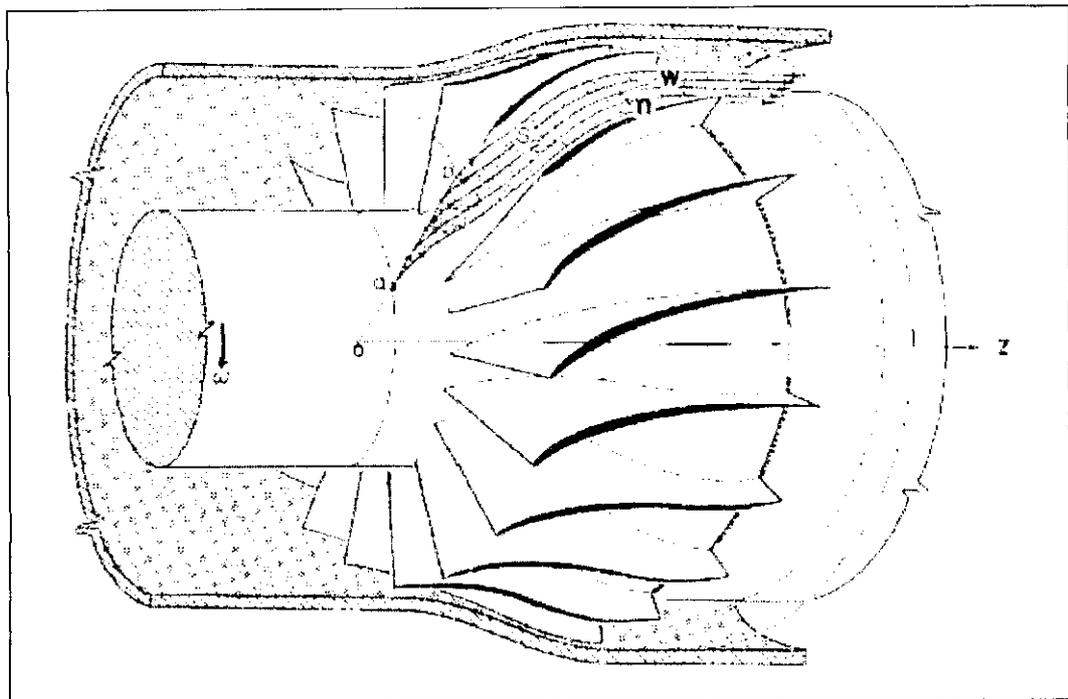


Figure 1.3 [2] : surface de courant de 2^{ème} espèce (S_2)

Cette surface, représentée sur la figure (1.4) ci-après, est désignée par ($S_{2,m}$), surface de courant moyenne. Pour des aubes à éléments radiaux, comme c'est le cas figure (1.3), il

convient de considérer une surface de courant moyenne générée par des particules occupant à un instant donné une ligne radiale (ab) en amont de la rangée d'aubes, si l'on ne s'attend pas à une torsion trop prononcée de la surface de courant. Autrement, la ligne radiale sera choisie au milieu du canal interaube tandis qu'en amont les particules qui décrivent la surface de courant commencent par une ligne courbe.

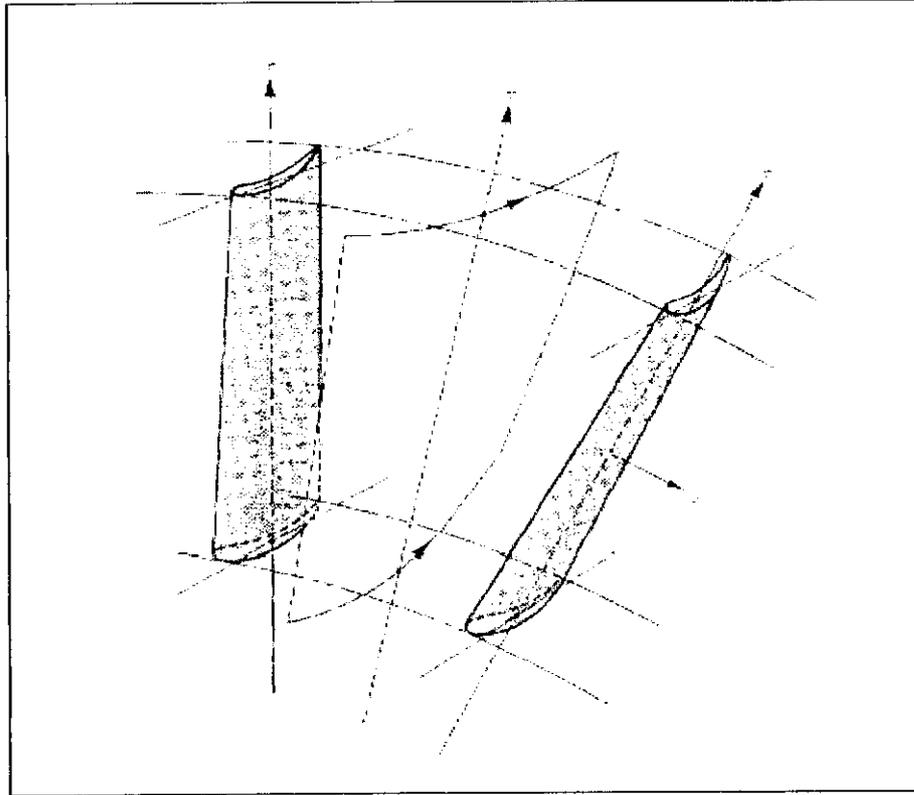


Figure 1.4 [2] : surface $S_{2,m}$

Sur la figure (1.5), on a représenté des surfaces de courant moyennes pour des turbines à gaz à écoulement axial dont les aubes sont dessinées sur la base d'un diagramme de vitesses à vortex libre. On notera sur cette figure que l'élément radial de la surface de courant moyenne, dans le cas du stator, sera choisi selon que les sections des aubes sont alignées radialement au niveau du bord d'attaque, du bord de fuite ou bien quelque part entre les deux. Quant au rotor, étant donné que l'alignement radial des sections d'aubes a lieu toujours au voisinage du centre de gravité des sections, la position radiale de la surface de courant moyenne sera choisie au même endroit.

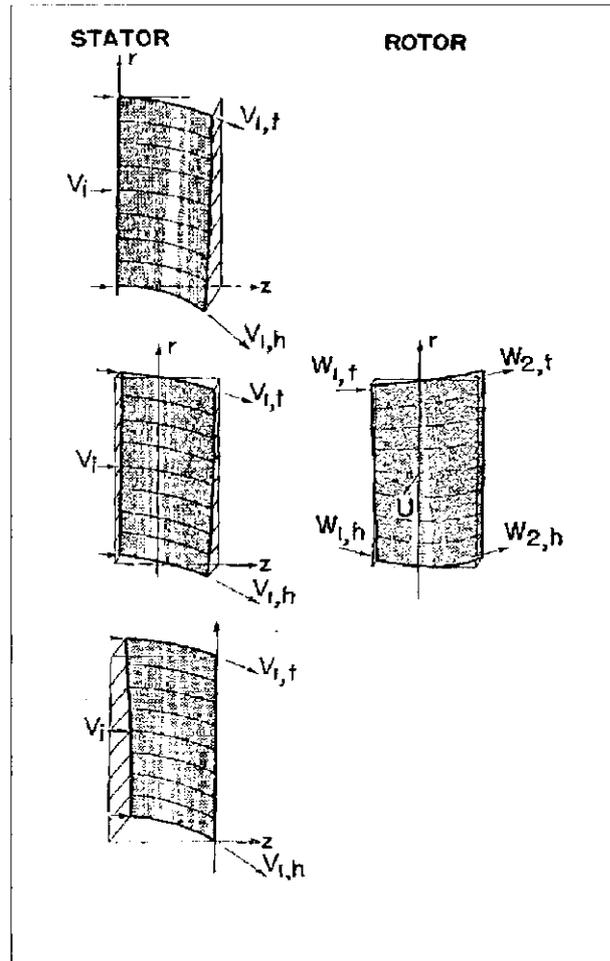


Figure 1.5 [2] : surfaces $S_{2,m}$ pour des turbines à gaz axiales

1.7.3. Comment faire intervenir les surfaces de courant dans la modélisation mathématique du problème ?

L'équation des surfaces de courant et ses dérivées sont liées par les relations suivantes :

$$S(r,\varphi,z)=0 \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} dr + \frac{\partial S}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial S}{\partial z} dz = 0 \quad (1.26)$$

Plutôt que d'utiliser les trois dérivées partielles de S par rapport aux coordonnées r, φ et z, on préfère introduire le vecteur unitaire \vec{n} normal à la surface de courant et lié à S par la relation suivante :

$$\frac{n_r}{\frac{\partial S}{\partial r}} = \frac{n_\varphi}{\frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \varphi}} = \frac{n_z}{\frac{\partial S}{\partial z}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2}} \quad (1.27)$$

Le vecteur \vec{n} est perpendiculaire à la vitesse relative \vec{W} , donc :

$$\vec{n} \cdot \vec{W} = 0$$

Soit encore en effectuant le produit scalaire :

$$n_r W_r + n_\varphi W_\varphi + n_z W_z = 0 \quad (1.28)$$

En utilisant l'équation (1.27), on peut réécrire l'équation (1.26) sous la forme :

$$n_r dr + n_\varphi r d\varphi + n_z dz = 0 \quad (1.26a)$$

Les vecteurs \vec{n} et \vec{W} dans les cas des surfaces S_1 et S_2 sont représentés sur les figures (1.2) et (1.3).

Nous verrons dans le chapitre suivant que le calcul de l'écoulement sur une surface de première espèce (S_1) pourrait se faire en exploitant des données obtenues à partir du calcul de l'écoulement sur des surfaces de courant de seconde espèce (S_2).

Les équations (1.25) à (1.28) sont applicables aussi bien aux surfaces de première espèce qu'aux surfaces de seconde espèce, elles seront utilisées ci-dessous pour éliminer la variable (φ) de sorte que chaque paramètre (q) sur la surface S_2 puisse être exprimé comme une fonction des coordonnées (r) et (z) uniquement :

$$q = q[r, \varphi(r, z), z]$$

La variation de la grandeur (q) le long d'une surface S_2 suite à une variation élémentaire de (r) pour une valeur de (z) maintenue constante, sera calculée comme suit :

$$dq = \frac{\partial q}{\partial r} dr + \frac{\partial q}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr$$

mais de l'équation (1.26a), on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{n_r}{m_u}$$

et l'équation précédente devient :

$$dq = \left(\frac{\partial q}{\partial r} - \frac{n_r}{m_u} \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right) dr$$

De même, on obtient pour (r) constant et (z) variable, le long d'une surface S_2 :

$$dq = \left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{n_z}{m_u} \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right) dz$$

En utilisant le symbole ($\bar{\partial}$) pour désigner les dérivées d'une grandeur (q) suivant une surface S_2 , on peut écrire à partir des relations précédentes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{\partial} q}{\partial r} &= \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{n_r}{m_u} \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial \varphi} \\ \frac{\bar{\partial} q}{\partial z} &= \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{n_z}{m_u} \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Le long d'une ligne de courant appartenant à une surface S_2 , la dérivée particulière en régime permanent de (q) est donnée par :

$$\frac{Dq}{Dt} = W_r \frac{\bar{\partial} q}{\partial r} + W_z \frac{\bar{\partial} q}{\partial z} \quad (2.2)$$

2.1. Equations de continuité et du mouvement.

Pour un écoulement permanent le long d'une surface de seconde espèce S_2 , l'équation de continuité (1.1) s'écrira en tenant compte des relations (2.1) et de l'équation (1.28) :

$$\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}(\rho r W_r)}{\partial r} + \frac{\bar{\partial}(\rho W_z)}{\partial z} = \rho C(r, z) \quad (2.3)$$

avec :

$$C(r, z) = -\frac{1}{n_u r} \left(\frac{n_r}{r} \frac{\partial r W_r}{\partial \varphi} + n_u \frac{\partial W_u}{\partial \varphi} + n_z \frac{\partial W_z}{\partial \varphi} \right) \quad (2.4)$$

La projection de l'équation du mouvement (1.16) sur les directions axiale, radiale et azimutale donne :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{W_u}{r} \left[\frac{\partial(V_u r)}{\partial r} - \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} \right] + W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial s}{\partial r} \\ \frac{W_r}{r} \left[\frac{\partial(V_u r)}{\partial r} - \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} \right] - W_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial W_u}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \varphi} + \frac{T}{r} \frac{\partial s}{\partial \varphi} \\ -W_r \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) + W_u \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial W_u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial I}{\partial z} + T \frac{\partial s}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

avec $V_u = W_u + r\omega$.

$$\text{Posons } \vec{f} = -\frac{1}{n_u r} \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi} - T \frac{\partial s}{\partial \varphi} \right) \vec{n} = -\frac{1}{n_u r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \vec{n} \quad (2.6)$$

Pour écrire l'équation (2.5a), par exemple, en termes de dérivées spéciales par rapport à (r) et à (z), on utilise les transformations (2.1) pour obtenir :

$$\begin{aligned} -\frac{W_u}{r} \frac{\partial(V_u r)}{\partial r} + W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial s}{\partial r} - \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} + \frac{n_r}{n_u} \frac{W_u}{r^2} \frac{\partial(V_u r)}{\partial \varphi} \\ \frac{n_r}{n_u} \frac{W_z}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} + \frac{n_r}{n_u} \frac{W_z}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \varphi} - \frac{n_r}{n_u} \frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \varphi} + \frac{n_r}{n_u} \frac{T}{r} \frac{\partial s}{\partial \varphi} & \end{aligned}$$

On remplace maintenant la rothalpie (1) dans le terme $\left(\frac{\partial I}{\partial \varphi} \right)$ par son expression (1.12) en fonction de l'enthalpie et des vitesses pour obtenir :

$$\begin{aligned} -\frac{W_u}{r} \frac{\partial(V_u r)}{\partial r} + W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial s}{\partial r} + \\ & \underbrace{-\frac{n_r}{n_u r} \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi} - T \frac{\partial s}{\partial \varphi} \right)}_{= F_r} - \frac{1}{n_u} \underbrace{(n_u W_u + n_r W_r + n_z W_z)}_{= 0} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$-\frac{W_u}{r} \frac{\partial(V_u r)}{\partial r} + W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial s}{\partial r} + F_r$$

En procédant de même pour les équations (2.5b) et (2.5c) on obtient :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{W_u}{r} \frac{\partial(V_u r)}{\partial r} + W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial s}{\partial r} + F_r \\ \frac{W_r}{r} \frac{\partial(V_u r)}{\partial r} + \frac{W_z}{r} \frac{\partial(V_u r)}{\partial z} &= F_u \\ -W_r \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) - \frac{W_u}{r} \frac{\partial(V_u r)}{\partial z} &= -\frac{\partial I}{\partial z} + T \frac{\partial s}{\partial z} + F_z \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Si on utilise les équations du mouvement (1.2 bis), on obtient un résultat similaire mais faisant intervenir les dérivées de la pression (p) :

$$\left. \begin{aligned} W_r \frac{\partial W_r}{\partial r} + W_z \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{V_u^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_r \\ \frac{W_r}{r} \frac{\partial(V_u r)}{\partial r} + \frac{W_z}{r} \frac{\partial(V_u r)}{\partial z} &= F_u \\ W_z \frac{\partial W_z}{\partial z} + W_r \frac{\partial W_z}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_z \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Le vecteur \vec{F} est parallèle à \vec{n} , il est de ce fait normal à la surface S_2 , ses composantes vérifient donc la relation suivante :

$$F_r W_r + F_u W_u + F_z W_z = 0 \quad (2.9)$$

A présent, multiplions les trois équations (2.7) respectivement par W_r , W_u et W_z , puis additionnons les équations résultantes en tenant compte de l'équation (2.9) ; on obtient après simplification et réarrangement :

$$W_r \frac{\partial I}{\partial r} + W_z \frac{\partial I}{\partial z} = T \left(W_r \frac{\partial s}{\partial r} + W_z \frac{\partial s}{\partial z} \right)$$

Soit encore, en utilisant l'équation (2.2) :

$$\frac{DI}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} \quad (2.9a)$$

Notons que cette équation est un cas particulier de l'équation (1.17a) en régime d'écoulement permanent.

Remarquons que parmi les équations (2.7a), (2.7b), (2.7c), (2.9) et (2.9a) il n'y a que quatre qui sont indépendantes. En d'autres termes, l'équation (2.9a) peut remplacer l'équation (2.9) ou bien l'une des trois équations (2.7) dans le système d'équations qui définit l'écoulement.

Dans la démarche qui va suivre, il serait commode d'utiliser les équations du mouvement sous la forme (2.7). En premier lieu, parce que dans beaucoup de situations le terme $\left(\frac{\partial I}{\partial r} \right)$, qui représente le gradient de la rothalpie dans la direction radiale, est nul, ce qui n'est pas le cas pour le gradient de pression $\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)$. En second lieu, parce que l'utilisation des équations (2.7)

mènerait à une formulation mathématique rendant possible la recherche d'une solution précise dans les deux cas subsonique et supersonique. Enfin, elle permet de mieux analyser l'effet des différents paramètres intervenant dans l'écoulement.

Dans ce qui suit, nous allons combiner les équations présentées ci-dessus de façon à obtenir une équation principale permettant une résolution du problème de l'écoulement sur une surface de seconde espèce par les méthodes numériques habituelles.

2.2. Equation principale.

L'équation de continuité (2.3) et l'une des équations du mouvement, soit l'équation (2.7a) peuvent être combinées pour donner une équation aux dérivées spéciales de la fonction de courant ψ . Cette équation sera dite « équation principale ».

Soit B une variable définie comme suit :

$$\frac{D \ln B}{Dt} = W_r \frac{\bar{\partial} \ln B}{\bar{\partial} r} + W_z \frac{\bar{\partial} \ln B}{\bar{\partial} z} = C \quad (2.10)$$

Soit encore en intégrant pour une particule entre deux positions L_1 et L sur une ligne de courant appartenant à une surface S_2 .

$$\ln \frac{B}{B_1} = \int_{t_1}^t C dt = \int_{L_1}^L \frac{C}{W} dx \quad (2.10a)$$

On peut alors mettre l'équation de continuité (2.3) sous la forme suivante :

$$\frac{\bar{\partial}(rB\rho W_r)}{\bar{\partial} r} + \frac{\bar{\partial}(rB\rho W_z)}{\bar{\partial} z} = 0 \quad (2.11)$$

L'équation (2.11) est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de courant ψ existe et vérifie :

$$\frac{\bar{\partial} \psi}{\bar{\partial} r} = r\rho B W_z \quad (2.12a)$$

$$\frac{\bar{\partial} \psi}{\bar{\partial} z} = -r\rho B W_r \quad (2.12b)$$

La variation de ψ entre deux points j et k appartenant à la surface S_2 est donnée par :

$$\psi^k - \psi^j = \int_j^k d\psi = \int_j^k rB\rho(W_z dr - W_r dz)$$

Cette dernière équation indique que le facteur (B) est proportionnel à l'épaisseur angulaire d'une fine nappe de courant dont la surface médiane est la surface S_2 considérée et dont l'épaisseur circonférentielle est égale à (rB).

Le bilan massique effectué sur un élément de cette nappe de courant (voir figure 2.1) donne :

$$\frac{\bar{\partial}(\tau\rho W_r)}{\bar{\partial} r} + \frac{\bar{\partial}(\tau\rho W_z)}{\bar{\partial} z} = 0 \quad (2.11a)$$

La comparaison de cette équation avec l'équation (2.11) montre que l'épaisseur angulaire τ est proportionnelle à rB. Lors de la résolution numérique du problème, seuls les rapports

$rB/(rB)_i$ ou τ/τ_i sont utiles. Par ailleurs, il est plus aisé d'obtenir les variations du terme (rB) à partir des distances entre les lignes de courant sur les surfaces S_1 que d'évaluer $rB/(rB)_i$ à l'aide des équations (2.10a) et (2.4).

