

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE  
ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE  
PROJET DE FIN D'ETUDES

*En vue d'obtention du diplôme  
d'ingénieur d'état en génie mécanique*

SUJET

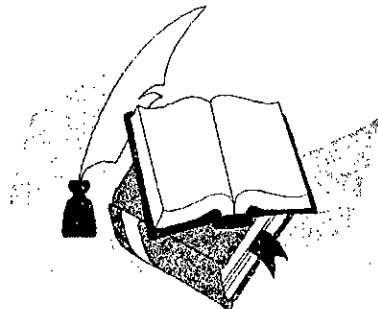
**ETUDE AEROELASTIQUE  
D'UNE AILE D'AVION PAR  
LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

Proposé et dirigé par :

**M. BOUDJEMAA**

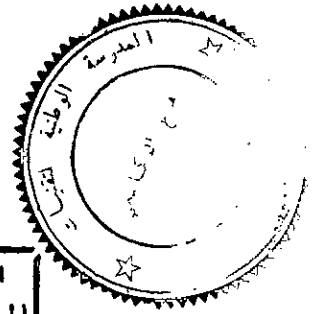
Etudié par :

**M. N. AID**



Promotion 1999

E.N.P 10 Avenue Hassen Badi, 16200 El-Harrach, Alger



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

### ملخص

في هذه المذكرة استعملنا طريقة العناصر المنتهية للتأكد من المقاومة السكونية و الديناميكية لمقطع جناح طائرة.  
لقد قمنا بإنجاز برنامج معلوماتي لتقدير الإجهادات و الإنتقالات باستعمال عنصر ذي شكل مستطيل يحتوي على ثمانية عقد لتحسيد المسألة.

### Résumé

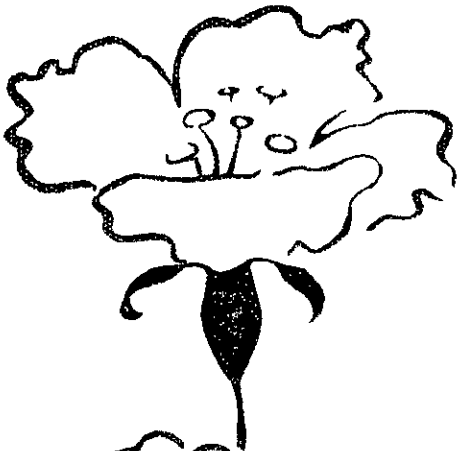
Dans cette étude, nous avons utilisé la méthode des éléments finis pour vérifier la résistance statique et dynamique d'un profil d'aile d'avion. Un code de calcul a été élaboré pour la détermination des contraintes et des déplacement en utilisant l'élément isoparamétrique à huit noeuds.

### Abstract

In this study, the finite element method was used to verify the static and dynamic resistance of wings profile of aircraft. Computer program was elaborated to compute straiiss and displacements by using isoparamétric element of eight joints.

### Mots clés

Aérodynamique, aérodynamique, élément finis, isoparamétrique, aile, déformation, contrainte, traînée, portance.



## Remerciements

*Je remercie Dieu qui m'a donné la volonté et le courage afin d'arriver à ce modeste travail.*

*Je tiens à exprimer vivement ma profonde gratitude à mon promoteur Monsieur : **M. BOUDJEMAA** pour sa confiance, ses encouragements, son suivi et pour les conseils qu'il a apporté pour l'achèvement de ce projet.*

*Je remercie également tous les enseignants qui ont contribués de près ou de loin à ma formation et à cette thèse, en particulier **Mr. AMMICHE, M<sup>elle</sup>. AMOR** et **Mr. BADER ED-DINE**.*

*Je tiens également à remercier l'ensemble des membres de jury qui nous ont fait l'honneur de juger notre travail.*

*Je voudrais associer mes remerciements à toute l'équipe de la bibliothèque, ainsi qu'à tout le personnel pour leur entière disponibilité.*

*Je tiens à remercier mon ami **YAZID**, que je lui souhaite un gros succès dans l'avenir.*

## SOMMAIRE

NOTATIONS PRINCIPALES.....	1
INTRODUCTION GENERALE.....	3

### CHAPITRE I ETUDE AERODYNAMIQUE

INTRODUCTION.....	6
I. 1 PRINCIPE DE BERNOULLI.....	6
I. 2 LA TRAINÉE.....	7
I. 3 DEFINITION GEOMETRIQUE D'UN PROFIL D'AILE.....	8
I. 3. 1 Définition d'un profil.....	8
I. 3. 2 Profil théorique.....	8
I. 3. 3 Profil empirique.....	9
I. 4 AERODYNAMIQUE DES PROFILS DES AILES.....	10
INTRODUCTION.....	10
I. 4. 1 Modèle du fluide Incompressible.....	10
I. 4. 2 Répartition de pression sur un profil d'aile.....	13
I. 5 COEFFICIENT SANS DIMENSION.....	14
I. 5. 1 Trièdre.....	14
I. 5. 2 Calcul des coefficients sans dimension de force et de moment.....	15
I. 6 TRANSFORMATIONS CONFORMES.....	17
I. 6. 1 Propriété de la transformation conforme.....	17
I. 6. 2 Ecoulement autour d'un cylindre de section circulaire.....	20
I. 6. 3 Portance.....	23
I. 6. 4 Transformation de JOUKOWSKI.....	24
I. 6. 5 Condition de KUTTA – JOUKOWSKI.....	24

