

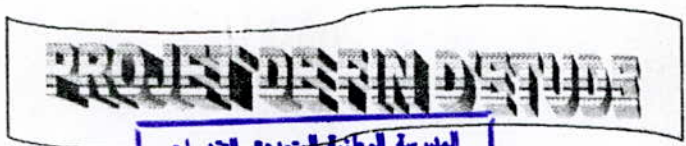
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'enseignement Supérieur  
et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

DER : Génie Electrique et Informatique

Option : AUTOMATIQUE



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**SUR LA STABILITE DES SYSTEMES NON  
LINEAIRES PAR LA THEORIE DE  
LYAPUNOV : THEORIE ET APPLICATIONS**

Proposé par : Mr M . TADJINE  
Mr F. BOUDJEMA

Dirigé par : Mr M . TADJINE  
Mr F. BOUDJEMA

Exposé par : Mr A . MESSAOUDI

Promotion Juin 98

E.N.P.10 avenue Hasen Badi EL-HARRACH Alger

République Algérienne *Démocratique et Populaire*

Ministère de *L'enseignement Supérieur*  
et de la *Recherche Scientifique*

*Ecole Nationale Polytechnique*

D.E.R : *Génie Electrique et Informatique*

Option : *AUTOMATIQUE*

**TROISIEME ANNEE D'ETUDE**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**SUR LA STABILITE DES SYSTEMES NON  
LINEAIRES PAR LA THEORIE DE  
LYAPUNOV : THEORIE ET APPLICATIONS**

Proposé par : Mr M. TADJINE  
Mr F. BOUDJEMA

Dirigé par : Mr M. TADJINE  
Mr F. BOUDJEMA

Exposé par : Mr A. MESSAOUDI

Promotion Juin 98

E .N.P.10 avenue Hassen Badi EL – Harrach Alger



بسم الله الرحمن الرحيم

يارب لا تجعلني اصاب بالغرور إذا نجحت و لا باليأس إذا  
أخفقت بل ذكرني دائما أن الإخفاق هو التجربة التي تسبق  
النجاح.

يا رب إذا أعطيتني نجاحا فلا تأخذ تواضعي، و إذا أعطيتني  
تواضعا فلا تأخذ إعترازي بكرامتي، و إذا أسأت يا رب إلى  
الناس فأمنحني شجاعة الاعتذار و إذا أساء إلي الناس فأمنحني  
شجاعة العفو.

امين



# DEDICACES

Je dédie ce modeste travail :

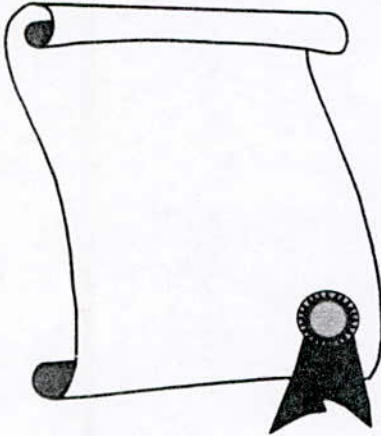
A ma chère mère pour toute son affection .

A mon cher père pour tous ses sacrifices .

A mes chères frères et sœurs .

A tous ceux qui me sont chers .





# REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur M.TADJINE et Monsieur  
F.BOUDJEMA pour toutes leurs aides et orientations précieuses.

Je remercie les membres du Jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait  
eu acceptant d'examiner ce travail.

Je tiens à exprimer toutes mes gratitudees à tous ceux qui ont  
contribuer de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail, surtout  
le groupe de Hitsoft informatique .

# SOMMAIRE

---

---

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Introduction Générale.....(1)

## CHAPITRE I :

I-1	Systèmes non linéaires et points d'équilibre .....	(5)
I-2	Notion de stabilité.....	(7)
I-2 -1	Stabilité et Stabilité asymptotique au sens de Lyapunov.....	(8)
I-2 -2	autres Définitions de la stabilité.....	(9)
I-3	Théorie de Lyapunov .....	(10)
I-3-1	Méthode indirecte ou de linéarisation .....	(10)
I-3-2	Méthode directe .....	(14)
I-4	Théorème de Lyapunov.....	(17)
I-4-1	Stabilité locale et globale.....	(17)
I-4-2	Interprétation géométrique du théorème de Lyapunov.....	(21)
I-4-3	Théorème d'instabilité.....	(24)
I-5	Construction des fonctions de Lyapunov.....	(25)
I-6	Application aux systèmes linéaires .....	(28)
	Conclusion.....	(32)



## CHAPITRE II :

II-1 Introduction.....	(32)
II-2 Synthèse par Lyapunov.....	(32)
II-3 Stabilisation Robuste.....	(35)
II-4 Technique de Backstepping.....	(42)
Conclusion.....	(46)

## CHAPITRE III :

III-1 Introduction.....	(48)
III-2 Modèle employé.....	(48)
III-3 Approche directe.....	(51)
III-4 Approche technique de Backstepping.....	(57)
III-5 Résultats de simulation.....	(61)
Conclusion.....	(82)

## Conclusion Générale

## Référence Bibliographique

## INTRODUCTION GENERALE :



La dynamique des systèmes non linéaires constitue un vaste et difficile chapitre de la mécanique.

On considère que la mécanique non linéaire fût fondée à la fin du dix-neuvième siècle par le mathématicien français Henri Poincaré (sur les courbes définies par des équations différentielles, (1881-1886) ; et les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1892-1899).

Il y a lieu de citer aussi le mathématicien russe *Lyapunov*, fondateur de la théorie de la stabilité (le problème général de la stabilité du mouvement, 1892).

Durant le vingtième siècle, nous distinguerons principalement trois courants :

- 1) Entre les deux guerres mondiales, les ingénieurs s'intéressèrent dans plusieurs pays, au problème des oscillations [1]. Le chercheur russe *Andronov* trouve en 1929 dans les travaux de Poincaré le fondement de sa *théorie des oscillations* (1938) [2].
- 2) Après la deuxième guerre mondiale, plusieurs chercheurs soviétiques précisèrent et appliquèrent les travaux de *Lyapunov* sur la stabilité, notamment *Lur'e* ; *Malkin*, *Ajzerman*<sup>2</sup> ; puis *Wegrzyn* en Pologne reformula le problème de la stabilité à la lumière de l'analyse fonctionnel.
- 3) Vers 1950, l'ingénieur savait que la plupart des systèmes ne sont pas linéaires mais il ne disposait que des méthodes pour l'analyse et la synthèse des systèmes linéaires.

Depuis lors, une quantité considérable de travaux sur les systèmes non linéaire a été publiée. Cette prolifération rend l'utilisateur perplexe sur leurs valeurs respectives et sur leurs application.

Des problèmes non linéaires se posent couramment à l'ingénieur de système.

On ne dit plus comme au début de siècle : « *most problems are non linear but all analysis are linear* ».



En effet, la seconde proposition a cessé d'être vraie depuis qu'importance recherches, inspirées par les travaux mathématiques de Poincaré et de Lyapunov et par la volonté d'étendre le domaine d'application des méthodes linéaires, ont aboutit à des techniques pratiquement utilisables, présentées dans un très grand nombre de publications (voir références).

Les questions de stabilité revêtent une importance évidente en matière de commande. Elle ne va pas jusqu'à constituer l'essentiel du problème des asservissements, qui est un problème de performances, et de précision.

Néanmoins, la stabilité est une condition nécessaire, presque toujours impérative, pour le fonctionnement des systèmes de commande ; cela explique l'abondance des travaux qui lui ont été consacrés.

Les théories les plus importantes pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires ont été introduites à la fin du dix-neuvième siècle par un russe nommé *Alexandar Mikhailovich Lyapunov*.

Cette théorie, se basant sur la notion de dissipation d'énergie au cours du temps, est à la base de toutes les théories de commande.

En effet être stable constitue une obligation pour à peu près tous les systèmes de commande, cela explique que la théorie de la stabilité soit un des chapitres les plus travaillés des systèmes non linéaires, depuis la théorie de Lyapunov (1892) et les travaux des chercheurs soviétiques.

De ce vaste ensemble nous avons retenu ici les méthodes qui font parties des connaissances élémentaires que doit posséder tout ingénieur automaticien.

Nous nous prenons à en exposer les grandes lignes, dans une optique théorique et technique.

Pour cela, notre travail est décomposé en trois grands chapitres.

### **Le premier chapitre :**

Ce chapitre abordera l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires libres, et nous donnerons une vue sur les méthodes de Lyapunov (la méthode indirecte ou de linéarisation et la méthode directe).

L'exposé de ces méthodes est enrichi par des exemples d'applications sur des systèmes non linéaires.

A la fin du premier chapitre on fait une application de la méthode de Lyapunov sur des systèmes linéaires.

**Deuxième chapitre :**

Il abordera la synthèse des lois de commandes sur les bases de la théorie de Lyapunov.

Nous exposons aussi, la synthèse des lois de commandes par la théorie de Lyapunov, dans le cas où des incertitudes sont présentes. Une méthode systématique de construction de la fonction de Lyapunov est étudiée à savoir la technique de backstepping.

**Troisième chapitre :**

Le troisième chapitre sera consacré pour l'application de la théorie de Lyapunov pour la commande d'un système non linéaire complexe qui est un robot mobile, à trois roues.

On commence par donner le modèle réel du robot mobile après on va faire une transformation qui ramène le système à un système d'ordre quatre sous forme chaînée standard.

Pour ce robot, la difficulté de construction de la fonction de Lyapunov est mise en évidence.

La technique du backstepping est alors utilisée pour développer une loi de commande stabilisante.



# CHAPITRE I :

## ANALYSE DE LA STABILITE PAR LA METHODE DE LYAPUNOV

### I-1 SYSTEMES NON LINEAIRES ET POINTS D'EQUILIBRES :[3]

La dynamique des systèmes non linéaires peut être représentée par une équation différentielle non linéaire de la forme :

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (I-1)$$

ou :

$f$  : est un champ de vecteur non linéaire ( $n \times 1$ ) .

$x$  : vecteur d'état ( $n \times 1$ ) .

$n$  : étant l'ordre du système .

La solution  $x(t)$  de l'équation (I-1) est une courbe dans l'espace d'état pour 't' variable de 0 à  $\infty$ .

Nous supposons que le champ de vecteur  $f$  est Lipchitzien, ceci garantie l'existence et l'unicité de la solution  $x(t)$ .

Dans la théorie de commande des systèmes non linéaires [16], on classe ces derniers en deux classes :

- La première classe c'est la classe des systèmes libres. c'est à dire que le système est libre ( pas de présence d'une excitation extérieure ).

Il sont généralement sous la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (I-2)$$

- La deuxième classe c'est la classe des systèmes forcés, c'est à dire que ces systèmes sont soumises à des excitation extérieures.

Il sont généralement sous la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x, t, u) \quad (I-3)$$

Ou  $u$  est un signal extérieur communément appelé signal de commande.



**Définition du point d'équilibre :**

L'état  $x^*$  est un point d'équilibre ( ou état d'équilibre ) du système (I-2) si une fois  $x(t) = x^*$ , alors il reste égal a  $x^*$  pour le temps future.

Mathématiquement,  $x^*$  satisfait l'équation :

$$0 = f(x^*) \quad (I-4)$$

Donc le point d'équilibre est déterminé en résolvant l'équation algébrique non linéaire (I-4).

**Remarque :**

Pour un système linéaire invariant dans le temps qui est représenté par :

$$\dot{x} = A x$$

il a un point d'équilibre singulier '0' si A est non singulière, si non il a une infinité de points d'équilibres.

**EXEMPLE 1 :**

Prenons un exemple d'un pendule, qui est représenté sur la figure ci contre.

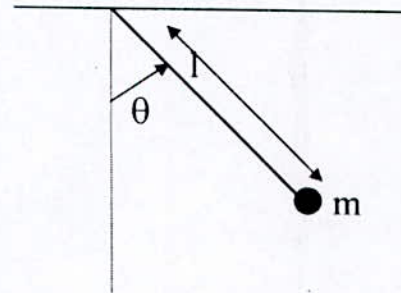
La dynamique du pendule est donnée par l'équation non linéaire libre :

$$m l^2 \times \ddot{\theta} + mg \sin(\theta) = 0$$

Posons :  $x_1 = \theta$   
 $x_2 = \dot{\theta}$

les équations d'état deviennent :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= - (g / l) \sin(x_1) \end{aligned}$$



D'après la définition : les points d'équilibre sont donnés par :  $\dot{x}=0$ , c'est à dire :  $x_2=0$  et  $\sin(x_1)=0$  ; ce qui donne :  $(0[2\pi], 0)$  et  $(\pi[2\pi], 0)$  ; ces points correspondent au pendule dans la position de la verticale : 'UP AND DOWN'.



Notons que le point d'équilibre  $x^*$  défini dans (I-4) peut être ramené à l'origine par la transformation :

$$z = x - x^*$$

Dans ce cas on a :  $\dot{z} = f(z + x^*)$ , avec  $f(0)=0$ .

## I-2 NOTION DE STABILITE : [15]

Physiquement parlant, on dit qu'un système est :

- stable si, déplacé de sa position d'équilibre, il tend à y revenir
- instable, s'il tend à s'en écarter davantage.

Cette définition est claire pour la plupart des systèmes de mécanique courante :

Une bille est au fond d'une coupe en équilibre stable ; sur un œuf, en équilibre instable (voir Figure ci dessous)

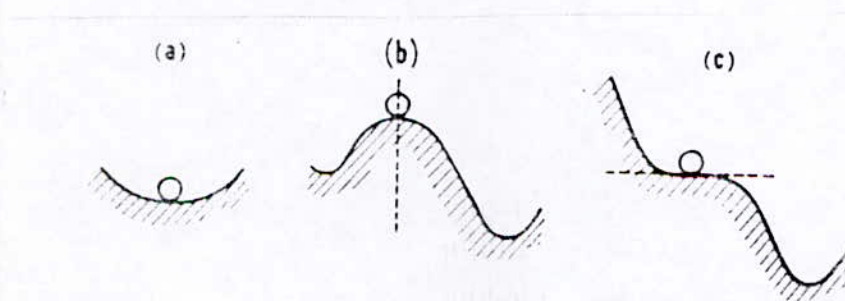


Figure 1 : a : équilibre stable, b : équilibre instable, c : équilibre semi-stable

Mais, même dans ce domaine, on rencontre parfois des systèmes 'à la limite' de la stabilité : une bille sur un plan horizontal uni sera-t-elle dite en équilibre stable (puisque, déplacée, elle ne tend pas à s'éloigner davantage) ?, ou bien en équilibre instable (puisque elle n'a aucune tendance à revenir à sa position d'équilibre initiale) ?



La notion de stabilité est plus générale et s'étend à la stabilité des trajectoires, en effet, on dit qu'un système dynamique est stable relativement à une trajectoire lorsque de faibles perturbations appliquées au système entraînent de faibles écarts par rapport à cette trajectoire.

### I-2-1 Stabilité Et Stabilité Asymptotique Au Sens De Lyapunov :

Supposons que le système est perturbé et se déplace légèrement de son état d'équilibre : est-ce qu'il reste proche de l'état d'équilibre ? c'est la **stabilité** (figure 1). Est-ce qu'il reste proche de l'état d'équilibre et en plus il tend à revenir à cet état d'équilibre ? c'est la **stabilité asymptotique** (figure 2).

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) \\ f(0, t) &= 0 \quad \forall t \end{aligned} \quad (I-5)$$

Donc le point '0' est un point d'équilibre .

La courbe  $x(t)=0$  est une trajectoire du système (ceci afin de simplifier les notations les considérations qui suivent s'appliquent en fait à toutes trajectoires nominales ou de référence non nécessairement nulle ).

#### 1- Stabilité Au Sens De Lyapunov (L - Stable) :

L'origine du système (I-5) est stable au sens de Lyapunov si

$$\forall t_0, \forall \varepsilon, \exists \eta \text{ tel que } \|x(t_0)\| < \eta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > t_0$$

C'est à dire : l'origine d'un système est (l - stable ) si et seulement si une faible perturbation dans les conditions initiales entraîne une faible perturbation de la trajectoire ultérieure.

#### 2- Stabilité Asymptotique Au Sens De Lyapunov :

L'origine du système (I-5) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si

- Il est (L - stable) (I-6)

- $\exists R$  tel que  $\|x(t_0)\| < R \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  (I-7)

La figure suivante illustre la différence entre la stabilité et la stabilité asymptotique :

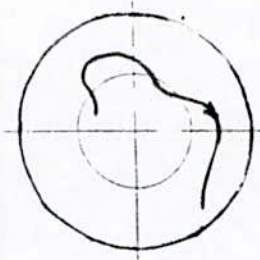


Fig. 1.

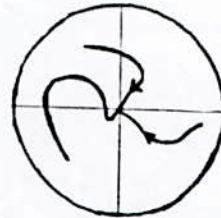


Fig. 2.

Fig1 : représente la stabilité.

Fig2 : représente la stabilité asymptotique.

La stabilité asymptotique comporte évidemment la stabilité simple.

La stabilité asymptotique est une notion plus restrictive que la stabilité tout court .

Tout équilibre asymptotiquement stable est stable ; mais inversement un équilibre peut être stable sans l'être asymptotiquement.

### I-2-3 AUTRES DEFINITIONS DE LA STABILITE : [15]

Il existe d'autres définitions de la stabilité que celle de *Lyapunov*.

Certaines lui sont équivalentes, d'autres en diffèrent dans certains cas particuliers.

- Parmi les premières nous citerons celle que propose H.Bode pour un système linéaire défini par un nombre fini d'équations linéaires à coefficients constants : « il y a stabilité s'il n'existe aucune solution particulière qui croît infiniment avec le temps » .
- La définition donnée par H- James [4],[5],[6], est la suivante : « est stable un système tel que toute entrée bornée donne une sortie bornée, i.e.tel que la sortie ne puisse être infinie que si l'entrée l'est ; est instable un système ou certaines entrées bornées peuvent donner une réponse infinie.

La définition de James a été abandonnée par la plupart des auteurs. La principale raison en est qu'elle se laisse mal généraliser pour les systèmes non linéaires.

Selon elle en effet l'équilibre de tout système saturé est nécessairement stable or des saturations sont présentes dans tout système, ce qui ôte toute valeur à la notion de stabilité de James.



### I-3 THEORIE DE LYAPUNOV :

Pour la commande d'un système, la première et importante question qui se pose concernant ses propriétés c'est s'il est stable. Lyapunov a introduit deux méthodes pour l'analyse de la stabilité ; une méthode directe, et une méthode indirecte.

La méthode indirecte et dite aussi, la méthode de linéarisation, elle s'intéresse à la stabilité locale au tour d'un point d'équilibre.

Et pour la deuxième méthode directe il construit une fonction scalaire pour le système et examine les variations de cette fonction au cours du temps. Cette méthode est aussi une généralisation du concept d'énergie des systèmes mécaniques.

Elle est applicable pour toutes les formes de commande des systèmes.

#### I-3-1 LA METHODE INDIRECTE OU DE LINEARISATION :

La méthode indirecte de Lyapunov concerne la stabilité locale des systèmes non linéaires .

Considérons le système libre :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \quad (I-8)$$

ou  $f(x)$  est une fonction continue ; dérivable .

Le développement de Taylor de  $f(x)$  s'écrit donc

$$\dot{x} = f(0) + \left. \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right|_{x=0} x + f_{TGO}(x)$$

ou  $f_{TGO}$  contient les termes de grand ordre en  $x$  et  $\|f_{TGO}\| \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0$  .

Notons que le premier terme du développement du Taylor  $f(0)$  est nul , car le '0' est un point d'équilibre .

Utilisons la matrice constante  $A$  :

$$A = \left. \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right|_{x=0}$$

On aura donc  $\dot{X} = A \times X$

Cette expression est l'approximation linéaire du système original non linéaire au tour du point d'équilibre '0'. Le résultat de cette méthode peut s'énoncer comme suit :

- Si le système linéarisé est asymptotiquement stable alors le système non linéaire est localement asymptotiquement stable.
- Si le système linéarisé est stable alors on ne peut rien dire sur la stabilité ou l'instabilité du système non linéaire.
- Si le système linéarisé est instable alors le système original est instable aussi.

### EXEMPLE 2 :

Soit le système :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2^2 + x_1 \cos(x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2^2 + (x_1+1) x_1 + x_1 \sin(x_2)\end{aligned}$$

Son approximation linéaire au tour de  $x=0$  est :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &\cong 0 + x_1 \cdot 1 = x_1 \\ \dot{x}_2 &\cong x_2 + 0 + x_1 x_2 \cong x_2 + x_1\end{aligned}$$

Le système linéarisé s'écrit donc :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X$$

Le linéarisé est instable ce qui nous permet d'affirmer que le système originale est instable.



Cette méthode indirecte permet lorsqu'elle s'applique, de déduire la stabilité du système non linéaire des propriétés du système linéaire associé.

De la même manière, avec un système non linéaire et forcé, c'est à dire avec une entrée  $u$ .

Le système est décrit par :

$$\dot{X} = f(x, u), \text{ avec } f(0,0)=0$$



On peut écrire donc :

$$\dot{X} = \left. \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right|_{x=u=0} X + \left. \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) \right|_{x=u=0} U + f_{tgo}(x, u)$$

$$f(0,0)=0$$

Où le troisième terme comprend les termes de grand ordre en  $x$  et  $u$  et tel que

$$|f_{tgo}(x, u)| \rightarrow 0.$$

Posons :  $A = \left. \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right|_{x=u=0}$  ( $n \times n$ ) matrice jacobienne de  $f$

$B = \left. \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) \right|_{x=u=0}$  ( $n \times m$ ) matrice jacobienne de  $f$  par rapport à  $u$

avec  $m$  : nombre d'entrées

$n$  : l'ordre du système

Sous forme de représentation d'état on a :

$$\dot{X} = AX + BU \quad (I-9)$$

L'équation (I-9) est la linéarisation du système non linéaire original en  $(X=0, U=0)$ .

Si  $U=U(X)$  avec  $(U(0)=0)$ , la linéarisation transforme le système original forcé à un système libre en boucle fermée avec  $X=0$  comme étant son point d'équilibre.

Avec l'approximation linéaire :  $U \cong (dU/dX)_{x=0} X = G X$

On aura :

$$\dot{X} = f(X, U(X)) = (A+BG) X$$

La méthode indirecte de Lyapunov est alors appliquée pour étudier la stabilité du système original.