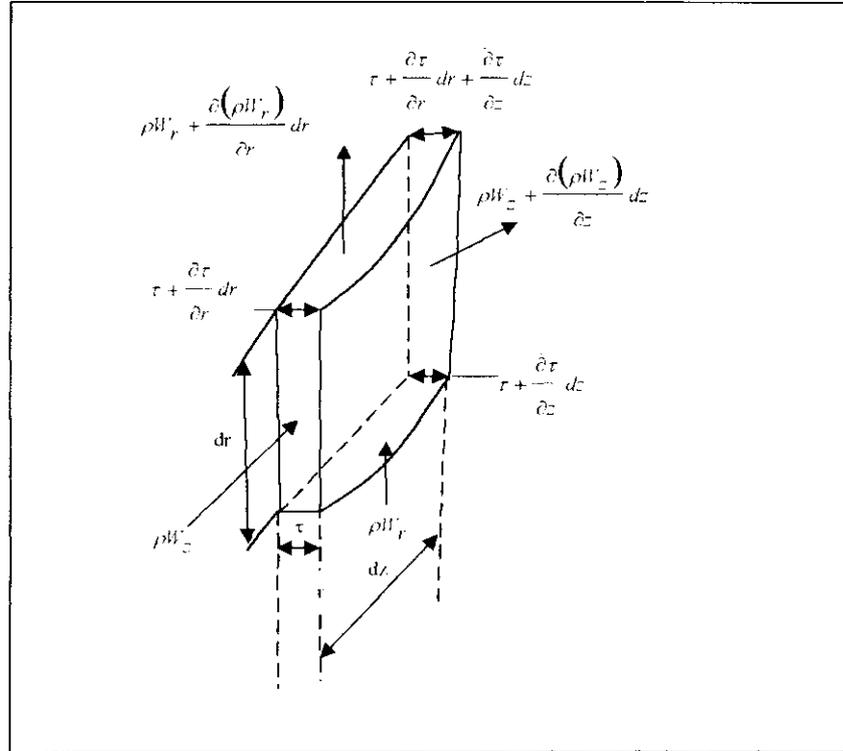


Figure 2.1 : bilan sur un élément de nappe pour une surface S_2

Pour résoudre le problème d'un écoulement sur une surface de courant de seconde espèce, l'équation de continuité (2.11) et l'équation du mouvement suivant la direction radiale sont combinées pour former l'équation principale. On distingue deux cas :

2.2.1. Cas où $(V_{u,r})$ est donné.

La quantité $(V_{u,r})$ sera donnée par une relation du type :

$$V_{u,r} = G(r,z) \tag{2.13}$$

Parmi les écoulements vérifiant cette relation, on trouve l'écoulement de type vortex libre dans lequel G est fonction de (z) uniquement.

A partir de l'équation (2.12a), on peut écrire :

$$rB\rho W_z = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

En dérivant cette dernière équation par rapport à (r) on trouve :

$$rB\rho \frac{\partial W_z}{\partial r} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - W_z \left(r \frac{\partial (B\rho)}{\partial r} + B\rho \right)$$

On remplace dans le second membre le terme W_z à partir de l'équation (2.12a) pour trouver finalement :

$$rB\rho \frac{\partial W_z}{\partial r} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \ln B\rho}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

De même, on a à partir de l'équation (2.12b) :

$$-rB\rho W_r = \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

On dérive cette équation par rapport à (z) puis on procède de la même manière que précédemment et les équation (2.12) deviennent finalement :

$$rB\rho \frac{\partial W_z}{\partial r} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \ln B\rho}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.14a)$$

$$-rB\rho \frac{\partial W_r}{\partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial \ln B\rho}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.14b)$$

Les termes en $(\partial \ln(B\rho))$ de ces deux équations peuvent être exprimés différemment en tenant compte de l'équation (1.10a) ; soit :

$$d \ln B\rho = d \ln B + \frac{1}{a^2} dh - ds^* \quad (2.15)$$

avec $s^* = s/R$.

Nous obtenons donc :

$$rB\rho \frac{\partial W_z}{\partial r} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \left(-\frac{1}{r} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial s^*}{\partial r} - \frac{\partial \ln B}{\partial r} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.16a)$$

$$-rB\rho \frac{\partial W_r}{\partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \left(-\frac{1}{a^2} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial s^*}{\partial z} - \frac{\partial \ln B}{\partial z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.16b)$$

Par ailleurs, en utilisant les expressions (2.12) pour exprimer les vitesses axiale et radiale W_z et W_r , on a à partir de l'équation (1.12) :

$$h = I + \frac{\omega^2 r^2}{2} - \frac{W_u^2}{2} - \frac{1}{2} (rb\rho)^2 \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2.17)$$

Calculons maintenant à partir de cette dernière équation la dérivée de l'enthalpie (h) par rapport à (r) à partir de l'équation (2.17), en tenant compte des expressions (2.12) et (2.15) ; on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(I + \frac{\omega^2 r^2}{2} - \frac{W_u^2}{2} \right) + (W_r^2 + W_z^2) \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial \ln B\rho}{\partial r} \right) - (rB\rho)^2 \left[W_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - W_r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \right]$$

On utilise maintenant l'expression (2.15) pour remplacer le terme $(\partial \ln(b\rho))$ ci-dessus et obtenir :

$$\frac{a^2 - (W_r^2 + W_z^2)}{a^2} \frac{\bar{\partial} h}{\bar{\partial} r} = \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} r} \left(I + \frac{\omega^2 r^2 - W_u^2}{2} \right) + (W_r^2 + W_z^2) \left(\frac{1}{r} + \frac{\bar{\partial} \ln B}{\bar{\partial} r} - \frac{\bar{\partial} s^*}{\bar{\partial} r} \right) +$$

$$- (rB\rho)^{-1} \left[W_z \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} r^2} - W_r \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} r \bar{\partial} z} \right]$$

En procédant de la même façon pour la dérivée de (h) par rapport à (z), on obtient :

$$\frac{a^2 - (W_r^2 + W_z^2)}{a^2} \frac{\bar{\partial} h}{\bar{\partial} z} = \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} z} \left(I + \frac{\omega^2 r^2 - W_u^2}{2} \right) + (W_r^2 + W_z^2) \left(\frac{\bar{\partial} \ln B}{\bar{\partial} z} - \frac{\bar{\partial} s^*}{\bar{\partial} z} \right) +$$

$$- (rB\rho)^{-1} \left[W_z \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} r \bar{\partial} z} - W_r \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} z^2} \right]$$

On remplace à présent les expressions de $\left(\frac{\bar{\partial} h}{\bar{\partial} r} \right)$ et $\left(\frac{\bar{\partial} h}{\bar{\partial} z} \right)$ données ci-dessus dans les équations (2.16) puis on additionne les équations résultantes pour obtenir :

$$\left[a^2 - (W_r^2 + W_z^2) \right] rB\rho \left(\frac{\bar{\partial} W_z}{\bar{\partial} r} - \frac{\bar{\partial} W_r}{\bar{\partial} z} \right) = (a^2 - W_r^2) \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} r^2} - 2W_r W_z \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} r \bar{\partial} z} +$$

$$+ (a^2 - W_z^2) \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} z^2} + \left[-\frac{a^2}{r} - \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} r} \left(I - \frac{W_u^2 - \omega^2 r^2}{2} \right) - a^2 \left(\frac{\bar{\partial} \ln B}{\bar{\partial} r} - \frac{\bar{\partial} s^*}{\bar{\partial} r} \right) \right] \frac{\bar{\partial} \psi}{\bar{\partial} r} +$$

$$+ \left[\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} z} \left(I - \frac{W_u^2 - \omega^2 r^2}{2} \right) - a^2 \left(\frac{\bar{\partial} \ln B}{\bar{\partial} z} - \frac{\bar{\partial} s^*}{\bar{\partial} z} \right) \right] \frac{\bar{\partial} \psi}{\bar{\partial} z} \quad (2.18)$$

Multiplions et divisons le premier membre de cette équation par (W_z^2) et remplaçons le produit $(rB\rho W_r)$ par $\left(\frac{\bar{\partial} \psi}{\bar{\partial} r} \right)$, puis le terme $\left(W_z \left(\frac{\bar{\partial} W_r}{\bar{\partial} z} - \frac{\bar{\partial} W_z}{\bar{\partial} r} \right) \right)$ à partir de son expression tirée de l'équation (2.7a) ; enfin divisons le tout par (a^2) et réarrangeons. On obtient :

$$\left(1 - \frac{W_r^2}{a^2} \right) \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} r^2} - 2 \frac{W_r W_z}{a^2} \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} r \bar{\partial} z} + \left(1 - \frac{W_z^2}{a^2} \right) \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} z^2} + N \frac{\bar{\partial} \psi}{\bar{\partial} r} + M \frac{\bar{\partial} \psi}{\bar{\partial} z} = 0 \quad (2.19)$$

avec :

$$M = -\frac{\bar{\partial} \ln B}{\bar{\partial} z} + \frac{\bar{\partial} s^*}{\bar{\partial} z} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\bar{\partial} I}{\bar{\partial} z} - W_u \frac{\bar{\partial} W_u}{\bar{\partial} z} \right)$$

et :

$$N = -\frac{1}{r} - \frac{\bar{\partial} \ln B}{\bar{\partial} r} + \frac{\bar{\partial} s^*}{\bar{\partial} r} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\bar{\partial} I}{\bar{\partial} r} - W_u \frac{\bar{\partial} W_u}{\bar{\partial} r} + \omega^2 r \right) +$$

$$+ \frac{a^2 - (W_r^2 + W_z^2)}{a^2 W_z^2} \left[-\frac{\bar{\partial} I}{\bar{\partial} r} + I \frac{\bar{\partial} s}{\bar{\partial} r} + I_r + \frac{W_u}{r} \frac{\bar{\partial} (V_u r)}{\bar{\partial} r} \right]$$

A partir des coefficients des dérivées secondes, on trouve que l'équation principale est de type hyperbolique lorsque le terme : $(W_t = \sqrt{W_r^2 + W_z^2})$ est supérieur à la vitesse du son.

Si W_l est inférieure à la vitesse du son, l'équation (2.19) est de type elliptique et il est préférable de l'écrire sous une forme légèrement différente.

En remplaçant les expressions de $\left(\frac{\partial W_z}{\partial r}\right)$ et $\left(\frac{\partial W_r}{\partial z}\right)$ données par les équations (2.14) directement dans l'équation (2.7a) on obtient une forme plus adéquate de l'équation principale pour résoudre le problème de l'écoulement subsonique.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial \ln B\rho}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \ln B\rho}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{(rB\rho)^2}{\partial \psi} \left[\frac{W_u}{r} \frac{\partial(V_u r)}{\partial r} - \frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial s}{\partial r} + F_r \right] = 0 \quad (2.19a)$$

Les valeurs de la vitesse circonférentielle (V_u ou W_u) sont, soit données en fonction des coordonnées (r,z) aux différents points de la surface S_2 par une fonction $V_u=V_u(r,z)$ lors de la résolution d'un problème inverse ; soit obtenues à partir des calculs effectués pour les surfaces S_1 lors d'une étape précédente de la procédure de résolution générale du problème direct.

La résolution de l'équation principale (2.19) ou (2.19a) donnera les valeurs de la fonction de courant (ψ) et par suite les composantes radiale (W_r) et axiale (W_z) de la vitesse relative.

Les autres relations du système d'équations définissant le problème serviront à évaluer les différents coefficients intervenant dans l'équation principale.

2.2.2. Cas où le rapport W_u/W_z est fixé.

Dans ce cas, une relation du type :

$$\frac{W_u}{W_z} = g(r, z), \quad (2.20)$$

doit être satisfaite sur la surface de courant médiane $S_{2,m}$. Par exemple pour obtenir des aubes dont les surfaces médianes sont purement radiales, l'équation (2.20) peut prendre la forme :

$$\frac{W_u}{W_z} = r g_1(z) \quad (2.21)$$

Dans le cas d'une turbine à aubes refroidies, on peut souhaiter que la torsion de l'aube soit minimale et on spécifiera une relation entre composantes axiale et azimutale de la vitesse de la forme suivante :

$$\frac{W_u}{W_z} = g_2(z) \quad (2.22)$$

Durant la résolution itérative d'un problème direct, l'une des relations précédentes est obtenue à partir des calculs effectués sur les surfaces S_1 à l'étape de calcul précédente.

L'étape majeure consistera à résoudre l'équation principale que nous nous proposons d'obtenir dans ce cas précis.

En substituant l'expression de W_u obtenue à partir de l'équation (2.20) dans l'équation (2.7a) on obtient l'équation suivante :

$$(1 + g^2) \frac{\bar{\partial} W_z}{\bar{\partial} r} - \frac{\bar{\partial} W_r}{\bar{\partial} z} + g \left(\frac{g}{r} + \frac{\bar{\partial} g}{\bar{\partial} r} \right) + 2\omega g + \frac{1}{W_z} \left(-\frac{\bar{\partial} I}{\bar{\partial} r} + T \frac{\bar{\partial} s}{\bar{\partial} r} + F_r \right) = 0 \quad (2.23)$$

A la place de l'équation (2.17) nous aurons pour exprimer l'enthalpie (h) l'équation :

$$h = I + \frac{\omega^2 r^2}{2} - \frac{1}{2} (r b \rho)^2 \left[(1 + g^2) \left(\frac{\bar{\partial} \psi}{\bar{\partial} r} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\partial} \psi}{\bar{\partial} z} \right)^2 \right] \quad (2.24)$$

En dérivant cette équation par rapport à (r) et (z) respectivement puis en combinant avec les équations (2.16a) et (2.16b), on obtient les expressions de $\left(\frac{\bar{\partial} W_z}{\bar{\partial} r} \right)$ et $\left(\frac{\bar{\partial} W_r}{\bar{\partial} z} \right)$ que nous substituons dans l'équation (2.23) pour obtenir l'équation principale pour ce cas :

$$(1 + g^2) \left(1 - \frac{W_r^2}{a^2} \right) \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} r^2} - 2(1 + g^2) \frac{W_r W_z}{a^2} \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} r \bar{\partial} z} + \left(1 - \frac{W_u^2 + W_z^2}{a^2} \right) \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} z^2} + N \frac{\bar{\partial} \psi}{\bar{\partial} r} + M \frac{\bar{\partial} \psi}{\bar{\partial} z} = 0 \quad (2.25)$$

avec :

$$M = -\frac{\bar{\partial} \ln B}{\bar{\partial} z} + \frac{\bar{\partial} s^*}{\bar{\partial} z} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\bar{\partial} I}{\bar{\partial} z} - \frac{W_z^2}{a^2} g \frac{\bar{\partial} g}{\bar{\partial} z} \right)$$

et :

$$N = -(1 + g^2) \left[\frac{1}{r} + \frac{\bar{\partial} \ln B}{\bar{\partial} r} - \frac{\bar{\partial} s^*}{\bar{\partial} r} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\bar{\partial} I}{\bar{\partial} r} + \omega^2 r - W_z^2 g \frac{\bar{\partial} g}{\bar{\partial} r} \right) \right] + \frac{a^2 - W^2}{a^2} g \left(\frac{g}{r} + \frac{\bar{\partial} g}{\bar{\partial} r} \right) + \frac{a^2 - W^2}{a^2 W_z^2} \left[-\frac{\bar{\partial} I}{\bar{\partial} r} + T \frac{\bar{\partial} s}{\bar{\partial} r} + F_r + 2\omega W_u \right]$$

Notons que dans les deux cas considérés ci-dessus, on a opté pour l'équation (2.7a) plutôt que pour l'équation (2.7c) pour former l'équation principale. La raison en est que, dans les machines axiales, le terme F_r est toujours négligeable devant le terme F_z .

2.3. Procédure de résolution.

L'équation (2.7a) ayant été utilisée pour former l'équation principale, les autres équations serviront à calculer les différents coefficients intervenant dans l'équation principale.

Dix paramètres sont utilisés pour définir l'écoulement et la géométrie de la surface S_2 ; ce sont : la fonction de courant ψ , la variable (B) introduite par l'équation (2.10) et qui est proportionnelle à l'épaisseur angulaire τ de la nappe de courant, les trois composantes de la vitesse W_r , W_u et W_z , les trois composantes du vecteur \vec{F} défini par l'équation (2.6), l'entropie (s) et la rothalpie (I) (qui, compte tenu des inconnues déjà citées, peut être représentée aussi par l'enthalpie h ou encore par la masse volumique ρ).

Le paramètre (B) est considéré comme connu. Dans le cas d'un problème direct, B est évalué soit à partir des distances entre deux lignes de courant adjacentes soit à partir de l'équation (2.10a) dans laquelle le facteur (C) est déduit des calculs effectués sur des surfaces S_1 dans une étape précédente. Dans un problème inverse, le paramètre (B) est estimé à partir de l'épaisseur choisie pour l'aube. Ceci pour des considérations de résistance mécanique.

D'autre part, il y a sept relations indépendantes parmi les équations développées précédemment : l'équation de l'énergie (1.18) ; les trois équations du mouvement : (2.7b), (2.7c) et l'une des équations (2.19), (2.19a), (2.25) et (2.25a) ; la relation d'orthogonalité entre le vecteur \vec{F} et le vecteur vitesse relative \vec{W} (2.9a) ; et enfin les deux équations définissant la fonction de courant (2.12a) et (2.12b).

Nous sommes donc, à ce stade du problème, en présence de sept équations et neuf inconnues, deux équations supplémentaires sont donc requises. Elles sont différentes selon que nous nous intéressons à résoudre un problème direct ou un problème inverse.

2.3.1. Cas d'un problème direct.

Dans ce cas, deux procédures peuvent être utilisées :

Si la géométrie de la surface est considérée comme connue à ce stade du calcul, deux relations supplémentaires entre les composantes du vecteur normale \vec{n} (ou \vec{F}) interviennent et le problème est ainsi entièrement défini et le système d'équations à résoudre est ainsi fermé.

Les étapes de la résolution du problème sont les suivantes :

- 1) Utiliser les équations (1.17a) et (1.18) pour déterminer les variations de l'entropie (s) et de la rothalpie (I).
- 2) Calculer W_u à partir de la relation d'orthogonalité entre le vecteur vitesse relative \vec{W} et la normale \vec{n} :
$$W_u = \left(\frac{n_r}{n_u} W_r + \frac{n_z}{n_u} W_z \right)$$
- 3) Calculer F_u à partir de l'équation (2.7b).
- 4) Résoudre l'équation principale.
- 5) Calculer W_r et W_z à partir des équations (2.12a) et (2.12b).

Si une condition de type (2.20) ou (2.13) existe sur les composantes de la vitesse à partir des calculs effectués sur les surfaces S_1 . On pourrait utiliser l'équation :

$$\vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) = 0 \tag{2.26}$$

Soit encore :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{F_z}{F_u r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F_r}{F_u r} \right) \tag{2.26a}$$

qui exprime simplement que le produit scalaire entre deux vecteurs perpendiculaires est nul. On peut utiliser Cette équation pour calculer $F_{r,s}$ en l'intégrant le long d'une ligne d'équation $z=cste$:

$$\frac{F_r}{F_u r} = \left(\frac{F_r}{F_u r} \right)_0 + \int_{z_0}^z \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{F_r}{F_u r} \right) dz \tag{2.26b}$$

Les étapes de résolution seront dans ce cas les suivantes :

- 1) Utiliser les équations (1.18) et (2.9a) pour déterminer les valeurs de (s) et de (I).
- 2) Calculer les termes F_u et F_z à partir des équations (2.7b) et (2.7c).
- 3) Calculer F_r à partir de l'équation (2.26b) ou (2.26c).
- 4) Résoudre l'équation principale pour obtenir les valeurs de la fonction de courant ψ .
- 5) Calculer les composantes de la vitesse W_r et W_z à partir des équations (2.12a) et (2.12b).

2.3.2. Cas d'un problème inverse.

La résolution du problème inverse vise à déterminer la géométrie de la roue. Cependant, pour des considérations de résistance, la loi de distribution de l'épaisseur de l'aube sera choisie, ce qui reviendra à fixer la loi de distribution de l'épaisseur angulaire (rB).

On fixe aussi l'une des conditions (2.13) ou (2.20) relatives aux composantes de la vitesse.

Les composantes F_r , F_u et F_z du vecteur \vec{F} seront liées par la relation :

$$F_r dr + F_u r d\varphi + F_z dz = 0$$

et notre problème sera ainsi entièrement défini.

Remarque : dans tout ce qui précède, les géométries du moyeu et du carter sont imposées. Une autre façon de procéder, consiste à ajouter une condition sur le carter et la dernière ligne de courant calculée déterminera la géométrie du moyeu.