### CHAPITRE II INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

INTRODUCTION.....	27
II. 1 LES METHODES MATRICIELLES.....	27
II. 1. 1 Formulation élémentaire.....	27
II. 1. 2 Formulation globale.....	27
II. 2 CLASSIFICATION DES TRAITEMENTS.....	28
II. 3 LES PROBLEMES LINEAIRES.....	28
II. 3. 1 Problème statique.....	28
II. 3. 2 Problème dynamique.....	28
II. 4 DIFFERENTES FORMULATIONS.....	29
II. 5 CONSTRUCTION DES MATRICES CARACTERISTIQUES ELEMENTAIRES ET GLOBALES.....	30
II. 5. 1 Relations déformations – déplacements.....	31
II. 5. 2 Relations contraintes – déformations.....	32

II. 6 L' ASSEMBLAGE.....	33
II. 5. 1 Approche énergétique.....	33
II. 7 CONVERGENCE DE LA M.E.F.....	34
II. 8 ERREUR DANS LA M.E.F.....	34
II. 9 PRECISION DE LA M.E.F.....	35

**CHAPITRE III**  
**LA METHODE DES ELEMENTS FINIS EN DYNAMIQUE**

INTRODUCTION.....	37
III. 1 PRINCIPE DE LA M.E.F. EN DYNAMIQUE.....	37
III. 2 ANALYSE DYNAMIQUE PAR LA METHODE DE SUPERPOSITION MODALE.....	38
III. 2. 1 Principe de la méthode.....	38
III. 2. 2 Découplage des équations modales du mouvement.....	40
III. 2. 3 hypothèse de découplage dynamique.....	41

**CHAPITRE IV**  
**APPLICATION SUR UN PROFIL D'AILE**

INTRODUCTION.....	44
IV. 1 DEFINITION.....	44
IV. 2 PROPRIETES.....	45
IV. 3 CONSTRUCTION DES MATRICES ELEMENTAIRES.....	45
IV. 4 CHOIX DE L'ORDRE D'INTEGRATION.....	48
IV. 5 CHARGES VOLUMIQUES.....	48
IV. 6 CHARGES SURFACIQUES.....	49
IV. 7 CALCUL DES CONTRAINTES.....	49
IV. 8 MAILLAGE.....	49

**CHAPITRE V**  
**PRESENTATION DES PROGRAMMES ET RESULTATS**

INTRODUCTION.....	51
V. 1 CALCUL DES MATRICES CARACTERISTIQUES GLOBALES .....	51
V. 2 RESOLUTION STATIQUE ET DYNAMIQUE.....	53
V. 3 EXPERIENCES NUMERIQUES.....	55
V. 3. 1 présentation des distributions de pression sur un profil d'aile.....	55
V. 3. 2 présentation des résultats statiques.....	57
V. 3. 3 présentation des résultats dynamiques.....	62
V. 3. 4 comparaison entre les déplacements horizontales et verticales.....	67
V. 3. 5 comparaison entre l'état statique et dynamique.....	68
V. 4 INTERPRETATION DES RESULTATS.....	69
CONCLUSION GENERALE .....	71
ANNEXES.....	73
BIBLIOGRAPHIE.....	77

## NOTATIONS PRINCIPALES

Les principales notations utilisées dans cette thèse sont rassemblées ci-après. Les autres notations seront définies lors de leur apparition dans chaque chapitre.

