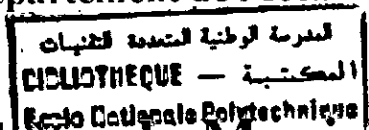


M0031/004

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique
Département de Mécanique



Thèse de Magister

Option : Energétique

Présentée par :

DJELLAL Slimane
Ingénieur (ENITA)

Thème

**ETUDE ET MODELISATION DE LA COMBUSTION
TURBULENTE DANS UNE CHAMBRE DE
COMBUSTION D'UN STATOREACTEUR**

Soutenue devant le jury composé de : Mai 2000

- | | | | | |
|------------|---|----------------------------------|--|-------|
| Président | : | Mr S. RECHAK | Professeur, | (ENP) |
| Rapporteur | : | Mr B. BENKOUSSAS | Chargé de cours, | (ENP) |
| Examineurs | : | Mr H. BENTEBBICHE
Mr S. LARBI | Chargé de cours, (USTHB)
Maître de conférences, | (ENP) |
| Invité | : | Mr S. HANCHI | Chargé de cours, | (EMP) |

Ecole Nationale Polytechnique 10, Avenue Hassen Badi, El Harrach, Alger

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

Département de Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Thèse de Magister

Option : Energétique

Présentée par :

DJELLAL Slimane

Ingénieur (ENITA)

Thème

**ETUDE ET MODELISATION DE LA COMBUSTION
TURBULENTE DANS UNE CHAMBRE DE
COMBUSTION D'UN STATOREACTEUR**

Soutenue devant le jury composé de :

Président	:	Mr S. RECHAK	Professeur,	(ENP)
Rapporteur	:	Mr B. BENKOUSSAS	Chargé de cours,	(ENP)
Examineurs	:	Mr H. BENTEBBICHE Mr S. LARBI	Chargé de cours, (USTHB) Maître de conférences,	(ENP)
Invité	:	Mr S. HANCHI	Chargé de cours,	(EMP)

Ecole Nationale Polytechnique 10, Avenue Hassen Badi, El Harrach, Alger

A

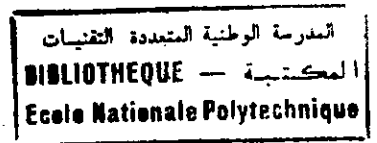
La mémoire de mon
cher ami et frère
CHAIB Mohamed Salah
dit « Ami Salah ».

Mes parents.

Ma famille ; Safia, Abir
et Abdarrahrmane.

Tous les amis.

Remerciements



En tout premier lieu, je tiens à remercier Monsieur B.Benkoussas pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail en tant que directeur de thèse.

Je remercie aussi Messieurs M.Damou directeur de la recherche et de la formation post graduée et A.Yousnadj chef de l'UERMécanique appliquée à l'EMP (ex : ENITA) pour m'avoir autorisé à suivre une formation post graduée.

Que tous les membres de Jury trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude pour avoir accepté de juger ce travail.

Je remercie également tout le corps enseignant du département mécanique à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger.

J'exprime également ma gratitude à Monsieur A . Bentebbiche de l'USTHB qui a bien voulu me faire partager un peu de son savoir et de son expérience ainsi qu'à Monsieur A . Mazouzi et Monsieur A.Ghenaiet pour leurs ouvrages.

Enfin, je m'en voudrais de ne pas remercier tous les thésards du département mécanique avec qui on a passé des moments inoubliables dans une ambiance chaleureuse et studieuse. Je pense tout particulièrement à S. Badaoui par son humour, sa disponibilité et sa gentillesse. Que soient aussi remerciés ici tous les amis et surtout un certain Salim Ouadah . . .

ETUDE ET MODELISATION DE LA COMBUSTION
TURBULENTE DANS UNE CHAMBRE DE
COMBUSTION D'UN STATOREACTEUR

Présenté par :
S.DJELLAL, Ingénieur d'état,
E.N.I.T.A

Sous la direction de :
Mr B.BENKOSSAS, Chargé de cours, ENP

ملخص:

تتضمن هذه الأطروحة دراسة النماذج النظرية المستعملة لوصف و فهم الظواهر المعقدة التي تحدث في الإحتراقات المضطربة من أجل الدراسة الرقمية الكاملة.

في هذا الإطار درسنا احتراق خليط مكون من الأوكسجين و البروبان داخل غرفة احتراق عادية و قد تمت الدراسة النظرية باعتماد نموذج $k-\epsilon$ بالنسبة للاضطراب و نموذج الشعلة المتماسكة بالنسبة للإحتراق المضطرب.

استعملنا للبحث عن الحلول الرقمية طريقة المحوم المنتهية و حوارزمية S.I.M.P.L.E.R.

كلمات مفتاحية: الإحتراق المضطرب - الشعلة المتماسكة - نموذج $k-\epsilon$ - المحوم المنتهية.

Abstract :

The present work concerns a survey of a theoretical model which permit to describe and to understand the complex phenomena that occur in a turbulent combustion in view of the complete numeric simulation. We are interested by the combustion of a mixture (propane + oxygène) in a simple combustion chamber. The turbulence is taken in consideration by a mathematical model of two equations ($k - \epsilon$). The analysis of the turbulent combustion is based on the concept of thin flames (flammelettes). The coherent flame model is considered here. The numeric simulation of this reactive flow will be invested by means of the finite volume method and the S.I.M.P.L.E.R algorithm as a way of resolution of the equations.

Keywords : Premixed turbulent combustion - Coherent flame - $k-\epsilon$ model - Finite volume method.

Résumé :

Le présent travail concerne l'étude des modèles théoriques permettant de décrire et de mieux comprendre les phénomènes complexes qui entrent en jeu dans une combustion turbulente et de pouvoir les modéliser en vue de la simulation numérique complète. Nous nous intéressons dans notre étude à une combustion d'un mélange préalable de réactants gazeux (propane + oxygène) dans une chambre de combustion simple (élargissement brusque). La turbulence de l'écoulement est prise en considération par un modèle mathématique composé de deux équations ($k - \epsilon$). L'analyse de la combustion turbulente repose sur le concept des flammes minces (modèles de flammelettes). Nous nous intéressons, ici, au modèle de flamme cohérente.

La simulation numérique de cet écoulement réactif sera investie au moyen de la méthode des volumes finis et de l'algorithme S.I.M.P.L.E.R comme moyen de résolution des équations de bilan.

Mots clés : Combustion turbulente prémélangée - Flamme cohérente - Modèle $k-\epsilon$ - Méthode des volumes finis.

Table des matières



Nomenclature

Introduction

1

Chapitre I Equations des fluides en écoulement turbulent et réactif

4

I.1 Introduction	4
I.2 Thermodynamique	4
I.2.1 Equation d'état	4
I.2.2 Enthalpie du mélange	5
I.3 Equation de bilan instantanées	6
I.4 Equation de bilan moyennées	11
I.4.1 Les moyennes utilisées	11
I.4.2 Les équations de bilan moyennées	12
I.5 La modélisation de la turbulence	13
I.5.1 Les termes de diffusion turbulente	13
I.5.2 La viscosité turbulente	14
I.5.3 Le modèle de turbulence $k - \varepsilon$	16
I.6 La modélisation de la combustion turbulente	22
I.6.1 Rappels sur la modélisation de la combustion turbulente	22
I.6.2 Classification des flammes de prémélanges	24
I.6.3 Modèles pour la combustion turbulente prémélangée	28

Chapitre II Etude du modèle de la flamme cohérente

30

II.1 Equations dynamiques	30
II.2 Equations de fermeture	31
II.3 Modèle de flamme cohérente	31
II.3.1 Modèle global	33
II.3.2 Equation de bilan pour la surface de flamme	38
II.3.3 Modèle local	40
II.4 Système d'équations à résoudre	42



Chapitre III Méthode numérique	44
III.1 Présentation des équations	44
III.1.1 Schéma des différences centrées	46
III.1.2 Le schéma upwind ou schéma "décentré"	47
III.1.3 Le schéma hybride	48
III.1.4 Le schéma " Power -law " (loi de puissance)	49
III.2 Méthode de résolution	51
III.3 Algorithme S.I.M.P.L.E	54
III.4 Algorithme S.I.M.P.L.E.R	55
 Chapitre IV Résultats numériques	 60
IV.1 Introduction	60
IV.2 Les conditions aux limites	60
IV.2.1 Le domaine de calcul et les conditions aux limites	63
IV.3 Interprétation des courbes	68
 Conclusion	 82
 Bibliographie	 84
 Annexe 1 Modèles de combustion turbulente	 89
 Annexe 2 Phénomène de Quenching	 92
 Annexe 3 Maillage décalé	 93

Nomenclature

Minuscules

- h : enthalpie sensible [J. kg⁻¹]
 h°_f : enthalpie de formation [J. kg⁻¹]
 h_t : enthalpie sensible totale [J. kg⁻¹]
 k : énergie cinétique de la turbulence [m².s⁻²]
 l : distance [m]
 l_m : échelle de longueur [m]
 l_t : échelle de longueur intégrale de la turbulence [m]
 p : pression [Pa]
 q : flux de diffusion par conduction [W.m⁻²]
 s : coefficient stœchiométrique
 t : temps [s]
 u : vitesse axiale [m.s⁻¹]
 u' : fluctuation de vitesse suivant x [m.s⁻¹]
 v : vitesse transversale [m.s⁻¹]
 x, y, z : coordonnées spatiales [m]

Majuscules

- C_D : constante
 C_p : chaleur massique à pression constante [J.kg⁻¹.K⁻¹]
 C_k : constante de Von - Karman.
 C_{μ} : constante
 $C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}$: constantes du modèle k - ε
 Da : nombre de Damkohler
 E_a : énergie d'activation [J.mol⁻¹]
 E_s : étirement microscopique [s⁻¹]
 E'_s : étirement macroscopique [s⁻¹]
 F : flux radiatif [W.m⁻²]
 J_j^k : flux de diffusion moléculaire de l'espèce k [kg.m⁻².s]
 $J_j^{h_t}$: flux de diffusion de l'enthalpie [J.m⁻².s]
 Ka : facteur adimensionnel de Karlovitz
 L : distance ou échelle de longueur [m]
 L_e : nombre de Lewis
 M : masse molaire [kg.mol⁻¹]
 P_k : taux de production d'énergie de turbulence [J.s⁻¹]
 Pr : nombre de Prandtl
 Pr_t : nombre de Prandtl turbulent
 \mathcal{R} : richesse du mélange
 Sc : nombre de Schmidt
 Sc_k : nombre de Schmidt turbulent lié à l'espèce k

- T : température [K]
 U_l : vitesse de flamme laminaire [m.s⁻¹]
 U_∞ : vitesse débitante [m.s⁻¹]
 V_D : taux de consommation volumique par unité de surface de flamme [m.s⁻¹]
 Y : fraction massique

Lettres grecques

- α, α' : constantes dans l'expression des étirements
 β : constante dans l'expression de l'annihilation
 δ_{ij} : symbole de Kronecker
 δ : épaisseur de la couche limite [m]
 δ_L : épaisseur de la flamme laminaire [m]
 ε : dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence [m².s⁻³]
 λ : coefficient de conductivité thermique [W.m⁻¹.K⁻¹]
 μ_l : viscosité dynamique [Pl]
 μ_t : viscosité turbulente [Pl]
 ν : viscosité cinématique [m².s⁻¹]
 $\dot{\omega}$: taux de production [kg.s⁻¹.m⁻³]
 Φ : variable physique
 ρ : masse volumique [kg/m³]
 Σ : surface de flamme par unité de volume [m⁻¹]
 $\sigma_{k,l} \sigma_{\varepsilon,l}$: constantes du modèle k - ε relatives à la composante laminaire
 $\sigma_{k,t} \sigma_{\varepsilon,t}$: constantes du modèle k - ε relatives à la composante turbulente
 τ_{ij} : tenseur des contraintes visqueuses [kg.m⁻¹.s⁻¹]
 τ_c : échelle intégrale de temps de la chimie [s]
 τ_k : échelle de temps de Kolmogorov relative aux plus petites structures de la turbulence [s]
 τ_t : échelle intégrale de temps de la turbulence [s]
 τ_w : contrainte pariétale [Pa]

Indices

- f, F : relatif au combustible ou fuel
 i : composante spatiale
 j : composante spatiale
 k : relatif à l'espèce
 o : relatif à l'oxydant
 t : totale ou turbulent
 GF : relatif aux gaz frais

Notations

- + : lié à l'adimensionnement (loi de paroi)
 * : lié à la vitesse de frottement (loi de paroi)
 - : moyenne au sens de Reynolds
 ~ : moyenne au sens de Favre (pondérée par la masse)

Introduction



La combustion est aujourd'hui un des principaux moyens de conversion de l'énergie. Elle est utilisée dans de nombreux systèmes pratiques aussi bien pour produire de la chaleur (chaudières ou fours domestiques et industriels), de l'électricité (centrales thermiques), que pour le transport (moteurs automobiles et aéronautiques, moteurs fusées, . . .) ou encore la destruction de déchets (incinérateurs).

La combustion est avant tout une réaction irréversible fortement exothermique, d'où l'**aspect chimique**. Cette réaction chimique produit de la chaleur qui induit un fort dégagement de chaleur au voisinage de la flamme. Les gradients thermiques ainsi créés vont donner lieu à des **transferts de chaleur** au sein du milieu, par convection, conduction ou même par rayonnement. Dans la plupart des cas, la combustion se déroule en milieux gazeux, ce qui entraîne deux aspects supplémentaires : les **transferts de masse** interviennent dans le transport des réactifs l'un vers l'autre, que ce soit par convection, diffusion moléculaire ou mélange turbulent. L'apport en réactifs frais et l'évacuation des produits de combustion entraînent un aspect **mécanique des fluides**.

Dans la plupart des applications pratiques, la combustion a lieu au sein d'écoulements turbulents où les transferts sont plus intenses qu'en écoulement laminaire. Il en résulte une influence couplée réciproque très importante et très difficile à prévoir entre phénomènes chimiques et turbulents. Les phénomènes chimiques se produisent à l'échelle moléculaire alors que les caractéristiques d'un écoulement turbulent sont loin d'être connues à des échelles aussi petites.

Depuis les années 70, la combustion en milieu turbulent ou combustion turbulente fait l'objet de nombreuses recherches. Le but est de mieux comprendre les phénomènes complexes qui entrent en jeu dans les chambres de combustion et de pouvoir les modéliser le plus précisément possible. La simulation numérique de systèmes de propulsion nécessite la parfaite connaissance de ces phénomènes vitaux.

C'est dans le cadre de cette approche, que nous sommes intéressés aux applications utilisées dans l'aéronautique, et plus particulièrement celles du type cylindriques équipants les statoréacteurs.

Le statoréacteur est un moyen de propulsion destiné essentiellement aux missiles et aux avions supersoniques.

Les statoréacteurs peuvent être regroupés en deux grandes classes en fonction de l'emplacement des entrées d'air : les statoréacteurs à injection axiale et les statoréacteurs à injection latérale [Hwan 89], [Mont 94].

Les premiers se caractérisent par une prise d'air unique (figure 1-a) aboutissant dans le fond de la chambre de combustion. L'écoulement garde alors une direction privilégiée et la combustion est stabilisée par les fortes zones de recirculation créées par l'élargissement brusque ou par des accroches flammes (figure II.3). La configuration avec injection pariétale comporte, elle, deux (ou plus) prises d'air alimentant le foyer par les cotés (figure 1-b). Les différents jets issus des entrées d'air interagissent alors fortement dans la chambre de combustion. Il existe aussi des géométries à injection latérale ne présentant qu'une seule prise d'air.

La configuration abordée ici est celle d'un statoréacteur à injection axiale.

L'objectif de ce travail est de modéliser une combustion turbulente d'un prémélange (Propane + Oxygène) dans une chambre de combustion à injection axiale.

Le premier chapitre sera consacré à la présentation des équations de l'aérothermochimie, à la modélisation de la turbulence et à la description des différents régimes de combustion turbulente. Les flammes plissées ou flammelettes sont celles auxquelles nous nous intéressons au cours de cette thèse. Une brève présentation des différents modèles de combustion turbulente les plus courants conclura cette partie.

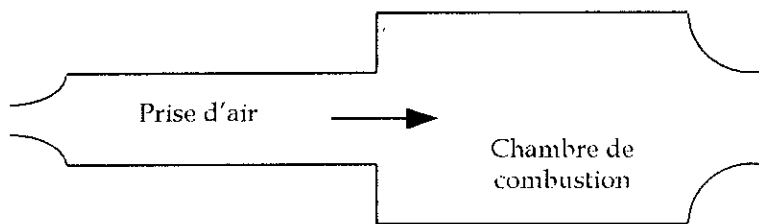
Le modèle de flamme cohérente choisi, sera traité dans le deuxième chapitre. L'idée de base dans ce modèle est que la zone de combustion turbulente peut être décrite comme un ensemble de flammes laminaires étirées qui sont convectées et déformées par l'écoulement turbulent, mais gardent une structure identifiable. La modélisation de la combustion dans ce cas, repose sur une équation pour la densité

de surface de flamme qui permet de découpler les effets de cinétique chimique de la description du transport turbulent. Plusieurs termes de cette équation nécessitent une fermeture, c'est à dire, une modélisation sera proposée pour chacun d'entre eux.

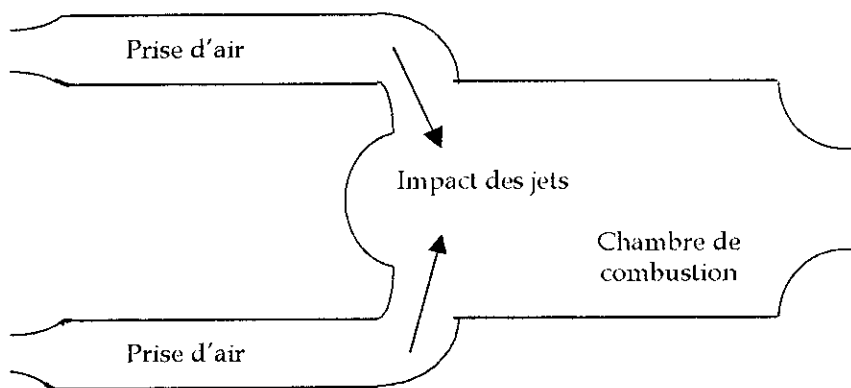
Le troisième chapitre présentera la méthode numérique utilisée au cours de ce travail et qui se base sur l'algorithme S.I.M.P.L.E.R de Patankar développé en 1980 [Pata 80].

Enfin, le quatrième chapitre regroupera les calculs numériques et les résultats de l'application qui touchera une combustion dans une géométrie simple de chambre de combustion de statoréacteur à injection axiale. Nous présenterons les résultats sous forme de courbes et de cartes de champ des différentes variables.

En conclusion, nous rappellerons les qualités ainsi que les améliorations envisageables du modèle développé.



a) Chambre de combustion à prise d'air axiale.



b) Chambre de combustion à prise d'air latérale.

Figure 1 : Représentation schématique des deux types de chambres de combustion.

Chapitre I

Equations des fluides en écoulement turbulent et réactif

Chapitre I

Equations des fluides en écoulement turbulent et réactif

I.1 Introduction

On s'intéresse à un écoulement d'un mélange gazeux constitué d'espèces pouvant réagir chimiquement entre elles. Ce type d'écoulement réactif peut être décrit en tout point de l'espace (x, y, z) et à chaque instant t par la connaissance des variables suivantes.

- La masse volumique ρ
- les trois composantes de la vitesse U_i ($i = 1, 2, 3$)
- la pression p
- l'enthalpie massique h
- les fractions massiques Y_k ($k = 1, \dots, n$) des n espèces.

Ce système peut être résolu en utilisant les relations de la thermodynamique et les équations classiques de la mécanique des milieux continus.

I.2 Thermodynamique

I.2.1 Equation d'état

Si on fait l'hypothèse que toutes les espèces présentes dans le mélange se comportent comme des gaz parfaits, l'équation d'état de la thermodynamique s'écrit :

$$p = \rho r T \quad \text{avec} \quad r = \frac{R_0}{M} = \text{constante} \quad (\text{I.2.1})$$

Où M est la masse molaire moyenne du mélange qui reste constante au cours de la réaction et R_0 la constante universelle des gaz parfaits ($R_0 = 8.314 \text{ J/ mole.K}$).

M est donnée par :

$$\frac{1}{M} = \sum_{k=1}^n \frac{Y_k}{M_k} \quad (\text{I.2.2})$$

où M_k désigne la masse molaire de l'espèce chimique k .

L'équation d'état de la thermodynamique prend alors la forme :

$$p = \rho R_0 T \sum_{k=1}^n \frac{Y_k}{M_k} \quad (\text{I.2.3})$$

I.2.2 Enthalpie du mélange

L'enthalpie massique du mélange des n espèces chimiques est donnée par :

$$h = \sum_{k=1}^n Y_k h_k \quad (\text{I.2.4})$$

h_k est l'enthalpie massique de l'espèce k qui peut s'exprimer en fonction de la température du mélange T , de la chaleur massique à pression constante C_{pk} et de l'enthalpie de formation h_{fk}^0 de l'espèce k , tel que :

$$h_k = \int_{T_0}^T C_{pk} dT + h_{fk}^0 \quad (\text{I.2.5})$$

La chaleur massique C_p du mélange s'exprime alors naturellement en fonction des C_{pk} :

$$C_p = \sum_{k=1}^n Y_k C_{pk} \quad (\text{I.2.6})$$

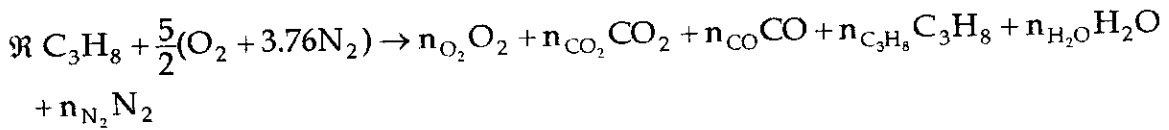
Les chaleurs massiques C_{pk} sont, des fonctions de la température T .

Les C_{pk} peuvent s'exprimer en fonction de la température par des polynômes de degrés 4 :

$$C_{pk} = a_{k1} + a_{k2}T + a_{k3}T^2 + a_{k4}T^3 + a_{k5}T^4$$

A titre d'exemple, le tableau 1 donne les coefficients des polynômes pour les espèces majoritaires résultantes de la combustion du mélange propane - air et qui sont : N_2 , O_2 , H_2O , CO , CO_2 et C_3H_8 .

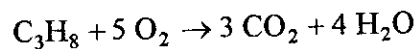
En général, la réaction régissant l'oxydation du propane par l'air peut alors s'écrire :



Espèce	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
C_3H_8	7.5252	$1.8890 e^{-2}$	$-6.2839 e^{-6}$	$9.1794 e^{-10}$	$-4.8124 e^{-14}$
O_2	3.6220	$7.3618 e^{-4}$	$-1.9652 e^{-7}$	$3.6202 e^{-11}$	$-2.8946 e^{-15}$
CO_2	4.4608	$3.0982 e^{-3}$	$-1.2393 e^{-6}$	$2.7741 e^{-10}$	$-1.5526 e^{-14}$
CO	2.9841	$1.4891 e^{-3}$	$-5.7900 e^{-7}$	$1.0365 e^{-10}$	$-6.9354 e^{-15}$
N_2	2.8963	$1.5155 e^{-3}$	$-5.7235 e^{-7}$	$9.9807 e^{-11}$	$-6.5224 e^{-15}$
H_2O	2.7168	$2.9451 e^{-3}$	$-8.0224 e^{-7}$	$1.0227 e^{-10}$	$-4.8472 e^{-15}$

Tableau 1 : Coefficients des polynômes en T^4 pour le calcul des C_{pi} d'après Kee et al [Mont 94].

Vu la complexité du système dans le cas où on considère plusieurs espèces chimiques, nous nous simplifions le cas et nous utilisons le cas d'un mélange propane - oxygène à réaction simple [Darab 87] :



I.3 Equations de bilan instantanées

Les équations régissant les écoulements réactifs expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement, des n espèces chimiques et de l'énergie.

Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} = 0 \tag{I.3.1}$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho \gamma_i \quad (I.3.2)$$

Où $\rho \gamma_i$ représente les forces volumiques (forces de gravité, magnétiques, etc ...) et τ_{ij} le tenseur des contraintes visqueuses. Nous supposons qu'il n'existe pas de forces de volume, ce qui est généralement l'hypothèse utilisée pour la modélisation des écoulements réactifs.

L'équation de la conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (I.3.3)$$

Si le fluide est supposé newtonien (cas de la plupart des écoulements gazeux), le tenseur des contraintes visqueuses est relié au tenseur du taux de déformation par :

$$\tau_{ij} = \mu_l \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_l \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (I.3.4)$$

Où μ_l désigne la viscosité dynamique laminaire du fluide (propriété intrinsèque de ce dernier).

Conservation des espèces

$$\frac{\partial \rho Y_k}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j Y_k)}{\partial x_j} = \frac{\partial J_j^k}{\partial x_j} + \dot{\omega}_k \quad (I.3.5)$$

Où J_j^k et $\dot{\omega}_k$ représentent respectivement le flux de diffusion moléculaire et le terme source de la $k^{\text{ième}}$ espèce appelé aussi taux de production (ou de destruction) massique de l'espèce k . Le taux de réaction instantané $\dot{\omega}_k$ est donné par la cinétique chimique.

Le flux de diffusion de l'espèce k peut se décomposer en différents termes caractérisant chacun un phénomène précis [Mont 94].

Dans le cas d'un écoulement gazeux, il est possible de négliger plusieurs termes.

Par exemple, l'expression du flux de diffusion de l'espèce k se simplifie pour donner

$$J_j^k = \rho D_k \frac{\partial Y_k}{\partial x_j} \quad (I.3.6)$$

Ce terme représente le transfert moléculaire de la masse de l'espèce k sous l'effet du gradient de concentration. C'est la loi de Fick généralisée.

D_k est le coefficient de diffusion moléculaire lié à l'espèce k. En introduisant le nombre adimensionnel de Schmidt de l'espèce k, rapport entre la viscosité laminaire et la diffusivité moléculaire de l'espèce considérée, on obtient :

$$J_j^k = \frac{\mu_l}{Sc_k} \frac{\partial Y_k}{\partial x_j} \quad \text{avec} \quad Sc_k = \frac{\mu_l}{\rho D_k} \quad (I.3.7)$$

Conservation de l'énergie (enthalpie sensible totale) $h_t = h + u_i u_i / 2$

$$\frac{\partial \rho h_t}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j h_t)}{\partial x_j} = \frac{\partial J_j^{h_t}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (u_i \tau_{ij})}{\partial x_j} + \rho u_i \gamma_i + \dot{\omega}_{h_t} \quad (I.3.8)$$

Où $J_j^{h_t}$ désigne le flux de diffusion de l'enthalpie, $\frac{\partial (u_i \tau_{ij})}{\partial x_j}$ le travail des forces visqueuses et $\rho u_i \gamma_i$ celui des forces de volume.

Dans la pratique, les écoulements auxquels nous nous intéressons seront toujours caractérisés par un nombre de Mach très petit devant un. On peut alors montrer que le terme représentant le travail des forces visqueuses est négligeable devant les autres. L'équation (I.3.8) devient :

$$\frac{\partial \rho h_t}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j h_t)}{\partial x_j} = \frac{\partial J_j^{h_t}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial t} + \rho u_i \gamma_i + \dot{\omega}_{h_t} \quad (I.3.9)$$

Le flux de diffusion d'énergie $J_j^{h_t}$ se décompose lui aussi en plusieurs effets

physiques :

$$J_j^{h_t} = -q_j - F_j + \sum_{k=1}^n h_k J_j^k - \sum_{k=1}^n \frac{L}{T^2} \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_j} \right)_T \quad (I.3.10)$$

$q_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}$ caractérise le transfert de chaleur par conduction. C'est la loi de

Fourier.

F_j représente le flux radiatif.

$\sum_{k=1}^n h_k J_j^k$ exprime l'apport d'énergie par diffusion de l'espèce k .

$\sum_{k=1}^n \frac{L}{T^2} \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_j} \right)_T$ représente un flux de diffusion de chaleur due aux gradients de

concentration (g_k est la concentration molaire de l'espèce k). C'est l'effet **Dufour**.

Dans plusieurs applications et dans le cas d'un mélange gazeux, on peut négliger le flux par rayonnement, qui est souvent difficile à estimer et aussi l'effet Dufour ; ces deux termes compliquent davantage le problème. On obtient alors, en reportant l'expression du flux de diffusion moléculaire J_j^k :

$$J_j^{h_i} = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n h_k \rho D_k \frac{\partial Y_k}{\partial x_j}$$

D'autre part, on peut aussi écrire :

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial h_i}{\partial T} \right)_{Y_k} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial h_i}{\partial Y_k} \right)_T \frac{\partial Y_k}{\partial x_j}$$

En notant alors que $C_p = \left(\frac{\partial h_i}{\partial T} \right)_{Y_k}$ et $h_k = \left(\frac{\partial h_i}{\partial Y_k} \right)_T$, l'égalité ci - dessus peut

se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{1}{C_p} \left(\frac{\partial h}{\partial x_j} - h_k \frac{\partial Y_k}{\partial x_j} \right)$$

En combinant cette équation avec l'expression du flux de diffusion de l'enthalpie. On arrive finalement à :

$$J_j^{h_i} = \frac{\mu_l}{Pr} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\rho C_p D_k}{\lambda} - 1 \right) \frac{\lambda}{C_p} h_k \frac{\partial Y_k}{\partial x_j} \quad (I.3.11)$$

Où Pr désigne le nombre de Prandtl, rapport du transport de quantité de mouvement au transport d'enthalpie.

Une autre forme équivalente de cette équation est obtenue en faisant intervenir le nombre de Lewis Le_k pour l'espèce k :

$$J_j^{h_t} = \frac{\mu_l}{Pr} \frac{\partial h_t}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{Le_k} - 1 \right) \frac{\lambda}{C_p} h_k \frac{\partial Y_k}{\partial x_j} \quad (I.3.12)$$

Avec
$$Le_k = \frac{\lambda}{\rho C_p D_k}$$

Ce nombre mesure le rapport de la diffusion thermique à la diffusion moléculaire. Pour les flammes turbulentes, le nombre de Lewis est égal à l'unité [Pope 87] ce qui simplifie notablement l'expression du flux de diffusion d'enthalpie. Néanmoins, il semblerait que le fait de ne pas prendre en compte les effets dus au nombre de Lewis soit une des sources principales de difficultés quant à la simulation de certains écoulements réactifs.

En effet ce nombre est un facteur important dans l'extinction de la flamme (résultat vérifié pour un mélange Propane - Oxygène [Take 93]).

Finalement, en négligeant le travail des forces de volume $\rho u_i \gamma_j$, l'équation de conservation de l'enthalpie sensible h_t se réduit à :

$$\frac{\partial \rho h_t}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j h_t)}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_l}{Pr} \frac{\partial h_t}{\partial x_j} \right) + \dot{\omega}_{h_t} \quad (I.3.13)$$

I.4 Equations de bilan moyennées

Dans les écoulements turbulents, les variables des équations de bilan varient rapidement avec le temps ce qui leur donne des formes aléatoires et fluctuantes.