Dans le chapitre qui suit, nous allons procéder de la même manière que dans le chapitre 2 pour analyser l'écoulement sur une surface S_1 . Lorsque l'écoulement est étudié sur une surface de courant S_1 , les équations (1.25) à (1.28) peuvent être également utilisées pour éliminer l'une des trois coordonnées. Dans ce cas cependant, il est plus commode d'exprimer r en fonction de φ et z . Chaque grandeur q sur une surface S_1 sera donc fonction des deux variables indépendantes φ et z :

$$q = q[\varphi, z, r(\varphi, z)]$$

Ainsi, la variation de la grandeur (q) le long d'une surface (S_1) suite à une variation élémentaire de (φ) pour une valeur de z maintenue constante sera calculée comme suit :

$$dq = \frac{\partial q}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial q}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \varphi} d\varphi$$

Mais de l'équation (1.26a), on a :

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = -\frac{n_u r}{n_r}$$

et l'équation précédente devient :

$$dq = \left(\frac{\partial q}{\partial \varphi} - \frac{n_u r}{n_r} \frac{\partial q}{\partial r} \right) d\varphi$$

De même on obtient pour (φ) constant et (z) variable le long d'une surface S_1 :

$$dq = \left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{n_z}{n_r} \frac{\partial q}{\partial r} \right) dz$$

En utilisant, comme pour les surfaces S_2 , le symbole ($\bar{\partial}$) pour désigner les dérivées d'une grandeur (q) suivant une surface S_1 , on peut écrire à partir des relations précédentes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\bar{\partial} q}{\partial \varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial \varphi} - \frac{n_u}{n_r} \frac{\partial q}{\partial r} \\ \frac{\bar{\partial} q}{\partial z} &= \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{n_z}{n_r} \frac{\partial q}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

L'utilisation des équations (1.28) et (3.1) nous permet d'obtenir la dérivée particulière de (q) le long d'une ligne de courant appartenant à une surface S_1 en régime permanent, soit :

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{W_u}{r} \frac{\bar{\partial} q}{\partial \varphi} + W_z \frac{\bar{\partial} q}{\partial z} \quad (3.2)$$

3.1. Equations de continuité et du mouvement.

Pour un écoulement permanent le long d'une surface relative de première espèce (S_1), l'équation de continuité (1.1) s'écrira en tenant compte des relations (3.1) et de l'équation (1.28) :

$$\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}(\rho W_u)}{\partial \varphi} + \frac{\bar{\partial}(\rho W_z)}{\partial z} = \rho c(\varphi, z) \quad (3.3)$$

avec :

$$\alpha(\varphi, z) = -\frac{1}{n_r} \left(\frac{n_r}{r} \frac{\partial(rW_r)}{\partial r} + n_u \frac{\partial W_u}{\partial r} + n_z \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) \quad (3.4)$$

En projection suivant les directions radiale, circonférentielle et axiale, l'équation du mouvement (1.16) donne pour un écoulement relatif et permanent :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{W_u^2}{r} - W_u \frac{\partial W_u}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} + W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) - 2\omega W_u &= -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial s}{\partial r} \\ \frac{W_r W_u}{r} + W_r \frac{\partial W_u}{\partial r} - \frac{W_r}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} - W_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial W_u}{\partial z} \right) + 2\omega W_r &= -\frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \varphi} + \frac{T}{r} \frac{\partial s}{\partial \varphi} \\ -W_r \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) + W_u \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial W_u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial I}{\partial z} + T \frac{\partial s}{\partial z} \end{aligned} \right\} (3.5)$$

A présent, nous allons procéder à la transformation de la première des équations (3.5) de la manière suivante :

Réécrivons cette équation en introduisant les relations de transformation (3.1) et en remplaçant la rothalpie par l'enthalpie à partir de l'équation (1.12) :

$$\begin{aligned} -\frac{W_u^2}{r} - W_u \frac{\partial W_u}{\partial r} + W_u \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} + \frac{n_u}{n_r} \frac{\partial W_r}{\partial r} \right) + W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} + \frac{n_z}{n_r} \frac{\partial W_r}{\partial r} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) - 2\omega W_u &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(h + \frac{1}{2} W^2 - \frac{1}{2} U^2 \right) + T \frac{\partial s}{\partial r} \end{aligned}$$

On réarrange cette équation en ajoutant et retranchant le terme $\left(W_r \frac{\partial W_r}{\partial r} \right)$, pour aboutir à l'équation :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{W_u^2}{r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial W_r}{\partial z} - 2\omega W_u \right) &= \left(W_u \frac{\partial W_u}{\partial r} + W_z \frac{\partial W_z}{\partial r} + W_r \frac{\partial W_r}{\partial r} \right) + \\ &+ \frac{1}{n_r} \frac{\partial W_r}{\partial r} (W_r n_r + W_u n_u + W_z n_z) - \frac{\partial h}{\partial r} - \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \omega^2) + T \frac{\partial s}{\partial r} = \\ &= \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial r} - \frac{1}{n_r} \frac{\partial W_r}{\partial r} (0) - \frac{\partial h}{\partial r} - \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial r} + r\omega^2 + T \frac{\partial s}{\partial r} \end{aligned}$$

On obtient finalement, après simplification, pour la première des équations (3.5) :

$$-\frac{W_u^2}{r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial W_r}{\partial z} - 2\omega W_u - \left(\frac{\partial h}{\partial r} - T \frac{\partial s}{\partial r} - \omega^2 r \right)$$

En procédant de même avec les deux autres équations, le système (3.5) devient :

$$\left. \begin{aligned}
 -\frac{W_u^2}{r} + \frac{W_u}{r} \frac{\bar{\partial}W_r}{\bar{\partial}\varphi} + W_z \frac{\bar{\partial}W_r}{\bar{\partial}z} - 2\omega W_u &= -\left(\frac{\partial h}{\partial r} - T \frac{\bar{\partial}s}{\bar{\partial}r} - \omega^2 r\right) \\
 \frac{W_r W_u}{r} - \frac{W_r}{r} \frac{\bar{\partial}W_r}{\bar{\partial}\varphi} - W_z \left(\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}W_z}{\bar{\partial}\varphi} - \frac{\bar{\partial}W_u}{\bar{\partial}z}\right) + 2\omega W_r &= \\
 &= -\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}I}{\bar{\partial}\varphi} + \frac{T}{r} \frac{\bar{\partial}s}{\bar{\partial}\varphi} - \frac{n_u}{n_r} \left(\frac{\partial h}{\partial r} - T \frac{\bar{\partial}s}{\bar{\partial}r} - \omega^2 r\right) \\
 -W_r \frac{\bar{\partial}W_r}{\bar{\partial}z} + W_u \left(\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}W_z}{\bar{\partial}\varphi} - \frac{\bar{\partial}W_u}{\bar{\partial}z}\right) &= -\frac{\bar{\partial}I}{\bar{\partial}z} + T \frac{\bar{\partial}s}{\bar{\partial}z} - \frac{n_z}{n_r} \left(\frac{\partial h}{\partial r} - T \frac{\bar{\partial}s}{\bar{\partial}r} - \omega^2 r\right)
 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Les derniers termes des équations (3.6) ci-dessus forment un vecteur ayant la dimension d'une force par unité de masse (c'est-à-dire une accélération). Ce vecteur, parallèle au vecteur normale \vec{n} , sera défini comme suit :

$$\vec{f} = -\frac{1}{n_r} \left(\frac{\partial h}{\partial r} - T \frac{\bar{\partial}s}{\bar{\partial}r} - \omega^2 r\right) \vec{n} = -\frac{1}{n_r} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \omega^2 r\right) \vec{n} \quad (3.7)$$

Les équations (3.6) peuvent alors se mettre sous la forme :

$$\left. \begin{aligned}
 -\frac{W_u^2}{r} + \frac{W_u}{r} \frac{\bar{\partial}W_r}{\bar{\partial}\varphi} + W_z \frac{\bar{\partial}W_r}{\bar{\partial}z} - 2\omega W_u &= f_r \\
 \frac{W_r W_u}{r} - \frac{W_r}{r} \frac{\bar{\partial}W_r}{\bar{\partial}\varphi} - W_z \left(\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}W_z}{\bar{\partial}\varphi} - \frac{\bar{\partial}W_u}{\bar{\partial}z}\right) + 2\omega W_r &= -\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}I}{\bar{\partial}\varphi} + \frac{T}{r} \frac{\bar{\partial}s}{\bar{\partial}\varphi} + f_u \\
 -W_r \frac{\bar{\partial}W_r}{\bar{\partial}z} + W_u \left(\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}W_z}{\bar{\partial}\varphi} - \frac{\bar{\partial}W_u}{\bar{\partial}z}\right) &= -\frac{\bar{\partial}I}{\bar{\partial}z} + T \frac{\bar{\partial}s}{\bar{\partial}z} + f_z
 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

De même, il est aisé de vérifier qu'en régime permanent les équations (1.2 bis) pourraient se mettre sous la forme :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{W_u}{r} \frac{\bar{\partial}W_r}{\bar{\partial}\varphi} + W_z \frac{\bar{\partial}W_r}{\bar{\partial}z} - \frac{V^2}{r} &= f_r' \\
 \frac{W_u}{r} \frac{\bar{\partial}W_u}{\bar{\partial}\varphi} + W_z \frac{\bar{\partial}W_u}{\bar{\partial}z} + \frac{W_r W_u}{r} + 2\omega W_r &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\bar{\partial}p}{\bar{\partial}\varphi} + f_u' \\
 \frac{W_u}{r} \frac{\bar{\partial}W_z}{\bar{\partial}\varphi} + W_z \frac{\bar{\partial}W_z}{\bar{\partial}z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\bar{\partial}p}{\bar{\partial}z} + f_z'
 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

avec:

$$f_r' = -\frac{1}{n_r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \vec{n}$$

On a en effet pour la première des équations (1.2 bis) par exemple:

$$W_r \frac{\partial W_r}{\partial r} + W_u \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} + \frac{n_u}{n_r} \frac{\partial W_r}{\partial r}\right) + W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} + \frac{n_z}{n_r} \frac{\partial W_r}{\partial r}\right) - \frac{W_u^2}{r} - \omega^2 r - 2\omega W_u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

En réarrangeant, on a :

$$\frac{1}{n_r} (W_r n_r + W_u n_u + W_z n_z) \frac{\partial W_r}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{1}{r} [W_u^2 + 2\omega r W_u + (r\omega)^2] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

En remarquant que :

$$[W_u^2 + 2\omega r W_u + (r\omega)^2] = (W_u + r\omega)^2 = V_u'^2,$$

on a finalement :

$$\frac{W_u}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{V_u'^2}{r} = f_r'$$

Le vecteur \vec{f}' étant parallèle à \vec{n} , il est perpendiculaire au vecteur vitesse relative \vec{W} , et il vérifie de ce fait la relation :

$$f_r W_r + f_u W_u + f_z W_z = 0 \quad (3.10)$$

A présent, multiplions les trois équations (3.8) respectivement par W_r , W_u , W_z , puis sommons membre à membre en tenant compte de l'équation (3.10) ; on obtient après simplification et réarrangement :

$$\frac{W_u}{r} \frac{\partial I}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial I}{\partial z} - T \left(\frac{W_u}{r} \frac{\partial s}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial s}{\partial z} \right)$$

Soit en utilisant les équations de transformation (3.1) et en ajoutant et retranchant à gauche $\left(W_r \frac{\partial I}{\partial r} \right)$ et à droite $\left(W_r \frac{\partial s}{\partial r} \right)$:

$$\begin{aligned} & \left(W_r \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial I}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial I}{\partial z} \right) - \frac{1}{n_r} \overbrace{(n_r W_r + n_u W_u + n_z W_z)}^0 \frac{\partial I}{\partial r} = T \left(W_r \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial s}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial s}{\partial z} \right) \\ & \quad - \frac{1}{n_r} \underbrace{(n_r W_r + n_u W_u + n_z W_z)}_0 \frac{\partial s}{\partial r} \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\frac{DI}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} \quad (2.9a)$$

Notons, une fois de plus, que cette équation est un cas particulier de l'équation (1.17a) en régime d'écoulement permanent.

Remarquons bien que parmi les équations (3.8), (3.10) et (2.9a) qui sont au nombre de cinq, il n'y a que quatre équations indépendantes.

Les équations précédentes ont été exprimées (comme l'a été l'équation de continuité) en termes de dérivées partielles spéciales par rapport aux deux variables indépendantes (φ) et (z). L'effet du gradient de pression radial est introduit dans ces équations par le vecteur \vec{f}' .

La modélisation du problème de l'écoulement tridimensionnel sur une surface de courant de première espèce S_1 de la manière qui nous a conduit aux équations (1.25), (1.28), (3.3), (3.8) ou (3.9) rend possible sa résolution par une méthode mathématiquement bidimensionnelle.

3.2. Equation principale.

L'équation de continuité (3.3) et une des équations du mouvement, soit l'équation (3.8b) peuvent être combinées pour donner une équation aux dérivées partielles de la fonction de courant ψ . Cette équation sera dite « équation principale ».

Soit b une variable définie comme suit :

$$\frac{D \ln b}{Dt} = -c + \frac{n_z W_z}{n_r r} \quad (3.11)$$

Soit en intégrant pour une particule entre deux instants (t_i) et (t) ou bien entre deux positions (L_i) et (L) sur une ligne de courant appartenant à une surface S_1 .

$$\ln \frac{b}{b_i} = - \int_{t_i}^t \left(c - \frac{n_z W_z}{n_r r} \right) dt = \int_{L_i}^L \frac{1}{W} \left(c - \frac{n_z W_z}{n_r r} \right) dx$$

On peut alors mettre l'équation de continuité (3.3) sous la forme :

$$\frac{\partial (b \rho W_u)}{\partial \varphi} + \frac{\partial (b \rho W_z r)}{\partial z} = 0 \quad (3.3a)$$

Cette dernière équation est une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une fonction de courant ψ telle que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = r \rho b W_z \quad (3.12a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\rho b W_u \quad (3.12b)$$

La variation de ψ entre deux points j et k sur une surface S_1 sera donnée par :

$$\psi^k - \psi^j = \int_j^k d\psi = \int_j^k (b \rho (W_z r d\varphi - W_u dz))$$

En particulier, la variation de ψ entre deux points j et k appartenant à un plan (z) situé en amont de la rangée d'aubes (là où l'écoulement est uniforme) est donnée par :

$$\psi^k - \psi^j = \int_j^k d\psi = b_i \rho_i W_{z,i} \int_{\varphi_j}^{\varphi_k} r d\varphi$$

Où l'indice i se réfère à l'entrée de la rangée d'aubes.

Ces deux dernières équations montrent que le facteur d'intégration b est proportionnel à l'épaisseur radiale locale d'une fine nappe de courant dont la surface médiane est la surface de courant S_1 considérée.

L'équation (3.3a) peut aussi être obtenue en faisant le bilan des débits massiques traversant un élément infinitésimal de cette nappe de courant (figure 3.1). On obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial(\tau\rho W_u)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(\tau\rho W_z r)}{\partial z} = 0 \quad (3.3b)$$

Où τ est l'épaisseur radiale de la nappe de courant. Les équations (3.3a) et (3.3b) montrent que b est proportionnel à τ , et la variation de ψ entre deux points j et k est proportionnelle au débit entre deux lignes de courant passant par ces deux points. Lors des calculs, seuls les rapports b/b , ou τ/τ , sont importants.

A partir de l'équation (3.12a), on peut écrire:

$$W_z = \frac{1}{r} \frac{1}{b\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial W_z}{\partial\varphi} \right) &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial(b\rho)} \frac{\partial(b\rho)}{\partial\varphi} \right] \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{b\rho} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{b\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \left(-\frac{1}{(b\rho)^2} \frac{\partial(b\rho)}{\partial\varphi} \right) \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{b\rho} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{b\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \left(-\frac{1}{r^2} \times -\frac{n_r r}{n_r} \right) \\ &= \frac{1}{b\rho} \left\{ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \ln(b\rho)}{\partial\varphi} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{n_r}{n_r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \right\} \end{aligned}$$

De même, on a à partir de l'équation (3.12b) :

$$W_u = \frac{1}{b\rho} \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

D'où :

$$-\frac{\partial W_u}{\partial z} = -\left(\frac{1}{\rho b} \right)^2 \frac{\partial(\rho b)}{\partial z} \frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{\rho b} \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Donc les équations (3.12) deviennent :

$$b\rho \frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \ln b\rho}{\partial\varphi} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{n_r}{n_r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \quad (3.13a)$$

$$-b\rho \frac{\partial W_u}{\partial z} = \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{\partial \ln b\rho}{\partial z} \frac{\partial\psi}{\partial z} \quad (3.13b)$$

Les termes en $\partial \ln(b\rho)$ de ces deux équations peuvent être exprimés différemment en tenant compte de l'équation (1.10) comme cela a été fait pour les surfaces S_2 , soit :

$$d \ln b\rho = d \ln b + \frac{1}{a^2} dh - ds^* \quad (3.14)$$

avec $s^* = s/R$. Par ailleurs, en utilisant les expressions (3.12) pour W_z et W_u , on a à partir de l'équation (1.12) :

$$h = 1 + \frac{\omega^2 r^2}{2} - \frac{W_z^2}{2} - \frac{1}{2} (h\rho)^2 \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3.15)$$

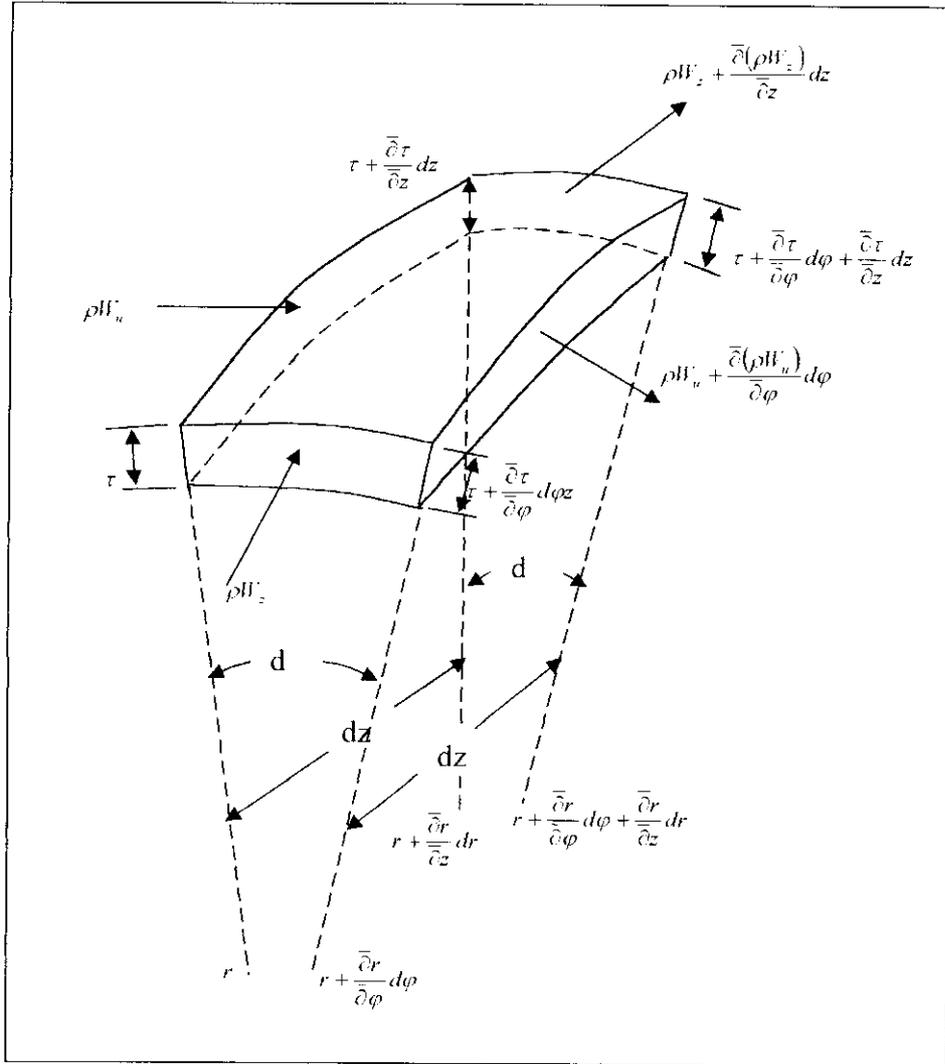


Figure 3.1 : bilan sur un élément de nappe pour une surface S_1

Procédons d'abord au calcul des dérivées de (h) par rapport à (φ) et à (z) à partir de l'équation (3.15) ci-dessus, toujours en tenant compte des expressions (3.12) de W_u et W_z . On aura :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\bar{\partial} h}{\bar{\partial} \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} \varphi} \left[I + \frac{\omega^2 r^2 - W_r^2}{2} \right] - \left(\frac{1}{2} \cdot -2(b\rho)^{-1} \frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}(b\rho)}{\bar{\partial} \varphi} \right) & \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial} \psi}{\bar{\partial} \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\partial} \psi}{\bar{\partial} z} \right)^2 \right] + \\ & - (b\rho)^{-2} \left\{ 2 \frac{1}{r^2} \frac{\bar{\partial} \psi}{\bar{\partial} \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} \varphi^2} + \frac{\bar{\partial} \psi}{\bar{\partial} \varphi} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{-rn_u}{n_r} \right) + 2 \frac{1}{r} \frac{\bar{\partial} \psi}{\bar{\partial} z} \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} \varphi \bar{\partial} z} \right\} \end{aligned}$$