### EXEMPLE 3:

Considérons le système donné par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + 4\dot{x}^3 + (x^2 + 1)u = 0$$

Le système peut être approximé linéairement en ( $x=0$ ) ; on obtient :

$$\ddot{x} + 0 + (0+1)u \cong 0$$

Le système linearisé peut s'écrire :  $\ddot{x} = -u$

Supposons que l'entrée de commande du système non linéaire est de la forme :

$$u = \sin(x) + x^3 + \dot{x} \cos^2(x)$$

alors , la dynamique du système bouclé linéarisé est de la forme :

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$$

On remarque que cette méthode nous ramène de l'étude de la stabilité du système non linéaire , a une étude sur un système linéarisé.



#### EXEMPLE 4 :

Considérons le système du premier ordre donné par l'équation :

$$\dot{x} = a x + b x^5$$

L'origine '0' est un des deux points d'équilibre de ce système.

La linéarisation de ce système au tour de l'origine est :

$$\dot{x} = a x$$

après application de la première méthode de linéarisation on aura des propriétés concernant la stabilité du système non linéaire.

ces propriétés sont :

\*a < 0 : stabilité asymptotique

\*a > 0 : instabilité

\*a=0 : on ne peut rien conclure concernant la stabilité ou instabilité du système original non linéaire .



Pour le troisième cas ou :  $a=0$  le système non linéaire est :

$$\dot{x} = b \times x^5$$



Et pour cette forme la méthode de linéarisation est insuffisante ; alors on doit voir la méthode directe de *Lyapunov* qui peut facilement résoudre le problème.

Les propriétés qu'on vient de voir permettent de prédire la stabilité locale. Elles ne donnent aucune indication sur le domaine dans le quel la stabilité est assurée.

Elles ne nous renseignent que sur la stabilité de la position d'équilibre, c'est à dire sur la stabilité locale et non pas sur la stabilité globale, et donc sur les écarts que le système est capable d'encaisser.

A cause des inconvénients de cette méthode *Lyapunov* a introduit une deuxième méthode, dite la méthode directe de *Lyapunov*.

### I- 3 -2- METHODE DIRECTE DE LYAPUNOV :[7]

La philosophie de base de cette méthode est l'extension mathématique de la fondamentale observation physique suivante : si l'énergie totale d'un système mécanique ( ou électrique ) décroît continuellement, alors le système ( linéaire ou non linéaire ) doit éventuellement tendre vers un point d'équilibre ; ce qui permet de tirer des conclusions sur la stabilité du système.

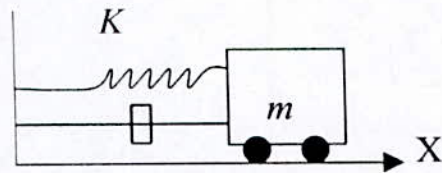
L'idée de cette méthode c'est de construire pour le système une fonction (scalaire dérivable ), qui est l'image de l'énergie du système puis de montrer que cette fonction est décroissante au cours du temps.

La principale caractéristique de cette méthode c'est de permettre d'analyser la stabilité d'un système non linéaire sans connaître explicitement les solutions des équations différentielles qui le décrivent .

Pour illustrer cette notion prenons l'exemple d'un système non linéaire qui est une masse  $m$  reliée à un ressort.

**EXEMPLE 5 :**

Prenons le système représenté sur la figure ci contre



L'équation dynamique de ce système est donnée par

$$m \ddot{x} + b \dot{x} |\dot{x}| + K_0 x + K_1 x^3 = 0$$

$b \dot{x} |\dot{x}|$  : représente la dissipation non linéaire  
 $K_0 x + K_1 x^3$  : représente le terme non linéaire d'allongement .

La masse  $m$  est tirée a partir de la longueur naturelle du ressort et relâchée librement .  
 L'énergie totale est donnée par

$$\begin{aligned} V(x) &= (1/2) m \dot{x}^2 + \int_0^x (K_0 x + K_1 x^3) dx \\ &= (1/2) m \dot{x}^2 + (1/2) K_0 x^2 + (1/4) K_1 x^4 \end{aligned}$$

Les zéros d'énergie correspondent au points d'équilibres ( $x=0, \dot{x}=0$ ).

- Stabilité asymptotique  $\Rightarrow$  convergence de l'énergie vers '0' .  
 donc la dérivée de cette fonction ( fonction énergie du système ) est donnée par :

$$\dot{V}(x) = m \ddot{x} + (K_0 x + K_1 x^3) \dot{x} = \dot{x} (-b \dot{x} |\dot{x}|) = -b |\dot{x}|^3$$

Cette équation implique que l'énergie du système, a partir d'une valeur initiale se dissipe d'une manière continue à travers l'amortissement.



De cet exemple, on commence à voir, que la procédure de base de la méthode directe de *Lyapunov* c'est de générer une fonction scalaire (énergie) pour le système dynamique, et examiner la variation de cette fonction au cours du temps.



Avant d'énoncer le résultat principal de Lyapunov nous allons introduire la notion de fonction définie positive et définie négative.

**définition (I-1):**

1) Une fonction scalaire  $V(X)$  est **définie positive** dans une région sphérique avec  $\|X\| < R$  si :

- $V(X) > 0 \quad \forall X \neq 0 ; X \in \mathbb{R}^n$ .
- $V(X) = 0$  pour  $X=0$

si cette propriété a lieu pour  $R \rightarrow +\infty$  alors  $V(X)$  est **globalement définie positive**.

2) Une fonction scalaire  $V(X)$  est **définie négative** (resp non négative) dans une région

sphérique  $\|X\| < R$  si :

- $V(X) < 0$  (resp  $V(X) \leq 0$ )  $\forall X \neq 0 ; X \in \mathbb{R}^n$
- $V(X) = 0$  pour  $X=0$

si cette propriété a lieu pour  $R \rightarrow +\infty$  alors  $V(X)$  est **globalement définie négative** (resp. globalement définie non négative).

**EXEMPLE 6:**

Dans l'espace a deux dimensions :

- $V(x) = x_1^2 + x_2^2$  est définie positive alors que :
- $V(x) = x_1^2$  est définie non - négative ou semi - définie positive car elle est nulle sur tout l'axe  $x_1=0$ .
- $V(x) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2$  elle n'est que semi-définie positive, puisqu'elle est nulle sur tous les points de la bissectrice  $x_1 + x_2 = 0$ .
- Enfin la fonction  $V(x) = x_1 + 2x_2$  est de signe indéfini.

Dans l'espace a trois dimension :

- $V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  est définie positive (sphère centrée à l'origine).
- $V(x) = x_1^2 + x_2^2$  n'est que semi-définie positive, car elle est nulle en tous les points de l'axe de  $x_3$ , le long duquel  $x_1 = x_2 = 0$ .
- $V(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$  est indéfinie.



**I-4 THEOREME DE LYAPUNOV : [7]**

Pour tester la stabilité d'un système non linéaire, Lyapunov a annoncé un théorème qui est le suivant :

Le système libre :  $\dot{X} = f(X)$  ; aura un point d'équilibre  $X_e = 0$  globalement asymptotiquement stable s'il existe une fonction scalaire réelle  $V(X)$  continue avec une dérivée partielle par rapport au temps  $\dot{V}$  continue, ayant les propriétés suivantes :

- $V(0) = 0$
- $V(X) > 0 \quad \forall X \neq 0$
- $\lim_{\|X\| \rightarrow \infty} V(X) = \infty$  (radialement non bornée)
- $\dot{V}(X) < 0 \quad \forall X \neq 0$

Dans les notions de stabilité on rencontre souvent deux notions qui sont la stabilité et la stabilité asymptotique.

Ces deux notions de stabilité et stabilité asymptotique ont une traduction mathématique qui est la suivante :

- S'il existe une fonction  $V$  définie positive dont la dérivée soit négative pour tout  $(X, t)$  alors le système est stable au sens de Lyapunov.
- S'il existe une fonction  $V$  définie positive dont la dérivée vérifie pour tout  $(X, t)$  :

$$\dot{V}(X, t) < -\gamma(\|X\|) \leq 0$$

ou :  $\gamma$  est une fonction continue dérivable ; alors le système est asymptotiquement stable.

**I-4-1 STABILITE LOCALE ET GLOBALE :**

Quand la position d'équilibre d'un système linéaire (rappelons qu'elle est unique) est asymptotiquement stable, le système finit par y revenir à partir de n'importe quel état initial.

Pour un système non linéaire, la situation est plus complexe. Un point d'équilibre possède un domaine de stabilité, habituellement défini comme l'ensemble des conditions initiales ' $X_0$ ' à partir desquelles valent les équations (I-6) et (I-7) : le système reviendra à sa position d'équilibre après en avoir été écarté d'une manière telle que le point représentant son état soit resté à l'intérieur du dit *domaine*.



Mais s'il a été écarté au - de la , il se rendra à une autre position d'équilibre, tendre vers l'infini ou vers une oscillation limite.

Le problème de stabilité non linéaire comporte ainsi deux étapes:

- Déterminer la stabilité ou l'instabilité de la position d'équilibre : problème de la *stabilité locale*.
- Si l'équilibre est stable, trouver le domaine de stabilité ; problème de la *stabilité globale*.

Dire qu'un équilibre possède la stabilité locale, c'est affirmer seulement que la position d'équilibre est stable.

Dire qu'il possède la stabilité globale, c'est affirmer que toutes les valeurs que peuvent prendre les variables appartiennent au domaine de stabilité.

La stabilité globale est dite illimitée si ce domaine comprend tout l'espace.

### EXEMPLE 7 :

Considérons le système d'équation différentielles :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 5x_1 - 4x_2 - x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_2 - x_3\end{aligned}\tag{I-10}$$

Essayons comme fonction de Lyapunov la forme quadratique définie positive :

$$V_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\tag{I-11}$$

$$\frac{dV_1}{dt} = 2\left[x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} + x_3 \frac{dx_3}{dt}\right]$$

En substituant les expressions de (I-10) on a :

$$\begin{aligned}\frac{dV_1}{dt} &= 2[x_1(-x_1 - x_2) + x_2(5x_1 - 4x_2 - x_3) + x_3(x_2 - x_3)] \\ \frac{dV_1}{dt} &= -2(5x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2)\end{aligned}$$

la dérivée  $\frac{dV}{dt}$  est définie négative : il y a donc stabilité asymptotique.

de plus  $V_1$  est positive et sa dérivée est négative dans tout l'espace des variables : donc on peut dire que la **stabilité est illimitée**.



### EXEMPLE 8 :

repreons le système (I-10) et essayons cette fois comme fonction de Lyapunov la forme quadratique plus simple :

$$V_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (I-12)$$

Procédant comme en exemple précédant on trouve :

$$\frac{dV_2}{dt} = -2[(x_1 - 2x_2)^2 + x_3^2]$$

expressions qui est semi-négative ( nulle sur la droite  $x_3=0$  ,  $x_1=2x_2$ ). On peut donc affirmer la stabilité illimitée, mais non son caractère asymptotique.

Cela illustre le fait que, pour certains systèmes, il est possible d'obtenir plusieurs fonctions de Lyapunov, conduisant à des résultats non identiques . Dans le cas présent , on dira que la fonction (I-11) est « plus puissante » que la fonction (I-12).



### EXEMPLE 9 :

Etudions la stabilité du système défini par :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2)\end{aligned}$$

Au tour de son point d'équilibre l'origine, prenons la fonction définie positive suivante :

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$



Sa dérivée suivant une trajectoire du système est :

$$\dot{V} = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

Ainsi  $\dot{V}$  est définie négative localement, dans la région définie par :

$(x_1^2 + x_2^2 < 2)$ , donc, d'après le théorème l'origine est stable. ▲▲

Comme nous l'avons déjà mentionné il y a deux notions pour la stabilité ; il y a la stabilité locale et la stabilité globale.

L'exemple déjà vu illustre la première notion de la stabilité locale, c'est à dire que la stabilité n'est vérifiée que dans une région donnée .

Mathématiquement parlons : il y a stabilité locale dans une région, s'il existe une fonction scalaire  $V(x)$  vérifiant :

- $V(x)$  est définie positive ( localement dans cette région )
- $\dot{V}(x)$  est semi - définie négative (localement dans cette région ) .

#### EXEMPLE 10 :

Considérons le système donné par :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

L'origine d'espace d'état est un point d'équilibre du système .

Soit  $V$  une fonction définie positive donnée par :

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

Sa dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2)^2\end{aligned}$$

$\dot{V}$  est définie négative ; pour tout  $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ , et elle est nulle pour  $x_1=x_2=0$  ; donc l'origine est **globalement asymptotiquement stable** .

La globalité de cette stabilité implique que l'origine est le seul point d'équilibre du système .De même de cet exemple on peut tirer la définition de la stabilité globale .



**définition (I-2):**

S'il existe une fonction  $V$  de l'état  $X$ , continue dérivable du premier ordre vérifiant :

- $V(X)$  est définie positive
- $\dot{V}(X)$  est définie négative
- $V(X) \rightarrow \infty$  quand  $\|X\| \rightarrow \infty$

alors le point d'équilibre de l'origine est **globalement asymptotiquement stable**.

**I-4-2 Interprétation Géométrique Du Théorème De Lyapunov :[8]**

La condition que  $V(X)$  est radialement non bornée implique que les courbes  $V(X) = K$  dans l'espace d'état soient des courbes fermées entourant l'origine et qui s'éloignent de l'origine quand la valeur de la constante  $K$  augmente (voir la figure ci dessous ).

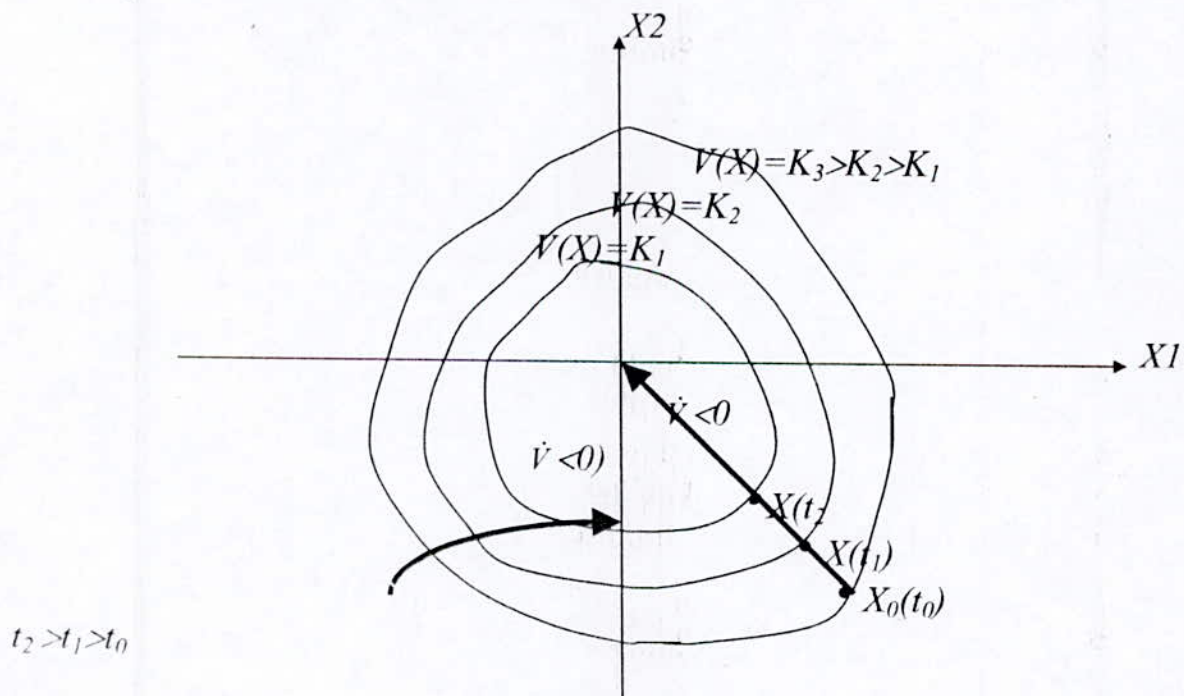


Figure I-3



La condition  $\dot{V}(X) < 0$  signifie que pour un  $X(0)$  se situant sur une courbe  $V(X) = K_3$  la trajectoire  $X(t, t_0)$  va se trouver, à mesure que le temps évolue, sur des courbes  $V(X) = K$  ou  $K < K_3$ .

Donc la trajectoire va rentrer à l'intérieur du domaine défini par  $V(X) = K_3$  et va s'approcher de l'origine.

Si pour un certain  $X$  par où la trajectoire passe, on a  $\dot{V}(X) = 0$ , alors la trajectoire pourra ne pas évoluer vers l'origine, car ceci impliquerait d'aller sur des courbes  $V(X)$  plus petites. Par conséquent, si  $\dot{V}(X) = 0$  dans un domaine, on peut conclure uniquement que le système est stable (les trajectoires ne sortent pas d'un certain domaine).

Dans nombreux cas, il peut être difficile de mettre en évidence une fonction de Lyapunov dérivée négative au sens du premier théorème de Lyapunov.

et le théorème suivant appelé théorème de La salle est très souvent employé : [7]

« Si  $\exists$  une fonction  $V$  définie positive dont la dérivée  $\dot{V}$  soit semi définie négative ( $\dot{V} \leq 0$ ) alors les trajectoires convergent vers '  $\Gamma$  ' ensemble invariant maximum contenu dans l'ensemble des points  $X$  vérifiant  $\dot{V} = 0$  .

Notons qu'un ensemble invariant '  $\Gamma$  ' pour l'équation  $\dot{X} = f(X, t)$  est tel que quelle que soit la condition initiale dans '  $\Gamma$  ' la trajectoire totale est dans '  $\Gamma$  '.

### EXEMPLE 11 :

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x}_1 + a\dot{x}_1 + 2bx_1 + 3x_1^2 = 0$$

sous forme canonique

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2bx_1 - 3x_1^2 - ax_2 \end{aligned}$$

avec  $a, b > 0$

Considérons la fonction  $V = x_2^2/2 + b x_1^2 + x_1^3$  elle est définie positive pour  $x_1 \geq 0$ .

$$V(0,t) = 0$$

on a donc :

$$V(x,t) = x_2^2/2 + x_1^2(b + x_1)$$

$$\dot{V} = dV/dt = V_x f + V_t$$

avec :

$$V_t = \partial V(x,t) / \partial t = 0$$

$$f = \partial x / \partial t = \dot{x}$$

$$V_x = [ \partial V / \partial x_1 \quad \partial V / \partial x_2$$

$$f = \begin{bmatrix} x_2 \\ -2bx_1 - 3x_1^2 - ax_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = V_x f &= (2bx_1 + 3x_1^2)x_2 + x_2(-2bx_1 - 3x_1^2 - ax_2) \\ &= 2bx_1x_2 + 3x_1^2x_2 - 2bx_1x_2 - 3x_1^2x_2 - ax_2^2 = -ax_2^2 \end{aligned}$$

On aura  $\dot{V} = -ax_2^2$

comme  $a > 0$  alors  $\dot{V} \leq 0$  donc on peut dire que le système est stable au sens de Lyapunov.

Par contre, si on utilise le théorème de La salle : on est amené à d'autres considérations qui sont les suivantes :

L'ensemble 'E' tel que :

$E = \{x / \dot{V} = 0\} = \{x / x_2 = 0\}$  qui est donc l'ensemble des points vérifiants :  $x_1(-2b-3x_1)=0$  ; qui est donc l'axe  $x_1$  ; or  $x_1=0$  implique  $\dot{x}_1 = 0$

L'ensemble E se réduit donc à l'origine et il y a la stabilité asymptotique.





**EXEMPLE :**

Soit le système :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 + x_2^3\end{aligned}$$

La fonction indéfinie :

$$V = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

Cette fonction est définie positive dans la région  $N = \{x / \|x_2\| > \|x_1\|\}$  qui contient l'origine.

Cette fonction à une dérivée totale :

$$\frac{dV}{dt} = x_2 \frac{dx_2}{dt} - x_1 \frac{dx_1}{dt} = +x_1^2 + x_2^2 + x_2^4$$

qui est définie positive dans la région  $N$  : il y a donc instabilité (ce qui était évident par une approximation du premier degré).

**I-5 Construction des fonctions de Lyapunov :**

Si la méthode des fonctions de Lyapunov est très intéressante car elle permet de conclure si un système dynamique est stable ou instable sans être obligé de résoudre les équations du système, mais elle à un point faible car il n'existe pas une méthode générale pour la construction des fonctions de Lyapunov, toute fois il y à des formes connues comme les formes quadratiques qui sont les formes les plus simples.

Elles s'appliquent pour l'étude de la stabilité des systèmes linéaires ainsi que pour certaines classes de systèmes non linéaires.

pour la forme quadratique, la fonction de Lyapunov est donnée par :

$$V = \sum_{i,j}^n K_{ij} X_i X_j$$

ou  $X_i, X_j$  sont les composantes du vecteur d'état.



Une forme quadratique peut s'écrire en utilisant la notation matricielle :

$$V = X^T P X$$

$$V(X) = X^T P X = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P_{ij} X_i X_j$$

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdot & \cdot & P_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{n1} & \cdot & \cdot & P_{nn} \end{pmatrix}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que la forme quadratique soit définie positive est que la matrice P soit une matrice carrée symétrique définie positive.

Dans le chapitre(II) on va présenter une méthode de construction des fonctions de Lyapunov pour une certaine classe des systèmes ; cette méthode est appelée backstepping.

### I-6 APPLICATION AU SYSTEMES LINEAIRES :

Comme nous l'avons déjà noter : la méthode directe de Lyapunov est applicable pour les systèmes linéaires .

Prenons la forme générale des systèmes linéaires qui est la suivante :

$$\dot{x} = A x$$

Ou 'A ' est une matrice carrée et x est le vecteur d'état du système .

On sait que la stabilité asymptotique du système est assurée si les racines du polynôme caractéristique :  $\det (sI - A) = 0$  ont la partie réelle négative.

Mais la résolution de cette équation algébrique d'ordre 'n' devient difficile au fur et à mesure que 'n' augmente .

Donc pour éviter ces problèmes on peut traiter la stabilité à l'aide des fonctions de Lyapunov.

Pour cela, choisissons  $V(x) = x^T P x$

Cette forme est déjà vue, c'est la forme quadratique, ou  $P$  est une matrice définie positive (pour que  $V(x)$  soit définie positive), dont les coefficients vont être déterminés ultérieurement.