En théorie, il suffit de résoudre les équations instantanées pour accéder à n'importe quel écoulement, turbulent ou non. Mais, dans la pratique, la résolution complète de ces équations nécessiterait une puissance et un temps de calcul considérable car il faut résoudre toutes les échelles spatiales et temporelles. Cela n'est possible, à l'heure actuelle, que pour des cas réels simples {méthodes LES (Large Eddy Simulation), DNS (Direct Numerical Simulation)}, [Mont 94].

Pour simuler des écoulements complexes et réactifs comme ceux rencontrés dans les chambres de combustion aéronautiques, une autre approche est nécessaire. Les valeurs instantanées des fractions massiques, de la vitesse, de l'enthalpie et de la pression étant inaccessibles du fait de leurs variations aléatoires, il devient indispensable d'utiliser des grandeurs statistiques. On ne cherche plus à calculer de façon détaillée tout l'écoulement, mais à en déterminer le comportement moyen. On sépare alors l'écoulement instantané turbulent en un écoulement moyen et un écoulement fluctuant [Favr 78], [Rubi 97]. Il existe plusieurs possibilités pour définir la moyenne d'une variable.

I.4.1 Les moyennes utilisées

Moyenne dite de Reynolds

On suppose que toute grandeur physique peut être décomposée en une partie moyenne et une partie aléatoire [Grif 95]. Soit $\Phi(x, t)$ une variable, on a alors :

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi'$$

Avec

$$\bar{\Phi}(x, t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \Phi(x, t) dt$$

La fluctuation Φ' est centrée et sa moyenne est donc nulle.

Moyenne pondérée par la masse ou moyenne de Favre

Dans le cas des milieux en combustion, où les variations de la masse volumique sont très importantes en raison du dégagement de chaleur, la moyenne de Reynolds pose quelques difficultés. En effet, la moyenne de l'équation de conservation de la masse conduit à :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho u_j}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\rho' u'_j}}{\partial x_j} = 0$$

introduisant des corrélations entre les fluctuations de vitesse et de densité $\overline{\rho' u'_j}$ qu'il faudra modéliser. En fait, ce type de moyenne va impliquer l'apparition de corrélations croisées des fluctuations de densité et des autres grandeurs : $\overline{\rho' \Phi'}$, voir $\overline{\rho' \Phi'_i \Phi'_j}$, qu'il faudra modéliser. Le problème devient rapidement inextricable. C'est pourquoi Favre [Favr 78] a proposé d'utiliser une moyenne $\tilde{\Phi}$ pondérée par la masse, définie par :

$$\bar{\rho} \tilde{\Phi} = \overline{\rho \Phi}$$

et conduisant à la décomposition de Favre : $\Phi = \tilde{\Phi} + \Phi''$

qui vérifie bien sûr :

$$\tilde{\Phi}'' = \frac{\overline{\rho(\Phi - \tilde{\Phi})}}{\bar{\rho}} = 0$$

Cette formulation est très intéressante puisqu'il est facile de montrer qu'à condition d'employer les moyennes de Favre, les équations moyennées pour les écoulements réactifs (en fait à masse volumique variable) sont formellement analogues aux équations classiques utilisant la moyenne de Reynolds.

I.4.2 Les équations de bilan moyennées

En appliquant la moyenne de Favre aux équations instantanées présentées au paragraphe précédent, avec l'hypothèse qu'il n'existe pas de forces de volume, on obtient le système suivant :

Conservation de la masse

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho \tilde{u}_j}}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{I.4.1})$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_j \bar{u}_i)}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''}}{\partial x_j} \quad (\text{I.4.2})$$

Conservation des espèces

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{Y}_k}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_j \bar{Y}_k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{S_{ck}} \frac{\partial \bar{Y}_k}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \bar{\rho} \widetilde{u_j'' Y_k''}}{\partial x_j} + \bar{\omega}_k \quad (\text{I.4.3})$$

Conservation de l'énergie (enthalpie sensible totale)

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{h}_t}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_j \bar{h}_t)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{Pr} \frac{\partial \bar{h}_t}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \bar{\rho} \widetilde{u_j'' h_t''}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{\omega}_{ht} \quad (\text{I.4.4})$$

Ces équations ne sont pas fermées puisqu'elles comportent des termes du second ordre qui sont les flux turbulents de la quantité de mouvement, d'espèces et d'enthalpie. Pour pouvoir résoudre le système, il faut donc modéliser ces nouvelles inconnues, c'est à dire les exprimer en fonction des grandeurs auxquelles on a accès. On introduit alors la notion de fermeture du système d'équations.

I.5 La Modélisation de la turbulence**I.5.1 Les termes de diffusion turbulente**

Dans les équations de bilan moyennées apparaissent les corrélations $\bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''}$, $\bar{\rho} \widetilde{u_j'' Y_k''}$, et $\bar{\rho} \widetilde{u_j'' h_t''}$ mesurant l'importance des transferts de masse en régime turbulent. Pour estimer ces flux, plusieurs solutions s'offrent :

I.5.1.1 Modèles du second ordre

Parmi les classes de solutions possibles de ces termes, on utilise les hypothèses de fermeture pour les modèles à tension de Reynolds $\bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''}$, appelés aussi modèles du second ordre, qui sont les mieux adaptés au calcul d'écoulements fortement anisotropes telles que les couches limites turbulentes. La lourdeur numérique de la résolution et les problèmes de fermeture font que cette méthode n'est encore appliquée qu'aux écoulements très simples, là où des modèles à concept de viscosité turbulente sont en général suffisants.

I.5.1.2 Modèles à concept de viscosité turbulente

Cette approche consiste à transposer au cas turbulent les lois de Fick, Fourier et le tenseur des contraintes en faisant intervenir la notion de viscosité turbulente par l'intermédiaire d'un coefficient de diffusion turbulente. Cette hypothèse, introduite pour la première fois par Boussinesq en 1877, propose d'exprimer le tenseur $\widetilde{u_i''u_j''}$ d'une manière analogue à celle du tenseur des contraintes visqueuses τ_{ij} , en remplaçant la viscosité laminaire μ_l par une viscosité turbulente μ_t . Les tensions turbulentes, encore appelées tensions de Reynolds, sont ainsi directement reliées au tenseur du taux de déformation :

$$-\overline{\rho u_i''u_j''} = \mu_t \left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu_t \frac{\partial \widetilde{u}_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{\rho k} \quad (I.5.1)$$

Où k est l'énergie cinétique turbulente définie par :

$$\widetilde{k} = \frac{1}{2} \widetilde{u_i''u_i''} \quad (I.5.2)$$

Pour les flux turbulents d'espèces et d'enthalpie, on utilise couramment l'analogie avec les lois de Fick et de Fourier :

$$-\overline{\rho u_j''Y_k''} = \frac{\mu_t}{Sc_{k,t}} \frac{\partial \widetilde{Y}_k}{\partial x_j} \quad (I.5.3)$$

$$-\overline{\rho u_j''h''} = \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x_j} \quad (I.5.4)$$

Où $Sc_{k,t}$ et Pr_t sont les nombres de Schmidt et de Prandtl turbulents qu'il faut déterminer. Pour plus de simplifications, ces nombres sont généralement supposés égaux à l'unité [Espo 85]. Pour conclure cette modélisation, il ne reste qu'à relier μ_t aux caractéristiques de l'écoulement moyen.

I.5.2 La viscosité turbulente

Plusieurs modèles de fermeture pour la viscosité turbulente existent. On peut les classer en trois catégories suivant la modélisation adoptée [Favr 78], [Laun 72], [Vand 80].

1.5.2.1 Modèles à zéro équation ou à longueur de mélange

Ils ne nécessitent pas la résolution d'une équation supplémentaire, ils relient la viscosité turbulente à une longueur caractéristique dite longueur de mélange et au gradient de vitesse moyenne. Le plus célèbre d'entre eux est le modèle de Prandtl :

$$\mu_t = l_m \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.5.5)$$

L'échelle de longueur l_m qui reste à déterminer sera alors choisie empiriquement de telle manière qu'elle puisse représenter les gros tourbillons qui assurent la diffusion des grandeurs moyennes. Ces modèles sont limités à des configurations très simples.

1.5.2.2 Modèles à une équation

Dans ce type de modèle, la seule équation aux dérivées partielles à résoudre en plus du système des équations de conservation du mouvement moyen, est l'équation de transport de l'énergie cinétique de la turbulence k donnée par :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{k}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{k})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) + \bar{\rho} u_i'' u_j'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \bar{\rho} C_D \frac{\tilde{k}^{3/2}}{l} \quad (1.5.6)$$

μ_t est alors donnée par la relation suivante :

$$\mu_t = C_\mu \rho \sqrt{\tilde{k}} l \quad (1.5.7)$$

où C_μ est une constante et l une longueur caractéristique référentielle.

Les constantes C_μ , C_D et σ_k sont déterminées empiriquement à partir des données expérimentales. Si ces modèles sont simples à mettre en œuvre, leur principale difficulté réside dans la détermination d'une loi pour l'échelle de longueur l . On retrouve ici la limite déjà signalée pour les modèles à zéro équation.

1.5.2.3 Modèles à deux équations

L'idéal pour progresser encore d'un niveau par rapport au modèle précédent serait de pouvoir écrire une équation de transport pour la longueur l . Mais, cela s'est avéré difficile à réaliser. Par contre, il était possible d'obtenir sous conditions, une équation de transport exacte pour des combinaisons du type : $\Phi_{m,n} = \tilde{k}^m l^n$

En particulier, si on considère le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε . On a :

$$\Phi_{3/2,-1} = C_D \frac{\tilde{k}^{3/2}}{l} = \tilde{\varepsilon} \quad \Phi_{3/2,-1} = C_D \frac{\tilde{k}^{3/2}}{l} = \tilde{\varepsilon}$$

Il est possible d'obtenir une équation exacte pour la dissipation de l'énergie cinétique turbulente

$$\tilde{\varepsilon} = \nu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i}$$

Une fois déterminée l'équation pour la dissipation, la viscosité turbulente se calcule aisément par :

$$\mu_t = C_\mu \bar{\rho} \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad (I.5.8)$$

où C_μ est une constante déterminée expérimentalement qui vaut 0.09 [Laun 74].

Des équations pour des grandeurs autres que la dissipation turbulente ont été écrites par différents auteurs [Laun 72], [Rubi 97].

C'est ce type de fermetures à deux équations qui sont actuellement les plus utilisés et dont on trouve plusieurs modèles dans la littérature spécialisée dont le modèle $k - \varepsilon$.

I.5.3 Le modèle de turbulence $k - \varepsilon$

I.5.3.1 Le modèle de base

Développé à l'origine par Jones et Launder en 1973 [Laun 74], ce modèle se compose donc de deux équations de transport, une pour l'énergie cinétique de la turbulence et une pour la dissipation d'énergie cinétique. Après simplification de cette dernière, le modèle $k-\varepsilon$, dans sa forme la plus générale, se résume ainsi :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{k}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{k})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) + P_k - \bar{\rho} \tilde{\varepsilon} \quad (I.5.9)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{\varepsilon})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} P_k - C_{2\varepsilon} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} \bar{\rho} \tilde{\varepsilon} \quad (I.5.10)$$

où

$$P_k = \left[\mu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left(\mu_t \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} + \bar{\rho} \tilde{k} \right) \right] \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \quad (I.5.11)$$

et

$$\mu_{\text{eff}} = \mu_1 + \mu_t = \mu_1 + C_\mu \bar{\rho} \frac{\tilde{k}^2}{\varepsilon}$$

$C_{1\varepsilon}$ et $C_{2\varepsilon}$ sont des constantes obtenues expérimentalement et supposées universelles qui valent respectivement 1.44 et 1.92 [Laun 74].

D'autres formes d'écriture sont données par plusieurs auteurs suivant les configurations géométriques données [Talb 95].

A l'heure actuelle, ce modèle est vraisemblablement le plus utilisé malgré que l'introduction de la viscosité turbulente implique une isotropie des échelles spatiales et des fluctuations de vitesse qui n'est vérifiée que dans peu de cas. En fait, pour des écoulements où les trois contraintes normales varient de façons très différentes (zones de recirculation, distorsions rapides, impact de jets,...), les modèles à concept de viscosité turbulente, même à deux équations comme $k-\varepsilon$, sont rarement satisfaisants [Corr 87], [Hwan 89], [Heit 86].

Enfin, si les équations de transport de l'énergie cinétique de la turbulence et de sa dissipation sont utilisables dans la majeure partie de l'écoulement, où l'on peut supposer que la turbulence est homogène et isotrope et à fort nombre de Reynolds, il n'en est pas de même près des parois où l'écoulement est de type couche limite, ce qui remet en cause l'hypothèse d'isotropie de la turbulence. De plus, du fait du ralentissement du fluide près des parois, les effets de viscosité moléculaire sont du même ordre de grandeur que ceux de la viscosité turbulente, et l'hypothèse de fort nombre de Reynolds ne tient plus. Ce problème est particulièrement gênant pour un foyer aéronautique qui est par nature confiné, d'où la nécessité de mettre en place une autre modélisation de la turbulence qui fait intervenir ce qu'on appelle les lois de parois [Mont 94], [Rubi 97], [Jaeg 90].

Deux approches sont alors possibles pour résoudre ce problème : la modélisation à faible nombre de Reynolds et les lois de paroi turbulentes (wall functions) [Mont 94], [Vers 95], [Tasc 95].

L'utilisation de modèles à bas nombre de Reynolds pour la résolution complète jusqu'à la paroi nécessite un maillage extrêmement fin et conduit à une augmentation notable du temps de calcul pour un résultat pas forcément très satisfaisant [Mont 94], [Laun 74].

Les lois de paroi turbulentes

Ces lois permettent de calculer les valeurs de k et ε dans les mailles près des parois sans avoir recours aux équations de k et de ε .

Dans un écoulement turbulent au voisinage d'une paroi (figure I.1), la vitesse transverse v est négligeable devant la vitesse axiale u , du/dy est le gradient de vitesse dominant et l'écoulement moyen est essentiellement conditionné par la contrainte de cisaillement τ .

L'écoulement dans la couche limite turbulente sera donc déterminé par la vitesse axiale u , la contrainte de cisaillement pariétale τ_w et la distance à la paroi y .

On définit la vitesse de frottement u^* et on forme deux nombres adimensionnels à partir de ces grandeurs :

$$u^* = \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad u^+ = \frac{u}{u^*} \quad y^+ = \frac{u^* y}{\nu}$$

Au voisinage d'une paroi, plusieurs études [Vers 95], [Tasc 95], [Jaeg 90] ont montré que l'écoulement peut se diviser en deux couches : la couche interne et la couche externe.

La couche interne ($y^+ < 1000$) est elle-même divisée en trois zones bien distinctes (figure I.2) qui sont : la sous couche visqueuse ou linéaire ($y^+ < 5$), la zone tampon ($5 < y^+ < 50$) et la zone inertielle ou logarithmique ($50 < y^+ < 1000$). Certains auteurs donnent ($5 < y^+ < 30$) pour la zone tampon et ($30 < y^+ < 100$) pour la zone inertielle [Jaeg 90]. La zone tampon est la zone de transition entre la zone linéaire et la zone logarithmique ; les transports turbulent et moléculaire sont du même ordre de grandeur. Dans la pratique elle est négligée, le profil résultant sera de la forme donnée par la figure I. 3. Le raccordement entre la sous couche visqueuse et la sous couche inertielle dans ce cas est obtenu pour une valeur de $y^+ = 11.5$ [Mont 94], d'autres auteurs proposent une valeur $y^+ = 30$ [Jaeg 90].

On distingue alors deux zones :

La sous-couche visqueuse étendue ($y^+ < 11.5$)

Dans cette partie proche de la paroi, les effets de la viscosité moléculaire sont prépondérants devant ceux du cisaillement turbulent. On en déduit :

$$\tau_w = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y} \approx \rho u^{*2} \quad (I.5.12)$$

Après intégration par rapport à y et application de la condition limite $u = 0$ pour $y = 0$, on obtient une relation linéaire entre la vitesse moyenne et la distance à la paroi :

$$u = \frac{\tau_w y}{\mu} \quad (I.5.13)$$

Après quelques manipulations algébriques et en utilisant les définitions de y^+ et u^+ , on obtient :

$$u^+ = y^+$$

d'où on tire u^* connaissant u et y :

$$u^* = \sqrt{\frac{\nu u}{y}} \quad (I.5.14)$$

La sous-couche inertielle étendue ($11.5 < y^+ < 1000$)

Dans cette zone, c'est les effets de la viscosité moléculaire qui sont négligeables. La contrainte de cisaillement τ varie très lentement avec la distance à la paroi, elle est alors supposée constante et égale à la contrainte pariétale :

$$\tau_w = \rho u^{*2} = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y} \quad (I.5.15)$$

La taille des tourbillons assurant le transport turbulent est imposée par la distance à la paroi. Expérimentalement, on constate que la longueur de mélange varie linéairement avec y [Schl 87].

On a :

$$l_m = C_k y$$

où C_k est la constante de Von Karman.

La viscosité turbulente prend alors dans cette zone la forme suivante :

$$\mu_t = \rho u^+ l_m = \rho u^+ C_k y \quad (I.5.16)$$

En reportant cette égalité dans l'équation I.5.15, on obtient une relation entre u^+ et y^+ :

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{1}{C_k y^+}$$

qui s'intègre en :

$$u^+ = \frac{u}{u^*} = \frac{1}{C_k} \log y^+ + B \quad (I.5.17)$$

où C_k et B sont des constantes déterminées de façon empirique en fonction de l'état de rugosité de la paroi et qui valent respectivement 0.4 et 5.5 pour les parois minces [Vers 95].

$$u^+ = \frac{u}{u^*} = 2.5 \log y^+ + 5.5 \quad (I.5.18)$$

La technique des fonctions de paroi consiste à placer la frontière de maillage dans la zone pleinement turbulente de la région de paroi, la vitesse normale à la frontière est imposée nulle, et l'action de la portion de l'écoulement non considérée dans le calcul est prise en compte en imposant le frottement. L'intensité de celui-ci est fournie en partant de l'équation I.5.18 [puisque la frontière est supposée être dans la zone pleinement turbulente], par l'expression non - linéaire (la variable y^+ étant fonction de u^*).

$$u^* = \frac{u}{2.5 \ln y^+ + 5.5} = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \quad (I.5.19)$$

Conditions aux limites pour k et ε

Les conditions aux limites pour k et ε sont obtenues (u^+ étant donnée par l'équation I.5.19) en utilisant le fait que, dans la zone pleinement turbulente, convection et diffusion sont négligeables [Delam 92], [Tour 95]. L'équation sur k se réduit alors à $P_k = \bar{\rho} \tilde{\varepsilon}$. Ce que l'on traduit en disant que la zone pleinement turbulente est une zone d'équilibre (la production y est égale à la dissipation). On obtient les équations suivantes :

$$\tilde{k} = \frac{u'^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (I.5.20)$$

$$\varepsilon_l = \frac{u'^3}{C_k y} = \frac{u'^4}{C_k \nu y^+} \tag{I.5.21}$$

On connaît alors les valeurs de k et de ε à imposer dans la maille pariétale.

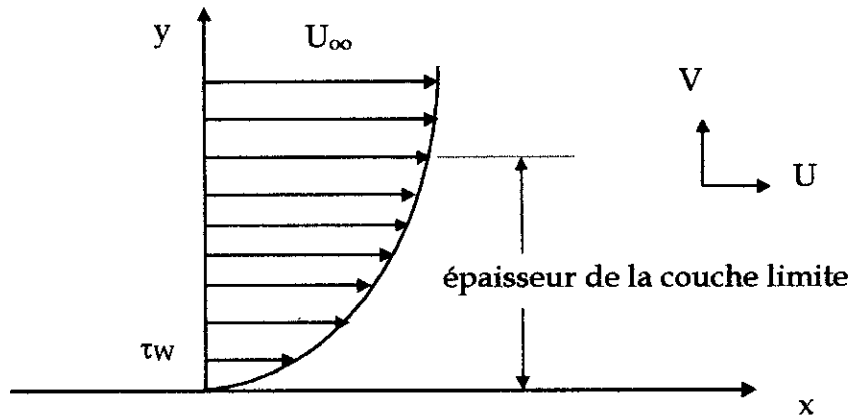


Figure I.1 : Schéma d'une couche limite turbulente pariétale

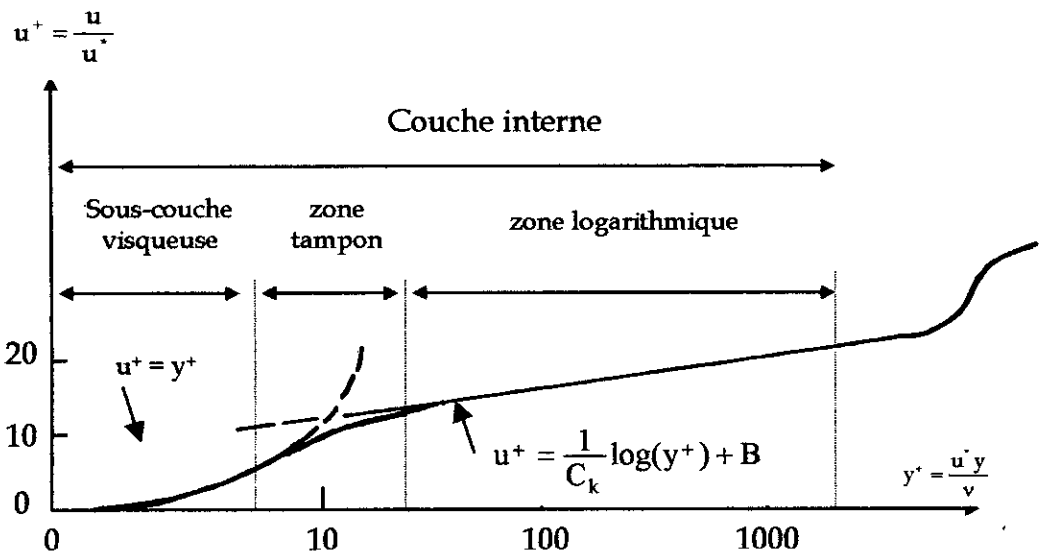


Figure I.2 : Structure d'une couche limite turbulente pariétale

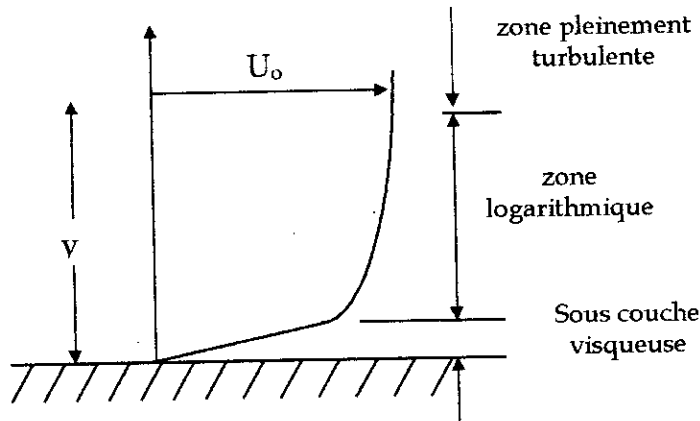


Figure I.3 : Région près de la paroi

I.6 La modélisation de la combustion turbulente

Dans les équations de conservation des espèces apparaît un terme de production moyenne de l'espèce k considérée $\overline{\omega_k}$. Justement la modélisation de la combustion turbulente réside dans l'évaluation de ces termes.

I.6.1 Rappels sur la modélisation de la combustion turbulente

La combustion turbulente est un problème complexe qui englobe un grand nombre de phénomènes physiques différents.

Les difficultés rencontrées lors de la modélisation des termes sources des équations moyennées s'expliquent par les constatations suivantes :

- En supposant qu'on se place en régime laminaire et qu'on considère une réaction chimique simple irréversible du type :



où s est le coefficient stœchiométrique de la réaction .

Le terme source chimique de consommation du carburant est gouverné par une loi d'Arrhénius et s'écrira :

$$\dot{\omega}_f = \rho k_0 Y_0 Y_f \exp\left(-\frac{E_a}{R_0 T}\right) \quad (\text{I.6.2})$$

où Y_f représente la fraction massique du combustible, Y_o celle de l'oxydant, k_0 le facteur préexponentiel de la réaction, E_a l'énergie d'activation et R_0 la constante universelle des gaz parfaits.

Cette relation est non linéaire par rapport à la température. Ceci implique que la moyenne de ce terme source n'est pas une fonction simple de la température moyenne. Les termes sources moyens des équations de conservation des espèces sont donc inaccessibles directement.

- En régime turbulent, il y a interaction entre la chimie et la turbulence [Mont 94], [Borgh 84]. L'écoulement turbulent influence fortement les taux de réaction. Il faut donc définir des modèles différents pour chacun des domaines considérés.

La première idée est de développer le taux de réaction en série de Taylor. Cette méthode engendre des difficultés telles que la fermeture de nouvelles grandeurs inconnues qui apparaissent soit avec des relations algébriques ou avec des équations de transport. En plus cette analyse mathématique n'a été développée que pour une réaction simple. Donc plusieurs auteurs se sont rattachés à examiner la physique des phénomènes pour pouvoir proposer des modèles de combustion turbulente.

Cette approche physique est principalement basée sur la comparaison des échelles caractéristiques, temporelles et spatiales des deux phénomènes principaux : le mélange turbulent et la réaction chimique (voir I.6.2).

Différents types de flammes

Selon que les deux réactifs seraient mélangés ou séparés avant la réalisation de la réaction, on distingue deux types de flammes : les flammes prémélangées et les flammes de diffusion.

Les flammes prémélangées : réalisables seulement avec des combustibles gazeux, dites également flammes aérées. Le mélange peut être riche, pauvre ou stoechiométrique.

En général, le gaz combustible est mélangé préalablement à une fraction de l'air nécessaire à sa combustion dite " air primaire", le reste du comburant est emprunté à l'atmosphère au cours de la combustion. La figure 4-a présente la géométrie type d'une flamme prémélangée.

Les flammes de diffusion : réalisables avec toutes les catégories de combustibles, les deux réactifs se rencontrent dans la zone de réaction par inter - diffusion. L'exemple le plus simple de ce type de flamme est la flamme d'un briquet. La figure 4-b présente la géométrie d'une flamme de diffusion ou non prémélangée.

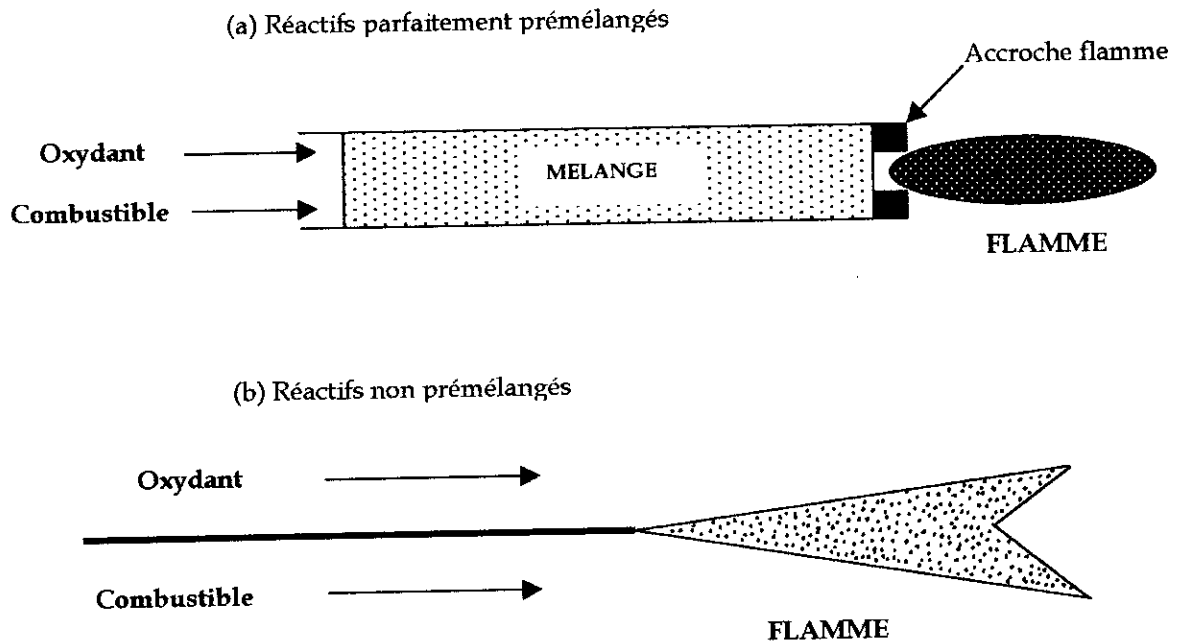


Figure 4 : Flamme prémélangée (a) et flamme de diffusion (b).

Dans le restant de cette étude, on utilisera une flamme de prémélange.

1.6.2 Classification des flammes turbulentes de prémélanges

Cette classification peut être réalisée en situant les différents régimes de flammes dans des diagrammes bien connus utilisant certains nombres adimensionnés. Ces nombres comparent les échelles caractéristiques de la turbulence et de la chimie [Verv 98], [Take 93].

Il s'agit par exemple du rapport $\frac{u'}{U_1}$ et $\frac{l_t}{\delta_1}$ pour Borghi (1984 - 1985) et Peters (1986) ou encore des nombres de Reynolds turbulent $Re_t = \frac{u' l_t}{\nu}$ et de Damkohler $Da = \frac{\tau_t}{\tau_c}$ pour Williams (1985).

Avec $\tau_c = \frac{\delta_1}{U_1} = \frac{\text{épaisseur de la flamme la min aire}}{\text{vitesse de la flamme la min aire}}$

et $\tau_t = \frac{L_t}{u'} = \frac{\text{échelle intégrale de la turbulence}}{\text{fluctuation de la vitesse}}$

Donc le nombre de Damkohler est $Da = \frac{\tau_t}{\tau_c} = \frac{L_t U_1}{\delta_1 u'}$ où un rapport de vitesses $\frac{u'}{U_1}$ et

un rapport d'échelles spatiales $\frac{L_t}{\delta_1}$ sont mis en évidence.

On distingue deux cas : $Da \ll 1$ et $Da \gg 1$

Pour $Da \gg 1$: le temps chimique est très court à l'échelle du temps turbulent, correspondant à une mince zone de réaction convectée et déformée par l'écoulement. la structure interne de la zone de réaction n'est pas perturbée par la turbulence et peut être décrite comme celle d'un élément de flamme laminaire, appelé « flammelettes » seulement plissée par la turbulence.

Pour $Da \ll 1$: réaction chimique très lente, réactifs et produits sont mélangés par la turbulence avant de réagir : on est dans la limite du « réacteur parfaitement prémélangé ».

La plupart des applications pratiques correspondent à des valeurs moyennes ou élevées du nombre de Damkohler.

Le diagramme de la figure I.5, tracé en échelles logarithmiques, pour une combustion d'un prémélange sous certaines conditions, représente les relations fondamentales entre le rapport $\frac{u'}{U_1}$ sur les ordonnées et le rapport $\frac{L_t}{\delta_1}$ sur les abscisses.