Soit encore après simplification :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\bar{\partial} h}{\bar{\partial} \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} \varphi} \left[I + \frac{\omega^2 r^2 - W_r^2}{2} \right] + \frac{1}{r} \frac{\bar{\partial} \ln(b\rho)}{\bar{\partial} \varphi} (W_u^2 + W_z^2) + \\ - (b\rho)^{-1} \left[\frac{W_z}{r^2} \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} \varphi^2} - \frac{W_u}{r} \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} \varphi \bar{\partial} z} \right] - \frac{W_z^2}{r} \frac{n_u}{n_r} \end{aligned}$$

De même, on a en effectuant la dérivation par rapport à z :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial} h}{\bar{\partial} z} = \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} z} \left[I + \frac{\omega^2 r^2 - W_r^2}{2} \right] + \frac{\bar{\partial} \ln(b\rho)}{\bar{\partial} z} (W_u^2 + W_z^2) + \\ - (b\rho)^{-1} \left[\frac{W_z}{r} \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} \varphi \bar{\partial} z} + W_u \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} z^2} \right] - \frac{W_z^2}{r} \frac{n_z}{n_r} \end{aligned}$$

En opérant sur l'équation (3.14), on peut alors écrire après quelques réarrangements :

$$\begin{aligned} \left[a^2 - (W_u^2 + W_z^2) \right] \frac{1}{r} \frac{\bar{\partial} \ln b\rho}{\bar{\partial} \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} \varphi} \left(I + \frac{\omega^2 r^2 - W_r^2}{2} \right) + \frac{a^2}{r} \left(\frac{\bar{\partial} \ln b}{\bar{\partial} \varphi} - \frac{\bar{\partial} s^*}{\bar{\partial} \varphi} \right) + \\ - (b\rho)^{-1} \left(\frac{W_z}{r^2} \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} \varphi^2} - \frac{W_u}{r} \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} \varphi \bar{\partial} z} \right) - \frac{W_z^2}{r} \frac{n_u}{n_r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[a^2 - (W_u^2 + W_z^2) \right] \frac{\bar{\partial} \ln b\rho}{\bar{\partial} z} = \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} z} \left(I + \frac{\omega^2 r^2 - W_r^2}{2} \right) + a^2 \left(\frac{\bar{\partial} \ln b}{\bar{\partial} z} - \frac{\bar{\partial} s^*}{\bar{\partial} z} \right) + \\ - (b\rho)^{-1} \left(\frac{W_z}{r} \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} \varphi \bar{\partial} z} - W_u \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\bar{\partial} z^2} \right) - \frac{W_z^2}{r} \frac{n_z}{n_r} \end{aligned}$$

A présent, multiplions les équations (3.13a) et (3.13b) par le facteur $\left[a^2 - (W_u^2 + W_z^2) \right]$, ensuite procédons au remplacement des termes en $\bar{\partial} \ln(b\rho)$ par les expressions ci-dessus et additionnons membre à membre les équations ainsi obtenues. On aura l'expression :

$$\begin{aligned}
 b\rho[\alpha^2 - (W_u^2 + W_z^2)] \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial W_u}{\partial z} \right] &= \frac{\alpha^2 - W_u^2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{W_u W_z}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \varphi} + \\
 + (\alpha^2 - W_z^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(I + \frac{\omega^2 r^2 - W_r^2}{2} \right) + \frac{\alpha^2}{r} \left(\frac{\partial \ln b}{\partial \varphi} - \frac{\partial s^*}{\partial \varphi} \right) - \frac{\alpha^2 - W_u^2}{r} \frac{n_u}{n_r} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \\
 - \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(I + \frac{\omega^2 r^2 - W_r^2}{2} \right) + \alpha^2 \left(\frac{\partial \ln b}{\partial z} - \frac{\partial s^*}{\partial z} \right) - \frac{W_z^2}{r} \frac{n_z}{n_r} \right] \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Multiplions et divisons le premier membre de cette équation par (rW_z^2) et remplaçons le produit $(b\rho rW_z)$ par $\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right)$, puis $W_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial W_u}{\partial z} \right]$ à partir de son expression tirée de l'équation (3.8b) ; enfin divisons le tout par (α^2) et réarrangeons. On obtient :

$$\left(1 - \frac{W_u^2}{\alpha^2} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{W_u W_z}{\alpha^2 r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi \partial z} + \left(1 - \frac{W_z^2}{\alpha^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{N}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + M \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (3.17)$$

avec :

$$M = - \frac{\partial \ln b}{\partial z} + \frac{\partial s^*}{\partial z} + \frac{1}{\alpha^2} \left(- \frac{\partial I}{\partial z} + W_r \frac{\partial W_r}{\partial z} + \frac{\omega^2 r^2 + W_z^2}{r} \frac{n_z}{n_r} \right)$$

et :

$$\begin{aligned}
 N = & - \frac{1}{r} \frac{\partial \ln b}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial s^*}{\partial \varphi} + \\
 & + \frac{1}{\alpha^2} \left(- \frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \varphi} + \frac{W_r}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} - \frac{\alpha^2 - (W_u^2 + W_z^2)}{r} \frac{W_r W_u}{W_z^2} + \frac{\alpha^2 - (W_u^2 - \omega^2 r^2)}{r} \frac{n_u}{n_r} \right) + \\
 & + \frac{\alpha^2 - (W_u^2 + W_z^2)}{\alpha^2 W_z^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \varphi} + \frac{I}{r} \frac{\partial s}{\partial \varphi} + f_u + W_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} - 2\omega \right) \right]
 \end{aligned}$$

L'équation (3.17) est l'équation principale pour la résolution du problème de l'écoulement sur une surface de première espèce S_1 , dans le cas général.

L'équation caractéristique de l'équation différentielle (3.17) est :

$$\left(1 - \frac{W_z^2}{\alpha^2} \right) r^2 \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 + 2 \frac{W_u W_z}{\alpha^2} r \frac{d\varphi}{dz} + \left(1 - \frac{W_u^2}{\alpha^2} \right) = 0 \quad (3.18)$$

Comme on le voit, c'est une équation du second degré dont la solution est :

$$r \frac{d\varphi}{dz} = - \frac{W_u W_z}{\alpha^2 - W_z^2} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 (W_u^2 + W_z^2) - \alpha^2}}{\alpha^2 - W_z^2} \quad (3.19)$$

Cette équation montre que les racines caractéristiques sont réelles lorsque $\sqrt{W_u^2 + W_z^2} > \alpha$, dans ce cas la méthode des caractéristiques pour deux variables indépendantes peut être appliquée.

Lorsque on a $\sqrt{W_u^2 + W_z^2} < \alpha$, les racines sont imaginaires et il serait plus commode de résoudre l'équation (3.17) par les méthodes matricielles ou de relaxation en l'écrivant sous la forme ci-dessous, obtenue en combinant les équations (3.13) avec l'équation (3.8b) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \ln b \rho}{\partial \varphi} - \frac{n_u}{n_r} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \ln b \rho}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] + \\ + \frac{(b\rho)^2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \varphi} + \frac{T}{r} \frac{\partial s}{\partial \varphi} + f_u + \frac{W_r}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} - W_r \left(\frac{W_u}{r} + 2\omega \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.17a)$$

3.3. Procédure de résolution.

Notons que le choix de l'équation (3.8b) plutôt que (3.8c), pour construire l'équation principale (3.17) ou (3.17a), est dicté par le fait que le terme f_u est en général négligeable devant le terme f_z .

Les différentes grandeurs figurant dans l'équation (3.17) ou (3.17a) sont calculées en utilisant les équations développées précédemment. Parmi ces équations, sept sont indépendantes : l'équation de l'énergie (21) ; les trois équations du mouvement (3.17) ou (3.17a), (3.8a) et (3.8c) ; les deux relations (3.12) définissant la fonction de courant ψ et la condition exprimant l'orthogonalité entre les vecteurs \vec{W} et \vec{f} , équation (3.10) ou (3.10a). En revanche, nous sommes en présence de dix inconnues principales qui sont la fonction de courant ψ , la variable (b) introduite par l'équation (3.11) et qui est proportionnelle à l'épaisseur radiale de la nappe de courant (τ), les trois composantes de la vitesse W_r , W_u et W_z , les trois composantes du vecteur \vec{f} défini par l'équation (3.7), l'entropie (s) et la rothalpie (I) (qui, compte tenu des inconnues déjà citées, peut être représentée aussi par l'enthalpie h ou encore par la masse volumique ρ). La connaissance de ces grandeurs est nécessaire pour caractériser l'écoulement et la forme exacte de la surface S_1 .

En règle générale, la variable (b) est calculable à partir de l'équation (3.11a) ou déduite de la variation de l'épaisseur radiale de la nappe de courant calculée sur la base des résultats de la résolution de l'écoulement sur les surfaces de seconde espèce S_2 . La variable (b) sera donc considérée ici comme une donnée.

Lorsqu'on envisage la résolution complète du problème (c'est-à-dire la détermination alternative des surfaces S_2 puis des surfaces S_1 selon un processus itératif qui est poussé jusqu'à l'obtention d'un ajustement satisfaisant des deux familles de surfaces de courant), on pourrait obtenir la forme des surfaces S_1 simplement en joignant les lignes de courant correspondantes obtenues suite au calcul des surfaces S_2 au cours de l'étape précédente du processus de calcul. Alors, la connaissance de l'équation des surfaces S_1 nous fournira deux équations supplémentaires entre les composantes du vecteur \vec{n} (ou du vecteur \vec{f}) à partir des équations (1.26). A présent, notre problème devient un problème de neuf équations à neuf inconnues.

3.5. Écoulement sur une surface cylindrique.

Lorsqu'on peut admettre que les surfaces S_1 sont de forme cylindrique (ceci étant justifié notamment à l'entame des calculs dans la procédure générale de résolution de l'écoulement à travers des turbomachines dont les surfaces du carter et du moyeu sont quasiment cylindriques), la normale à la surface devient radiale tandis que la composante radiale de la vitesse s'annule, soit :

$$n_u = n_z = f_u = f_z = W_r = 0 \quad (3.28)$$

L'équation (3.4) devient :

$$c = -\frac{\partial W_r}{\partial r} \quad (3.29)$$

Cette quantité est relativement faible et peut dans ce cas être négligée, ce qui conduit à une valeur du paramètre (b) égale à l'unité d'après l'équation (3.11).

Par ailleurs, dans le cas d'un écoulement cylindrique, les dérivées de la rothalpie peuvent être remplacées par celles de l'enthalpie totale relative ($H_w = h + \frac{W^2}{2}$), car sur une surface de courant, la vitesse d'entraînement (U) reste invariable.

Les équations gouvernant l'écoulement permanent sur une surface de forme cylindrique seront par conséquent :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = r \rho b W_z \quad (3.30a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\rho b W_u \quad (3.30b)$$

$$T \frac{Ds}{Dt} = Q \quad (3.31)$$

$$\frac{DH_w}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} \quad (3.32)$$

et l'équation principale sera dans ce cas:

$$\left(1 - \frac{W_u^2}{\alpha^2}\right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{W_u W_z}{\alpha^2 r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi \partial z} + \left(1 - \frac{W_z^2}{\alpha^2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{N}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + M \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (3.33)$$

avec : $M = -\frac{\partial \ln b}{\partial z} + \frac{\partial s^*}{\partial z} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial H_w}{\partial z}$

et : $N = -\frac{1}{r} \frac{\partial \ln b}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial s^*}{\partial \varphi} + \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{\alpha^2 - W_u^2}{W_z^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_w}{\partial \varphi} + \frac{\alpha^2 - W_z^2}{W_z^2} \frac{T}{r} \frac{\partial s}{\partial \varphi} \right]$

ou bien :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \cdot \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \ln b \rho}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \ln b \rho}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{(b\rho)^2}{1} \frac{\partial \psi}{r \partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_w}{\partial \varphi} - \frac{T}{r} \frac{\partial s}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad (3.33a)$$

Un traitement complet du problème général du calcul quasi-3D de l'écoulement, nécessitant la résolution des équations alternativement sur une famille de surfaces S_1 puis sur une famille de surfaces S_2 , et ce, plusieurs fois suivant un processus itératif qui ne devrait être arrêté que lorsqu'on atteint une concordance acceptable entre les résultats obtenus en parcourant les deux familles de surfaces, ne peut être envisageable dans le cadre d'un projet de fin d'études où les fondements de la théorie de l'écoulement quasi-3D sont analysés et exposés en même temps. Aussi, nous nous contenterons dans ce qui suit d'amorcer la procédure par la résolution du problème de l'écoulement permanent, incompressible et isentropique sur une surface de forme cylindrique.

Dans ces conditions, l'équation (3.33a) se simplifie pour donner l'équation :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1)$$

Le domaine physique du problème est représenté sur la figure (4.1) ci-dessous.

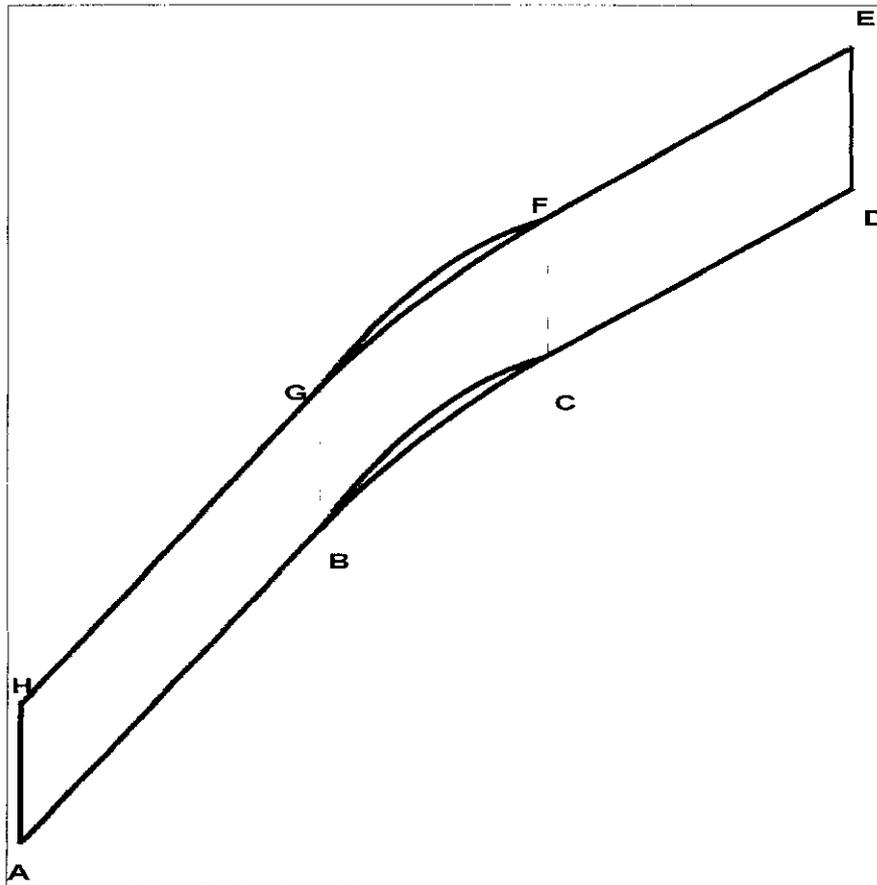


Figure 4.1: schéma du domaine physique

Sur la frontière AD constituée de l'extrados de l'aube et des prolongements AB et CD, la valeur de la fonction de courant est fixée à ψ_1 .

Sur la frontière HE constituée de l'intrados de l'aube adjacente et des prolongements HG et FE, la valeur de la fonction de courant est fixée à ψ_2 telle que la différence $\psi_2 - \psi_1$ est égale au débit passant par le canal interaube.

Les frontières AH et DE sont placées suffisamment loin en amont et en aval du passage interaube pour que l'écoulement puisse y être supposé uniforme. Nous admettons donc une loi de variation linéaire de la fonction de courant sur ces deux frontières.

Dans ce qui suit, nous allons exposer la méthode de résolution de l'équation (4.1). Il s'agit de la méthode de relaxation. Nous avons choisi cette méthode parce qu'elle est relativement simple à mettre en œuvre et qu'elle convient parfaitement au calcul d'un écoulement subsonique.

4.1. Méthode de relaxation pour la résolution de l'équation (4.1).

Soit $\psi(z, \varphi)$ la fonction de courant définie sur la surface de courant S_1 d'équation $r = \text{cste}$. Le développement en séries de Taylor [6] de cette fonction au voisinage d'un point de coordonnées (z, φ) limité au second ordre donne :

$$\begin{aligned} \psi(z + dz, \varphi + d\varphi) = & \psi(z, \varphi) + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} d\varphi + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} (dz)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} (d\varphi)^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \varphi} dz d\varphi \end{aligned} \quad (4.2)$$

Considérons à présent, un point de coordonnées (z, φ) représentant un nœud du maillage effectué sur le domaine physique considéré (voir figure 4.5). Ce nœud sera entouré de quatre nœuds dont les coordonnées sont indiquées sur la figure ci-dessous.

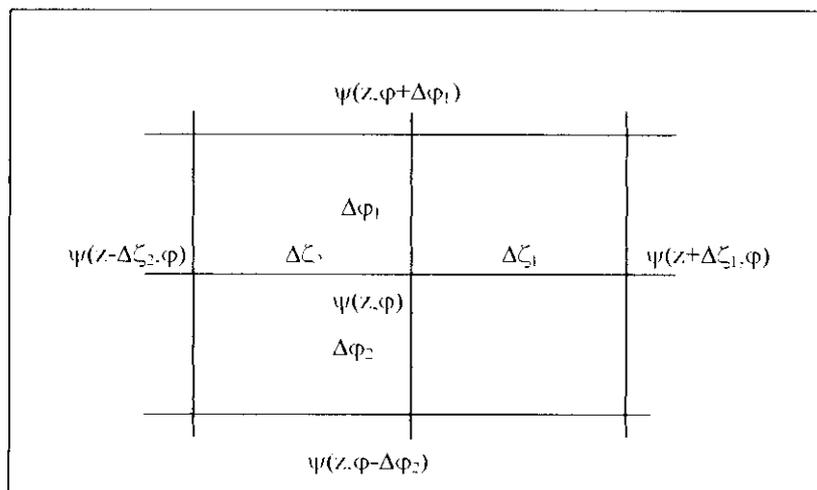


Figure 4.2 : schéma général de maillage

Ici, nous considérons le cas général d'un maillage non régulier.