La dérivée de  $V(x)$  par rapport au temps le long d'une trajectoire du système s'écrit :

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + P A)x.$$

Alors pour que le système  $\dot{x} = Ax$  soit asymptotiquement stable conformément au théorème de stabilité de Lyapunov  $\dot{V}(x)$  doit être définie négative, autrement dit :

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x$$

ou ' $Q$ ' doit être définie positive, on obtient alors une équation qui caractérise un système linéaire asymptotiquement stable qui est :

$$A^T P + P A = -Q \text{ (équation de Lyapunov)}$$

Donc pour vérifier qu'un système est asymptotiquement stable, il suffit de choisir ' $Q$ ' définie positive et de calculer ' $P$ '. si  $P$  ainsi obtenue est définie positive, le système est asymptotiquement stable.

L'équation de Lyapunov est non seulement une condition suffisante de stabilité asymptotique, elle est même une condition nécessaire pour le cas des systèmes linéaires.

### EXEMPLE 12 :

Soit  $\dot{x} = Ax$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Choisissons  $Q=I$

Posons  $P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$   $P$  est symétrique.



On aura donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

après solution de l'équation on trouve  $a=4/5$ ,  $b=c=1/4$ .  
on aura :  $V(x) = 1/4 (5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2)$ .



Si nous avons choisis une fonction quelconque, définie positive quadratique, il est possible de ne pas trouver la stabilité. Pour illustrer ce point prenons un exemple simple qui est le suivant :

soit  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$  c'est une fonction définie positive quadratique ; mais :

$$\dot{V}(x) = 2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 = 2x_1x_2 + 2x_2(-2x_1 - 3x_2)$$

$$\dot{V}(x) = -(2x_1x_2 + 6x_2^2)$$

$\dot{V}$  n'est pas définie négative, on peut tirer aucune conclusion concernant la stabilité de ce système.

Prenons maintenant un deuxième exemple qui est le suivant :

### EXEMPLE 13 :

soit l'équation

$$\ddot{x}_1 + a(t)\dot{x}_1 + x_1 = 0$$

sous forme canonique :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a(t) \end{pmatrix} X$$

L'équation de Lyapunov est :

$$A^T P + P A = -Q$$

en remplaçant P par I on aura :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a(t) \end{pmatrix} = -Q$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a(t) \end{pmatrix} = -Q$$

ce qui donne 
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a(t) \end{pmatrix}$$

donc si :  $a(t) \geq 0$  stabilité  
 $a(t) < 0$  instabilité .

Prenons maintenant la forme générale  $\dot{X} = A X$  et traitons le cas où  $A$  est une matrice diagonale :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Les  $\lambda_i$ ,  $i=1, n$  étant les valeurs propres, distinctes et réelles .  
 Le système est dit comme étant sous la forme normale .

Choisissons  $Q = I$

L'équation de Lyapunov devient :

$$2\lambda_i P_{ii} = -1, \forall i=1, n$$

$$P_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

et la condition de stabilité asymptotique du système représenté par  $\dot{X} = A X$   
 est que

$$\lambda_i < 0 \quad \forall i=1, n .$$





D'une manière générale si :

- Si l'une des valeurs propres de A vérifie  $RE(VP(A)) = 0$  alors le système linéaire est à la limite de la stabilité.
- Si  $RE(VP(A)) > 0$  alors le système est instable.
- Si  $RE(VP(A)) < 0$  alors le système est asymptotiquement stable.

### CONCLUSION :

Dans ce chapitre, nous avons donné les principaux théorèmes permettant l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires par la théorie de Lyapunov.

Nous avons vu que :

- a) La linéarisation de Lyapunov ne permet d'étudier que la stabilité locale du point d'équilibre. Elle ne renseigne rien sur la stabilité globale.
- b) La méthode directe de Lyapunov permet d'étudier la stabilité globale.

Dans le chapitre qui suit on va aborder la synthèse par Lyapunov.

## CHAPITRE II

# SYNTHESE DES LOIS DE COMMANDE PAR LA METHODE DE LYAPUNOV



## II-1 INTRODUCTION :

La méthode de Lyapunov, originalement introduite, comme étant un outil d'analyse, est devenue un outil pour la synthèse de loi de commande. Plusieurs techniques de commande sont basées sur l'idée de synthétiser la commande de telle manière que la fonction de Lyapunov, ou la dérivée de cette fonction, ont certaines propriétés, qui garantissent que les trajectoires seraient bornées, la convergence vers un point d'équilibre, ou un ensemble d'équilibre. Dans ce chapitre on va présenter telles méthodes.

## II-2 SYNTHESE PAR LYAPUNOV :[3]

Dans cette section on va voir l'application de la deuxième méthode de Lyapunov pour la commande des systèmes forcés.

Nous avons déjà vu dans le premier chapitre les systèmes libres qui sont sous la forme

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (II-1)$$

d'une manière générale.

Et nous avons appliqué la deuxième méthode de Lyapunov sur quelques exemples de ces systèmes pour déterminer le domaine de stabilité.

Maintenant, on va étudier les systèmes d'une manière plus efficace on introduisant la commande  $u$  ; et par la deuxième méthode de Lyapunov, on va déterminer la commande  $u$  qui assure la stabilisation du système à commander.

D'une manière générale les systèmes forcés sont donnés par

$$\dot{x} = f(x, t) + g(t, x) u \quad (II-2)$$

Donc on va chercher une fonction de Lyapunov notée  $V(x, t)$  qui soit définie positive et sa dérivée définie négative.

De la deuxième proposition on va déduire la loi de commande  $u$  qui vérifie que la dérivée soit négative.

Prenons un système forcé sous la forme :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (\text{II-3})$$

notre but c'est de ramener l'état  $X$  à l'état de référence  $X_r$ .

pour cela calculons l'erreur 'e' :  $e = x - x_r$ ,

on aura donc  $\dot{e} = fe(e, u)$

Alors le problème de poursuite devient un problème de stabilité qui consiste à chercher une loi de commande  $u$  garantissant la convergence de l'erreur  $e$  vers 0  $e \rightarrow 0$ .

On va résoudre ce problème par la deuxième méthode de Lyapunov ; c'est à dire qu'on va chercher une fonction de Lyapunov  $V(e)$  et  $u$  sera déterminée de telle sorte que  $\dot{V} < 0$ .

### EXEMPLE 1 :

Prenons un exemple d'un système non linéaire décrit par :

$$\dot{x} = x^k + u$$

l'objectif est de ramener l'état  $x$  à zéro .

Prenons comme fonction de Lyapunov  $V = \frac{1}{2} x^2$  qui est une fonction définie positive.

Calculons sa dérivée notée  $\dot{V}$  :

$$\dot{V} = x \dot{x} = x x^k + x u = x^{k+1} + x u$$

Si on prend  $u = x^k - x$  on aura donc :

$$\dot{V} = x^{k+1} + x(-x^k - x) = x^{k+1} - x^{k+1} - x^2$$

$$\dot{V} = -x^2 < 0 \quad \forall x \neq 0$$

Donc cette loi de commande  $x$  garantie la convergence de l'état vers le point d'équilibre  $x = 0$





Prenons un autre exemple :

**Exemple 2 :**

Soit un système décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1^3 + u \end{cases}$$

avec  $x_2 = -x_1$  pour stabiliser l'état  $x_1$ , et prenons comme fonction de Lyapunov la fonction donnée par :

$$V(x) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} (x_2 + x_1)^2$$

Sa dérivée est donnée par :

$$\dot{V} = x_1 x_2 + (x_2 + x_1)(x_1 - x_1^3 + u + x_2)$$

prenons :

$$u = x_1^3 - 2x_2 - 3x_1 \text{ on obtient :}$$

$$\dot{V} = -x_1^2 - (x_2 + x_1)^2$$

ce qui signifie que l'origine du système est asymptotiquement stable. ▲▲

maintenant prenons un exemple où on doit synthétiser une loi de commande par rapport à l'erreur.

**EXEMPLE 3 :**

prenons le système décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 u_1 \\ \dot{x}_4 = x_3 u_1 \end{cases}$$

supposons que notre but c'est que les deux états  $x_1$  et  $x_4$  suivent respectivement les deux états de références  $x_{1r}$  et  $x_{4r}$  ce qui donne les équations de l'erreur :

$$e_1 = x_1 - x_{1r}$$

$$e_2 = x_2$$

$$e_3 = x_3$$

$$e_4 = x_4 - x_{4r}$$

supposons que  $x_{1r}$  et  $x_{4r}$  sont indépendants du temps .

après dérivation on trouve

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_1$$

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_2$$

$$\dot{e}_3 = \dot{x}_3$$

$$\dot{e}_4 = \dot{x}_4$$

ce qui donne :

$$\dot{e}_1 = u_1$$

$$\dot{e}_2 = u_2$$

$$\dot{e}_3 = e_2 u_1$$

$$\dot{e}_4 = e_3 u_1$$

donc le problème de poursuite des états devient un problème de stabilisation des variables de l'erreur à l'origine.



### II -3 STABILISATION ROBUSTE :[9]

Maintenant on va voir le problème de stabilisation robuste .  
pour cela considérons le système donné par

$$\dot{X} = f(X, t) + G(t, X) [u + \delta(t, X, u)] \quad (II-4)$$

ou  $X \in \mathcal{R}^n$  représente l'état

$u \in \mathcal{R}^p$  est l'entrée de commande

$f, G, \delta$  sont des fonctions définies pour  $(t, X, u) \in [0, \infty) \times D \times \mathcal{R}^p$

$\delta$  représente l'erreur de modélisation .



On suppose que  $f$ ,  $G$  et  $\delta$  sont continues par morceau dans la temps, et pour n'importe quelle commande  $u = \psi(t, X)$  le système bouclé à une solution unique à partir de n'importe quel point  $(t_0, X_0) \in [0, \infty) \times D$ .

Les fonctions  $f, G$  sont connues précisément, mais la fonction  $\delta$  est inconnue. Cette fonction contient les termes variants et incertains.

Donc elle contient les termes perturbateurs, qui sont généralement négligés par simplification du modèle.

Le modèle nominal du système s'écrit donc :

$$\dot{X} = f(X, t) + G(t, X) u$$

Au début on va procéder comme dans la section précédente par déterminer la commande qui stabilise notre système nominal.

Supposons que nous avons réussi à déterminer la loi de commande  $u = \psi(t, X)$  pour laquelle l'origine du système nominal bouclé :

$$\dot{X} = f(t, X) + G(t, X) \psi(t, X) \quad (II-5)$$

est asymptotiquement stable .

Supposons en plus qu'on connaît la fonction de Lyapunov associé au système donné par (II-5), qui est une fonction continue différentiable  $V(t, X)$  satisfaisant l'inégalité suivante :

$$\alpha_1(\|X\|) \leq V(t, X) \leq \alpha_2(\|X\|) \quad (II-6)$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial X} [f(t, X) + G(t, X) \psi(t, X)] \leq -\alpha_3(\|X\|) \quad (II-7)$$

Avec  $\alpha_1, \alpha_2$  sont des fonctions de classe K, continues, dérivables, non décroissantes, nulles à l'origine et positives ailleurs, augmentant indéfiniment avec leurs arguments

La première équation (II-6) garantie que  $V > 0$  (définie positive) .

La deuxième équation (II-7) n'est que la dérivée de  $V$  :

$$\dot{V} = d/dt V = (\partial V / \partial X) \dot{X} + \partial V / \partial t$$

avec  $\dot{X} = f(t, X) + G(t, X) \psi(t, X)$ , et  $\alpha_3$  est une fonction de classe  $K$ .

Notre but est de synthétiser une loi de commande qui permet de stabiliser le système incertain (II-4) pour ce faire on suppose qu'avec  $u = \psi(t, X) + v$ , les termes incertains  $\delta$  satisfont l'inégalité (II-8) :

$$\|\delta\| \leq \rho(t, X) + K \|v\| \quad (II-8)$$

avec  $0 \leq K \leq 1$

ou  $\rho : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathcal{R}$  est une fonction continue non négative.

Cette estimation (II-8) est la seule information qu'on a besoin de savoir concernant le terme incertain  $\delta$ .

La fonction  $\rho$  est la mesure de l'incertitude.

Il est important de souligner qu'on doit pas exiger sur  $\rho$  d'être petite, on doit seulement exiger sur  $\rho$  d'être connue.

Notre but dans cette section c'est de montrer qu'avec la connaissance de la fonction de Lyapunov du système nominal, la fonction  $\rho$ ; et la constante  $K$  dans (II-8), on peut synthétiser une loi de commande additionnelle :

$$v = \gamma(t, X)$$

tel que la loi de commande  $u = \psi(t, X) + \gamma(t, X)$  stabilise le système (II-4) en présence d'incertitude.

La détermination de  $\gamma(t, X)$  est appelée : 'Lyapunov Redesign' (dans la littérature)

Pour cela considérons le système (II-4) avec application de la commande :

$$u = \psi(t, X) + v \text{ le système bouclé sera :}$$

$$\dot{X} = f(t, X) + G(t, X) \psi(t, X) + G(t, X) [v + \delta] \quad (II-9)$$



Prenons comme fonction de Lyapunov la fonction définie dans (II-6), (II-7) et calculons la dérivée de  $V(t, X)$  le long des trajectoires de (II-9) :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \partial V / \partial t + (\partial V / \partial X) (f + G\psi) + \partial V / \partial X G (v + \delta) \\ &\leq -\alpha_3 (\|X\|) + (\partial V / \partial X) G (v + \delta)\end{aligned}$$

posons  $W^T = [\partial V / \partial X] G$  et réécrivons l'inégalité précédente :

$$\dot{V} \leq -\alpha_3 (\|X\|) + W^T v + W^T \delta$$

Le terme à droite de l'inégalité  $(-\alpha_3 \|X\|)$  est dû au système bouclé nominal, le second terme et le troisième terme représentent respectivement, l'effet de la commande  $v$  et du terme incertain  $\delta$  sur  $\dot{V}$ .

Notons que  $\delta$  apparaît au même temps que  $v$  apparaît ; par conséquent, il est possible de choisir  $v$  pour annuler l'effet de  $\delta$  sur  $\dot{V}$ .

Supposons que l'inégalité (II-8) est vérifiée.  
on aura donc :

$$\|\delta\| \leq \rho(t, X) + K \|v\|, \quad 0 \leq K \leq 1.$$

on a :  $W^T v + W^T \delta \leq W^T v + \|W\|_2 \|\delta\|$

$$\leq W^T v + \|W\| [\rho(t, X) + K \|v\|]$$

Choisissons :  $v = -[\eta(t, X) W] / [(1-K) \|W\|]$  (II-10)

Quand  $\eta(t, X) \geq \rho(t, X)$  pour tout  $(t, X) \in [0, \infty) \times D$  alors :

$$\begin{aligned}W^T v + W^T \delta &\leq -\eta \|W\| / (1-K) + \rho \|W\| + K\eta \|W\| / (1-K) = \\ &= -\eta (1 / (1-K) - K / (1-K)) \|W\| + \rho \|W\| \\ &\leq -\rho \|W\| + \rho \|W\| = 0.\end{aligned}$$

Par suite de cela, avec une loi de commande (II-10), la dérivée de  $V(t, X)$  le long des trajectoires du système (II-9) est définie négative, ce qui indique la stabilité du notre système incertain.

#### Exemple 4 :

Considérons le système non linéaire décrit par :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin x_1 + bu\end{aligned}$$

ou  $a$ , et  $b$  sont des coefficients incertains .

Soit  $\hat{b}$  et  $\hat{a}$  les valeurs nominales de  $a$  et  $b$  .

Une commande stabilisante pour le système nominale est donnée par :

$$u = \psi(x) = \frac{1}{\hat{b}}[+\hat{a} \sin x_1 - k_1 x_1 - k_2 x_2]$$

Les constantes  $k_1$  et  $k_2$  sont choisis de tel sorte que la matrice  $A$  donné par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

soit Hurwitz .

Quand  $a \neq \hat{a}$  et  $b \neq \hat{b}$  , le système originale peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\hat{a} \sin x_1 + \hat{b}u + \hat{a} \sin x_1 - a \sin x_1 + (b - \hat{b})u \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\hat{a} \sin x_1 + \hat{b}(u + \frac{\hat{a} - a}{\hat{b}} \sin x_1 + \frac{b - \hat{b}}{\hat{b}} u) \end{cases} \quad (\text{II-11})$$

Posons :  $\delta(x, u) = \frac{\hat{a} - a}{\hat{b}} \sin x_1 + \frac{b - \hat{b}}{\hat{b}} u$

Et prenons :  $u = v + \psi(x)$  , on aura donc :



$$\begin{aligned} \delta &= \frac{a - \hat{a}}{b} \sin x_1 + \frac{b - \hat{b}}{\hat{b}b} (\hat{a} \sin x_1 - k_1 x_1 - k_2 x_2 + v) \\ &= \left( \frac{\hat{a} - a}{b} + \frac{b - \hat{b}}{\hat{b}b} \hat{a} \right) \sin x_1 + \frac{b - \hat{b}}{\hat{b}b} (-k_1 x_1 - k_2 x_2) + \frac{b - \hat{b}}{\hat{b}b} v \\ &= \left( \frac{\hat{a}b - a\hat{b}}{\hat{b}b} \right) \sin x_1 + \frac{b - \hat{b}}{\hat{b}b} (-k_1 x_1 - k_2 x_2) + \frac{b - \hat{b}}{\hat{b}b} v \end{aligned}$$

$$|\delta| \leq \left| \frac{b\hat{a} - a\hat{b}}{\hat{b}b} \right| |x_1| + \left| \frac{b - \hat{b}}{\hat{b}b} \right| (k_1 |x_1| + k_2 |x_2|) + k |v|$$

Donc d'après (II-10) et

$$\text{avec } \rho = \left| \frac{b\hat{a} - a\hat{b}}{\hat{b}b} \right| + \left| \frac{b - \hat{b}}{\hat{b}b} \right| \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

Et  $v$  donnée par (II-10) cette loi de commande stabilise l'origine du système (II-11).



Prenons maintenant un autre exemple :

**Exemple 5 :**

Avant de passer à une technique de synthèse de loi de commande prenons un système d'ordre deux qui est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2 \dots\dots\dots(1) \\ \dot{x}_2 = u \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

$u$  étant l'entrée de commande .

essayons de trouver une fonction de Lyapunov pour ce système :

prenons  $V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)$

elle est définie positive .

calculons sa dérivée :

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1(x_1^2 - x_1^3 + x_2) + x_2 u$$

maintenant on doit trouver  $u$  qui donne la dérivée de  $V$  sous la forme suivante ( ce n'est pas la forme unique ) :

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_2^2$$

Le système :  $\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2$

quand  $x_2$  est vu comme étant une entrée, la loi de commande stabilisant l'origine  $x_1=0$ ,  $x_2 = -x_1^2 - x_1$

on aura :

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 - x_1^2 - x_1.$$

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 - x_1.$$

$$V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 \text{ vérifie: } \dot{V} = -x_1^2 - x_1^4 \leq -x_1^2 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

et Donc on aura :

$$u = -(2x_1 + 1)(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - x_1 - (x_2 + x_1^2 + x_1)$$

stabilise globalement l'origine  $x=0$ , et la fonction composée de Lyapunov est

$$\text{donnée par : } V_a(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_1^2 + x_1)^2$$



Ce n'est pas évident de déterminer cette fonction de Lyapunov ainsi obtenue pour ce système.

Mais il y a un avantage pour ce cas particulier des systèmes, qui est le suivant :

On peut diviser notre synthèse en deux parties :

- La première est : d'après l'équation(1) ; l'état  $x_2$  peut être vu comme étant une entrée pour le système donné par cette équation (commande virtuelle).
- La deuxième est : d'après l'équation (2) ; l'état  $x_2$  peut être commander par l'entrée  $u$ .

Et par cette procédure on arrive à synthétiser une loi de commande stabilisante pour notre système donné par (1) ;(2).



**II-4. TECHNIQUE DE BACKSTEPPING :**

L'exemple précédant illustre cette technique brièvement ; maintenant on va voir la généralisation de l'application de cette technique .

Commençons par le cas spécial d'intégrateur Backstepping pour cela considérons le système :

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\varepsilon \dots \dots \dots (II - 10)$$

$$\dot{\varepsilon} = u \dots \dots \dots (II - 11)$$

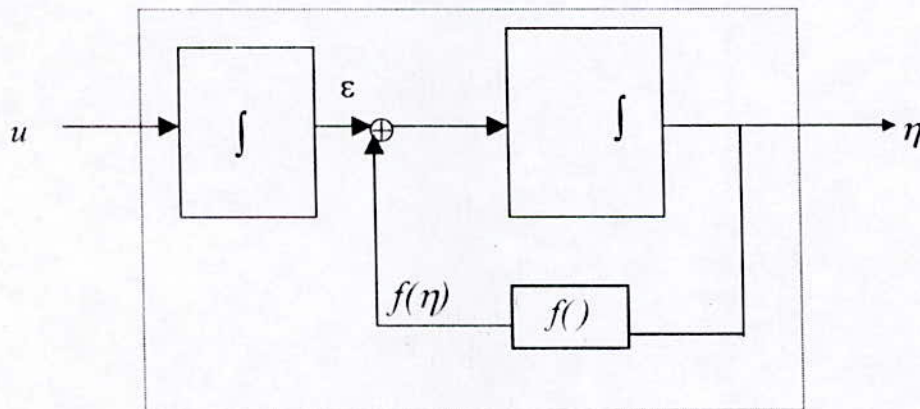
où  $[\eta^T, \varepsilon]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$  est l'état, et  $u$  est l'entrée de commande.

les fonction  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  contiennent  $\eta = 0$  et  $f(0) = 0$ .

Notre but c'est de déterminer une loi de commande pour stabiliser l'origine ( $\eta = 0, \varepsilon = 0$ ).

On suppose que les deux fonctions  $f$  et  $g$  sont connues.

Ce système peut être vu comme étant la connexion en cascade de deux composantes , voir Figure(II-4-1-a).



**Figure (II-4-1-a) : Diagramme bloc du système**

La première composante est (II-10), avec  $\varepsilon$  est l'entrée. C'est à dire que  $\varepsilon$  peut être vue comme une entrée de commande pour le système :  $\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\varepsilon$ , et la deuxième composante est l'intégrateur (II-11).

