

10/99

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

*D.E.R. de Mécanique*

*Département de Génie Mécanique*



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

## *Projet de fin d'études*

*Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état  
en Génie Mécanique*

*Thème*

*Conception Optimale D'une Machine A Fluide  
Incompressible Par La Méthode De  
Singularité*

*Etudié par :*

*ZOUBEIDI Rabia*

*Proposé et dirigé par :*

*Mr : M. BOUDJEMAA*

*Promotion : Juin 99*

*E.N.P.10, Avenue Hassen-Badi, EL-HARRACH, ALGER.*

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

*D.E.R. de Mécanique*  
*Département de Génie Mécanique*



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

## *Projet de fin d'études*

*Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état  
en Génie Mécanique*

*Thème*

*Conception Optimale D'une Machine A Fluide  
Incompressible Par La Méthode De  
Singularité*

*Etudié par :*

*ZOUBEIDI Rabia*

*Proposé et dirigé par :*

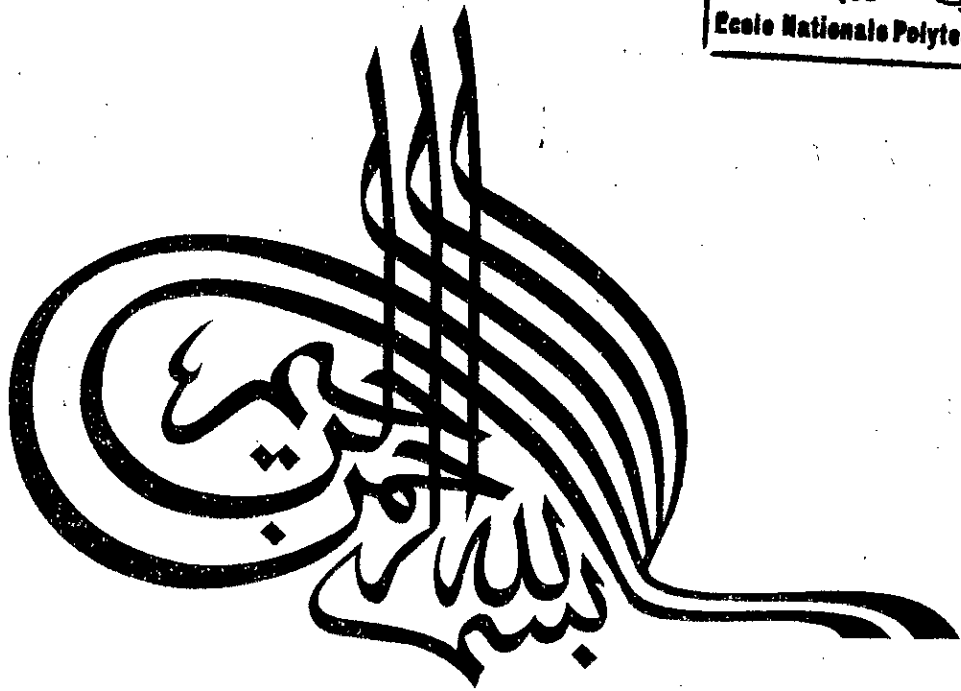
*Mr : M. BOUDJEMAA*

*Promotion : Juin 99*

*E.N.P.10, Avenue Hassen-Badi, EL-HARRACH, ALGER.*



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique



# Remerciements

*Je remercie Dieu de m'avoir donné la volonté et le courage afin d'arriver à la finalité de ce modeste travail.*

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements et ma profonde gratitude à mon promoteur monsieur, M. BOUDJEMAA pour ses aides sans réserve et ses conseils précieux qu'il m'a dispensé tout au long de ce travail.*

*Je tiens également à remercier messieurs les membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de siéger à ma soutenance.*

*Que tout les enseignants qui ont contribué à ma formation et les étudiants de la DER de Mécanique trouvent ici l'expression de ma reconnaissance et respect.*

*Qu'il me soit permis de remercier tous mes chers amis qui ont contribué de près ou de loin à l'achèvement de ce projet, et particulièrement ; M. KORAICHI, A. ABIMOULOUD, Z. TIDJANI.*

# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail,*

*À la mémoire de ma très chère mère.*

*À la mémoire de mon très cher père.*

*À mes frères et sœurs, en particulier*

*Adel et Faten.*

*À tous mes amis de Bouraoui, l'ENP et*

*Touggourt.*

*Rabia*

### ملخص

المهدف من هذا العمل الاختيار الامثل لآله تربينية بطريقة الاحاديات , هذا العمل تم الربط بين الدراره الهندسية والهيدروليكية و خصائص الانسياب المدروسة بطريقة الاحاديات, هذه الطريقة سمحت لنا بالحصول على تحليل دقيق و كامل و الذي تحصل بطريقة مثلى المجموعة (سائل- اله- تربينية)  
كلمات المفتاح: طريقة الاحاديات, آله تربينية, جسم أيروديناميكي متحرك

### Résumé

Le but de ce travail est la conception optimale d'une machine à fluide incompressible par la méthode des singularités. Celle-ci a été effectuée par l'assemblage entre l'étude géométrique et hydraulique et les caractéristiques de l'écoulement traité par la méthode des singularités, Cette méthode nous a permis d'avoir une analyse précise et complète sur le système fluide-turbomachine.

mots clé: méthode des singularités, turbomachine, obstacle aerodynamique mobile

### Abstract

The object of this work is the optimal conception of machine with incompressible fluid by the singularities method. This was done by the assembly between the geometric survey, hydraulic and the features of the drainage treated by the odds method. This method allowed us to have a precise and complete analysis by which we can synthesises the system fluid turbo-machine perfectly.

Key words: the singularities method, turbomachine, movable aerodynamic obstacle

# Sommaire



INTRODUCTION .....	2
--------------------	---

## Chapitre I :      GENERALITES SUR LA METHODE

<b>I. Principe de la méthode</b> .....	5
<b>II Application de la méthode a un profil isolé</b> .....	6
II.1 Description du profil .....	6
II.2 Choix de distribution .....	6
II.3 Champs de vitesse autour du profil .....	7
<b>III. Mise en équation</b> .....	9
III.1 Condition de glissement .....	9
III.2 Etablissement des fonctions d'influence .....	10
III.3 Condition de KUTTA-JOKOWSKI .....	11
<b>IV Calcul des caractéristiques de l'écoulement</b> .....	12
IV.1 Calcul de la vitesse tangentielle .....	12
IV.2 Calcul des coefficients de pression .....	13
<b>V Présentation des résultats</b> .....	14
V.1 Les coefficients de pression .....	14

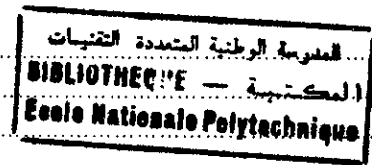
## Chapitre II :      ETUDE GENERALE D'UN ETAGE D'UNE POMPE

<b>I. Création d'un étage de turbo machine</b> .....	17
<b>II. Application de la méthode à un étage de turbo machine</b> .....	18
II.1 Discrétisation des obstacles .....	18
II.2 Champ de vitesse dans l'étage .....	18
III. Mise en équations .....	21
III.1 Condition de glissement .....	21
III.2 Condition de KUTTA .....	23
<b>IV. Calcul des caractéristiques de l'écoulement en étage</b> .....	26
IV.1 Expression de la vitesse tangentielle .....	26
IV-2 Coefficient de pression .....	28
▪ En régime stationnaire .....	29
▪ En régime instationnaire .....	29
▪ <b>V. Présentation des résultats</b> .....	30

## Chapitre III :      CARACTERISTIQUE GEOMETRIQUE DE LA POMPE

<b>I Généralité concernant les profils en grille</b> .....	37
I.1 Définition géométrique .....	37
I.2 Considération cinématique .....	38

<b>II Fonctionnement nominale de la grille</b> .....	39
II.1 Point de référence de la grille .....	39
II.2 Détermination des pertes .....	41
II.3 Coefficient de portance Cz .....	42
II.4 Facteur de diffusion .....	43
<b>III Application numérique</b> .....	44



**Chapitre IV :                    DIMENSIONNEMENT D'UNE MACHINE A  
  COMPRESSION AXIALE**

<b>I. Etude générale d'un étage de compression forme de deux grilles planes</b> .....	49
I.1 Configuration générale de l'étage : .....	49
I.2 Expression de la hauteur locale .....	50
▪ Equation du rotor .....	51
▪ Equation du stator .....	52
I.3 Expression du rendement local .....	53
<b>II. Relation entre les paramètres géométriques et hydrauliques</b> .....	53
II.1 Dimensionnement global .....	54
II.2 Méthodologie du fonctionnement Global .....	56
II.3 Rendement hydraulique global .....	57
II. 4 Définition locale des grilles rotoriques et statoriques .....	57
II. 5 Degré de réaction .....	58
II.6 Bruit hydraulique .....	59
II.7 Capacité d'aspiration (NPSH) .....	61
▪ Mécanisme de la cavitation .....	61
▪ NPSH requis .....	63
<b>III. Application numérique</b> .....	65

**Chapitre V : COORDINATION ETRE LE DIMENSIONNEMENT ET LES  
  CARACTERISTIQUES DE L'ECOULEMENT**

<b>I. Présentation des résultats</b> .....	69
<b>II. Choix optimale du couple (<math>\alpha_m, \beta_m</math>)</b> .....	78
<b>CONCLUSION</b> .....	80

**ANNEXE**



# Notation



$\alpha$	: Direction de l'écoulement par rapport à l'axe OX
$C$	: Vitesse complexe
$C_m$	: Vitesse moyenne du fluide
$C_0$	: Vitesse de l'écoulement à l'infini
$C'$	: Vitesse complexe conjuguée
$C_p$	: Coefficient de pression
$l_j$	: Longueur du panneau j
$p$	: Pression
$s_j$	: Abscisse curviligne
$\gamma(s)$	: Distribution des vorticités
$\gamma_s(s)$	: Vorticité de sommet j
$\delta_j$	: Angle d'inclinaison du panneau j
$\rho$	: Masse volumique
$\sigma$	: Serrage du profil
$b$	: Envergure du profil
$l$	: Corde du profil
$u$	: Composante de la vitesse suivant OX
$v$	: Composante de la vitesse suivant OY
$x(j)$	: Ordonné du point de contrôle j
$y(j)$	: Abscisse du point de contrôle j
$x_s(j)$	: Ordonné du sommet j
$y_s(j)$	: Abscisse du sommet j
$C_z$	: Coefficient de portance
$F_z$	: La portance
$t$	: Pas de la grille
$h$	: Pas du stator
$U$	: Vitesse de rotation du rotor
$W$	: Vitesse relative
$D$	: Facteur de diffusion global
$\gamma$	: Angle de calage
$A(i,j)$	: Matrice d'influence
$B(i)$	: Vecteur du système linéaire
$G(i,j)$	: Fonction d'influence
$F(i,j)$	: Fonction d'influence

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# *Introduction*

---

## Introduction

---

*Il est bien connu que l'écoulement dans une roue de turbomachine est extrêmement complexe vu son aspect instationnaire.*

*Devant cette complexité, les ingénieurs chargés d'appliquer les connaissances de la mécanique des fluides, qui constitue depuis un siècle un vaste champ d'application de mathématique et de la physique qui a subi une grande mutation en introduisant des méthodes numériques permettant un traitement conjoint des équations cinématique et dynamiques.*

*La méthode des singularités est l'une des méthodes les plus performantes, qui permet de calculer l'écoulement dans les turbomachines à fluide incompressible.*

*On s'intéresse également dans ce travail, à utiliser cette méthode dans le dimensionnement des turbomachines pour cela, on propose d'approcher notre mode de travail suivant l'analyse suivant :*

### **Le chapitre I**

*Donne une présentation de la méthode des singularités, que l'on l'applique à un profil isolé.*

### **Le chapitre II**

*Représente, le traitement d'un étage de turbomachine par la méthode des singularités en faisant introduire le concept d'instationnairité de l'écoulement.*

### **Le chapitre III**

*Donne une approche du dimensionnement géométrique d'un étage de machine a compression axial.*

**Le chapitre IV**

*Nous permet d'effectuer une nouvelle approche dans le dimensionnement hydraulique. Celle-ci sera complétée, par la suite, par l'introduction de la relation qui lie les caractéristiques géométriques et hydrauliques.*

**Le chapitre V**

*Nous fait exploiter les autres chapitres par un assemblage entres l'étude de dimensionnement et les caractéristiques de l'écoulement traitées par la méthode de singularité.*

*En fin, cette modeste étude sera achevée par une conclusion générale.*

Chapitre 7

Généralités Sur La  
Méthode

---

**Chapitre 1: GENERALITES SUR LA METHODE**

---

**I. Principe de la méthode**

Parmi plusieurs méthodes d'analyse d'écoulement en mécanique des fluides vient la méthode des singularités, qui consiste à faire une distribution pour simuler des écoulements autour des obstacles et aussi pour nous permettre de calculer les différents paramètres tels la vitesse, la pression et les paramètres aérodynamiques.

Les singularités représentent les écoulements élémentaires complètement définis, nous citerons comme exemple l'écoulement uniforme, les sources, les vortex et les doublets.

Le principe de base de cette méthode consiste à superposer ces singularités pour en déduire une solution plus complexe simulant ainsi l'écoulement autour d'un obstacle défini.

La méthode consiste d'une manière globale à :

- ◆ discrétiser l'obstacle en divisant sa forme en un nombre fini de points qu'on appellera « sommets », ces sommets seront reliés par des segments de droites qu'on appellera « panneaux » pour former un polygone de  $n$  cotés.
- ◆ charger les panneaux des singularités, la manière de ces chargements dépend du profil qu'on veut analyser « profil portant ou non »,
- ◆ localiser en chaque milieu de panneau un point appelé « point de contrôle » et définir parfaitement les coordonnées de ce point ,
- ◆ Calculer en chaque point de contrôle, les composantes de la vitesse en fonction de la vorticités  $\gamma_s$ .
- ◆ Résoudre le système linéaire pour trouver les résolutions ( $\gamma_s$ ), en appliquant une méthode de résolution numérique des systèmes linéaires.

◆ Enfin, calculer les différents paramètres de l'écoulement tel que la vitesse tangentielle, la pression, etc...

## II. Application de la méthode a un profil isolé :

### II.1 Description du profil :

On discrétise le profil en un nombre fini de points sommets ( $X_s(j)$ ,  $Y_s(j)$ ) relier par des segments droits (panneaux). Pour former aussi un polygone de  $n$  cotés au milieu de chaque panneau, on place un point de contrôle ( $X(i)$ ,  $Y(i)$ ).

$$X(i) = \frac{X_s(i) + X_s(i-1)}{2}$$

$$Y(i) = \frac{Y_s(i) + Y_s(i-1)}{2}$$

Pour chaque panneau ( $j$ ), on associe un axe de coordonnée curviligne  $S_j$  tel que pour le point ( $X(i-1)$ ,  $Y(i-1)$ )  $S_j = 0$  et pour le point ( $X(i)$ ,  $Y(i)$ )  $S_j = L_j$  ( $L_j$  longueur du panneau  $j$ ). Donc les coordonnées ( $X(i)$ ,  $Y(i)$ ) d'un point appartenant au panneau  $j$  s'écrivent:

$$X(j) = X_s(j-1) + S_j \cos(S_j)$$

$$Y(j) = Y_s(j-1) + S_j \sin(S_j)$$

avec :  $S_j$  respecte l'angle d'inclinaison du panneau ( $j$ ).

### II.2 Choix de distribution :

D'après la référence [7], l'étude comparative a démontré que la distribution linéaire possède une précision très proche de la distribution parabolique mais elle a une formulation plus simple et un temps de calcul plus réduit. on répartit le long de chaque panneau une charge constituée d'une distribution linéaire de vortex.

$$\gamma_j = \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j$$

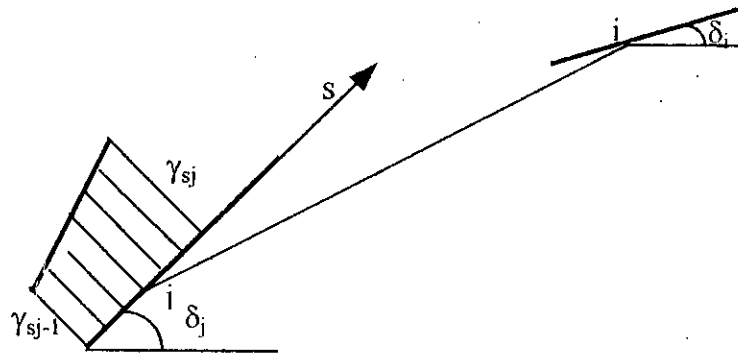


Fig. (I.1) : Discrétisation du profil

### II.3 Champs de vitesse autour du profil :

Le potentiel complexe induit par un point du panneau «j» d'affixe  $z_j$  en un point quelconque d'affixe  $z$  est :

$$F(z) = -\frac{i}{2\pi} \gamma_j \ln(z - z_j)$$

L'intégration le long du panneau, nous permet de déterminer l'effet total de cette distribution

$$F(z) = -\frac{i}{2\pi} \int \gamma(j) \ln(z - z_j) ds_j$$

d'où la vitesse conjuguée :

$$c' = \frac{dF}{dZ} = -\frac{1}{2\pi} \int \gamma_j \frac{1}{z - z_j} ds_j$$

$$c' = -\frac{1}{2\pi} \int \gamma_j \frac{(x - x_j) - i(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} ds_j$$

$$c' = -\frac{1}{2\pi} \int \gamma_j \frac{(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} ds_j + i \int \gamma_j \frac{(x - x_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} ds_j$$

Pour  $n$  panneaux, on somme les influences de tous les panneaux :

$$c' = -\frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{j=1}^n \int \gamma_j \frac{(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} ds_j + i \sum_{j=1}^n \int \gamma_j \frac{(x - x_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} ds_j \right]$$



En superposant à ces vortex, l'écoulement est uniforme. donnée par l'expression suivante

$$C'_{\text{ecolt unif}} = C_0 \exp(-i\alpha) = C_0 [\cos(\alpha) - i \sin(\alpha)].$$

La vitesse conjuguée d'un point  $(x, y)$  de l'écoulement en tenant compte de la présence de l'obstacle s'écrit alors tel que :

$$\frac{v_i}{u_i} = \tan \delta_i \Rightarrow v_i \cos \delta_i = u_i \sin \delta_i$$

donc le vecteur vitesse est donnée :

$$\vec{c}' = \begin{cases} u = c_0 \cos \alpha - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{y_j} \gamma_j \frac{(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} ds_j \\ v = c_0 \sin \alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{y_j} \gamma_j \frac{(x - x_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} ds_j \end{cases} \quad [I.1]$$

On calcul les composantes de la vitesse de chaque points de contrôle  $(X_i, Y_i)$ .

$$X(i) = \frac{Xs(i) + Xs(i-1)}{2}$$

$$Y(i) = \frac{Ys(i) + Ys(i-1)}{2}$$

tel que :

$$\vec{c}'_i = \begin{cases} u_i = c_0 \cos \alpha - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{y_j} \gamma_j \frac{(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos \delta_i \\ v_i = c_0 \sin \alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{y_j} \gamma_j \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin \delta_i \end{cases}$$

$\frac{\gamma_m}{2}$  : représente l'influence du panneau sur lui même, et égale à :

$$\frac{\gamma_m}{2} = \frac{\gamma_j \left( \frac{l_j}{2} \right)}{2} = \frac{\gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} (l_j/2)}{2} \quad [I.2]$$

$$= \frac{\gamma_s(j) + \gamma_s(j-1)}{4}$$

### III. Mise en équation :

#### III.1 Condition de glissement :

Pour traduire l'imperméabilité du profil on pose une condition aux limites appelée *condition de glissement* qui impose que la vitesse sur la surface du profil, soit tangente à ce dernier, donc la vitesse en chaque point de contrôle est tangente au panneau donc :

$$\frac{v_i}{u_i} = \operatorname{tg} \delta_i \Rightarrow v_i \cos \delta_i = u_i \sin \delta_i$$

alors :

$$c_0 \sin \alpha \cos \delta_i + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{\gamma} \gamma_j \frac{(x_i - x_j) \cos \delta_i}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin \delta_i \cdot \cos \delta_i =$$

$$c_0 \cos \alpha \sin \delta_i - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{\gamma} \gamma_j \frac{(y_i - y_j) \sin \delta_i}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin \delta_i \cdot \cos \delta_i$$

d'où :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{\gamma} \gamma_j \left[ \frac{(x_i - x_j) \cos \delta_i + (y_i - y_j) \sin \delta_i}{2\pi [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]} \right] ds_j = c_0 (\cos \alpha \cdot \sin \delta_i - \sin \alpha \cdot \cos \delta_i) \quad \text{[I.3]}$$

On a par contre :

$$\begin{cases} x_j = X_s(j-1) + S_j \cos \delta_j \\ y_j = Y_s(j-1) + S_j \sin \delta_j \end{cases}$$

et :

$$\gamma_j = \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j$$

En remplaçant dans l'équation [I.2], on trouve :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_b^y (\gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j) \left[ \frac{(x_i - x_j) \cos \delta_i + (y_i - y_j) \sin \delta_i}{2\pi[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]} \right] ds_j = c_0 \sin(\delta_i - \alpha)$$

### III.2 Etablissement des fonctions d'influence :

Les fonctions d'influence « G.F » qui représentent les caractéristiques géométriques de l'obstacle peuvent être écrites comme suit :

$$G(i, j) = \int_b^y \left[ \frac{(x_i - x_j) \cos \delta_i + (y_i - y_j) \sin \delta_i}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]} \right] ds_j$$

$$F(i, j) = \int_b^y \left[ \frac{(x_i - x_j) \cos \delta_i + (y_i - y_j) \sin \delta_i}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]} \right] s_j ds_j$$

d'où:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[ G(i, j) \cdot \gamma_s(j-1) + F(i, j) \cdot \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \right] = 2\pi c_0 \sin(\delta_i - \alpha)$$

On remarque que l'intensité des singularités pour  $j=1$  n'est pas définie, donc on fait la sommation de  $j=2$  à  $j=n+1$ , puis on confond le point  $j=n+1$  avec le point 1 on aura alors :

$$G(i, n+1) = G(i, 1)$$

$$F(i, n+1) = F(i, 1)$$

On remarque maintenant qu'on dispose de  $n$  équations alors qu'on a  $n+1$  inconnues, pour remédier à cet inconvénient, on dispose d'une condition supplémentaire (condition de KUTTA JOUKOWSKI).

### III.3 Condition de KUTTA-JOUKOWSKI :

selon la géométrie du profil, la condition de KUTTA s'écrit de deux façons:

- pour un profil se terminant par un dièdre, le bord de fuite est point d'arrêt.
- pour un profil se terminant par un point de rebroussement la vitesse à l'extrados et à l'intrados au niveau du bord de fuite a la même valeur finie.

Dans notre application la condition de KUTTA impose que la vitesse à l'extrados et à l'intrados au bord de fuite a la même valeur finie, donc il n'y a pas de glissement entre les couches fluide en ce point, alors la vorticité est nulle, ce qui est traduit par:

$$(\gamma_{n+1} = -\gamma_1)$$

Enfin on acc dera à un système linéaire de « n » équations a « n » inconnues.

Le vecteur [B] : représente les caractéristiques de l'écoulement libre et sa direction par rapport à chaque panneau.

La matrice [A] est une combinaison linéaire des éléments des matrices d'influence {G.F}. Donc elle représente les caractéristiques géométriques du profil.

$$\left[ \begin{array}{l} B(i) = 2\pi c_0 \sin(\delta_i - \alpha) \\ A(i,1) = G(i,2) - \frac{F(i,2)}{l_2} + \frac{F(i,1)}{l_1} \\ A(i,j) = G(i,j+1) - \frac{F(i,j+1)}{l_{j+1}} + \frac{F(i,j)}{l_j} \\ A(i,n) = G(i,1) - \frac{F(i,n)}{l_n} + \frac{F(i,1)}{l_1} \end{array} \right. \quad \text{[I.4]}$$

La résolution du système linéaire [I.4] ci-dessus permet de déterminer  $(\gamma_s(j), j=1,n)$ .

On obtient ainsi un réglage des paramètres  $\gamma_s(j)$  qui détermine une approximation numérique de l'écoulement autour du corps on peut alors calculer facilement les paramètres de l'écoulement ( vitesse, coefficient de pression etc...).