L'application de l'équation (4.2) à la situation du point (i, j) dans le maillage donne lieu aux quatre équations suivantes.

$$\psi(z + \Delta\zeta_1, \varphi) = \psi(z, \varphi) + \Delta\zeta_1 \frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{2} \Delta\zeta_1^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad (4.3)$$

$$\psi(z - \Delta\zeta_2, \varphi) = \psi(z, \varphi) - \Delta\zeta_2 \frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{2} \Delta\zeta_2^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad (4.4)$$

$$\psi(z_2, \varphi + \Delta\varphi_1) = \psi(z, \varphi) + \Delta\varphi_1 \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{1}{2} \Delta\varphi_1^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \quad (4.5)$$

$$\psi(z_2, \varphi - \Delta\varphi_2) = \psi(z, \varphi) - \Delta\varphi_2 \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{1}{2} \Delta\varphi_2^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \quad (4.6)$$

En divisant l'équation (4.3) par $(\Delta\zeta_1(\Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2))$, l'équation (4.4) par $(\Delta\zeta_2(\Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2))$, l'équation (4.5) par $(r^2\Delta\varphi_1(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2))$ et l'équation (4.6) par $(r^2\Delta\varphi_2(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2))$ on obtient les équations (4.3a) à (4.6a) ci-dessous :

$$\frac{\psi_{i,j}}{\Delta\zeta_1(\Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2)} = \frac{\psi_{i,j}}{\Delta\zeta_1(\Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2)} + \frac{1}{\Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2} \frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\Delta\zeta_1}{\Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2} \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad (4.3a)$$

$$\frac{\psi_{i,j}}{\Delta\zeta_2(\Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2)} = \frac{\psi_{i,j}}{\Delta\zeta_2(\Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2)} - \frac{1}{\Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2} \frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\Delta\zeta_2}{\Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2} \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad (4.4a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 \Delta\varphi_1(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)} \psi_{i,j+1} &= \frac{1}{r^2 \Delta\varphi_1(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)} \psi_{i,j} + \\ &+ \frac{1}{r^2(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{1}{2 r^2(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \end{aligned} \quad (4.5a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 \Delta\varphi_2(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)} \psi_{i,j-1} &= \frac{1}{r^2 \Delta\varphi_2(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)} \psi_{i,j} + \\ &- \frac{1}{r^2(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{1}{2 r^2(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \end{aligned} \quad (4.6a)$$

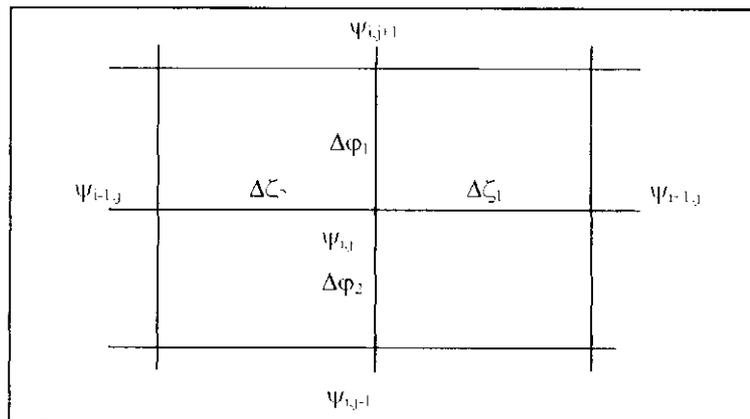


Figure 4.3 : nouvelle notation

4.6. Profil d'aube.

Le profil utilisé n'est pas un profil standard. Nos investigations concernant un tel profil s'étant avérées vaines, nous avons choisi de construire un profil qui se rapproche de ceux utilisés sur les compresseurs d'après les indications fournies par techniques de l'ingénieur [3].

Dans beaucoup de profils standard, le squelette est en forme d'arc de cercle. Nous avons choisi de représenter l'épaisseur de l'aube par une fonction parabolique. L'aube ainsi obtenue est proche de celles qu'on emploie généralement sur les compresseurs transsoniques (voir figure 4.4). Néanmoins, le programme peut être modifié en cas de besoin pour s'adapter à n'importe quel autre profil.

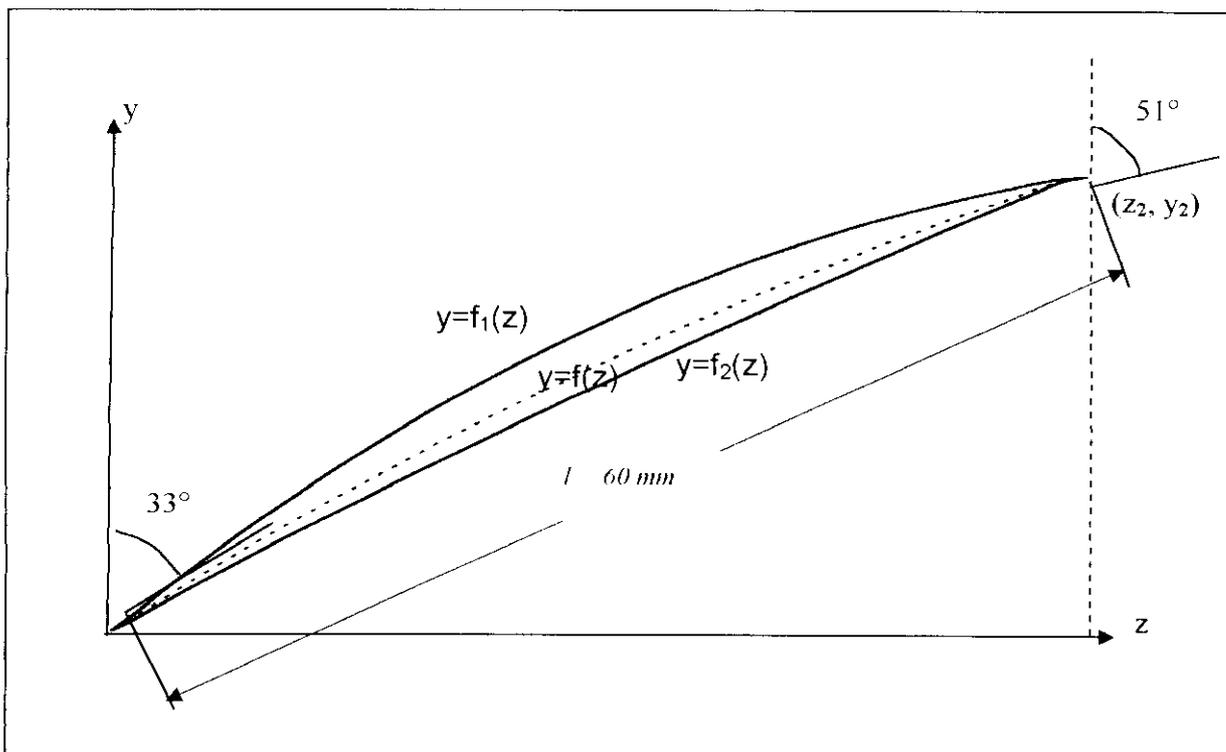


Figure 4.4 : schéma du profil d'aube

Le squelette étant de forme cylindrique, les coordonnées d'un point lui appartenant vérifieront l'équation :

$$y = f(z) = b + \sqrt{R_a^2 - (z - a)^2} \tag{4.20}$$

et :

$$f'(z) = -(z - a)(R_a^2 - (z - a)^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Les paramètres (a), (b) et (R_a) seront alors déterminés à partir du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = R_a^2 \\ a(R_a^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{tg}57^\circ \\ z_2^2 + y_2^2 = 0.06^2 \\ (z_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 = R^2 \\ (a - z_2)(R_a^2 - (z_2 - a)^2)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{tg}39^\circ \end{cases}$$

La résolution de ce système d'équations nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} a &= 0.158242 \\ b &= -0.102857 \\ R_a &= 0.188624 \\ x_2 &= 0.039402 \\ y_2 &= 0.045249 \end{aligned}$$

L'équation du squelette (4.20) s'écrira finalement :

$$y = f(z) = -0.102857 + \sqrt{0.188624^2 - (z - 0.158242)^2}$$

On représente l'épaisseur de l'aube à l'aide d'une fonction parabolique et les équations de l'extrados et de l'intrados seront les suivantes :

Pour l'extrados :

$$f_1(z) = -0.102857 + \sqrt{0.188624^2 - (z - 0.158242)^2} - 10z(z - 0.039402)$$

Pour l'intrados :

$$f_2(z) = -0.102857 + \sqrt{0.188624^2 - (z - 0.158242)^2} + z(z - 0.039402)$$

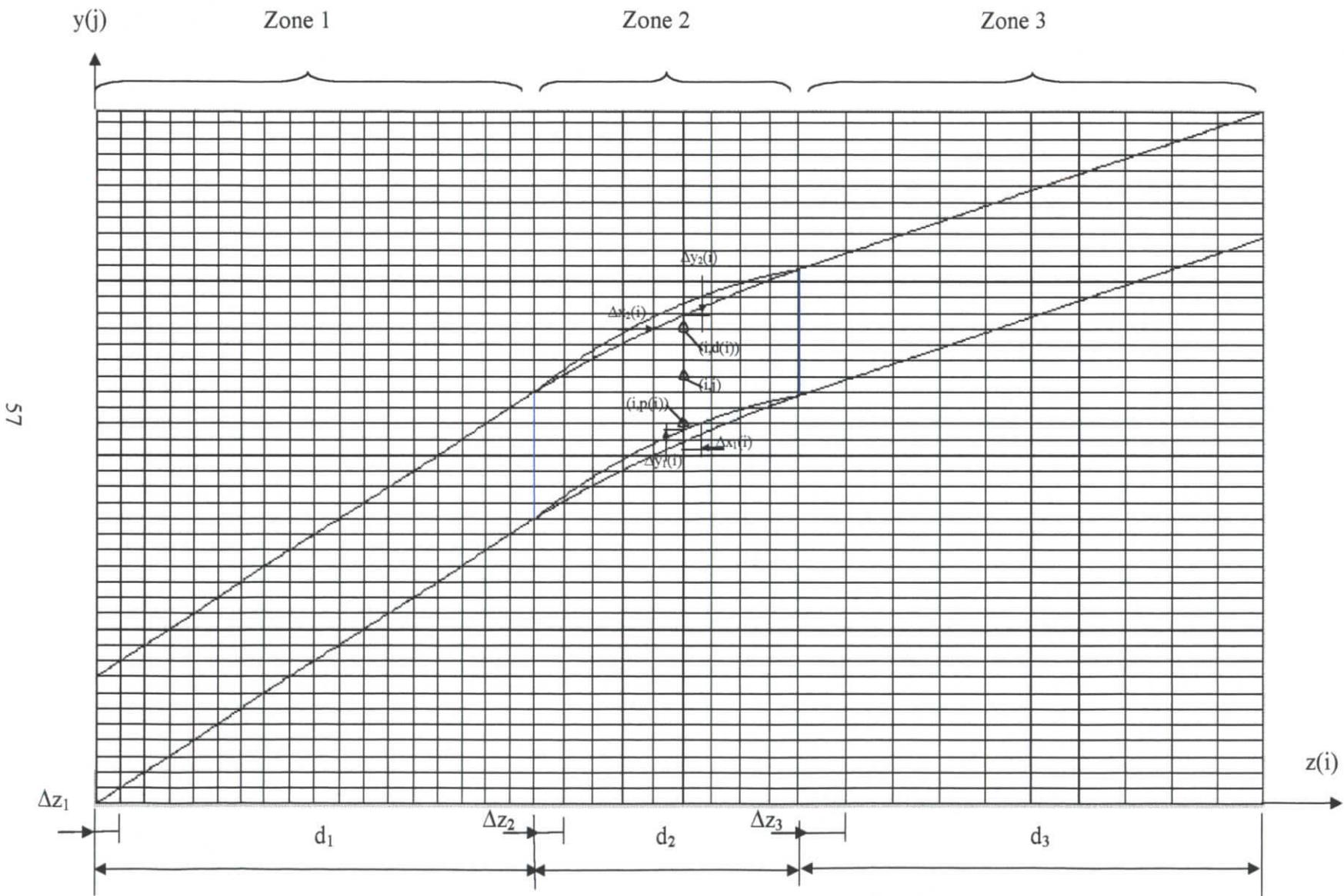
4.7. Construction du maillage.

Nous allons dans ce qui suit décrire de façon plus détaillée les critères qui ont déterminé les choix des différents paramètres géométriques et par suite la procédure de calcul de la fonction de courant ψ qui fera l'objet de l'annexe A.

Sur chacune des surfaces considérées, nous avons procédé à un maillage comme représenté sur la figure (4.5) de la page ci-après.

Nous allons à titre d'exemple expliquer la manière dont les différents pas ont été choisis et de quelle façon on procède au balayage du domaine lors des calculs dans le cas de la surface de rayon $r_2 = 0.10$ m.

Figure 4.5 : représentation du domaine et du maillage effectué



57

4.8. Données du problème.

Les données suivantes sont communes aux trois surfaces de courant de type S_1 que nous allons considérer et dont les rayons sont respectivement de 0.08, 0.10 et 0.12m.

- Vitesse de rotation : $N=15000 \text{ tr/min}$ ($\omega=1570,8 \text{ rad/s}$)
- Nombre de Mach absolu à l'entrée : $Ma(v_1)=0.4$
- Pression totale à l'entrée : $P_{t1}=101325 \text{ pa}$
- Température totale à l'entrée : $T_{t1}=288,15 \text{ K}$
- Angle d'attaque : $\beta_1=33^\circ$
- Angle de fuite : $\beta_2=51^\circ$
- Longueur de la corde : $l=60 \text{ mm}$
- Constante du fluide : $R=287 \text{ J/kg.K}$
- Chaleur massique du fluide à pression constante : $c_p=1004,5 \text{ J/kg.K}$

A partir de ces données on obtient les résultats suivants :

- La masse volumique du fluide : $\rho = \frac{P_t}{RT_t} = 1,225 \text{ kg/m}^3$
- La température à l'entrée : $T_1 = \frac{T_t}{1 + \frac{Ma(v_1)^2 \gamma R}{2c_p}} = 279,2 \text{ K}$
- La vitesse du son à l'entrée : $a_1 = \sqrt{\gamma RT_1} = 334,937 \text{ m/s}$
- La vitesse absolue à l'entrée : $V_1 = Ma(v_1)a_1 = 133,975 \text{ m/s}$

4.8.1. Données concernant chaque surface.

Surface S_1 de rayon $r_1=0.08 \text{ m}$:

- Vitesse d'entraînement : $U_1 = \omega r_1 = 125,664 \text{ m/s}$
- Vitesse relative à l'entrée : $W_1 = \sqrt{V_1^2 + U_1^2} = 183,687 \text{ m/s}$
- Nombre de mach à l'entrée : $Ma(w_1) = \frac{W_1}{a_1} = 0,548$
- Rothalpie : $I = c_p T_1 + \frac{1}{2} W_1^2 - \frac{1}{2} U_1^2 = 289431,14 \text{ J/kg}$
- Espacement interaube : $\lambda = \frac{2\pi r_1}{Z} = 0,035904 \text{ m}$
- Débit passant dans le canal interaube :
 $\psi_2 - \psi_1 = \int \rho W_r r d\varphi = \rho W_r \lambda = \rho W_1 \cos \beta_1 \lambda = 5,8935$

Le domaine physique utilisé se décompose en trois zones, les équations des frontières inférieures et supérieures du domaine, déterminées de la même manière que pour la surface de rayon $r=0.10$, sont données ci-après :

- Frontière inférieure :
 1- Pour $0 \leq z \leq 0,052452$ $y=1,54z$

2- Pour $0.052452 \leq z \leq 0.091854$

$$y = -0.022081 + \sqrt{0.188624^2 - (z - 0.210694)^2} - 10(z - 0.052452)(z - 0.091854)$$

3- Pour $0.091854 \leq z \leq 0.145954$ $y = 0.81z + 0.049996$

• Frontière supérieure :

1- Pour $0 \leq z \leq 0.052452$ $y = 1.54z + 0.035904$

2- Pour $0.052452 \leq z \leq 0.091854$

$$y = 0.013823 + \sqrt{0.188624^2 - (z - 0.210694)^2} - 10(z - 0.052452)(z - 0.091854)$$

3- Pour $0.091854 \leq z \leq 0.145954$ $y = 0.81z + 0.0859$

Les incréments utilisés sont les suivants:

$$\Delta y = 0.001122$$

$$\Delta z_1 = 0.0007285$$

$$\Delta z_2 = 0.0010945$$

$$\Delta z_3 = 0.0013525$$

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta y}{r_1} = 0.014025$$

Surface S_1 de rayon $r_2 = 0.10$ m :

- Vitesse d'entraînement : $U_1 = \omega r_1 = 157.0796$ m/s
- Vitesse relative à l'entrée : $W_1 = \sqrt{V_1^2 + U_1^2} = 206.454$ m/s
- Nombre de mach à l'entrée : $Ma(w_1) = \frac{W_1}{a_1} = 0.616$
- Rothalpie : $I = c_p T_1 + \frac{1}{2} W_1^2 - \frac{1}{2} U_1^2 = 289431.14$ J/kg
- Espacement interaube : $\lambda = \frac{2\pi r_1}{Z} = 0.04488$ m
- Débit passant dans le canal interaube :
 $\psi_2 - \psi_1 = \int \rho W_2 r d\varphi = \rho W_2 \lambda = \rho W_1 \cos \beta_1 \lambda = 7.336$

Surface S_1 de rayon $r_1 = 0.12$ m :

- Vitesse d'entraînement : $U_1 = \omega r_1 = 188.496$ m/s
- Vitesse relative à l'entrée : $W_1 = \sqrt{V_1^2 + U_1^2} = 231.258$ m/s
- Nombre de mach à l'entrée : $Ma(w_1) = \frac{W_1}{a_1} = 0.69$
- Rothalpie : $I = c_p T_1 + \frac{1}{2} W_1^2 - \frac{1}{2} U_1^2 = 289431.14$ J/kg

- Espacement interaube : $\lambda = \frac{2\pi r_1}{Z} = 0.053856 \text{ m}$
- Débit passant dans le canal interaube

$$\psi_2 - \psi_1 = \int \rho W_z r d\varphi = \rho W_z \lambda = \rho W_1 \cos \beta_1 \lambda = 8.839$$

Le domaine physique utilisé se décompose en trois zones, les équations des frontières inférieures et supérieures du domaine sont données ci-après :

- Frontière inférieure :

1- Pour $0 \leq z \leq 0.078678$ $y = 1.54z$

2- Pour $0.078678 \leq z \leq 0.11808$

$$y = 0.018307 + \sqrt{0.188624^2 - (z - 0.23692)^2} - 10(z - 0.078678)(z - 0.11808)$$

3- Pour $0.11808 \leq z \leq 0.20119$ $y = 0.81z + 0.069141$

- Frontière supérieure :

1- Pour $0 \leq z \leq 0.078678$ $y = 1.54z + 0.053856$

2- Pour $0.078678 \leq z \leq 0.11808$

$$y = 0.072163 + \sqrt{0.188624^2 - (z - 0.23692)^2} - 10(z - 0.078678)(z - 0.11808)$$