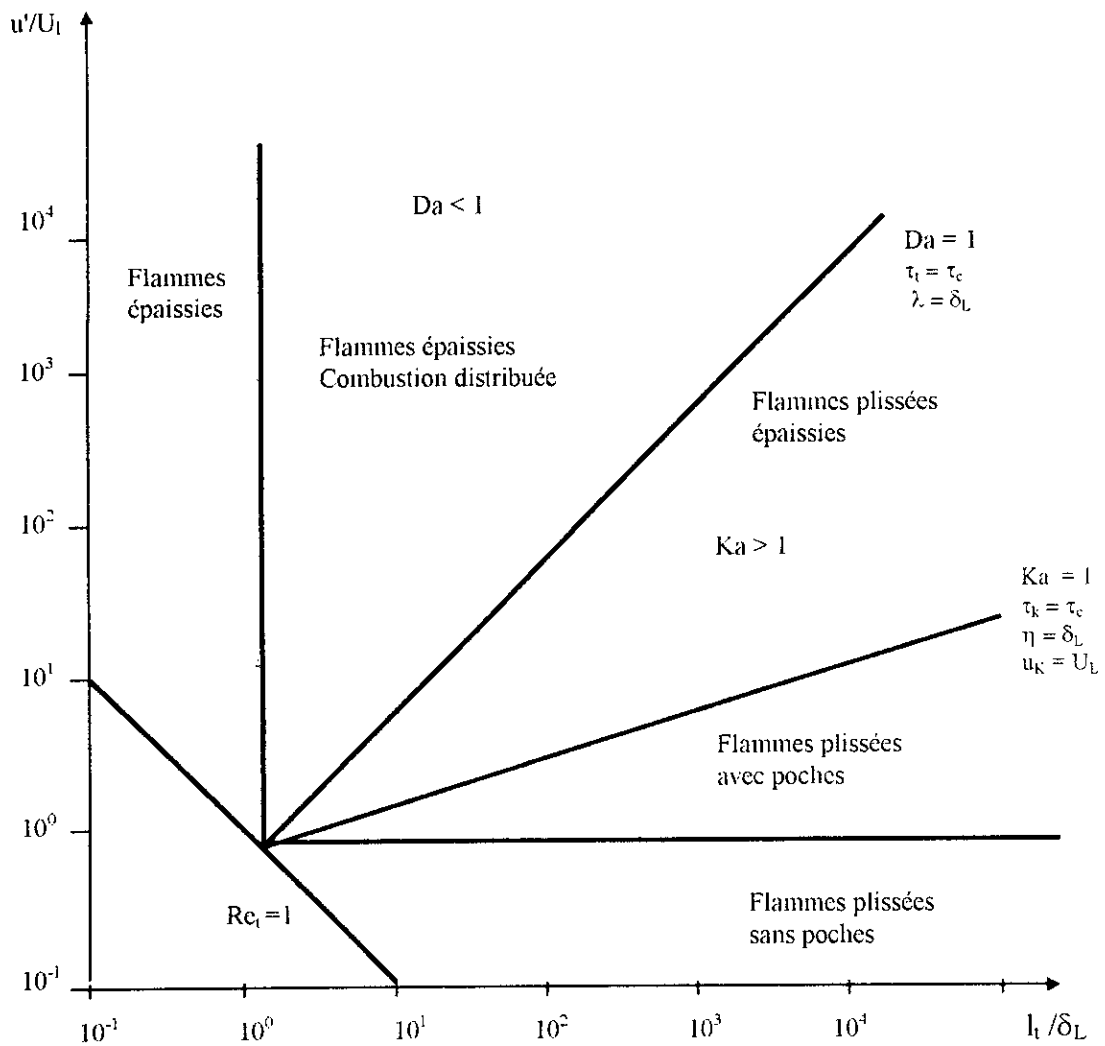


Figure I.5 : Classification des régimes de combustion turbulente prémélangée (Borghini 1988)[Mais 91].

Considérons une flamme laminaire soumise à un écoulement turbulent. Les structures tourbillonnaires peuvent déformer le front de flamme et en augmenter ainsi considérablement la surface.

La ligne à 45° de la figure I.5 correspond à $Da = 1$, et sépare entre deux régimes importants de la combustion. Cette ligne ne s'étend pas à l'origine mais s'arrête pour $Re_t = 1$. Le régime pour les flammes laminaires s'étend au dessous de la ligne $Re_t = 1$.

La zone de la figure I.5 limitée par $Da = 1$ et $Re_t = 1$ révèle quelques complexités qui se développent dans la structure de la flamme une fois qu'on s'éloigne de l'écoulement laminaire d'une part et d'autre part qu'on n'approche pas le mélange parfait. Le régime de flammelettes subsistera tant que les plus petites échelles de la turbulence, c'est à dire les échelles de kolmogorov, auront un temps caractéristique τ_k

supérieur à τ_c (les structures turbulentes sont alors trop lentes pour affecter le front)
 Cette transition est caractérisée par le nombre adimensionnel de Karlovitz ou *flame stretch factor*, Ka , défini par :

$$Ka = \frac{\tau_c}{\tau_k} = \left(\frac{u'}{U_1} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{l_1}{\delta_1} \right)^{\left(-\frac{1}{2} \right)}$$

Avec

$$Re = Da^2 Ka^2$$

τ_k est l'échelle de temps de Kolmogorov relative aux plus petites structures de la turbulence.

Ka peut aussi être interprété comme le rapport des temps chimique et de turbulence. Alors, ce nombre est utilisé comme critère, connu sous le nom de critère de Klimov - Williams ($Ka = 1$) pour séparer deux régimes de combustion.

Initialement, ce critère était interprété comme séparant deux régimes :

$Ka < 1$ (régime de flammelette).

$Ka > 1$ (combustion distribuée où la structure de flamme est complètement modifiée par la turbulence au point qu'aucun élément de flamme de type laminaire ne puisse être identifié).

En 1997 Peters a affiné cette analyse, il a proposé la classification suivante :

$Ka < 1$: flammelette ou flamme mince plissée avec deux sous régimes :

- Turbulence assez faible $u' / U_1 < 1$. u' ne fait que déformer la flamme laminaire, mais ne peut pas plisser trop le front au point de provoquer des interactions entre flammes. Le front de flamme apparaît continu et sépare les gaz frais des gaz brûlés : on est dans le régime dit des " flammes plissées " ou **flammelettes**.
- Lorsque l'énergie cinétique de la turbulence augmente $u' / U_1 > 1$, u' est suffisamment élevée, c'est à dire les plus gros tourbillons sont suffisamment énergétiques pour plisser la flamme au point de provoquer des interactions de fronts voisins. Alors, certains tourbillons traversent le front de flamme emportant avec eux des gaz frais, créant des poches de gaz frais dans les gaz brûlés et inversement. On se situe alors dans le régime des **flammes plissées avec poches** (corrugated flames). Ce régime est limité par la droite correspondant à $Ka = 1$ (critère de Klimov - Williams $\delta_l = \tau_k$).

$1 < Ka < 100$: dans ce cas les structures turbulentes sont capables de pénétrer dans la zone de préchauffage et de l'épaissir, mais ne peuvent pas affecter la zone de réaction qui reste mince. On se trouve dans le régime dit de la **flamme plissée - épaissie** (thickened flame regime). Cette zone est limitée par la droite $Da = 1$.

$Ka > 100$: cette fois, les zones de préchauffage et de réaction sont perturbées par la turbulence et aucune structure de flamme laminaire ne peut être identifiée. On est dans le régime de « **flamme épaissie** » ou de **réacteur homogène** (well-stirred reactor). Dans ce cas la chimie est insensible aux effets de transport de masse et de chaleur. On a alors $Da < 1$.

Cette analyse repose sur des considérations intuitives et qualitatives [Verv 98] :

- La turbulence est supposée homogène et isotrope, ce qui n'est pas toujours le cas dans les systèmes réels.
- Les limites entre les différents régimes sont basées sur des estimations, ainsi, le régime de flammelettes peut se situer à $Ka = 0.1$ ou $Ka = 100$ plutôt que $Ka = 1$ retenu ici.
- Les effets de viscosité sont négligés. Pourtant, si les tourbillons de Kolmogorov sont les plus énergétiques en terme d'étirement, ils ont aussi la durée de vie la plus courte en raison de la dissipation visqueuse et ne survivront probablement pas longtemps pour affecter le front de flamme.
- D'autres part, les effets instationnaires jouent un grand rôle : on a montré qu'une flamme plane étirée peut résister à des étirements supérieurs à son étirement d'extinction s'ils ne sont pas appliqués trop longtemps [Pope 87], [Mont 94].

Enfin, une flamme soumise à un tourbillon tend à se courber et résiste ainsi à des sollicitations plus importantes qu'une flamme plane.

1.6.3 Modèles pour la combustion turbulente prémélangée :

Parmi les modèles les plus rencontrés dans la littérature, on cite :

- Modèles à densité de probabilité.
- Le modèle Bray-Moss-Libby [BML] (Bray, Moss and Libby 1984).
- Le modèle Eddy Break-Up (Spalding 1971).
- Le modèle de flammelettes à quantification de surface de flamme.

Les trois premiers modèles seront explicités brièvement en annexe 1, par contre le troisième modèle qui est l'objet de cette étude, sera détaillé par la suite. Il existe bien sûr, d'autres modèles récents [Duclo 93].

1.6.3.1 Modèle de flammelette à quantification de surface de flamme

Tous les modèles de flammelettes reposent sur l'hypothèse que la combustion se produit dans une fine zone de réaction séparant les gaz frais des gaz brûlés, cette zone étant assimilée à un élément de flamme laminaire (c'est à dire une flammelette). Sous cette hypothèse, il est possible de décrire le front de flamme en tant qu'une entité géométrique. On peut décrire et quantifier la flamme en tant que surface. Dès lors, le taux de réaction moyen peut s'écrire $\dot{\omega}_f = \omega_f \Sigma$ où ω_f est le taux de réaction local, par unité de surface de flamme, des éléments de flamme laminaire et Σ la densité de surface de flamme, c'est à dire la quantité de surface de flamme par unité de volume.

Le principal intérêt de ce type d'approche est de découpler les effets de cinétique chimique de la description du transport turbulent.

Le taux de réaction local ω_f peut être déterminé par des études de flammes laminaires (flammes planes étirées par exemple) et incorporé dans des bibliothèques de données. L'action du champ turbulent qui occasionne convection, plissement, étirement, . . . de la surface de flamme est, lui, décrit par Σ . Pour fermer ce type de modèle, il nous reste à déterminer la densité de surface de flamme Σ . Deux types d'approches ont été proposées : expression algébrique ou écriture d'une équation de transport.

Modèle algébrique : le modèle algébrique BML est présenté en annexe 1.

Equation de transport pour la densité de surface de flamme : dans cette approche, on distingue quatre principaux modèles :

- Modèle de Cant, Pope et Bray (CPB).
- Modèle de Mantel et Borghi.
- Modèle de Cheng et Diringier (CD).
- Modèle de flamme cohérente (CFM), qu'on va utiliser et détailler dans le chapitre prochain.

Chapitre II

Le modèle de flamme cohérente

Chapitre II

Etude du modèle de la flamme cohérente

En premier lieu, nous formulons les équations régissant les écoulements gazeux réactifs et turbulents, par des approximations dans le cas bidimensionnel, pour l'établissement des équations dynamiques.

Au second, le modèle de la flamme cohérente est utilisé, d'une part, pour l'étude de la réaction chimique et d'autre part pour la détermination des taux de réactions moyens.

II.1 Equations dynamiques

A l'aide de l'approximation de l'écoulement bidimensionnel, ces équations prennent, dans le cas de régime stationnaire, la forme suivante :

Conservation de la masse

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}u) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}v) = 0 \quad (\text{II.1})$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement suivant x

$$\bar{\rho}u \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \bar{\rho}v \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu_l + \mu_t) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) \right] \quad (\text{II.2})$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement suivant y

$$\bar{\rho}u \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \bar{\rho}v \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu_l + \mu_t) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) \right] \quad (\text{II.3})$$

II.2 Equations de fermetures

Les équations de fermetures de transport de k et ε [Talb 95], [Rubi 97], seront écrites dans le cas bidimensionnel stationnaire comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\tilde{u}\tilde{k}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}\tilde{v}\tilde{k}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\frac{\mu_t}{\sigma_{k,l}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{k,t}}\right]\frac{\partial\tilde{k}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\left[\frac{\mu_t}{\sigma_{k,l}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{k,t}}\right]\frac{\partial\tilde{k}}{\partial y}\right) \\ &+ \mu_t\left[2\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\right)^2\right] - \bar{\rho}\tilde{\varepsilon} \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\tilde{u}\tilde{\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}\tilde{v}\tilde{\varepsilon}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon,l}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon,t}}\right]\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\left[\frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon,l}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon,t}}\right]\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial y}\right) \\ &+ C_{\varepsilon 1}\frac{\tilde{\varepsilon}}{k}\mu_t\left[2\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\right)^2\right] - C_{\varepsilon 2}\bar{\rho}\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Avec $\mu_t = C_\mu\bar{\rho}\frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\varepsilon}}$

Les constantes standards du modèle sont celles données par Launder et Spalding [Laun 74].

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad \sigma_{k,l} = \sigma_{\varepsilon,l} = 1.00, \quad \sigma_{k,t} = 1.00, \quad \sigma_{\varepsilon,t} = 1.3$$

II.3 Modèle de flamme cohérente

Développé initialement en 1977 par Marble et Broadwell pour le cas de flammes turbulentes non prémélangées. Cette méthode a ensuite été étendue au cas de flammes de prémélange (Darabiha 1984, Veynante et al 1989, Candel et al 1990) et utilisée pour le cas d'un écoulement axisymétrique (Saadallah 1984) [Bente 91].

Ce modèle s'appuie sur le concept de flammelettes. Il est basé sur l'idée que la zone de combustion turbulente peut être décrite comme un ensemble de flammes laminaires étirées qui sont convectées et déformées par l'écoulement turbulent, mais gardent une structure identifiable. En ce sens, les flammelettes restent cohérentes. Ces éléments de flamme, supposés infiniment minces sont considérés comme des interfaces entre gaz frais et gaz brûlés où se produisent la consommation des réactifs et le dégagement de chaleur (figure II.1).

Comme tous les modèles de flammelettes, ce modèle permet de calculer les termes sources des équations de bilan moyennées en tenant compte des considérations chimiques et en estimant la quantité de surface de flamme.

Le taux de réaction moyen (la masse de combustible brûlée par unité de temps et par unité de volume) est modélisé par : $\overline{\dot{\omega}_f} = -\omega_f \Sigma$ où ω_f est fourni par une bibliothèque de flammelettes. Σ est la surface de flamme par unité de volume obtenue grâce à la résolution d'une équation de transport supplémentaire qui fait intervenir des termes de convection, diffusion, production et disparition.

La particularité du modèle de flamme cohérente donc est de proposer une équation de transport pour la densité de surface de flamme Σ . Cette quantité est l'inverse d'une longueur et elle est exprimée en m^{-1} . Ainsi, dans ce modèle, les taux de réaction par unité de volume sont obtenus à partir des taux de réaction par unité de surface de flamme et de la densité de surface de flamme. Ce modèle découple ainsi de façon intéressante les problèmes de cinétique chimique des bilans moyens effectués pour déterminer l'écoulement turbulent global.

Un autre mécanisme important constaté par Marble et Broadwell est celui de rétrécissement de surface de flamme, dans l'enroulement d'un tourbillon jusqu'à annihilation complète de deux fronts de flamme adjacents et disparition du réactif qui les séparait, voir, aussi même l'extinction de la flamme (figure II.2.b).

La modélisation du type flamme cohérente se résume généralement en :

Un modèle local qui, par l'étude analytique ou numérique de flammes laminaires, fournit les taux de réaction par unité de surface de flamme, ω_f , en fonction de différents paramètres (richesse, température, étirement, . . .). Ce modèle, découplé du reste du calcul, peut intégrer des considérations de cinétique chimique et de transport complexe. Il est essentiellement utilisé pour produire une bibliothèque de données au modèle de combustion turbulente.

Un modèle global où est traité l'écoulement turbulent (équations de bilans moyennées, hypothèses de fermeture, . . .).

Une description de la surface de flamme (équation de bilan), destinée à calculer la densité de surface de flamme en chaque point de l'écoulement, et par conséquent, de relier les modèles global et local.

II.3.1 Modèle global

Le système des équations de bilan pour les concentrations massiques des espèces chimiques et l'enthalpie (I.4.3), (I.4.4), (I.5.3) et (I.5.4) s'écrit, moyennant les hypothèses précédentes de la façon suivante :

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\tilde{Y}_k}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\tilde{Y}_k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\mu_l}{Sc_k} + \frac{\mu_t}{Sc_{k,t}}\right)\frac{\partial\tilde{Y}_k}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu_l}{Sc_k} + \frac{\mu_t}{Sc_{k,t}}\right)\frac{\partial\tilde{Y}_k}{\partial y}\right] + \bar{\omega}_k \quad (\text{II.6})$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\tilde{h}_t}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\tilde{h}_t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\mu_l}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t}\right)\frac{\partial\tilde{h}_t}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu_l}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t}\right)\frac{\partial\tilde{h}_t}{\partial y}\right] + \bar{\omega}_{h_t} \quad (\text{II.7})$$

Les nombres de Schmidt Sc_k et $Sc_{k,t}$ ainsi que les nombres de Prandtl Pr et Pr_t sont supposés égaux à l'unité [Mais 90], [Mont 94]. Par conséquent, les équations précédentes deviennent :

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\tilde{Y}_k}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\tilde{Y}_k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\mu_l + \mu_t}{Sc_k}\right)\frac{\partial\tilde{Y}_k}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu_l + \mu_t}{Sc_k}\right)\frac{\partial\tilde{Y}_k}{\partial y}\right] + \bar{\omega}_k \quad (\text{II.8})$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\tilde{h}_t}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\tilde{h}_t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\mu_l + \mu_t}{Pr}\right)\frac{\partial\tilde{h}_t}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu_l + \mu_t}{Pr}\right)\frac{\partial\tilde{h}_t}{\partial y}\right] + \bar{\omega}_{h_t} \quad (\text{II.9})$$

Avec
$$\bar{\omega}_{h_t} = \sum_{k=1}^n h_k^0 \bar{\omega}_k$$

Comme il a été déjà dit, Marble et Broadwell ont relié les termes sources $\bar{\omega}_k$ de l'espèce k dus à la réaction chimique, à une densité moyenne de surface de flamme Σ . En définissant une vitesse de disparition de l'espèce k , V_{DK} , le taux de réaction s'écrit :

$$\bar{\omega}_k = -\bar{\rho} V_{DK} \tilde{\Sigma} \quad (\text{II.10})$$

Pour compléter la détermination des taux de réaction moyens, on doit calculer V_{DK} . Ce calcul se fera lors de l'étude du modèle local.

En remplaçant l'équation précédente dans le système d'équations du modèle global, on aura :

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\tilde{Y}_k}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\tilde{Y}_k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\mu_1 + \mu_t}{Sc_k}\right)\frac{\partial\tilde{Y}_k}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu_1 + \mu_t}{Sc_k}\right)\frac{\partial\tilde{Y}_k}{\partial y}\right] - \bar{\rho}V_{DK}\tilde{\Sigma} \quad (\text{II.11})$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\tilde{h}_1}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\tilde{h}_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\mu_1 + \mu_t}{Pr}\right)\frac{\partial\tilde{h}_1}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu_1 + \mu_t}{Pr}\right)\frac{\partial\tilde{h}_1}{\partial y}\right] - \sum_{k=1}^n \bar{\rho}h_k^0 V_{DK}\tilde{\Sigma} \quad (\text{II.12})$$

Avec
$$\sum_{k=1}^n \tilde{Y}_k = 1$$

Vu l'intérêt qu'on porte pour les profils de température dans le calcul de la combustion, on développe ici, l'équation de l'énergie en fonction de la température, alors :

$$\bar{\rho}\bar{u}C_p\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}C_p\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}C_p\left[\left(\frac{\mu_1 + \mu_t}{Pr}\right)\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}C_p\left[\left(\frac{\mu_1 + \mu_t}{Pr}\right)\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y}\right] - \sum_{k=1}^n \bar{\rho}h_k^0 V_{DK}\tilde{\Sigma} \quad (\text{II.13})$$

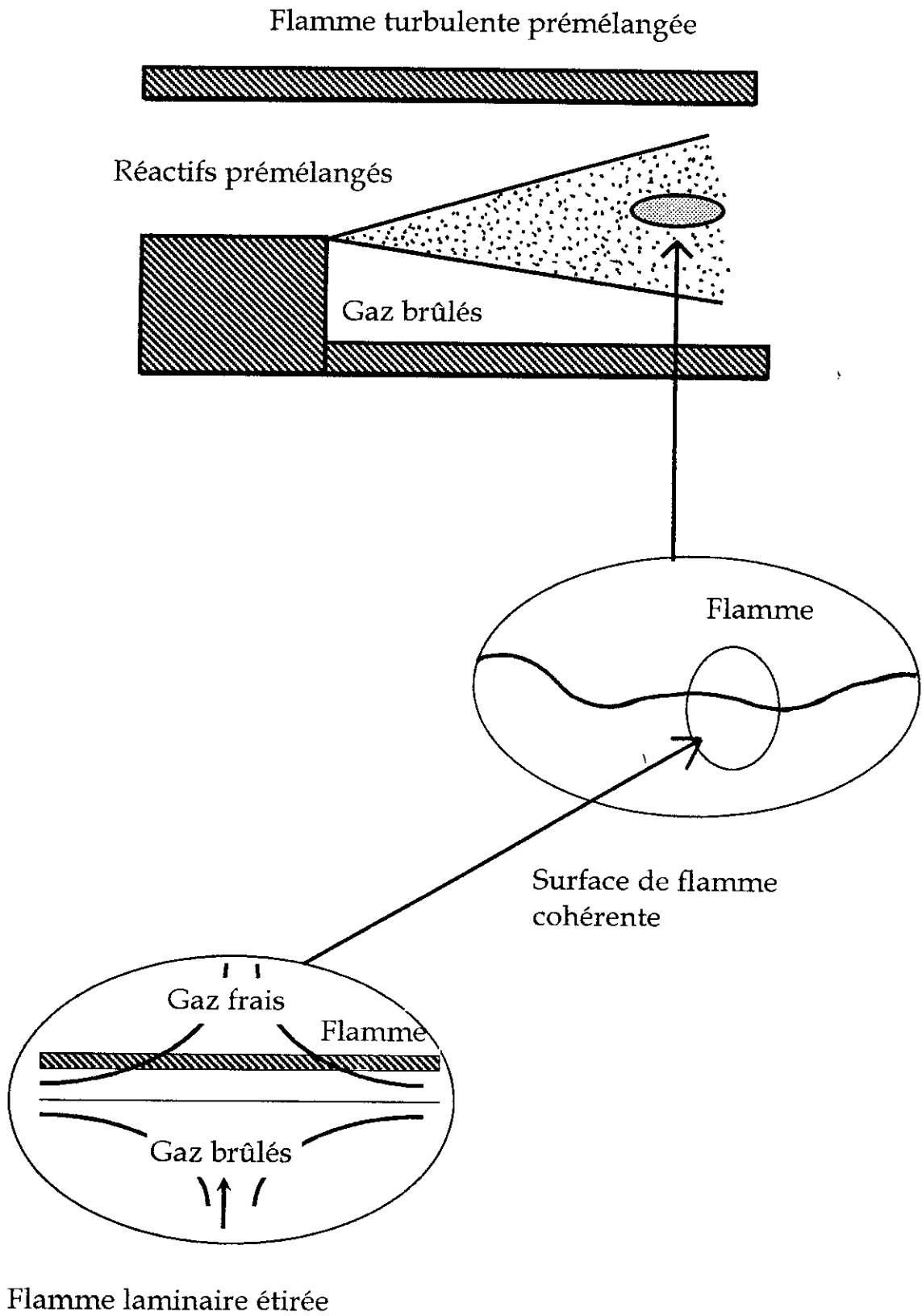
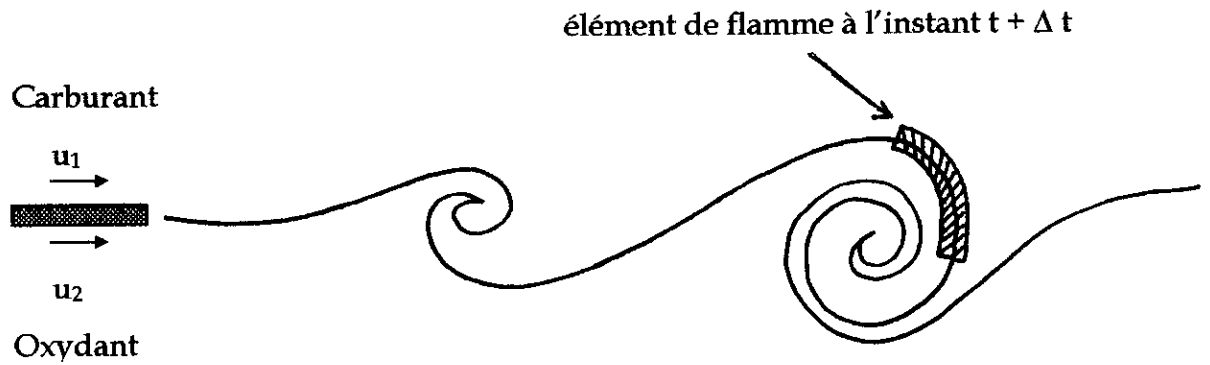
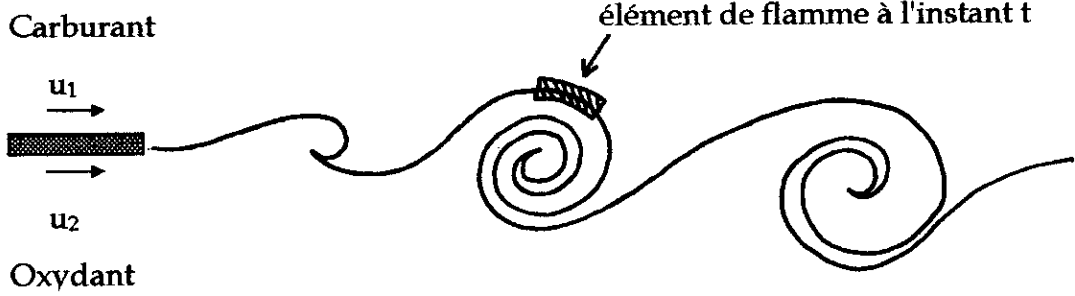
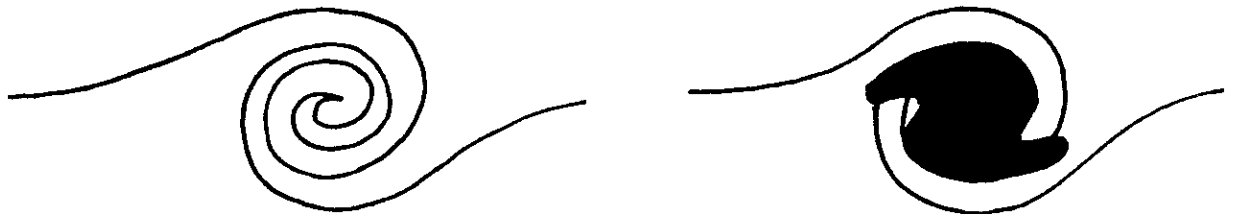


Figure II.1 : Schéma de principe du modèle de flamme cohérente

$u_1 > u_2$



a) Etirement du front de flamme par l'écoulement



b) Disparition des tourbillons par annihilation mutuelle

Figure II.2 : Origine physique des différentes composantes du terme source de l'équation de bilan de la densité de surface de flamme (ex : flamme de diffusion) : création due à l'étirement, disparition par annihilation des tourbillons.

II.3.2 Equation de bilan pour la surface de flamme

Cette équation relie le modèle global et le modèle local en tenant compte des différents phénomènes tels que :

- Le transport turbulent,
- La création par étirement (figure II.2.a),
- La disparition par annihilation mutuelle ou par extinction de la flamme près des parois (flame quenching) due, par exemple, à un taux de cisaillement excessif.

Notons que l'équation de transport pour la densité de surface de flamme a été obtenue pour une flamme parfaitement établie se déplaçant loin de tout obstacle matériel. Dans la pratique, les configurations expérimentales et industrielles sont confinées et comportent souvent des dispositifs facilitant la stabilisation ou l'accrochage de la flamme ; accroche - flamme pour les foyers de réchauffe, plaque de séparation gaz frais - gaz brûlés pour le cas de la flamme pilote et coin de domaine pour les statoréacteurs (figure II.3).

Dés lors l'effet des parois et de ces divers obstacles est loin d'être négligeable.

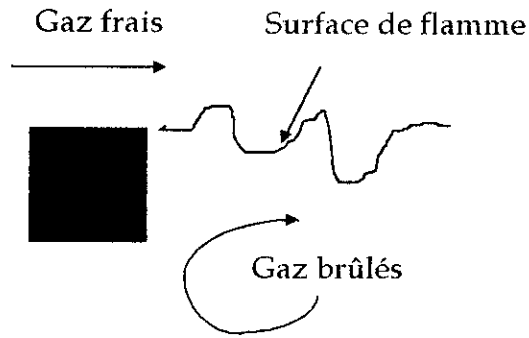
Interaction flamme - paroi :

Dans les zones près des parois, la combustion est fortement influencée par les transferts de chaleur liés aux parois et par la nature particulière de l'écoulement et de la turbulence.

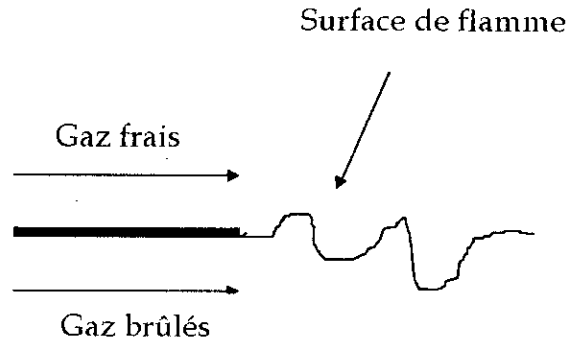
Ainsi, une flamme s'approchant d'une paroi subira de telles pertes de chaleur qu'elle s'éteindra avant de l'atteindre [phénomène de " quenching "] (Annexe 2).

Il faut alors établir des " lois de parois " comme celle pour $k-\varepsilon$ [Mont 94], [Rubi 97], [Brune 90].

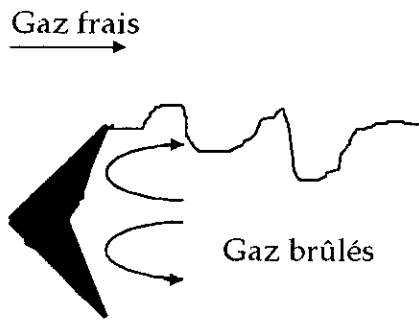
Ce problème n'a pas été abordé dans le cadre de cette thèse et sera une des perspectives d'amélioration de ce travail.



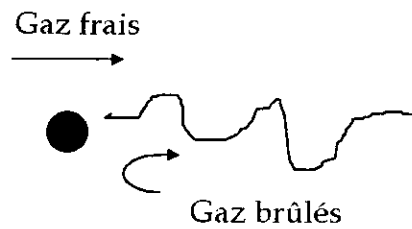
a) marche ou coin du statoréacteur



b) flamme pilote



c) accroche - flamme en V



d) barre

Figure II.3 : Différentes géométries où se rencontre le problème de la stabilisation de la flamme.