Supposons que la composante (II-10) peut être stabilisée par la commande

$\varepsilon = \phi(\eta)$  avec  $\phi(0) = 0$  tel que l'origine de  $\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)$  soit asymptotiquement stable.

Supposons qu'on connaît la fonction de Lyapunov  $V(\eta)$  qui vérifie l'inégalité :

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] \leq -W(\eta) \tag{II-12}$$

ou  $W(\eta)$  est définie positive  $\forall \eta \in D$ .

Prenons l'équation (II-10) après addition et soustraction de  $g(\eta)\phi(\eta)$  au terme à droite on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)[\varepsilon - \phi(\eta)] \\ \dot{\varepsilon} = u \end{cases} \quad \text{qui est montré sur la figure(II - 4 - 1 - b)}$$

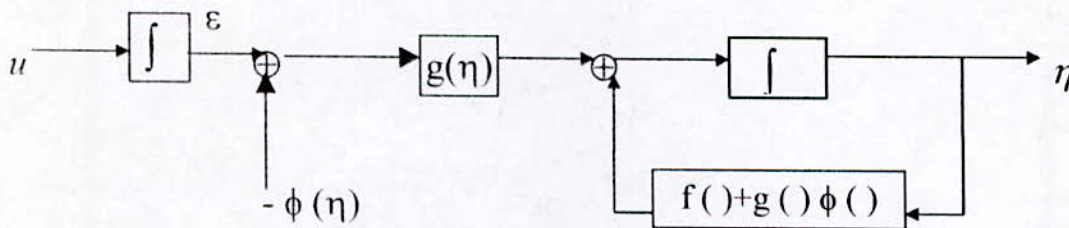


Figure ( II-4-1-b) : introducteur de  $\phi(\eta)$

avec un changement de variable :  $Z = \varepsilon - \phi(\eta)$

on aura 
$$\begin{cases} \dot{\eta} = [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)Z \\ \dot{Z} = u - \dot{\phi} \end{cases}$$

qui est tracé sur la figure (II-4-1-c)



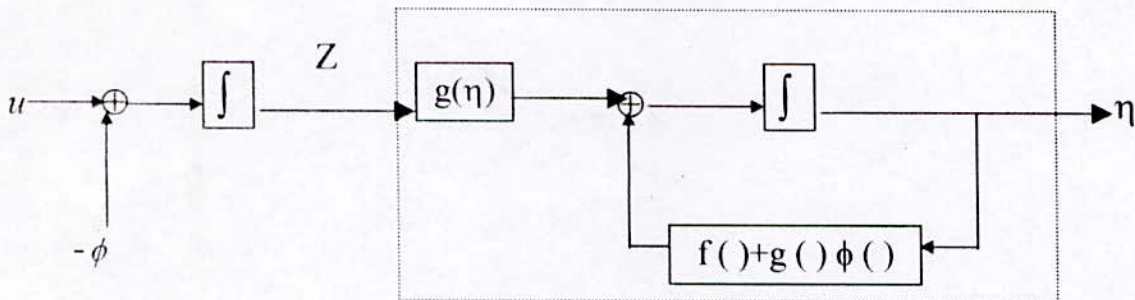


Figure ( II-4-1-c) : Backstepping.

- Si f et g sont connues ,et  $\phi$  aussi. La dérivée de  $\phi$  peut être calculée par :

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\varepsilon]$$

prenons :  $v = u - \phi$  réduit le système à la connexion en cascade :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)Z \\ \dot{Z} = v \end{cases}$$

lequel est similaire au système initial, à la différence que maintenant la première composante à un origine asymptotiquement stable, quand l'entrée(Z) est nulle.

Cette caractéristique doit être exploitée pour déterminer v pour stabiliser le système précédent.

Utilisons :  $V_a(\eta, \varepsilon) = V(\eta) + \frac{1}{2} Z^2$

On obtient :

$$\dot{V}_a = \frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta)Z + Z v \leq -W(\eta) + \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta)Z + Zv.$$

Choisissons :  $v = -\frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - KZ, \quad K > 0$

ça donne :  $V_a \leq -W(\eta) - KZ^2.$

qui indique que l'origine ( $\eta=0, Z=0$ ) est asymptotiquement stable .

or  $Z = \varepsilon - \phi(\eta)$  donc depuis que  $\phi(0)$  on conclue que l'origine ( $\eta=0, \varepsilon=0$ ) est asymptotiquement stable. Substituant de  $v, Z$  et  $\phi$  on obtient la loi de commande

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\varepsilon] - \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - K[\varepsilon - \phi(\eta)] \dots \dots \dots (II-13)$$

**Lemme (II-1):**

Considérons le système (II- 10), (II- 11) : Soit  $\phi(\eta)$  la commande par retour d'état de (II-10) avec  $\phi(0) = 0$ , et  $V(\eta)$  est la fonction de Lyapunov qui satisfait :

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] \leq -W(\eta) \quad \forall \eta \in D$$

pour quelques fonctions  $W(\eta)$  définie positive.

Alors la commande par retour d'état :  $u = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\varepsilon] - \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - k[\varepsilon - \phi(\eta)]$

stabilise l'origine de (II-10) , (II- 11) avec  $V(\eta) + \frac{1}{2}[\varepsilon - \phi(\eta)]^2$  est la fonction de Lyapunov. Si de plus  $V(\eta)$  est radialement non bornée alors l'origine est **globalement asymptotiquement stable**.

**Exemple 6:**

Prenons le système du 3<sup>ème</sup> ordre :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u \end{cases}$$

est composé d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre de l'exemple 5 avec addition d'un intégrateur à coté de l'entrée .On va appliquer l'intégrateur Backstepping de l'exemple précédent

Après un pas de Backstepping, on sait que le système du second ordre

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \end{cases}$$



avec  $x_3$  comme entrée, peut être stabilisée globalement avec la commande :

$$x_3 = -(2x_1 + 1)(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - x_1 - (x_2 + x_1^2 + x_1) = \phi(x_1, x_2)$$

$$\text{et : } V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_1^2 + x_1)^2$$

Cette fonction est la fonction de Lyapunov correspondante.

Le système du 3<sup>ème</sup> ordre est un cas spécial (II-10), (II-11) avec :

$$\eta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \varepsilon = x_3, f = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

on peut appliquer le lemme (II-1) pour obtenir la commande par retour d'état vérifiant

La stabilité globale qui est donnée par :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - \frac{\partial \phi}{\partial x_2}x_3 - \frac{\partial V}{\partial x_2} - [x_3 - \phi(x_1, x_2)]$$

avec la fonction de Lyapunov correspondante :

$$Va(x) = V(x_1, x_2) + \frac{1}{2}[x_3 - \phi(x_1, x_2)]^2$$

## CONCLUSION :

Dans ce chapitre nous avons exposé la synthèse de la stabilité par la méthode directe de Lyapunov, pour les systèmes forcés.

En premier temps nous avons abordé brièvement l'approche directe. Après nous avons abordé la stabilisation robuste c'est à dire en présence d'incertitudes, et finalement nous avons exposé la technique de Backstepping avec quelques exemples d'applications.

## CHAPITRE III :

# COMMANDE D'UN ROBOT MOBILE



## II-1 INTRODUCTION :

Dans ce chapitre, on va appliquer la théorie de Lyapunov pour stabiliser un robot mobile à trois roues par la quelle on va montrer que la classe des systèmes sous la forme chaînée, peut être stabilisée exponentiellement en utilisant la deuxième méthode de Lyapunov, pour laquelle toutes les trajectoires du système bouclé convergent vers l'origine .

### III -2 Modèle employé :[21][22]

Le robot est un chariot avec une roue en avant commandable, et deux roues passives en arrière (voir fig III-1) .

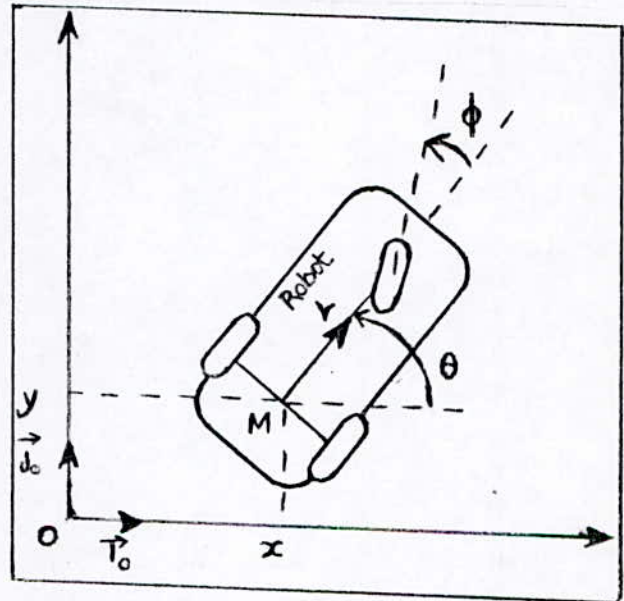


Figure (III-1) Modèle Cinématique Du Robot Mobile

La commande en mouvement de ce véhicule peut être atteinte en agissant sur la vitesse linéaire du point M notée  $v$  et la vitesse angulaire de la roue en avant notée  $w$ . Le modèle cinématique est déterminé sous l'hypothèse de roulement des roues sans glissement .

La configuration du robot mobile est décrite par le vecteur  $(x, y, \theta, \phi)^T$  ou  $(x, y)$  sont les coordonnées du point M, localisé au milieu des deux roues arrière et  $\theta$  est l'orientation du véhicule.  $\phi$  est l'angle que fait la roue en avant avec l'axe qui passe par le point M et perpendiculaire à l'axe des deux roues arrière .

Le modèle du robot est donné par (III - 1)

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = \frac{v}{l} \tan \phi \\ \dot{\phi} = w \end{cases} \quad (\text{III-1})$$

Ou  $l$  : désigne la distance entre le point M et le centre de la roue en avant.

Comme il est discuté dans [13] le système (III-1) peut être transformer à un système chaîné d'ordre 4, en utilisant la transformé locale sur :

$$\Gamma = \{(x, y, \theta, \phi) \in \mathcal{R}^4 / \theta \neq \pi/2 \text{ mod } \pi, \phi \neq \pi/2 \text{ mod } \pi\} \text{ de } \mathcal{R}^4$$

En effet faisant le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \frac{\tan g \phi}{l \cos^3 \theta} \\ x_3 = \tan g \theta \\ x_4 = y \end{cases} \quad \text{(III-2)}$$

et les entrées de commande définies sur  $\Gamma$  par :

$$\begin{cases} v = \frac{u_1}{\cos \theta} \dots \dots \dots \text{(III - 3)} \\ w = -\frac{3 \sin^2 \phi \sin \theta}{l \cos^2 \theta} u_1 + l \cos^2 \phi \cos^3 \theta u_2 \dots \dots \text{(III - 4)} \end{cases}$$

Pour trouver la nouvelle représentation d'état on procède comme suit :

Calculons les dérivées des variables d'états :

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = v \cos \theta = u_1$$

$$x_2 = \frac{l \dot{\theta}}{v l \cos^3 \theta} = \frac{\dot{\theta}}{v^4} \dot{x}_1^3$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\dot{\phi}}{l \cos^2 \phi \cos^3 \theta} + 3 \frac{\sin(\theta) \dot{\theta}}{l \cos^4 \theta} \tan g(\phi)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-3 \tan g \theta \tan g^2(\theta)}{l \cos^3 \theta} v + \frac{1}{l \cos^2 \phi \cos^3 \theta} w \dots \dots \dots \text{(III - 5)}$$



Par combinaison de (III-3) et (III-4) on obtient :

$$w = -\frac{3 \sin^2 \phi \sin \theta}{l \cos \theta} v + l \cos^2 \phi \cos^3 \theta u_2$$

$$u_2 = -\frac{3 \tan g(\theta) \tan g^2(\theta)}{l \cos^3 \theta} v + \frac{1}{l \cos^2 \phi \cos^3 \theta} w \dots \dots \dots (III - 6)$$

Donc (III-5) s'identifie à (III-6) c'est à dire que :

$$\dot{x}_2 = u_2$$

$$\dot{x}_3 = \frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} = \frac{v}{l} \tan(\theta) \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{\tan g(\theta)}{l \cos^3 \theta} v \cos \theta$$

$$v \cos \theta = u_1$$

$$\frac{\tan g(\theta)}{l \cos^3 \theta} = x_2 \Rightarrow \dot{x}_3 = x_2 u_1$$

Pour la dernière variable  $x_4$  on a :

$$\dot{x}_4 = \dot{y} = v \sin \theta = v \tan g(\theta) \cos \theta$$

On aura donc

$$\dot{x}_4 = x_3 u_1$$

Finalement on obtient la nouvelle représentation du système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 u_1 \\ \dot{x}_4 = x_3 u_1 \end{cases} \dots \dots \dots (III - 7)$$

Avec les nouvelles entrées de commandes  $u_1, u_2$  .

Cette représentation est appelée la forme chaînée .

Notre but est de faire tendre  $(x, y, \theta, \phi)$  vers zéro.

D'après la transformation faite sur le modèle :

$$x \rightarrow 0 \Leftrightarrow x_1 \rightarrow 0.$$

$$y \rightarrow 0 \Leftrightarrow x_4 \rightarrow 0.$$

$$\theta \rightarrow 0 \Leftrightarrow \tan \theta \rightarrow 0 \Leftrightarrow x_3 \rightarrow 0.$$

$$\theta \rightarrow 0 \Leftrightarrow \tan \theta \rightarrow 0 \Leftrightarrow x_2 \rightarrow 0.$$

En utilisant la deuxième méthode de Lyapunov on va déterminer une loi de commande qui ramène les états vers l'origine de n'importe quel point du plan  $(x,y)$ , en stabilisant l'origine.

Pour déterminer la commande qui stabilise l'origine du système (III-7) on va procéder par la méthode directe de Lyapunov, pour la quelle est présentée une étude théorique dans les chapitres (I) et (II).

Pour l'étape de la détermination de la loi de commande  $(u_1, u_2)$ , on va étudier deux approches :

Une, l'approche directe ou standard pour laquelle on va montrer la complexité de la détermination de la loi de commande (c'est à dire déterminer une fonction de Lyapunov vérifiant les théorèmes de la stabilité vus aux chapitres précédents).

La deuxième approche est la fameuse technique de backstepping [9].

Les études et les démonstrations vont être faites sur le modèle (III-7), et pour avoir l'évolution des variables réelles on doit faire la transformation inverse donnée par (III-2).

### III-3 APPROCHE DIRECTE :

Comme nous avons déjà noté dans les chapitres précédents qu'en générale il n'y a pas une méthode systématique pour déterminer la fonction de Lyapunov à partir de laquelle on détermine la loi de commande stabilisante.

D'après la définition : il faut trouver une fonction  $V(x)$  de Lyapunov qui est définie positive, et sa dérivée soit définie négative, et elle est nulle pour  $X=0$ .

On va commencer par le cas le plus simple de la fonction de Lyapunov qui est la forme quadratique :

$$V(X) = 1/2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$

La première condition du théorème est vérifiée  $V(X) > 0 \forall X$  et nulle pour  $X=0$



Calculons sa dérivée :

$$\dot{V}(X) = (x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + x_3\dot{x}_3 + x_4\dot{x}_4)$$

$$\dot{V}(X) = (x_1u_1 + x_2u_2 + x_3x_2u_1 + x_4x_3u_1)$$

$$\dot{V}(X) = (x_1 + x_2x_3 + x_3x_4)u_1 + x_2u_2$$

notre but c'est de trouver  $u_1$  et  $u_2$  pour que  $\dot{V}$  prenne la forme suivante qui n'est pas la seule et unique formule qui donne  $\dot{V} < 0$  :

$$\dot{V}(X) = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$

ou

$$\dot{V}(X) = -((x_1^2 + x_2^2)^2 + x_3^2 + x_4^2)$$

ou

$$\dot{V}(X) = -(x_1^2 + (x_2^2 + x_3^2)^2 + x_4^2)$$

donc  $\dot{V} = 0$  ceci est équivalent à que les trois termes positifs soient nuls, puisqu'elle est égale à la somme des termes positifs.

$$\text{Donc } \dot{V} = 0 \leftrightarrow x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = 0$$

C'est à dire que si nous réussissons à trouver  $u_1$  et  $u_2$  qui donne  $\dot{V}$  sous une forme des formes données précédemment, alors cette loi de commande fait converger les états vers l'origine et stabilise l'origine du notre système.

Avec le choix de loi de commande suivant :

$$u_1 = \frac{1}{x_1 + x_2x_3 + x_3x_4} (-k_1x_1^2 - k_3x_3^2 - k_4x_4^2)$$

$$u_2 = -k_2x_2$$

on trouve :

$$\dot{V} = -k_1x_1^2 - k_2x_2^2 - k_3x_3^2 - k_4x_4^2 < 0$$

donc les états convergent vers 0.

Malheureusement cette loi de commande n'est pas définie quand  $x_1 + x_2x_3 + x_3x_4 = 0$  ce qui signifie qu'on ne peut pas l'implémenter sur notre robot mobile.

Après implémentation de cette loi de commande, les résultats de simulation ont indiqué la divergence des états c'est à dire qu'on est pas sur la bonne route (voir Figure 1).

**Deuxième approche :**

Maintenant , on va réduire la synthèse de la loi de commande de deux à une seule entrée par imposition d'une entrée :

Posons  $u_1 = -kx_1$  on aura (III-7) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -kx_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = -kx_1x_2 \\ \dot{x}_4 = -kx_1x_3 \end{cases} \dots\dots\dots(III - 8)$$

donc pour  $u_1 = -Kx_1$  on a

$$\dot{x}_1 = -kx_1$$

ce qui donne la solution  $x_1(t) = x_1(t_0)exp(-kt)$ .

D'après l'expression de  $x_1$  , l'état  $x_1$  va tendre vers zéro exponentiellement , et il n'est jamais nul pour t fini .

Donc un état est commandé (converge vers l'origine ) .

Il nous reste à commander les trois états ( $x_2$   $x_3$   $x_4$ ) ceci est possible que par  $u_2$ .

En premier moment , on va essayer d'appliquer la technique de standard :

On à le modèle du robot qui est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -kx_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = -kx_1x_2 \\ \dot{x}_4 = -kx_1x_3 \end{cases}$$

Choisissons comme fonction de Lyapunov la fonction donnée par :

$$V = 1/2 (x_3^2 + x_4^2 + x_2^2)$$

Sa dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x_3\dot{x}_3 + x_4\dot{x}_4 + x_2\dot{x}_2 \\ \dot{V} &= -kx_1x_2x_3 - kx_1x_3x_4 + x_2u_2 \end{aligned}$$



Soit la loi de commande donnée par :

$$u_2 = \frac{1}{x_2} (kx_1x_2x_3 + k_1x_1x_3x_4 - kx_2^2 - kx_3^2 - kx_4^2)$$

avec cette loi de commande la dérivée de  $V$  est donnée par :

$$\dot{V} = -kx_2^2 - kx_3^2 - kx_4^2 < 0 \text{ ce qui signifie que les états } x_2$$

et  $x_3$  et  $x_4$  converge vers zéro .

Malheureusement cette loi de commande n'est pas définie car  $x_2$  n'est pas exponentiellement stable .

### Résultats de simulations :

Après implémentation de cette loi de commande ainsi obtenue , les résultats de simulations sont donnés sur la (Figure 2 ) .

D'après cette figure on constate que l'état  $x_1$  converge vers l'origine , ce qui est évident parce que nous avons imposé  $u_1 = -kx_1$  ce qui fait tendre cet état exponentiellement vers zéro .

Par contre les trois autres états ne convergent pas , ce qui signifie que la loi de commande (III-9) ne fait pas converger les trajectoires du système vers l'origine ce qui est évident parce que notre loi de commande n'est pas définie ..