#### IV. Calcul des caractéristiques de l'écoulement

##### IV.1 Calcul de la vitesse tangentielle

Une fois les solutions  $\gamma_s$  calculées, on injecte pour calculer les  $C_i$  telle que:

$$C_i = -(u_i \cos \delta_i + v_i \sin \delta_i)$$

En remplaçant  $u_i, v_i$  dans l'équation [I.1], l'expression de  $C_i$  devient:

$$c_i = - \left[ c_0 \sin(\alpha - \delta_i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{y_j} \gamma_j \frac{(x_i - x_j) \sin \delta_i ds_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{y_j} \gamma_j \frac{(y_i - y_j) \cos \delta_i ds_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - \frac{\gamma_m}{2} \right]$$

$$c_i = -c_0 \sin(\alpha - \delta_i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{y_j} \gamma_j \frac{[(y_i - y_j) \cos \delta_i - (x_i - x_j) \sin \delta_i] ds_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} + \frac{\gamma_m}{2}$$

$$\gamma_j = \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} S_j$$

En introduisant les fonctions d'influence (G,F) telles que:

$$G(i, j) = \int_{y_j} \left[ \frac{(y_i - y_j) \cos \delta_i + (x_i - x_j) \sin \delta_i}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]} \right] ds_j$$

$$F(i, j) = \int_{y_j} \left[ \frac{(y_i - y_j) \cos \delta_i - (x_i - x_j) \sin \delta_i}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]} \right] s_j ds_j$$

L'expression de  $c_i$  se simplifiera à:

$$c_i = -c_0 \sin(\alpha - \delta_i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[ G(i, j) \cdot \gamma_s(j-1) + F(i, j) \cdot \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \right] + \frac{\gamma_m}{2} \quad \text{[I.5]}$$

On remplace l'expression de  $\frac{\gamma_m}{2}$  dans l'équation [I.2] on trouve alors :

$$c_i = -c_0 \sin(\alpha - \delta_i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=i}^n \left[ G(i, j) \cdot \gamma_s(j-1) + F(i, j) \cdot \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \right] + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{4}$$

Pour linéariser la forme de l'expression de  $c_i$ , on met l'expression [I.2] de  $\frac{\gamma_m}{2}$  entre les parenthèses, on aura alors:

$$c_i = -c_0 \sin(\alpha - \delta_i) + \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{j=i}^n \left[ G(i, j) \cdot \gamma_s(j-1) + F(i, j) \cdot \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \right] + \underbrace{\pi \gamma_s(j-1) + 2\pi j \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j}}_{\text{pour } i=j} \right\}$$

donc les valeurs de G et F pour  $i=j$  seront:

$$\begin{cases} G(i, j) = \pi \\ F(i, j) = \frac{\pi \cdot l_j}{2} \end{cases}$$

et la matrice d'influence sera :

$$\begin{cases} A(i, 1) = G(i, 2) - \frac{F(i, 2)}{l_2} + \frac{F(i, 1)}{l_1} \\ A(i, j) = G(i, j+1) - \frac{F(i, j+1)}{l_{j+1}} + \frac{F(i, j)}{l_j} \\ A(i, n) = G(i, 1) - \frac{F(i, n)}{l_n} + \frac{F(i, 1)}{l_1} \end{cases}$$

et en fin l'expression vectorielle finale de  $c_i$  devient :

$$c_i = -c_0 \sin(\alpha - \delta_i) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} A(i, j) \cdot \gamma_s(j)$$

#### IV.2 Calcul des coefficients de pression

On appliquera l'équation de **BERNOULLI** entre deux points, le premier à l'infini amont et le deuxième, sur l'obstacle  $i$  tel que :

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho c_0^2 = p_i + \frac{1}{2}\rho c_i^2$$

$$p_i - p_\infty = \frac{1}{2}\rho c_0^2 \left( 1 - \left( \frac{c_i}{c_0} \right)^2 \right)$$

$$Cp = \frac{p_i - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho c_0^2} = 1 - \left( \frac{c_i}{c_0} \right)^2$$

## V. Présentation des résultats

Les résultats obtenues correspondent au NACA 65-173 [Annexe A]

### V.1 Les coefficients de pression

Pour  $\alpha=2^\circ$ : On remarque nettement que le bord d'attaque est un point de stagnation, où on observe la création d'une dépression assez importante sur l'extrados qui s'éteint au fur et à mesure qu'on s'approche du bord de fuite, sur l'intrados les coefficients de pression garde une allure uniforme, l'importance de différence de la dépression sur l'extrados et celle sur l'intrados engendre la portance.

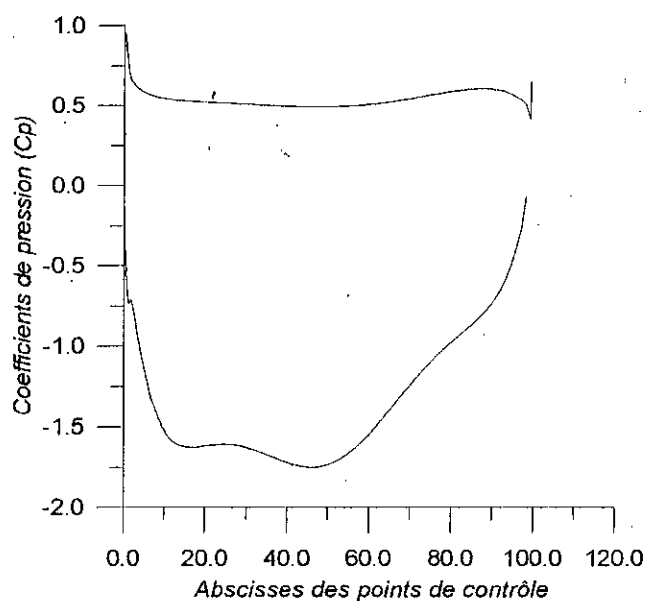


Fig. (I.2) : Les coefficients de pression pour  $\alpha = 2^\circ$

Pour  $\alpha = 16^\circ$ : Le point de stagnation s'est déplacé sur l'intrados, du fait que l'angle d'attaque a changé. Dans ce cas le profil reste portant car la dépression sur l'extrados est plus importante que celle de l'intrados.

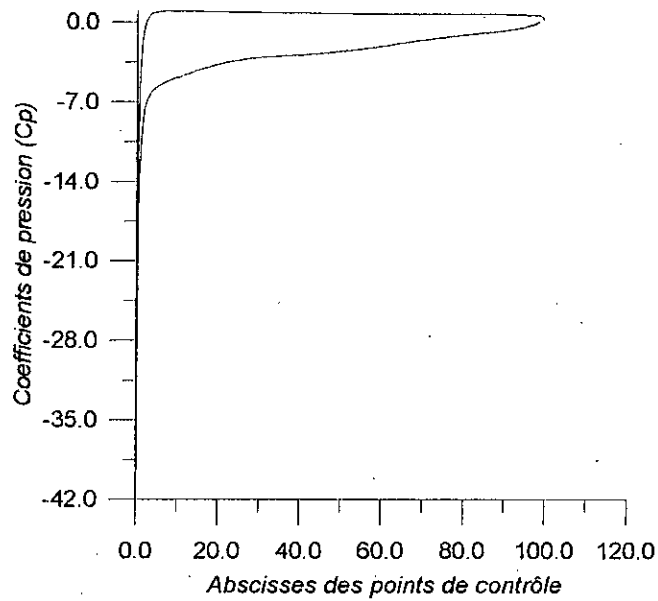


Fig. (I.3) : Les coefficients de pression pour  $\alpha = 16^\circ$



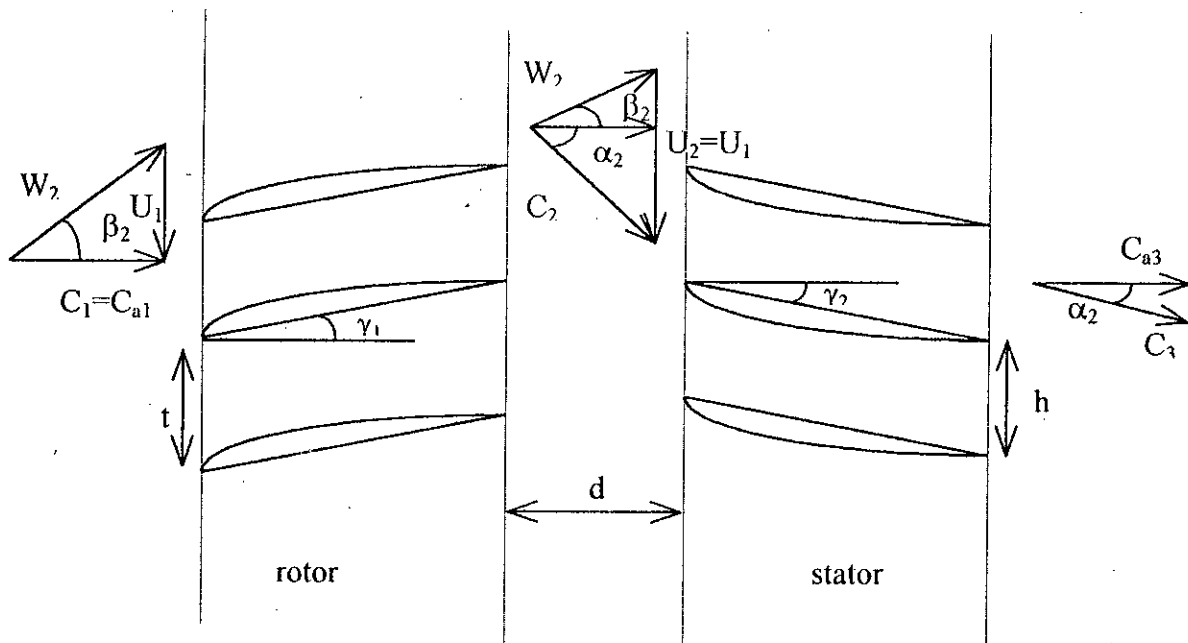
Chapitre Ff

Etude Générale D'un Etage  
D'une Pompe

---

**Chapitre II : ETUDE GENERALE D'UN ETAGE D'UNE POMPE**


---

**I. Création d'un étage de turbomachine :****Fig.(II.1) : Etage d'une turbomachine**

La figure précédente illustre la conception d'un étage de compression, et on donne les principales relations des triangles des vitesses:

$$\operatorname{tg}(\beta_m) = \frac{\operatorname{tg}(\beta_1) + \operatorname{tg}(\beta_2)}{2}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_m) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_2) + \operatorname{tg}(\alpha_3)}{2}$$

$$\operatorname{tg}(\beta_1) = \operatorname{tg}(\beta_2) + \operatorname{tg}(\alpha_2)$$

$$\operatorname{tg}(\beta_1) = \operatorname{tg}(\alpha_m) + \operatorname{tg}(\beta_m)$$

**II. Application de la méthode à un étage de turbo machine :**

**II.1 Discrétisation des obstacles :**

On adopte la même série de profils pour le stator et le rotor. On conserve la démarche de discrétisation précédente pour le rotor, mais pour le stator on doit introduire la distance  $d$  stator-rotor et inverser le stator.

$$\begin{cases} X_s(i) = X_r(i) + l_r \cos(\delta_r) + d \\ Y_s(i) = -Y_r(i) \end{cases}$$

**II.2 Champ de vitesse dans l'étage**

La superposition des potentiels complexes induits par le rotor et ceux induits par le stator, nous donne:

$$F(z) = F_r(z) + F_s(z)$$

En explicitant les expressions des potentiels complexes obtenus au chapitre précédent, on trouve:

$$F(z) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \ln(z_0 - z_j) \partial s_j - \frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=n+1}^{2n} \int_{l_j} \gamma_j(s) \ln(z_0 - z_j) \partial s_j$$

La vitesse conjuguée est calculée, en dérivant le potentiel complexe par rapport à l'affixe  $z$ :

$$c' = \frac{dF}{dz} = \frac{dF_r}{dz} + \frac{dF_s}{dz}$$

$$\text{tel que : } c' = \frac{dF}{dz} = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \frac{\partial s_j}{(z_0 - z_j)} - \frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=n+1}^{2n} \int_{l_j} \gamma_j(s) \frac{\partial s_j}{(z_0 - z_j)}$$

Notons que les affixes  $Z_0$  et  $Z_j$  s'écrivent sous la forme

pour le rotor  $j=1, n$   $z_j = x_j + i(y_j + kt)$

pour le stator  $j=n+1, 2n$   $z_j = x_j + i(y_j + kh)$

$$z_0 = x_0 + iy_0$$

L'expression de la vitesse conjuguée devient alors :

$$c' = \frac{dF}{dz} = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \frac{\partial s_j}{(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j) + kt} - \frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=n+1}^{2n} \int_{l_j} \gamma_j(s) \frac{\partial s_j}{(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j) + kh}$$

On peut écrire l'équation précédente sous une forme d'une série, on trouve :

$$c' = -\frac{i}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial s_j}{\frac{\pi}{t} [(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j)] + i\pi k} - \frac{i}{2h} \sum_{j=n+1}^{2n} \int_{l_j} \gamma_j(s) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial s_j}{\frac{\pi}{h} [(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j)] + i\pi h}$$

On remarque bien que l'expression :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial s_j}{\frac{\pi}{t} [(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j)] + i\pi k} \text{ est un développement limité de la fonction}$$

$$\coth\left(\frac{\pi}{t} [(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j)]\right)$$

de la même façon pour le terme :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial s_j}{\frac{\pi}{h} [(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j)] + i\pi h} = \coth\left(\frac{\pi}{h} [(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j)]\right)$$

Donc l'expression de la vitesse conjuguée induite par toutes les singularités distribuées sur tous les aubages de l'étage s'écrit alors:

$$c' = -\frac{i}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \coth\left(\frac{\pi}{t} [(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j)]\right) \partial s_j - \frac{i}{2h} \sum_{j=n+1}^{2n} \int_{l_j} \gamma_j(s) \coth\left(\frac{\pi}{h} [(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j)]\right) \partial s_j$$

La vitesse de l'écoulement dans le point de contrôle de coordonnées  $(X_i, Y_i)$  est :

$$c'_i = -\frac{i}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \coth\left(\frac{\pi}{t}[(x_i - x_j) + i(y_i - y_j)]\right) \delta s_j$$

$$-\frac{i}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} \gamma_j(s) \coth\left(\frac{\pi}{h}[(x_i - x_j) + i(y_i - y_j)]\right) \delta s_j m \frac{\gamma_m}{2} \exp(-i\delta_i)$$

On propose les changements des variables suivantes :

$$\left. \begin{aligned} X_{sij} &= \frac{\pi}{h}(x_i - x_j) \\ Y_{sij} &= \frac{\pi}{h}(y_i - y_j) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z_{sij} = X_{sij} + iY_{sij}$$

$$\left. \begin{aligned} X_{rij} &= \frac{\pi}{t}(x_i - x_j) \\ Y_{rij} &= \frac{\pi}{t}(y_i - y_j) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z_{rij} = X_{rij} + iY_{rij}$$

et on a également :

$$i \coth(Z_{ij}) = \frac{\sin(2Y_{ij}) + ish(2X_{ij})}{ch(2Y_{ij}) - i \cos(2Y_{ij})}$$

Ce changement de variable nous permet de séparer les deux parties imaginaire et réelle de la vitesse conjuguée.

$$c'_i = -\frac{i}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \gamma_j \frac{\sin(2Y_{rij}) + ish(2X_{rij})}{ch(2Y_{rij}) - i \cos(2Y_{rij})} \gamma_j(s) \delta s_j$$

$$-\frac{i}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} \frac{\sin(2Y_{sij}) + ish(2X_{sij})}{ch(2Y_{sij}) - i \cos(2Y_{sij})} \gamma_j(s) \delta s_j - \frac{\gamma_m}{2} \exp(-i\delta_j)$$

En introduisant les changements des variables suivantes :

pour le stator :  $f_{sx} = \frac{\sin(2Y_{sij})}{ch(2Y_{sij}) - i \cos(2Y_{sij})}$ ,  $f_{sy} = \frac{sh(2X_{sij})}{ch(2X_{sij}) - i \cos(2Y_{sij})}$

pour le rotor :  $f_{rx} = \frac{\sin(2Y_{rij})}{ch(2Y_{rij}) - i \cos(2Y_{rij})}$ ,  $f_{ry} = \frac{sh(2X_{rij})}{ch(2X_{rij}) - i \cos(2Y_{rij})}$

Les composantes de la vitesse induite par l'étage seront alors :

$$\bar{c}_i = \begin{cases} \text{Re}(c'_i) = -\frac{1}{2l} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_{rx} \gamma_j(s) \bar{\alpha}_j - \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_{sx} \gamma_j(s) \bar{\alpha}_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_j) \\ -\text{Im}(c'_i) = -\frac{1}{2l} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_{ry} \gamma_j(s) \bar{\alpha}_j - \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_{sy} \gamma_j(s) \bar{\alpha}_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_j) \end{cases}$$

Pour modéliser l'écoulement dans l'étage, on superpose l'ensemble des singularités induites par l'étage et un écoulement uniforme de module  $C_m$  et de direction  $\alpha_m$  :

$$\bar{c}_i = \begin{cases} u_i = c_m \cos(\alpha_m) - \frac{1}{2l} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_{rx} \gamma_j(s) \bar{\alpha}_j - \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_{sx} \gamma_j(s) \bar{\alpha}_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_j) \\ v_i = c_m \sin(\alpha_m) + \frac{1}{2l} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_{ry} \gamma_j(s) \bar{\alpha}_j - \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_{sy} \gamma_j(s) \bar{\alpha}_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_j) \end{cases}$$

qui représente l'expression générale de la vitesse dans un point quelconque de l'étage

### III. Mise en équations

Les conditions aux limites restent les mêmes, que celle imposé au chapitre précédent (KUTTA et glissement), mais c'est la manière de poser chaque condition qui change, sur le rotor et sur le stator.

#### III.1 Condition de glissement

La distribution de vorticité sera définie comme précedemment par l'application de la condition de glissement en  $(2n)$  points de contrôle; Cependant dans le cas du rotor, c'est la vitesse relative qui doit satisfaire les conditions de glissement.

Celle ci s'écrira alors :

- pour le rotor  $tg(\delta_i) = \frac{v_i + U}{u_i} \quad i=1, n$
- pour le stator  $tg(\delta_i) = \frac{v_i}{u_i} \quad i=n+1, 2n$

Après simplification des équations on obtient :

$$-\frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{\substack{y \\ j \neq i}} (f_{ry} \cos(\delta_i) + f_{rx} \sin(\delta_i)) \gamma_j(s) \delta s_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{\substack{y \\ j \neq i}} (f_{sy} \cos(\delta_i) + f_{sx} \sin(\delta_i)) \gamma_j(s) \delta s_j = c_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda u \cos(\delta_i)$$

avec  $\lambda=1$  pour  $j < n$

$\lambda=0$  pour  $j > n$

Soit le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} f_r = f_{ry} \cos(\delta_i) + f_{rx} \sin(\delta_i) \\ f_s = f_{sy} \cos(\delta_i) + f_{sx} \sin(\delta_i) \end{cases}$$

Alors

$$\frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{\substack{y \\ j \neq i}} f_r \gamma_j(s) \delta s_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{\substack{y \\ j \neq i}} f_s \gamma_j(s) \delta s_j = c_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda u \cos(\delta_i)$$

Comme  $\gamma_j$  est répartie linéairement, on aboutit à

$$\frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{\substack{y \\ j \neq i}} \left[ \gamma(j-1) + \frac{\gamma(j) + \gamma(j-1)}{l_j} s_j \right] f_r \delta s_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{\substack{y \\ j \neq i}} \left[ \gamma(j-1) + \frac{\gamma(j) + \gamma(j-1)}{l_j} s_j \right] f_s \delta s_j = c_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda u \cos(\delta_i)$$

- pour le rotor :  $G_r(i, j) = \int_{\substack{y \\ j \neq i}} f_r \delta s_j, F_r(i, j) = \int_{\substack{y \\ j \neq i}} f_r s_j \delta s_j$
- pour le stator :  $G_s(i, j) = \int_{\substack{y \\ j \neq i}} f_s \delta s_j, F_s(i, j) = \int_{\substack{y \\ j \neq i}} f_s s_j \delta s_j$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2t} \left[ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} G_r(i, j) \cdot \gamma(j-1) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F_r(i, j) \frac{\gamma(j) + \gamma(j-1)}{l_j} \right] \\ & + \frac{1}{2h} \left[ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} G_s(i, j) \cdot \gamma(j-1) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2n} F_s(i, j) \frac{\gamma(j) + \gamma(j-1)}{l_j} \right] \\ & = c_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda u \cos(\delta_i) \end{aligned}$$

D'après l'équation finale, on remarque que la première intensité et l'intensité (n+1) ne sont pas définies pour résoudre ce problème on doit incrémenter sur le rotor du point 2 jusqu'au point n+1, et on confond la distribution n+1 avec la distribution 1, sur le stator, on incrémente de n+2 jusqu'à 2n+1 et on confond la distribution 2n+1 avec la distribution n+1.

$$\begin{aligned} G_r(i, n+1) &= G_r(i, 1) \\ F_r(i, n+1) &= F_r(i, 1) \\ G_s(i, 2n+1) &= G_s(i, n+1) \\ F_s(i, 2n+1) &= F_s(i, n+1) \end{aligned}$$

Ce qui engendre un système d'équation linéaire à 2n équations et 2n+1 inconnues, on doit donc imposer les deux conditions de KUTTA, l'une sur le rotor et l'autre sur le stator.

### III.2 Condition de KUTTA :

Au bord de fuite de chaque aube, la vitesse doit vérifier cette condition, qui traduit l'intensité en module de la vitesse sur l'extrados et l'intrados.

- sur le rotor : Intensité de la vitesse relative
- sur le stator : Intensité de la vitesse absolue



Pour satisfaire cette condition, on impose :

- pour le rotor :  $\gamma(n+1)=-\gamma(1)$
- pour le stator  $2\gamma(2n+1)=-\gamma(n+1)$

En fin on obtiendra à un système linéaire de  $2n$  équations à  $2n$  inconnues.

➤ pour le rotor :  $i=1, n$

avec :  $\beta(i) = C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - U \cos(\delta_i)$

◆  $j=1, n$ , qui nous permet de donner l'influence du rotor sur lui-même:

$$\begin{cases} A(i,1) = \frac{1}{2t} \left( G_r(i,2) - \frac{F_r(i,2)}{l_r(2)} - \frac{F_r(i,1)}{l_r(1)} \right) \\ A(i,n) = \frac{1}{2t} \left( G_r(i,1) - \frac{F_r(i,1)}{l_r(1)} - \frac{F_r(i,n)}{l_r(n)} \right) \\ A(i,j) = \frac{1}{2t} \left( G_r(i,j+1) - \frac{F_r(i,j+1)}{l_r(j+1)} - \frac{F_r(i,j)}{l_r(j)} \right) \end{cases}$$

◆  $j=n+1, 2n$ , qui nous permet de donner l'influence du stator sur le rotor:

$$\begin{cases} A(i,n+1) = \frac{1}{2h} \left( G_s(i,n+2) - \frac{F_s(i,n+2)}{l_s(n+2)} - \frac{F_s(i,n+1)}{l_s(n+1)} \right) \\ A(i,2n) = \frac{1}{2h} \left( G_s(i,n+1) - \frac{F_s(i,n+1)}{l_s(n+1)} + \frac{F_s(i,2n)}{l_s(2n)} \right) \\ A(i,j) = \frac{1}{2h} \left( G_s(i,j+1) - \frac{F_s(i,j+1)}{l_s(j+1)} + \frac{F_s(i,j)}{l_s(j)} \right) \end{cases}$$

➤ pour le stator :  $i=n+1, 2n$

avec :  $\beta(i) = C_m \sin(\delta_i - \alpha_m)$

♦  $j=1, n$ , qui nous permet de donner l'influence du rotor sur le stator :

$$\begin{cases} A(i,1) = \frac{1}{2t} \left( G_r(i,2) - \frac{F_r(i,n+2)}{l_r(n+2)} - \frac{F_r(i,n+1)}{l_r(n+2)} \right) \\ A(i,n) = \frac{1}{2t} \left( G_r(i,1) - \frac{F_r(i,1)}{l_r(1)} + \frac{F_r(i,n)}{l_r(n)} \right) \\ A(i,j) = \frac{1}{2t} \left( G_r(i,j+1) - \frac{F_r(i,j+1)}{l_r(j+1)} - \frac{F_r(i,j)}{l_r(j)} \right) \end{cases}$$

♦  $j=n+1, 2n$ , qui nous permet de donner l'influence du stator sur lui-même:

$$\begin{cases} A(i,n+1) = \frac{1}{2h} \left( G_s(i,n+2) - \frac{F_s(i,n+2)}{l_s(n+2)} - \frac{F_s(i,n+1)}{l_s(n+2)} \right) \\ A(i,2n) = \frac{1}{2h} \left( G_s(i,n+1) - \frac{F_s(i,n+1)}{l_s(n+1)} + \frac{F_s(i,2n)}{l_s(2n)} \right) \\ A(i,j) = \frac{1}{2h} \left( G_s(i,j+1) - \frac{F_s(i,j+1)}{l_s(j+1)} + \frac{F_s(i,j)}{l_s(j)} \right) \end{cases}$$

Soit finalement une matrice d'influence globale :

$$A = \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{sr} \\ A_{rs} & A_{ss} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_r \\ B_r \end{bmatrix}$$

Avec :

$A_{rr}$  : représente l'influence du rotor sur lui même

$A_{sr}$  : représente l'influence du stator sur le rotor

$A_{rs}$  : représente l'influence du rotor sur le stator

$A_{ss}$  : représente l'influence du stator sur lui même

Le vecteur [B] représente les caractéristiques de l'écoulement libre et sa direction par rapport à chaque panneau.

La résolution de ce système nous permet de calculer les vorticités ( $\gamma_s(j)$ ,  $j=1, 2n$ ), qui nous donnent l'accès au calcul des paramètres de l'écoulement dans l'étage.