L'équation de bilan pour la surface de flamme s'écrit sous la forme générale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Taux de} \\ \text{variation} \\ \text{de } \Sigma \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Diffusion} \\ \text{turbulente} \\ \text{de } \Sigma \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Production} \\ \text{de } \Sigma \text{ par} \\ \text{étirement} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Disparition} \\ \text{de } \Sigma \text{ par} \\ \text{annihilation} \end{array} \right\}$$

La densité de surface de flamme satisfait l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\Sigma}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{u}_k \tilde{\Sigma}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_\Sigma} \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial x_k} \right] + (E_s + E'_s) \bar{\rho} \tilde{\Sigma} - \beta \bar{\rho} \frac{V_{DK}}{\tilde{Y}_F} \tilde{\Sigma}^2 \quad (\text{II.14})$$

E_s : étirement microscopique, qui s'exprime en fonction du rapport de l'énergie cinétique turbulente et de sa dissipation [Mont 94].

$$E_s = \alpha \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} \quad (\text{II.15})$$

où α est une constante.

E'_s : étirement macroscopique dû à l'écoulement moyen liant le taux d'étirement moyen au gradient de vitesse transversal par la relation :

$$E'_s = \alpha' \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \quad (\text{II.16})$$

L'étirement macroscopique E'_s peut être utilisé dans les écoulements cisailés simples tels que les couches de mélange, jets, . . . etc, mais dans les cas plus complexes, on utilise l'étirement microscopique E_s [Mais 91], [Darab 87].

Le dernier terme dans l'équation (II.14) représente l'annihilation mutuelle de surface de flamme, il intervient lorsque deux éléments de flamme très voisins consomment le réactif qui les sépare et s'annihilent mutuellement. Dans le cas général, il peut résulter de la consommation complète de l'oxydant séparant deux éléments de flammes rapprochés.

En deux dimensions (x, y), pour le cas stationnaire, et en utilisant les équations (II.15) et (II.16), cette équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \tilde{u} \tilde{\Sigma}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \tilde{v} \tilde{\Sigma}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\Sigma} \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\Sigma} \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial y} \right) + \left(\alpha \bar{\rho} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} \right) \tilde{\Sigma} - \beta \bar{\rho} \frac{V_{DK}}{\tilde{Y}_F} \tilde{\Sigma}^2 \quad (\text{II.17})$$

II.3.3 Modèle local

Ce modèle s'intéresse à la structure de la flamme étirée. Plusieurs configurations peuvent être utilisées comme modèle local, on cite le modèle simple flamme (figure 2) et le modèle double flamme [Mais 90] ; Seul le premier est utilisé dans la suite de l'étude.

Au cours de la modélisation des différents termes de l'équation de transport de la surface de flamme, est apparu un paramètre V_{DK} qui est la vitesse de consommation du combustible qui intervient lors de l'estimation des termes sources des équations de bilan des espèces (vitesse de disparition des espèces k).

II.3.3.1 Modèle et détermination des taux de réaction par unité de surface

Les éléments de flamme constituant la zone de combustion turbulente sont déformés et étirés par les fluctuations turbulentes. Le modèle le plus simple permettant de représenter cet effet est celui d'une flamme plane laminaire de prémélange subissant un étirement constant dans son plan. Plusieurs études récentes ont montré que pour des étirements faibles ou modérés, le taux de consommation est faiblement modifié (des études récentes [Darabiha et Candel (1991)] ont montré que les flammes turbulentes, résistent même à un étirement excessif et ne s'éteignent pas) [Mont 94].

Dans cette situation, le taux de consommation par unité de surface de flamme, reste proche de la valeur correspondant à un étirement nul. Dans ce cas V_{DK} peut être prise égale à la vitesse de flamme laminaire U_l .

Dans ce cas l'équation de bilan pour la surface de flamme devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \tilde{u} \tilde{\Sigma}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \tilde{v} \tilde{\Sigma}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\Sigma} \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\Sigma} \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial y} \right) + \left(\alpha \bar{\rho} \frac{\tilde{\epsilon}}{k} \right) \tilde{\Sigma} - \beta \bar{\rho} \frac{U_l}{Y_F} \tilde{\Sigma}^2 \quad (\text{II.18})$$

II.3.3.2 Vitesse de flamme laminaire

De nombreuses études expérimentales ont été réalisées dans diverses configurations pour déterminer la vitesse de flamme laminaire pour plusieurs hydrocarbures. On peut citer les travaux de Warnatz (1978) pour les flammes prémélangées propane - air ainsi que ceux de Sharma et al.(1981) et Darabiha et al (1988) pour les flammes prémélangées méthane - air [Mont 94].

Warnatz propose une loi de puissance qui donne la vitesse de flamme propane - air U_1 en fonction de la pression p , de la température des gaz frais T_{CF} et de la richesse du mélange Φ suivant l'expression :

$$U_1 = U_1^0 \left(\frac{T_{CF}}{T_0} \right)^\alpha \left(\frac{p}{p_0} \right)^\beta \quad (\text{II.19})$$

où T_0 et p_0 sont une température et une pression de références fixées respectivement à 500° K et 8 atmosphères. Les exposants α et β varient avec la richesse suivant les lois :

$$\alpha = 17.24 - 15.39 \Phi^{0.1124}$$

$$\beta = -8.04 + 7.74 \Phi^{0.07912}$$

La vitesse de flamme de référence U_1^0 est aussi fonction de la richesse :

$$U_1^0 = -0.489 + 0.575 \Phi^{0.2318} \quad \text{en m/s}$$

II.4 Système d'équations à résoudre

En tenant compte des développements et des modifications que nous avons apportées, le système d'équations final, que nous devons résoudre s'écrira,

Continuité

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \tilde{v}) = 0 \quad (\text{II.20})$$

Quantité de mouvement suivant x

$$\bar{\rho} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \bar{\rho} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu_l + \mu_t) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) \right] \quad (\text{II.21})$$

Quantité de mouvement suivant y

$$\bar{\rho} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \bar{\rho} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu_l + \mu_t) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) \right] \quad (\text{II.22})$$

Espèces chimiques

$$\bar{\rho} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{Y}_k}{\partial x} + \bar{\rho} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{Y}_k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\mu_l + \mu_t}{Sc_k} \right) \frac{\partial \tilde{Y}_k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\mu_l + \mu_t}{Sc_k} \right) \frac{\partial \tilde{Y}_k}{\partial y} \right] - \bar{\rho} U_1 \tilde{\Sigma} \quad (\text{II.23})$$

L'énergie (exprimée en fonction de la température)

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \tilde{u} C_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \bar{\rho} \tilde{v} C_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} C_p \left[\left(\frac{\mu_l + \mu_t}{Pr} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} C_p \left[\left(\frac{\mu_l + \mu_t}{Pr} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right] \\ - \sum_{k=1}^n \bar{\rho} h_k^0 U_1 \tilde{\Sigma} \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

où, $\sum_{k=1}^n h_k^0$ est l'énergie produite par la réaction Q telle que :

$$Q = h_f^0 + s.h_o^0 - (1+s)h_p^0$$

f, o et p désignent le fuel, l'oxydant et le produit.

Les équations du modèle de turbulence $k - \varepsilon$ deviennent :

Viscosité turbulente

$$\mu_t = C_\mu \bar{\rho} \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad (\text{II.25})$$

Equation de transport de l'énergie cinétique turbulente k

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \tilde{u} \tilde{k}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \tilde{v} \tilde{k}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\frac{\mu_t}{\sigma_{k,x}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{k,y}} \right] \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left[\frac{\mu_t}{\sigma_{k,x}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{k,y}} \right] \frac{\partial \tilde{k}}{\partial y} \right) \\ &+ \mu_t \left[2 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right)^2 \right] - \bar{\rho} \tilde{\varepsilon} \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

Equation adimensionnée de ε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \tilde{u} \tilde{\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \tilde{v} \tilde{\varepsilon}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon,x}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon,y}} \right] \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left[\frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon,x}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon,y}} \right] \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y} \right) \\ &+ C_{\varepsilon 1} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{k}} \mu_t \left[2 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right)^2 \right] - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\tilde{k}} \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

Bilan de surface de flamme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \tilde{u} \tilde{\Sigma}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \tilde{v} \tilde{\Sigma}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\Sigma} \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\Sigma} \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial y} \right) \\ &+ \left(\alpha \bar{\rho} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{k}} \right) \tilde{\Sigma} - \beta \bar{\rho} \frac{U_1}{\tilde{Y}_F} \tilde{\Sigma}^2 \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

Chapitre III

Méthode numérique

Chapitre III

Méthode numérique

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes attachés à modéliser la combustion turbulente. Cette modélisation se présente principalement sous forme d'équations de transport pour diverses variables. Mais là où s'arrête la tâche du modélisateur commence en général celle du numéricien. En effet - sauf dans des configurations extrêmement simples - il est impossible de résoudre analytiquement ce système d'équations différentielles non linéaires. C'est pourquoi, il faut franchir une étape supplémentaire, qui consiste à résoudre numériquement le problème posé, après l'avoir mis sous une forme compréhensible par un ordinateur. Le but de ce chapitre est d'abord d'exposer la méthode utilisée, puis d'étudier son influence sur la solution obtenue.

III.1 Présentation des équations

D'après les équations différentielles précédentes II.20 à II.28, on remarque que toutes les variables dépendantes obéissent à un principe de conservation généralisé. Si la variable dépendante est notée par ϕ , l'équation différentielle générale est :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V} \phi) = \operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad} \phi) + S_{\phi} \quad (\text{III.1})$$

où Γ est le coefficient de diffusion, et S_{ϕ} est le terme source.

Les trois termes dans l'équation différentielle générale sont le terme de convection, le terme de diffusion et le terme source.

La variable dépendante ϕ peut prendre une variété de quantités différentes, comme la fraction massique des espèces chimiques, l'enthalpie ou la température, une composante de vitesse, l'énergie cinétique turbulente . . . etc.

Pour résoudre un tel système d'équations en régime permanent, on opte pour la méthode des volumes finis.

La méthode des volumes finis doit être considérée comme une approche hybride liant les deux méthodes classiques des différences finies et les éléments finis. C'est

une technique intégrale appliquée aux formes conservatives des équations aux dérivées partielles [Rubi 97]. Cette intégration sur un volume de contrôle fixé dans l'espace, représente l'étape clé de cette méthode. Dans ce cas, on est concerné par le flux de masse, de quantité de mouvement et d'énergie de et vers le volume de contrôle [Lill 79].

L'avantage de la forme conservative des équations gouvernantes du point de vue numérique est qu'elle convient mieux pour la programmation, du fait que les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie sont toutes exprimées par la même équation générique. Ceci permet de simplifier et organiser une logique dans un programme de calcul donné [Corre 87], [Lill 79].

Ces avantages énumérés ont fait que la méthode des volumes finis représente actuellement la base de plusieurs codes commerciaux performants dans le domaine de la mécanique des fluides et du transfert de chaleur, à savoir PHEONICS, FLUENT, FLOW3D et STAR-CD [Vers 95].

Pour bien comprendre cette méthode, on considère le cas le plus simple. Soit l'écoulement permanent unidimensionnel dans lequel seuls les termes de convection et de diffusion sont présents. L'équation du mouvement est :

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (\text{III.2})$$

De plus, l'écoulement vérifie l'équation de continuité qui devient :

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \quad \text{ou} \quad \rho u = \text{constante} \quad (\text{III.3})$$

Pour obtenir l'équation discrétisée, on utilise le système à 03 nœuds de la figure III.1. On suppose que e est localisé au milieu entre P et E et w au milieu entre W et P .

L'intégration des équations autour du volume de contrôle de la figure III.1 donne :

$$(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_w \quad (\text{III.4})$$

$$(\rho u)_e - (\rho u)_w = 0 \quad (\text{III.5})$$

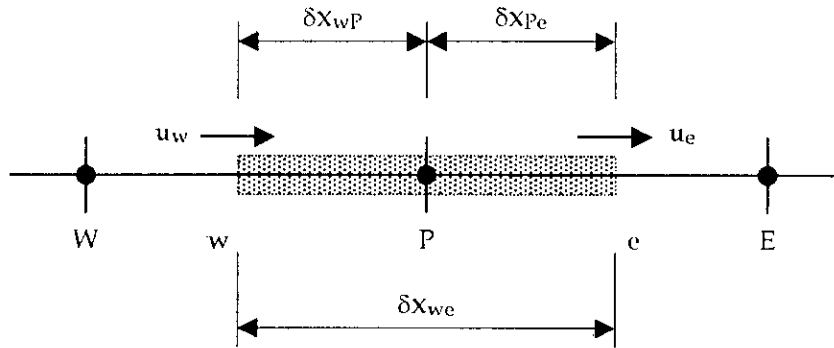


Figure III.1 : Volume de contrôle autour du nœud P

Pour arranger l'équation d'une façon compacte, on définit deux nouveaux symboles F et D.

$$F = \rho u \quad \text{et} \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x} \tag{III.6}$$

Les deux ont les mêmes dimensions ; F indique l'intensité de la convection (ou l'écoulement), D est la conductance de diffusion.

Avec ces nouveaux symboles, les équations deviennent :

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \tag{III.7}$$

$$F_e - F_w = 0 \tag{III.8}$$

Pour résoudre l'équation, on aura besoin de calculer la propriété de transport ϕ aux faces e et w.

Plusieurs méthodes ou schémas sont possibles pour déterminer les valeurs de la variable ϕ aux centres des mailles. Pour plus de clarté, nous avons limité la présentation au cas unidimensionnel.

III.1.1 Schéma des différences centrées

L'approximation des différences centrées a été utilisée pour représenter les termes de diffusion apparaissant à droite de l'équation. Pour les termes de convection à gauche de l'équation, on choisit une interpolation linéaire. Le résultat est :

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) \quad \text{et} \quad \phi_w = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \tag{III.9}$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ vient du fait qu'on a supposé que les interfaces dans la figure III.1 soient au milieu.

En remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$\frac{F_e}{2}(\phi_P + \phi_E) - \frac{F_w}{2}(\phi_W + \phi_P) = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \quad (\text{III.10})$$

En réarrangeant cette équation, on aboutit à l'équation discrétisée suivante :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (\text{III.11a})$$

où
$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \quad (\text{III.11b})$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \quad (\text{III.11c})$$

$$a_P = D_e + \frac{F_e}{2} + D_w - \frac{F_w}{2} = a_E + a_W + (F_e - F_w) \quad (\text{III.11d})$$

III.1.2 Le schéma upwind ou schéma " décentré "

L'un des inconvénients majeurs du schéma de différences centrées est son incapacité à identifier la direction de l'écoulement. Un remède très connu pour contourner ces difficultés est le schéma upwind, connu aussi comme Upwind difference scheme, the upstream-difference scheme, the donor-cell method . . . etc.

Il a été établi au début par Courant, Isaacson et Rees (1952) et réinventé par Gentry, Martin et Daly (1966), Barakat and Clark (1966) et Runchal et Wolfshtein (1969).

Le schéma upwind reconnaît que le point faible dans la formulation préliminaire est l'hypothèse que la propriété convective ϕ_e à l'interface est la moyenne de ϕ_E et ϕ_P et il propose une meilleure prescription. La formulation du terme diffusion reste inchangée, mais le terme de convection est calculé à partir de l'hypothèse suivante :

La valeur de ϕ à une interface est égale à la valeur de ϕ au nœud amont - upwind side - c'est à dire le coté d'où vient l'écoulement.

Par conséquent :

$$\phi_e = \phi_P \quad \text{si } F_e > 0$$

$$\phi_e = \phi_E \quad \text{si } F_e < 0$$

La valeur de ϕ_w peut être définie de la même manière.

Ces conditions peuvent être plus compactes, si on définit un nouvel opérateur $\|A, B\|$ pour noter le plus grand de A et B. [Cet opérateur est équivalent à $\text{AMAX1}(A, B)$ dans un langage Fortran].

Donc le schéma upwind implique : $F_e \phi_e = \phi_P \|F_e, 0\| - \phi_E \| -F_e, 0\|$ (III.12)

En le remplaçant dans l'équation discrétisée, on obtient :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (\text{III.13a})$$

où

$$a_E = D_e + \| -F_e, 0\| \quad (\text{III.13b})$$

$$a_W = D_w + \| F_w, 0\| \quad (\text{III.13c})$$

$$a_P = D_e + \| F_e, 0\| + D_w + \| -F_w, 0\| \quad (\text{III.13d})$$

Ce schéma est particulièrement adapté aux écoulements à grand nombre de Reynolds comme les écoulements supersoniques. Par contre, lorsque le champ de vitesse est faible (zone de recirculation par exemple), la qualité de ce schéma peut être remise en cause.

Grâce à sa simplicité, le schéma upwind a été très utilisé dans les applications CFD. Néanmoins, il présente des résultats erronés lorsque l'écoulement n'est pas aligné avec les lignes de nœuds (fausse diffusion) [Rubi 97], [Vers 95], [Pata 80].

III.1.3 Le Schéma Hybride

Le schéma hybride de Spalding (1972) est basé sur une combinaison des schémas centré et "upwind". Il cherche à corriger les défauts du schéma amont pour les écoulements où les flux diffusifs et convectifs sont du même ordre de grandeur. Le rapport de ces deux flux est caractérisé par le nombre de Peclet de maille évalué à la face du volume de contrôle.

Par exemple, pour la face ouest $Pe_w = \frac{F_w}{D_w} = \frac{(\rho u)_w}{\Gamma_w / \delta x_{WP}}$ (III.14)

Suivant la valeur de ce nombre, on va choisir le schéma centré ou le schéma "upwind".

Le schéma hybride est identique au schéma de différences centrées pour l'intervalle du nombre de Peclet $-2 \leq Pe \leq 2$, et à l'extérieur de cet intervalle il est réduit au schéma décentré (upwind) pour la convection et dans lequel la diffusion D_e a été prise égale à zéro.

L'équation discrétisée de convection - diffusion pour le schéma hybride peut être écrite maintenant comme :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (\text{III.15a})$$

$$\text{où} \quad a_E = \left\| -F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right\| \quad (\text{III.15b})$$

$$a_W = \left\| F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right\| \quad (\text{III.15c})$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) \quad (\text{III.15d})$$

Du fait qu'il exploite les avantages des deux schémas précédents, le schéma hybride est très stable et est très utilisé dans plusieurs procédures de CFD. Son seul inconvénient est que la précision en fonction de l'erreur de troncature des séries de Taylor est seulement du premier ordre.

III.1.4 Le schéma " Power - Law " (Loi de Puissance ou polynomiale)

Le schéma loi de puissance, décrit par Patankar (1979) est une approximation plus précise que le schéma hybride pour la solution exacte et donne des résultats meilleurs [Vers 95]. Dans ce schéma, la diffusion est supposée nulle quand le Peclet dépasse 10. Si $0 < Pe < 10$, le flux est évalué en utilisant une expression polynomiale ; par exemple, le flux net par unité de surface à la face ouest du volume de contrôle, est évaluée en utilisant :

$$q_w = F_w \left[\phi_w - \beta_w (\phi_P - \phi_w) \right] \quad \text{pour } 0 < Pe < 10$$

$$\text{où} \quad \beta_w = (1 - 0.1Pe_w)^5 / Pe_w$$

$$\text{et} \quad q_w = F_w \phi_w \quad \text{pour } Pe > 10$$

Les coefficients de l'équation discrétisée pour le cas unidimensionnel, sont :

$$a_E = D_e \left\| 0, \left(1 - \frac{0.1 |F_e|}{D_e} \right)^5 \right\| + \| 0, -F_e \| \quad (\text{III.16a})$$

$$a_W = D_w \left\| 0, \left(1 - \frac{0.1 |F_w|}{D_w} \right)^5 \right\| + \| 0, F_w \| \quad (\text{III.16b})$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) \quad (\text{III.16c})$$

Les propriétés du schéma loi de puissance sont très proches de celles du schéma hybride, pour cette raison il est recommandé pour les situations de convection - diffusion. En plus, il est très précis pour les problèmes unidimensionnels.

La précision des schémas upwind et hybride est seulement de premier ordre en fonction de l'erreur de troncature dans les séries de Taylor. De ce fait, ils sont sujets parfois aux problèmes liés aux erreurs de diffusion numérique. De telles erreurs peuvent être minimisées en utilisant une discrétisation d'ordre supérieur. Les schémas d'ordre supérieur utilisent plus de points voisins. Les différences centrées sont instables malgré qu'elles soient d'une précision de second ordre. Les formulations qui ne prennent pas en compte la direction de l'écoulement sont instables, par conséquent, on aura besoin de schémas d'ordre supérieur plus précis qui préservent la précision et la sensibilité à la direction de l'écoulement.

Comme exemple de ces schémas, QUICK (quadratic upstream interpolation for convective kinetics) de Leonard (1979) est le plus utilisé [Vers 95].

Dans ce schéma, la valeur de ϕ sur une face du volume de contrôle est obtenue à partir d'une fonction quadratique passant par les deux nœuds de part et d'autre de la face et un nœud sur le côté amont, suivant le sens de l'écoulement.

L'équation discrétisée pour un nœud interne P dans le cas d'un problème de convection-diffusion unidimensionnel est donnée par la figure III.2 [Vers 95] :

$$a_P \phi_P = a_{WP} \phi_W + a_E \phi_E + a_{WW} \phi_{WW} + a_{EE} \phi_{EE} \quad (\text{III.17a})$$

où

$$a_P = a_W + a_E + a_{WW} + a_{EE} + (F_e - F_w) \quad (\text{III.17b})$$

Les coefficients des voisins pour le schéma QUICK standard sont :

$$a_W = D_w + \frac{6}{8} \alpha_w F_w + \frac{1}{8} \alpha_e F_e + \frac{3}{8} (1 - \alpha_w) F_w \quad (\text{III.17c})$$

$$a_{wW} = -\frac{1}{8}\alpha_w F_w \quad (\text{III.17d})$$

$$a_E = D_e - \frac{3}{8}\alpha_e F_e - \frac{6}{8}(1-\alpha_e)F_e - \frac{1}{8}(1-\alpha_w)F_w \quad (\text{III.17e})$$

$$a_{EE} = \frac{1}{8}(1-\alpha_e)F_e \quad (\text{III.17f})$$

avec : $\alpha_w = 1$ pour $F_w > 0$ et $\alpha_e = 1$ pour $F_e > 0$

$\alpha_w = 0$ pour $F_w < 0$ et $\alpha_e = 0$ pour $F_e < 0$

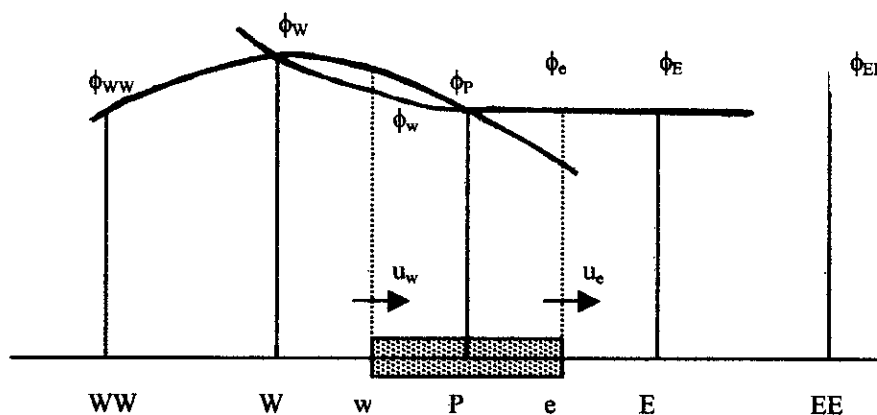


Figure III.2: Profils quadratiques utilisés dans le Schéma QUICK.

III.2 Méthode de résolution

La solution du système d'équations de bilan présente les problèmes suivants :

- Les termes convectifs de l'équation de quantité de mouvement contiennent des quantités non linéaires, par exemple, le premier terme est la dérivée par rapport à x de ρu^2 .
- Les trois équations sont couplées car chaque composante de la vitesse apparaît dans chaque équation de quantité de mouvement et dans l'équation de continuité. En se donnant un champ de vitesse hypothétique, on peut résoudre itérativement les équations de quantité de mouvement pour arriver à une solution convergente pour les composantes de vitesse. La difficulté réelle dans cette résolution est le champ de pression inconnu. Le gradient de pression fait partie du terme source de l'équation de mouvement, mais, il n'y a pas une équation de transport évidente pour la pression.

Le champ de pression est indirectement spécifié via l'équation de continuité, donc le couplage entre la pression et la vitesse va introduire une contrainte dans la solution du champ d'écoulement : si le champ de pression correct est appliqué aux équations de quantité de mouvement, le champ de vitesse résultant doit satisfaire la continuité.

Les deux problèmes associés avec les non - linéarités dans le système d'équations et le couplage pression - vitesse peuvent être résolus en adoptant une stratégie de solution itérative comme l'algorithme SIMPLE de Patankar et Spalding (1972).

Cet algorithme est basé sur le principe du maillage décalé (Annexe 3). Partant de ce principe, on va écrire les équations discrétisées de quantité de mouvement pour les différentes composantes de vitesse.

Un volume de contrôle décalé pour l'équation de quantité de mouvement/ x est représenté dans la figure III.3 [Pata 80].

On s'intéresse à la localisation de u seulement, les faces de ce volume de contrôle s'étalent entre le point e et les localisations correspondantes pour les voisins de u . La configuration donnée par la figure permet de donner un avantage principal d'un maillage décalé : la différence $p_P - p_E$ peut être utilisée pour calculer la force de pression agissant sur le volume de contrôle pour la vitesse u .

L'équation discrétisée résultante est :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_P - p_E) A_e + b_e \quad (\text{III.18})$$

Ici, le nombre des termes du voisinage doivent dépendre des dimensions du problème. Pour le cas bidimensionnel de la figure III.3, quatre voisins de u sont représentés à l'extérieur du volume de contrôle.

Les coefficients voisins a_{nb} représentent l'influence de la convection - diffusion combinées sur les faces du volume de contrôle. Le terme b_e est défini comme étant le terme source de la quantité de mouvement $b_e = S \Delta V_u$.

ΔV_u est le volume de la cellule u , le terme $(p_P - p_E) A_e$ est la force de pression agissant sur le volume de contrôle u et A_e est la surface sur laquelle la différence de pression agit.

Les équations de quantités de mouvement pour les autres directions sont portées de la même manière. La figure III.4 montre le volume de contrôle pour l'équation de quantité de mouvement/y ; il est décalé dans la direction y. l'équation discrétisée pour v_n sera :

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_p - p_N) A_n + b_n \tag{III.19}$$

Où $(p_p - p_N) A_n$ est la force de pression agissant sur le volume de contrôle v.

Les équations de quantité de mouvement peuvent être résolues seulement si le champ de pression est donné ou s'il est de manière ou d'une autre estimé. A moins que le champ de pression correct soit employé, le champ de vitesse résultant ne doit pas satisfaire l'équation de continuité. Un tel champ de vitesse imparfait basé sur un champ de pression p^* hypothétique doit être noté par u^*, v^* . Ce champ doit résulter de la solution des équations discrétisées suivantes :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_p - p_E) A_e + b_e \tag{III.20}$$

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_p - p_N) A_n + b_n \tag{III.21}$$

La procédure qui nous permet d'estimer et de corriger la pression pour aboutir au champ de pression correct est l'algorithme SIMPLE et ses dérivées.

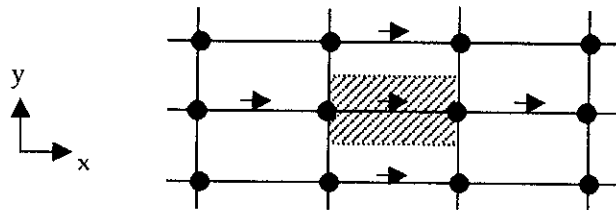


Figure III.3 : Volume de contrôle pour u.

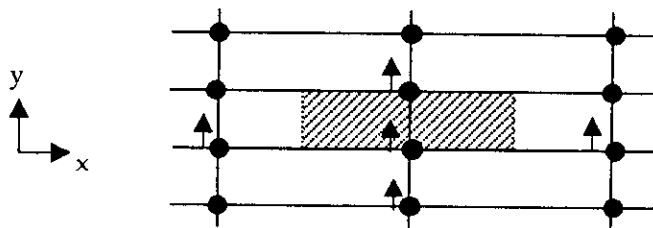


Figure III.4 : Volume de contrôle pour v.

III.3 Algorithme S.I.M.P.L.E

La procédure SIMPLE (Semi - Implicit Method for Pressure - Linked Equations) a été décrite par Patankar et Spalding (1972), Caretto, Gosman, Patankar, et Spalding (1972), et Patankar (1975). C'est une procédure prédiction - correction pour le calcul de la pression sur un arrangement de maillage décalé.

Dans cet algorithme, on commence par se donner un champ de pression hypothétique p^* avec lequel les équations de quantité de mouvement discrétisées III.20 et III.21 seront résolues pour obtenir u^* , v^* .

Maintenant, on définit la correction de pression p' comme la différence entre le champ de pression p correct et le champ hypothétique p^* , telle que

$$p = p^* + p' \quad (\text{III.22})$$

de même, on définit les corrections de vitesse u' et v'

$$u = u^* + u' \quad v = v^* + v' \quad (\text{III.23 a et b})$$

La soustraction de l'équation III.20 de III.18 donne :

$$a_e u'_e = \sum a_{nb} u'_{nb} + (p'_P - p'_E) A_e \quad (\text{III.24})$$

A ce point, une approximation est introduite : on enlève le terme $\sum a_{nb} u'_{nb}$ pour simplifier l'équation III.24. On obtient :

$$u'_e = d_e (p'_P - p'_E) \quad (\text{III.25})$$

où

$$d_e \equiv \frac{A_e}{a_e} \quad (\text{III.26})$$

L'équation III.25 est appelée formule de correction de vitesse, et on peut l'écrire comme :

$$u_e = u_e^* + d_e (p'_P - p'_E) \quad (\text{III.27})$$

De même, pour l'autre composante de vitesse, on a :

$$v_n = v_n^* + d_n (p'_P - p'_N) \quad (\text{III.28})$$

En remplaçant ce champ de vitesse dans la forme discrétisée de l'équation de continuité et après quelque réarrangements, on obtient l'équation de correction de pression suivante :

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b \quad (\text{III.29a})$$

$$\text{Où} \quad a_E = \rho_e d_e \Delta y \Delta z \quad (\text{III.29b})$$

$$a_W = \rho_w d_w \Delta y \Delta z \quad (\text{III.29c})$$

$$a_N = \rho_n d_n \Delta z \Delta x \quad (\text{III.29d})$$

$$a_S = \rho_s d_s \Delta z \Delta x \quad (\text{III.29e})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{III.29f})$$

$$b = [(\rho u^*)_w - (\rho u^*)_e] \Delta y \Delta z + [(\rho v^*)_s - (\rho v^*)_n] \Delta x \Delta z \quad (\text{III.29g})$$

Le terme source b sert comme un indicateur de la convergence de la solution lorsqu'il devient suffisamment petit.

Après l'obtention de p' , on détermine la pression p et les vitesses u , v à partir de III.22, III.27 et III.28. La prochaine étape concerne la résolution des autres équations de transport discrétisées (telles que la température, la concentration, et les quantités de turbulence). Ensuite, on considère p comme une nouvelle p^* et on fait des itérations jusqu'à convergence.

La figure III.5 illustre bien ces différentes étapes.