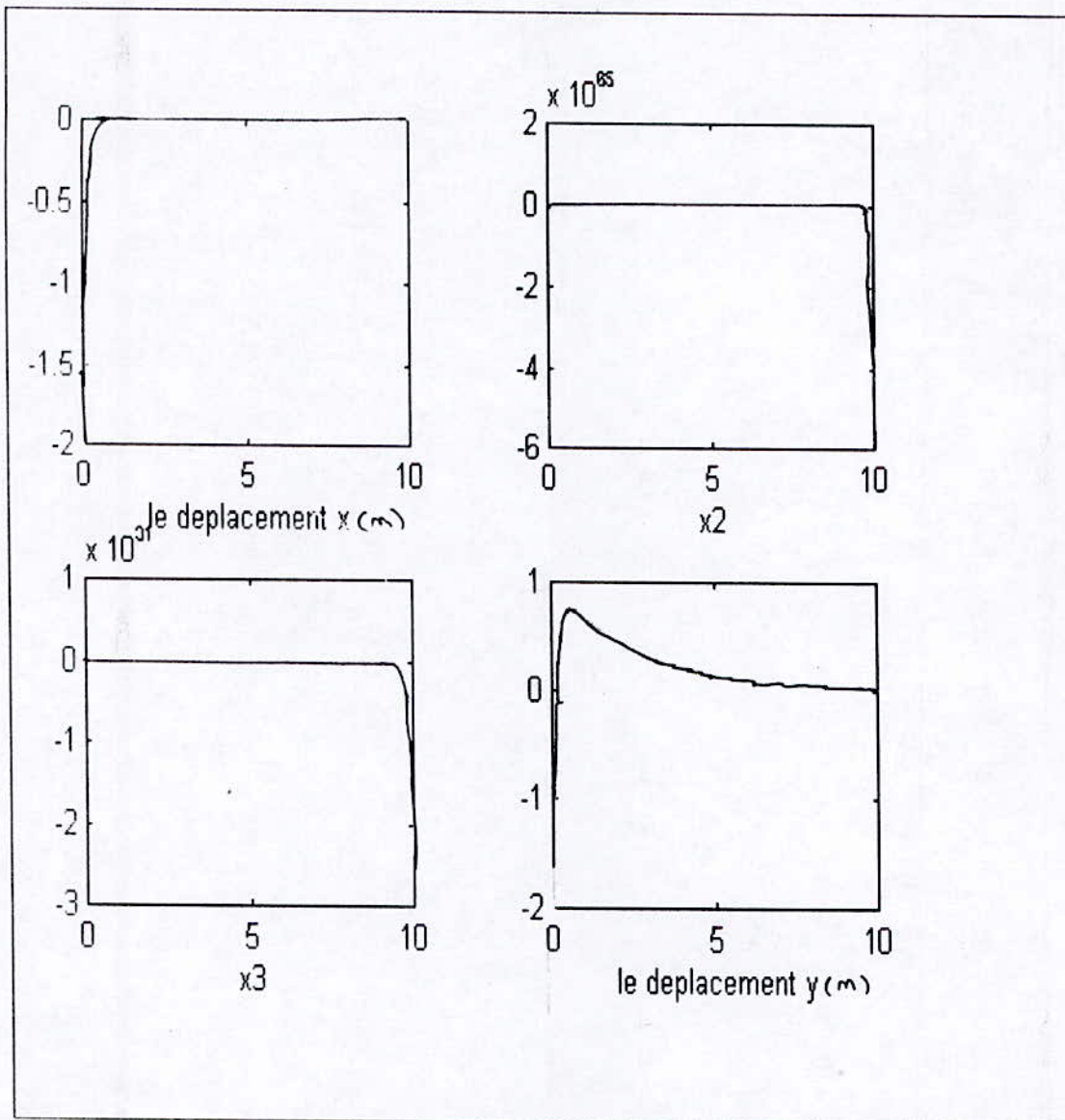


Figure 1 : L'évolution des quatre variables d'états pour  $X_0 = [-2, 0.8, 1.4, -2]$  – Première approche-



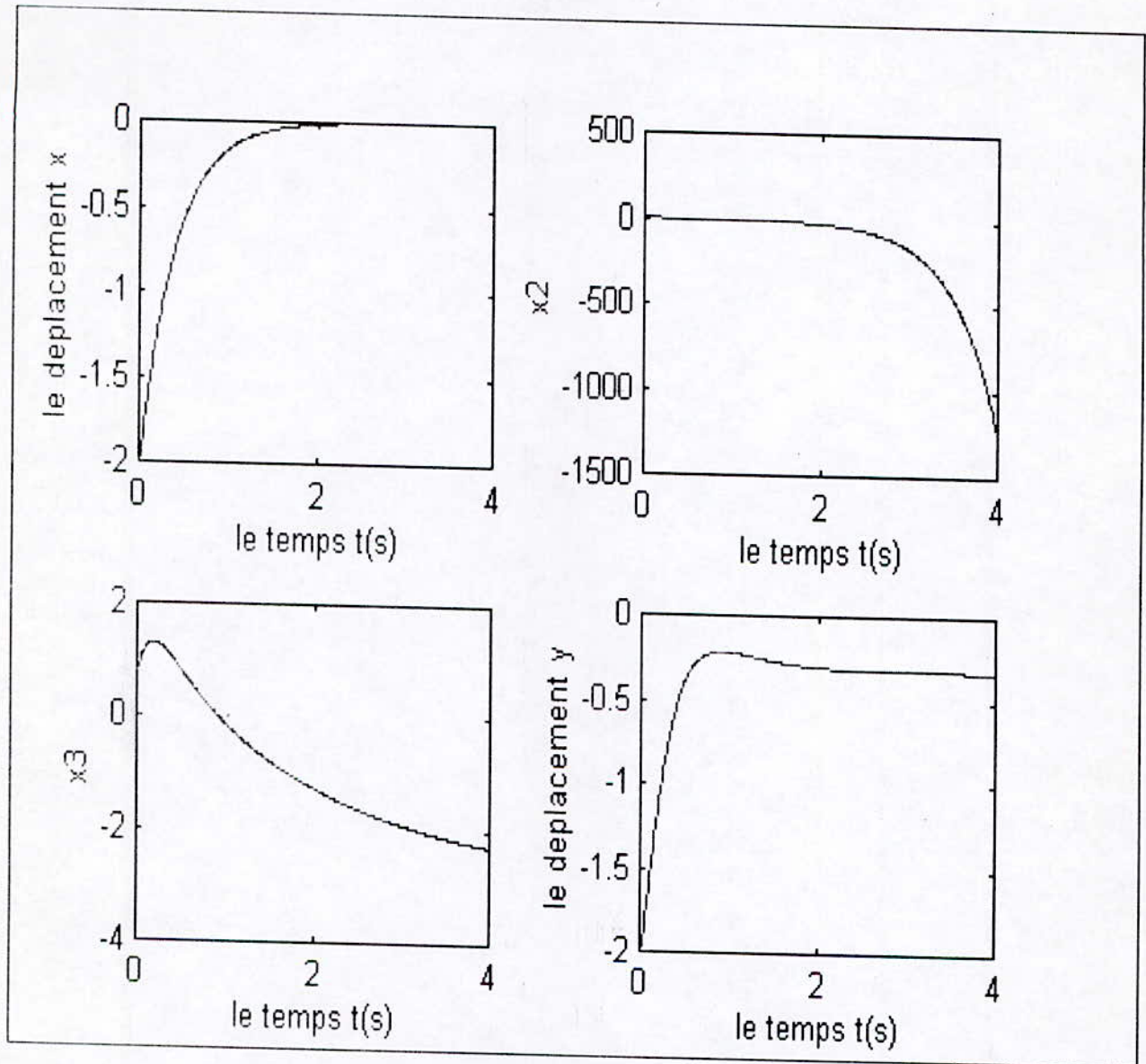


Figure 2 : L'évolution des quatre variables d'état pour  $X_0 = [-2, 0.8, 1.4, -2]$  –Deuxième approche-

### III-4 Troisième approche : Technique de backstepping :

Après l'échec dans la détermination d'une loi de commande qui fait converger les quatre états vers l'origine en lui ; on va essayer une autre procédure ou une autre technique qui est la technique de backstepping .

Cette technique est souvent employée pour la commande des systèmes sous la forme chaînée , parce que elle est basée sur la commande d'un état par un autre état , c'est à dire de voir l'état du système comme étant une entrée de commande virtuelle .

Pour cela prenons le système (III-1) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -kx_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = -kx_1x_2 \\ \dot{x}_4 = -kx_1x_3 \end{cases}$$

❶ Avec  $u_1 = -kx_1$  on garantie la convergence de  $x_1 \rightarrow 0$  .

$x_1(t) = x_1(t_0) \exp(-k t)$  ,  $x_1(t)$  va tendre exponentiellement vers l'origine .

Il nous reste les trois états  $x_2$  ,  $x_3$  ,  $x_4$  à commander .  
on aura un système d'ordre trois :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = -kx_1x_2 \\ \dot{x}_4 = -kx_1x_3 \end{cases}$$

réécrivons ces équations sous la forme (II-10) , (II-11) vue dans le deuxième chapitre dans la partie de backstepping on aura :

$$\begin{cases} \dot{x}_4 = -kx_1x_3 \\ \dot{x}_3 = -kx_1x_2 \\ \dot{x}_2 = u_2 \end{cases}$$

Ce système peut être aussi décomposé à un système d'ordre deux en addition avec un intégrateur .



le système d'ordre deux est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_4 = -kx_1x_3 \\ \dot{x}_3 = -kx_1x_2 \end{cases}$$

avec  $x_2$  vu comme étant une entrée de commande (commande virtuelle) .

intégrateur est donné par  $\dot{x}_2 = u_2$

Commençons par le système d'ordre deux :

$$\begin{cases} \dot{x}_4 = -kx_1x_3 \\ \dot{x}_3 = -kx_1x_2 \end{cases} \quad (\text{III-12})$$

$x_3$  peut aussi être vu comme étant une entrée de commande de l'état  $x_4$  .

si on prend  $x_3 = \frac{x_4}{x_1} = \phi(x_4)$

avec la fonction de Lyapunov  $V_1(x_4) = \frac{1}{2} x_4^2$

$$\dot{V}_1 = x_4 \dot{x}_4 = -kx_1x_3x_4 = -kx_1 \frac{x_4}{x_1} x_4 = -kx_4^2 \leq 0 \dots \forall x_4 \in \mathfrak{R}$$

Donc  $x_3 = \frac{x_4}{x_1}$  fait tendre  $x_4$  vers 0 .

Notons que le terme  $\frac{x_4}{x_1}$  est bien défini car l'état  $x_1$  converge vers zéro exponentiellement (i.e il ne va atteindre le zéro que si  $t$  tend vers l'infini) .

maintenant on doit déterminer le  $x_2$  qui ramène le  $x_3$  vers  $\frac{x_4}{x_1}$  .

D'après les définitions du chapitres et on appliquant le Lemme (II-1) on aura

$$-kx_1x_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_4}(-kx_1x_3) - \frac{\partial V_1}{\partial x_4}(-kx_1) - \left(x_3 - \frac{x_4}{x_1}\right)$$

Avec  $\frac{\partial V_1}{\partial x_4} = x_4$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_4} = \frac{1}{x_1}$$

on aura :

$$-kx_1x_2 = \frac{1}{x_1}(-kx_1x_3) - x_4(-kx_1) - \left(x_3 - \frac{x_4}{x_1}\right).$$

on trouve :

$$x_2 = \frac{2x_1x_3 - x_4}{x_1^2} - x_4$$

donc le  $x_2$  ainsi déterminé stabilise le système d'ordre deux (III-12)

Maintenant prenons le système complet d'ordre trois :

$$\begin{cases} \dot{x}_4 = -kx_1x_3 \\ \dot{x}_3 = -kx_1x_2 \\ \dot{x}_2 = u_2 \end{cases}$$

nous avons trouver que le système (III-12) peut être stabiliser par la loi de commande :

$$\phi(\eta) = x_2 = \frac{2x_1x_3 - x_4}{x_1^2} - x_4$$

$x_2$  par définition égale à  $\phi(x_3, x_4)$ , et la fonction de Lyapunov correspondante donnée par :

$$V_2(x_3, x_4) = \frac{1}{2}kx_4^2 + \frac{1}{2}K_2\left(x_3 - \frac{x_4}{x_1}\right)^2 = V(\eta)$$



Avec :

$$\eta = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = x_2$$

$$f = \begin{bmatrix} -kx_1x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ -kx_1 \end{bmatrix}$$

D'après lemme (II-1) la fonction de Lyapunov globale et la loi de commande  $u_2$  sont données par :

$$V_3(x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}k_1x_4^2 + \frac{1}{2}k_2\left(x_3 - \frac{x_4}{x_1}\right)^2 + \frac{1}{2}K\left(x_2 + x_4 - \frac{2x_1x_3 - x_4}{x_1^2}\right)^2$$

$$u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\varepsilon] - \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - K(x_2 - \phi(\eta))$$

avec  $k$  constant pour améliorer la vitesse de convergence .

on a :

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_3} = \left(x_3 - \frac{x_4}{x_1}\right)k_2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = \frac{2}{x_1}$$

Donc on va tout simplement remplacer dans l'expression de  $u_2$  les expressions ainsi obtenues des dérivées partielles on trouve

$$u_2 = \left(-kx_1 - k\frac{x_3}{x_1} + Kx_4\right) - k_2x_2 + \frac{k_2}{x_1}\left(x_3 - \frac{x_4}{x_1}\right) - K\left(x_2 - \frac{2x_1x_3 - x_4}{x_1^2} + x_4\right)$$

$$u_2 = -kx_1 - (k_2 + K)x_2 - (k + k_2 - 2K)\frac{x_3}{x_1} - (k_2 + K)\frac{x_4}{x_1^2}$$

$$u_2 = -kx_1 - (k_2 + K)x_2 - (k + K)\frac{x_3}{x_1} + \frac{(k + K)}{x_1}\left(x_3 - \frac{x_4}{x_1}\right)$$

Avec un choix approprié de ces constantes ( $k, k_2, K$ ) qui agissent sur la vitesse de convergence.

En résumé, la loi de commande suivante :

$$u_1 = -kx_1$$

$$u_2 = -kx_1 - (k_2 + K)x_2 - (k + K)\frac{x_3}{x_1} + \frac{(k + K)}{x_1}(x_1 - \frac{x_4}{x_1})$$

est bien définie, et stabilise le robot mobile.

### III-5 Résultats de simulations et interprétations :

Nous avons implémenter cette loi de commande, et les résultats de simulations obtenus sont donnés par les Figures (3,4,5,6)

Pour le Figure 3 : représente l'évolution des quatre variables d'états ( $x_1; x_2; x_3; x_4$ ) au cours du temps.

On remarque que les deux états  $x_1$  et  $x_4$  qui représentent respectivement le déplacement ( $x, y$ ) converge vers l'origine en exponentielle.

Pour la figure 4 : représente l'évolution des variables d'états réelle ( $x; y; \theta; \phi$ ) pour une condition initiale  $[-2, -2, \pi/4; \pi/4]$ .

Pour la Figure 5 : montre l'évolution des entrées de commandes  $u_1$  et  $u_2$  ainsi que les entrées de commandes réelles  $v$  et  $w$ .

Pour la Figure 6 : montre l'évolution de deux variables de commande  $v$  et  $w$ .

Les Figures (7,8,9,10) représentent le déplacement  $y(x)$  à partir de différentes conditions initiales et la stabilité est toujours garantie.

La Figure 11 : représente la stabilisation du robot à l'origine à partir de quatre configurations différentes du robot.



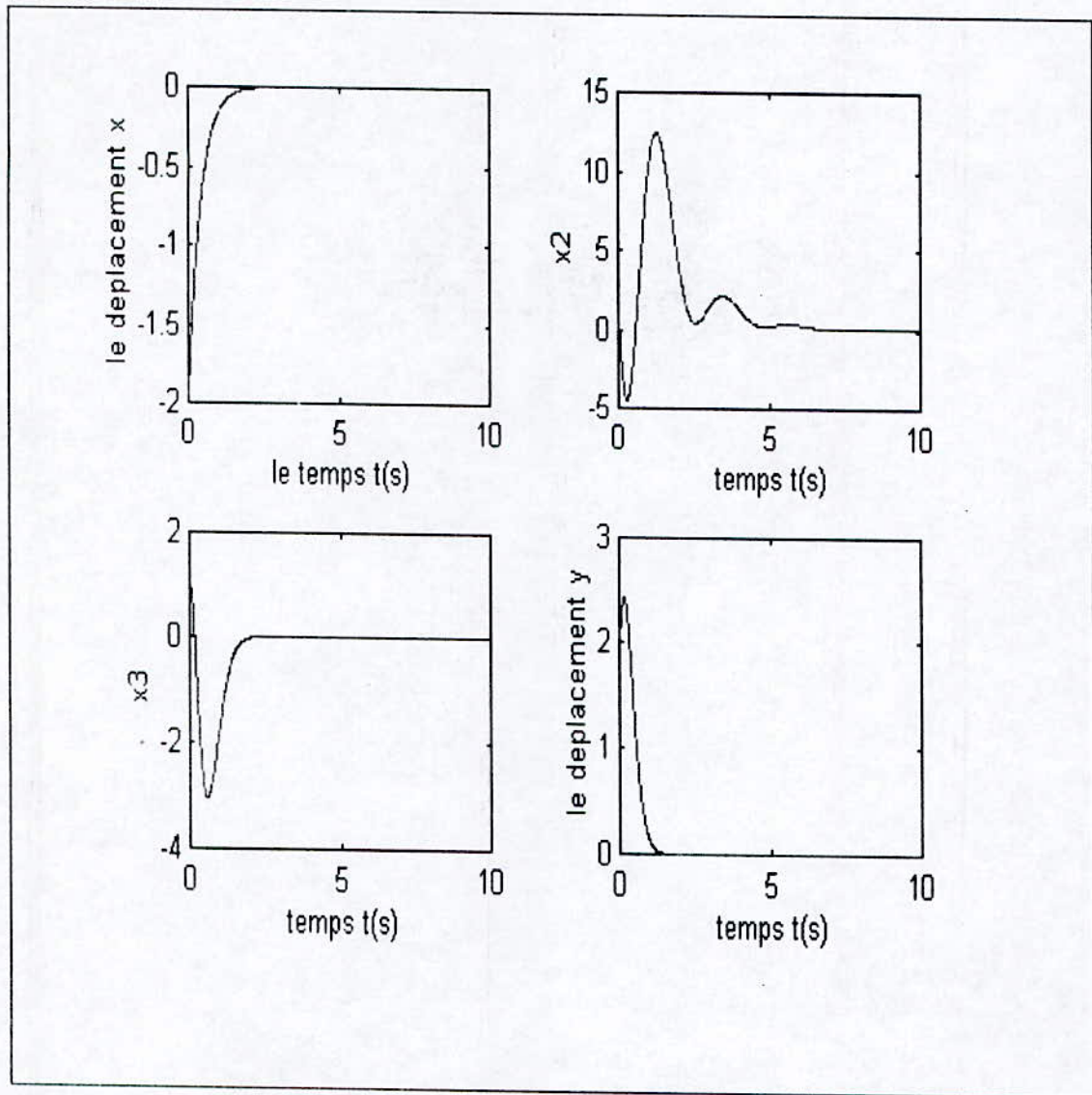


Figure 3 : L'évolution des variables d'états pour  $X_0 = [-2 ; 0.8 ; 1.4 ; 2]$  - Troisième approche-

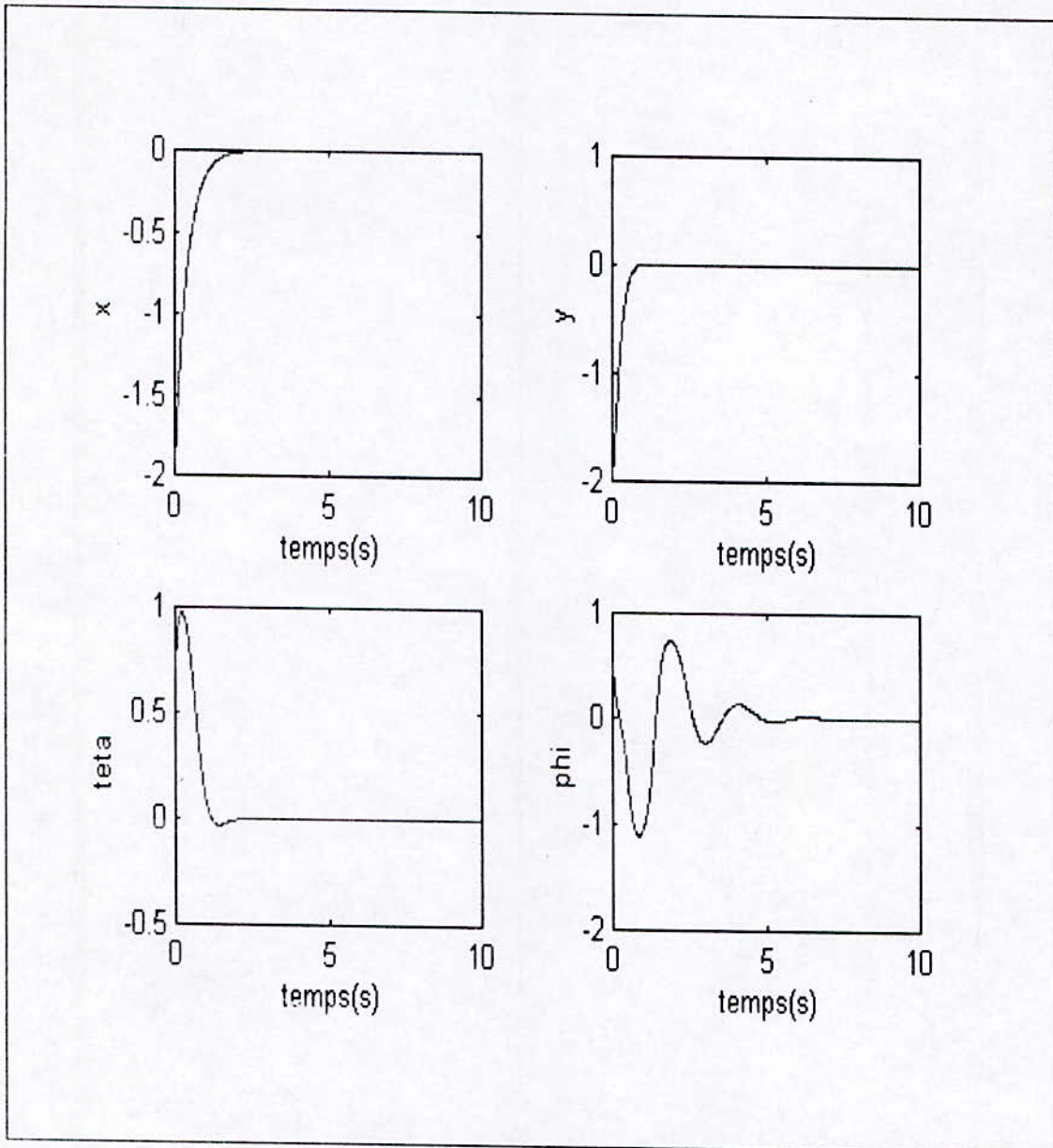


Figure 4. Evolution dans le temps des quatre variables d'état  $(x, y, \theta, \phi)$  avec  $(x_0 = -2, y_0 = -2, \theta_0 = \pi/4, \phi_0 = \pi/4)$