<b>a</b>	<i>Vecteur de coordonnées généralisées</i>
<b>B</b>	<i>Matrice d'interpolation des déformations</i>
<b>C</b>	<i>Matrice d'élasticité (matrice contraintes- déformations)</i>
<b>C<sub>m</sub></b>	<i>Coefficient de moment</i>
<b>C<sub>z</sub></b>	<i>Coefficient de portance</i>
<b>d.d.l</b>	<i>Degré de liberté</i>
<b>D</b>	<i>Matrice d'opérateurs différentiels</i>
<b>E</b>	<i>Module d'élasticité</i>
<b>F</b>	<i>Vecteur des forces nodales d'une structure</i>
<b>F<sub>e</sub></b>	<i>Vecteur des forces nodales de l'élément e</i>
<b>F<sub>v</sub></b>	<i>Vecteur des forces volumique</i>
<b>F<sub>s</sub></b>	<i>Vecteur des forces surfacique</i>
<b>F<sub>z</sub></b>	<i>Portance</i>
<b>J</b>	<i>Jacobien</i>
<b>K</b>	<i>Matrice de rigidité d'une structure</i>
<b>K<sub>e</sub></b>	<i>Matrice de rigidité d'un élément e</i>
<b>K<sub>p</sub></b>	<i>Coefficient de pression</i>
<b>M</b>	<i>Matrice de masse de la structure</i>
<b>M<sub>e</sub></b>	<i>Matrice de masse d'un élément e</i>
<b>m<sub>i</sub></b>	<i>Masse généralisée du mode i</i>
<b>N</b>	<i>Matrice des fonctions d'interpolation</i>
<b>p</b>	<i>Pression</i>
<b>q</b>	<i>Vecteur des déplacements nodaux</i>
<b>q<sub>e</sub></b>	<i>Vecteur des déplacements d'un élément e</i>
<b>T</b>	<i>Energie cinétique</i>
<b>u</b>	<i>Vecteur des déplacements</i>
<b>V</b>	<i>Vitesse</i>
<b>X<sup>(i)</sup></b>	<i>i-ème vecteur propre</i>
<b>Γ</b>	<i>Circulation du vecteur vitesse</i>
<b>Π</b>	<i>Energie potentielle totale</i>
<b>α</b>	<i>L'angle d'incidence</i>
<b>δ<sub>ij</sub></b>	<i>symbole de Kconecker</i>
<b>ε</b>	<i>Vecteur représentatif des déformations</i>
<b>φ</b>	<i>Potentiel des vitesses</i>
<b>λ</b>	<i>Matrice de transformation des coordonnées</i>
<b>λ<sub>i</sub></b>	<i>i-ème valeur propre</i>
<b>ν</b>	<i>Coefficient de Poisson</i>
<b>ρ</b>	<i>Masse volumique</i>
<b>σ</b>	<i>Vecteur représentatif des contraintes</i>
<b>ω<sub>i</sub></b>	<i>i-ème pulsation propre</i>
<b>[..]</b>	<i>Matrice transposée de la matrice[..]</i>
<b>[..]<sup>-1</sup></b>	<i>Matrice inverse de la matrice [..]</i>

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

---

---

# INTRODUCTION GENERALE

---

---

## INTRODUCTION GENERALE



*L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets complexes et coûteux, pour les étudier, il est contraint de les simuler de façon à prévoir leur comportement et ainsi prendre la décision adéquate. Ces projets s'étendent sur des domaines très variés et leurs comportements peuvent être décrit par des équations aux dérivées partielles. Ces dernières sont souvent irrésolvables analytiquement, sauf à quelque exceptions où l'outil mathématique permet d'obtenir des solutions compactes ou développées.*

*Vu que les ingénieurs doivent prendre des décisions malgré la complexité des problèmes, ils ont développé des outils très puissants pour résoudre ces EDP, parmi eux la méthode des éléments finis(MEF).*

*Cette méthode consiste à utiliser les approximations des variables inconnues, par ces approximations, les EDP obtenues précédemment se transforment en équations algébriques résolubles par l'utilisation du calculateur.*

*L'objet de ce présent travail, consiste en l'utilisation de la méthode des éléments finis pour atteindre à une analyse statique et dynamique prévisionnelle de déformation d'un profil d'une aile d'avion soumis à des charges aérodynamiques.*

*Dans le premier chapitre, on rappelle les notions et les concepts fondamentaux de l'aérodynamique.*

*Dans le deuxième chapitre nous avons présenté le principe, les conditions de convergences, la précision et l'erreur de la méthode des éléments finis.*

*Dans le chapitre III, on présente une introduction à la méthode des éléments finis en dynamique des structures. Ensuite, on présente comment l'analyse dynamique d'une structure peut se ramener à la résolution d'un système d'équations différentielles de second ordre, en utilisant la méthode de superposition modale.*



*le chapitre IV est consacré à une application de la méthode des éléments finis sur un profil d'une aile d'avion.*

*Dans le chapitre V, on présente la structure des programmes élaborés et les organigrammes correspondants, tout en présentant les résultats obtenus.*

# CHAPITRE I

---

## *ETUDE AERODYNAMIQUE*

---

## INTRODUCTION

L'aérodynamique est une branche de la mécanique des fluides qui s'intéresse aux phénomènes résultant des mouvements relatifs des corps par rapport à l'air. L'étude de déplacement d'un avion en vol, l'analyse des forces exercées par le vent sur un bâtiment, ou encore le fonctionnement d'un moulin à vent constituent des exemples d'applications de l'aérodynamique.