#### IV. Calcul des caractéristiques de l'écoulement en étage :

##### IV.1 expression de la vitesse tangentielle:

On donne cette variable à travers l'expression suivante :

$$c_i = c_m \cos(\alpha_m) \cos(\delta_i) - \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_{rx} \cos(\delta_i) \gamma_j(s) \delta s_j - \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_{sx} \cos(\delta_i) \gamma_j(s) \delta s_j \\ + c_m \sin(\alpha_m) \sin(\delta_i) + \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_{ry} \sin(\delta_i) \gamma_j(s) \delta s_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_{sy} \sin(\delta_i) \gamma_j(s) \delta s_j \\ - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \cos(\delta_i) - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \sin(\delta_i)$$

$$c_i = - \left[ - \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} (f_{ry} \sin(\delta_i) + f_{rx} \cos(\delta_i)) \gamma_j(s) \delta s_j \right. \\ \left. - \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} (f_{sy} \sin(\delta_i) + f_{sx} \cos(\delta_i)) \gamma_j(s) \delta s_j - \frac{\gamma_m}{2} + c_m \cos(\alpha_m - \delta_m) \right]$$

On pose le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} f_r = f_{ry} \sin(\delta_i) + f_{rx} \cos(\delta_i) \\ f_s = f_{sy} \sin(\delta_i) + f_{sx} \cos(\delta_i) \end{cases}$$

On obtient :

$$c_i = -c_m \cos(\alpha_m - \delta_i) + \frac{\gamma_m}{2} + \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_r \gamma_j(s) \delta s_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_s \gamma_j(s) \delta s_j$$

On remplace  $\gamma_j$  pour sa valeur on obtient alors :

$A_{rr}$  : représente l'influence du rotor sur lui-même

$A_{sr}$  : représente l'influence du stator sur le rotor

$A_{rs}$  : représente l'influence du rotor sur le stator

$A_{ss}$  : représente l'influence du stator sur lui même

➤ Pour le rotor  $i=1, n$

◆  $j=1, n$

$$A_{rr} \begin{cases} A(i,1) = \frac{1}{2t} \left( G_r(i,2) - \frac{F_r(i,2)}{l_r(2)} - \frac{F_r(i,1)}{l_r(1)} \right) \\ A(i,j) = \frac{1}{2t} \left( G_r(i,j+1) - \frac{F_r(i,j+1)}{l_r(j+1)} - \frac{F_r(i,j)}{l_r(j)} \right) \\ A(i,n) = \frac{1}{2t} \left( G_r(i,1) - \frac{F_r(i,1)}{l_r(1)} - \frac{F_r(i,n)}{l_r(n)} \right) \end{cases}$$

◆  $j=n+1, 2n$

$$A_{sr} \begin{cases} A(i,n+1) = \frac{1}{2h} \left( G_s(i,n+2) - \frac{F_s(i,n+2)}{l_s(n+2)} - \frac{F_s(i,n+1)}{l_s(n+1)} \right) \\ A(i,j) = \frac{1}{2h} \left( G_s(i,j+1) - \frac{F_s(i,j+1)}{l_s(j+1)} + \frac{F_s(i,j)}{l_s(j)} \right) \\ A(i,2n) = \frac{1}{2h} \left( G_s(i,n+1) - \frac{F_s(i,n+1)}{l_s(n+1)} + \frac{F_s(i,2n)}{l_s(2n)} \right) \end{cases}$$

➤ Pour le stator  $i=n+1, 2n$

◆ Pour  $j=1, n$

$$A_{rs} \begin{cases} A(i,1) = \frac{1}{2t} \left( G_r(i,2) - \frac{F_r(i,n+2)}{l_r(n+2)} - \frac{F_r(i,n+1)}{l_r(n+2)} \right) \\ A(i,j) = \frac{1}{2t} \left( G_r(i,j+1) - \frac{F_r(i,j+1)}{l_r(j+1)} + \frac{F_r(i,j)}{l_r(j)} \right) \\ A(i,n) = \frac{1}{2t} \left( G_r(i,1) - \frac{F_r(i,1)}{l_r(1)} + \frac{F_r(i,j+1)}{l_r(n)} \right) \end{cases}$$

◆ Pour  $j=n+1, 2n$

$$A_{ss} \begin{cases} A(i, n+1) = \frac{1}{2h} \left( G_s(i, n+2) - \frac{F_s(i, n+2)}{l_s(n+2)} - \frac{F_s(i, n+1)}{l_s(n+1)} \right) \\ A(i, j) = \frac{1}{2h} \left( G_s(i, j+1) - \frac{F_s(i, j+1)}{l_s(j+1)} + \frac{F_s(i, j)}{l_s(j)} \right) \\ A(i, 2n) = \frac{1}{2h} \left( G_s(i, n+1) + \frac{F_s(i, 2n)}{l_s(2n)} - \frac{F_s(i, n+1)}{l_s(n+1)} \right) \end{cases}$$

Pour  $i=j$

$$\begin{cases} G(i, j) = K \\ F(i, j) = \frac{Kl(j)}{2} \end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases} K = t \text{ pour } i = 1, n \\ K = h \text{ pour } i = n+1, 2n \end{cases}$$

#### IV.2 Coefficient de pression :

On a l'expression générale de la pression d'un fluide parfait et incompressible qui s'écrit, dans le repère fixe [Annexe B] :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = cst(t)$$

tel que

$Cst(t)$  : représente la constante caractérisant l'écoulement à l'instant  $(t)$ , généralement prise égale à la pression totale du fluide à l'instant  $(t)$ .

$\varphi$  : représente les potentiels des vitesses, qui nous permet d'avoir l'expression de la pression

$$p = p_0 \frac{\rho}{2} (c_0^2 - c^2) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

d'où

$$\frac{p - p_0}{\frac{\rho c_0^2}{2}} = 1 - \left(\frac{c}{c_0}\right)^2 - \frac{2}{\rho c_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$C_p = 1 - \left(\frac{c}{c_0}\right)^2 - \frac{2}{\rho c_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$C_p = 1 - \left(\frac{w}{c_0}\right)^2 + \left(\frac{u}{c_0}\right)^2 - \frac{2}{\rho c_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

✓ en régime stationnaire:

C'est une hypothèse qui simplifie le calcul en mettant  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

✓ en régime instationnaire:

La connaissance de l'évolution des coefficients de pression, nécessite l'évaluation du terme  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{C_j * l_j}{\Delta t}$$

$C_j$ : représente la vitesse du point j

$l_j$ : est la longueur du panneau j

$$u = \frac{t}{n \Delta t}$$

t : le pas du profil du rotor

u : la vitesse de rotation du rotor

n : le nombre de position prise par le rotor

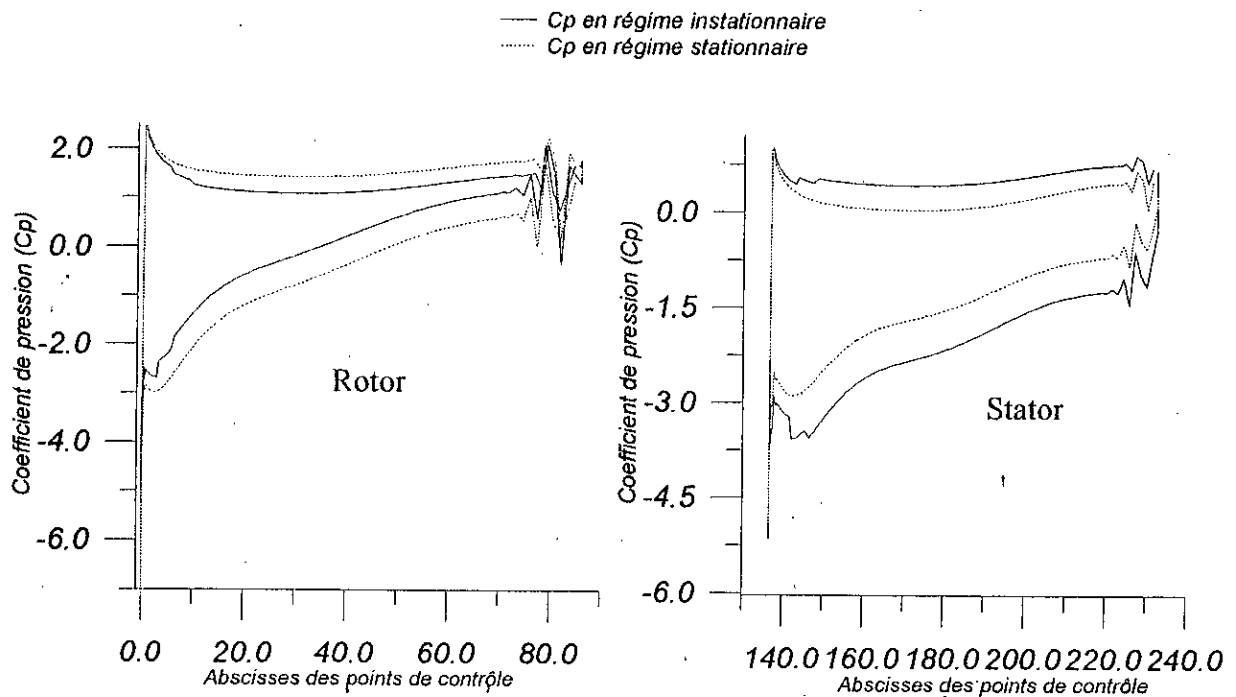
d'où :

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{n u}{t} C_j l_j$$

d'où l'expression générale du  $C_p$

$$C_p = 1 - \left(\frac{w}{c_0}\right)^2 + \left(\frac{u}{c_0}\right)^2 - \frac{2}{\rho c_0^2} \frac{n u}{t} c_j l_j$$

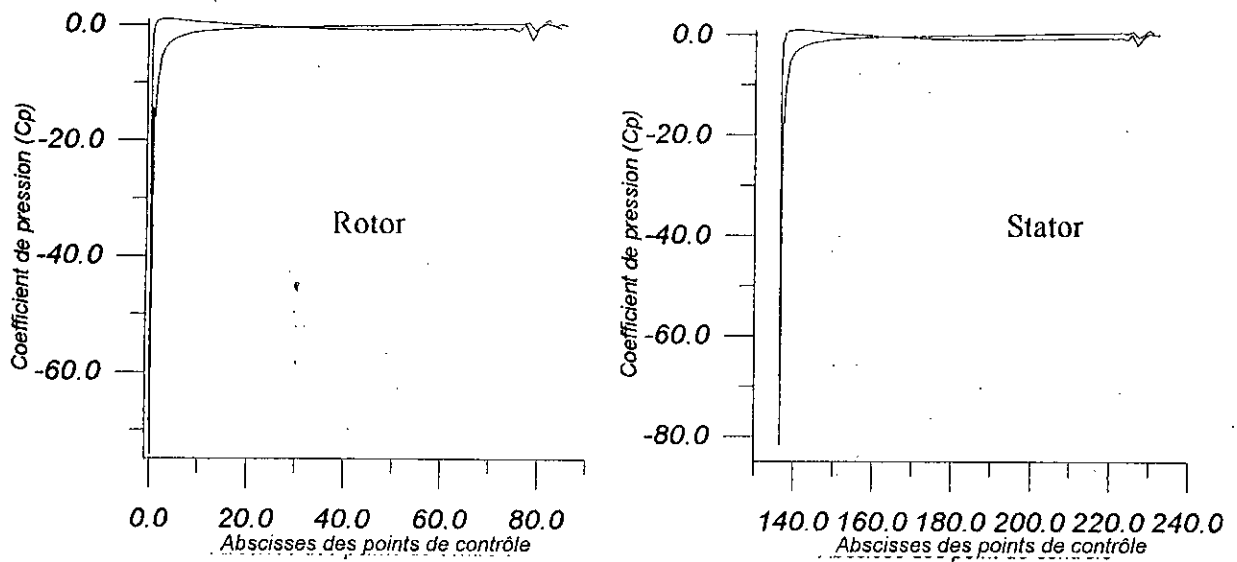
## V. Présentation des résultats



**Fig.(II.2) : les coefficients de pression**  
 ( $C_0=10$  m/s,  $u=12$  m/s,  $\gamma_r=30^\circ$ ,  $\gamma_s=15^\circ$ )

D'après l'allure de la figure (II.2), il apparaît que les deux courbes dans la zone du bord d'attaque sont presque identiques.

En dehors de cette zone, il apparaît que la courbe est presque parallèle à la courbe en régime instationnaire.

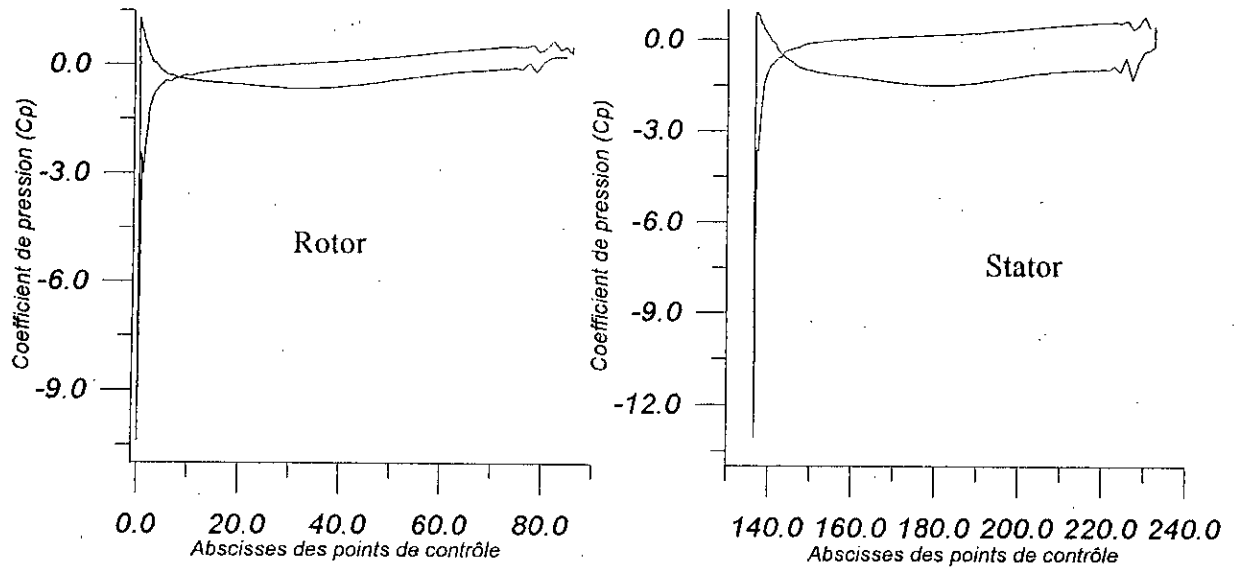


**Fig.(II.3) : les coefficients de pression**  
 $(C_0=10 \text{ m/s}, u=0, \gamma_r=30^\circ, \gamma_s=15^\circ)$

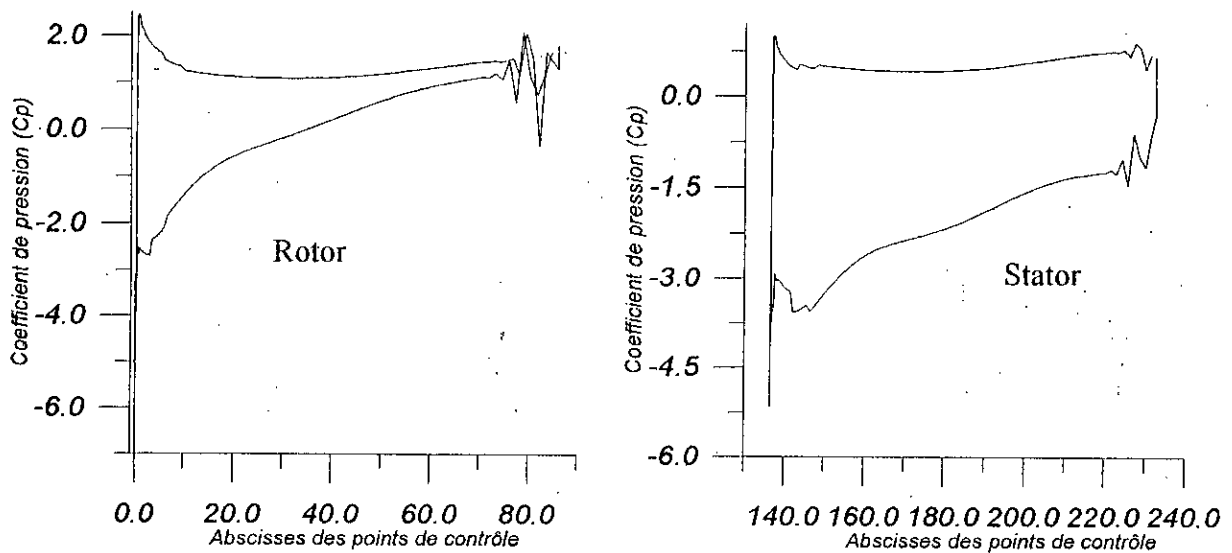
D'après la figure (II.3) obtenue pour un rotor immobile et les angles de calage ( $\gamma_r=30^\circ, \gamma_s=15^\circ$ ), le comportement des coefficients de pression sur le rotor est presque identique à celui du stator.

Cette allure est la même rencontré pour un profil isolé avec un angle  $\alpha=16^\circ$  donné au chapitre précédent.

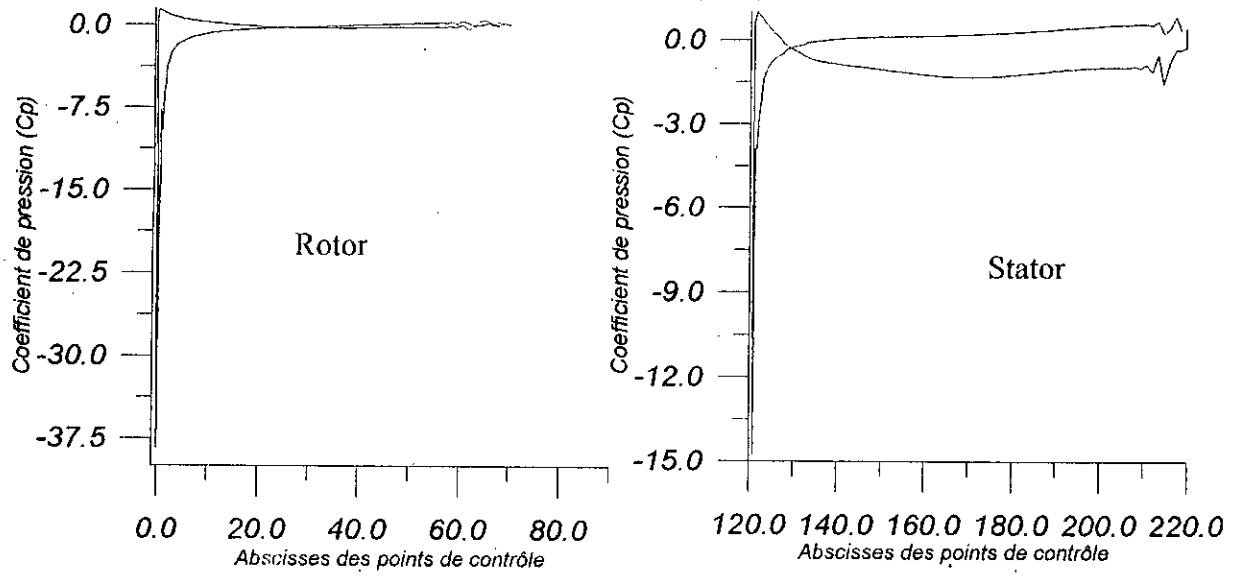




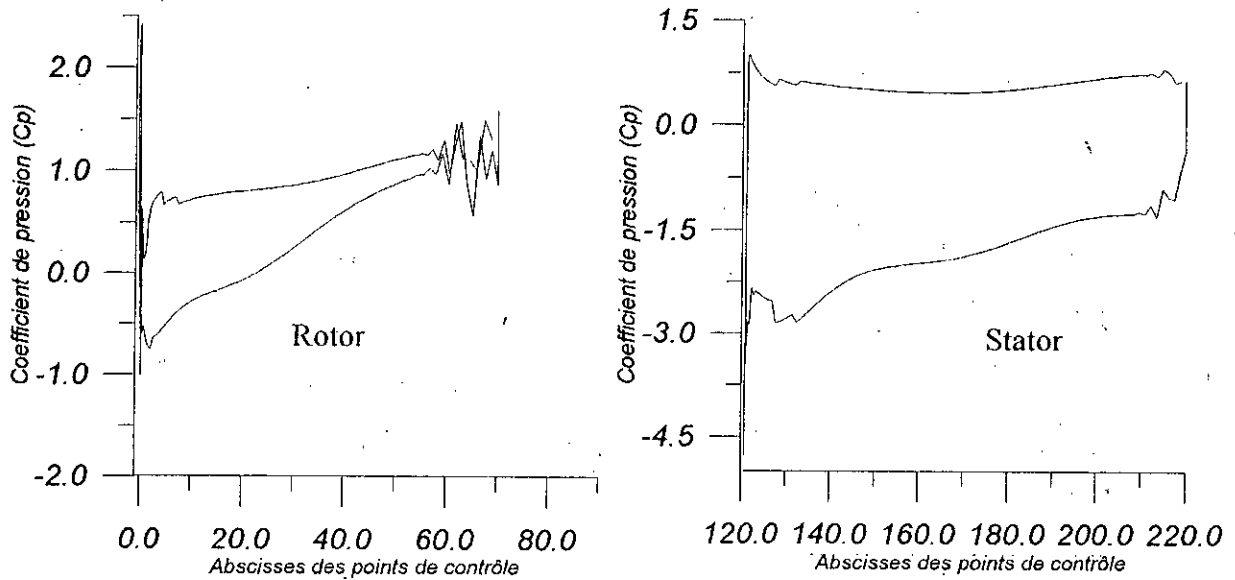
**Fig.(II.4) : les coefficients de pression**  
 ( $C_0=10$  m/s,  $u=6$  m/s,  $\gamma_r=30^\circ$ ,  $\gamma_s=15^\circ$ )



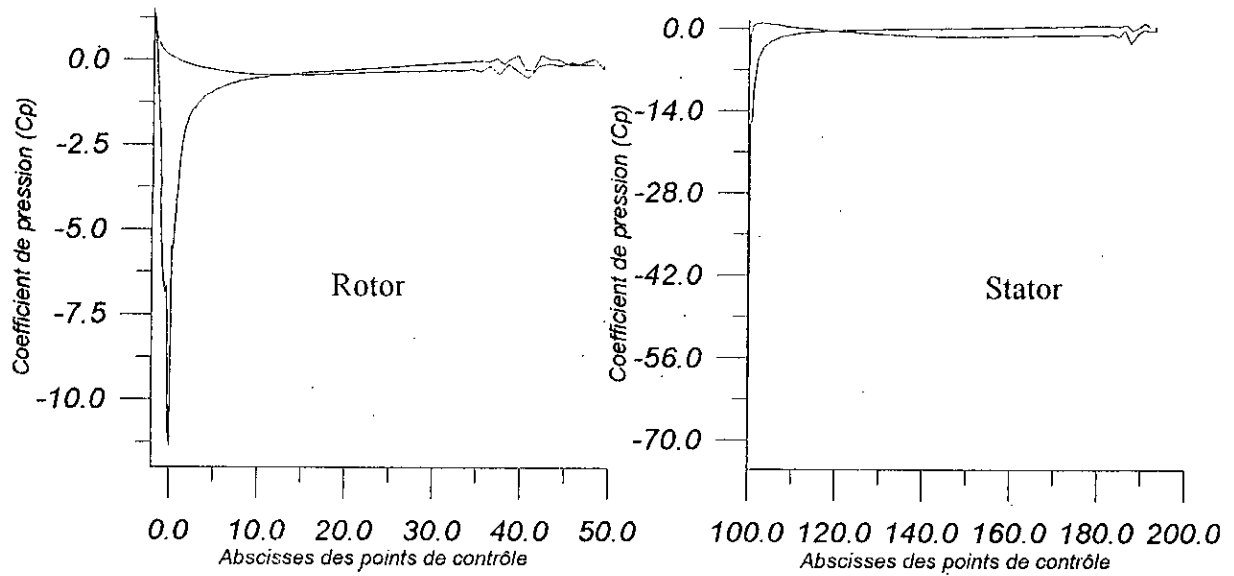
**Fig.(II.5) : les coefficients de pression**  
 ( $C_0=10$  m/s,  $u=12$  m/s,  $\gamma_r=30^\circ$ ,  $\gamma_s=15^\circ$ )



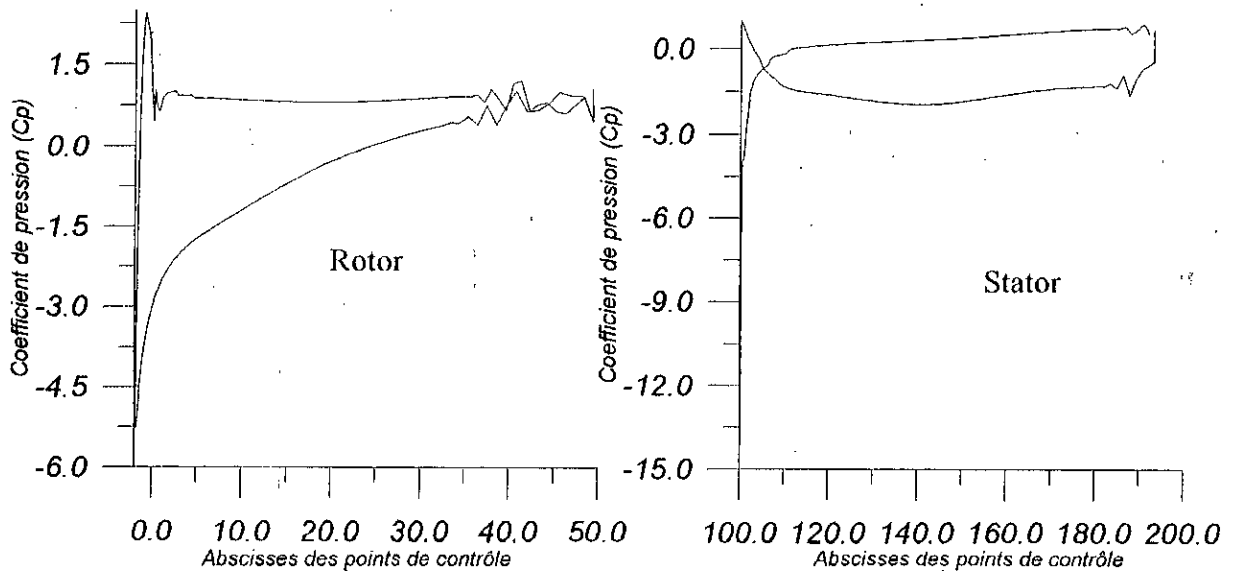
**Fig.(II.6) : les coefficients de pression**  
 ( $C_0=10$  m/s,  $u=6$  m/s,  $\gamma_r=45^\circ$ ,  $\gamma_s=5^\circ$ )



**Fig.(II.7) : les coefficients de pression**  
 ( $C_0=10$  m/s,  $u=12$  m/s,  $\gamma_r=45^\circ$ ,  $\gamma_s=5^\circ$ )



**Fig.(II.8) : les coefficients de pression**  
 ( $C_0=10$  m/s,  $u=6$  m/s,  $\gamma_r=60^\circ$ ,  $\gamma_s=20^\circ$ )



**Fig.(II.9) : les coefficients de pression**  
 ( $C_0=10$  m/s,  $u=12$  m/s,  $\gamma_r=60^\circ$ ,  $\gamma_s=20^\circ$ )

Les figures ci-dessus montrent que plus la vitesse est élevée, de l'ordre de 12 m/s, plus la dépression sur l'extrados est plus significative, créant ainsi une portance plus importante. Cependant, dans le cas de vitesses partielles des fluctuations se présentent au bord de fuite. En revanche, pour les vitesses moins élevées ( $u=6\text{m/s}$ ), les coefficients de pressions sont très voisins (pour l'extrados et l'intrados).