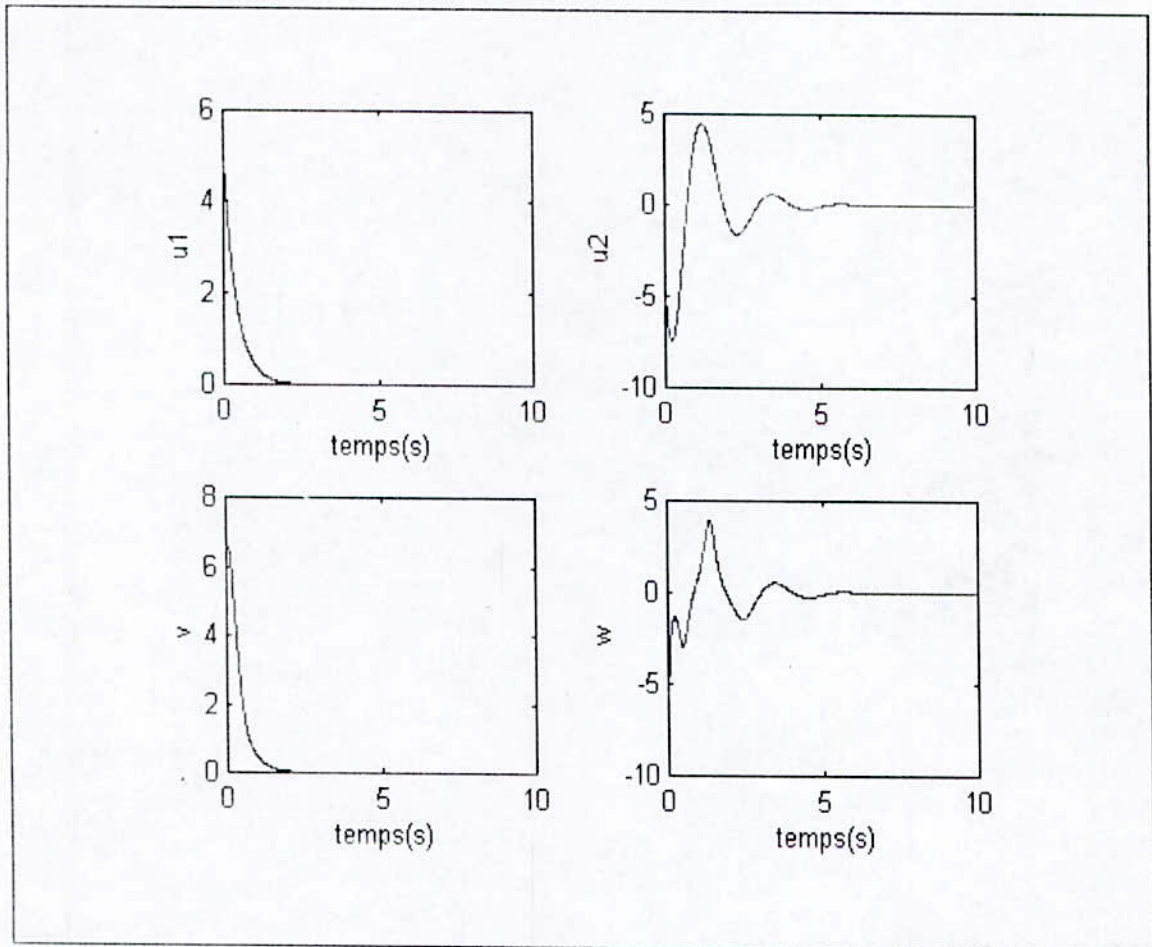


Figure 5 :Evolution des entrées de commande

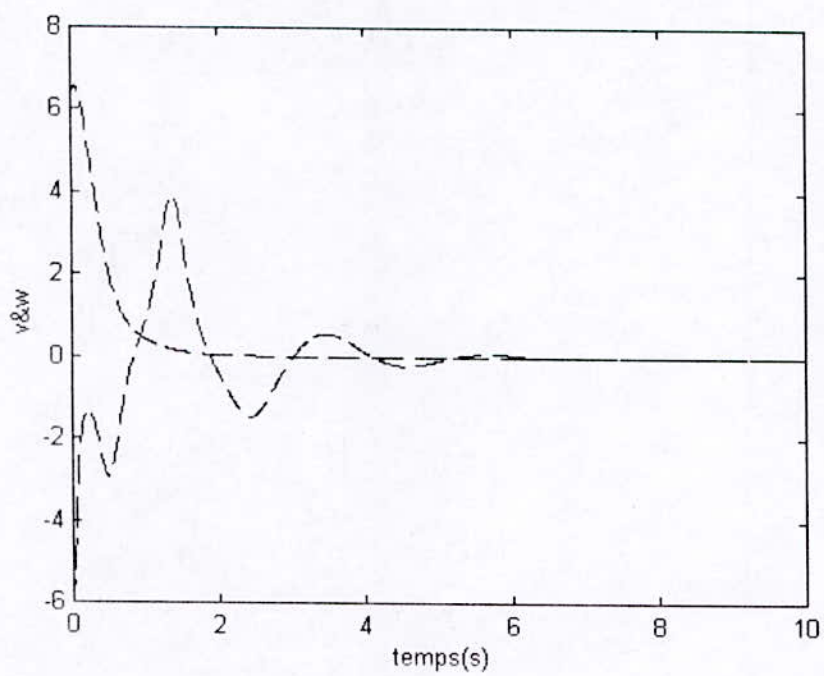


Figure 6 :Evolution des deux entrées de commande  $v$  et  $w$



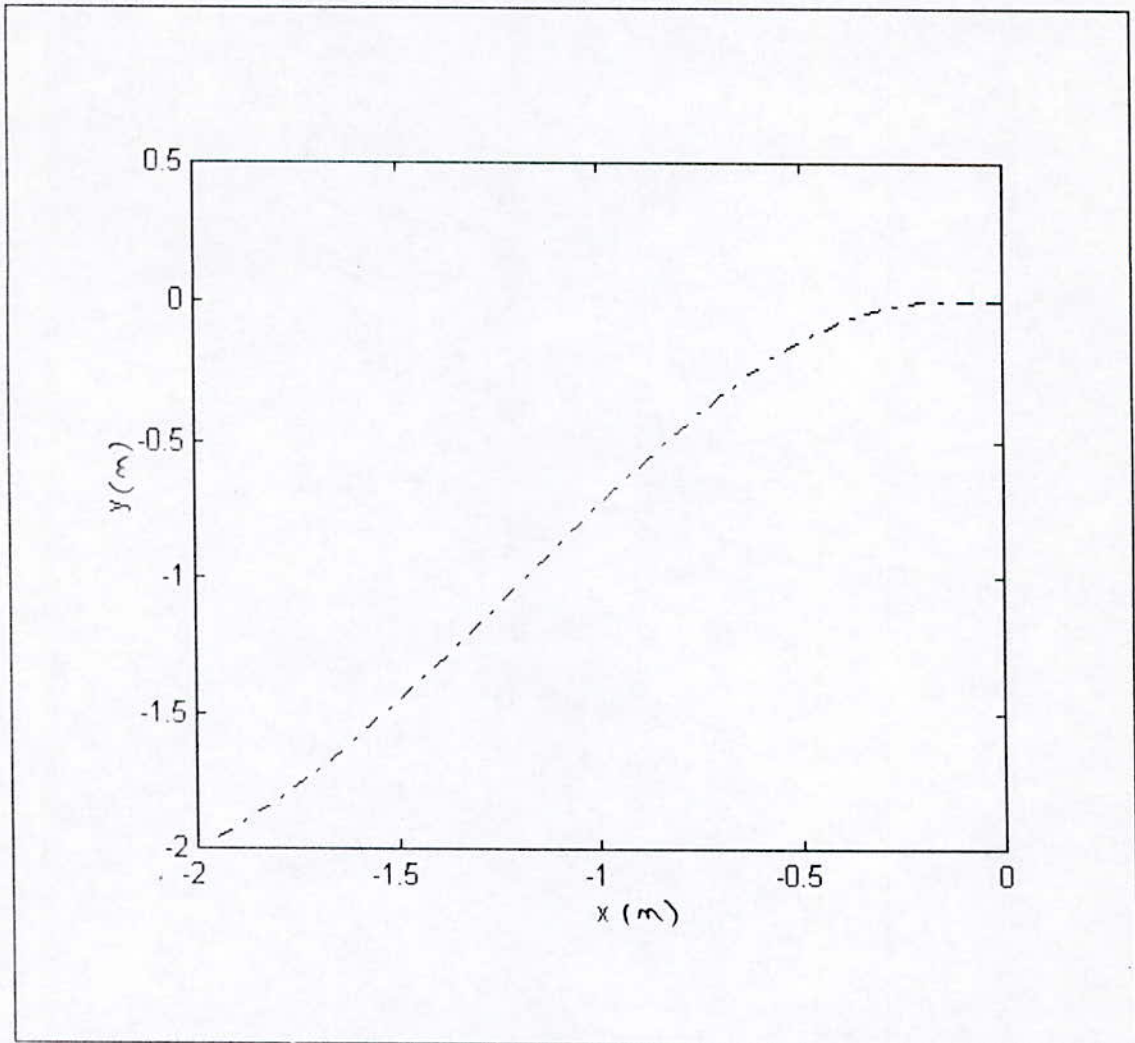


Figure 7: Evolution de  $y(x)$  pour  $X_0 = [-2, 0.8, 1.4, -2]$

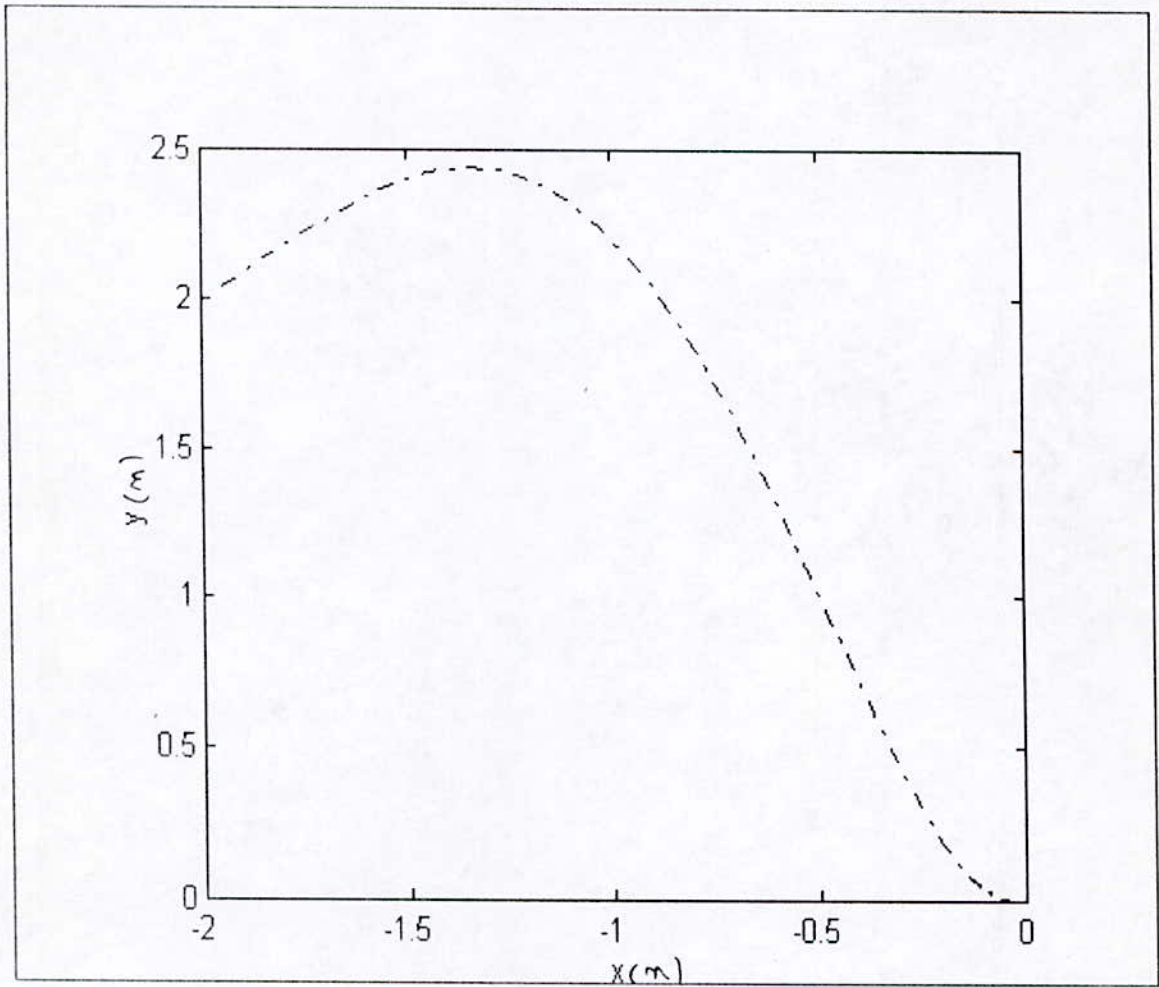


Figure 8 : Evolution de  $y(x)$  pour  $X_0 = [-2 ; 0.8 \ 1.4 \ 2]$



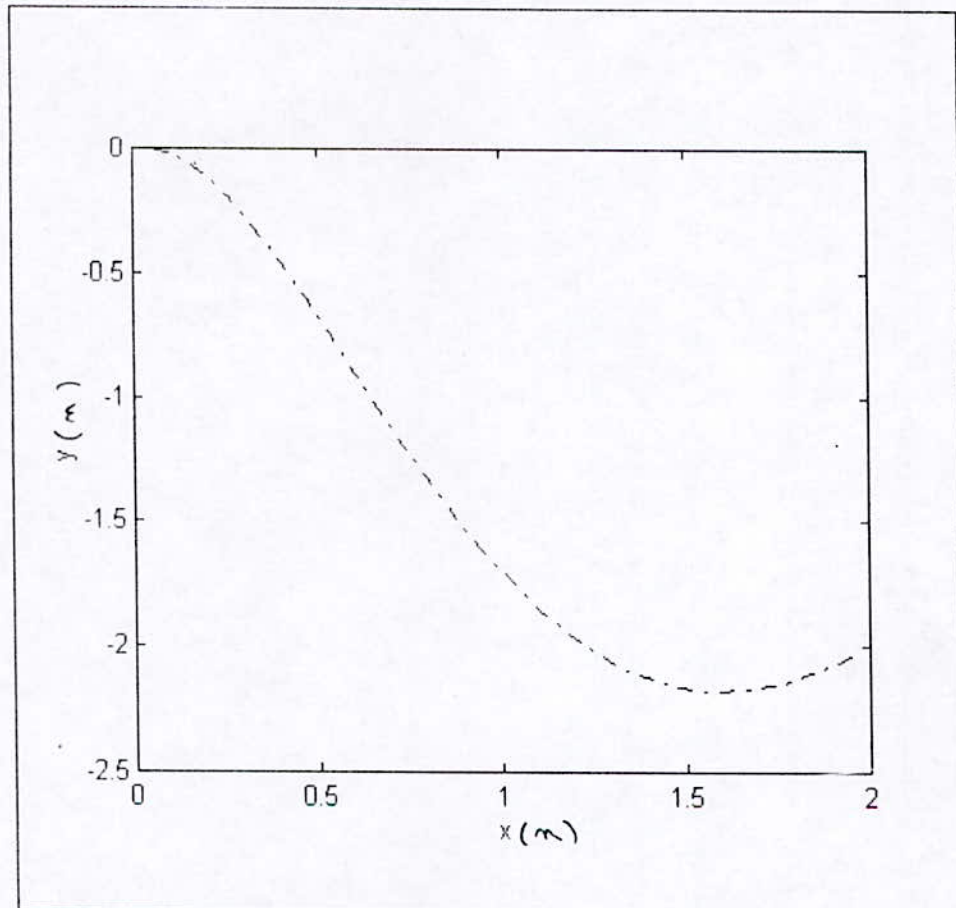


Figure 9 : Evolution de  $y(x)$  pour  $X_0 = [2, 0.8, 1.4, -2]$

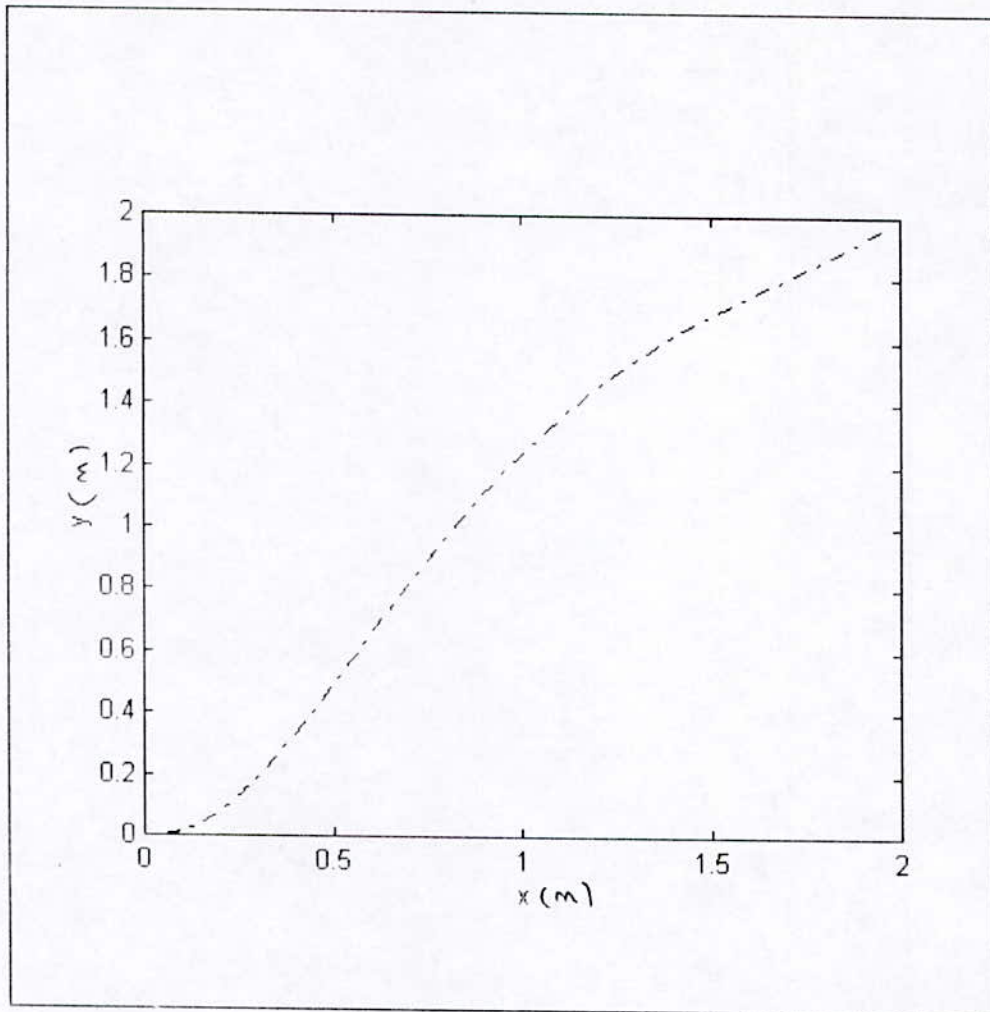


Figure 10 : Evolution de  $y(x)$  pour  $X_0 = [2, 0.8, 1.4, 2]$



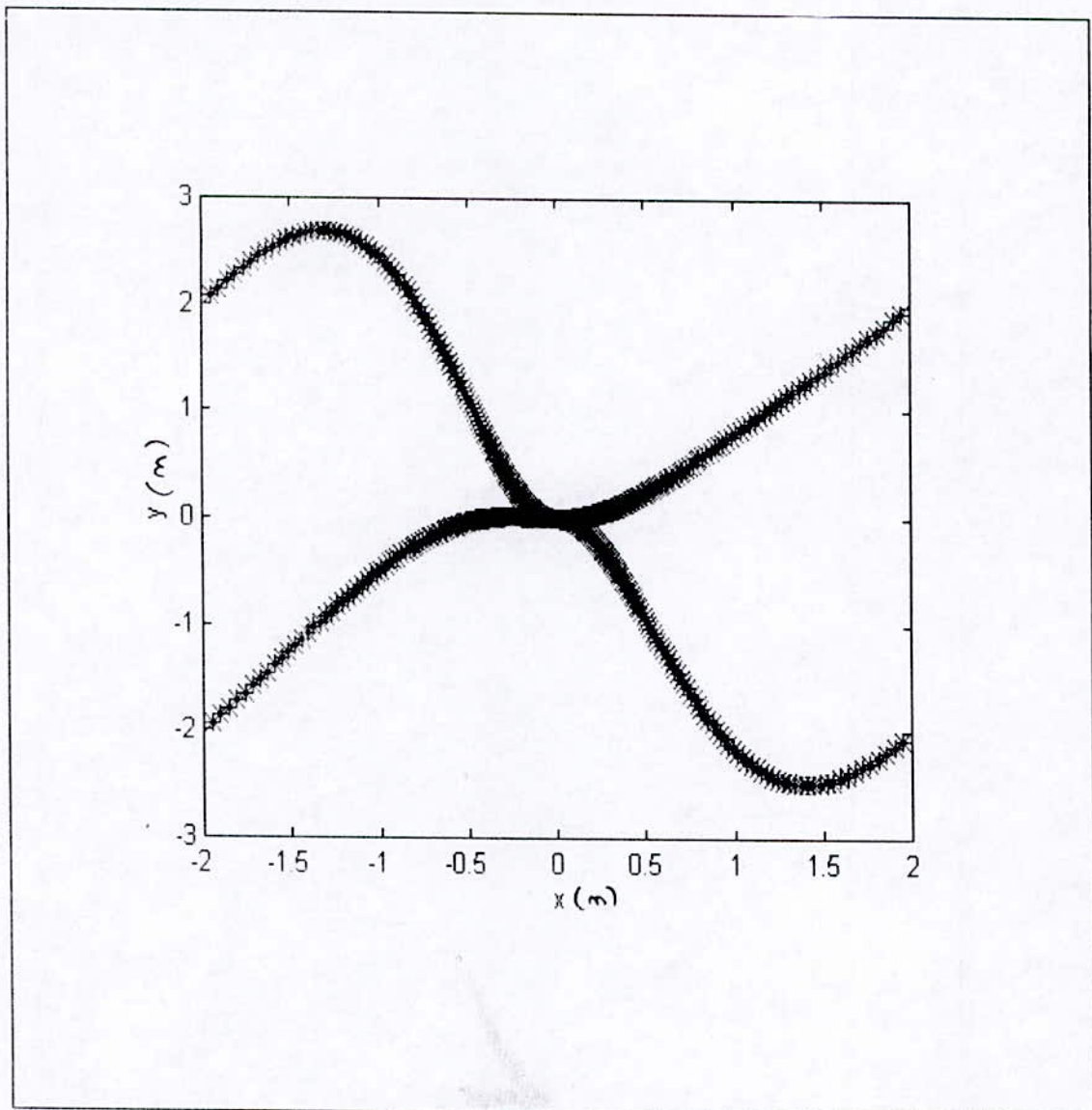


Figure 11 : Stabilisation du robot mobile à l'origine à partir de quatre configurations différentes du robot

**Test de robustesse :**

Pour valider la méthode, nous étions amenés à effectuer un test de robustesse, vis à vis de perturbation à savoir un échelon de 0.01 injecté sur la commande à  $t = 0$ , cette perturbation peut être considérée comme étant un bruit de mesure de la vitesse.

Les résultats de simulations obtenus après injection de cette perturbation sont représentés sur les Figures(12 ;13 ;14).