L'aérodynamique, qui ne s'appliquait jusqu'ici qu'aux avions, fut alors exploitée par les constructeurs d'automobiles. Ainsi, en 1934, sortirent sur le marché les premières voitures de série aux formes aérodynamiques.

Aujourd'hui, l'aérodynamique s'avère indispensable à la conception des avions, des automobiles, des bateaux, des véhicules spatiaux et des trains.

### I. 1. PRINCIPE DE BERNOULLI

Les fondements théoriques de l'aérodynamique relèvent de la mécanique des fluides. Cette science s'intéresse, dans une première approche, à l'écoulement des fluides incompressibles et non visqueux.

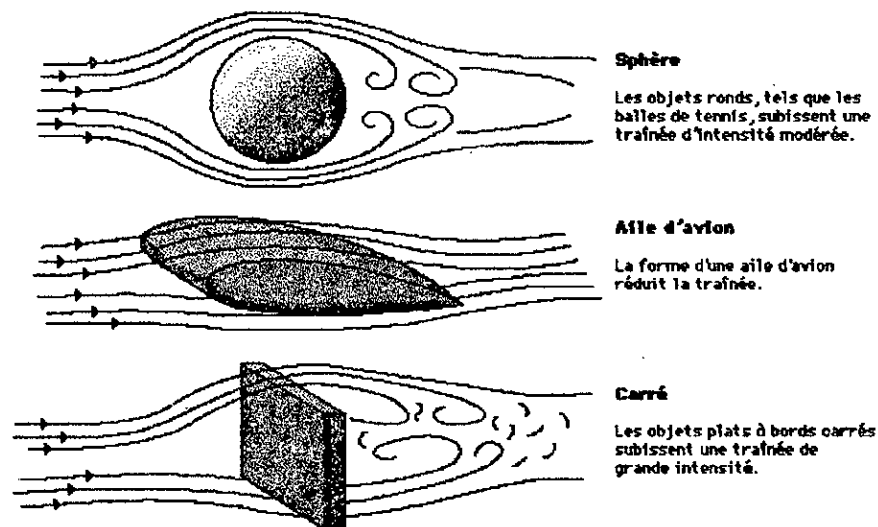
Dans ce cadre, le principe de Bernoulli traduit la loi fondamentale de conservation de l'énergie le long d'un filet fluide : la somme de la pression et de l'énergie cinétique volumique peut être considérée comme constante en chaque point de cette ligne de courant, si on néglige les effets de la pesanteur.

Ce théorème explique, par exemple, l'origine de la force exercée sur une aile d'avion, force appelée portance qui maintient l'avion en vol. En effet, une aile est profilée de telle manière que l'air s'écoule plus rapidement sur sa surface supérieure (extrados). Ainsi, d'après le principe de Bernoulli, la pression exercée sur cette face est inférieure à celle exercée sur la surface inférieure (intrados). Cette différence de pression crée par conséquent une force de portance perpendiculaire à la vitesse d'avion est dirigée vers le haut.

## I. 2. LA TRAINÉE

Même si, en pratique, on néglige souvent la viscosité en mécanique des fluides, tout fluide doit être en théorie considérée comme visqueux. C'est pourquoi l'aérodynamique étudie les actions dynamiques de l'air en lui appliquant les résultats connus pour un fluide visqueux.

Tout corps en déplacement dans l'air subit des forces de frottement s'opposant à son mouvement qui sont dues à la viscosité du fluide. Le nombre de Reynolds, qui mesure le ratio entre les forces d'inertie et de viscosité, est un paramètre fondamental dans l'étude des écoulements autour d'un obstacle. En effet, la résistance à l'avancement dans l'air dépend directement du nombre de Reynolds. L'un des points essentiels de l'aérodynamique réside dans l'étude de la fine pellicule d'air qui se crée autour de l'obstacle. Cette pellicule, appelée couche limite, correspond au siège des forces de frottement, qui participent à la résistance au mouvement. Sur un avion, cette force de freinage, nommé TRAINÉE est contrée par la force de propulsion des moteurs. Par un profilage approprié de l'appareil, cette traînée peut être réduite de façon significative.

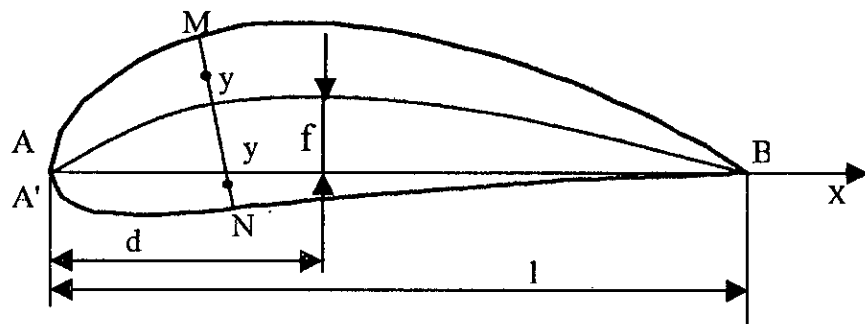


Figure(I. 1) : Types de traînée

### I. 3. DEFINITION GEOMETRIQUE D'UN PROFIL D'AILE

#### I. 3. 1. DEFINITION D'UN PROFIL D'AILE

C'est une forme profilée avec deux bords l'un arrondi appelé "*bord d'attaque*" et l'autre appelé "*bord de fuite*". Chaque gamme de profils est destinée à un domaine d'application bien précis.