Chapitre III

*Caractéristiques Géométriques  
De La Pompe*

---

**Chapitre III: CARACTERISTIQUE GEOMETRIQUE DE LA POMPE**


---

**I. Généralité concernant les profils en grille**
**I.1 Définition géométrique**

On étudie le cas d'une grille plane infinie attaquée par un écoulement plan infini, uniforme et permanent, l'angle d'incidence, de l'écoulement est toujours repéré entre la corde des profils et la vitesse incidente (repère liée au profil), la vitesse d'entrée  $C_1$  et la vitesse de sortie  $C_2$  sont repérées par rapport à l'axe d'écoulement perpendiculaire au front de grille) par les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

La grille est définie par trois paramètres principaux:

$\gamma$ : L'angle de calage des profils donnant lieu à une première relation géométrique

$$\gamma = \alpha_1 - i$$

$\sigma$ : serrage du profils, rapport entre la corde et le pas

$$\sigma = \frac{l}{t}$$

$C_{z\text{cof}}$ : Identifie les profils mis en grille

Sous l'effet de ces paramètres géométriques, l'écoulement subit en bloc une déflexion ou déviation caractérisé par

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$

A l'inverse du profil isolé, ce ne sont plus les efforts aérodynamiques qui nous intéressent, mais plutôt la déflexion.

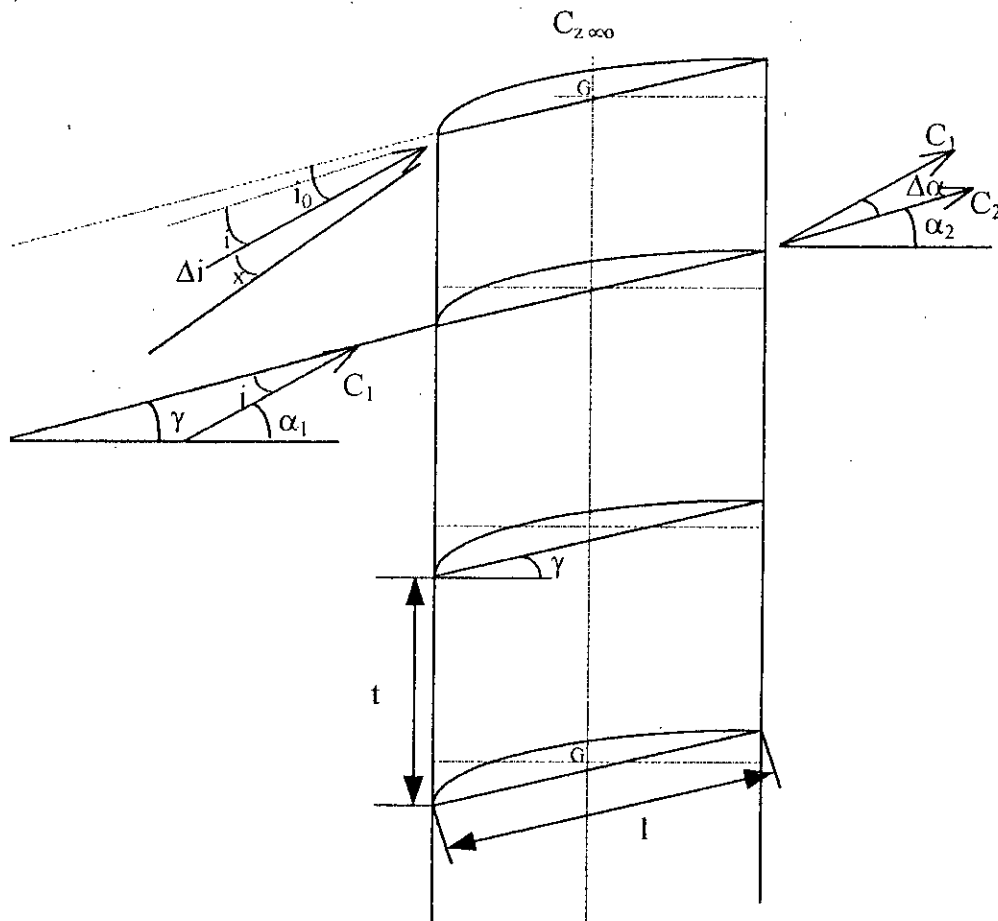


Fig.(III.1) : Définition générale concernant la grille plan

## I.2 Considération cinématique

Pour cette grille l'équation de continuité s'écrit

$$q_{m1} = q_{m2}$$

$$\rho_1 q_{v1} = \rho_2 q_{v2}$$

en fluide incompressible ( $\rho_1 = \rho_2$ )

$$s_1 c_1 \cos \alpha_1 = s_2 c_2 \cos \alpha_2$$

et pour une envergure de profil uniforme ( $s_1 = s_2$ )

$$Ca_1 = Ca_2 = Ca$$

Ca: projection axial de la vitesse ou encore vitesse débitante

Cette projection axial commune donne lieu aux triangles de vitesses de la grille (figIII.2).

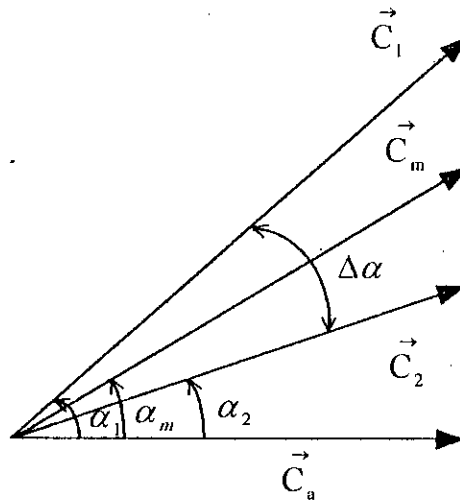


Fig.(III. 2) : Triangles des vitesses

A partir de ces triangles de vitesses, sont définis l'angle moyen  $\alpha_m$  et la vitesse moyenne  $\bar{c}_m$  donnée par la relation vectorielle :

$$\bar{c}_m = \frac{\bar{c}_1 + \bar{c}_2}{2}$$

conduisant à la définition de  $\alpha_m$

$$\text{tg} \alpha_m = \frac{\text{tg} \alpha_1 + \text{tg} \alpha_2}{2}$$

## II. Fonctionnement nominale de la grille

### II.1 Point de référence de la grille

Le choix du fonctionnement de la grille se situe dans la zone des pertes minimales, mais les critères de ce choix varie d'un auteur à un autre.

D'après les abaques évaluant le point (incidence) de fonctionnement en fonction de la géométrie de la grille (cambrure  $C_{z\infty 0}$ , serrage  $\sigma$ ) [4].



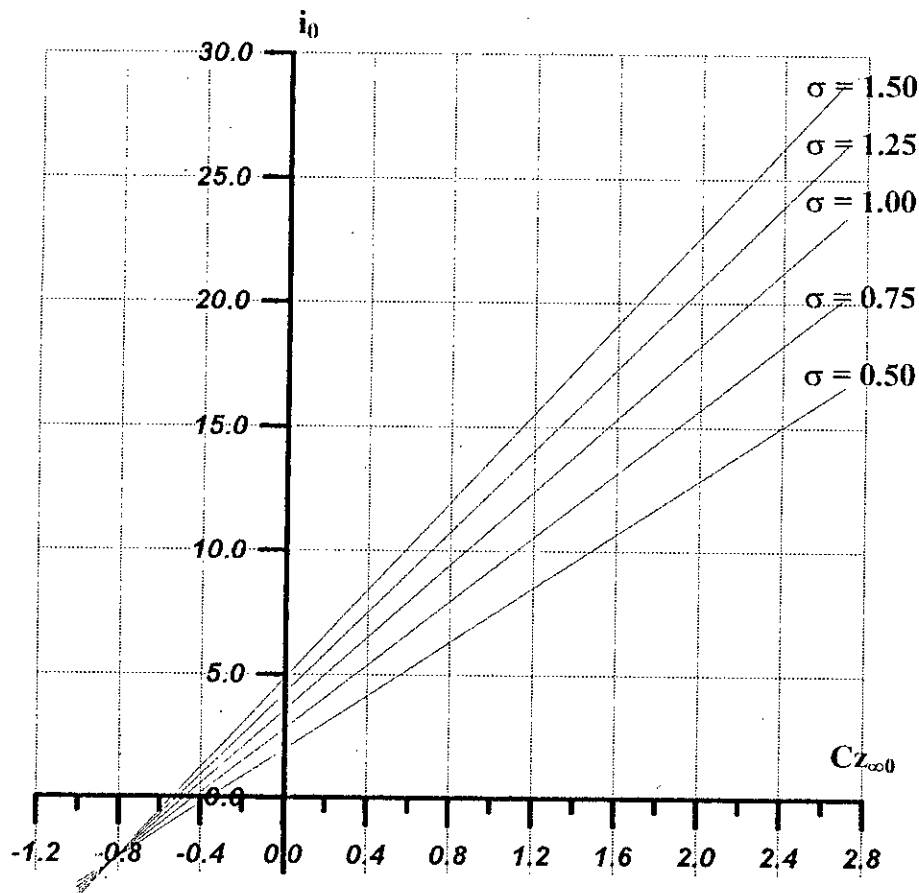


Fig .(III. 3) : Evolution du point nominal avec la géométrie de la grille

Le point de référence évolue suivant un faisceau de droites passant par le point  $(-0.823; -2.535)$  et dont la pente  $p(\sigma)$  dépend seulement de  $\sigma$ .

avec que

$$i_0 = -2.535 + p(\sigma)[C_{z\infty 0} + 0.823]$$

$$\text{et } p(\sigma) = 15.535 - 12.467e^{-0.4242\sigma}$$

On peut établir une corrélation simple pour calculer la déflexion au point nominale:

$$\Delta\alpha = -0.94 + q(\alpha_1)[i_0 - 2.07]$$

$$q(\alpha_1) = 2.103 - 4.019 \cdot 10^{-7} (\alpha_1)^{3.382}$$

## II.2 Détermination des pertes

Par analogie avec l'hydraulique, on peut suggérer des pertes de grille de la forme :

$$C_d = C_{do} + C_{dc}$$

. $C_d$ : est le drag coefficient qui est égal à la somme des pertes par chocs et par frottement

. $C_{do}$ : pertes par frottement à l'incidence  $i=i_0$

$$C_{do} = 0.003733 C_{z\infty 0} + 0.01093$$

. $C_{dc}$ : perte par choc ( ou perte de désadaptation )

$$C_{dc} = K(i-i_0)^n$$

ou K et n dépend de  $\alpha_1$  et  $C_{z\infty 0}$  et peut du serrage  $\sigma$

$$K = -25 \cdot 10^{-6} + (1.91 - 0.4 C_{z\infty 0}^{1.4}) (\alpha_1 + 21) \cdot 10^{-6}$$

$$n = 2 + \alpha_1 [0.46 + 0.0339 \cdot \exp(1.953 C_{z\infty 0})] 10^{-2}$$

On situe la zone d'opération de la grille entre deux incidence  $i_a$  et  $i_b$  représentent l'incidence pour laquelle la perte atteint le double de sa valeur minimale.

$$2C_{do} = C_{do} + K(i-i_0)^n$$

avec

$$i_a = i_0 - \left[ \frac{C_{do}}{K} \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$i_b = i_0 + \left[ \frac{C_{do}}{K} \right]^{\frac{1}{n}}$$

Le coefficient de traînée  $C_x$  est défini par la relation suivant

$$C_x = C_d \left[ \frac{\cos(\alpha_m)}{\cos(\alpha_1)} \right]^2$$

### II.3 Coefficient de portance Cz

Le coefficient de portance se calcule en fonction des données géométriques et cinématiques, par l'application du théorème des quantités de mouvement sur l'espace fluides ABCD d'envergure  $b$  et de pas  $t$  (fig III.4).

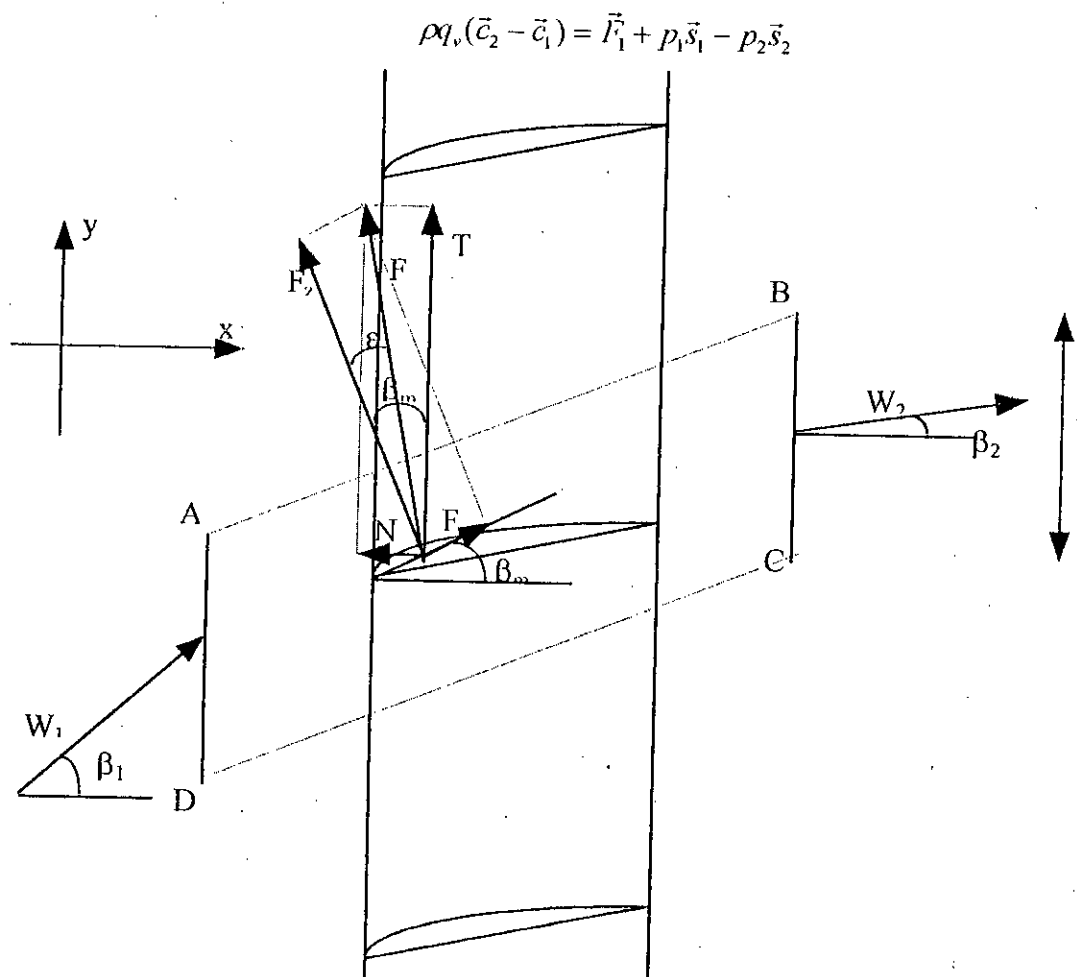


Fig.(III. 4) : Définition de l'espace fluide étudié

Si on projette suivant les directions axiale et tangentielle, on trouve :

$$\rho q_v (c_{u2} - c_{u1}) = -T = -\frac{F_z}{\cos \varepsilon} \cos(\alpha_m - \varepsilon)$$

$$\rho q_v (c_{a2} - c_{a1}) = 0 = -N + p_1 s_1 - p_2 s_2$$

D'après les triangles de vitesses, on aura

$$\rho c_m^2 t b (tg \alpha_2 - tg \alpha_1) = -\frac{F_z}{\cos \varepsilon} \cos(\alpha_m - \varepsilon)$$

et d'après la définition du coefficient de portance; on a :

$$C_z = 2 \frac{\cos \varepsilon}{\sigma} \frac{\cos^2 \alpha_m}{\cos(\alpha_m - \varepsilon)} (tg \alpha_1 - tg \alpha_2)$$

$\varepsilon$ : angle de perte

Dans le cas d'un fluide parfait  $\varepsilon = 0$

$$C_z = 2 \frac{\cos \alpha_m}{\sigma} (tg \alpha_1 - tg \alpha_2)$$

#### II.4 Facteur de diffusion

Le facteur de diffusion a été défini pour la première fois par **Lieblein**, il traduit un compromis entre les pertes de frottement et le sillage des aubages.

Au cours de l'écoulement à l'extrados du profil, la vitesse locale passe de  $\bar{c}_1$  à  $\bar{c}_2$  au voisinage de l'entrée ( point K ) une vitesse maximale  $\bar{c}_{max}$  ( fig III.5)

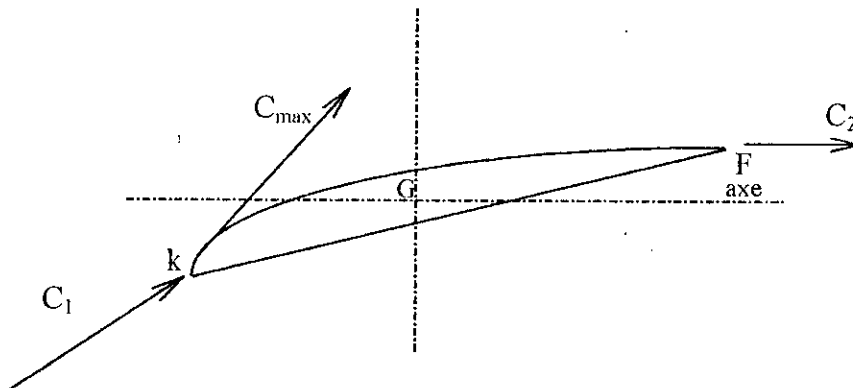


Fig.(III. 5) : Localisation de la vitesse maximale

Sur la ligne de courant entre K et le bord de fuite F, on observe une diffusion. (ou ralentissement) dont l'intensité est décrite par le facteur de diffusion locale  $D_1$  :

$$D_1 = \frac{c_{max} - c_2}{c_{max}}$$

Ainsi, on a construit un facteur global D décrivant, dans les mêmes conditions, il a pour expression

$$D = 1 - \frac{c_2}{c_1} + \frac{|\Delta c_{u2}|}{2c_1\sigma}$$

et pour  $c_{a1} = c_{a2}$ , on a :

$$D = 1 - \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} + \frac{\cos \alpha_1}{2\sigma} (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)$$

### III. Application numérique

Suivant la discétisation radiale retenue, on procède à la définition locale des grilles rotoriques et statoriques : cambrure, corde, angle de calage.

On présente sur les tableaux suivants les données de dimension géométrique d'une machine axiale ainsi que les résultats calculés pour le rotor et le stator.

LES DONNEES				
H (m)	Q (l/s)	N (tr/mn)	Z <sub>r</sub>	Z <sub>s</sub>
10	516	1450	4	5

Avec :

- Z<sub>r</sub> : nombre de pales du rotor
- Z<sub>s</sub> : nombre de pales du stator

On peut noter suivants les valeurs de  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_m$ ,  $\gamma$ , corde, cambrure, le facteur de diffusion et le serrage des profils.

Les paramètres constructifs peuvent être relevés :

- Au rayon moyen  $\bar{R}$  :  $\bar{\beta}_m = 60.30^\circ$  et  $\bar{\alpha}_m = 19.01^\circ$
- Le facteur de diffusion rotorique varie de 0.75 en pied de pale jusqu'à 0.18 à la périphérique.
- Le facteur de diffusion statorique varie de 0.74 en pied de pale jusqu'à 0.18 à la périphérique.

❖ Résultats calculés

CARACTERISTIQUE DU ROTOR								
Rayon	Bêta 1	Bêta 2	Bêta M	GamaR	Cord R	Cz <sub>00</sub>	FD R	Sig R
0.0700	52.22	9.64	36.13	26.55	0.1201	2.8448	0.75	1.09
0.0787	55.42	24.42	43.60	35.47	0.1097	2.3987	0.63	0.89
0.0875	58.20	35.62	49.35	42.53	0.0997	2.0352	0.52	0.73
0.0962	60.58	43.77	53.78	47.91	0.0900	1.7750	0.44	0.60
0.1050	62.67	49.92	57.37	52.16	0.0898	1.4901	0.38	0.54
0.1138	64.51	54.62	60.30	55.56	0.0795	1.3813	0.32	0.44
0.1225	66.11	58.28	62.70	58.30	0.0794	1.2187	0.28	0.41
0.1313	67.55	61.25	64.76	60.60	0.0795	1.0937	0.25	0.39
0.1400	68.82	63.67	66.51	62.53	0.0798	0.9980	0.22	0.36
0.1488	69.97	65.71	68.03	64.20	0.0794	0.9286	0.20	0.34
0.1576	71.00	67.44	69.37	65.65	0.0796	0.8713	0.18	0.32

CARACTERISTIQUE DU STATOR							
Rayon	Alfa 1	Alfa M	Gama S	Cord S	Cz <sub>00</sub>	FD S	Sig S
0.0700	48.25	29.26	20.35	0.1694	2.2123	0.74	1.93
0.0787	44.90	26.48	19.29	0.1801	2.0552	0.60	1.82
0.0875	41.87	24.14	18.18	0.1894	1.9285	0.50	1.72
0.0962	39.19	22.18	17.10	0.1997	1.8106	0.41	1.65
0.1050	36.76	20.48	16.06	0.1999	1.7643	0.36	1.51
0.1138	34.57	19.01	15.08	0.2094	1.6694	0.30	1.46
0.1225	32.63	17.75	14.18	0.2101	1.6312	0.27	1.36
0.1313	30.85	16.63	13.34	0.2198	1.5491	0.24	1.33
0.1400	29.26	15.65	12.57	0.2205	1.5182	0.22	1.25
0.1488	27.79	14.76	11.86	0.2294	1.4497	0.19	1.23
0.1576	26.46	13.97	11.20	0.2206	1.4695	0.18	1.11

◆ Les figures ci-dessous nous permettent de visualiser la morphologie des pales .