L'algorithme SIMPLE a été très utilisé et a beaucoup servi. Cependant, dans le but d'accélérer son taux de convergence, une version révisée a été réalisée. Elle est appelée SIMPLER " S.I.M.P.L.E.Revised " [Pata 80].

III.4 Algorithme S.I.M.P.L.E .R

L'approximation introduite dans l'obtention de l'équation de correction de pression p' (III.29a), c'est à dire l'omission du terme $\sum a_{nb} u'_{nb}$, conduit à des corrections de pression exagérées, et par conséquent la sous relaxation devient essentielle. Certains auteurs [Pata 80] recommandent de sous relaxer les équations de quantité de mouvement en employant un coefficient α de l'ordre de 0.5 et de remplacer l'équation (III.22) par $p = p' + \alpha_p p'$ avec $\alpha_p = 0.8$

Si on emploie l'équation de correction de pression seulement dans le but de corriger les vitesses et trouver d'autres façons d'obtenir un champ de pression amélioré, on construit un algorithme plus efficace. C'est le but essentiel de S.I.M.P.L.E.R.

Dans cet algorithme, l'équation discrétisée de continuité est utilisée pour obtenir une équation discrétisée de pression au lieu d'une équation de correction de pression comme dans le cas de SIMPLE. Par conséquent, le champ de pression intermédiaire est obtenu directement sans aucune correction. Les vitesses sont toujours obtenues à travers les corrections (III.27) et (III.28) de SIMPLE.

Les équations discrétisées de quantité de mouvement (III.18) et (III.19) sont réarrangées sous la forme :

$$u_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_e}{a_e} + \frac{A_e}{a_e} (p_P - p_E) \quad (III.30)$$

$$v_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b_n}{a_n} + \frac{A_n}{a_n} (p_P - p_N) \quad (III.31)$$

Dans cet algorithme, on définit les pseudo - vitesses comme suit :

$$\hat{u}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_e}{a_e} \quad (III.32)$$

$$\hat{v}_e = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b_n}{a_n} \quad (III.33)$$

Les équations (III.30) et (III.31) deviennent

$$u_e = \hat{u}_e + d_e (p_P - p_E) \quad (III.34)$$

$$v_n = \hat{v}_n + d_n (p_P - p_N) \quad (III.35)$$

En remplaçant ces valeurs dans l'équation de continuité discrétisée, on obtient l'équation de pression discrétisée suivante :

$$a_P p_P = a_E p_E + a_W p_W + a_N p_N + a_S p_S + b \quad (III.36)$$

Où les a_i sont les mêmes coefficients donnés par les équations (III.29), tandis que b est donné par l'expression suivante, où on a remplacé u^* , v^* dans (III.29g) par \hat{u} , \hat{v} .

$$b = [(\rho \hat{u})_w - (\rho \hat{u})_e] \Delta y \Delta z + [(\rho \hat{v})_s - (\rho \hat{v})_n] \Delta x \Delta z \quad (III.37)$$

En conclusion, l'algorithme S.I.M.P.L.E.R consiste en la résolution de l'équation de pression pour obtenir le champ de pression et la résolution de l'équation de correction de pression seulement pour corriger les vitesses. La séquence des opérations est représentée dans la figure III.6.

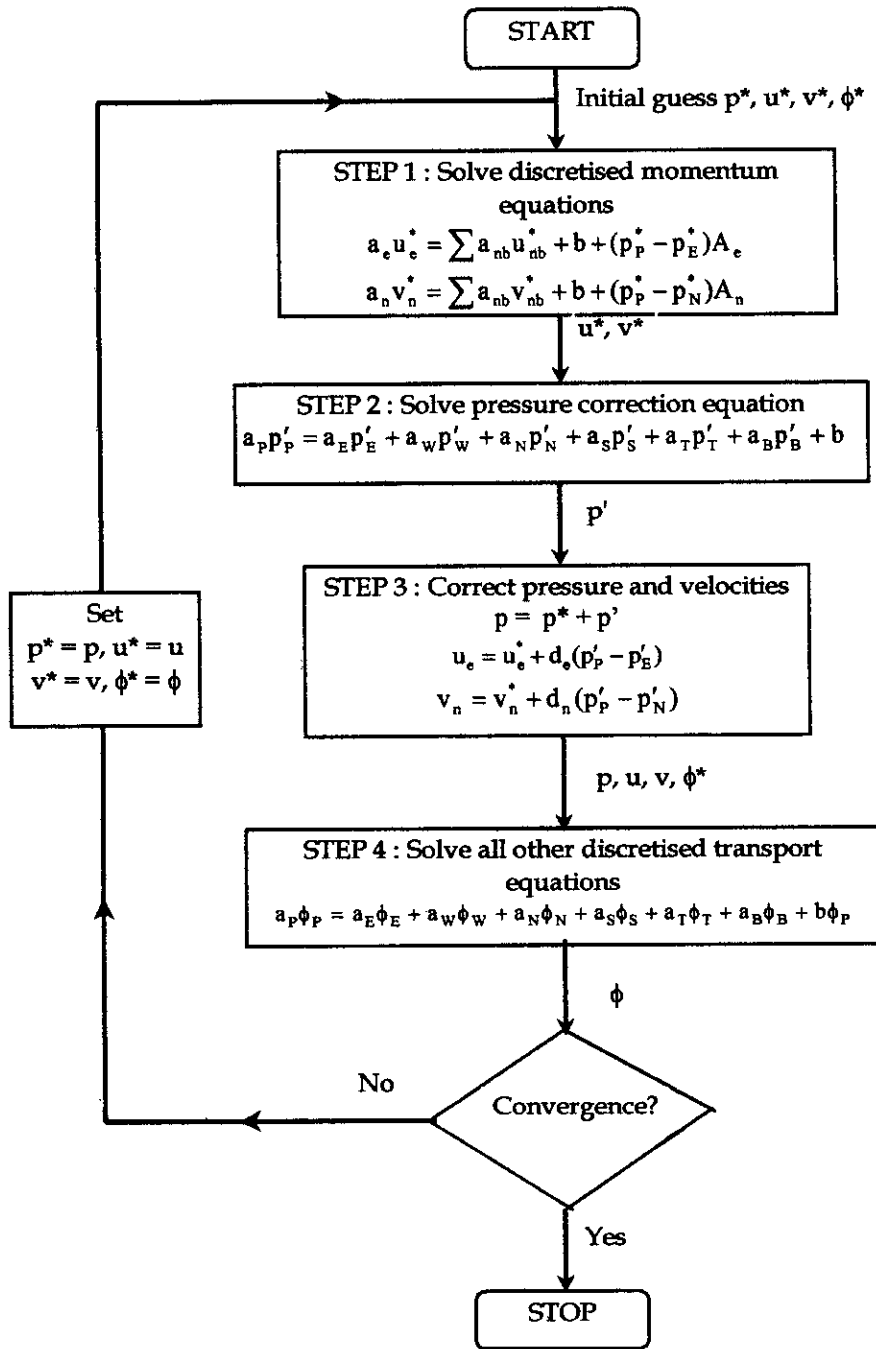


Figure III.5 : L'algorithme SIMPLE

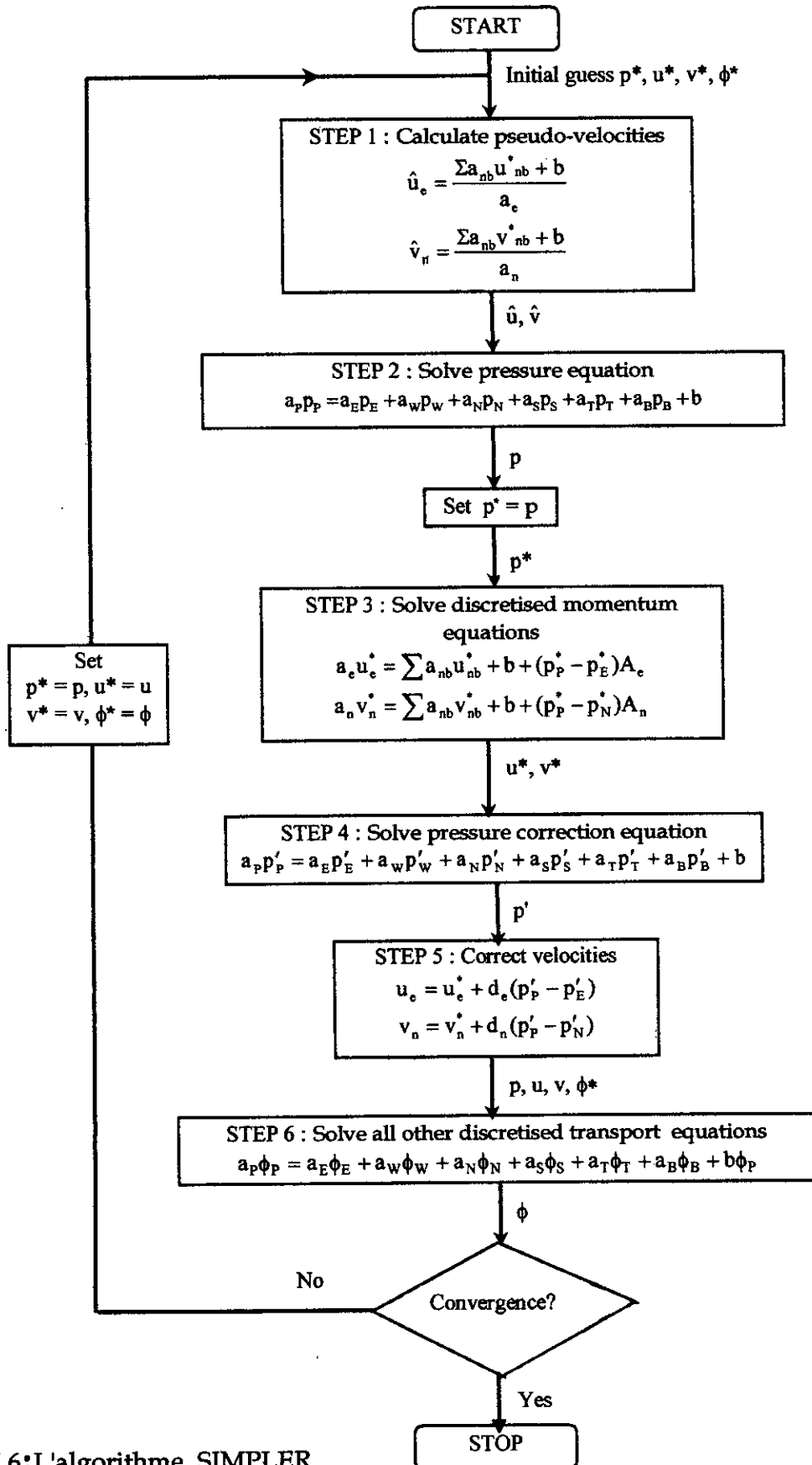


Figure III.6:L'algorithme SIMPLER

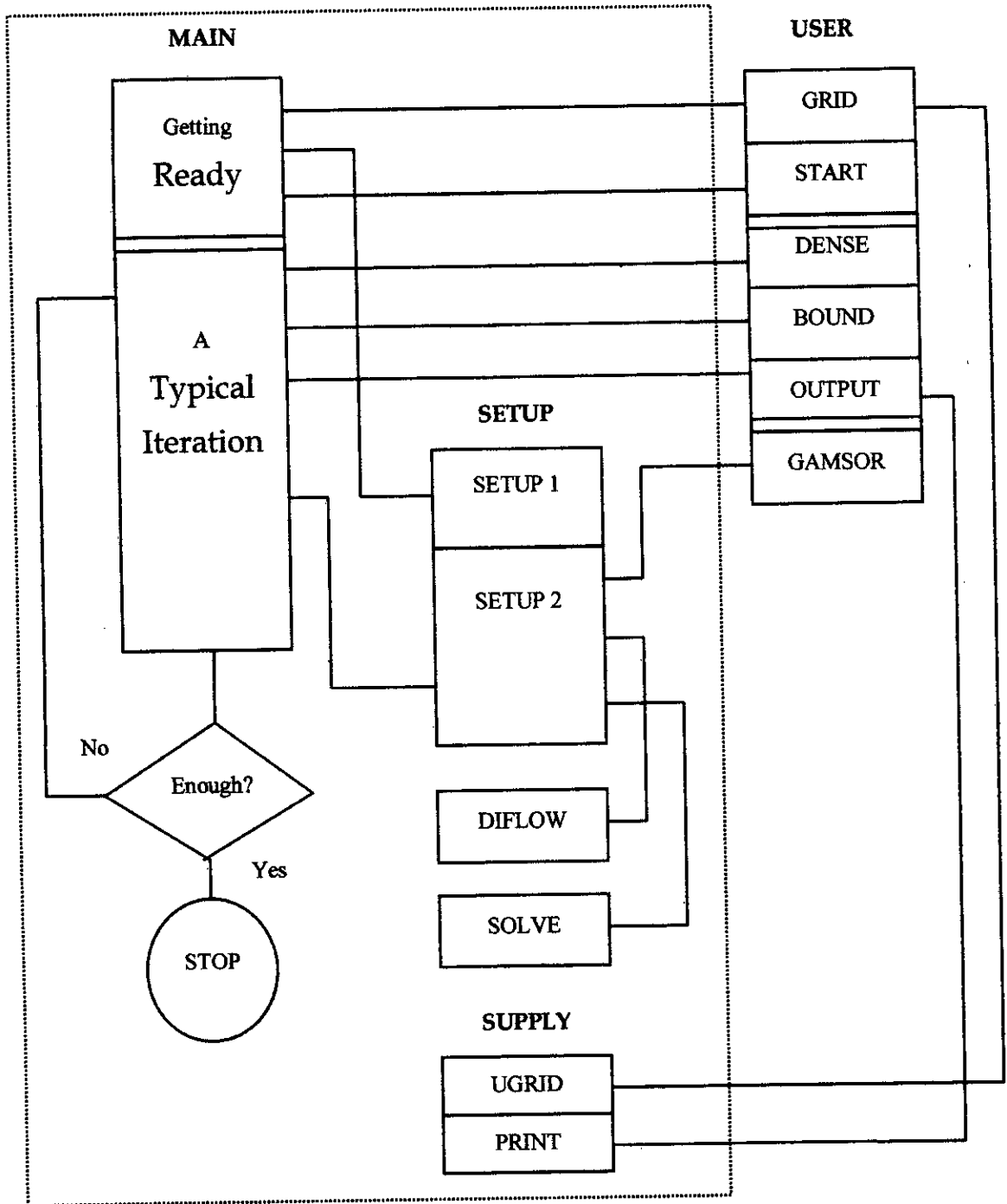


Figure III.7 : Diagramme du programme de calcul

Chapitre IV

Résultats numériques

Chapitre IV

Résultats numériques

IV.1 Introduction

Le but de ce travail est de développer une modélisation de la combustion turbulente permettant de simuler numériquement l'écoulement réactif dans une chambre de combustion d'un statoréacteur.

Ce chapitre est consacré à la présentation des résultats de calcul pour la turbulence et pour la combustion. Le modèle de turbulence utilisé est le modèle $k - \varepsilon$ auquel a été rajouté la loi de paroi décrite au chapitre I. Le modèle de combustion est bien entendu le modèle de flamme cohérente développé au chapitre II. Le programme de calcul réalisé est basé sur l'algorithme S.I.M.P.L.E.R dont l'architecture générale est donnée par la figure III.7.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la définition des conditions en entrée et aux limites et nous exposerons le déroulement d'une simulation.

Par la suite, nous présenterons les valeurs des différentes grandeurs utilisées dans les équations et dans la simulation.

Enfin, les résultats obtenus seront traités et mis en valeur.

IV.2 Les conditions aux limites

Un système d'équations aux dérivées partielles est certes constitué des équations, mais il faut aussi spécifier les conditions aux limites. La plupart de ces conditions aux limites ne posent pas de problèmes particuliers ; ainsi, pour les écoulements subsoniques, on opère classiquement de la façon suivante (figure IV.1) :

- On impose généralement en entrée la vitesse, les fractions massiques, l'enthalpie, l'énergie cinétique turbulente et la dissipation turbulente.
- On impose la pression à la sortie.

Toutes ces variables sont déterminées par les conditions de fonctionnement de la chambre étudiée, sauf l'énergie cinétique et la dissipation en entrée, sur lesquelles on ne dispose généralement pas d'informations. Or, les conditions turbulentes en entrée ont une influence sur l'écoulement aval, c'est pourquoi il faut s'attacher à donner à k et ε des valeurs 'plausibles' à l'entrée du domaine de calcul [Mais 91].

Une méthode couramment pratiquée consiste à calculer l'énergie cinétique turbulente comme valant une part θ de l'énergie cinétique de l'écoulement moyen (Brown et Rogers 1986) :

$$\tilde{k} = \theta \frac{\tilde{u}^2}{2}$$

où θ est une constante empirique variant généralement entre 0.01 et 0.1

Quant à l'estimation de la dissipation turbulente, elle est obtenue via l'échelle intégrale de turbulence l_t grâce à :

$$\tilde{\varepsilon} = 0.42 \frac{\tilde{k}^{3/2}}{l_t}$$

où l_t est estimée en fonction d'une dimension caractéristique de la géométrie de l'écoulement comme le diamètre équivalent D_{eq} de la géométrie :

$$l_t = \Theta \cdot D_{eq}$$

Sloan, Smith et Smoot 1986 ont recensé les expressions utilisées par différents auteurs pour différentes configurations : il en ressort que Θ varie dans une très large fourchette de 0.01 à 0.6

Carrelho en 1983 donne le profil de ε à l'entrée comme : $\varepsilon = \frac{(C_\mu)^{3/4} k^{3/2}}{0.03 L_t}$ où L_t diamètre de l'entrée [Boud 92].

En conclusion, deux sortes de conditions aux limites sont utilisées :

- Les conditions de Dirichlet qui consistent à fixer la valeur d'une variable en un point de la frontière.
- Les conditions de Neumann qui consistent à fixer la valeur de la dérivée de la variable.

Les cas de figure rencontrés sont :

Frontière d'entrée : $v = 0$, u , T , Y_k , k et ε {condition de Dirichlet avec les profils issus de mesures expérimentales ou par calcul préliminaire}.

Axe de symétrie : $v = 0$ {Dirichlet} pour les autres (ρ , u , T , k , ε , p) au voisinage de l'axe de symétrie chaque grandeur physique respecte une condition miroir du type :

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta y} = 0 \text{ [Neumann].}$$

Frontière solide (paroi) : $u = v = 0$, k et ε {Dirichlet} avec lois de paroi, pour les autres, on applique Neumann : $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ [flux de chaleur nul], $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ [gradient de pression nul] et $\frac{\partial Y_k}{\partial y} = 0$. En général, on prend la température constante sur la surface de la paroi.

Frontière libre (section de sortie) : $p = \text{constante}$ {Dirichlet}, pour les autres, on extrapole suivant x , les profils d'espèces chimiques, de masse volumique et de grandeurs turbulentes par une relation $\frac{\Delta\phi}{\Delta x} = 0$. Ex : $\frac{\partial Y_k}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial k}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \Sigma}{\partial x} = 0 \dots$

La vitesse avale est calculée suivant l'égalité des débits.

Déroulement d'une simulation :

Classiquement, les simulations des écoulements en combustion à partir du repos se déroulent toutes selon le même principe :

- Dans un premier temps des champs uniformes sont initialisés dans le domaine de calcul.
- Montée en régime pour atteindre les valeurs nominales des conditions de fonctionnement.
- Simulation de l'écoulement stationnaire non réactif (à froid).
- Une fois le calcul à froid pratiquement convergé, la combustion est initiée par la séquence d'allumage qui consiste à imposer une certaine densité de surface de flamme dans quelques mailles choisies par l'utilisateur (figure IV.4).
- Propagation des phénomènes de combustion jusqu'à obtention d'un écoulement réactif stationnaire.

IV.2.1 Le domaine de calcul et les conditions aux limites

Nous avons choisi comme dimensions de la chambre de combustion, les valeurs suivantes [Mont 94] :

Dimensions du domaine de calcul (figure IV.2)

Longueur de la chambre $L_1 = 0.30$ m

Largeur de la chambre $M_1 = 0.055$ m

Diamètre de l'entrée $L_t = \frac{M_1}{6} = \frac{0.055}{6} = 0.00916$ m

Valeurs à l'entrée

Richesse $\phi = 0.7$

Vitesse d'injection = 24 m/s

Température des gaz frais $T_{GF} = 298$ K

Energie cinétique turbulente $k = 3$ m²s⁻²

Dissipation turbulente $\varepsilon = 850$ m²s⁻³

Valeurs à la sortie

Pression ambiante $p = 1$ atm

La vitesse $V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2} = V_1 \left(\frac{L_t}{M_1} \right)^2$

Maillage

Nous avons divisé le domaine de calcul en deux zones : zone A et zone B. La zone B est l'épaisseur correspondante au calcul du S.I.M.P.L.E.R, tandis que A est l'épaisseur de la couche limite utilisée pour l'application de la loi de paroi.

Le maillage utilisé pour les deux zones est cartésien et non régulier (figures IV.3, IV.4 et IV.5). Il comprend pour la zone A, 30 mailles suivant l'axe des x et 100 mailles suivant l'axe des y et pour la zone B, 30 mailles suivant l'axe des x et 30 mailles suivant l'axe des y.

Valeurs des différentes grandeurs

Valeurs des différentes grandeurs de l'équation des espèces chimiques

Nombres de Schmidt turbulents de toutes les espèces constants et égaux : $Sc_{k,t} = 1$

Vitesse de disparition de toutes les espèces constante $V_{DK} = 2.U_1 = 1$ m/s [Darab 84].

Sauf pour le propane, où on utilise $V_{DK} = 0.25$ m/s dans le but d'avoir une diminution progressive de la courbe de C_3H_8 et pour l'oxygène $V_{DK} = 3$ m/s dans le but, dans ce cas, d'avoir une diminution importante de la courbe de O_2 .

Valeurs des différentes grandeurs de l'équation de l'énergie

Pour les vitesses de disparition des espèces, on utilise les mêmes valeurs données précédemment.

Le nombre de Prandtl turbulent $Pr_t = 0.8$ [Mais 91].

Calcul de la chaleur spécifique à pression constante en fonction de la température

L'expression empirique de la capacité thermique molaire à pression constante en fonction de la température pour le Propane est [Tech 90a] :

$$C_p = A_0 + A_1 T + A_2 T^2 + A_3 T^3$$

A_0	A_1	A_2	A_3
-4.224	0.3063	$-1.586 \cdot 10^{-4}$	$3.215 \cdot 10^{-8}$

Valeurs des différentes grandeurs des équations de k-ε [Laun 74]

Constantes du modèle k - ε relatives à la composante laminaire $\sigma_{k,l} = 1$, $\sigma_{\epsilon,l} = 1$

Constantes du modèle k - ε relatives à la composante turbulente $\sigma_{k,t} = 1$, $\sigma_{\epsilon,t} = 1.3$

Constantes du modèle k - ε $C_{\epsilon 1} = 1.44$, $C_{\epsilon 2} = 1.92$

Constante de la viscosité turbulente $C_\mu = 0.09$

Valeurs des différentes grandeurs de l'équation de la densité de surface de flamme

Nombre de Schmidt pour la densité massique de surface de flamme $\sigma_\Sigma = 1$

Vitesse de flamme laminaire $U_l = 0.5$ m/s [Darab 84].

Constantes du terme source $\alpha = 1.5$; $\alpha' = 1.5$; $\beta = 0.4$ [Boud 92].

Variation de la viscosité dynamique laminaire

La viscosité est exprimée en fonction de la température réduite T_r suivant l'expression [Tech 90b] :

$$\mu_t = A + BT_r + CT_r^2 + D T_r^3$$

avec $T_r = \frac{T}{T_c}$ et $T_c = 369.82 \text{ K}$

Les coefficients A, B, C et D sont donnés pour plusieurs gaz [Tech 90b].

A	B	C	D
$0.711975 \cdot 10^{-6}$	$8.85943 \cdot 10^{-6}$	$0.855054 \cdot 10^{-6}$	$-0.374633 \cdot 10^{-6}$

Loi de paroi

La loi de paroi permet d'estimer la contrainte de cisaillement dans la maille pariétale τ_w . Une fois le régime établi atteint, la contrainte pariétale est constante le long du tube. Sa valeur théorique peut être calculée par Schlichting [Schl 87].

$$\tau_w = 0.0225 \rho U_\infty^{1.75} \left(\frac{\nu}{\delta} \right)^{0.25}$$

où U_∞ est la vitesse débitante, δ l'épaisseur de la couche limite et ν la viscosité cinématique de l'air.

Facteurs de sous relaxation [Hwan 89] :

ϕ	u	v	p	T	Y_k	k	ε	Σ
β	0.5	0.5	0.3	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5

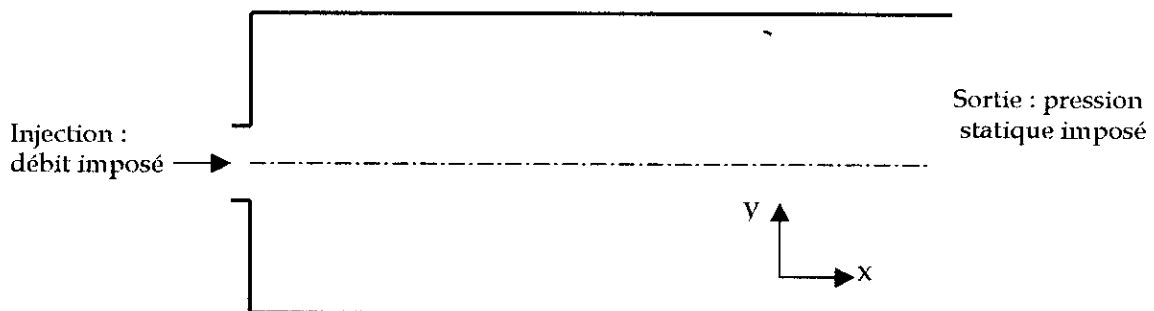
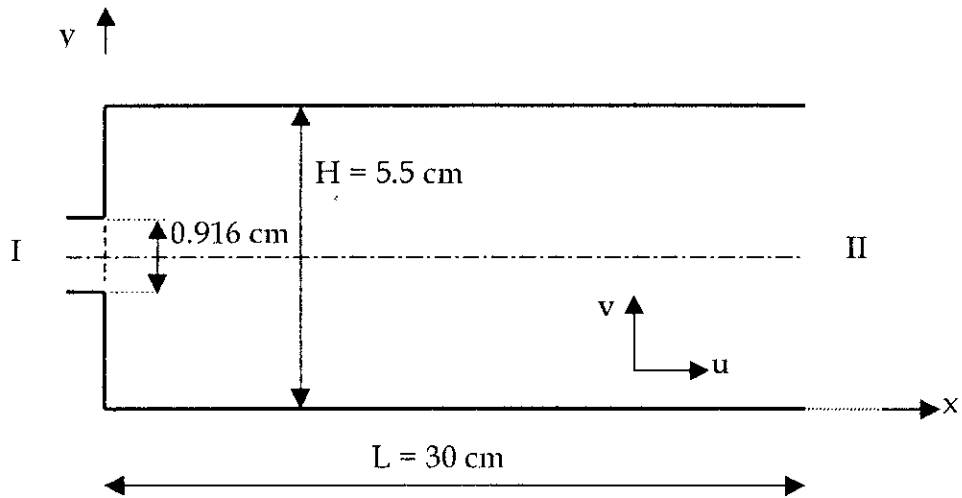
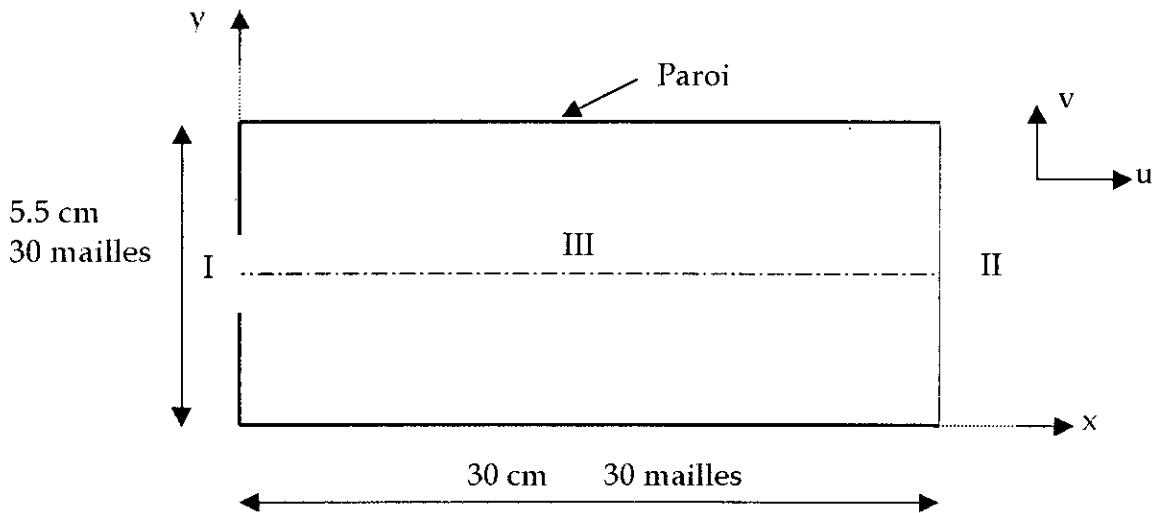


Figure IV.1 : Géométrie de la chambre bidimensionnelle de statoréacteur



- I : Condition de débit imposé ($u = 25 \text{ m/s}$, $v = 0 \text{ m/s}$)
- II : Condition de pression statique imposée ($p = 1 \text{ bar}$)

Figure IV.2 : Géométrie et conditions aux limites du calcul de l'élargissement brusque



- I : Condition de débit imposé
- II : Condition de pression statique imposée ($p = 1 \text{ bar}$)
- III : Condition de symétrie

Figure IV.3 : Maillage utilisé pour le calcul de la chambre de combustion

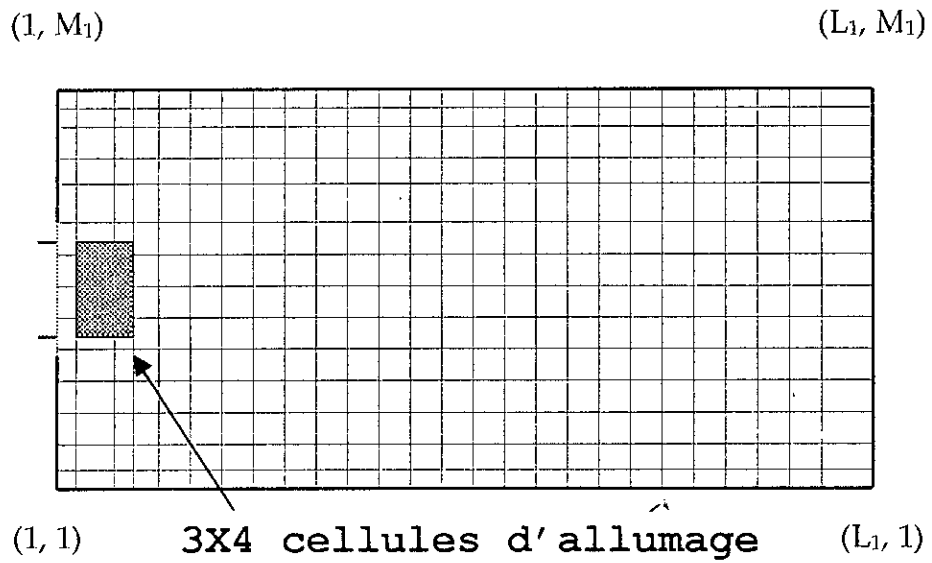
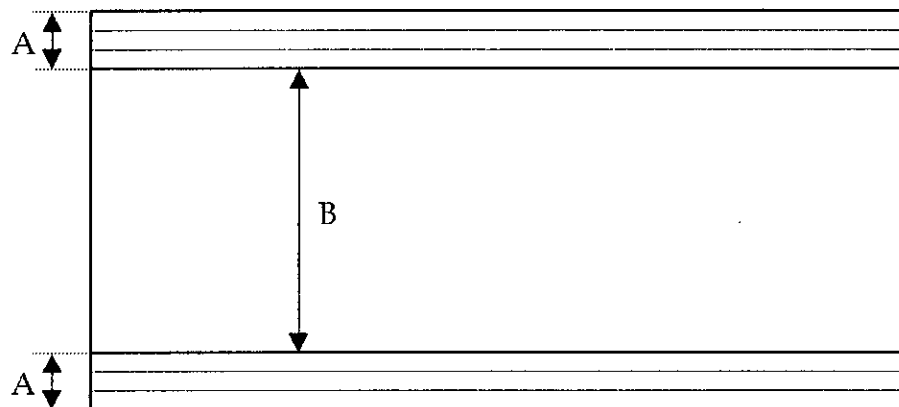


Figure IV.4 : Emplacement des cellules d'allumage pour le calcul de l'écoulement réactif



A : épaisseur de la couche limite 100 mailles
 B : épaisseur correspondante au calcul du S.I.M.P.L.E.R

Figure IV.5 : Maillage utilisé pour l'application de la loi de paroi

IV.3 Interprétation des courbes

Les données issues du calcul ont été traitées par Grapher et Surfer pour tracer les champs et les différentes courbes de variation des grandeurs les plus importantes.