Figure(I. 2) : Profil d'aile

Un profil d'aile définie par :

1. Bord d'attaque : A
2. Bord de fuite : B
3. La corde de profil : AB ; désignée par ( $\ell$ ).
4. L'extrados : AMB
5. L'intrados : A'NB
6. La flèche maximum :  $f$ , sa position définie par  $d/\ell$ .
7. La courbe relative :  $f/e$ .
8. L'épaisseur  $e=MN$ , ou sa position définie en % de la corde  $\ell$ .  $e/\ell$  est l'épaisseur relative.
9. Le rayon de bord d'attaque :  $r$ , rayon du cercle osculateur au bord d'attaque.
10. Le rayon réduit définie par : 
$$\rho = \frac{(r/\ell)}{(e/\ell)^2}$$

#### I. 3. 2. PROFIL TEORIQUE

Les profils théoriques sont obtenus par le procédé de la transformation conforme qui permet d'engendrer à partir d'un cercle, un profil de forme appropriée. L'intérêt du profil théorique est le suivant :

- Connaissant l'écoulement théorique en fluide parfait autour d'un cercle, on le déduit soit par des constructions géométriques, soit par calcul de l'écoulement autour du profil, on calcul ainsi en particulier, le champ de vitesse en fluide parfait (écoulement potentiel) autour du profil.

### I. 3. 3. PROFIL EMPIRIQUE

De nombreux profils ont été obtenus par des méthodes empiriques par le N.A.C.A (National Advisory Commity for Aéronotics) depuis 1932.

Les profils classiques sont obtenus par une génération empirique que nous résumons, à partir d'une ligne moyenne linéaire, confondue avec l'axe des x, l'origine est située au bord d'attaque, on porte alors de part et d'autre de cette ligne, une ordonnée  $y=f(x)$ .

La loi  $y=f(x)$  choisi, correspond à la distribution moyenne de l'épaisseur sur des profils connus, l'épaisseur maximum est située à 30% de la corde.

- On passe de la ligne moyenne linéaire à une ligne moyenne dont on se donne l'équation.
- On multiplie toutes les ordonnées y par un facteur constant pour faire varier l'épaisseur relative.

Les profils NACA sont désignés par quatre ou cinq chiffres dont la composition permet de déduire les principales caractéristiques.

*exemple :* NACA 2412 ET NACA 23012

1- Le 1<sup>er</sup> chiffre représente la courbure relative  $c=f/e=0.02=2\%$ .

2-Le 2<sup>ème</sup> chiffre(4) – cas d'un NACA à 4 chiffres – représente le nombre de dizaine de l'abscisse de la corde  $d/e=40\%$ .

3-Le 2<sup>ème</sup> et le 3<sup>ème</sup> chiffre –cas d'un NACA à 5 chiffres- représentent le double de l'abscisse de la flèche maximum  $d/\ell =15\%$ .

4-Le dernier chiffre représente l'épaisseur relative  $e=h/\ell =12\%$ .

## I. 4. AERODYNAMIQUE DES PROFILS DES AILES

### INTRODUCTION

Lorsqu'un corps est en mouvement par rapport à l'air, soumis à des forces élémentaires de pression et de frottement s'exerçant sur chaque élément de surface en contact avec le milieu extérieur, la réduction de ces forces élémentaires effectuée par rapport à un point du corps arbitrairement choisi, conduit à une force résultante et un moment résultant, pour toute orientation du corps par rapport à la vitesse du mouvement, la détermination de six composantes de ces grandeurs dans un trièdre approprié et celles des forces élémentaires font l'objet de l'aérodynamique.

L'étude aérodynamique d'une aile doit être précédée de celle de l'écoulement bidimensionnel autour du profil. La théorie du profil d'aile est faite pour les différents domaines du nombre de Mach, en écoulement permanent et irrotationnel de fluide parfait. Elle trouve son application dans le calcul des ailes d'avions, des hélices et des grilles d'aubes des compresseurs qui dérivent des profils d'ailes avec une loi de périodicité imposée par les conditions aux limites.