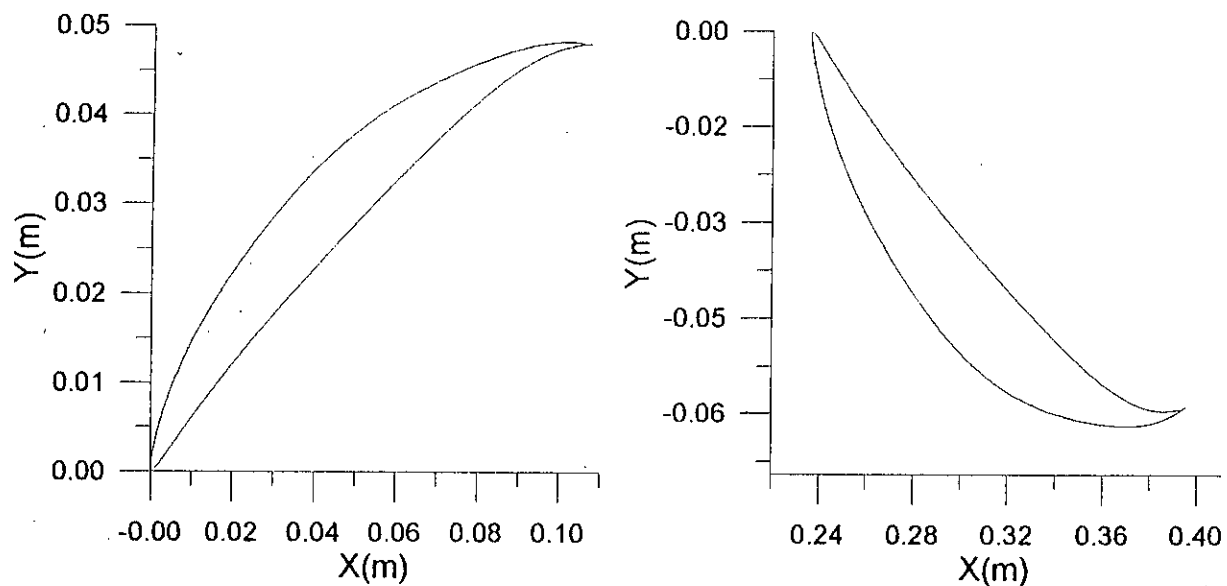


Fig.(III. 6) : La morphologie de pale du rotor et stator pour  $R=0.070$  m

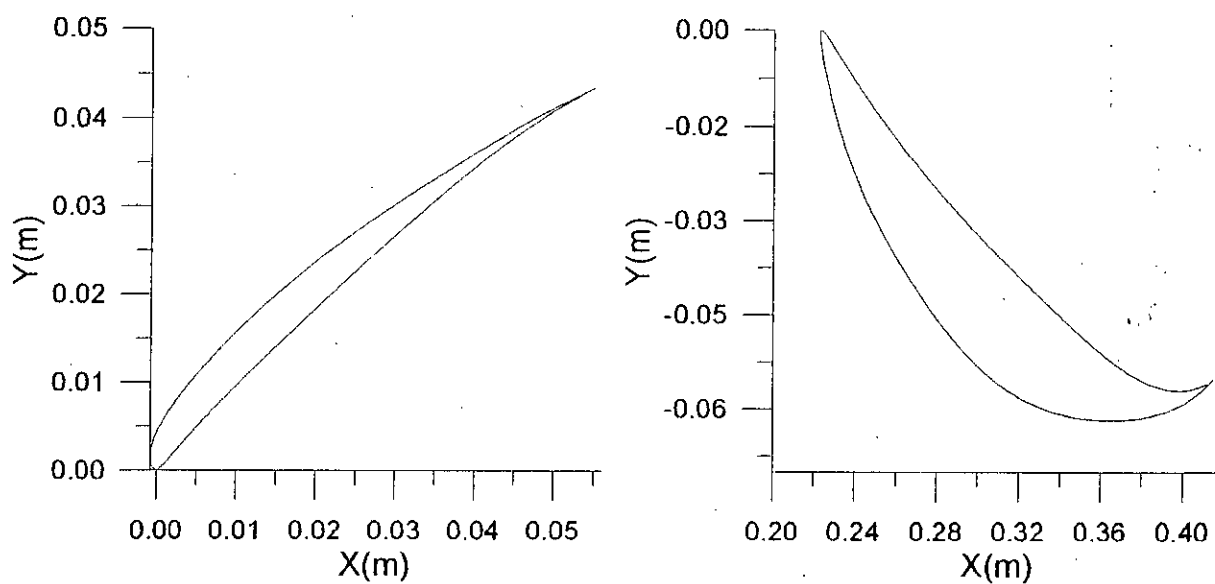


Fig.(III. 7) : La morphologie de la pale du rotor et stator pour  $R=0.1050$  m

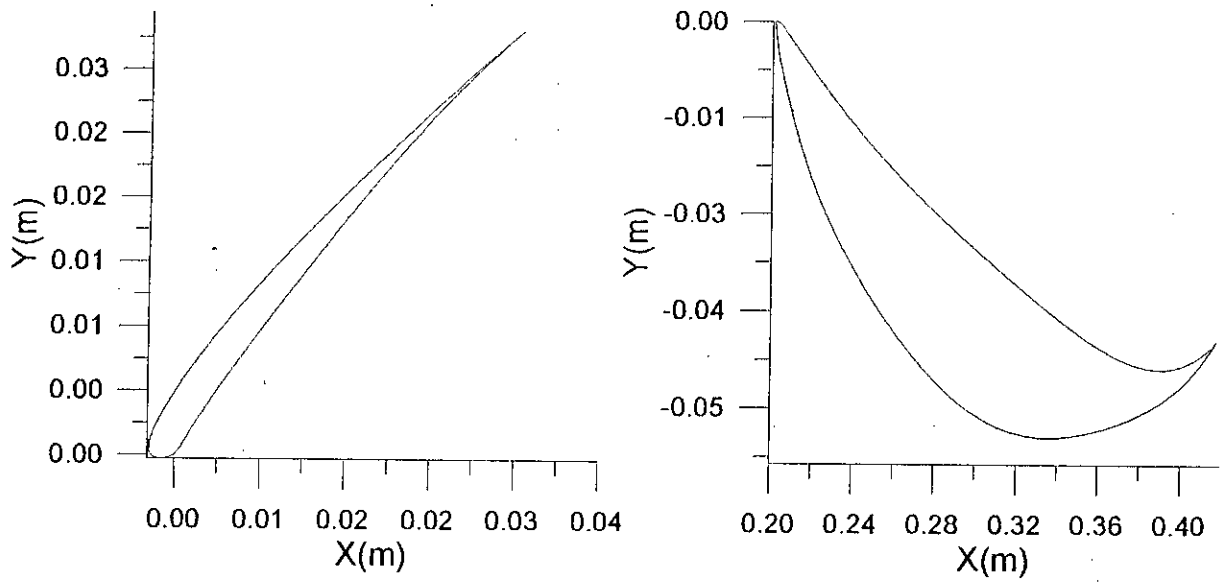


Fig. (III. 8) : La morphologie de la pale du rotor et stator pour R=0.1576 m



Chapitre FV

Dimensionnement D'une  
Machine A Compression  
Axiale

## Chapitre IV: DIMENSIONNEMENT D'UNE MACHINE A COMPRESSION AXIALE

### I. Etude générale d'un étage de compression forme de deux grilles planes

#### I.1 Configuration générale de l'étage :

Les figures ci-dessous établissent la morphologie d'un étage de compression ainsi que les triangles de vitesse et les efforts exercés sur les aubages.

Le rotor est entraîné à la vitesse de translation  $U$  et les aubages du stator sont disposés de manière à redresser l'écoulement vers l'axe

En mouvement relatif (rotor). Les vitesses sont repérées par les angles  $\beta$  ( $\beta_1, \beta_2, \beta_m$ ), par les angles  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_m$ ).

L'introduction du mouvement relatif facilite le traitement du problème lié à la grille mobile. En effet, l'ensemble des lois déjà présentées est applicable en remplaçant les angles  $\alpha$  par les angles  $\beta$  et les vitesses  $C$  par les vitesses relative  $W$ .

La détermination locale de l'étage nécessite la résolution de deux problèmes inverses sur la base de la déflexion rotorique ( $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$ ) et de la déflexion statorique ( $\Delta\alpha = \alpha_3 - \alpha_2$ ).

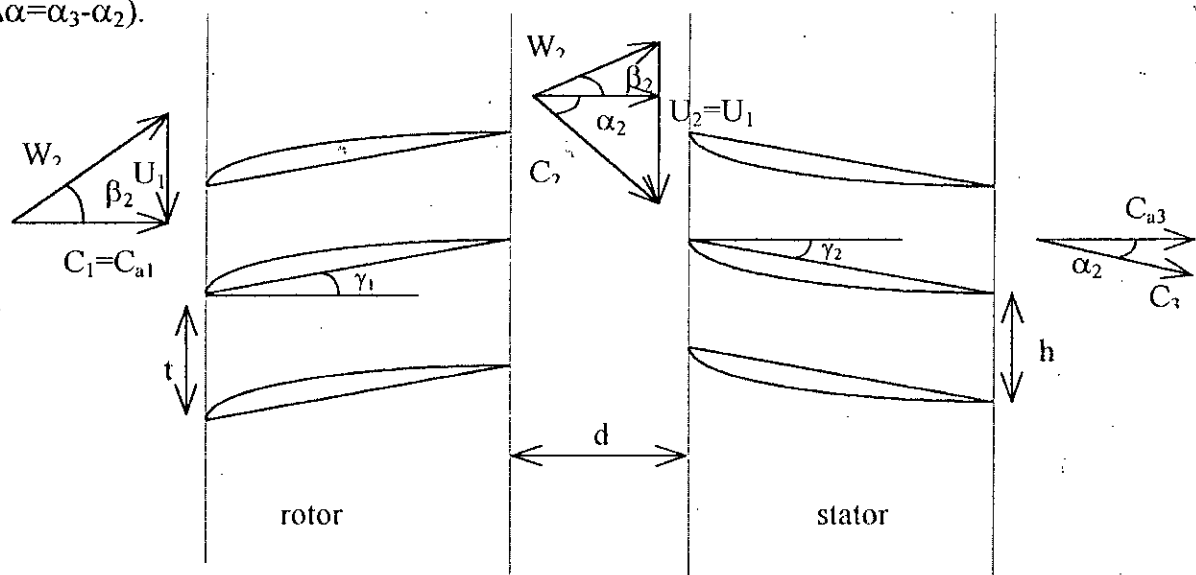


Fig.(IV.1) : Etage d'une turbomachine

D'après la figure(Fig IV.1) on peut obtenir les principales relations des triangles de vitesse.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}\beta_m &= \frac{\operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\beta_2}{2} \\
 \operatorname{tg}\alpha_m &= \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3}{2} \quad [IV.1] \\
 \operatorname{tg}\beta_1 &= \operatorname{tg}\beta_2 + \operatorname{tg}\alpha_2 \\
 \operatorname{tg}\beta_1 &= \operatorname{tg}\alpha_m + \operatorname{tg}\beta_m
 \end{aligned}$$

### I.2 Expression de la hauteur locale

La hauteur de l'étage est établie par un double théorème des quantités de mouvement aux aubages du rotor puis aux aubages du stator.

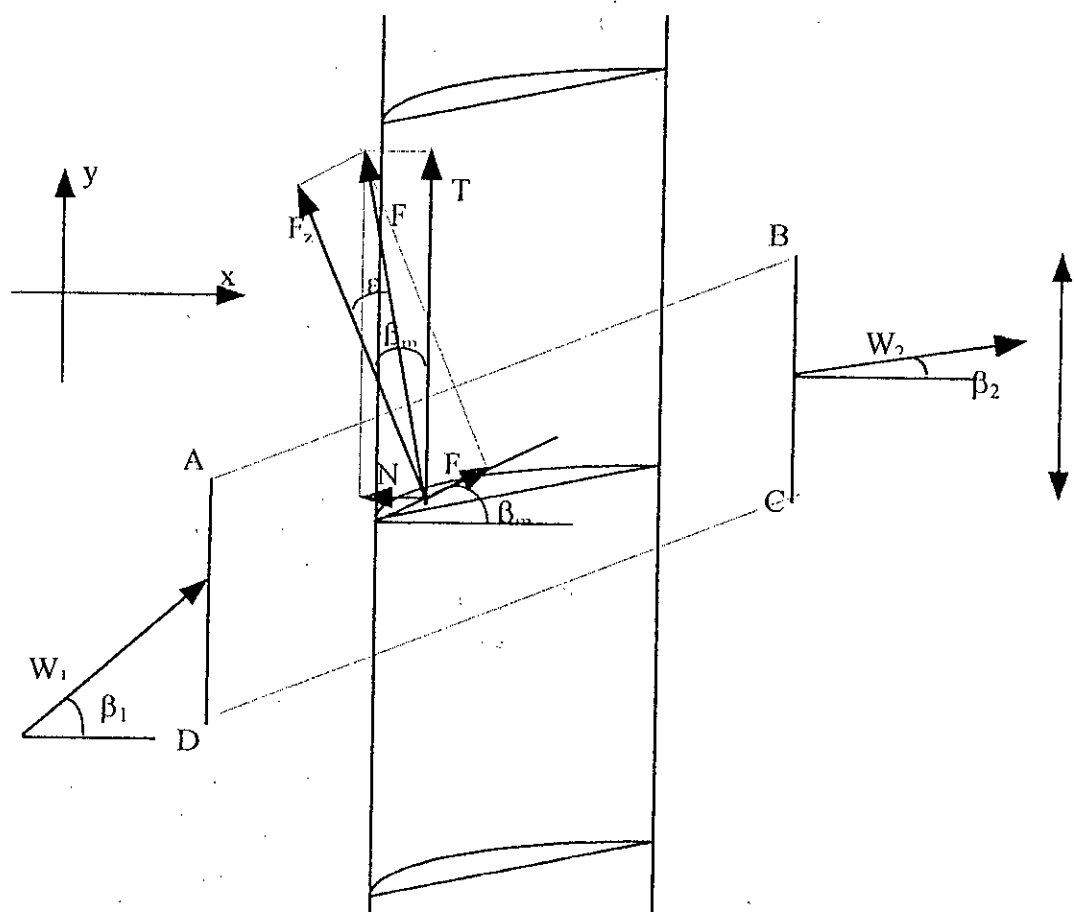


Fig.(IV.2) : Définition de l'espace fluide étudié

L'espace fluide étudié est l'espace ABCD d'envergure  $b$  et la longueur égale au pas de profil  $t$ .

On aura pour le rotor

$$\rho q_v (\bar{w}_2 - \bar{w}_1) = -\bar{F}_1 + \sum P\bar{S}$$

et pour le stator

$$\rho q_v (\bar{c}_3 - \bar{c}_2) = -\bar{F}_2 + \sum P\bar{S}$$

Equation dans laquelle  $\bar{F}_1$  et  $\bar{F}_2$  sont les actions du fluide sur l'aubage et  $q_v$  le débit volumique traversant les surfaces AD et BC.

➤ **Equation du rotor :**

En général, l'équation sur l'axe x puis sur l'axe y nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} O = P_1 S_1 - P_2 S_2 - N_1 \\ \rho q_v (w_{u2} - w_{u1}) = O - T_1 \end{cases} \quad \text{[IV.2]}$$

d'où :

$$N_1 = P_1 S_1 - P_2 S_2$$

D'après le triangle de vitesse on peut également écrire :

$$N_1 = -T_1 \cdot \text{tg}(\beta_m - E_1) \quad \text{[IV.3]}$$

En remplaçant dans l'équation [IV.3]  $T_1$  par la valeur issue de [IV.2], on aura alors :

$$\rho q_v (w_{u2} - w_{u1}) = -T_1 = \frac{N_1}{\text{tg}(\beta_m - E_1)} = \frac{P_1 S_1 - P_2 S_2}{\text{tg}(\beta_m - E_1)}$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$P_2 S_2 - P_1 S_1 = \rho q_v (w_{u2} - w_{u1}) \text{tg}(\beta_m - E_1)$$

En ayant d'autre par que :

$$S_2 = S_1 = tb$$

$$w_{u1} = \text{tg}\beta_1$$

$$w_{u2} = \text{tg}\beta_2$$

$$q_v = C_a tb$$

On obtient finalement :

$$P_2 - P_1 = \rho C_a^2 (tg\beta_1 - tg\beta_2) tg(\beta_m - E_1)$$

### ➤ Equation du stator

En procédant de la même manière, on obtient pour le stator :

$$P_3 - P_2 = \rho C_a^2 (tg\alpha_2 - tg\alpha_3) \cdot tg(\alpha_m - E_2)$$

La hauteur fournie par l'étage horizontal est par définition donnée par :

$$H = \frac{P_3 - P_2}{\rho g} + \frac{C_3^2 - C_1^2}{2g}$$

Dans l'hypothèse d'un écoulement entièrement redressé à la sortie du stator ( $\alpha_3=0$ ) et pour une vitesse axiale uniforme on obtient :

$$H = \frac{C_a^2}{g} [(tg\beta_1 - tg\beta_2) \cdot tg(\beta_m - E_1) + tg\alpha_2 tg(\alpha_m - E_2)]$$

et d'après l'équation [IV.1] la hauteur locale prend l'expression suivante :

$$H = \frac{C_a^2}{g} tg\alpha_2 [tg(\beta_m - E_1) + tg(\alpha_m - E_2)]$$

lorsque le fluide parfait  $E_1 = E_2 = 0$ , on obtient :

$$H_E = \frac{C_a^2}{g} tg\alpha_2 (tg\beta_m + tg\alpha_m)$$

et qui s'écrit suivant la forme classique d'**Euler** :

$$H_E = \frac{U_2 C_{a2}}{g}$$

du fait que:

$$\begin{aligned} C_a tg\alpha_2 &= C_{a2} \\ C_a (tg\alpha_m + tg\beta_m) &= U_2 \end{aligned}$$

### 1.3 Expression du rendement local :

Le rendement hydraulique local est obtenu par le rapport entre la hauteur en fluide réel et la hauteur en fluide parfait.

$$\eta_H = \frac{H}{H_E} = \frac{tg(\beta_m - E_1) + tg(\alpha_m - E_2)}{tg\beta_m + tg\alpha_m}$$

Cette expression donne l'influence des pertes rotoriques et statoriques ( $E_1$  et  $E_2$ ) sur le rendement local.

En supposant  $E_1$  et  $E_2$  constants, on peut noter que le rendement est d'autant plus grand que  $\alpha_m$  est grand, le meilleur choix pour  $\beta_m$  se portera sur la solution d'équation:

$$\frac{\partial \eta_H}{\partial \beta_m} = 0$$

qui après développement est simplifié suivant l'expression suivante :

$$tg\beta_m = -tg\alpha_m + \sqrt{\left[1 + \frac{tgE_1}{tgE_2}\right] \left[1 + tg^2\alpha_m\right]}$$

donnant lorsque  $E_1$  est peut diffèrent de  $E_2$  la solution approchée suivante :

$$tg\beta_m = -tg\alpha_m + \sqrt{2(1 + tg^2\alpha_m)}$$

## II. Relation entre les paramètres géométriques et hydrauliques :

Dans le cas du fluide réel, nous retiendrons le même rayon moyen et l'on adoptera les notions suivantes :

$$\alpha_2(\bar{R}) = \bar{\alpha}_2$$

$$\beta_m(\bar{R}) = \bar{\beta}_m$$

$$\alpha_m(\bar{R}) = \bar{\alpha}_m$$

$$C_{a2}(\bar{R}) = \bar{C}_{a2}$$

$$\text{et : } \bar{R} = \frac{R_e + R_i}{2} ; \text{ le rayon moyen}$$

## II.1 Dimensionnement global :

Au point de fonctionnement de la machine on définit la vitesse spécifique et le rayon spécifique par :

$$\text{vitesse spécifique : } \Omega = \frac{\omega q_v^{1/2}}{(gH)^{3/4}} \quad \text{[IV.4]}$$

$$\text{rayon spécifique : } \Lambda = \frac{R_e (gH)^{1/4}}{q_v^{1/2}} \quad \text{[IV.5]}$$

par ailleurs, l'allure générale de la machine est caractérisée en premier lieu par le rapport de moyeu des rayons :

$$T = \frac{R_i}{R_e} \quad \text{[IV.6]}$$

On a que :  $q_v = \pi(R_e^2 - R_i^2)$

$$\text{on obtient : } \Omega^2 = \frac{\omega^2 \pi R_e^2 (1 - T^2) C_{a1}}{(gH)^{3/2}}$$

En négligeant les pertes de parois par rapport aux pertes d'aubages, H peut être assimilé à  $\bar{H}$  ( $\bar{H}$  : La hauteur moyenne)

$$\bar{H} = k \frac{C_{a1}^2}{g}$$

$$k = \text{tg } \bar{\alpha}_2 \left[ \text{tg}(\bar{\beta}_m - E_1) + \text{tg}(\bar{\alpha}_m - E_2) \right]$$

En remplaçant dans l'expression précédente, on obtient :

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2 \pi R_e^2 (1 - T^2) C_{a1}}{C_{a1}^3 k^{3/2}}$$

Après simplification par  $C_{a1}$  et en remarquant que :

$$\overline{\text{tg}\beta} = \frac{\omega \bar{R}}{C_{al}} = \frac{\omega}{C_{al}} \cdot \frac{R_e + R_i}{2} = \frac{\omega R_e}{C_{al}} \left[ \frac{1+T}{2} \right]$$

La relation devient alors :

$$\Omega^2 = \frac{4 \overline{\text{tg}\beta}_1 \pi (1-T^2)}{(1-T^2) k^{3/2}}$$

Conduisant à la première relation fonctionnelle :

$$T = \frac{C - \Omega^2}{C + \Omega^2} \quad \text{[IV.7]}$$

avec :

$$C = \frac{4 \pi \overline{\text{tg}\beta}_1^2}{k^{3/2}}$$

Ou encore, d'après les relations des triangles de vitesses :

$$C = \frac{4 \pi (\overline{\text{tg}\alpha}_m + \overline{\text{tg}\beta}_m)^2}{k^{3/2}}$$

On peut procéder de la même manière pour la relation [IV.5]

$$\Lambda^2 = \frac{R_e^2 k^{1/2} C_{al}}{\pi (R_e^2 - R_i^2) C_{al}}$$

qui s'écrit aussi :

$$\Lambda^2 = \frac{k^{1/2}}{\pi (1-T^2)}$$

En remplaçant T par sa valeur issue de [IV.7], on obtient la deuxième relation fonctionnelle:

$$\Lambda = \frac{d}{2\Omega} (C + \Omega^2)$$

où d est également un paramètre défini par :

$$d = \frac{k^{1/4}}{\sqrt{\pi \cdot C}}$$



## II.2 Méthodologie du fonctionnement Global

Dans le cadre de la conception le projecteur doit construire une machine répondant dans les meilleures conditions du point de fonctionnement défini par trois paramètres :

la hauteur  $H$ , le débit  $q_v$ , la vitesse de rotation  $N$ .

A partir de ces données de base la vitesse spécifique  $\Omega$  est calculable par [IV.4].

$$\Omega = \frac{\omega q_v^{1/2}}{(gH)^{3/2}}$$

Le dimensionnement global ne sera possible qu'après le choix d'un couple  $(\bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m)$  et l'ordre

$$k = 2 \operatorname{tg} \bar{\alpha}_m \left[ \operatorname{tg}(\bar{\beta}_m - E_1) + \operatorname{tg}(\bar{\alpha}_m - E_2) \right]$$

$$C = \frac{4\pi(\operatorname{tg} \bar{\alpha}_m + \operatorname{tg} \bar{\beta}_m)^2}{k^{3/2}}$$

$$d = \frac{k^{1/4}}{\sqrt{\pi \cdot C}}$$

puis le rapport de moyen et le rayon spécifique  $T$  et  $\Lambda$

$$T = \frac{C - \Omega^2}{C + \Omega^2} \quad \text{Et} \quad \Lambda = \frac{d}{2\Omega}(C + \Omega^2)$$

Donc les relations [IV.5] et [IV.6] donnent alors les valeurs de  $R_e$  et  $R_i$

$$R_e = \frac{\Lambda q_v^{1/2}}{(gH)^{1/4}}$$

et

$$R_i = T \cdot R_e$$

Comme nous allons l'examiner dans les paragraphes suivants le choix du couple  $(\bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m)$  s'il peut être fait au hasard confère néanmoins à la machine ses propriétés géométriques et hydrauliques ( ou aérauliques ) : taille poids rendement NPSH, bruit...).

D'autre part, certains couples mal adaptés conduisent à des flexions rotoriques ou statoriques incompatibles avec le profil « Naca » précédent étudié ou encore des rapports de moyen trop faible.

### II.3 Rendement hydraulique global :

Si l'on reprend la définition de  $\eta_{Hgl}$ .

$$\eta_{Hgl} = \frac{H}{H_E} = \eta_H - \frac{\Delta h}{H_E}$$

On obtient aussi :

$$\eta_{Hgl} = \eta_H - \frac{C_a^2 4f}{2g(1-T) \cdot 2tg\bar{\alpha}_m (tg\bar{\alpha}_m + tg\bar{\beta}_m) \frac{C_a^2}{g}}$$

Ou encore :

$$\eta_{Hgl} = \eta_H - \frac{f}{tg\bar{\alpha}_m (tg\bar{\alpha}_m + tg\bar{\beta}_m) (1-T)}$$

Où f est calculable par relation de COLEBROOK.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left[ \frac{2.15}{R_{en} \sqrt{f}} + \frac{E}{3.71dH} \right]$$

avec :

$$R_{en} = \frac{C \cdot d_H}{\nu} = \frac{q_v}{\pi R \nu} \quad \text{Nombre de Reynolds}$$

### II. 4 Définition locale des grilles rotoriques et statoriques :

Le couple  $(\bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m)$  étant choisi et le régime d'écoulement étant imposé par le choix de la loi génératrice, le calcul des grilles s'effectue en incrémentant le rayon de  $R_i$  à  $R_e$ . [Annexe C]

Choisissant ici le cas du vortex libre caractérisé par la relation :

$$C_{u2} = \frac{k_3}{r}$$

la constante  $k_3$  est calculable à partir de la relation d'EULER en fluide parfait.

$$H_E = \frac{U_2 C_{u2}}{g} = \frac{\omega k_3}{g} = \frac{H}{\eta_{Hgt}}$$

On obtient alors :

$$k_3 = \frac{gH}{\omega \eta_{Hgt}}$$

Au rayon  $r$  quelconque les données de base de la machine et le dimensionnement global permettant le tracé des triangles des vitesses :

$$C_{u2} = \frac{k_3}{r}$$

$$U_1 = U_2 = \omega \cdot r$$

$$C_{a1} = C_{a2} = \frac{q_v}{\pi(R_e^2 - R_i^2)}$$

On calcule ensuite les angles d'entrée et de sortie pour le rotor et le stator.