Figure 12 : représente l'évolution des variables d'état, on remarque que la perturbation n'influe que légèrement sur la convergence des états vers l'origine.

Figure 13 : représente l'évolution des variables de commande.

Figure 14 : représente l'évolution des variables d'états réelles.

Figure 15 : représente l'évolution des variables d'états ( $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ ) après changement de conditions initiales.

Figure 16,17,18,19 : représentent le déplacement  $y(x)$  pour différentes conditions initiales.

Figure 20 : représente l'évolution des deux entrées de commandes  $v$  et  $w$ .

Figure 21 : représente le parking du robot à l'origine à partir de différentes configurations.

D'après la comparaison des résultats obtenus après injection de la perturbation avec celles obtenus sans perturbation on remarque que cette dernière n'influe presque pas sur la convergence des trajectoires du robot, et la stabilité est toujours garantie ce qui signifie que notre loi de commande synthétisée est robuste.



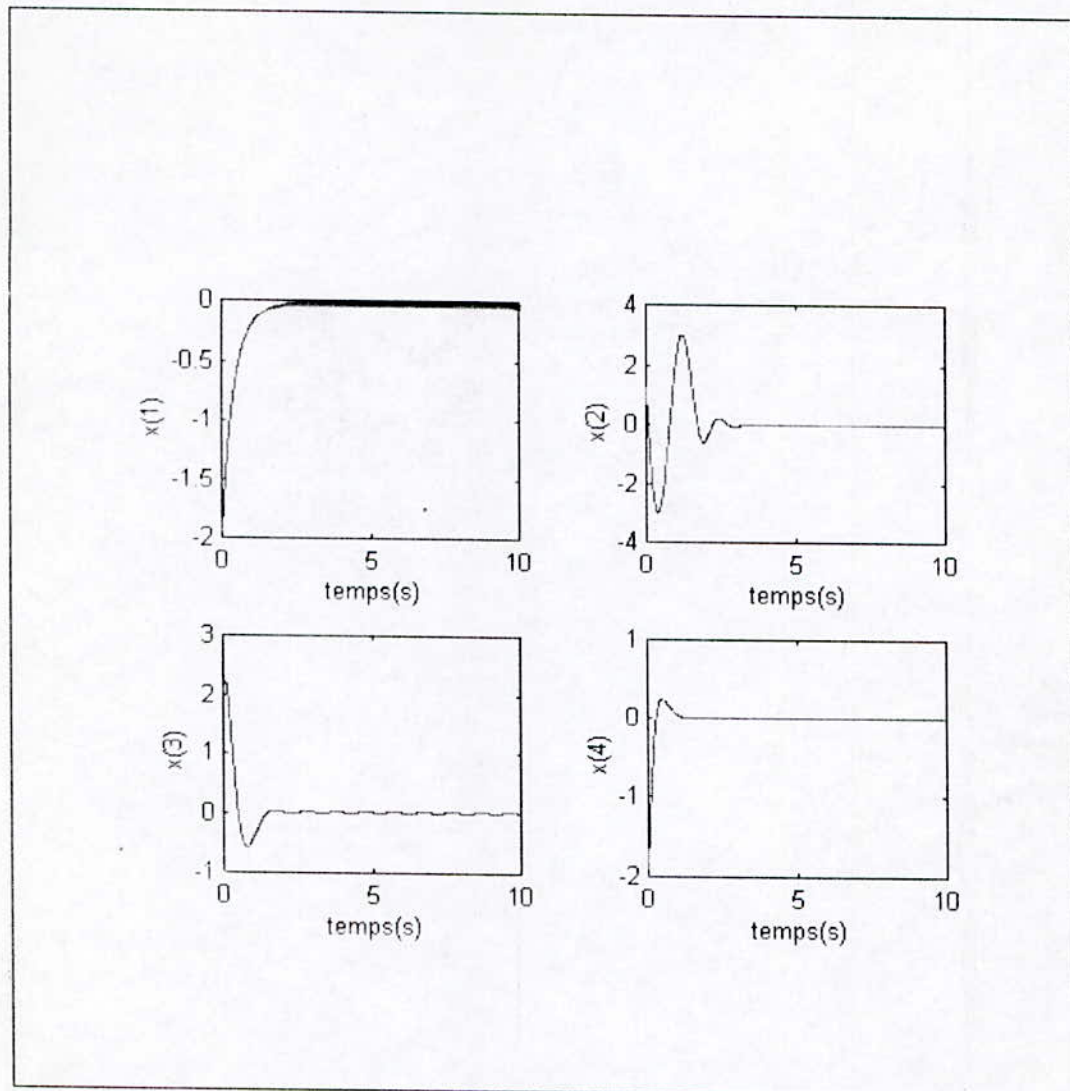


Figure 12 : L'évolution des variables d'état en présence des perturbations

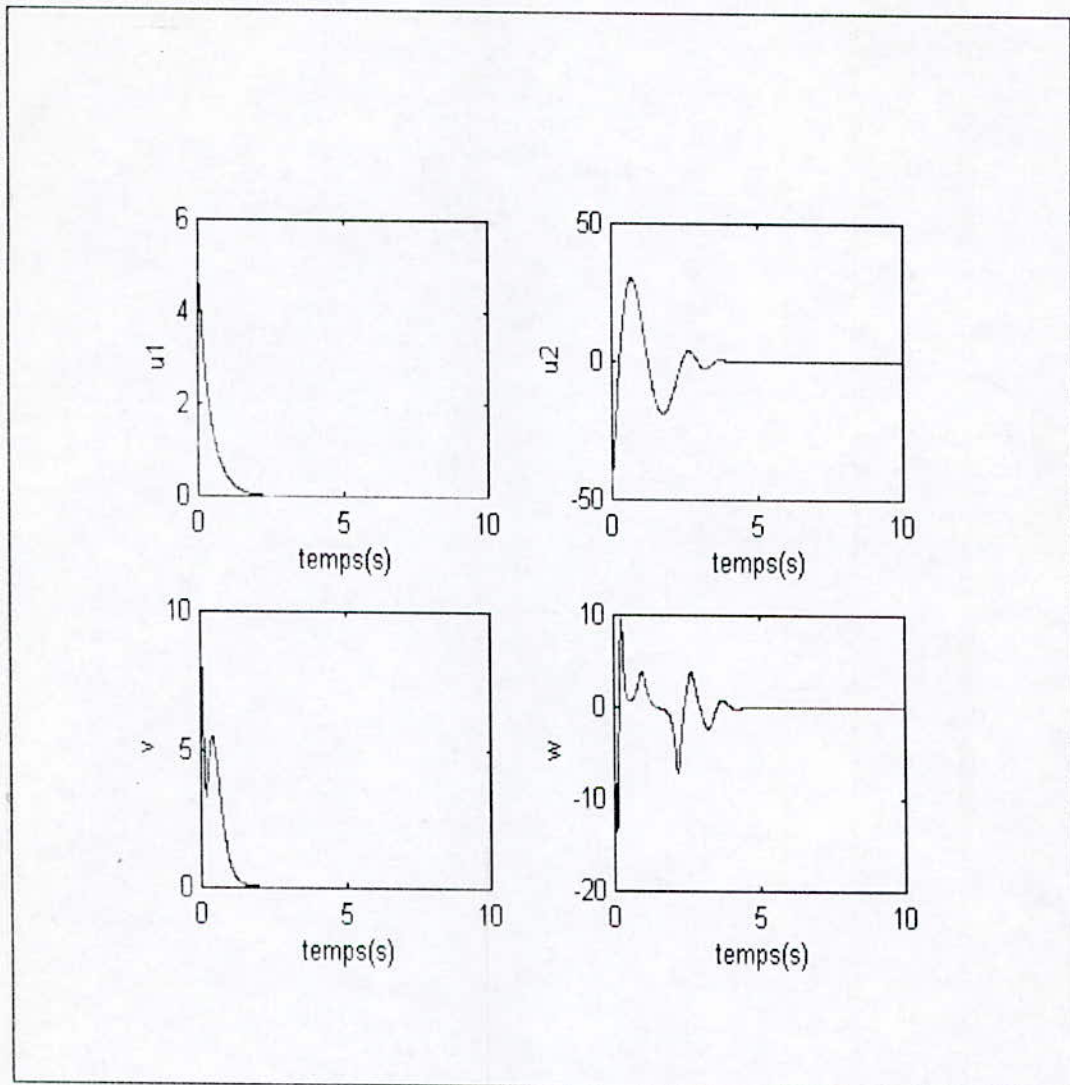


Figure 13 : L'évolution des variables de commande  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $v$ ,  $w$



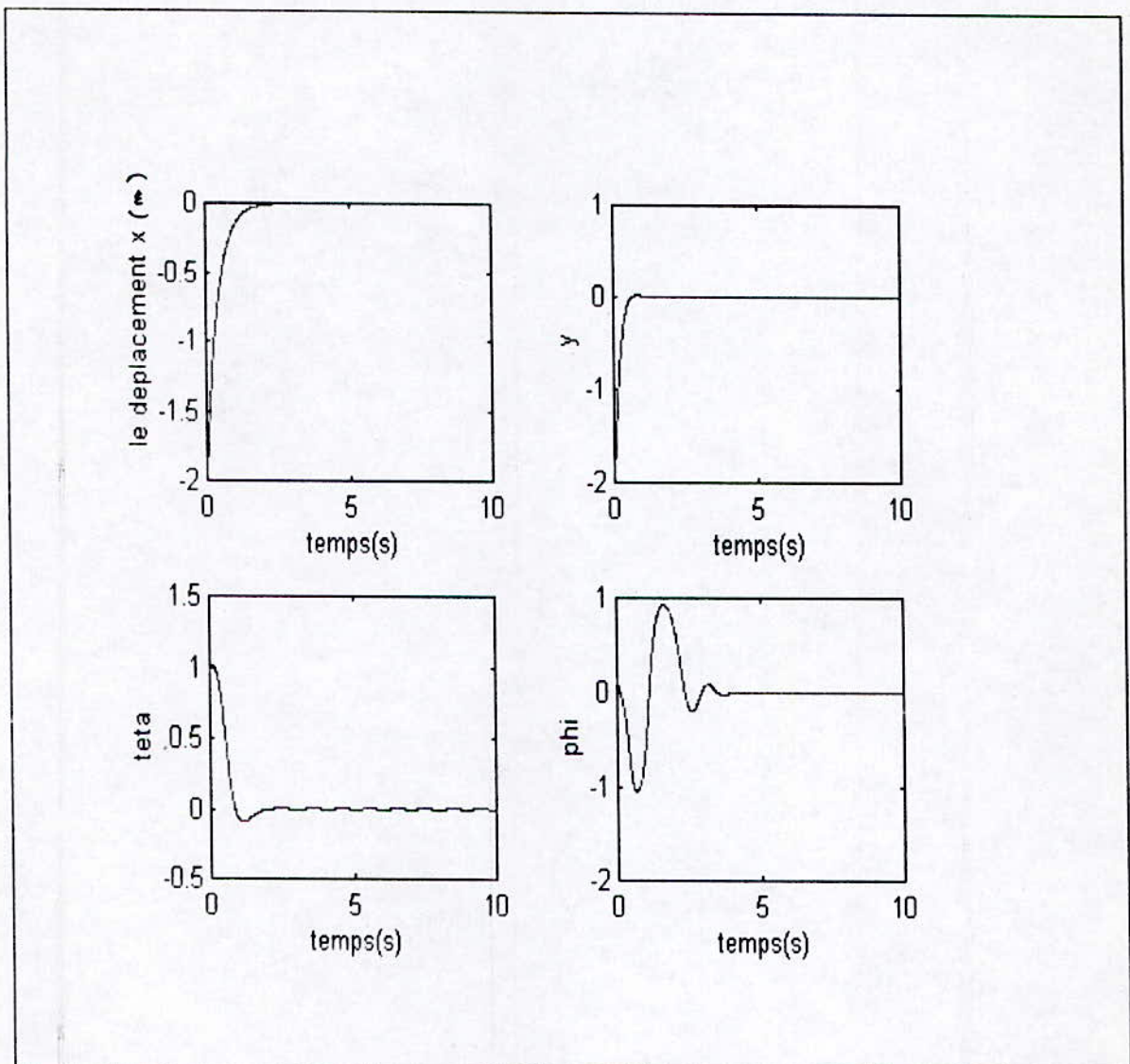


Figure 14 : Evolution des variables réelles en présence des perturbations

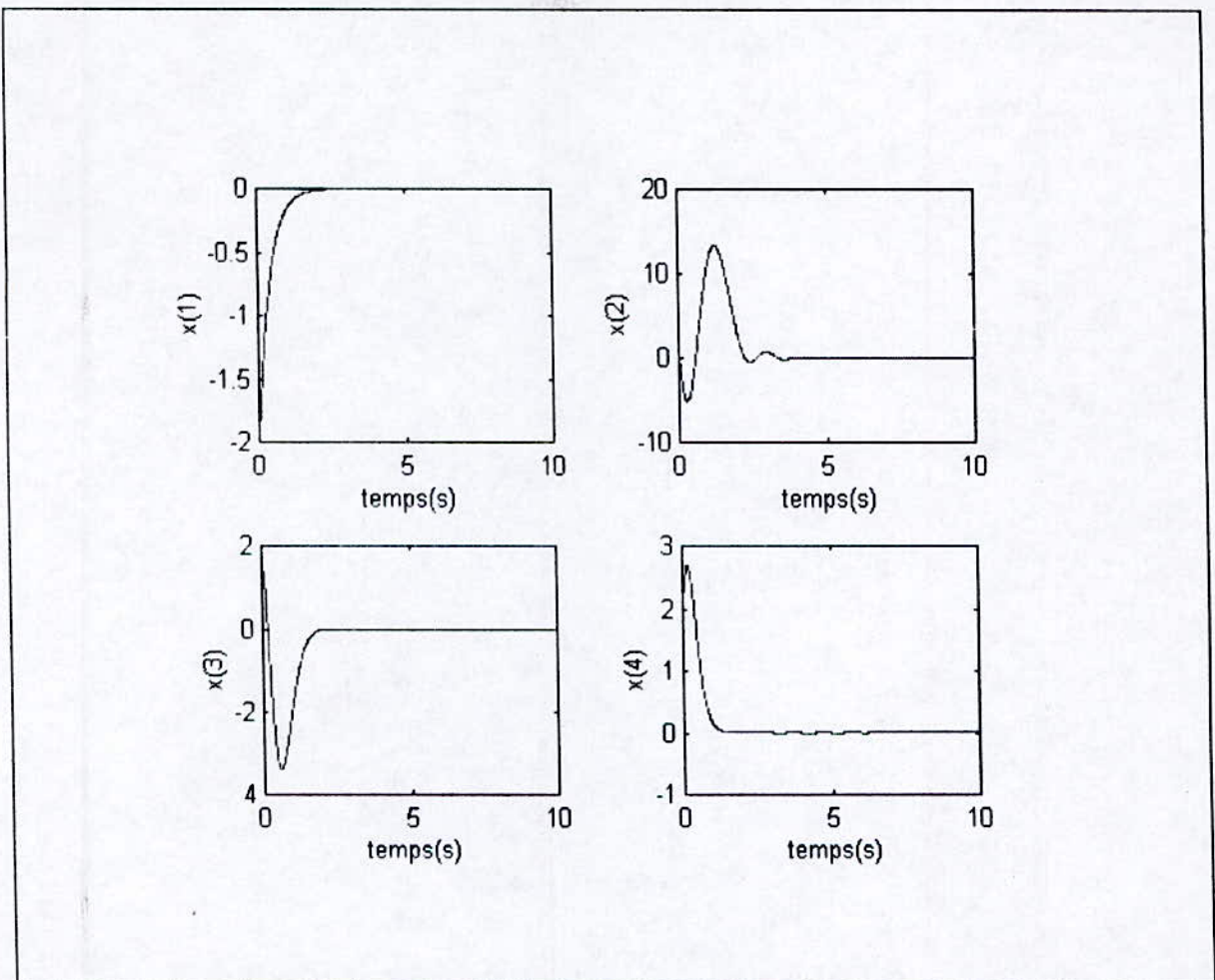


Figure 15 : L'évolution des quatre variables d'états  $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$  après changement des conditions initiales



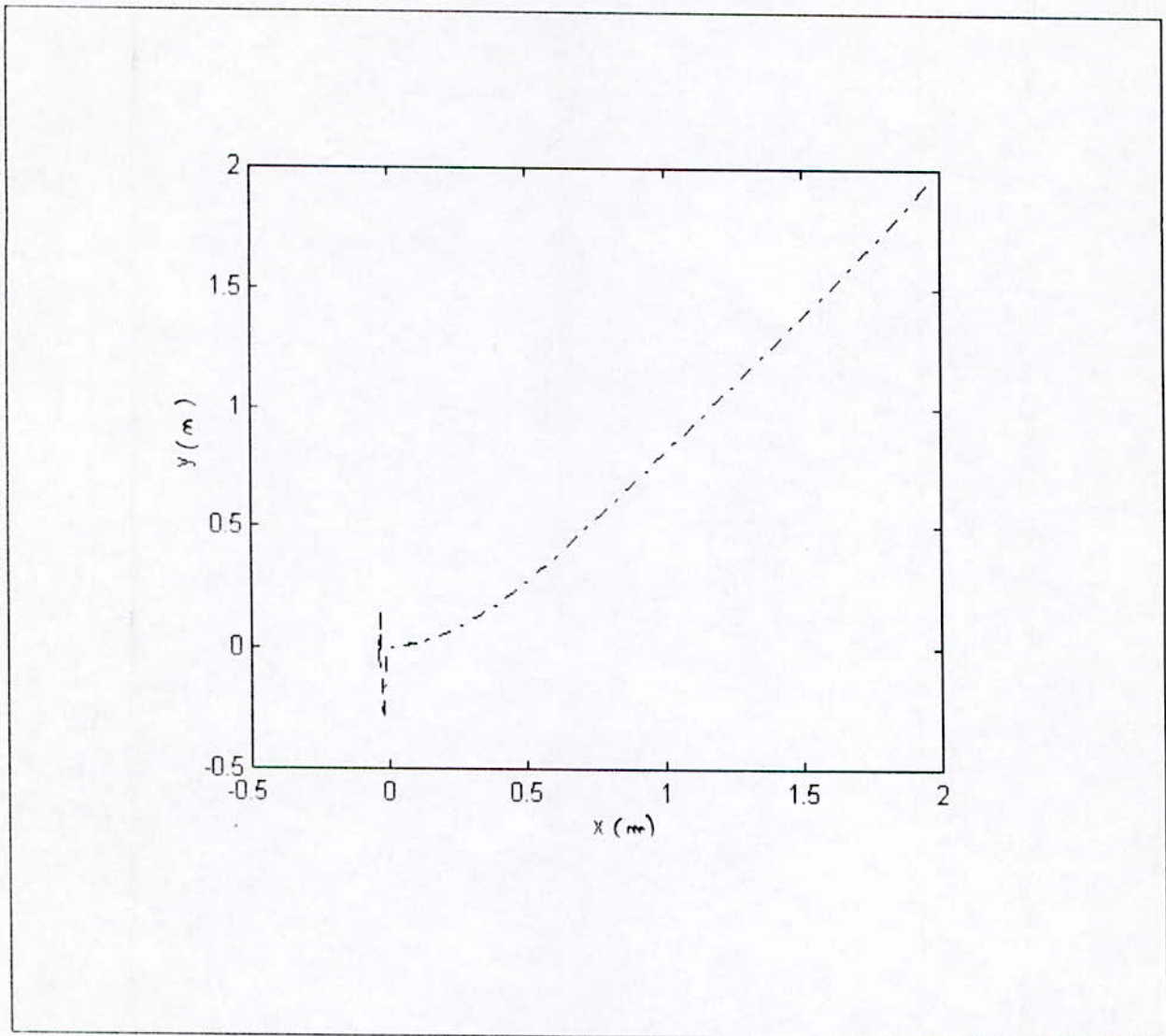


Figure 16 : L'évolution de  $y(x)$  pour  $X_0 = [2, 0.8, 1.4, 2]$  en présence des perturbations

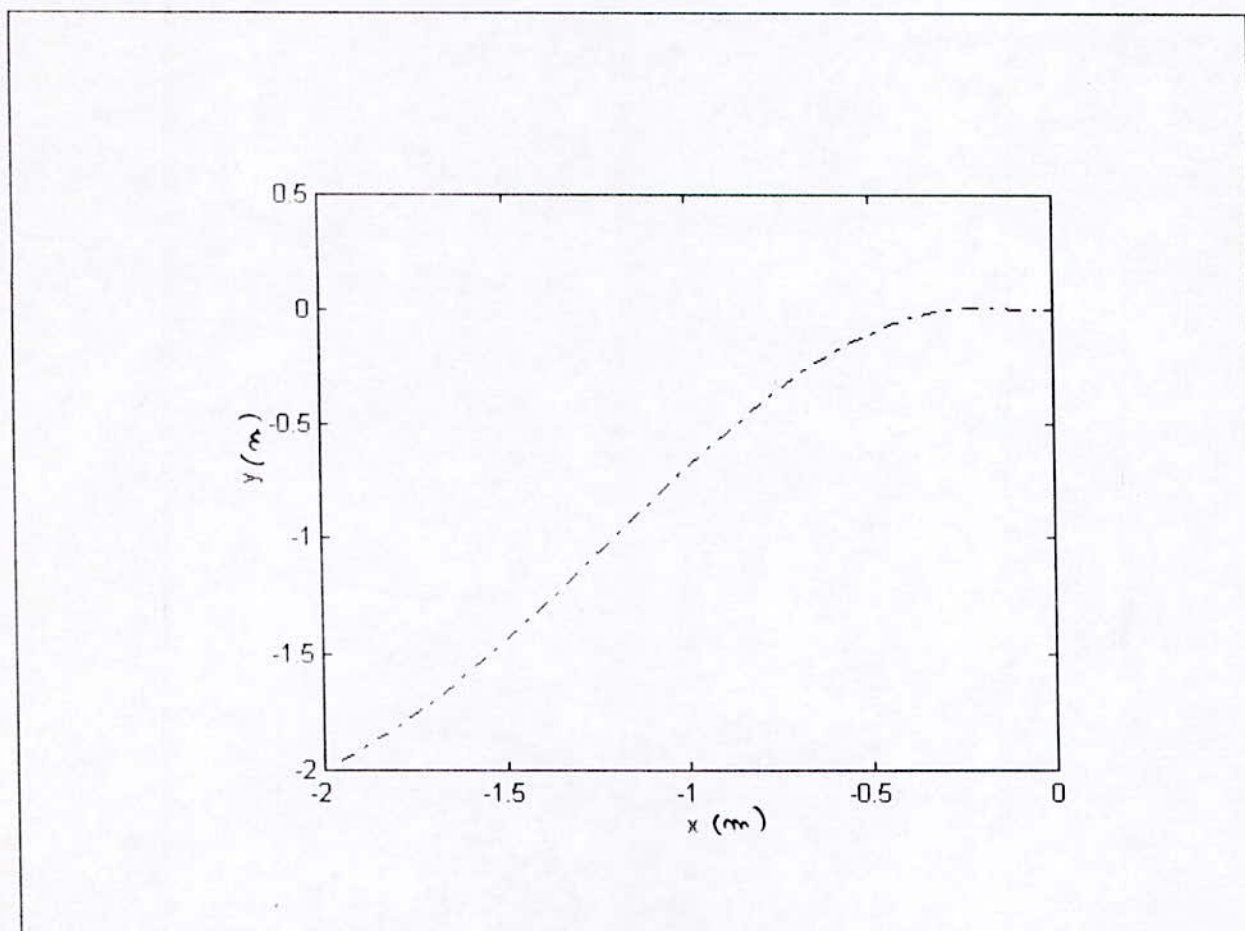


Figure 17 : L'évolution de  $y(x)$  pour  $X_0 = [-2 \ 0.8 \ 1.4 \ -2]$  en présence des perturbations