#### I. 4. 1. MODELE DU FLUIDE INCOMPRESSIBLE

L'écoulement est uniforme à l'infini amont et irrotationnel ; les composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse locale  $\mathbf{v}$  en un point quelconque  $M(x, y)$  de l'écoulement, sont les dérivées partielles d'une fonction  $\phi(x, y)$ , appelée potentiel des vitesses.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (\text{I. 1})$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (\text{I. 2})$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (\text{I. 3})$$

Soit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I. 4})$$

Le potentiel des vitesses satisfait à l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{I. 5})$$

Etant donné un profil il s'agit de déterminer le potentiel des vitesses satisfaisant aux conditions aux limites :

- L'écoulement est uniforme à l'infini.
- Le profil est une ligne de courant (vitesse tangente en chaque point du profil).

La connaissance du potentiel des vitesses permet d'obtenir la vitesse locale  $v(u, v)$  en tout point et la pression  $p$  liées aux conditions à l'infini  $v_0, p_0$  par l'équation de Bernoulli :

$$p + \frac{1}{2} \rho_0 v^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho_0 v_0^2 \quad (\text{I. 6})$$

Parmi les méthodes mathématiques permettant de déterminer le potentiel des vitesses autour d'un profil, une des plus simples consiste à déduire l'écoulement autour d'un profil, de l'écoulement autour d'un cercle en rotation. On sait calculer exactement ce dernier écoulement en superposant deux potentiels des vitesses, le premier donne un écoulement symétrique (fig. I. 3-a), le second donne les lignes de courants circulaires centrés sur le cercle de rayon  $a$ ; il correspond à un tourbillon d'intensité  $\Gamma$  (fig. I. 3-b).

La figure (I. 3-c) donne les lignes de courant de l'écoulement dues à la superposition des deux potentiels, on obtient ainsi sur le cercle deux points A et B de vitesse nulle si  $\Gamma < 4\pi a V_0$  tel que:

$$\Gamma = \int \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

La transformation analytique utilisée (transformation conforme) pour passer du cercle au profil conserve la circulation et permet d'obtenir les lignes de courant autour du



profil pour chacun des potentiels (fig. I. 3-a', I. 3-b') et finalement pour les deux potentiels (fig. I. 3-c).

Le troisième de kutta-Joukowski permet d'énoncer le résultat fondamental suivant :

La résultante des forces élémentaires (de pression) sur le profil est une force normale à la vitesse à l'infini amont  $\vec{V}_0$ , son sens est obtenu en faisant tourner  $\vec{V}_0$  de  $90^\circ$  dans le sens opposé à celui de la circulation, son module est «  $\rho_0 V_0 \Gamma dy$  » sur une tranche de profil de largeur  $dy$ .

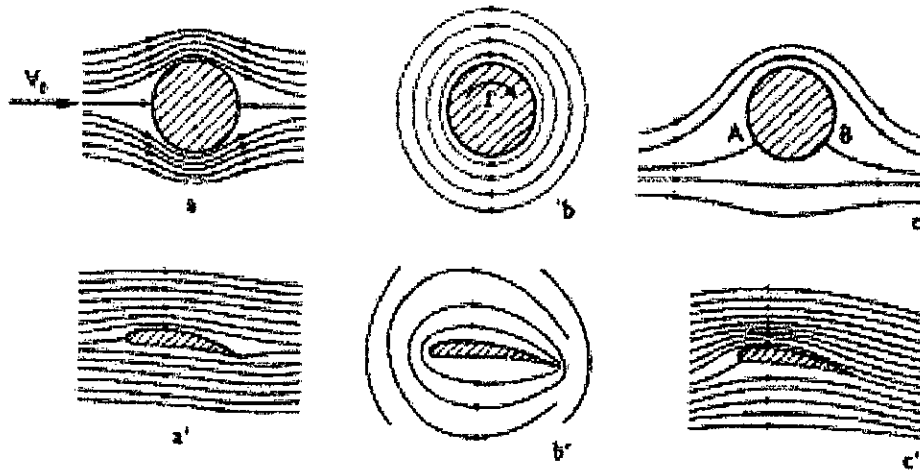
Le coefficient  $C_z$  de cette résultante est :  $C_z = \frac{\rho_0 V_0 \Gamma dy}{\frac{1}{2} \cdot \rho_0 V_0^2 \ell dy}$

Où :  $\ell dy$  est la surface de référence  $\ell$  étant la corde du profil.

La condition de Joukowski introduit la circulation :

$$\Gamma = 4\pi a V_0 \sin\alpha. \tag{I. 7}$$

Où :  $\alpha$  est l'angle d'incidence du profil compté à partir de l'incidence de portance nulle.



Figure(I. 3)

Par suite :  $C_z = 2k \sin\alpha$ .

K: est un coefficient voisin de  $\pi$  qui dépend légèrement de la forme du profil.