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{U_1}{C_{a1}}$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{U_1 - C_{u2}}{C_{a2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{C_{u2}}{C_{a2}}$$

$$\alpha_3 = 0$$

## II. 5 Degré de Réaction :

Le degré de réaction caractérise le rapport du travail de réaction au travail total échangé par l'étage.

Il est défini par le rapport suivant :

$$\sigma^* = \frac{\frac{W_1^2 - W_2^2}{2}}{\frac{W_1^2 - W_2^2}{2} + \frac{C_2^2 - C_1^2}{2}} = 1 - \frac{C_{u2}}{2U_2}$$

Ce coefficient évolue naturellement avec le rayon depuis le rayon intérieur  $R_i$  jusqu'au rayon extérieur  $R_e$ , en passant par le rayon  $\bar{R}$  où il prend la valeur particulière.

$$\sigma^* = \frac{\overline{\text{tg} \beta_m}}{\overline{\text{tg} \alpha_m} + \overline{\text{tg} \beta_m}}$$

## II.6 bruit hydraulique

Le bruit étudié ici est celui produit par les fluctuations de pression liées à la fréquence de passage des pales du rotor, sous forme de puissance, nous retiendrons l'expression de LOWSON:

$$W_m = \frac{m^2 Z_1^2}{2\pi\rho C_0^3} \omega^2 N_1^2 (mZ_1)^{-4}$$

avec :

- $C_0$  : vitesse du son dans le fluide
- $Z_1$  : nombre de pales du rotor
- $m$  : rang de l'harmonique étudié
- $N_1$  : composante axiale à  $R$  de la force aérodynamique sur chaque aubage du rotor

La fréquence d'émission est donnée par

$$f_m = mf_{z1} = \frac{mZ_1\omega}{2\pi}$$

La puissance acoustique associée  $W_m$  est donnée en dB par la définition:

$$L_w = 10 \log_{10} \left( \frac{W_m}{10^{-12}} \right) (\text{en dB})$$

Cette puissance acoustique est maximale pour  $m=1$ .

On obtient alors :

$$W_1 = \frac{\omega^2}{2\pi\rho C_0^3} N_1^2$$

$$f_1 = Z_1 \frac{\omega}{2\pi}$$

La puissance acoustique  $W_1$  peut être transformée à partir des relations [IV.2] et [IV.3]

ou le débit du tube est égal à :  $\frac{q_v}{Z_1}$

Avec :

$$T_1^2 = \rho^2 \frac{q_v^2}{Z_1^2} C_{a2}^2$$

$$N_1^2 = T_1^2 \operatorname{tg}^2(\bar{\beta}_m - E_1) = \rho^2 \frac{q_v^2}{Z_1^2} C_{a2}^2 \operatorname{tg}^2 \bar{\alpha}_m \operatorname{tg}^2(\bar{\beta}_m - E_1)$$

On obtient après simplification :

$$W_1 = \frac{\rho q_v^2 \omega^2}{2\pi Z_1^2 C_0^3} C_{a1}^2 \operatorname{tg}^2 \bar{\alpha}_m \operatorname{tg}^2(\bar{\beta}_m - E_1)$$

A partir de  $C_{a1}$ , on peut également faire apparaître la hauteur H.

$$C_{a1}^2 = \frac{gH}{K}$$

D'où la valeur :

$$W_1 = \frac{\rho q_v^2 \omega^2 gH}{2\pi Z_1^2 K C_0^3} \operatorname{tg}^2 \bar{\alpha}_m \operatorname{tg}^2(\bar{\beta}_m - E_1)$$

En négligeant  $E_1$  et  $E_2$  dans ces diverses expressions, on obtient finalement en remplaçant K par sa valeur.

$$W_1 = \frac{\rho \Omega^2}{\pi Z_1^2 C_0^3} q_v (gH)^{\frac{5}{2}} \frac{\operatorname{tg} \bar{\alpha}_m \operatorname{tg}^2 \bar{\beta}_m}{\operatorname{tg} \bar{\alpha}_m + \operatorname{tg} \bar{\beta}_m}$$

De cette relation on peut tirer les conclusions suivant.

- pour des performances (H,  $q_v$ ) données, c'est la plus petite vitesse spécifique, qui conduit au bruit le plus faible.
- le bruit est d'autant plus faible que  $\bar{\alpha}_m$  et  $\bar{\beta}_m$  sont petits

- pour  $m=2$  on aura

$$W_2 = \frac{W_1}{4}$$

$$f_2 = 2f_1$$

- Le bruit diminue quand le nombre d'aubage  $Z_1$  augmente

## II.7 Capacité d'aspiration (NPSH)

### A/Mécanisme de la cavitation

Parmi les nombreux critères d'optimisation, on peut également introduire pour les cas des pompes la capacité d'aspiration ou plus précisément le NPSH requis, défini comme ( la charge nette requise à l'aspiration au-dessus de la pression de vapeur ).

Au cours de son écoulement dans la roue, le fluide voit sa pression augmenté depuis la pression  $P_1$ , jusqu'à la pression  $P_2$  cependant, cette variation n'est pas monotone et présente au voisinage de l'entrée de la roue (point K) une dépression dynamique  $\Delta P^*$  donnant en ce point particulier la pression minimale du circuit.

La dépression dynamique est directement liée au contournement du bord d'attaque, elle correspond à la vitesse maximale d'extrados.

Dans ces conditions particulières, le point K sera le siège d'une vaporisation ponctuelle se manifestant par l'apparition d'une bulle de vapeur, immédiatement résorbée puisque à partir de K, la pression va continuellement augmenter[Fig IV.3], L'examen des triangles de vitesse montre que la vitesse maximale, et donc la pression maximale est obtenue au rayon extérieur de la roue.

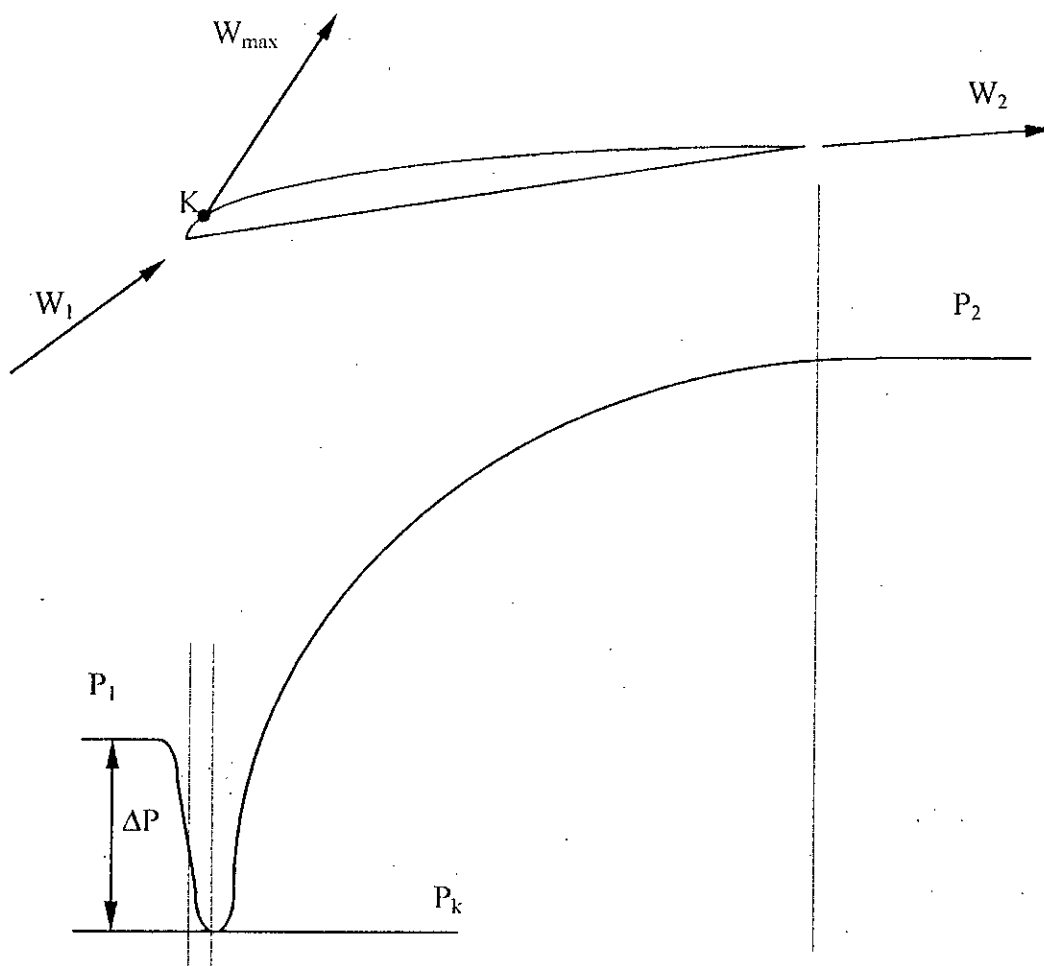


Fig.(IV.3) : Evolution de la pression de l'entrée à la sortie de la roue

Lorsque les conditions d'aspiration se dégradent encore, la pression diminue et la cavitation s'étend depuis  $k$  jusqu'à un autre point  $k'$  en formant entre  $k$  et  $k'$  une « poche de vapeur » plus ou moins stable attachée du profil (fig. IV.4). L'extension de la poche s'effectue également radialement en descendant progressivement vers le pied.

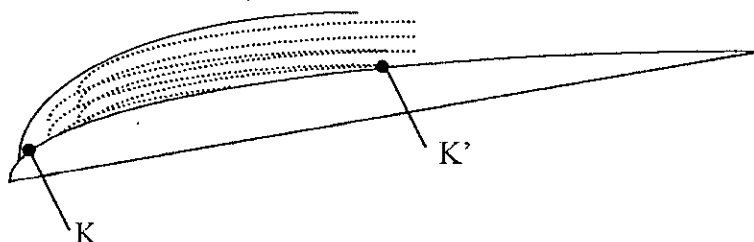


Fig.(IV.4) : Développement de la poche de vapeur à la surface du profil

Lorsque les conditions d'aspiration se dégradent encore plus le point k' progresse vers le bord de fuite puis commençant à se détacher de cette poche de filaments instables et de trajectoires aléatoires. Ces lâchés des bulles sont à l'origine de l'érosion caractéristiques de la cavitation produite par implosion des bulles à la surface des aubages d'enveloppement extérieur et éventuellement du moyeu, c'est le second stade critique de la cavitation (cavitation érosive).

Le troisième stade (de cavitation industriel) correspond à une chute des caractéristiques de la machine, ce stade correspond généralement au passage de la poche de cavitation dans le col formé entre deux pales. la présence de cette poche favorisée une augmentation de la vitesse relative  $W_2$  conduisant a une réduction de la vitesse giratoire  $C_{u2}$  et par la même, à une chute de hauteur théorique (relation d'Euler).

Le seul stade prévisible par le calcul est la cavitation physique; les autres stades ne peuvent être déterminées qu'expérimentalement au statistiquement.

#### b/ NPSH requis :

De par cette définition le NPSH s'écrit :

$$NPSH = \frac{P_1}{\rho g} + \frac{C_1^2}{2g} - \frac{P_v}{\rho g}$$

En appliquant la théorie de **BERNOULLI** entre le point 1 d'entrée et le point critique k situé au rayon  $R=R_c$  on obtient :

$$\frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_k}{\rho g} = \Delta P^* = \left[ \frac{W_{\max}^2}{2g} - \frac{W_1^2}{2g} \right]_{r=R_c}$$

la dépression dynamique  $\Delta P^*$  s'écrit également par convention :

$$\Delta P^* = \lambda_d \left[ \frac{W_1^2}{2g} \right]_{r=R_c}$$



où  $\lambda_d$  est le coefficient de pression dynamique dépendant principalement de l'épaisseur et de la cambrure des profils. Ainsi le NSHP peut s'écrire de deux manières :

$$\diamond NPSH = \frac{P_k}{\rho g} + \frac{C_1^2}{2g} + \lambda_d \left[ \frac{W_1}{2g} \right]_{r=R_2} - \frac{P_v}{\rho g}$$

$$\diamond NPSH = \frac{P_k}{\rho g} + \frac{C_1^2}{2g} + \left[ \frac{W_{\max}^2}{2g} - \frac{W_1^2}{2g} \right]_{r=R_2} - \frac{P_v}{\rho g}$$

Au seuil du premier stade de la cavitation, on observe :

$$\frac{P_k}{\rho g} = \frac{P_v}{\rho g}$$

D'où le NSHP correspond à la première bulle de vapeur :

$$NPSH_r = \frac{C_1^2}{2g} + \lambda_d \left[ \frac{W_1^2}{2g} \right]_{r=R_2}$$

ou

$$NPSH_r = \frac{C_1^2}{2g} + \left[ \frac{W_{\max}^2}{2g} - \frac{W_1^2}{2g} \right]_{r=R_2}$$

On appelle  $D_1$  le facteur de diffusion local :

$$D_1 = \frac{W_{\max} - W_2}{W_{\max}}$$

celui-ci peut être introduit dans le NPSH requis on obtient :

$$NPSH_r = \frac{C_1^2}{2g} + \left[ \frac{W_2^2}{2g(1-D_1)^2} - \frac{W_1^2}{2g} \right]_{r=R_2}$$

On peut aussi explicitement donner le coefficient de pression dynamique par identification :

$$\lambda_d = \left[ \frac{W_2}{W_1} \cdot \frac{1}{(1-D_1)} \right]_{r=R_2}^2 - 1$$

$$\lambda_d = \left[ \frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_2} \cdot \frac{1}{(1-D_1)} \right]_{r=R_2}^2 - 1$$

Pour comparer aisément les machines entre elles, il est utile d'introduire un nombre adimensionnel caractérisant le NPSH requis ; c'est le paramètre de Thomas  $\sigma^{**}$

$$\sigma^{**} = \text{NPSH}/H$$

Comme les autres critères d'optimisation  $\sigma^{**}$  dépend du couple  $(\bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m)$  mais aussi de la vitesse spécifique et du facteur de diffusion à la périphérie  $D_{1e}$ .

D'une manière générale, on peut retenir que pour réaliser des machines de forte capacité d'aspiration, il faut s'efforcer de choisir :

- ◆ une faible vitesse spécifique, ce qui revient à retenir une faible vitesse de rotation lorsque le choix de celle-ci est libre.
- ◆ un facteur de diffusion au rayon extérieur aussi faible que possible et compatible avec une cambrure positive.

Pour simplifier, on peut retenir  $D_{1e} = (5/6) D_e$

Où  $D_e$  est le facteur de diffusion global à la périphérie.

### III. Application numérique

L'exploitation du programme de dimensionnement, en partant des valeurs du tableau des données correspondants à une pompe axiale, nous permet d'obtenir les résultats exposés dans le tableau des résultats et de l'abaque donnant l'évolution des performances d'une pompe.

LES DONNEES			
H(m)	Q(l/s)	N(tr/mn)	Z1
10	516	1450	11

LES RESULTATS										
Afm	Btm	Beta1	Beta2	Alfa1	R	Λ	Hngl	Sigma	T	Wm
10	20	33.72	-85.97	86.15	0.09	0.46	0.02	-10.14	0.62	67.05
10	26	38.96	-36.16	56.99	0.09	0.5	0.17	0.05	0.64	68.7
10	32	43.92	0.85	43.47	0.1	0.54	0.29	0.51	0.66	70.04
10	38	48.65	21.78	36.38	0.11	0.58	0.37	0.68	0.69	71.2
10	44	53.24	35.44	32.09	0.12	0.62	0.45	0.77	0.71	72.28
10	50	57.74	45.71	29.2	0.13	0.67	0.51	0.82	0.73	73.32
10	56	62.2	54.17	27.1	0.15	0.73	0.56	0.87	0.75	74.38
10	62	66.69	61.52	25.5	0.16	0.81	0.61	0.9	0.77	75.51
10	68	71.25	68.17	24.24	0.19	0.91	0.65	0.92	0.8	76.8
14	20	40.21	11.67	32.57	0.08	0.46	0.51	0.62	0.45	68.01
14	26	44.9	22.53	30.19	0.08	0.49	0.58	0.71	0.48	69.75
14	32	49.25	31.49	28.73	0.09	0.52	0.64	0.76	0.51	71.16
14	38	53.36	39.29	27.76	0.1	0.55	0.68	0.8	0.53	72.39
14	44	57.3	46.29	27.09	0.11	0.59	0.71	0.84	0.56	73.51
14	50	61.15	52.73	26.62	0.11	0.63	0.74	0.86	0.59	74.6
14	56	64.97	58.75	26.28	0.13	0.68	0.77	0.88	0.62	75.7
14	62	68.83	64.46	26.07	0.14	0.74	0.79	0.91	0.65	76.87
14	68	72.79	69.96	25.96	0.16	0.82	0.8	0.92	0.69	78.18
18	20	46.67	26.9	28.94	0.07	0.47	0.7	0.74	0.3	68.65
18	26	50.71	34.24	28.44	0.08	0.5	0.74	0.78	0.33	70.48
18	32	54.41	40.75	28.18	0.08	0.53	0.77	0.81	0.36	71.95
18	38	57.88	46.66	28.07	0.09	0.55	0.79	0.83	0.39	73.23
18	44	61.2	52.12	28.06	0.09	0.59	0.81	0.85	0.42	74.4
18	50	64.43	57.26	28.15	0.1	0.62	0.83	0.87	0.45	75.53
18	56	67.65	62.16	28.31	0.11	0.66	0.84	0.89	0.49	76.66
18	62	70.92	66.92	28.57	0.12	0.71	0.85	0.91	0.53	77.86
18	68	74.32	71.62	28.94	0.14	0.78	0.86	0.92	0.57	79.21
22	20	52.8	37.48	28.84	0.07	0.5	0.79	0.79	0.17	69.13
22	26	56.16	43.2	28.91	0.07	0.52	0.81	0.81	0.2	71.02
22	32	59.22	48.31	29.08	0.08	0.54	0.83	0.83	0.23	72.55
22	38	62.08	52.97	29.33	0.08	0.57	0.85	0.85	0.26	73.88
22	44	64.82	57.31	29.63	0.09	0.6	0.86	0.87	0.29	75.09
22	50	67.5	61.43	30.01	0.09	0.63	0.87	0.88	0.32	76.25
22	56	70.18	65.42	30.46	0.1	0.66	0.88	0.89	0.36	77.42
22	62	72.92	69.36	31.02	0.11	0.71	0.88	0.91	0.4	78.66
22	68	75.81	73.31	31.72	0.13	0.77	0.88	0.92	0.46	80.04
26	20	58.41	46.7	29.46	0.06	0.53	0.84	0.83	0.05	69.5
26	26	61.12	51.12	29.8	0.07	0.55	0.86	0.84	0.08	71.45
26	32	63.59	55.07	30.2	0.07	0.57	0.87	0.86	0.11	73.03
26	38	65.91	58.69	30.64	0.08	0.59	0.88	0.87	0.13	74.4
26	44	68.13	62.08	31.13	0.08	0.62	0.89	0.88	0.17	75.65
26	50	70.32	65.34	31.7	0.09	0.64	0.9	0.89	0.2	76.85
26	56	72.53	68.54	32.35	0.1	0.67	0.9	0.9	0.24	78.05
26	62	74.81	71.73	33.13	0.1	0.71	0.9	0.91	0.29	79.32
26	68	77.23	75.01	34.11	0.12	0.77	0.9	0.92	0.34	80.73
30	20	63.4	54.74	30.24	0.06	0.57	0.87	0.85	-0.06	69.79
30	26	65.54	58.05	30.72	0.06	0.58	0.88	0.86	-0.03	71.8
30	32	67.49	61.03	31.25	0.07	0.6	0.89	0.87	0	73.43
30	38	69.34	63.79	31.82	0.07	0.62	0.9	0.88	0.02	74.83
30	44	71.12	66.4	32.44	0.08	0.64	0.91	0.89	0.06	76.12
30	50	72.89	68.93	33.13	0.08	0.67	0.91	0.9	0.09	77.36
30	56	74.69	71.44	33.94	0.09	0.7	0.91	0.91	0.13	78.59
30	62	76.56	74	34.9	0.1	0.73	0.91	0.92	0.17	79.89
30	68	78.58	76.67	36.09	0.11	0.78	0.91	0.93	0.23	81.33

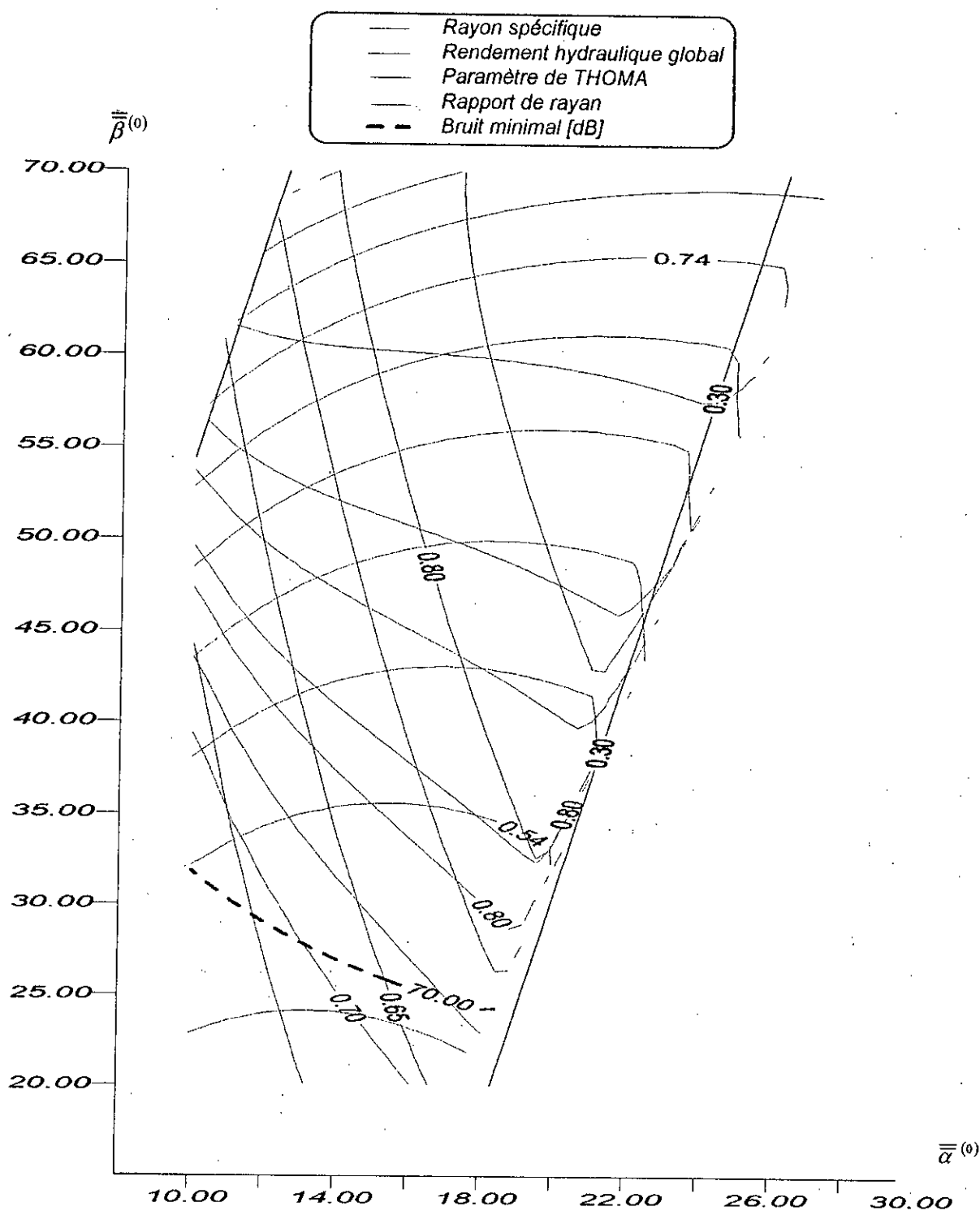


Fig.(IV.5) :Evolution des performances avec le couple  $(\alpha_m, \beta_m)$

Chapitre V

Coordination Entre Le  
Dimensionnement Et Les  
Caractéristiques de  
L'écoulement

---

## Chapitre V: COORDINATION ENTRE LE DIMENSIONNEMENT ET LES CARACTERISTIQUES DE L'ÉCOULEMENT

---

L'ensemble des lois de déflexions et des pertes ainsi que les principes généraux relatifs au calcul direct sont regroupés dans l'étude de ce chapitre.