La première remarque qui vient à l'esprit c'est le caractère elliptique qui se traduit principalement par l'apparition des zones de recirculation.

La figure IV.6 représente les lignes de courant de l'écoulement. On distingue clairement la zone de recirculation de part et d'autre de l'axe de l'entrée. Cette zone joue un rôle de tuyère fluide : la composante axiale de la vitesse passe par un maximum dans la région où ces zones sont les plus rapprochées. Ensuite, il y a une décélération de l'écoulement en aval de l'entrée du fait de l'élargissement de la chambre. Cette zone de recirculation s'agrandit ou se rétrécit suivant qu'on a affaire à un écoulement réactif ou non, le premier se caractérise par une grande variation de la masse volumique.

Pour les vitesses, la valeur maximale se situe sur l'axe de la chambre. Il est, à noter qu'ici, à cause de l'expansion thermique des gaz, le maximum de vitesse axiale obtenu sur l'axe de la chambre est de 32 m/s, alors que la vitesse d'injection n'est que 24 m/s (figure IV.7). La vitesse maximale correspond à la même abscisse $x=2.5$ cm de la température maximale (figure IV.21). Juste à l'entrée et dans les zones de recirculation, la vitesse axiale prend des valeurs négatives (figures IV.8 et IV.9).

La figure IV.10 montre clairement qu'en s'éloignant du plan d'injection, la vitesse transversale prend des valeurs positives au-dessus de l'axe de symétrie et des valeurs négatives au-dessous de ce même axe (ce qui correspond à la zone de recirculation), cette caractéristique est traduite dans la figure IV.11 où, en progressant davantage dans la chambre et pour une certaine abscisse, cette vitesse se stabilise vers une valeur nulle, synonyme d'un écoulement établi.

Ces courbes ont les mêmes tendances que les profils expérimentaux de la vitesse transversale représentés sur la figure IV.32 et qui correspondent à une chambre à deux entrées latérales situées à une abscisse différente de celle utilisée dans notre étude [Mont 94], donc la comparaison pour les mêmes abscisses n'est pas possible.

La figure IV.12 donne le profil de la vitesse axiale u en utilisant la loi de paroi, on distingue clairement les trois zones décrites dans le chapitre I ainsi que le profil parabolique de la vitesse.

Les figures IV.13, IV.14 et IV.15 représentent respectivement les champs de concentrations des produits, de l'oxygène et du propane. La figure IV.16 donne les profils des différentes concentrations le long de l'axe de symétrie de la chambre, tandis que les figures IV.17, IV.18 et IV.19 reprennent ces résultats sous la forme de profils pour diverses abscisses dans la chambre.

On a choisi une richesse moyenne de 0.75 correspondant à un mélange pauvre pour éviter le soufflage de la flamme qui survient pour des richesses très faibles et surtout pour s'assurer que la combustion dans la géométrie étudiée est bien complète et que tout le propane injecté est bien consommé dans le foyer ; résultat confirmé par les figures IV.14, IV.15, IV.16, IV.17 et IV.18 où on obtient pratiquement 100% de produits au milieu de la chambre (figures IV.13, IV.16 et IV.19).

Sur la figure IV.33, la concentration finale obtenue de CO_2 est 9.25 %. Cette valeur de fin de combustion se situe à 2/3 de la distance entre l'injection et la fin de la chambre ($x=20.5$ cm). En considérant bien sûr que le CO_2 représente toujours en fin de combustion environ 10 % de produits, ces valeurs sont les mêmes sur la figure IV.19, où on obtient 100% de produits près des 2/3 de la longueur de la chambre ($x=16.5$ cm). Les courbes théoriques et expérimentales montrent bien l'évolution de la production du CO_2 en progressant axialement dans la chambre.

Les différentes figures montrent que la répartition des différentes concentrations est symétrique par rapport à l'axe médian du foyer. On peut remarquer que les profils de l'oxygène et du propane prennent une forme gaussienne dont le maximum diminue progressivement.

La figure IV.20 représente le champ de température dans toute la chambre. La figure IV.21 donne les profils de température pour diverses abscisses, tandis que la figure IV.22 donne ce profil le long de l'axe de symétrie. Les gaz les plus chauds sont au niveau de la zone d'allumage où la combustion est complète et la température atteint son maximum $T = 2086$ K, ensuite elle diminue progressivement pour atteindre la valeur $T = 500$ K à la sortie (figure IV.22).

La forme gaussienne inversée de la courbe correspondant à l'abscisse 0.5 cm de la figure IV.21 donne l'allure de la zone de réaction principale qui sera de la forme (figure IV.33), cette même allure est constatée dans la figure IV.19. La forme de la courbe représente le front de flamme et délimite la zone de panache qui entoure une forme conique et la zone du mélange frais. Pour les autres courbes, on remarque que la température est maximale au voisinage du sommet du cône, puis s'abaisse du centre vers la surface du panache.

La figure IV.34 représente les profils expérimentaux de la température. Les comparaisons au-delà de l'axe de symétrie ne sont pas possibles du fait que les prises de mesures ne sont pas les mêmes. Donc, on se contente d'une comparaison au niveau de l'axe de symétrie. Les résultats obtenus par notre modèle numérique sont proches de ceux obtenus expérimentalement [Mont 94]. La différence est due à l'utilisation de l'oxygène comme oxydant dans notre cas et de l'air dans le cas expérimental.

La combustion induit, donc, un fort dégagement de chaleur conduisant à des gradients thermiques très élevés (le rapport des températures entre gaz brûlés et gaz frais est de l'ordre de 7) et à de larges variations de la masse volumique.

Pour la pression, deux zones successives peuvent être distinguées, dans la première partie, un gradient de pression important correspond au développement de la combustion. En aval, le gradient de pression devient petit et la pression diminue axialement (figures IV.22 et IV.23).

Les figures IV.24, IV.25 et IV.26 donnent les profils de l'énergie cinétique turbulente k et sa dissipation ε , tandis que les figures IV.27 et IV.28 donnent respectivement les champs de ε et de k .

La dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε est maximum à l'entrée près de l'injecteur, là où le cisaillement est le plus important (figure IV.27).

Le champ de l'énergie cinétique turbulente k présente un maximum situé juste en aval de l'injecteur (figure IV.24), ensuite les termes de dissipation l'emportent sur les termes de diffusion turbulente et l'on remarque une baisse de k .

L'augmentation de k à la fin correspond soit à une zone de mélange intense, soit aux conditions limites imposées à la sortie qui perturbent considérablement l'écoulement incident. On comprend mieux, alors, les difficultés rencontrées par le modèle $k - \varepsilon$ pour prédire correctement les niveaux de turbulence dans une telle géométrie.

Pour la densité de surface de flamme, le pic de la courbe de la figure IV.29 correspond à l'allumage du foyer qui est réalisé en imposant une valeur moyenne de $\Sigma_{mi} = 100 \text{ m}^{-1}$.

Par la suite, on constate la diminution de la densité de surface de flamme et s'annule pratiquement à 2/3 de la longueur de la chambre (figures IV.29 et IV.30).

La valeur nulle de la densité de surface de flamme signifie que tout le propane injecté a déjà été brûlé. Donc, on peut définir la longueur de la flamme comme la distance entre l'injection et l'abscisse de la chambre où Σ est nulle. Cette longueur vaut 20 cm.

La figure IV.31, donne différents profils de Σ pour diverses abscisses, ces profils sont symétriques. On constate pour $x = 0.5 \text{ cm}$, la même allure qui permet de définir la zone de réaction (figure IV.35). La valeur de Σ diminue aussi sur les bords du jet par diffusion turbulente.

Les figures IV.36 et IV.37 récapitulent tous les résultats précédents sous forme de surfaces permettant de mieux voir la variation des différentes grandeurs.

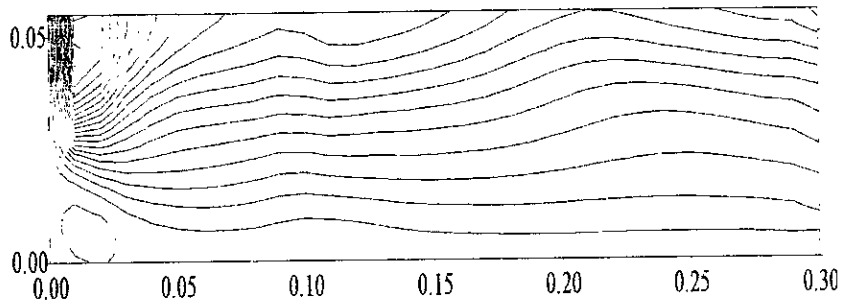


Figure IV.6 : Champ des lignes de courant

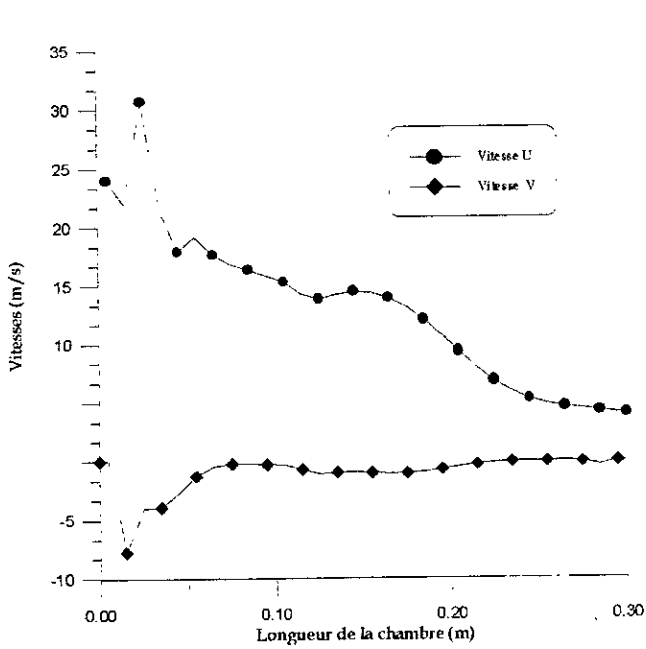


Figure IV.7 : Profils des vitesses le long de l'axe de symétrie de la chambre

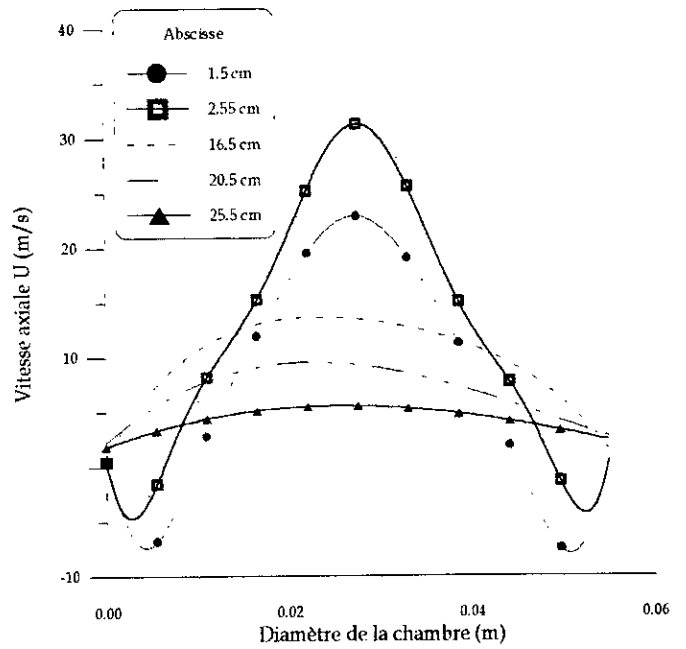


Figure IV.8 : Profils de vitesse axiale pour diverses abscisses

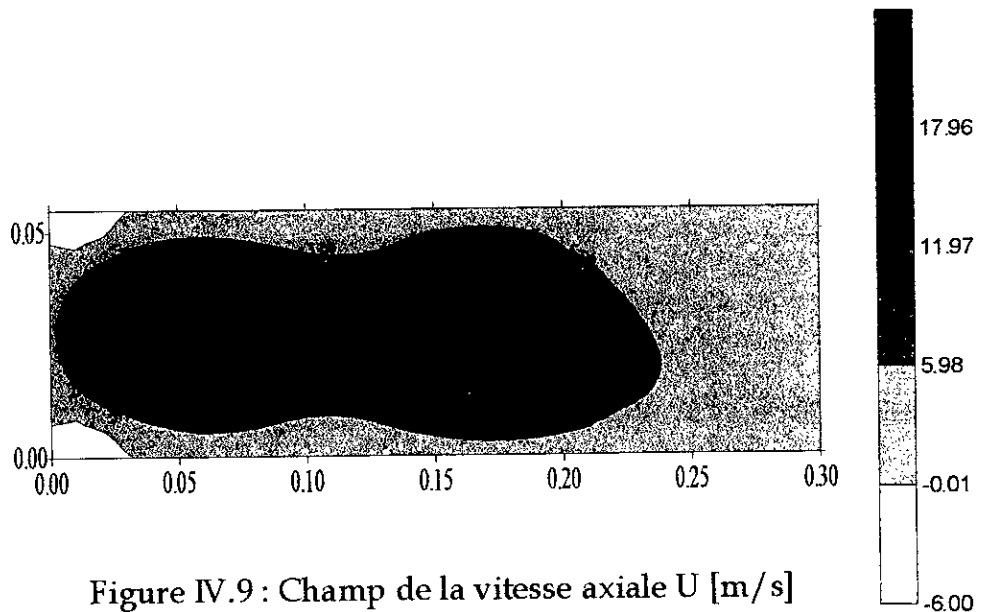


Figure IV.9 : Champ de la vitesse axiale U [m/s]

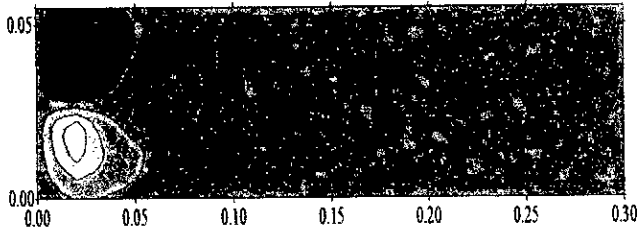


Figure IV.10 : Champ de la vitesse transversale V [m/s]

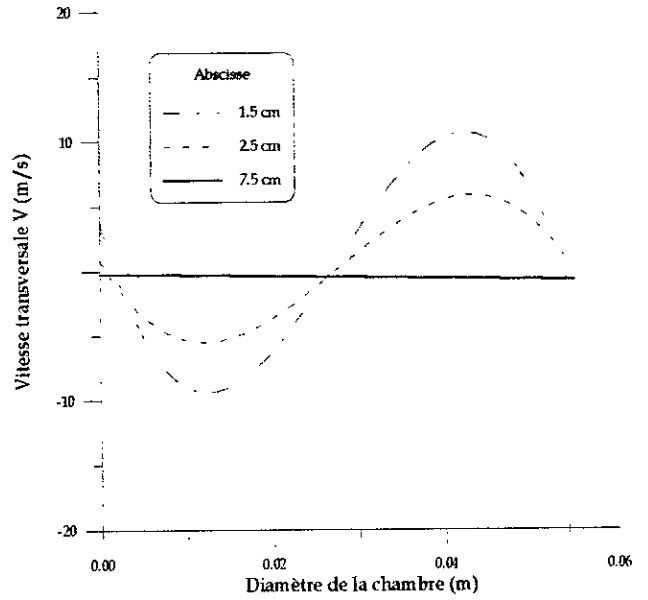


Figure IV.11 : Profils de vitesse transversale pour diverses abscisses

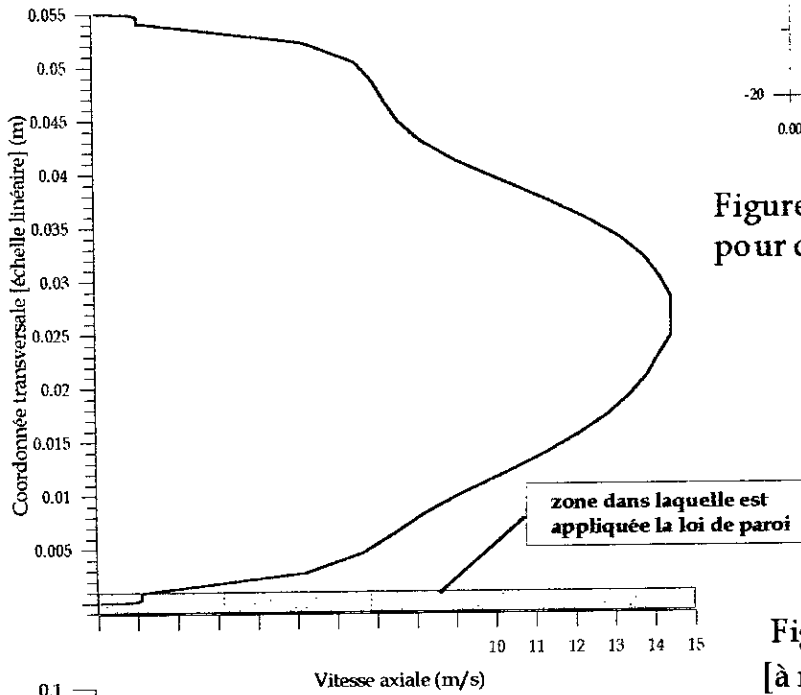
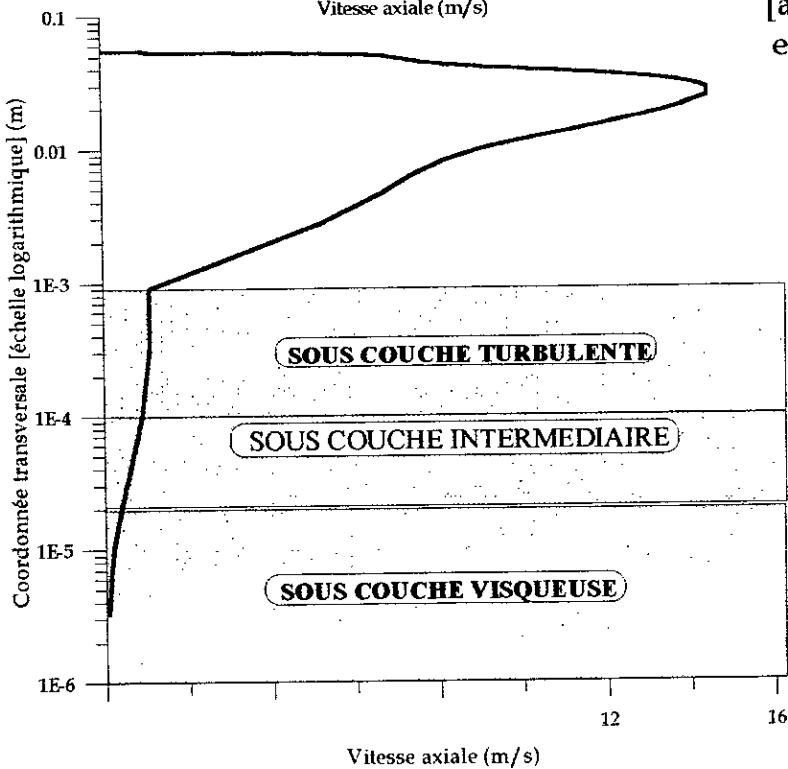


Figure IV.12 : Profils de vitesse axiale U [à mi - chemin du parcours ($x = 0.145$ m)] en utilisant la loi de paroi



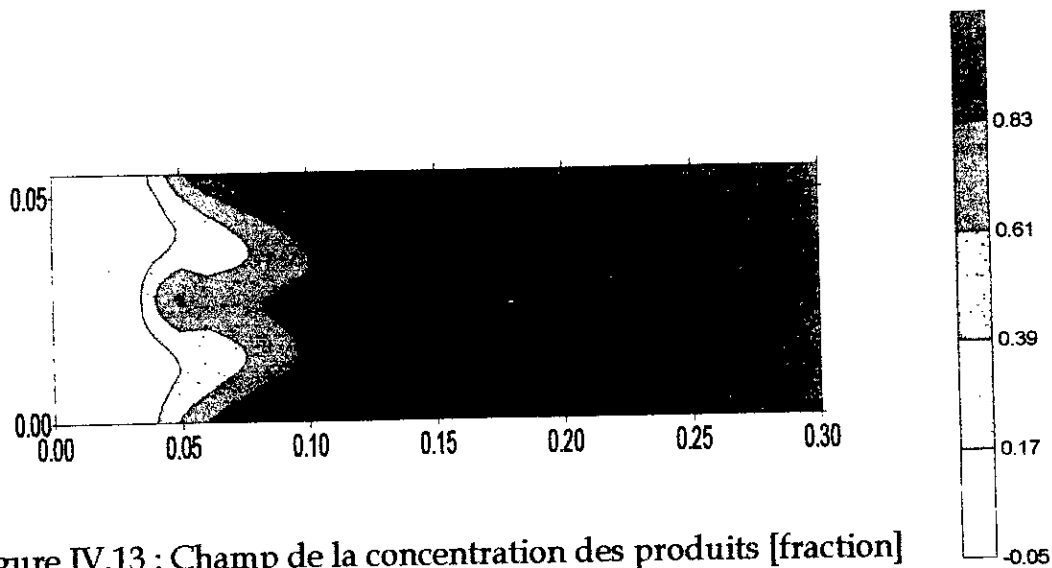


Figure IV.13 : Champ de la concentration des produits [fraction]

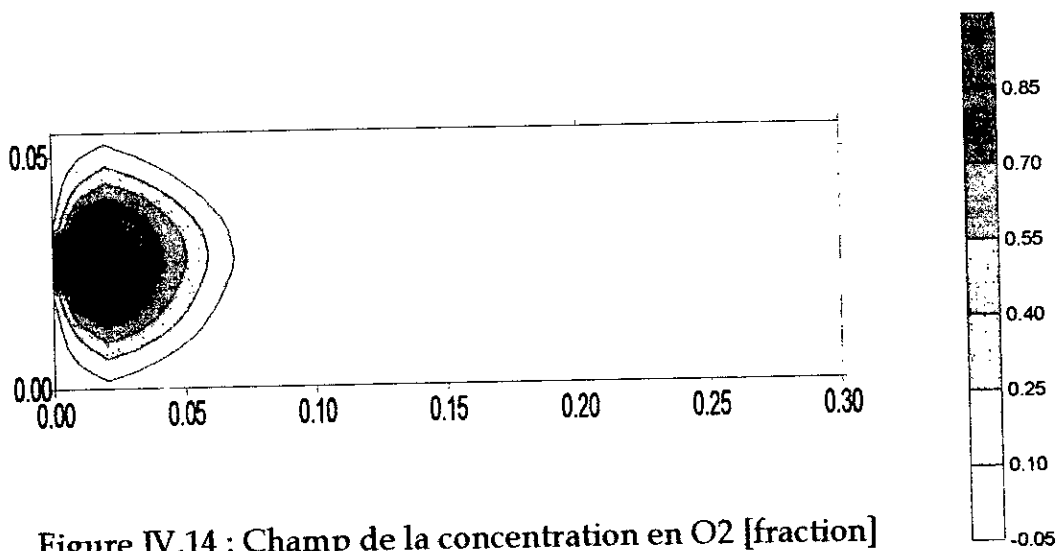


Figure IV.14 : Champ de la concentration en O2 [fraction]

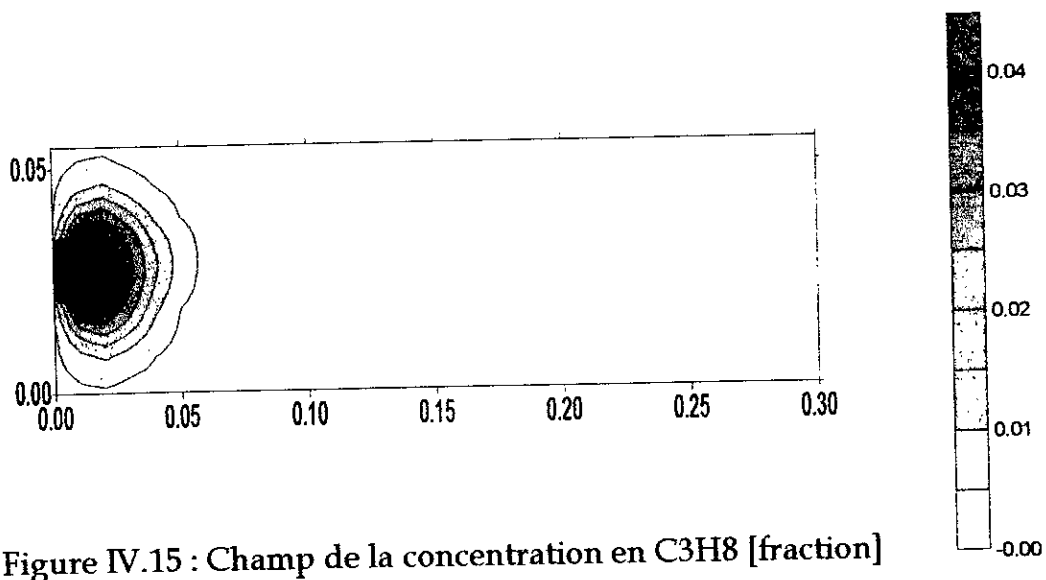


Figure IV.15 : Champ de la concentration en C3H8 [fraction]

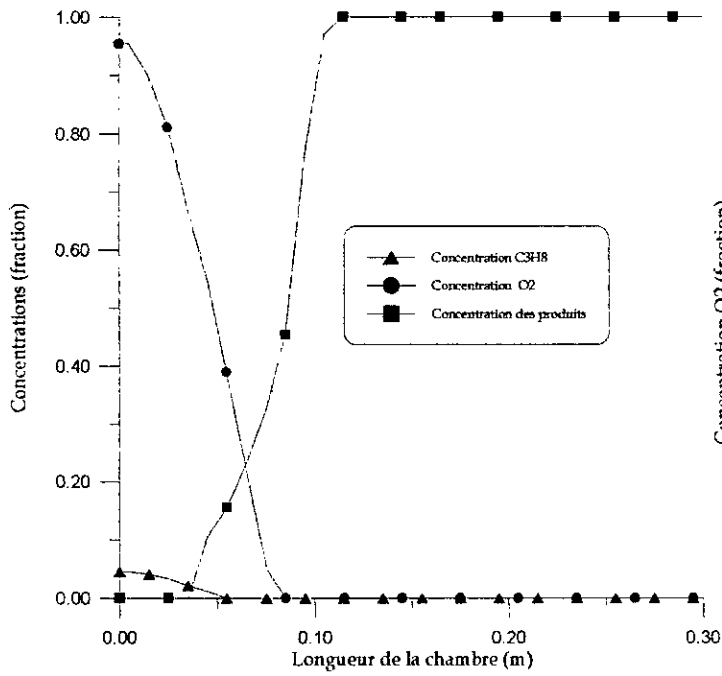


Figure IV.16 : Profils des concentrations le long de l'axe de symétrie de la chambre