3- Pour $0.11808 \leq z \leq 0.20119$ $y = 0.81z + 0.122997$

Les incréments utilisés sont les suivants:

$$\Delta y = 0.001683$$

$$\Delta z_1 = 0.00109275$$

$$\Delta z_2 = 0.0010945$$

$$\Delta z_3 = 0.00207775$$

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta y}{r_1} = 0.014025$$

Figure 5.1 : fonction de courant pour $r=0.08$

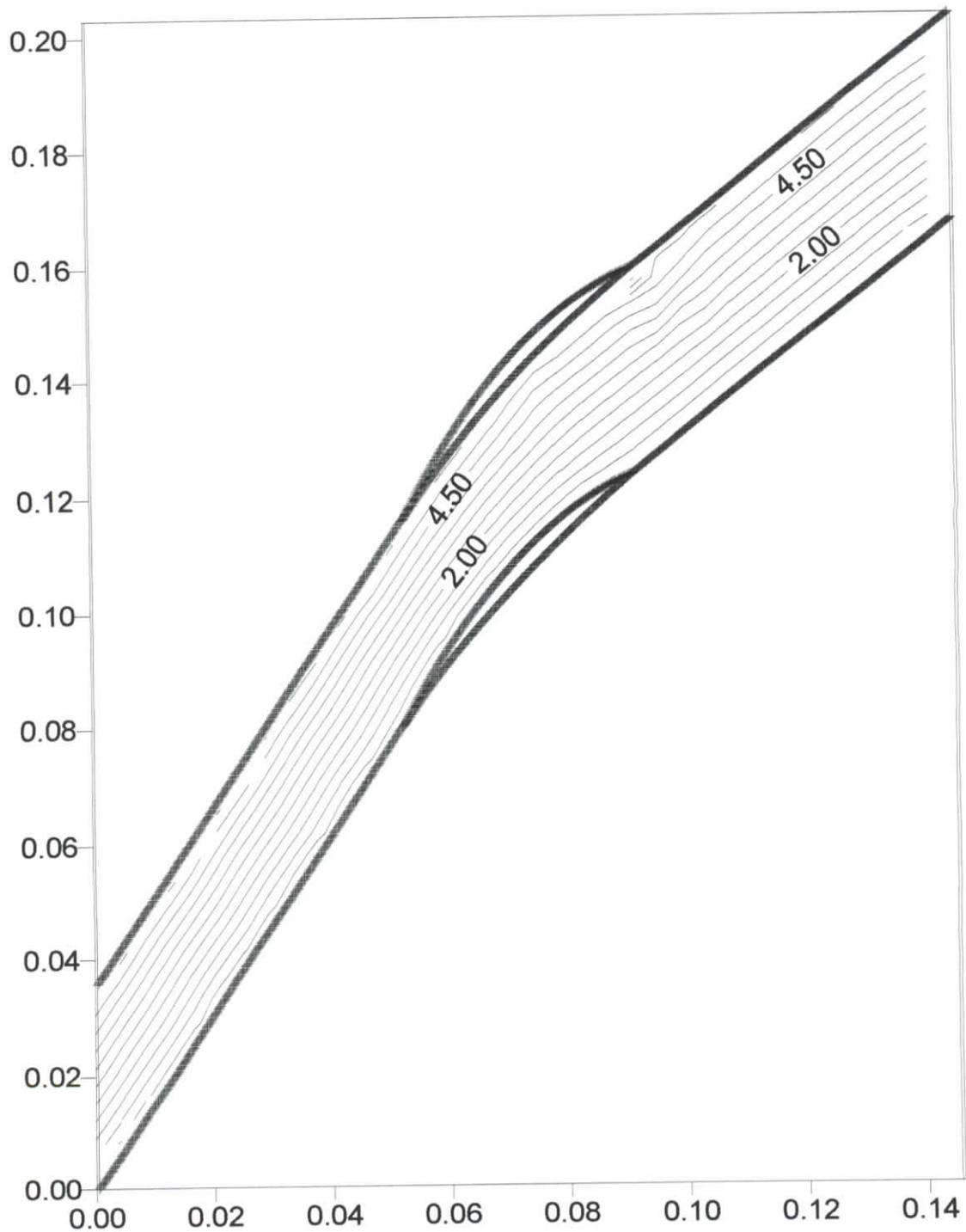


Figure 5.2 : température pour $r=0.08$

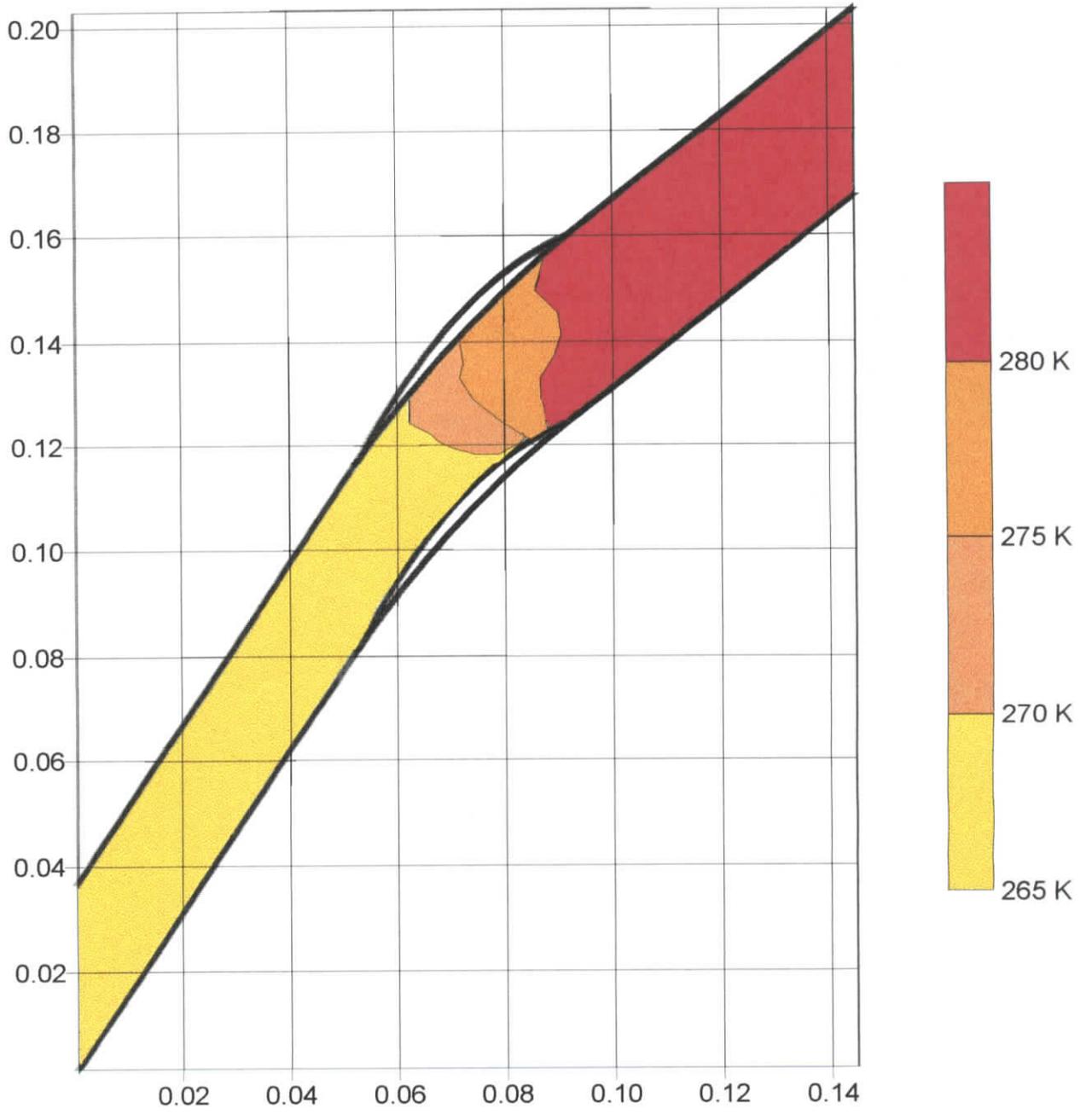


Figure 5.3 : nombre de mach pour $r=0.08$

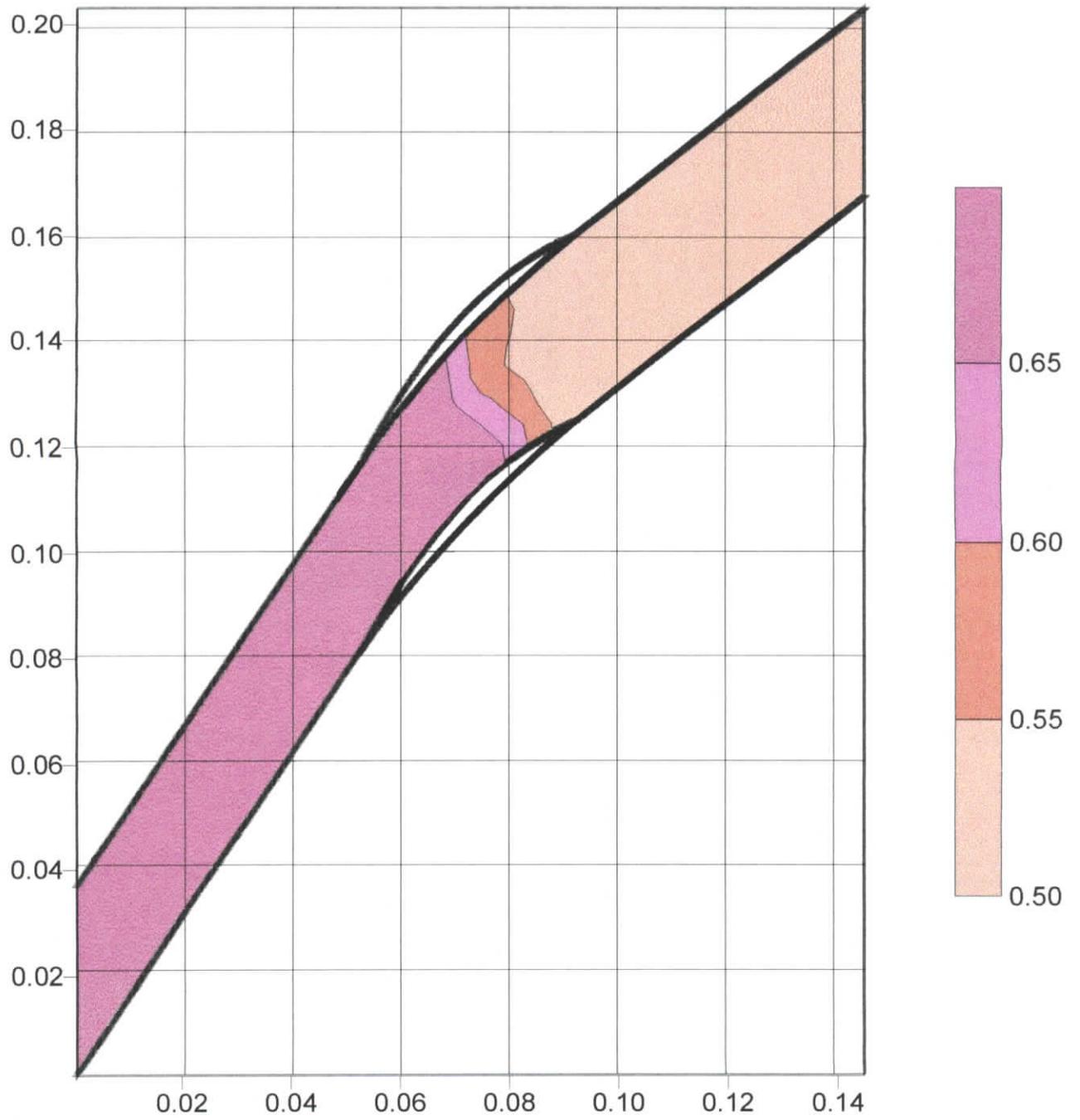
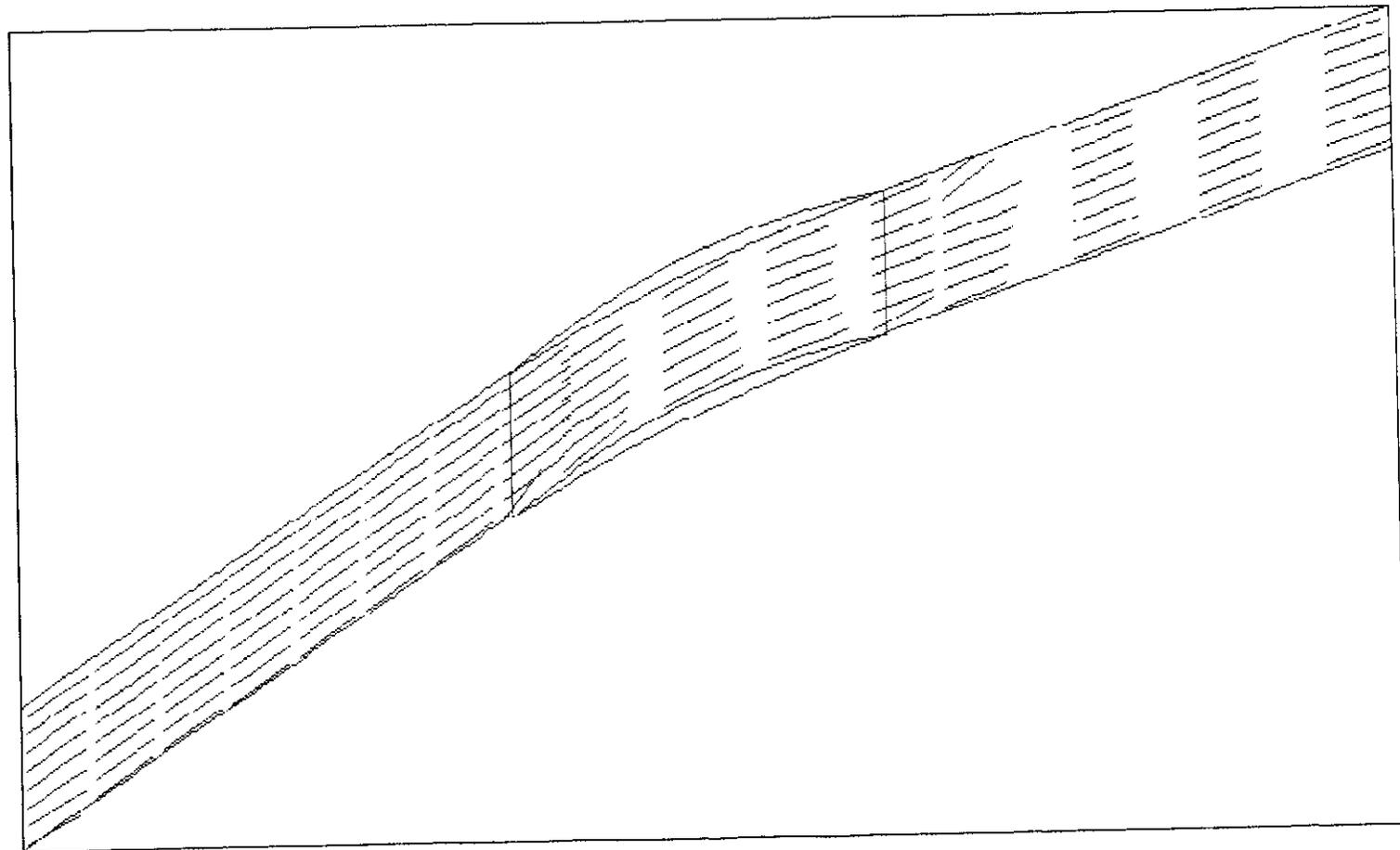