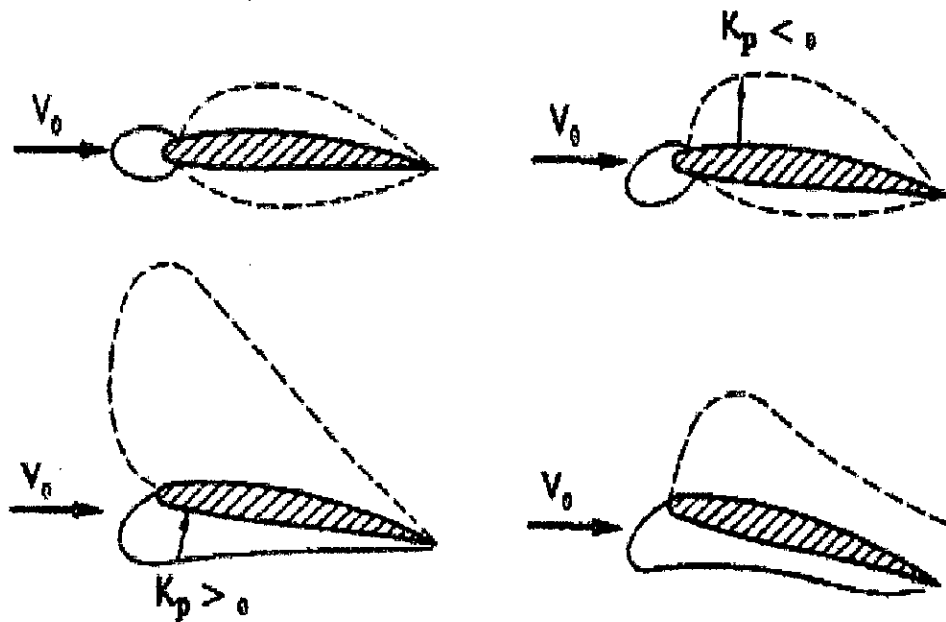
D'après cette théorie, le coefficient  $C_z$  est maximal et voisin de  $2\pi$  pour  $\alpha=90^\circ$ . Aux petites incidences, il vient :  $C_z=2k\alpha$ .

### I. 4. 2. REPARTITION DE PRESSION SUR UN PROFIL D'AILE

La répartition des pressions sur un profil d'aile (Fig.1.4), met en évidence des régions de surpressions ( $k_p > 0$ ) où  $k_p$  est le coefficient de pression défini par :

$$k_p = \frac{p - p_0}{1/2 \cdot \rho_0 V_0^2}$$

ou des régions de dépression ( $k_p < 0$ ) par rapport à la pression  $P_0$  qui règne à l'infini, Leur évolution est très instructive, faisant comprendre le mécanisme de sustentation et l'apparition du décollement, de plus, elle permet de préciser la contribution de l'intrados et celle de l'extrados : les dépressions de l'extrados assurent les 2/3 ou 3/4 de la portance[19].

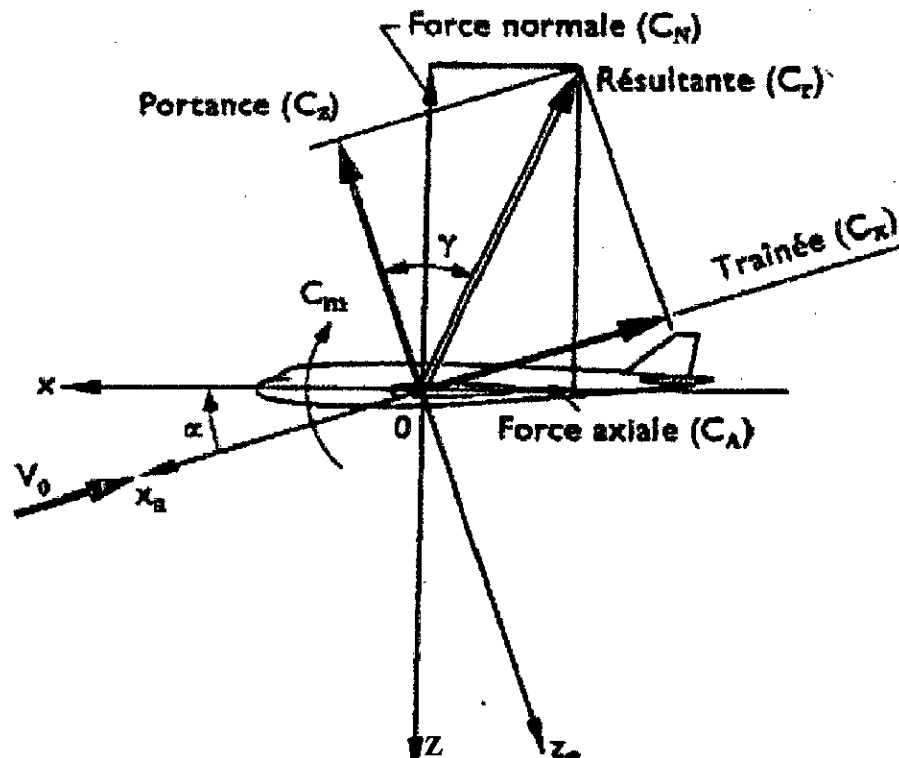


Figure(I. 4) : Répartitions de pression sur un profil en écoulement subsonique  
(incidence croissante)