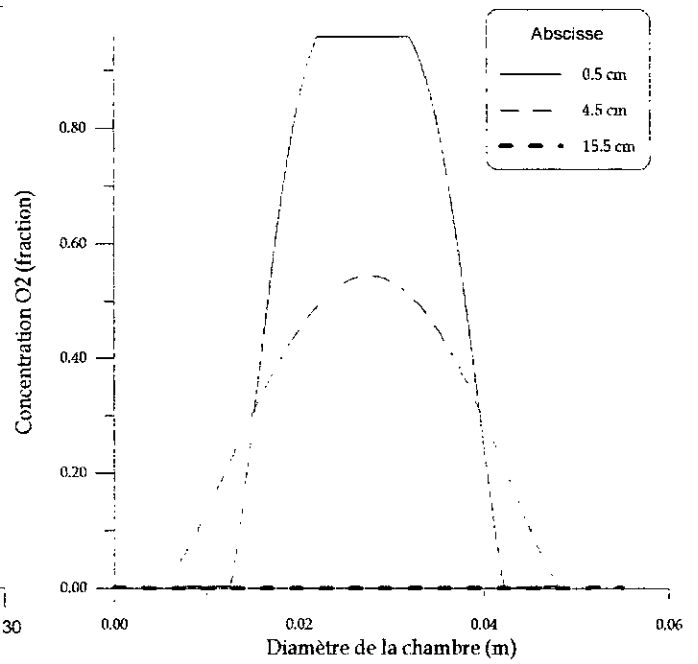


Figure IV.17 : Profils de concentration en O₂ pour diverses abscisses

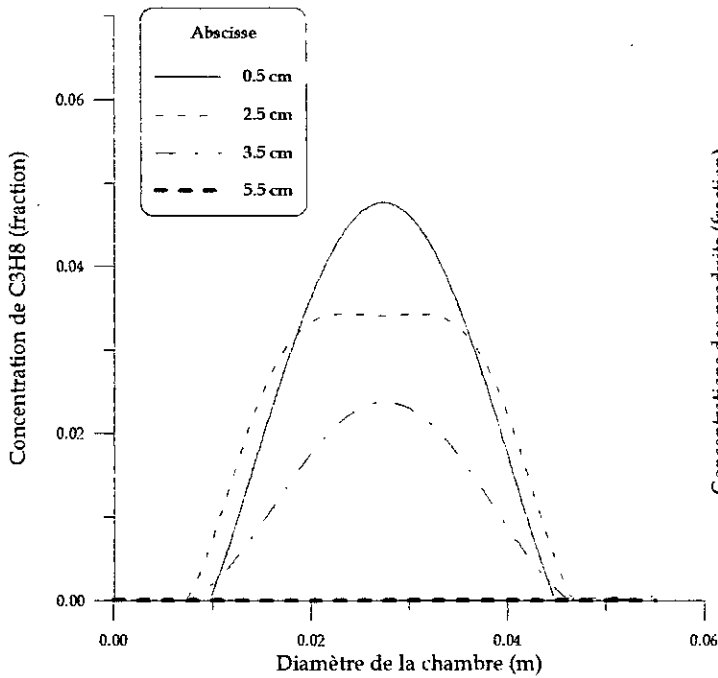


Figure IV.18 : Profils de concentration en C₃H₈ pour diverses abscisses

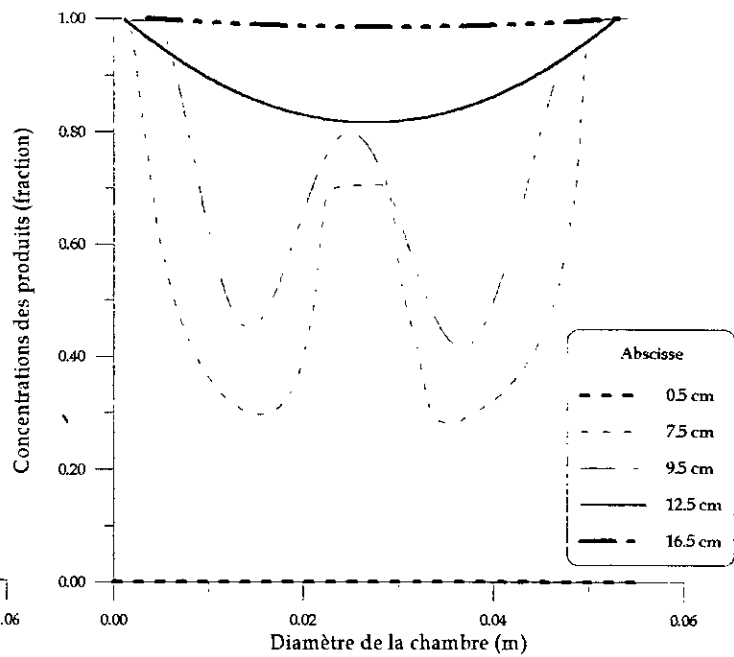


Figure IV.19 : Profils de concentration en produits pour diverses abscisses

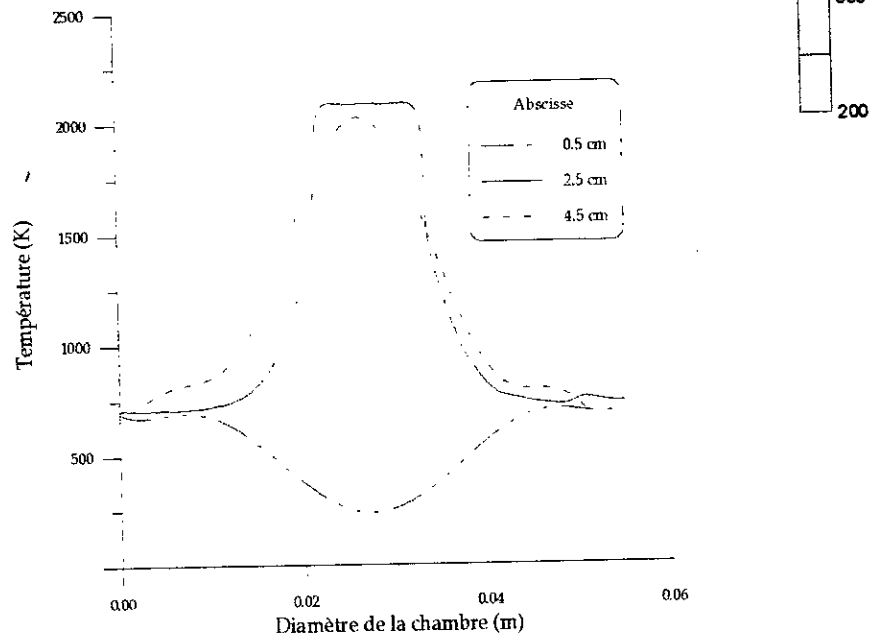
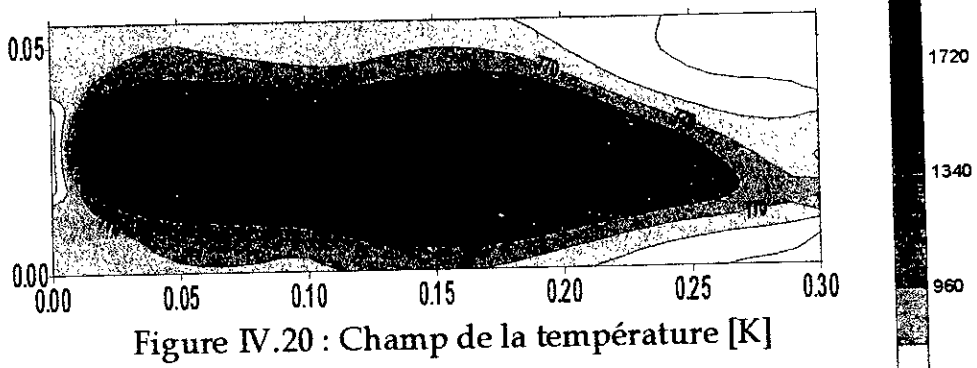


Figure IV. 21 : Profils de la température pour diverses abscisses

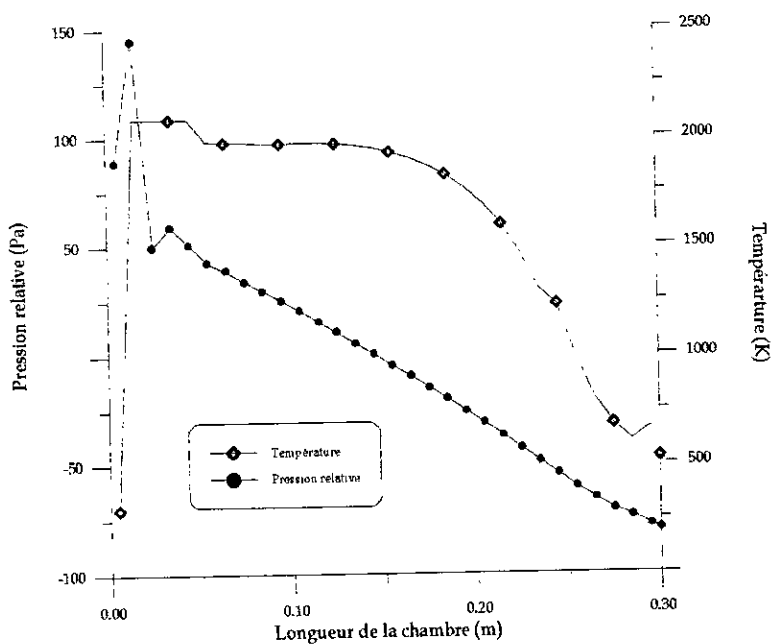


Figure IV. 22 : Profils de la température et de la pression relative le long de l'axe de symétrie de la chambre

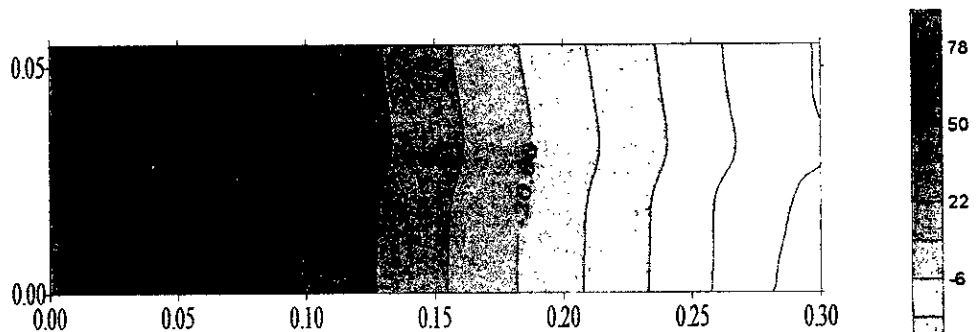


Figure IV.23 : Champ de la pression relative [Pa]

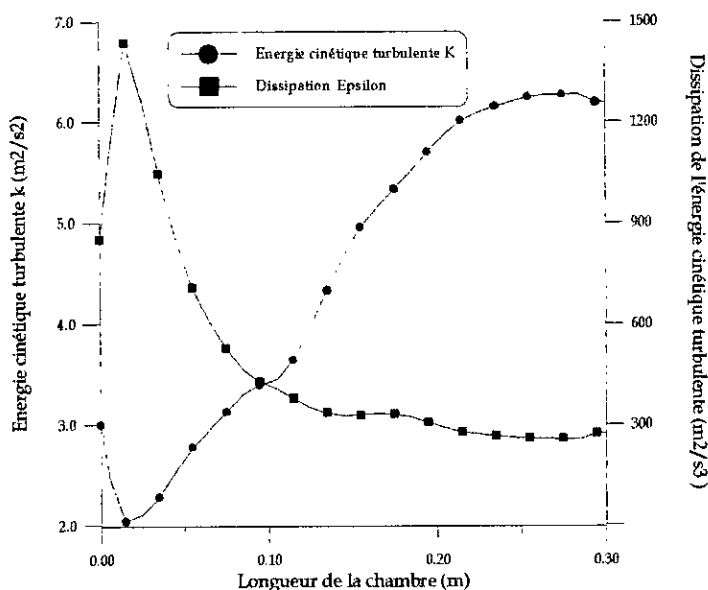


Figure IV.24 : Profils de l'énergie cinétique turbulente k et de la dissipation Epsilon le long de l'axe de symétrie de la chambre

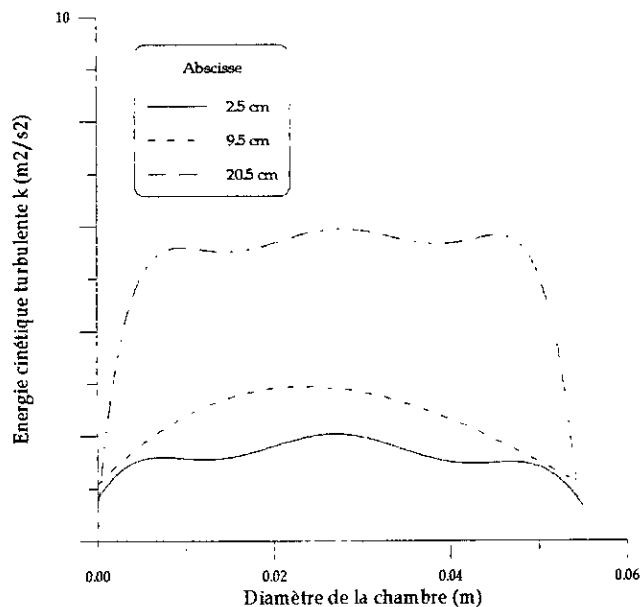


Figure IV.25 : Profils de l'énergie cinétique k pour diverses abscisses

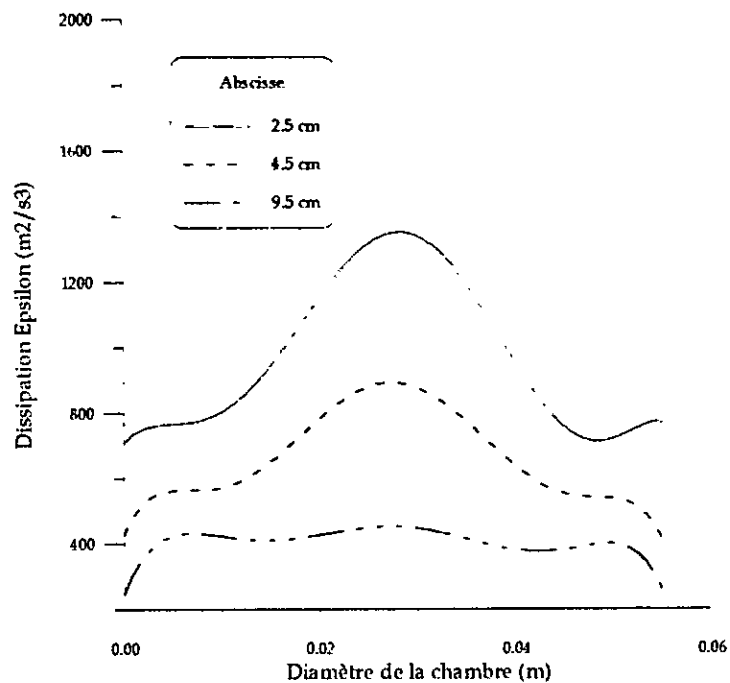


Figure IV.26 : Profils de la dissipation Epsilon pour diverses abscisses

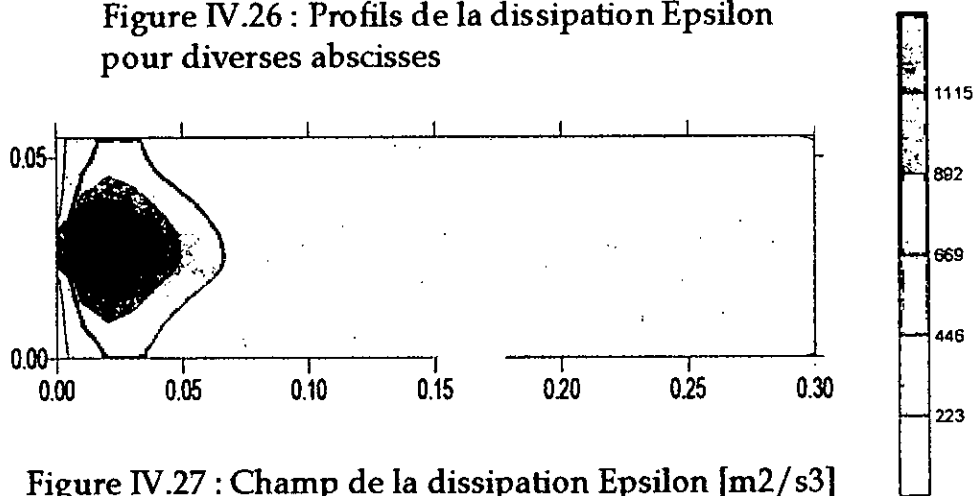


Figure IV.27 : Champ de la dissipation Epsilon [m^2/s^3]

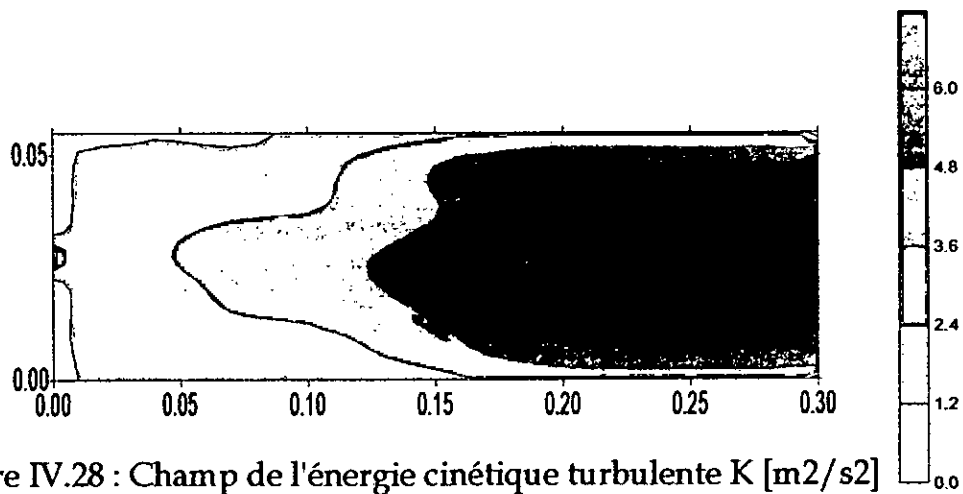


Figure IV.28 : Champ de l'énergie cinétique turbulente K [m^2/s^2]

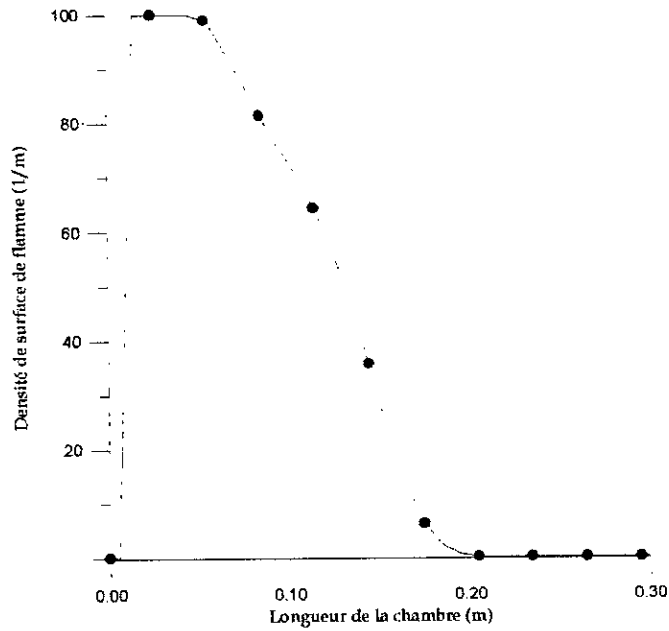


Figure IV.29 : Profil de la densité de surface de flamme le long de l'axe de symétrie de la chambre

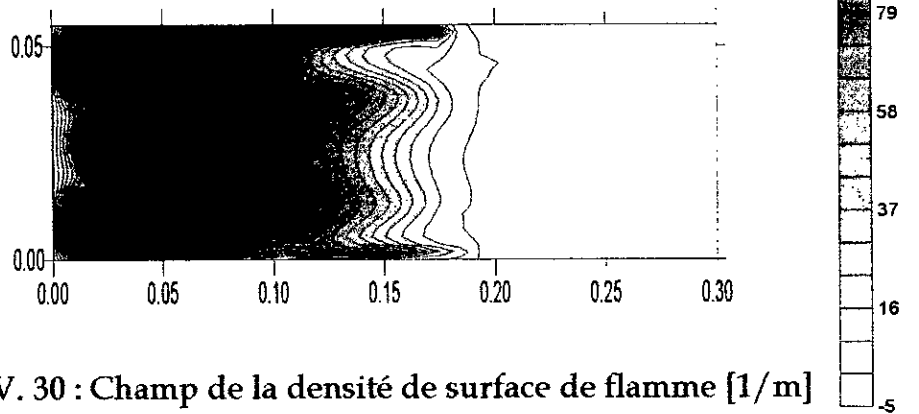


Figure IV.30 : Champ de la densité de surface de flamme [1/m]

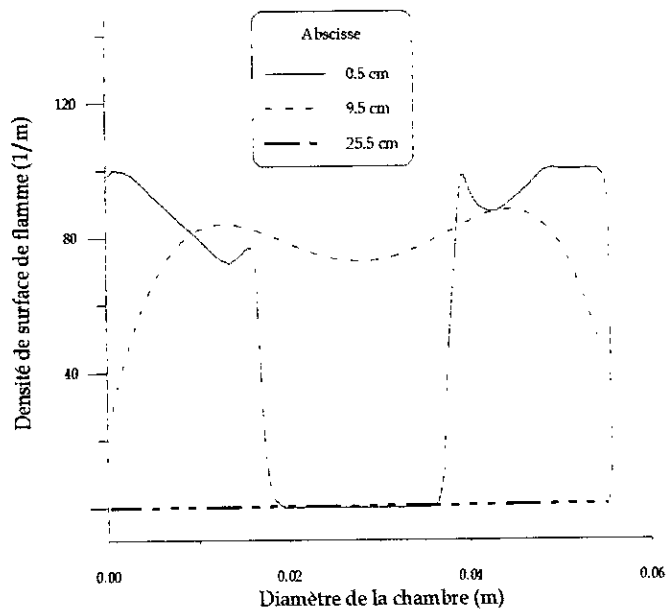


Figure IV.31 : Profils de la densité de surface de flamme pour diverses abscisses

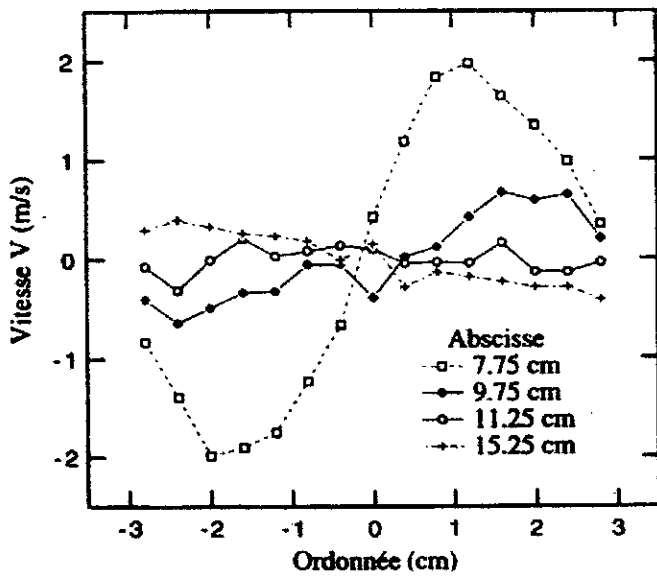


Figure IV.32 : Profils expérimentaux de la vitesse transversale [Mont 94].

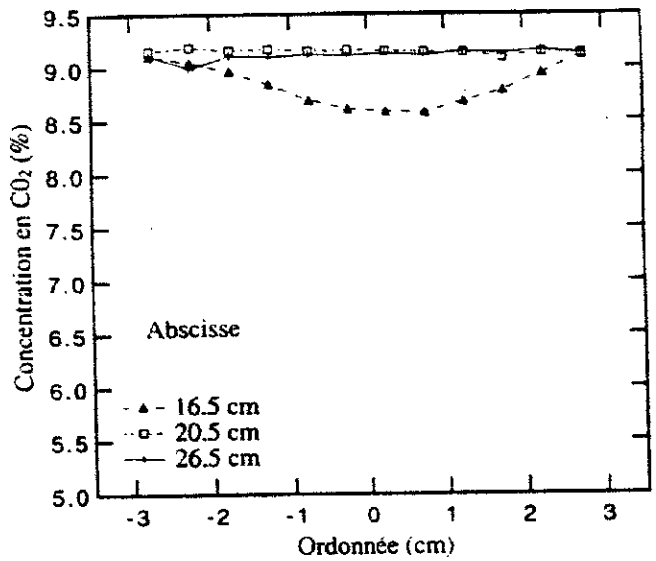


Figure IV.33 : Profils expérimentaux de la concentration en CO₂ [Mont 94].

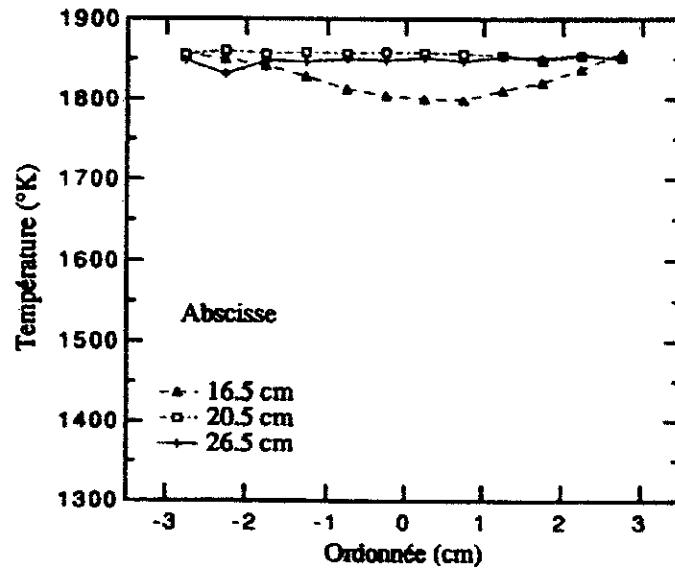


Figure IV.34 : Profils expérimentaux de la température [Mont 94].

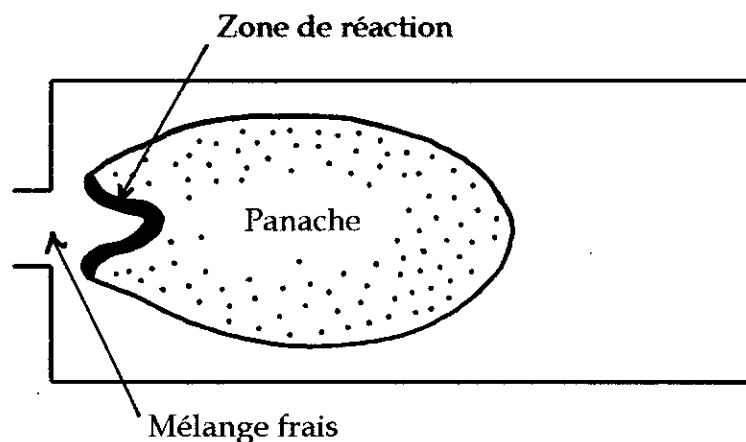


Figure IV.35 : Forme de la zone de réaction principale

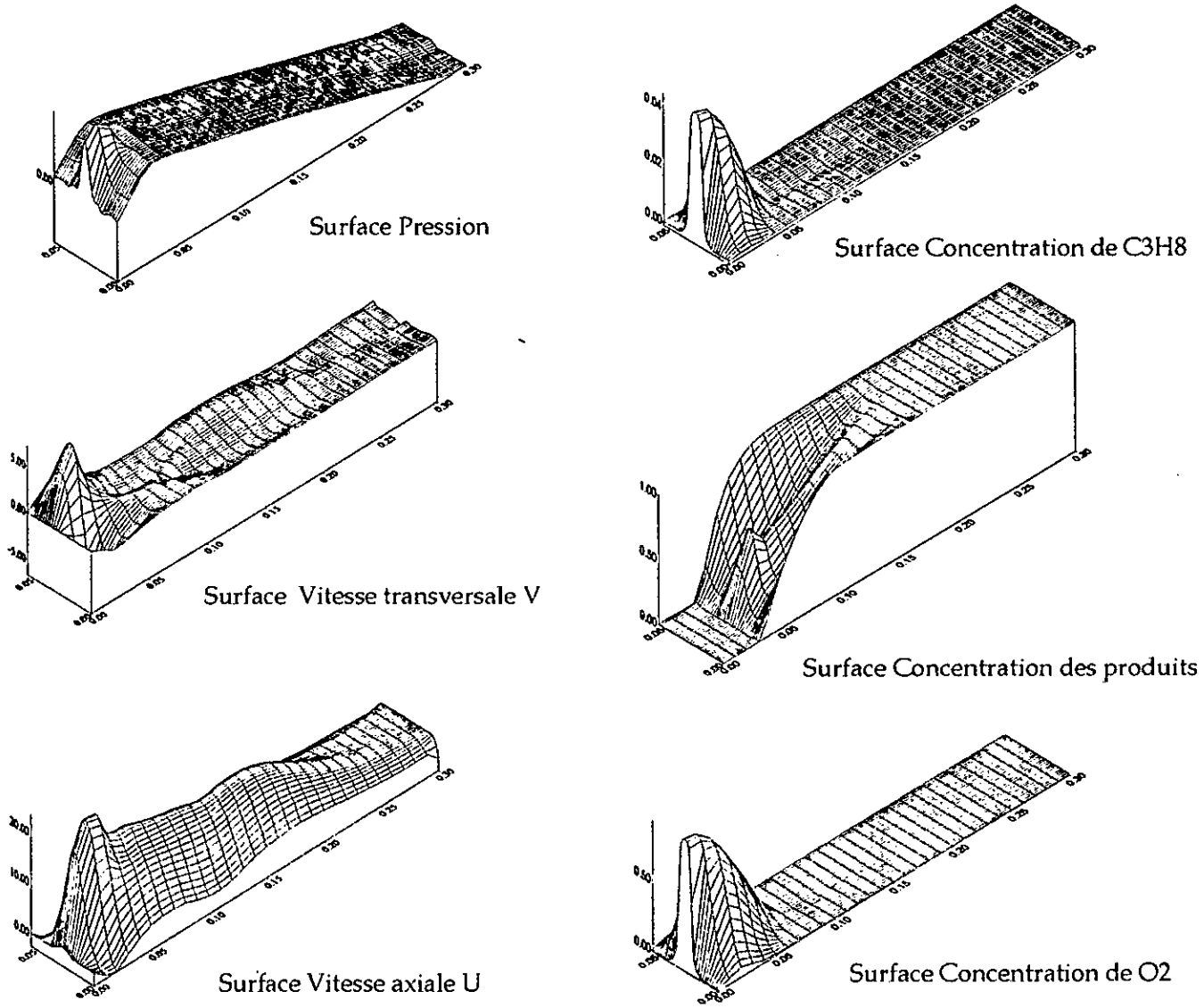


Figure IV.36 : Surfaces des différentes concentrations, des vitesses et de la pression relative

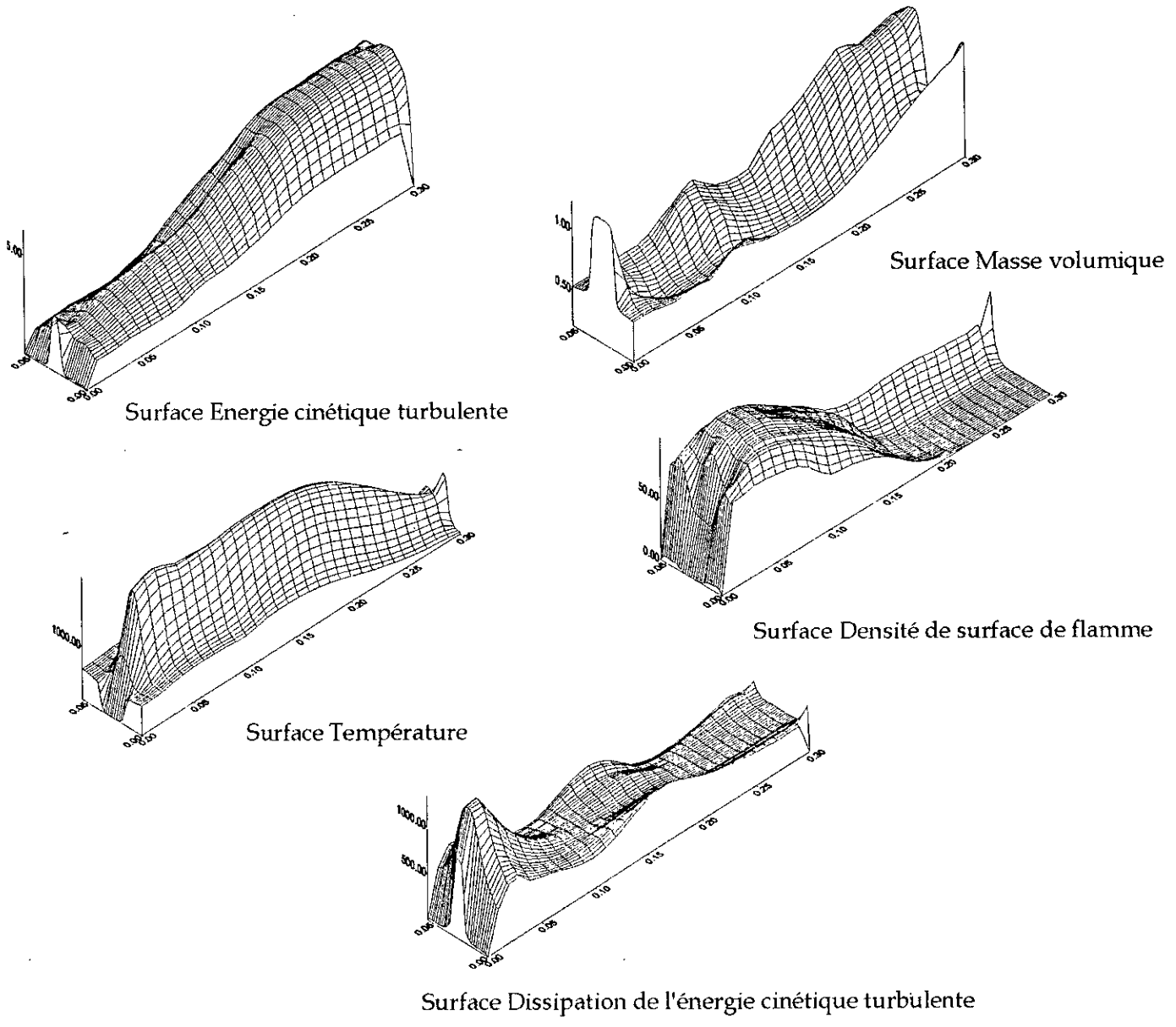


Figure IV.37 : Surfaces de la température, de la masse volumique, de la densité de surface de flamme, de l'énergie cinétique turbulente k et de sa dissipation ϵ

Conclusion

Conclusion

Cette thèse a pour objectif de contribuer à l'étude et à la modélisation de la combustion turbulente d'un prémélange (propane + oxygène) dans une chambre de combustion à prise d'air axiale d'un statoréacteur.