Figure 5.4



Vitesses pour $r=0.08$

Figure 5.5 : fonction de courant pour $r=0.10$

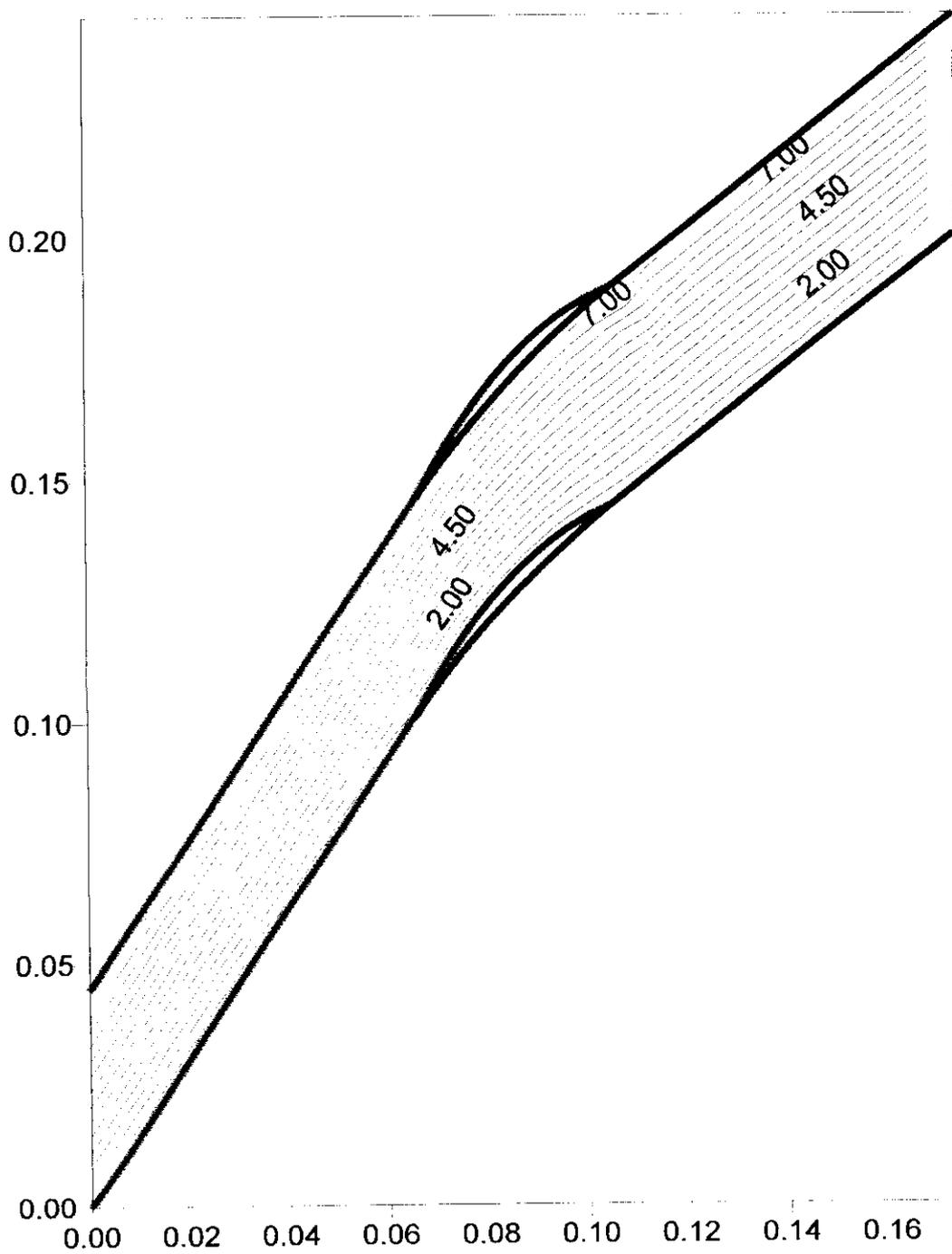


Figure 5.6 : température pour $r=0.10$

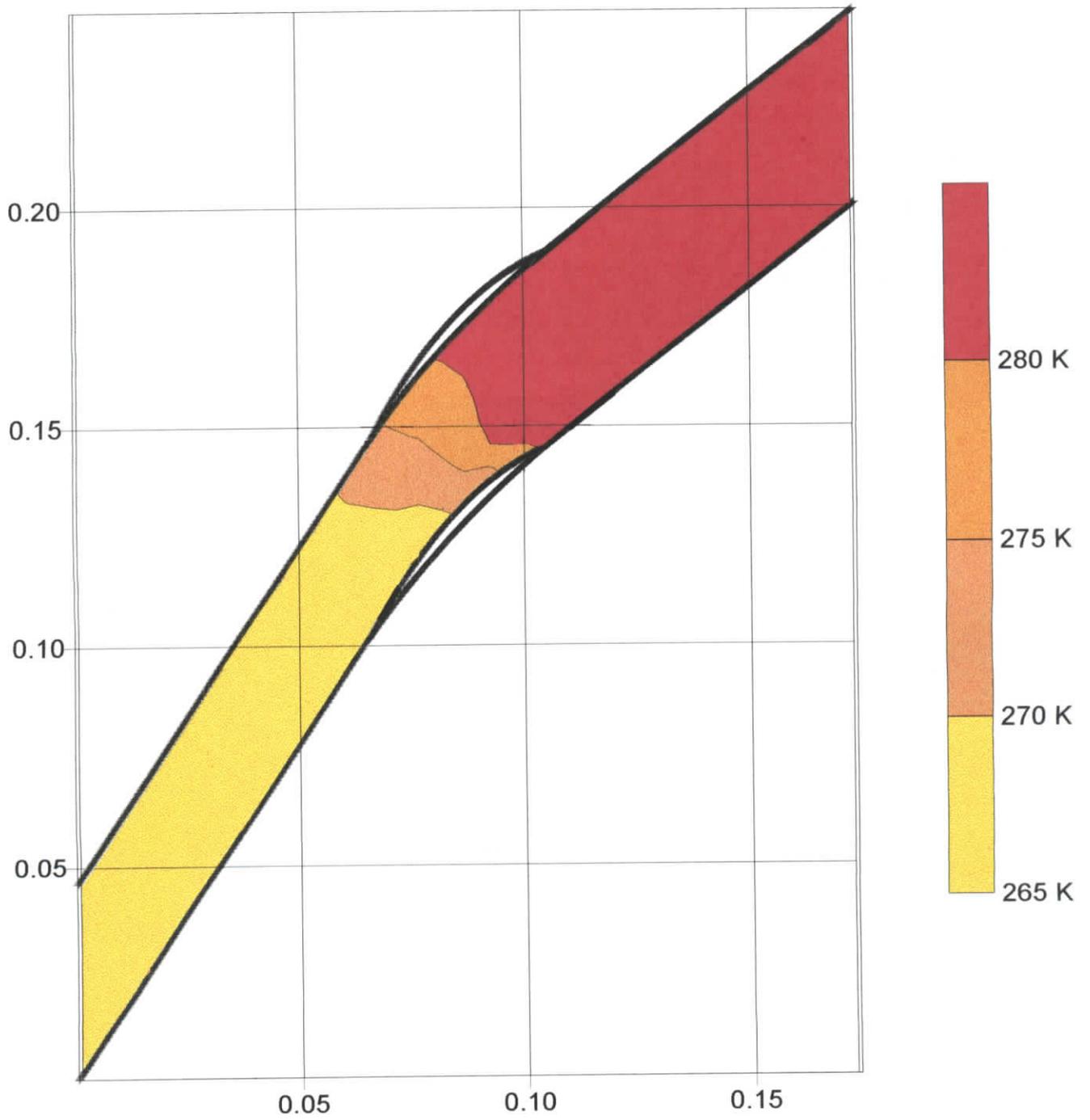


Figure 5.7 : nombre de mach pour $r=0.10$

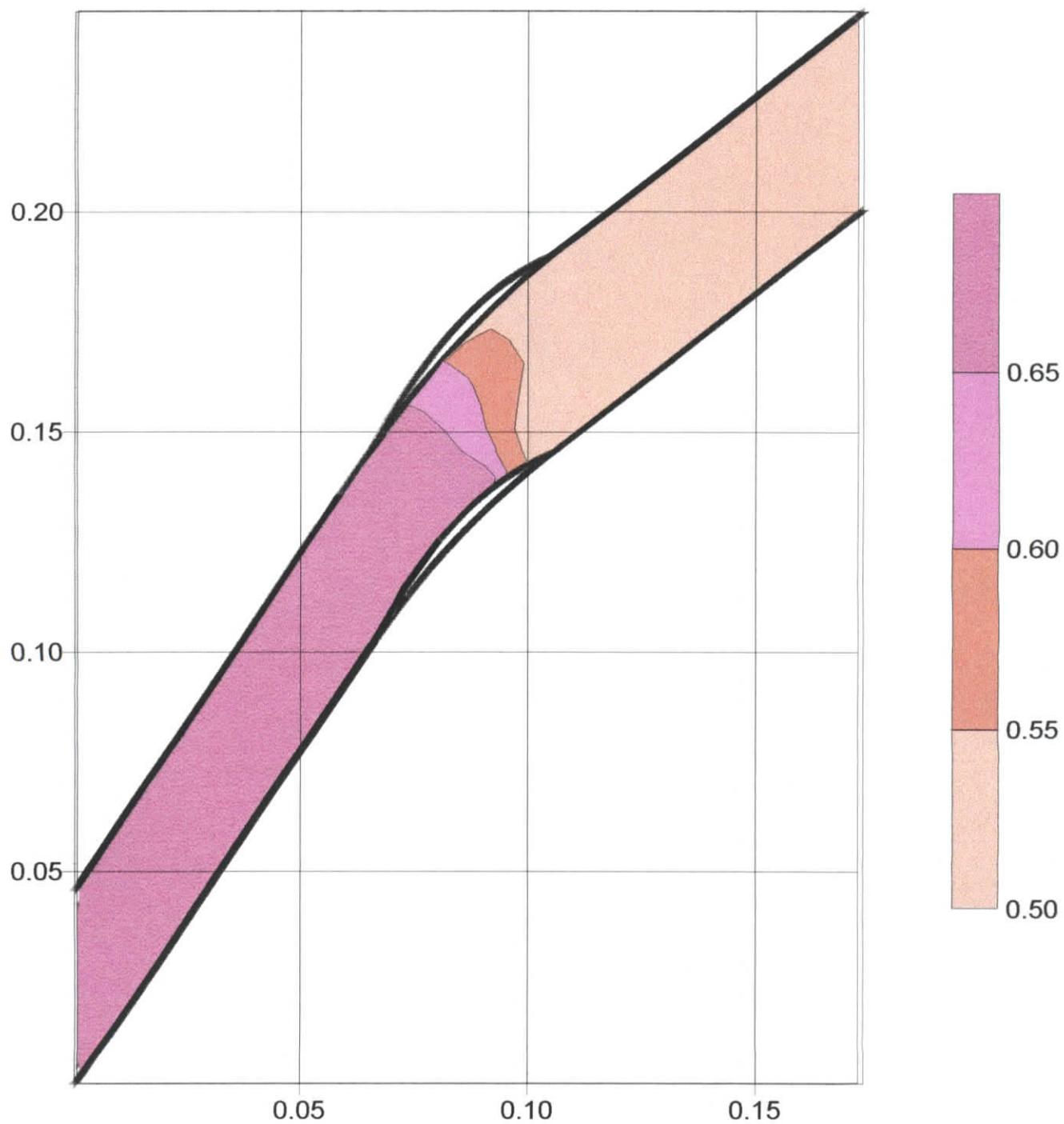


Figure 5.8

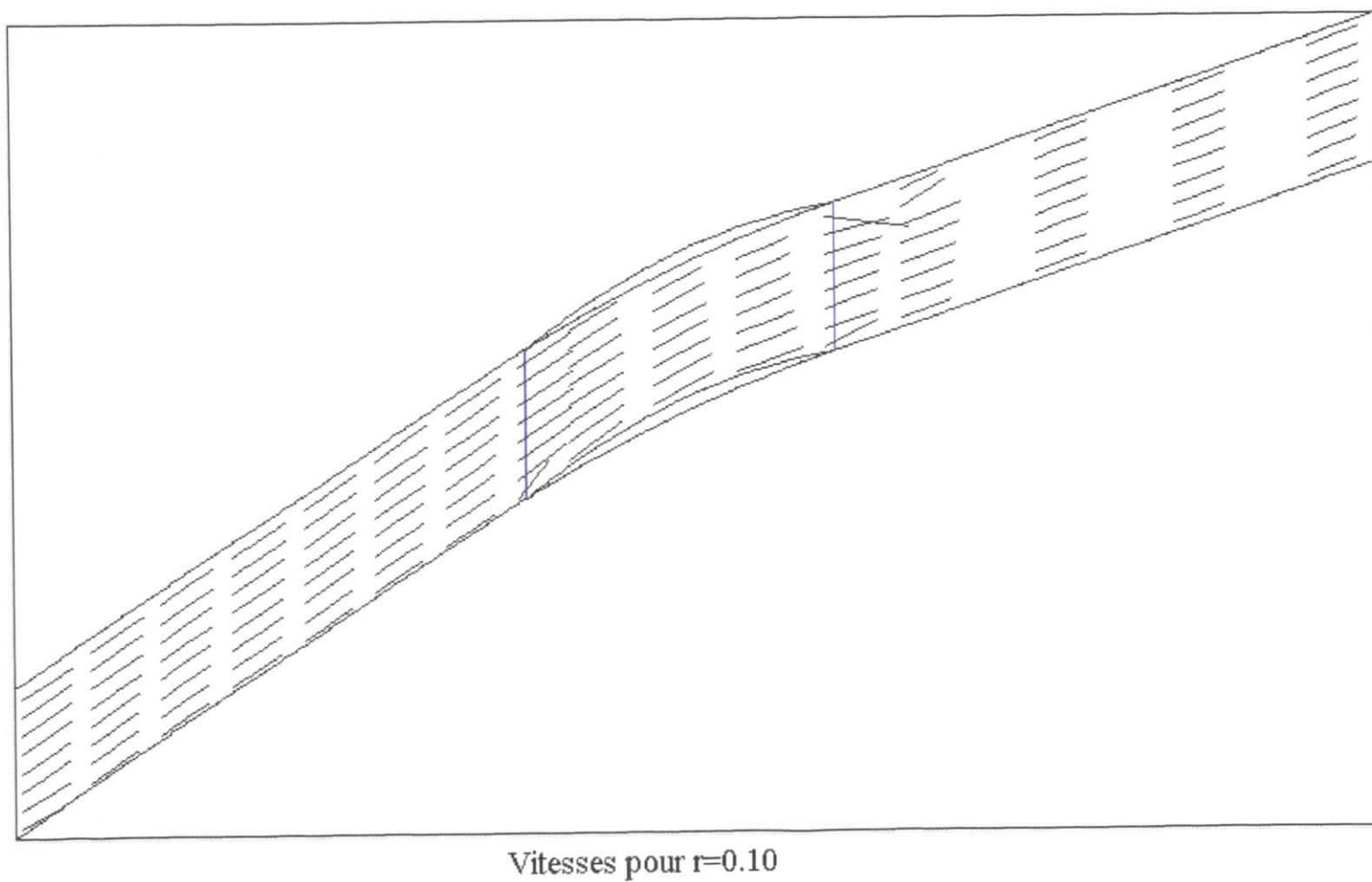


Figure 5.9 : Fonction de courant pour $r=0.12$

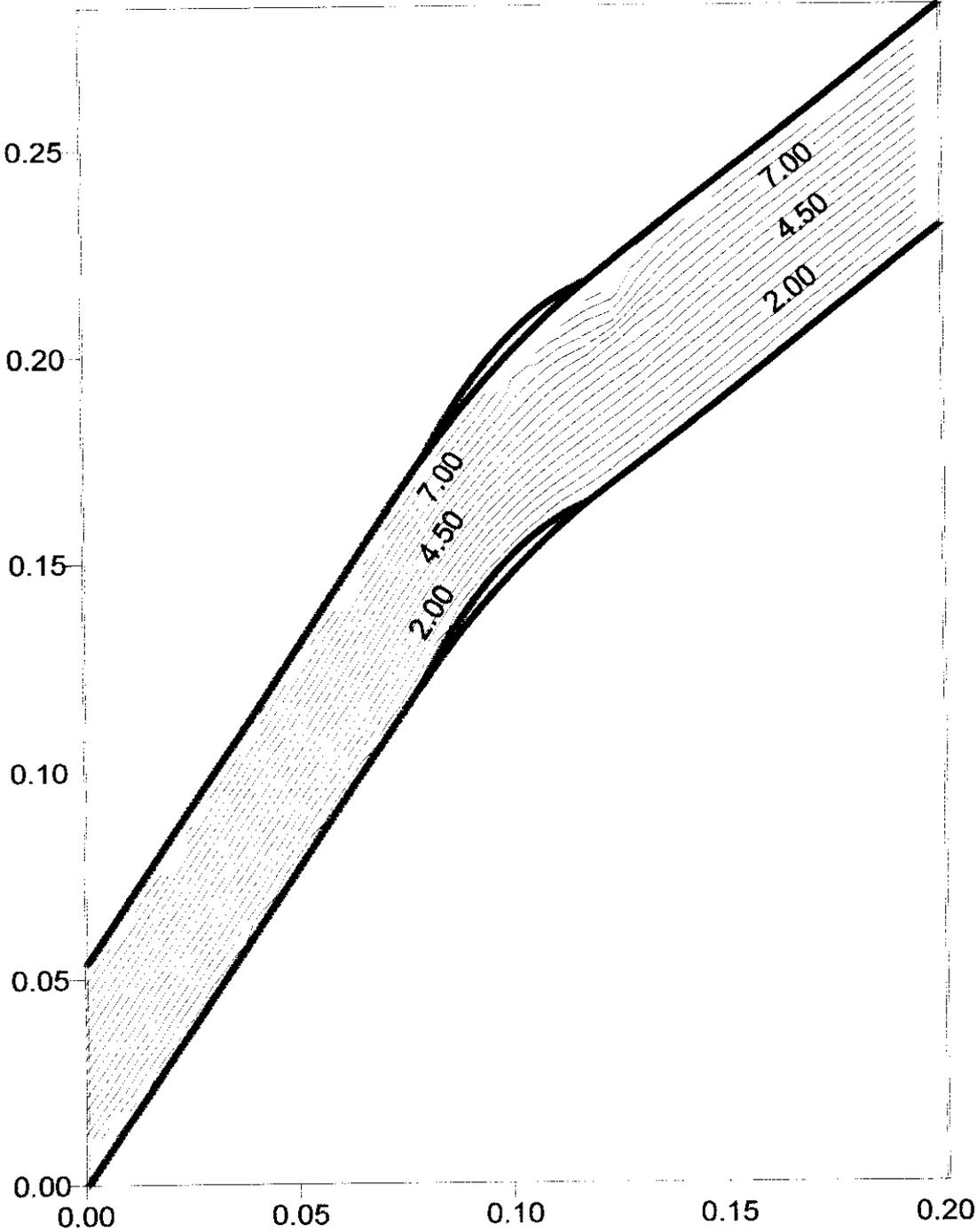


Figure 5.10 : température pour $r=0.12$

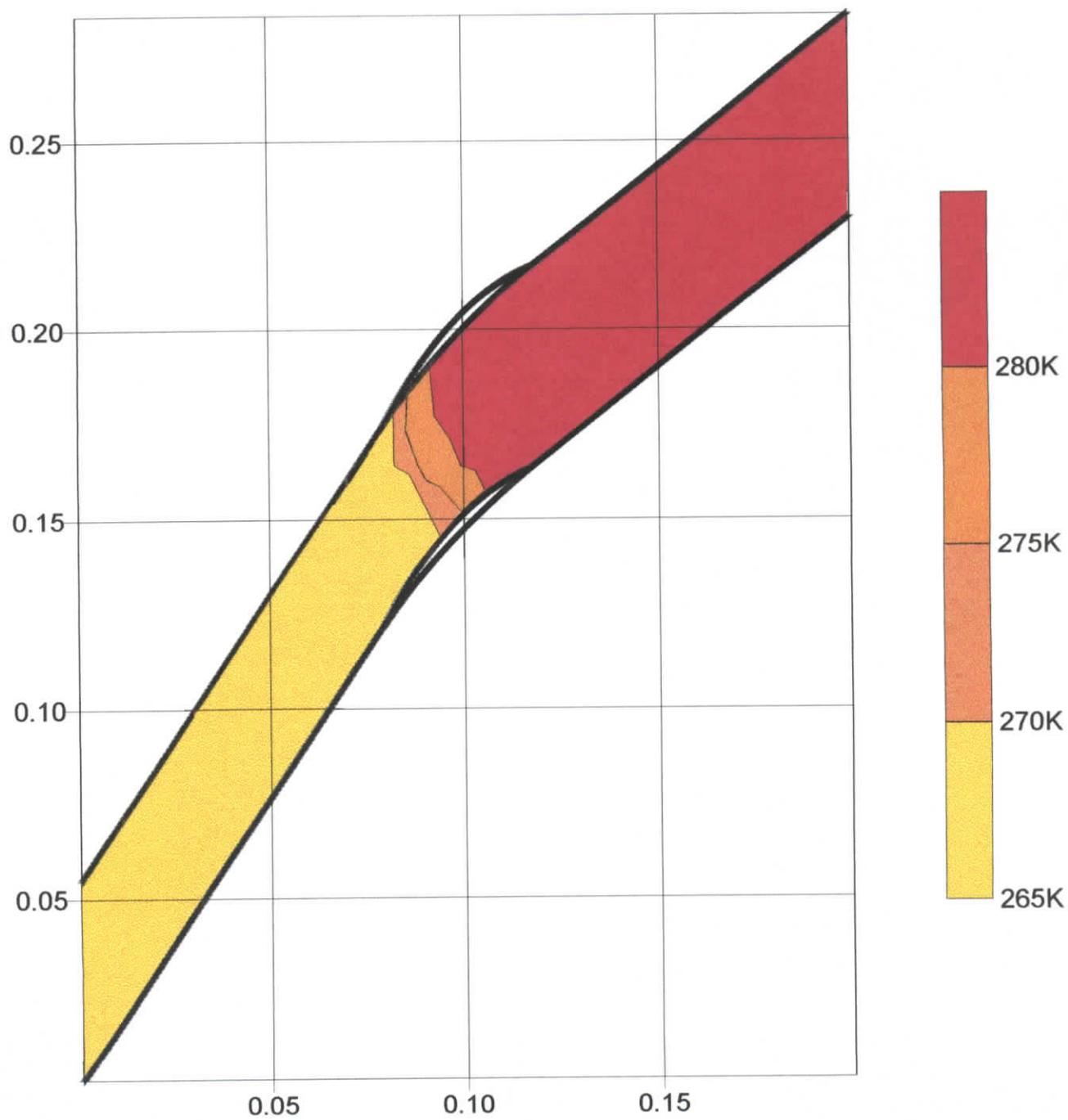


figure 5.11 : nombre de mach pour $r=0.12$

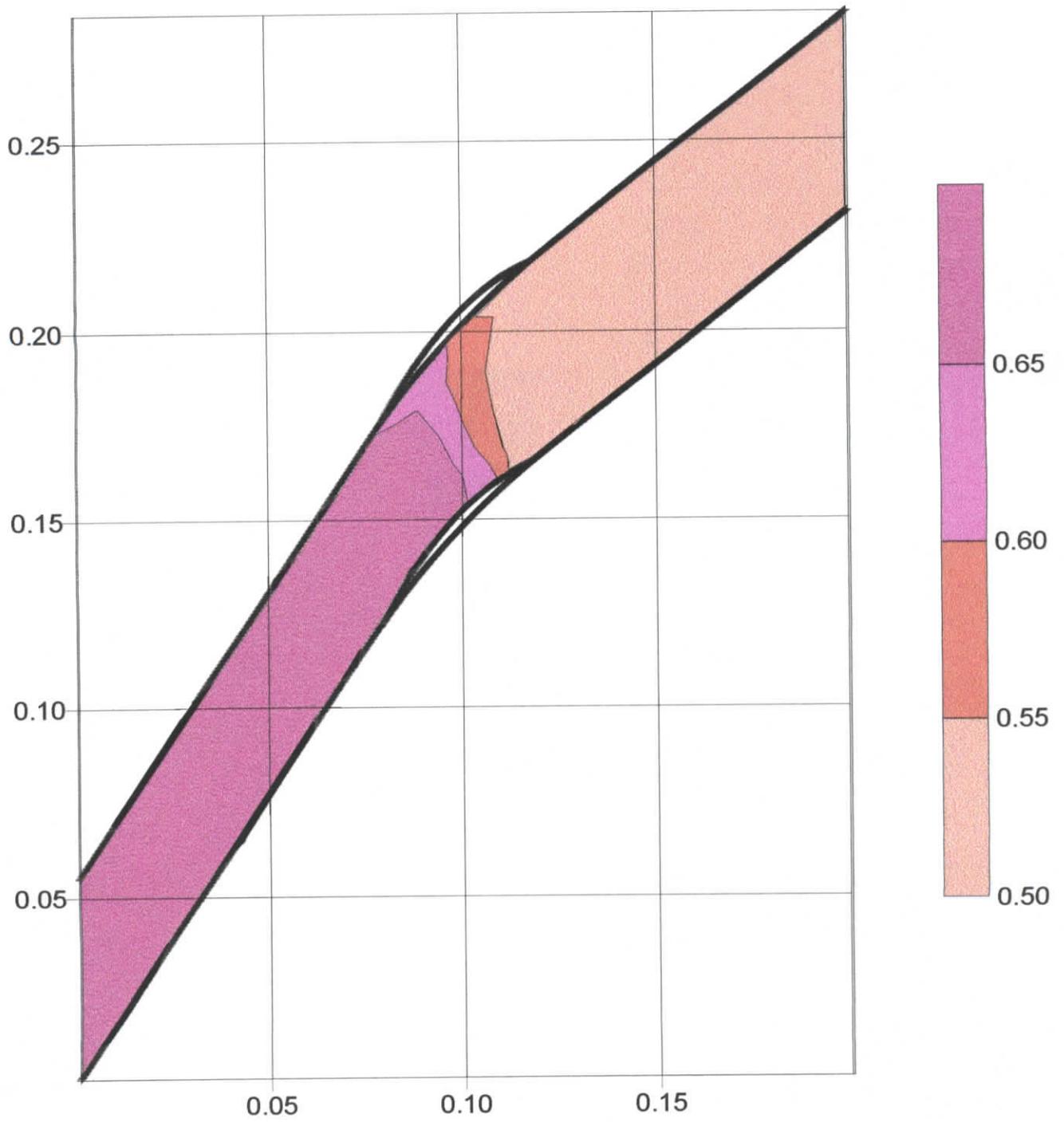
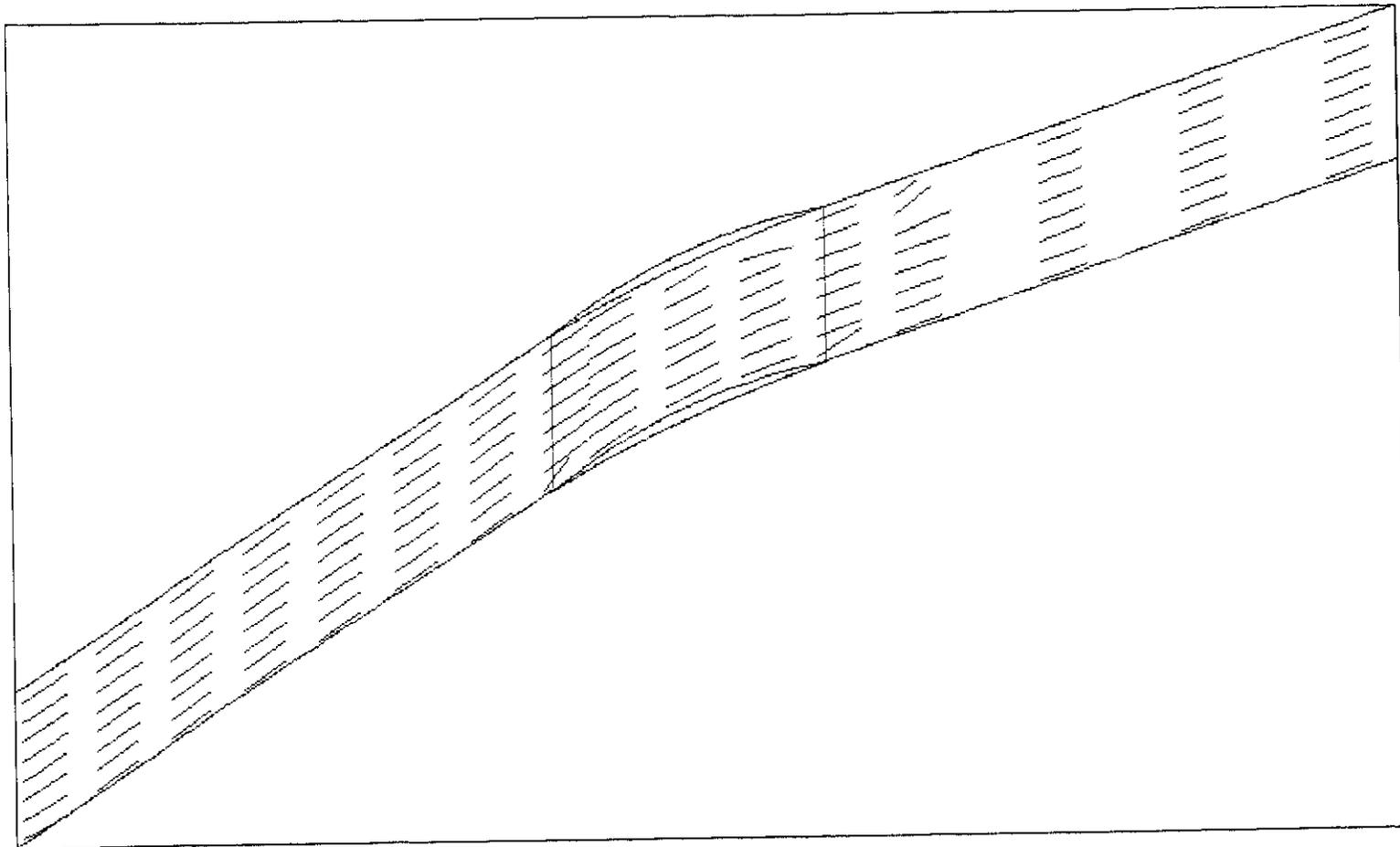


Figure 5.12



Vitesses pour $r=0.12$

5.1. Commentaires sur les résultats obtenus.

Les calculs effectués ont porté sur la résolution du problème de l'écoulement le long des surfaces de première espèce dans les conditions les plus simplifiées : forme cylindrique des surfaces de courant, absence de compressibilité, absence de frottements et de transferts de chaleur, conditions aux limites très simples. Dans ces circonstances, les résultats obtenus ne sauraient être en aucune manière le reflet d'une situation qui pourrait se présenter dans une turbomachine. En effet, une telle situation ne pourrait être approchée qu'au terme d'un processus de résolution du problème général qui, rappelons-le encore une fois, passe par plusieurs étapes impliquant des calculs alternatifs sur les deux familles de surfaces S_1 et S_2 , calculs au cours desquels les résultats obtenus suite à la résolution des équations pour l'une des deux familles sont utilisés à l'étape suivante pour résoudre le problème de l'écoulement sur l'autre famille de surfaces.

Le calcul effectué ici peut être considéré comme la toute première étape du processus de résolution général. Les résultats de ce calcul pourraient être utilisés pour poser et résoudre le problème de l'écoulement sur la famille des surfaces S_2 , dont les résultats serviront à leur tour à corriger la géométrie des surfaces S_1 qui vont intervenir dans une deuxième étape de calcul, et ainsi de suite. Ce qu'il est important de relever à ce stade de la résolution, c'est que le programme que nous avons conçu permet d'effectuer tous les calculs nécessaires : les fonctions de courant, les vitesses, les températures....

En dehors des données géométriques définissant le domaine de l'écoulement, seules les propriétés du fluide et de l'écoulement à l'entrée sont spécifiées. L'examen des courbes montre que le seul choix du profil des aubes, qui correspond approximativement à l'un des profils utilisés sur les compresseurs, nous a conduit à des résultats tout à fait comparables à ceux qu'on rencontre habituellement à travers la rangée d'aubes mobiles d'un étage de compresseur (ralentissement de l'écoulement et augmentation de la température). Ceci est, à notre avis, de nature à conforter la démarche adoptée dans cette étude pour la formulation mathématique du problème et nous incite à recommander aux futurs candidats aux projets de fin d'études de poursuivre dans cette voie pour aboutir à la résolution complète du problème quasi-3D de l'écoulement à travers les turbomachines.

Conclusion.

Une théorie générale de l'écoulement tridimensionnel, permanent d'un fluide non-visqueux dans les turbomachines avec des moyeux et des carters de forme quelconque et des aubes épaisses en nombre fini, a été présentée.

Il a été montré que la solution du problème tridimensionnel peut être obtenue par l'exploitation d'une combinaison d'écoulements sur des surfaces de courant relatives dont l'intersection avec un plan (z) donne soit un arc de cercle soit une ligne radiale. La méthode adoptée dans la position du problème conduit à la résolution du problème tridimensionnel d'une manière mathématiquement bidimensionnelle selon un processus itératif.