Sous l'aspect dimensionnement, les données d'entrée sont essentiellement les performances attendues, à savoir, la hauteur  $H$ , le débit  $Q$ , la vitesse de rotation  $N$

Dans cette démarche, l'opérateur doit fixer un certains nombres de caractéristiques et de paramètres :

- Le couple  $(\alpha_m, \beta_m)$
- Le nombre d'aubes du rotor et du stator

### I. Présentation des résultats

Ces résultats obtenue pour les données suivantes avec un NACA 65-173 tel que

- cambrure aérodynamique  $C_{z\infty 0}=2.4$
- Un serrage  $\sigma =1$

❖ Tableau de donne N° :1

LES DONNES			
H(m)	Q(l/s)	N(tr/min)	Z
11	500	1200	15

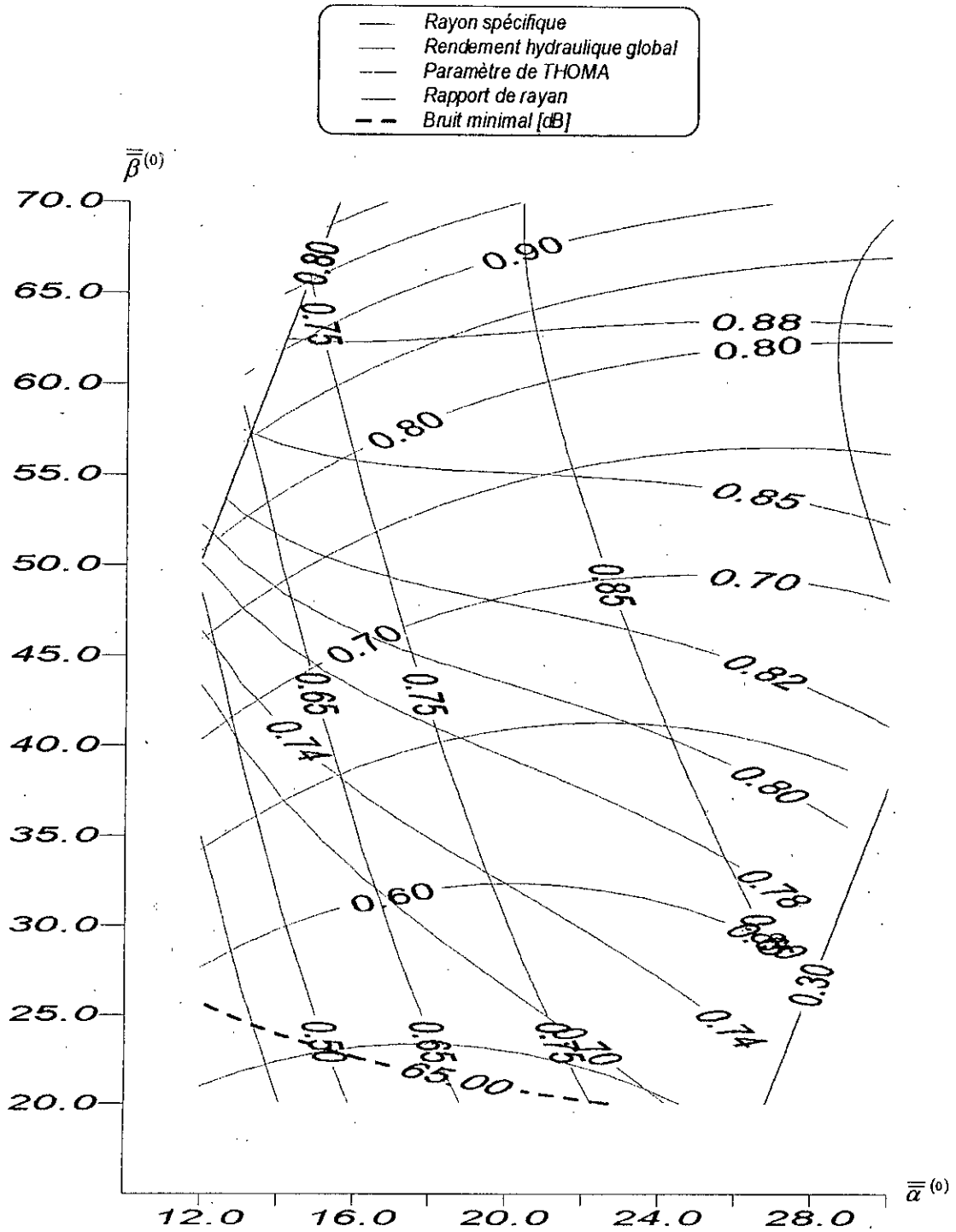


Fig.(V.1) : Evolution des performances avec le couple  $(\alpha_m, \beta_m)$

➤ Pour  $\alpha_m = 28^\circ$ ,  $\beta_m = 65^\circ$

LES RESULTATS										
$\alpha_m(^\circ)$	$\beta_m(^\circ)$	$\Omega$ vitesse spécifique	$\beta_1(^\circ)$	$\beta_2(^\circ)$	$\alpha_1(^\circ)$	$\eta_{ghl}$ rendement	$\gamma_r(^\circ)$	$\gamma_r(^\circ)$	$\sigma^{**}$ paramètre de Thomas	$W_m(dB)$ bruit
28	65	2.65	69.51	61.58	39.61	0.89	47.5	17.6	0.84	76.10

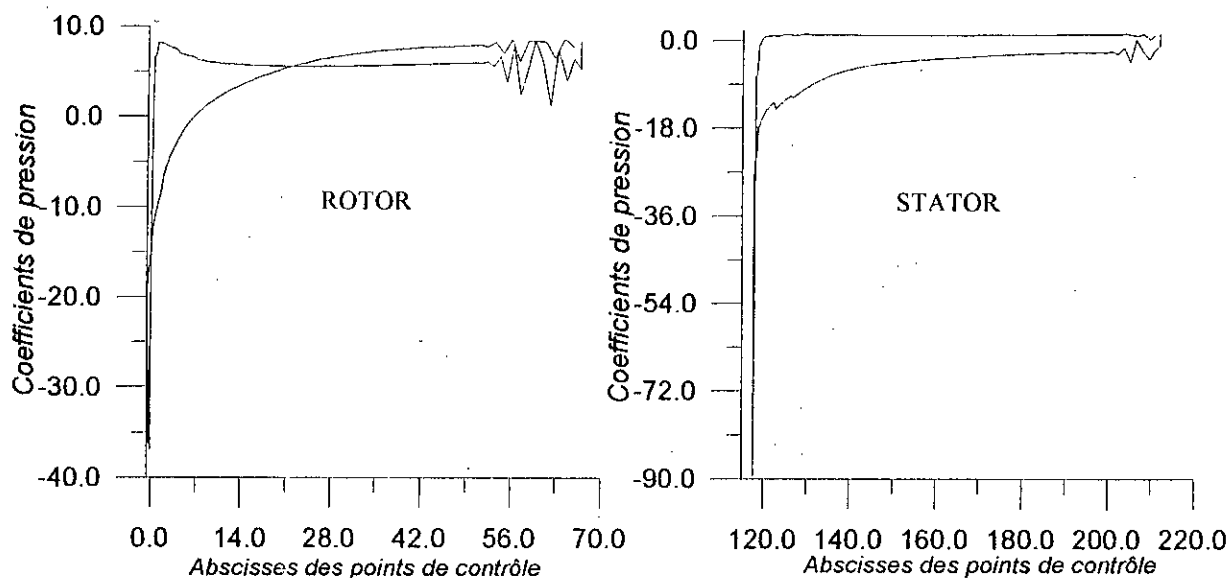


Fig. (V.2) : Les coefficients de pression pour  $\alpha_m = 28^\circ$ ,  $\beta_m = 65^\circ$

➤ Pour  $\alpha_m = 20^\circ$ ,  $\beta_m = 35^\circ$

LES RESULTATS										
$\alpha_m(^\circ)$	$\beta_m(^\circ)$	$\Omega$ vitesse spécifique	$\beta_1(^\circ)$	$\beta_2(^\circ)$	$\alpha_1(^\circ)$	$\eta_{ghl}$ rendement	$\gamma_r(^\circ)$	$\gamma_r(^\circ)$	$\sigma^{**}$ paramètre de Thomas	$W_m(dB)$ bruit
20	35	2.65	46.78	21.13	34.12	0.77	24.8	12.1	0.68	68.74

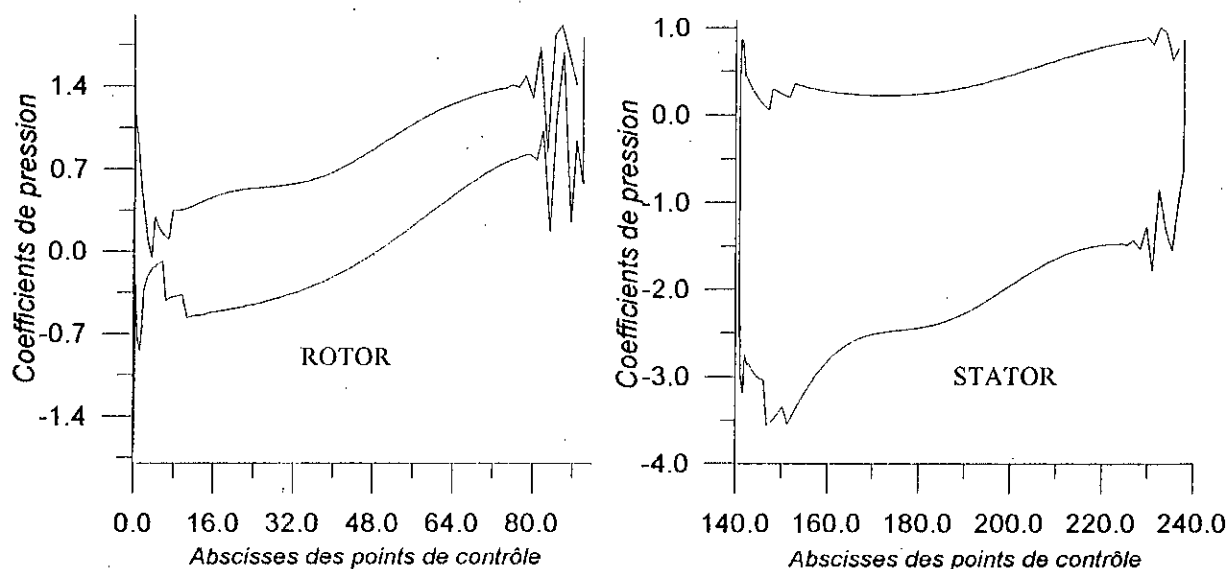


Fig. (V.3) : Les coefficients de pression pour  $\alpha_m = 20^\circ$ ,  $\beta_m = 35^\circ$



➤ Pour  $\alpha_m = 14^\circ$ ,  $\beta_m = 45^\circ$

LES RESULTATS										
$\alpha_m(^{\circ})$	$\beta_m(^{\circ})$	$\Omega$ vitesse spécifique	$\beta_1(^{\circ})$	$\beta_2(^{\circ})$	$\alpha_1(^{\circ})$	$\eta_{ghl}$ rendement	$\gamma_r(^{\circ})$	$\gamma_r(^{\circ})$	$\sigma^{**}$ paramètre de Thomas	$W_m(\text{dB})$ bruit
14	45	2.65	51.32	30.64	33.29	0.61	29.3	11.3	0.73	69.49

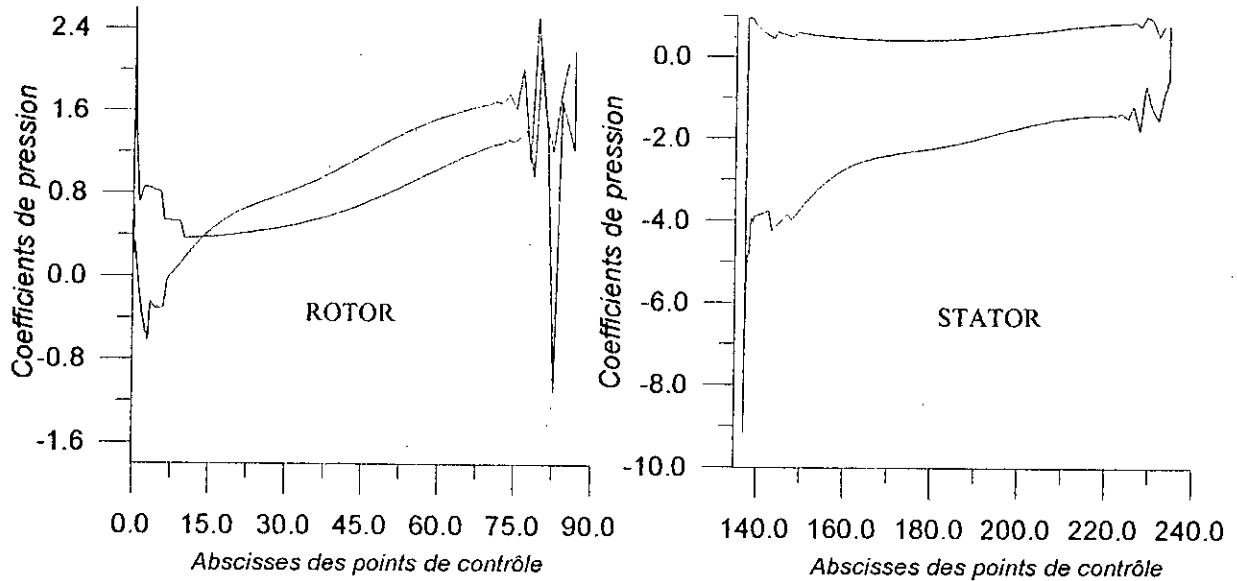


Fig. (V.4) : Les coefficients de pression pour  $\alpha_m = 14^\circ$ ,  $\beta_m = 45^\circ$

Ces figures correspondant aux données du tableau (1), montrent que lorsque les angles ( $\alpha_m, \beta_m$ ) sont élevées l'évolution des coefficients de pression est plus stable avec un meilleur rendement que ceux pour des ( $\alpha_m, \beta_m$ ) moins élevées.

Lorsque les angles ( $\alpha_m, \beta_m$ ) sont élevées de l'ordre de  $[28^\circ, 65^\circ]$ , on appelle ces machines des machines faiblement chargée utilisé comme pompes hydraulique.

❖ Tableau de donne N°:2

LES DONNES			
H(m)	Q(l/s)	N(tr/min)	Z
8	600	1000	7

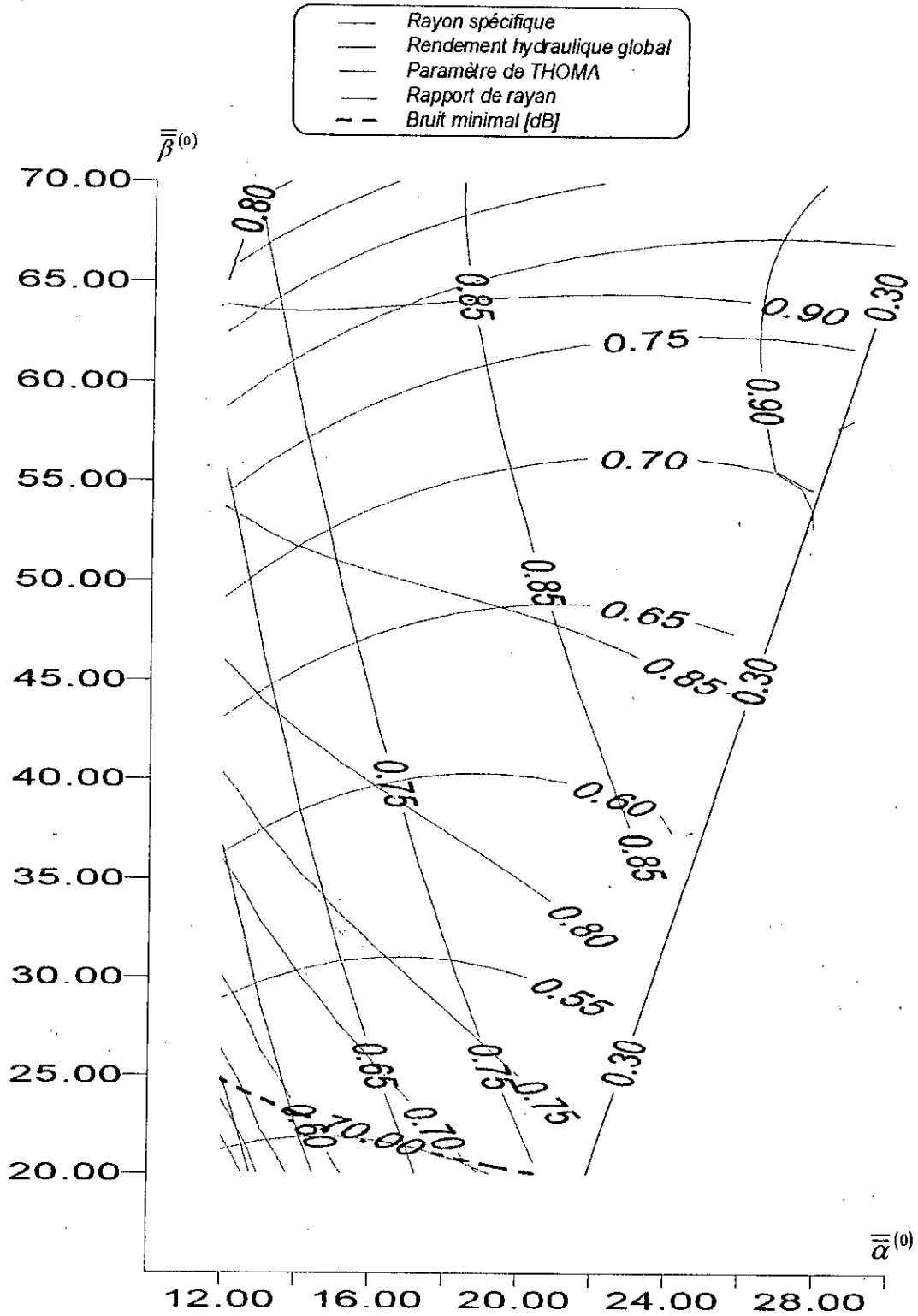


Fig.(V.5) : Evolution des performances avec le couple  $(\alpha_m, \beta_m)$

➤ Pour  $\alpha_m=28^\circ, \beta_m=65^\circ$

LES RESULTATS										
$\alpha_m(^{\circ})$	$\beta_m(^{\circ})$	$\Omega$ vitesse spécifique	$\beta_1(^{\circ})$	$\beta_2(^{\circ})$	$\alpha_1(^{\circ})$	$n_{ghl}$ rendement	$\gamma_r(^{\circ})$	$\gamma_l(^{\circ})$	$\sigma^{**}$ paramètre de Thomas	$W_m(dB)$ Bruit
28	65	3.07	69.51	62.50	37.04	0.90	47.5	17.6	0.85	81.34

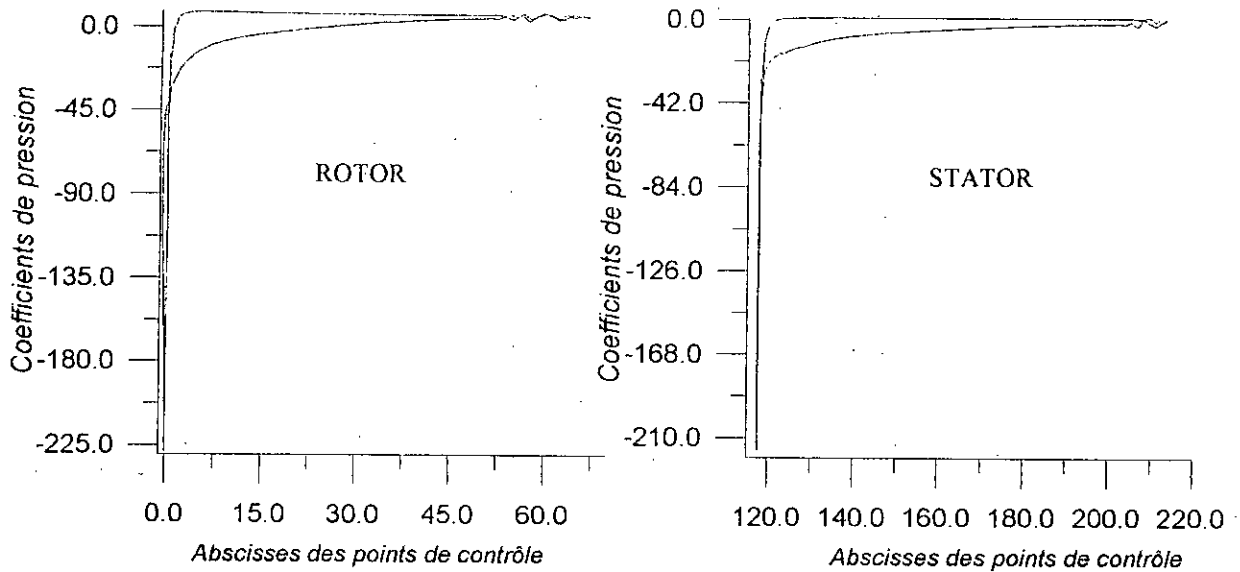


Fig. (V.6) : Les coefficients de pression pour  $\alpha_m=28^\circ, \beta_m=65^\circ$

➤ Pour  $\alpha_m=20^\circ, \beta_m=55^\circ$

LES RESULTATS										
$\alpha_m(^{\circ})$	$\beta_m(^{\circ})$	$\Omega$ vitesse spécifique	$\beta_1(^{\circ})$	$\beta_2(^{\circ})$	$\alpha_1(^{\circ})$	$n_{ghl}$ rendement	$\gamma_r(^{\circ})$	$\gamma_l(^{\circ})$	$\sigma^{**}$ paramètre de Thomas	$W_m(dB)$ Bruit
20	55	3.07	60.83	49.79	31.33	0.85	38.8	9.33	0.83	77.90

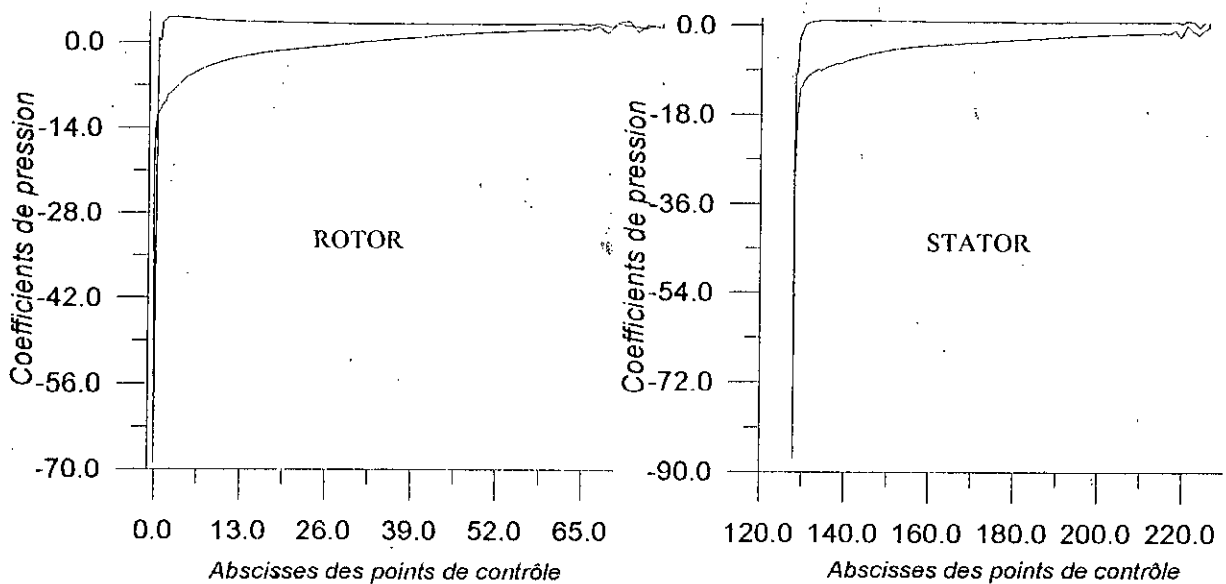


Fig. (V.7) : Les coefficients de pression pour  $\alpha_m=20^\circ, \beta_m=55^\circ$

➤ Pour  $\alpha_m = 14^\circ$ ,  $\beta_m = 55^\circ$

LES RESULTATS										
$\alpha_m(^\circ)$	$\beta_m(^\circ)$	$\Omega$ vitesse spécifique	$\beta_1(^\circ)$	$\beta_2(^\circ)$	$\alpha_1(^\circ)$	$\eta_{ghl}$ rendement	$\gamma_r(^\circ)$	$\gamma_r(^\circ)$	$\sigma^{**}$ paramètre de Thomas	$W_m(\text{dB})$ Bruit
14	55	3.07	59.19	48.77	28.20	0.73	37.19	6.2	0.84	76.55

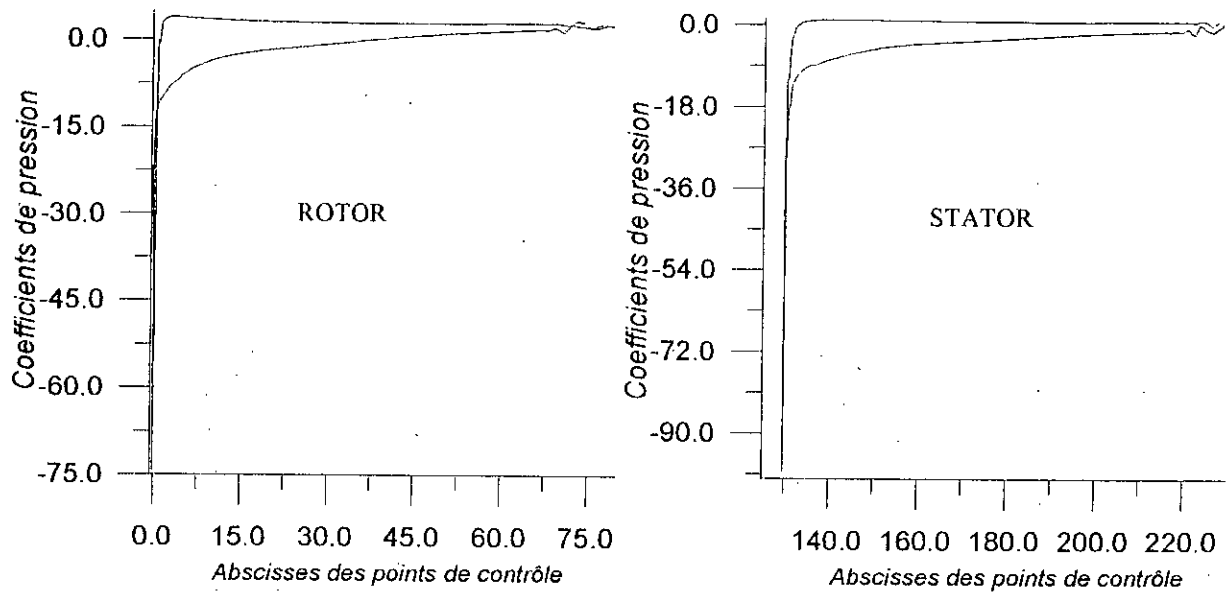


Fig. (V.8) : Les coefficients de pression pour  $\alpha_m = 14^\circ$ ,  $\beta_m = 55^\circ$

Ces figures correspondant aux données du tableau (2), montrent que l'évolution des coefficients de pression est plus stable avec un meilleur rendement que celle des données des autres tableaux.