La complexité des phénomènes mis en jeu et les difficultés techniques des études expérimentales sur des configurations réelles mettent en évidence l'intérêt d'une approche basée sur la simulation numérique. C'est dans ce cadre que s'inscrit le travail réalisé ici.

Sur le plan théorique, notre travail a consisté d'abord à rassembler une formulation générale des équations permettant la description de ce type d'écoulement réactif, ceci en calculant les valeurs moyennes des grandeurs physiques considérées.

Les équations dynamiques ont été établies dans le cas stationnaire bidimensionnel, utilisant une fermeture de type modèle de turbulence à deux équations dont le modèle retenu par notre étude est celui dit $k - \epsilon$ et qui se compose de deux équations de transport, une pour l'énergie cinétique de la turbulence et une pour la dissipation d'énergie cinétique.

Pour la détermination des taux de réaction moyens, nous avons adopté une modélisation qui repose sur le concept de flammelettes. Ce type s'avère être, le plus répandu dans les applications industrielles.

Le modèle de flamme cohérente utilisé ici, est constitué de deux sous modèles :

- Un modèle qualifié de « global » qui fournit le champ de densité de surface de flamme. Cette surface est supposée infiniment mince et une équation de transport permet de calculer son évolution.
- Un modèle qualifié de « local » qui fournit les caractéristiques chimiques de cette surface, à partir de calculs de flamme laminaires. Ce modèle peut être constitué de formules analytiques ou de bibliothèques rassemblant des résultats de calculs de chimie complexe.

Le couplage de ces deux modèles fournit alors le taux de réaction moyen.

L'approche développée ici est encore loin de prendre en compte tous les effets. Le manque d'information sur des grandeurs locales nous oblige à des simplifications qui se répercutent inévitablement sur les résultats de calculs obtenus. Un gros effort, aussi bien expérimental que numérique, doit être réalisé si on veut pouvoir fermer raisonnablement l'équation de densité de surface de flamme et connaître les phénomènes chimiques locaux.

L'approche numérique, nous conduit à adopter, pour la résolution, une stratégie de solution itérative basée sur l'algorithme S.I.M.P.L.E.R de Patankar et Spalding (1972).

Les résultats obtenus, donnent des indications particulièrement intéressantes en ce qui concerne les profils de chaque paramètre physique intervenant dans la combustion. Ces résultats sont proches de ceux de plusieurs études de combustion d'une flamme prémélangée [Mont 94], mais une expérimentation complète s'avère nécessaire pour une comparaison plus précise.

Le travail réalisé ici, n'est qu'une première approche pour modéliser la combustion turbulente prémélangée. Beaucoup de progrès restent encore à faire. Ainsi pour continuer cette étude, on peut envisager plusieurs voies :

- Tenir compte du facteur temps qui reste très important en vue d'une simulation plus réaliste.
- Développer l'étude de la turbulence car le modèle $k - \epsilon$ ne prend pas en compte un certain nombre des spécificités des chambres de combustion (impact des jets, fortes zones de recirculation).
- Améliorer la fermeture de certains des termes de l'équation de densité de surface de flamme dont l'étude connaît un développement très rapide.
- Enfin, réaliser une étude expérimentale qui permet d'apporter des améliorations aux modèles choisis.

Bibliographie

Bibliographie

- [Ande 95] Anderson.J.D. (1995) Computational fluid dynamics. *Mc Graw-Hill. New-York.*
- [Belak 78] Belakhovsky.S. (1978) Introduction aux combustibles et à la combustion. *Techniques et Documentation.*
- [Bente 91] Bentebbiche.A. (1991) Modélisation d'une combustion turbulente par un modèle de flammelette : modèle de la flamme cohérente. *Thèse de Magister. E. N. P Alger.*
- [Borgh 78] Borghi.R. (1978) Réactions chimiques en milieu turbulent. *Thèse de docteur' es Sciences Mathématiques. Université Pierre et Marie Curie - Paris 6.*
- [Borgh 84] Borghi.R. (1984) Mise au point sur la structure des flammes turbulentes. *Journal de Chimie Physique, 81, N° 6, pp 361-370.*
- [Borgh 92] Borghi.R, and Lacas.F. (1992) Modelling of liquid - propellant spray combustion in rocket engine combustor. *Laboratoire EM2C du CNRS et de l'ECP et Université de Rouen - URA CNRS 230 CORIA.*
- [Boud 92] Boudier.P. (1992) Modélisation de l'initiation et de la propagation d'une flamme turbulente prémélangée par le modèle de flamme cohérente. *Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris.*
- [Brad 81] Bradshaw.P, Cebeci.T., and Whitelaw.J.H. (1981) Engineering calculation methods for turbulent flow. *Academic press.*
- [Brun 90] Bruneaux.G, Akselvoll.K, Poinso.T.J and Ferziger.J.H. (1990) Flame - wall interaction and heat flux modelling in turbulent channel flow. Centre de recherche sur la combustion turbulente. *Direct numerical simulation for turbulent reacting flows. Editions Technip.*
- [Corre 87] Correa.S.M and Shyy.W. (1987) Computational models and methods for continuous gaseous turbulent combustion. *Prog. Energy. Combust. Sci. Vol. 13, pp 249 - 292. Pergamon Journals Ltd.*
- [Darab 84] Darabiha. N. (1984) Un modèle de flamme cohérente pour la combustion prémélangée : analyse d'un foyer turbulent à élargissement brusque. *Thèse de Docteur ingénieur. Ecole Centrale Paris.*

- [Darab 87] Darabiha.N, Giovangigli.V, Trouve.A, Candel.S et Esposito.E. (1987) Coherent flame description of turbulent premixed ducted flames. France-United States workshop on turbulent combustion, July 1987, Rouen.
- [Darab 96] Darabiha.N, Esposito.E, Lacas.F et Veynante.D. (1996) Combustion. Cours 3^{ème} Année d'études. Ecole Centrale de Paris.
- [Delam 92] Delamare.L. (1992) Modélisation numérique de la propagation d'une flamme turbulente en milieu confiné. *Thèse de Doctorat. Université de Rouen.*
- [Duclo 93] Duclos.J.M, Veynante.D and Poinso.T. (1993) A comparison of flamelet models for premixed turbulent combustion. *Combustion and Flame* 95, pp 101-117, Elsevier Science Publishing Co., Inc.
- [Dupo 90] Dupoirieux.F et Scherrer.D. (1990) Méthodes numériques à convergence rapide utilisées pour le calcul des écoulements réactifs. ONERA. France.
- [Duto 80] Dutoya.D et Michard.P.J. (1980) Une méthode de volumes finis de type implicite pour le calcul des écoulements elliptiques. *La Recherche Spatiale*, N° 2, mars - avril, pp. 123-129.
- [Espo 85] Esposito.E. (1985) Combustion. Cours Air - Espace DEA Thermique. Ecole Centrale de Paris.
- [Favr 78] Favre.A., Kovaszny.L.S.G., Dumas.D, Gaviglio.J, Coantic.M. (1978) La turbulence en mécanique des fluides. *gauthier-villars.*
- [Fich 94] Fichot.F. (1994) Modélisation de l'allumage d'une flamme de diffusion turbulente. Application aux moteurs fusées cryotechniques. *Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris.*
- [Gonz 86] Gonzalez.M. (1986) Contributions à la simulation numérique d'écoulements avec combustion. *Thèse de Doctorat. Université de Rouen.*
- [Grif 95] Griffiths.J.F and Barnard.J.A. (1995) Flame and combustion. *Blackie Academic & Professional.*
- [Heit 86] Heitor.M.V and Whitelaw.J.H. (1986) Velocity, temperature, and species characteristics of the flow in a gas-turbine combustor. *Combustion and Flame* 64, pp 1-32, Elsevier Science Publishing Co., Inc.
- [Hwan 89] Hwang.Y.H and Hung.Y.H. (1989) Turbulent transport phenomena in three - dimensional side - dump ramjet combustors. *International Journal of Heat and Mass Transfert.* Vol 32, No 11, pp 2113-2125. Pergamon Press.

- [Jaeg 90] Jaeger.M. (1990) Simulation numérique d'écoulements turbulents incompressibles et isothermes de fluides newtoniens par éléments finis tridimensionnels. *Thèse de Doctorat. Université de Technologie de Compiègne.*
- [Khor 86] Khorro Molla. H. (1986) Analyse des zones de recirculation dans un foyer turbulent prémélangé. *Thèse de Docteur ingénieur. Ecole Centrale Paris.*
- [Laou 91] Laouir.A (1991) Modélisation d'une flamme de diffusion laminaire. *Projet de Fin d'Etudes, E.N.P Alger.*
- [Laun 72] Launder.B.E and Spalding.D.B. (1972) Mathematical models of turbulence. *Academic Press.*
- [Laun 74] Launder.B.E and Spalding.D.B. (1974) The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp 269-289, North-Holland Publishing Company.
- [Lill 79] Lilley.D.G. (1979) Flowfield modeling in practical combustors : A review. *Journal of Energy*, Vol 3, NO 4, July-August 1979, pp 193-210
- [Mais 90] Maistret.E, Darabiha.N, Poinso.T, Veynante.D and Lacas.F. (1990) Recent developments in the coherent flamelet description of turbulent combustion - supported by SNECMA and DRET.
- [Mais 91] Maistret.E. (1991) Présentation et simulation de la combustion turbulente par le modèle de flamme cohérente. Application aux foyers aéronautiques. *Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris.*
- [Marb 77] Marble.F.E and Broadwell.J.E. (1977) The Coherent flame model for turbulent chemical reactions. TECHNICAL Report TRW-9-PU. Project SQUID headquarters. Chaffee hall. Purdue University. West Lafayette, Indiana.
- [Monn 78] Monnot.G. (1978) La combustion dans les fours et les chaudières. *Editions Technip.*
- [Mont 94] Montazel.X. (1994) Etude expérimentale et modélisation de la combustion turbulente dans les foyers de statoréacteurs. *Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris.*
- [Morv 97] Morvan.D, Porterie.B, Larin.M and Loraud.J.C. (1997) Simulation numérique d'une flamme de diffusion turbulente méthane/air appliquée à l'étude d'un feu de nappe. *Actes du 13^{ème} congrès français de mécanique, Poitiers, Futuroscope, 1-5 Sept 1997, Volume 4, pp 427-435.*

- [Most 89] Mostaghimi.J. (1989) Computation of heat transfert and fluid flow ; two-dimensional elliptic situations. *University of Sherbrooke, Québec J1K-2R1*, July 1989.
- [Nall 87] Nallasamy.M. (1987) Turbulence models and their applications to the prediction of internal flows, *computers & fluids*. vol 15, No 2. PP 151-194, *Pergamon press*.
- [Nir 90] Nir.C. (1990) Combustion et thermochimie. Support de cours. *ENSTA Paris*.
- [Pata 72] Patankar.S.V and Spalding.D.B. (1972) A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three - dimensional parabolic flows. *Int.J.Heat Mass Transfer*, Vol.15, pp1787 - 1806, *Pergamon Press*.
- [Pata 80] Patankar.S.V. (1980) Numerical heat transfert and fluid flow. *Hemisphere, New York*.
- [Pope 87] Pope. (1987) Turbulent premixed flames. *Annual review of fluid mechanics*, Vol 19, p.237.
- [Rubi 97] Rubini.P. (1997) An introduction to numerical methods for elliptic flows. School of Mechanical Engineering. *CRANFIELD University*.
- [Rubi 97] Rubini.P. (1997) Numerical methods for turbulent flows. School of Mechanical Engineering. *CRANFIELD University*.
- [Sada 84] Sadallah.Y. (1984) Analyse du jet de réchauffe d'un turboréacteur. *Thèse de Docteur ingénieur. Ecole Centrale Paris*.
- [Schl 87] Schlichting.H. (1987) Boundary - layer theory. *Mc Graw-Hill. New-York*.
- [Stre 84] Strelow.R.A. (1984) Combustion fundamenals. *Mc Graw Hill*.
- [Take 93] Takeno.T. (1993) Turbulence and molecular processes in combustion. *A collection of contributions based on lectures presented at the Sixth Toyota Conference, Shizuoka, Japan, 11 - 14 October, 1992*. Elsevier Science Publishers B.V.
- [Talb 95] Talbi.K et Nemouchi.Z. (1995) Simulation numérique des écoulements bidimensionnels elliptiques plans et axisymétriques en régime laminaire et turbulent. *2^{ème} congrès maghrébin de mécanique, Université de Constantine, 4 - 6 décembre 1995*.
- [Task 95] TASCflow. Theory documentation (1995) Advanced scientific computing Ltd. *Waterloo, Ontario, Canada*.

- [Tech 90a] Technique de l'ingénieur. (1990) Constantes mécaniques. K4, K480.
- [Tech 90b] Technique de l'ingénieur. (1990) Constantes physico - chimiques. K3, K230.
- [Tour 95] Tournière.B. (1995) Simulation numérique des flammes turbulentes de prémélange et de diffusion. Application aux foyers aéronautiques. *Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon.*
- [Vand 80] Vandromme.D and Ha minh.H. (1980) Solution of the compressible Navier - Stokes equations : applications to complex turbulent flows.
- [Vers 95] Versteeg.H.K and Malalasekera.W. (1995) An introduction to computational fluid dynamics- The finite volume method. *LONGMAN*
- [Verv 98] Vervisch.L et Veynante.D. (1998) Combustion turbulente. Support de cours. *INSA de Rouen.*
- [Veyn 93] Veynante.D, Duclos.J.M, Piana.J and Montazel.X. (1993) Flame front characteristic measurements in turbulent premixed combustors. *VII Symposium on Application of Laser Techniques to Fluid Mechanics.*
- [Will 84] Williams.F.A. (1984) Combustion theory. 2nd Edition. *Addison-Wesley Publishing Company.*

Annexes

Annexe 1

Les modèles à densité de probabilité

Cette approche vise à une description statistique de l'écoulement. L'idée des modèles à densité de probabilité (pdf : probability density function) est d'analyser statistiquement les fluctuations des variables autour de leur valeur moyenne.

Si $P(Y_1, Y_2, \dots, T)$ est la probabilité que les fractions massiques et la température prennent les valeurs Y_1, Y_2, \dots, T en un point et un instant donnés, n'importe quelle quantité Q , par exemple le taux de réaction moyen de l'espèce k , $\bar{\omega}_k$, peut être calculé comme :

$$\bar{Q} = \int_{Y_1, \dots} \int_T Q(Y_1, \dots, T) \cdot P(Y_1, \dots, T) dY_1 \dots dT$$

avec la relation de normalisation : $\int_{Y_1, \dots} \int_{Y_2} \dots \int_T P(Y_1, Y_2, \dots, T) dY_1 dY_2 \dots dT = 1$

Cette approche présente deux avantages :

- Les fonctions densité de probabilité peuvent, au moins en principe, être utilisées dans n'importe quel écoulement réactif, sans introduction d'hypothèse de type « flammelettes ».
- Les fonctions de densité de probabilité peuvent être aisément extraites de mesures expérimentales. En effet, il suffit de mesurer les quantités $Q(Y_1, Y_2, \dots, T)$ et de tracer les résultats sous forme d'histogrammes.

La principale difficulté de cette approche reste, bien sûr, à déterminer les fonctions de densité de probabilité croisées P en fonction de grandeurs connues ou facilement calculables (grandeurs moyennes, fluctuations moyennes, . . . etc). L'approche la plus simple, dite des « fonctions de densité de probabilité présumées » consiste à se fixer à priori, la forme de la fonction P . On utilise en général des « fonctions Beta » A l'autre extrémité, il est possible d'écrire des équations de transport pour la pdf [Darab 96], [Verv 98].

Le modèle Bray, Moss, Libby (BML)

Ce modèle a été proposé en 1977. Il est basé sur la notion de densité de probabilité et sur l'analyse physique des phénomènes. Ce modèle ne considère que deux espèces chimiques, le réactif (R) et le produit (P) $R \rightarrow P$, en plus des hypothèses simplificatrices (gaz parfait, écoulements incompressibles, constance des caractéristiques chimiques, nombres de Lewis égaux à 1, . . .). Ce modèle introduit une variable d'avancement c de la réaction, telle que $c = 0$ dans les gaz frais et $c = 1$ dans les gaz entièrement brûlés. c peut être définie comme une température ou une

fraction adimensionnée $c = \frac{T - T_u}{T_b - T_u}$ ou $c = \frac{Y_F - Y_F^{GF}}{Y_F^{GB} - Y_F^{GF}}$

Où T désigne la température locale, T_u la température dans les gaz frais, T_b la température de fin de combustion, Y_F la fraction massique de combustible locale, Y_F^{GF} la fraction massique de combustible dans les gaz frais et Y_F^{GB} la fraction massique de combustible dans les gaz brûlés.

Pour un $Le = 1$, ces deux définitions sont équivalentes. c est donc une température ou une fraction massique adimensionnée.

L'idée de base du modèle BML consiste à écrire qu'en un point donné de l'écoulement (x) passe alternativement des gaz frais et des gaz brûlés séparés par une zone de réaction. Compte tenu de cette analyse, la densité de probabilité locale de la variable d'avancement c s'écrit :

$$P(c, x) = \alpha(x) \delta(c) + \beta(x) \delta(1-c) + \gamma(x) f(c, x)$$

où α , β et γ correspondent respectivement aux probabilités d'avoir au point x , des gaz frais, des gaz brûlés et des gaz en combustion. $\delta(c)$ et $\delta(1-c)$ sont respectivement les fonctions de Dirac représentant les gaz frais ($c = 0$) et les gaz complètement brûlés ($c = 1$). Par normalisation, la densité de probabilité des gaz en cours de réaction

$$\text{vérifie : } \int_0^1 f(c, x) dc = 1$$

avec bien évidemment, $f(0) = f(1) = 0$.

L'équation de transport pour la variable d'avancement c de la réaction s'écrit :

$$\frac{\partial \rho c}{\partial t} + V \cdot (\rho \bar{V} c) = V \cdot (\rho D \nabla c) + \dot{\omega}$$

Cette équation peut être moyennée. Le taux de réaction moyen, au point x s'écrit

$$\text{alors : } \bar{\dot{\omega}}(x) = \int_0^1 \dot{\omega}(c) P(c, x) dc$$

$$\text{Qui se réduit immédiatement à : } \bar{\dot{\omega}}(x) = \gamma(x) \int_0^1 \dot{\omega}(c) f(c, x) dc$$

Cette formulation, très générale, est à la base de tous les travaux sur ce type de modèle. Il reste maintenant à déterminer toutes les fonctions introduites α , β , γ et la fonction densité de probabilité f .

Modèle algébrique BML pour la densité de surface de flamme Σ

Poussant la logique de l'alternance entre gaz frais et gaz brûlés, Bray, Moss et Libby ont été amené à quantifier cette alternance pour exprimer le taux de réaction. Ils ont introduit la notion de fréquence de passage ν du front de flamme de sorte que le taux de réaction local sera le produit de cette fréquence de passage par un taux de réaction élémentaire :

$$\bar{\dot{\omega}}_f = \omega_f \nu$$

La fréquence de passage ν est ensuite exprimée algébriquement par une analyse statistique de l'équation des télégraphistes puisque le signal $c(t)$ est assimilé à un signal télégraphique. Ainsi :

$$\nu = \frac{2 \bar{c} (1 - \bar{c})}{\hat{T}}$$

où \hat{T} est l'échelle temporelle des fluctuations.

ν est facile à mesurer expérimentalement, par contre, la densité de surface de flamme est plus délicate à obtenir. En contre partie, la définition et la détermination du taux de réaction élémentaire ω_f sont beaucoup moins évidentes.

Les auteurs ont reformulé leur modèle et proposent l'expression algébrique (Bray et al., 1989) :

$$\Sigma = \frac{g\bar{c}(1-\bar{c})}{\sigma_Y \hat{L}_Y}$$

où g est une constante de l'ordre de l'unité, σ_Y le facteur d'orientation supposé être une constante universelle du modèle ($s_Y = 0.6$) et \hat{L}_Y une échelle spatiale caractéristique du plissement du front de flamme.

Là encore, se pose le problème de la détermination de cette échelle de plissement \hat{L}_Y que Cant et Bray (1988) assimilent à l'échelle intégrale de la turbulence [Darab 96], [Verv 98].

Le modèle Eddy Break - Up

Présenté pour la première fois par Spalding en 1971, ce modèle est utilisé pour $Da \gg 1$ et $Re \gg 1$. La zone de réaction est analysée comme une collection de poches de gaz frais et de gaz brûlés. La turbulence, via la cascade de Kolmogorov, contribue au fractionnement de ces paquets de gaz frais (d'où le nom « Eddy-Break-Up »).

L'idée de base est que la combustion est uniquement gouvernée par la turbulence qui assure le processus de mélange gaz frais - gaz brûlés aux petites échelles. Les effets chimiques n'apparaissent donc pas du tout, ce qui simplifie grandement la modélisation.

Dans ces conditions, le taux de réaction moyen est essentiellement contrôlé par le temps caractéristique de fragmentation des structures de gaz frais τ_{EBU} .

Il n'y a donc pas de modèle local, le terme source des équations de conservation des espèces étant donné par une expression analytique faisant intervenir les grandeurs moyennes de l'écoulement. Une des formulations possibles pour le terme source est :

$$\bar{\dot{\omega}}_f = -C_{EBU} \bar{\rho} \frac{\sqrt{\tilde{Y}_F'^2}}{\tau_{EBU}}$$

\tilde{Y}_F' est la fluctuation de la fraction massique du combustible, C_{EBU} constante du modèle et prise de l'ordre de l'unité et τ_{EBU} est un temps caractéristique des échelles intégrales de la turbulence estimé à partir de l'énergie cinétique turbulente k et de son taux de dissipation ε selon l'expression : $\tau_{EBU} = \frac{k}{\varepsilon}$

Quoique d'utilisation très simple (pas d'équations supplémentaires pour la détermination des taux de consommation des réactifs), ce modèle permet d'obtenir des résultats satisfaisants dans des géométries élémentaires. Par contre, il trouve très vite ces limites lors qu'on s'intéresse à des configurations plus complexes.

Annexe 2

Phénomène de Quenching

A l'approche d'une paroi solide, la flamme a tendance à s'éteindre. Au premier lieu cette extinction est due aux pertes de chaleur.

Le diamètre de Quenching d_T d'un mélange gazeux particulier est le diamètre minimal d'un tube à travers lequel une flamme dans un mélange gazeux stationnaire peut propager.

La distance de Quenching d_Q est une quantité liée et se réfère à la propagation de flamme entre plaques parallèles. Les deux quantités sont reliées par l'expression :

$$d_T = 1.54 d_Q$$

Plusieurs théories de Quenching de flammes mènent à la conclusion que le groupe adimensionnel (nombre de Peclet) $d_Q S_u / a$ doit être constant. Dans cette expression a est la diffusivité thermique du gaz frais.

La diffusion et le transfert de chaleur sont inversement proportionnels à la pression, tandis que pour la plupart de flammes, la vitesse de combustion est largement indépendante de la pression. Par conséquent, la distance de Quenching est aussi approximativement inversement proportionnelle à la pression. Similairement les flammes fast - burning flames ont des petites distances de Quenching associées avec elles. Ce résultat a été confirmé par l'expérimentation, à partir de laquelle les valeurs de $d_Q S_u / a$ sont généralement entre 40 et 50.

Distances de Quenching pour des flammes stoechiométriques à 101 kPa et 293 K :

Pour le $C_3H_8 + O_2$ $d_Q = 0.25$ mm

Pour le $C_3H_8 + \text{air}$ $d_Q = 2.1$ mm

Annexe 3

Maillage décalé (staggered grid)

Considérons l'équation de mouvement par rapport à x d'un écoulement permanent laminaire bidimensionnel :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + S \quad (1)$$

Si on commence à construire la forme discrétisée de cette équation pour un cas unidimensionnel de la figure 1, la seule nouvelle caractéristique est la représentation du terme $\partial p / \partial x$ intégré autour du volume de contrôle.

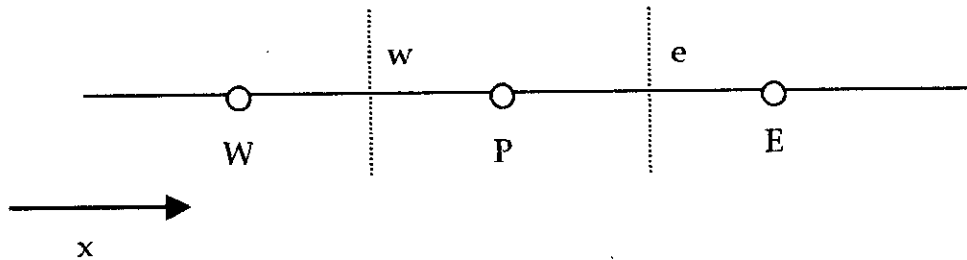


Figure 1 : représentation des différents nœuds

Si les pressions en "e" et "w" sont obtenues par une interpolation linéaire, le terme $\partial p / \partial x$ est donné par

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_e - p_w}{\delta x} = \frac{\left(\frac{P_E + P_P}{2}\right) - \left(\frac{P_P + P_W}{2}\right)}{\delta x} = \frac{P_E - P_W}{2\delta x} \quad (2)$$

La pression au nœud central (P) n'apparaît pas dans l'équation (2). Imagine maintenant qu'on a obtenu d'une façon ou d'une autre un champ de pression en zigzag de la figure 2. En remplaçant les valeurs correspondantes des pressions dans l'équation (2), on trouve que le gradient est nul dans tous les nœuds, c'est à dire une force de pression motrice nulle ; résultat pas du tout réaliste du point de vue physique.

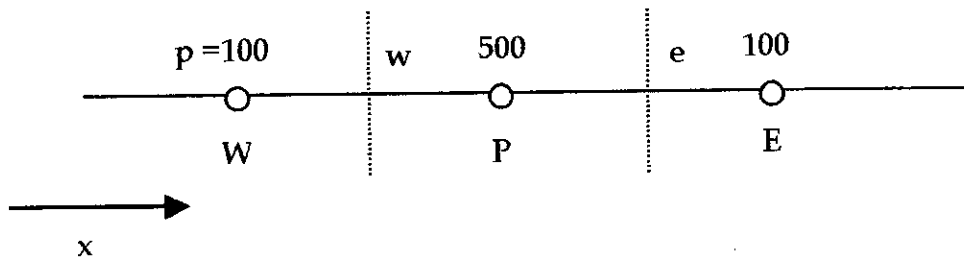


Figure 2 : champ de pression en zigzag

Il est clair que, si les vitesses sont définies aux mêmes nœuds que la pression, l'influence de cette dernière n'est pas proprement représentée dans les équations de mouvement discrétisées. Un remède pour ce problème est l'utilisation d'un maillage décalé (staggered grid) pour les composantes de la vitesse.

Un tel maillage a été utilisé pour la première fois par Harlow and Welch (1965) dans leur méthode MAC. Il forme la base de la procédure SIVA de Caretto, Curr et Spalding (1972) et la procédure SIMPLE de Patankar et Spalding (1972).

L'idée est d'évaluer les variables scalaires, comme la pression, la densité, la température etc., aux nœuds normaux et calculer les composantes de la vitesse dans des nœuds décalés se trouvant sur les faces des volumes de contrôle.

La figure 3 présente un maillage bidimensionnel avec les localisations de u et v placées sur les faces du volume de contrôle respectives.

L'avantage important du maillage décalé est que la différence de pression entre deux nœuds adjacents devient maintenant la force motrice naturelle pour la composante de vitesse localisée entre ces nœuds.

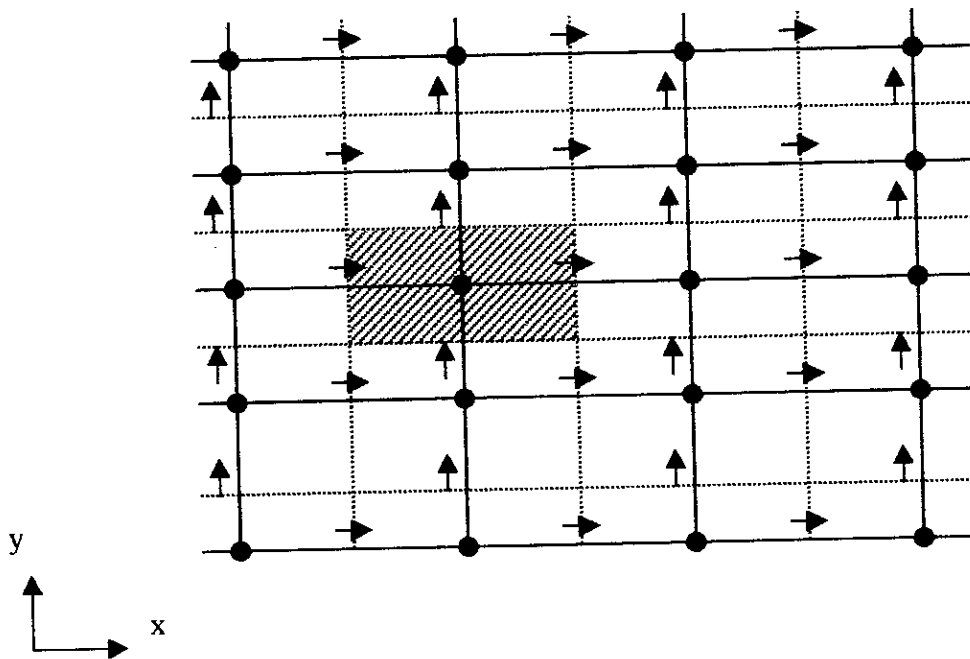


Figure 3 : Localisations décalées pour u et v .
 $\rightarrow = u$; $\uparrow = v$; $\bullet =$ variables scalaires.