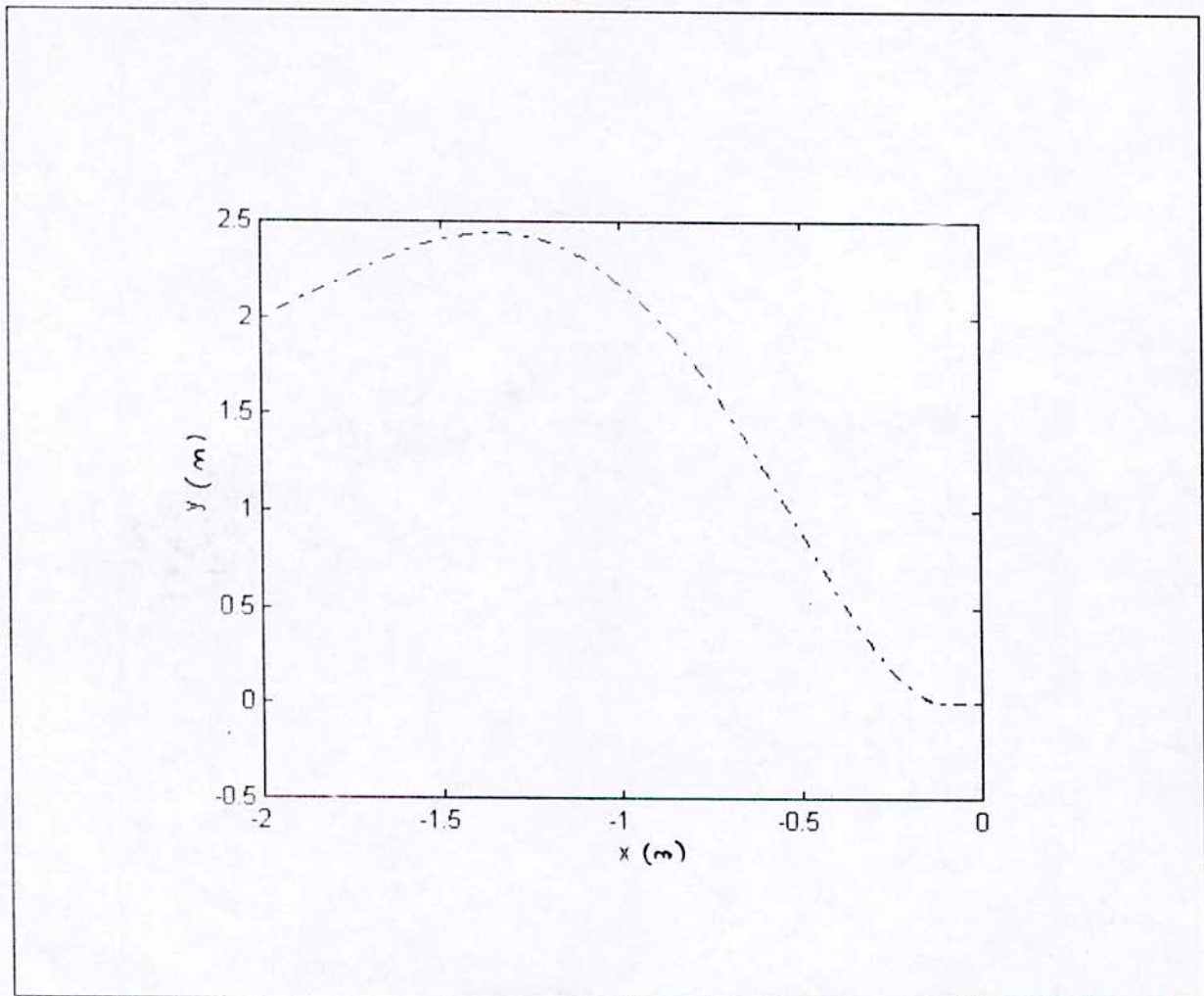


Figure 18 : L'évolution de  $y(x)$  pour  $X_0 = [-2, 0.8, 1.4, 2]$  en présence des perturbations

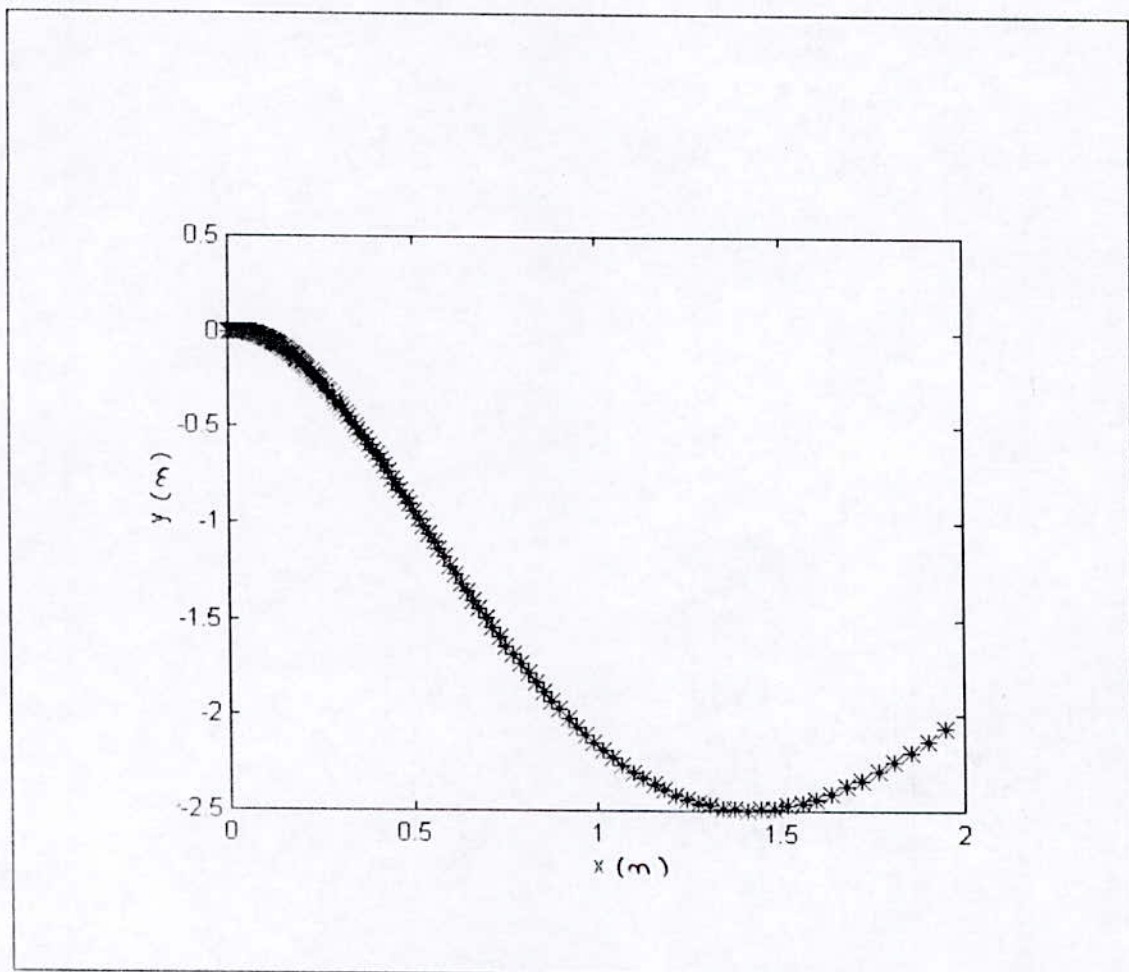


Figure 19 : L'évolution de  $y(x)$  pour  $X_0 = [2, 0.8, 1.4, -2]$  en présence des perturbations

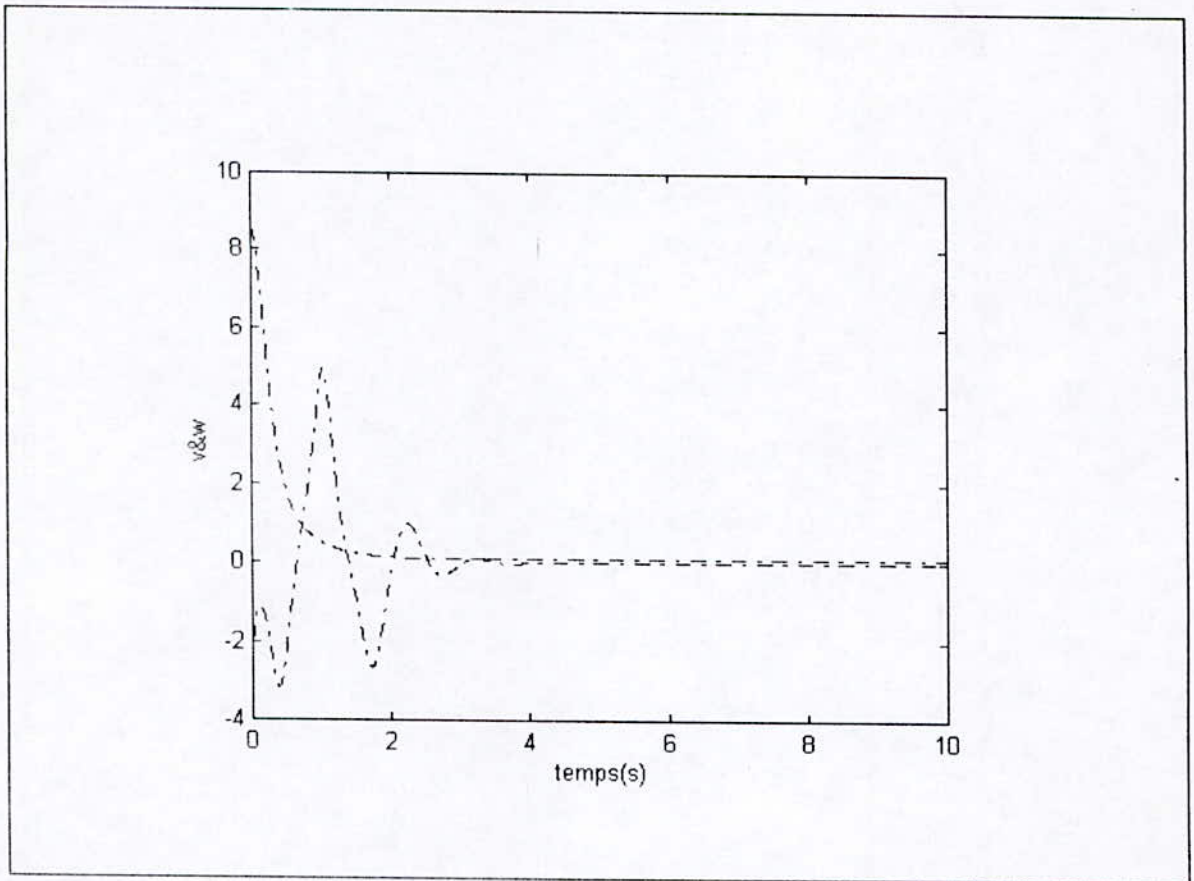


Figure 20 : L'évolution de deux entrées de commande  $v$  et  $w$



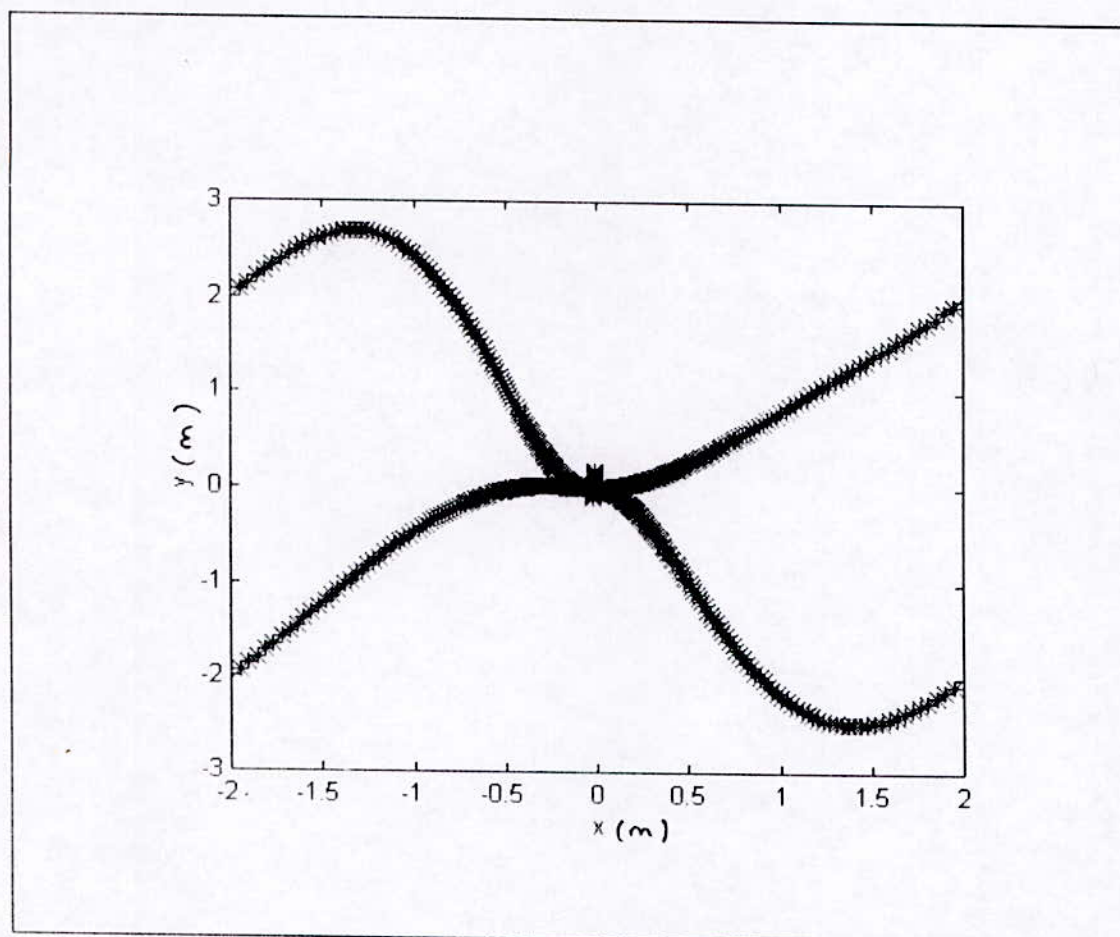


Figure 21 : Stabilisation du robot mobile à l'origine  
à partir de quatre configurations  
différentes du robot

**CONCLUSION :**

Dans ce chapitre nous avons appliqué la théorie de Lyapunov pour la synthèse d'une loi de commande stabilisante pour un robot mobile .

La difficulté de construction de la fonction de Lyapunov ainsi que l'importance de la technique de backstepping ont été mises en évidence .

Après implémentation de cette loi de commande les résultats de simulation sont très satisfaisants .

Des tests de robustesse ont été effectués pour voir les limites de notre loi de commande synthétisée .



## Conclusion Générale :

Nous avons présenter dans ce travail les concepts de stabilité des systèmes non linéaires par le théorie de Lyapunov, pour cela nous avons partager notre travail en trois grands chapitres.

- **Le 1<sup>er</sup> chapitre** : Concerne la partie analyse de la stabilité des systèmes non linéaires par la théorie de Lyapunov, en exposant les deux Méthodes de Lyapunov qui ont étaient enrichirent avec des exemples d'application.

A la fin nous avons fait une application sur les systèmes linéaires.

- **Le 2<sup>em</sup> chapitre** : Présente le synthèse de loi de commande qui peut être repartie sur trois parties :

Synthèse par l'approche standard, le stabilisation robuste, et finalement nous avons présenter la technique du Backstepping.

Ces approches sont appliquées sur quelque exemples.

- **Le 3<sup>em</sup> chapitre** : Concerne l'application de ces différentes approches sur un robot mobile, dans la quelle nous avons montrer l'insuffisance de l'approche standard pour la synthèse d'une loi de commande stabilisante pour notre système à commander, et l'utilité de la technique de Backstepping qui est montrée par les résultats de simulations obtenus .

Pour valider la méthode nous avons effectuer un test de robustesse, et les résultats de simulations obtenus montre l'efficacité de la synthèse de loi de commande par cette technique.

Comme perspective à notre travail, nous nous pouvons cités les points suivant :

- La généralisation de la loi de commande développée pour des systèmes chaînés d'ordre  $n$  .
- L'application aux bras de robots .



## **BIBLIOGRAPHIE :**

[1] **A.Andronov** 'Les cycles limites de poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues' *comptes rendus acad.sci vol,189,1929.*

[2] **A.Andronov and A.Witt** ' Zur theorie des mitrehnens von der pol' *Archiv für electrotechnik, vol24 ;1930.*

[3] **J.J.E. Slotine and L.Weiping** ' applied of non linear control' *a division of simon and schuster .Englewood cliffs ;New Jersey 1991.*

[4] **C.A Desoer and M.Vidasagar.** ' Feedback systems :Input – output properties' *Academic Press, New York, 1975.*

[5] **E.D Stonag and Y .Wong** ' on charaterization of input to state stability property systeme control' *lett 1955.*

[6] **J.C.Willens** ' the analysis of feedback systemes' *MIT press, cambride, March 1971.*

[7] **J.p.LA Salle** ' somme extensions of Lyapunov's second methode' *IEEE transaction on Circuit Theory December 1960*

- [8] **S.Wegrzyu, J.C Gille ;P. Vidal et O . Palusinski** ‘ introduction à l’étude de la stabilité dans les espaces métriques’ (*dunod. 1971*).
- [9] **H .K.Khalil** ‘ Nonlinear systems’ *Seconde edition .Michigan State University 427-K48 1996*.
- [10] **J.J.D’Azzo, Constantine H.Houpis** ‘ lineare control system analysis and design’ *conventional and modern, seconde edition pp, 497 – 514, 1981*.
- [11] **B.Ponet and C.Suson** ‘time varying exponential stablization of nonholonomic systems in power form’ *INRIA, TECH Rep 2126,1993*.
- [12] **W.Brockett** ‘ Asymptotic stability and feedback stabilization’ *progress in math , vol.27 , birkhauser ,pp.181-208,1983*.
- [13] **A.Tayebi and M.Tadjine and A.Rachid**. ‘Invariant manifold approch for the stabilization of nonholonomic systems in chained form : application to a car-like mobil robot’.*Laboratoire des systems automatiques Université de Picardie-Jules Verne France*.
- [14] **B.Idris and M. Benalegue and H. Mostefai** ‘ systèmes asservis non linéaires’ *édition lamine*.
- [15] **J.C.Gille** ‘ introduction aux systèmes asservis non linéaires’ *université Laval, Québec. Département de génie électrique Québec, mars 1977*.

[16] **A.Isidori** ' non lineare control systems' *an introduction 2nd edition* springer – verlag, pp 183-195 rome, march 1989.

[17] **Astolfi, A**, 1995a, ' Discontinuous output feedback control of nonholonomic chained systems', *proceedings of 3<sup>rd</sup> european control conference, Rome, Italy.*

[18] **Astolfi, A**, 1995 b, ' Exponential stabilization of nonholonomic systems via discontinuous control', *proceedings symposium non linear control system design, Lake Tahoe, CA, pp.741-746.*



## ملخص:

في هذا العمل ، نقترح عدة طرق لتحليل الإستقرار ، و تركيب قوانين التحكم المقررة بالنسبة لأنظمة

غير خطية باستعمال نظريات « Lyapunov » .

تطرقنا إلى عرض كيفية تركيب قانون تحدم باستعمال تقنية « Backstepping » .

أخيراً، طبقنا التحكم على متحرك آلي مع عرض نتائج المحاكاة العددية و إختبار نتائج الضلاعة بالنسبة

لإضطرابات خارجية لتبين فعالية التحكم.

كلمات المفتاح: نظريات « Lyapunov »، مشكل الإقرار، تقنية « Backstepping »

متحرك آلي.

## Résumé:

Dans le présent travail nous présentons plusieurs approches d'analyse de la stabilité de synthèse de lois de commande stabilisante pour des systèmes non linéaire par la théorie de Lyapunov .Nous allons présenter comment synthétiser une loi de commande par la technique de Backstepping appliquée sur des systèmes non linéaires.

Finalement , notre commande est appliquée sur un robot mobile , les résultats de simulations ont été présenter .Un test de robustesse par rapport au perturbations extérieurs est également présenter pour valider la technique proposée et montrer son efficacité .

mots clés : Théorie de Lyapunov ,problème de stabilisation , technique de Backstepping,robot mobile .

## Abstract :

In this work many approaches stability analysis and design of stabilizing controllers by Lyapunov's theorems are presented .We have shown how to design a control law with Backstepping's technique .

Finally ,our controller is applied to a car-like mobile robot and simulation results are presented with test of robustness to highlight its effectiveness.

Keywords: Lyapunov's theory ,stabilization problem, Backstepping's technique , mobile robot .