Dans le cadre limité de la présente étude, nous ne pouvons entreprendre de résoudre entièrement le problème, vu l'ampleur d'une telle tâche. Néanmoins, nous avons amorcé la procédure en résolvant les équations du problème suivant des surfaces de première espèce de forme cylindrique pour un écoulement incompressible.

Ce travail gagnerait à être poursuivi en compliquant progressivement les conditions aux limites et les formes des surfaces. On pourrait ensuite s'intéresser à la résolution du problème de l'écoulement sur les surfaces de seconde espèce et tenter d'obtenir la solution complète du problème. Dans une autre étape, on pourrait prendre en compte la compressibilité du fluide.

Bibliographie:

- [1]- Dr. Adiel Guinzburg
“Pumping machinery” 2001 ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting.
- [2]- Chung-Hua Wu
“A general theory of three-dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial-, radial, and mixed-flow types”, NACA TN 2604.
- [3]- J. M. Mérigoux
« Ventilateur. Compresseurs. Notions fondamentales. Dimensionnement », techniques de l'ingénieur, traité de génie mécanique BM 4500.
- [4]- Bosman, El Shaarawi
“Quasi-three-dimensional numerical solution of flow in turbomachines ”ASME 76-FE-23.
- [5]- Gordon C. Oates, Editor.
“The aerodynamics of aircraft gas turbine engines” Technical report AFAPL TR 78-52, university of Washington 1978.
- [6]- J. P. Pelletier
« Techniques numériques appliquées au calcul scientifique », éditions Masson, 1982.
- [7]- Zhao Xiaolu
“Stream function solution of transonic flow along S_2 streamsurface of axial turbomachines”, ASME Vol. 108, 1987.

[8]- D. Buisine, P. Micheau

« Ecoulement tridimensionnel dans une roue. Calcul effectivement tridimensionnel des écoulements dans les turbomachines par la méthode S_1-S_2 », Journal de mécanique théorique et appliquée. Vol. 6. N°4, 1987.

[9]- J.P. Veuillot

« Calcul de l'écoulement moyen dans une roue de turbomachine axiale », ONERA N°155, 1973.

[10]- J.P. Veuillot

« Méthodes de calcul de l'écoulement tridimensionnel dans une roue de turbomachine », revue française de mécanique, n°55-56, 1975.

[11]- J.P. Veuillot

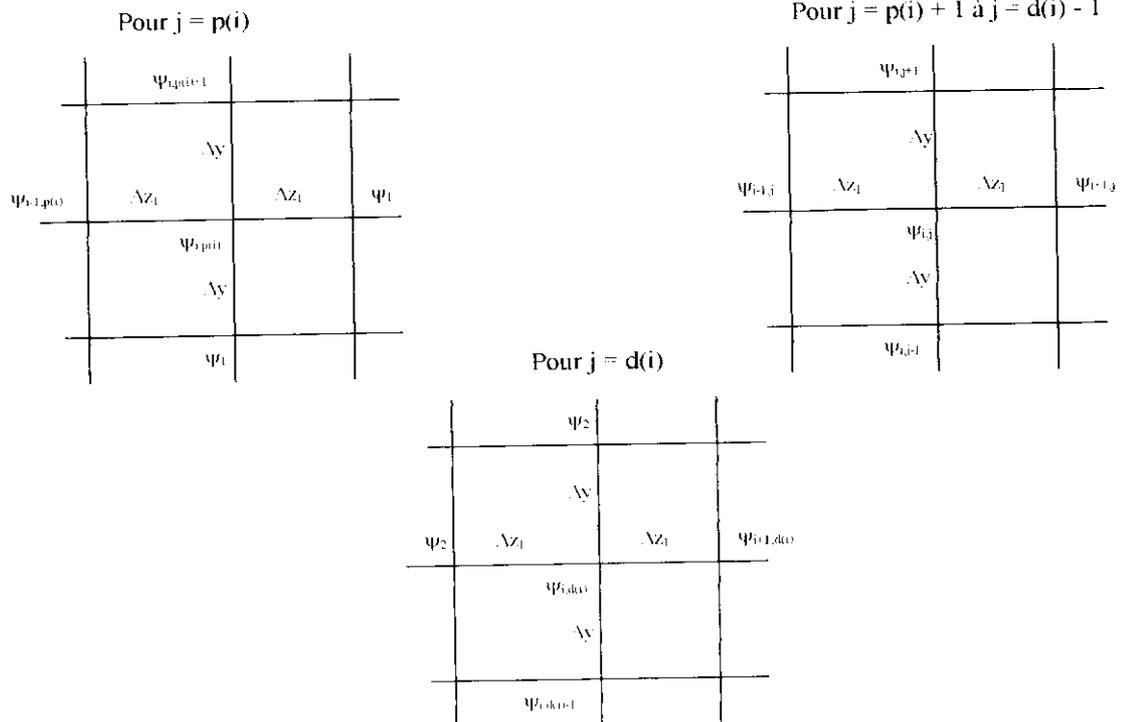
« Calcul numérique de l'écoulement transsonique d'un fluide parfait dans une grille d'aubes », Recherche aérospatiale- N° 1975-6, novembre-décembre.

[12]- Georges Meauzé

« Turbomachines: calcul des écoulements compressibles », techniques de l'ingénieur, traité de génie mécanique B 4181.

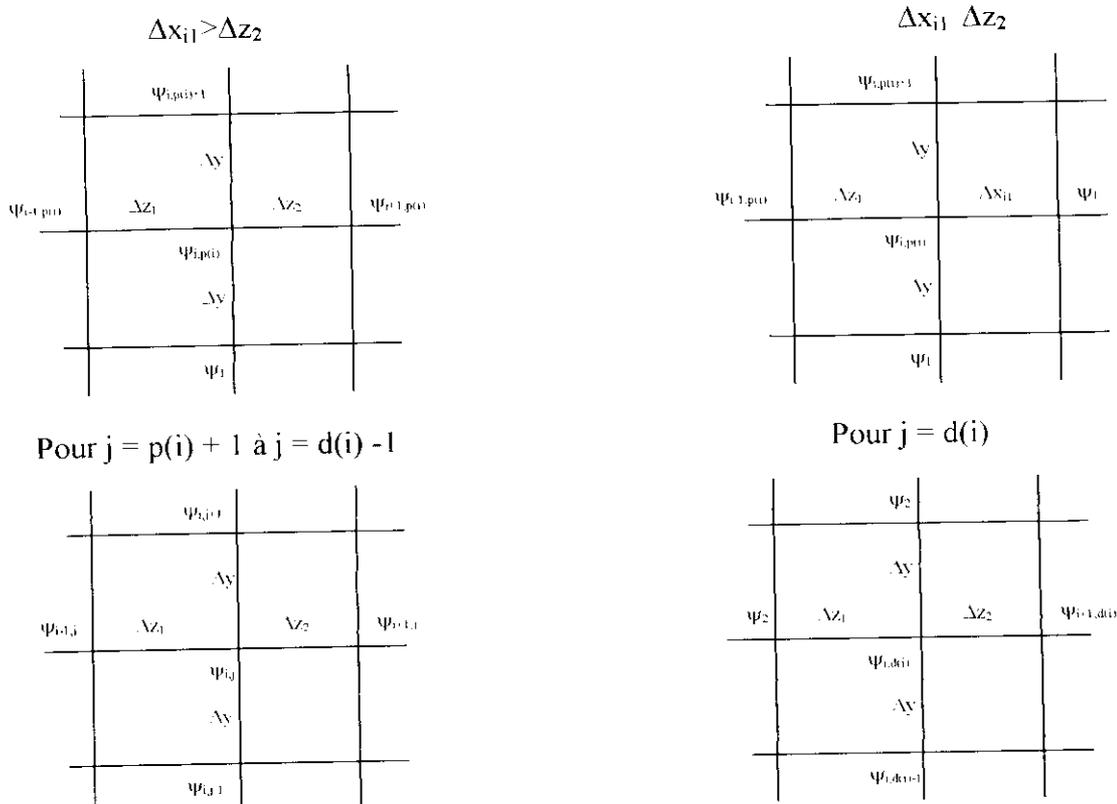
Méthode de calcul de la fonction de courant ψ en chaque point

Zone 1 : Pour $i = 1$ à $i = i_1 - 1$



Interface zone1- zone 2: $i = i_1$

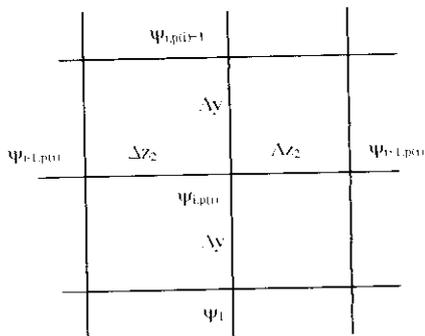
Pour $j = p(i)$:



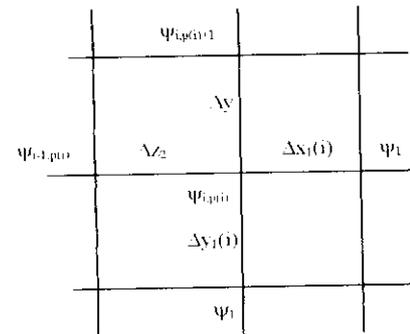
Zone2 : pour $i = i_1 + 1$ à $i = i_2 - 1$

Pour $j = p(i)$:

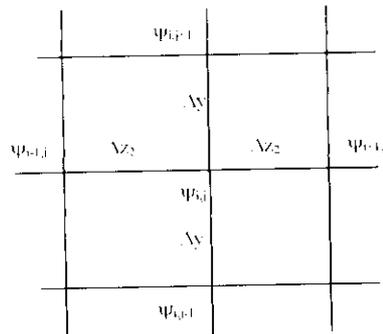
$\Delta x_1(i) > \Delta z_2$



$\Delta x_1(i) < \Delta z_2$

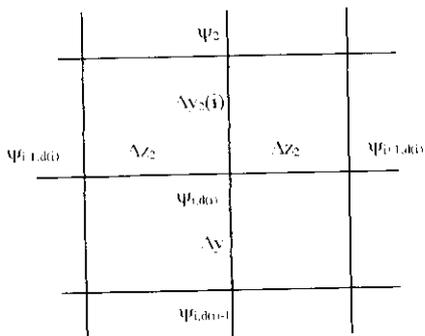


Pour $j = p(i) + 1$ à $j = d(i) - 1$

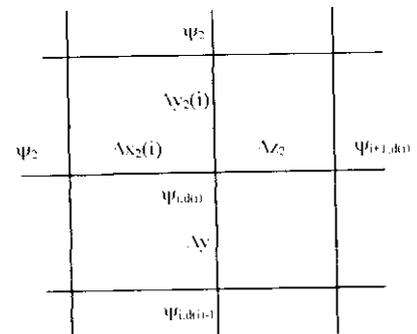


Pour $j = d(i)$:

$\Delta x_2(i) > \Delta z_2$

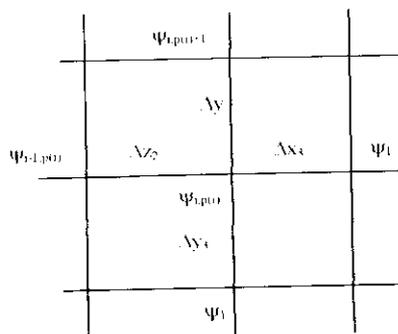


$\Delta x_2(i) < \Delta z_2$

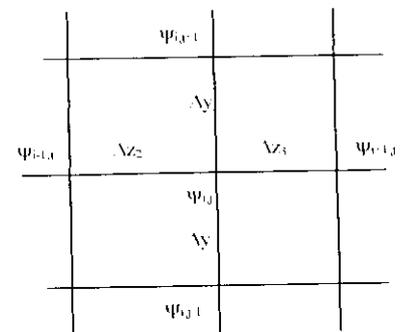


Interface zone2- zone3 : $i = i_2$

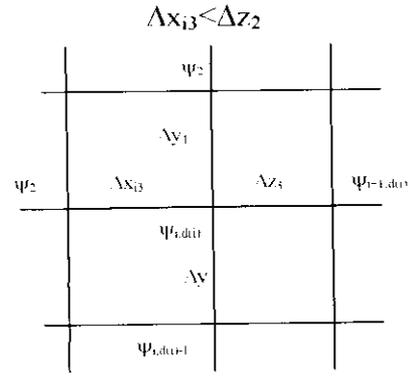
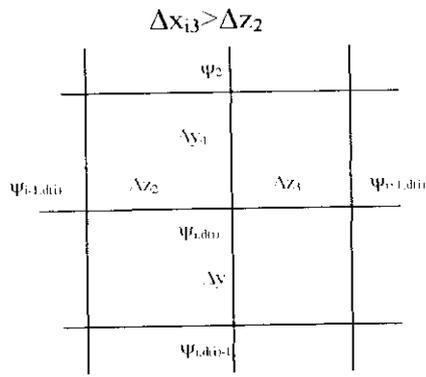
Pour $j = p(i)$



Pour $j = p(i) + 1$ à $j = d(i) - 1$

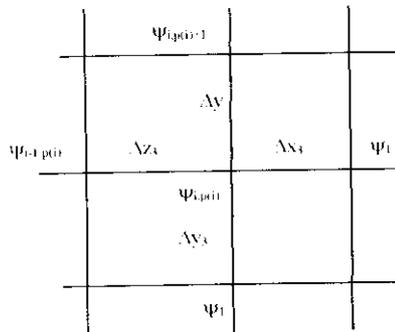


Pour $j = d(i)$:



Zone 3 : $i = i_2 + 1$ à $i = i_3 - 1$:

Pour $j = p(i)$



Pour $j = p(i) + 1$ à $j = d(i) - 1$