❖ Tableau de donne N° :3

LES DONNES			
H(m)	Q(l/s)	N(tr/min)	Z
12	400	1600	9

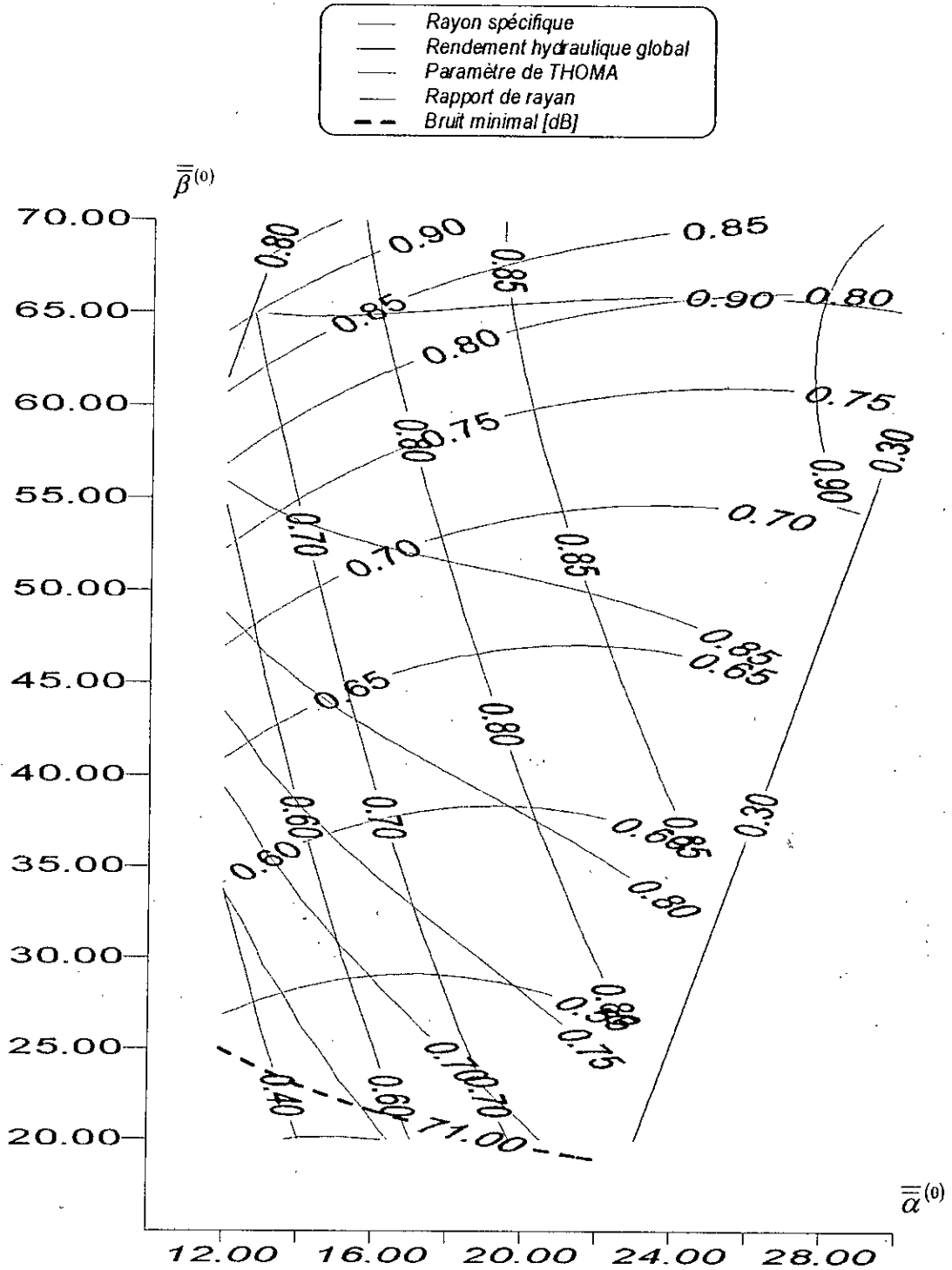


Fig. (V.9): Evolution des performances avec le couple  $(\alpha_m, \beta_m)$

➤ Pour  $\alpha_m = 26^\circ$ ,  $\beta_m = 60^\circ$

LES RESULTATS										
$\alpha_m(^\circ)$	$\beta_m(^\circ)$	$\Omega$ vitesse spécifique	$\beta_1(^\circ)$	$\beta_2(^\circ)$	$\alpha_1(^\circ)$	$\eta_{ghl}$ rendement	$\gamma_r(^\circ)$	$\gamma_r(^\circ)$	$\sigma^{**}$ paramètre de Thomas	$W_m(dB)$ Bruit
26	60	2.96	65.74	56.17	36.04	0.89	43.7	14.0	0.83	80.06

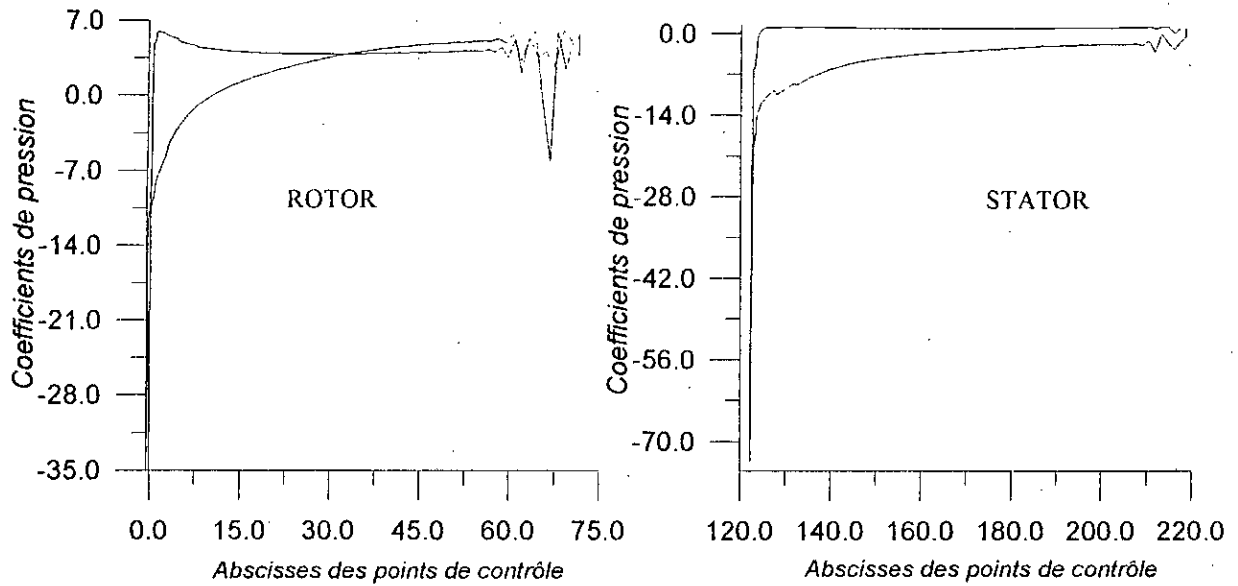


Fig. (V.10) : Les coefficients de pression pour  $\alpha_m = 26^\circ$ ,  $\beta_m = 60^\circ$

➤ Pour  $\alpha_m = 20^\circ$ ,  $\beta_m = 60^\circ$

LES RESULTATS										
$\alpha_m(^\circ)$	$\beta_m(^\circ)$	$\Omega$ vitesse spécifique	$\beta_1(^\circ)$	$\beta_2(^\circ)$	$\alpha_1(^\circ)$	$\eta_{ghl}$ rendement	$\gamma_r(^\circ)$	$\gamma_r(^\circ)$	$\sigma^{**}$ paramètre de Thomas	$W_m(dB)$ bruit
20	60	2.96	64.49	55.65	32.30	0.84	42.49	10.3	0.84	79.04

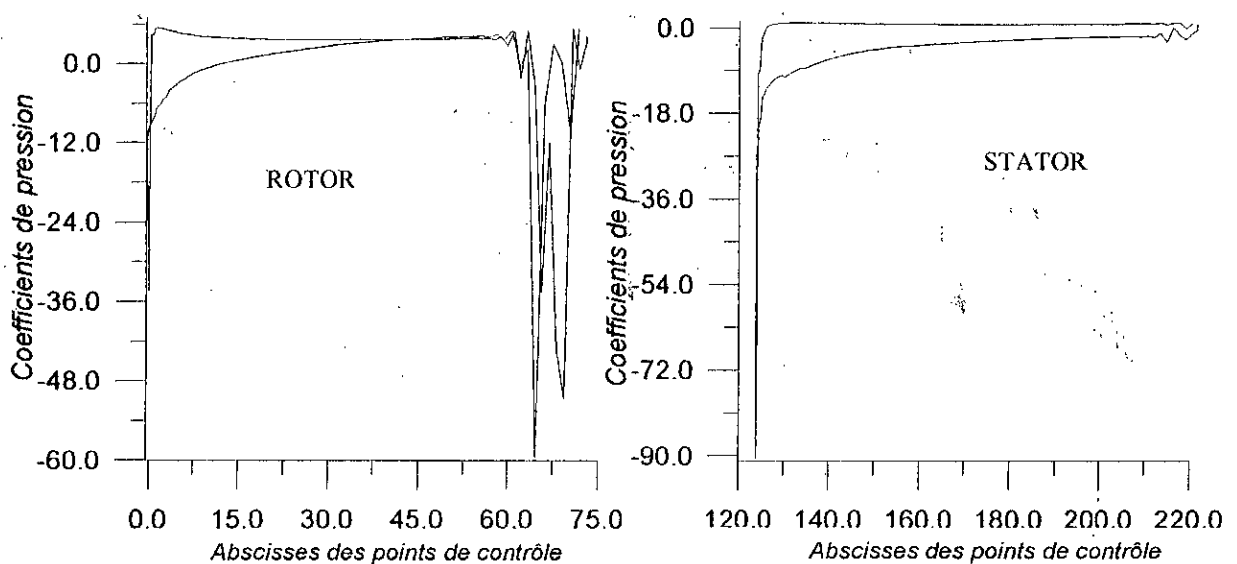


Fig. (V.11) : Les coefficients de pression pour  $\alpha_m = 20^\circ$ ,  $\beta_m = 60^\circ$

➤ Pour  $\alpha_m = 16^\circ$ ,  $\beta_m = 40^\circ$

LES RESULTATS										
$\alpha_m(^{\circ})$	$\beta_m(^{\circ})$	$\Omega$ vitesse spécifique	$\beta_1(^{\circ})$	$\beta_2(^{\circ})$	$\alpha_1(^{\circ})$	$\eta_{ghl}$ rendement	$\gamma_r(^{\circ})$	$\gamma_r(^{\circ})$	$\sigma^{**}$ paramètre de Thomas	$W_m$ (dB) Bruit
16	40	2.96	48.38	27.45	31.23	0.70	26.38	9.23	0.73	74.40

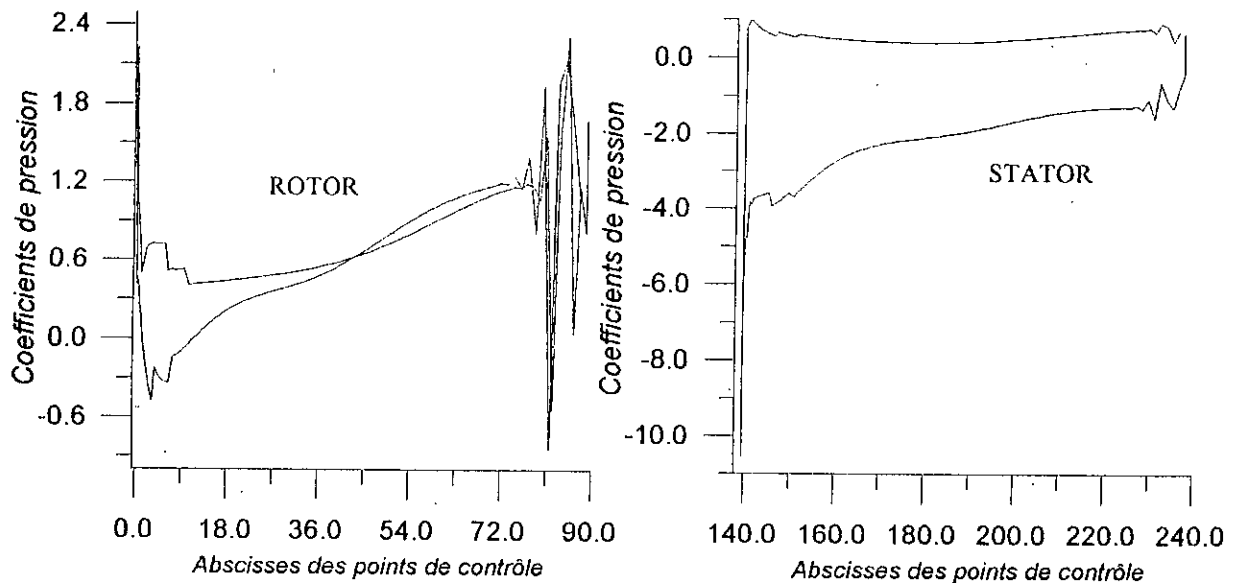


Fig. (V.12) : Les coefficients de pression pour  $\alpha_m = 16^\circ$ ,  $\beta_m = 40^\circ$

D'après les figures correspondant dans ce cas aux données du tableau (3), on peut conclure que lorsque les angles ( $\alpha_m, \beta_m$ ) sont élevées l'évolution des coefficients de pression est aussi stable et garde ainsi un meilleur rendement que celle des ( $\alpha_m, \beta_m$ ) moins élevées.

## II. Choix optimale du couple ( $\alpha_m, \beta_m$ ) :

Nous avons vu que le couples ( $\alpha_m, \beta_m$ ) confère à la machine ses principales caractéristiques géométriques et hydrauliques. Ce choix sera conditionné par les critères d'optimisation retenue pour répandre au mieux au cahier de charge proposé :

- Encombrement , poids ( $\Lambda$ ).
- Rendement ( $\eta_h$ ).
- Bruit ( $W_m$ ).
- NPSH ( $\sigma^{**}$ ).

# *Conclusion*



## Conclusion

---

*Dans cette présente étude, nous avons exposé une des manières dont la méthode des singularités peut être utilisée dans le calcul des écoulements stationnaires et instationnaire.*

*On a remarqué une grande souplesse dans l'utilisation de la méthode des singularités, avec une formulation relativement simple et une approche très poussée vers la solution du problème direct.*

*D'après les résultats obtenus de cette étude on peut tirer les conclusions suivantes :*

- La méthode des singularités nous a permis de voir l'utilité de son utilisation en turbomachine, cependant une utilisation de cette méthode dans le dimensionnement nécessite des moyens de calcul plus performants pour nous permettre d'avoir un abaque plus précis.*
- L'assemblage entre l'étude de dimensionnement géométrique et hydraulique, et les caractéristiques de l'écoulement traitées par la méthode des singularités nous a permis d'avoir une analyse précise et complète qui synthétise parfaitement le système fluide- turbomachine.*

# *Annexes*

## Les Différentes Paramètres du Profil

### NACA 65 - 173

Le constructeur d'un profil aérodynamique s'articule autour de la corde, ligne imaginaire joignant le bord d'attaque au bord de fuite et servant aussi du repérage du profil par rapport à l'écoulement.

Pour les turbomachines axiales, la série NACA 65 est la plus répandue, les principales définitions géométriques sont données sur la figure suivant :

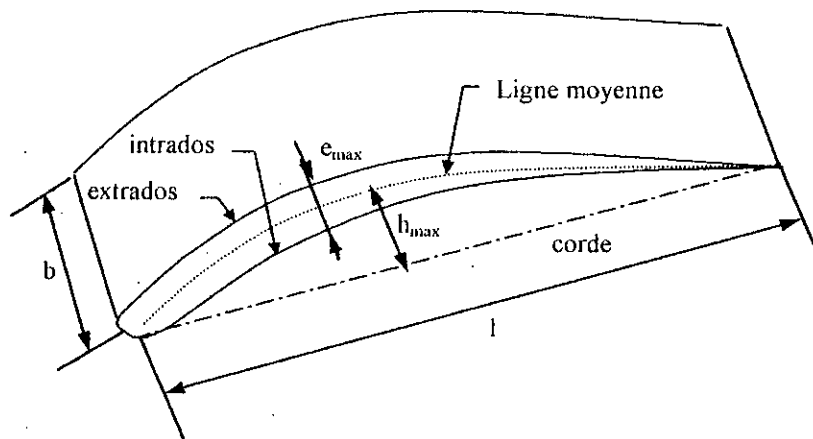


Fig.(A.1) : Définition géométrique relative au profil aérodynamique

On retiendra principalement les rapports caractéristiques :

Cambrure géométrique  $\frac{h_{max}}{l} : 0 \text{ à } 20 \%$

Cambrure aérodynamique  $C_{z\alpha 0} = \frac{h_{max}}{lk} : 0 \text{ à } 2.7 \%$

tel que  $k$  : représente un coefficient numérique lié à une série constructive, dans la série NACA 65,  $k=5.515$

Epaisseur relative  $\frac{e_{max}}{l} : 4 \text{ à } 20$

Les coordonnées du profil Pour le NACA 65-173 sont données ci-dessous :

Extrados		Intrados	
X/l(%)	Y/l(%)	X/l(%)	Y/l(%)
0	0	100	0
0.26	0.625459	97.8	1.129
1	1.63145	95.2	2.191
2	2.558642	92.6	3.051
3	3.413537	90	3.737
4	4.2022	87.4	4.277
5	4.930285	84.8	4.693
6	5.603047	82.2	5.005
7	6.22536	79.6	5.231
9	7.336341	77	5.388
11	8.295268	74.4	5.487
13.3	9.244904	71.8	5.541
15.9	10.16121	69.2	5.56
18.5	10.94703	66.6	5.55
21.1	11.63075	64	5.518
23.7	12.23251	61.4	5.47
26.3	12.76567	58.8	5.408
28.9	13.23807	56.2	5.335
31.5	13.65325	53.6	5.253
34.1	14.01154	51	5.162
36.7	14.31098	48.4	5.063
39.3	14.54822	45.8	4.953
41.9	14.71925	43.2	4.833
44.5	14.82001	40.6	4.7
47.1	14.8469	38	4.552
49.7	14.79725	35.4	4.388
52.3	14.66952	32.8	4.205
54.9	14.46354	30.2	4.001
57.5	14.18057	27.6	3.773
60.1	13.82322	25	3.52
62.7	13.39533	22.4	3.24
65.3	12.90168	19.8	2.932
67.9	12.34761	17.2	2.594
70.5	11.73852	14.6	2.226
73.1	11.07927	12	1.827
75.7	10.37344	10	1.5
78.3	9.622541	8	1.157
80.9	8.825005	6.5	0.888
83.5	7.975174	5.5	0.704
86.1	7.062116	4.5	0.516
88.7	6.068336	3.5	0.324
91.3	4.968385	2.5	0.129
93.9	3.72735	1.5	-0.06
96.5	2.299233	0.	-0.08
98.8	0.8		

## Champ des pressions en régime instationnaire

La loi fondamentale de la dynamique peut se résumer dans l'équation vectorielle suivant :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overline{\text{grad}}(C^2) + \overline{\text{rot}}(\vec{C}) \wedge \vec{C} \right) = -\overline{\text{grad}} p + \rho \vec{F} + \nu \Delta \vec{C} + (\nu + \eta) \overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{C})$$

- $\vec{C}$  : la vitesse absolue de la particule fluide.
- $\vec{F}$  : le champ des forces extérieures.
- $p, \rho, \nu, \eta$  : respectivement la pression, la masse volumique, la viscosité dynamique et le deuxième coefficient de viscosité.

Le vecteur  $\Delta \vec{C}$  ayant pour expression :

$$\Delta \vec{C} = \overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{C}) - \overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{C})$$

Les hypothèses de fluide parfait et incompressible se traduit par les deux relations :

$$\begin{aligned} \nu &= 0 \\ \text{div} \vec{C} &= 0 \end{aligned}$$

Et conduisant à l'équation de Helmholtz

$$\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} + \overline{\text{rot}}(\vec{C}) \wedge \vec{C} = -\overline{\text{grad}} \left( H + \frac{p}{\rho} + \frac{C^2}{2} \right)$$

Où - H est le potentiel dont dérivant les forces extérieures

Dans le cas qui nous intéresse l'écoulement est irrotationnel soit :

$$\overline{\text{rot}} \vec{C} = 0 \Rightarrow \vec{C} \overline{\text{grad}} \phi$$

Nous obtenons alors l'équation de **BERNOULLI**

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{C^2}{2} = \text{cte}(t)$$

$Cte(t)$  : est une constante dépendant du temp, caractérisant l'écoulement à l'instant  $t_0$ .

L'application de cette formule reste limitée au cas de repère absolu (fixé). Mais son application pour un point entraîne dans un repère mobile, s'avère délicate, nous allons donc la transformer pour faciliter son utilisation en repère mobile.

Soit (F) repère fixe, (M) repère mobile : alors

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_F = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_M - \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad} \phi}$$

comme de plus on a :

$$C^2 = w^2 - u^2 + 2\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad} \phi}$$

on obtient l'expression finale :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_M + \frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + H = cte(t)$$

## Différents Types de lois Génératrices

Dans la conception des machines axiales, on définit la loi génératrice comme étant la loi de répartition radiale de la composante  $C_{u2}$ . Le choix de cette distribution est de l'initiative de concepteur.

Très généralement, on utilise la forme générale suivante :

$$C_{u2} = k_1 r + k_2 + \frac{k_3}{r}$$

➤ **Vortex libre** :  $k_1 = k_2 = 0$

$$C_{u2} = \frac{k_3}{r}$$

➤ **Vortex forcé** :  $k_2 = k_3 = 0$

$$C_{u2} = k_1 r$$

➤ **Vortex connotant** :  $k_1 = k_3 = 0$

$$C_{u2} = k_2$$

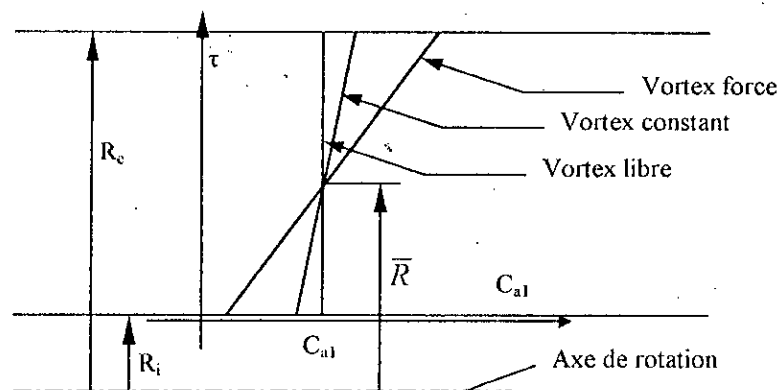


Fig.(C.1) : Evolution radiale de la vitesse axiale entre le rotor et le stator