## I. 5. COEFFICIENTS SANS DIMENSION DE FORCE ET DE MOMENT

### I. 5. 1. TRIEDRE

On utilise essentiellement en aérodynamique et en mécanique du vol deux trièdres qui ont pour origine le centre de gravité de l'avion .



Figure(1. 5)

- Le trièdre avion est défini comme suit :
  - X : axe longitudinal.
  - Y : axe transversal.
  - Z : axe normal.
- Le trièdre aérodynamique :
  - $X_a$  : axe portant le vecteur vitesse  $\vec{V}$  de l'avion.
  - $Z_a$  : axe dans le plan de symétrie.
  - $Y_a$  : axe qui complète le trièdre direct.

La position des deux trièdres est repérée par l'angle d'incidence  $\alpha$  et l'angle de dérapage, d'après la norme AFNOR X 02 115 août 1970. L'incidence  $\alpha$  est positive quand l'avion est cabré, le dérapage  $\beta$  est positif quand l'aile droite est avancée.

### I. 5. 2. CALCUL DES COEFFICIENTS SANS DIMENSION DE FORCE ET DE MOMENT

La figure(I. 6) représente une section d'une aile faisant un angle d'incidence, et soumis à une vitesse d'écoulement du fluide.

Le calcul sera fait suivant les deux axes OX et OY parallèle et perpendiculaire à la ligne de corde respectivement.

La corde de l'aile désignée par  $l$  et les ordonnées des points les plus hauts et les plus bas sont désignés par  $z_1$  et  $z_2$  respectivement.

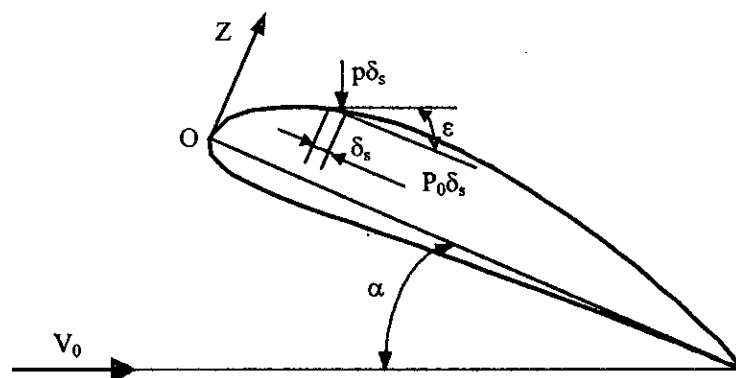
Considérons la surface de l'aile comme une mince plaque parfaitement rigide, la pression à l'intérieur est uniforme et égal à  $p_0$ .

Calculons la force normale exercée sur un élément de longueur  $\delta_s$ , dont les composantes suivant les axes OX et OY sont  $\delta_z$  et  $\delta_x$  respectivement.

$$\text{Alors: } \delta z = - (p - p_0) \delta_z \cos (\epsilon) \quad (\text{I. 9})$$

On a:  $\delta_z \cos (\epsilon) = \delta_x$  pour la géométrie de l'élément.

D'où:  $\delta z = - (p - p_0) \delta_x$  par unité d'envergure.



Figure(I. 6)

Pour un élément de l'intrados on a:

$$\delta z = - (p - p_0) \delta_x \quad \text{par unité de l'envergure.}$$

d'où la force totale:

$$Z = \int_0^l - (p-p_0)_{\text{ext}} dx + \int_0^l (p-p_0)_{\text{int}} dx \quad (\text{I. 10})$$

La connaissance de la variation de pression le long de la corde, nous permet de calculer le coefficient de portance  $C_z$  définie par :

$$C_z = \frac{Z}{1/2 \rho V_0^2 S}$$

Pour une envergure unitaire, la surface  $S$  est égale à la corde ( $l$ ), d'où un coefficient de portance qui se met sous la forme, après remplacement de la portance par sa valeur calculer en (I. 10):

$$C_z = \frac{Z}{1/2 \rho V_0^2 l} \int_0^l [(p-p_0)_{\text{ext}} - (p-p_0)_{\text{int}}] dx \quad (\text{I. 11})$$

Posons  $(1/l)dx = d(x/l)$  et devisons la somme entre parenthèses par  $1/2 \rho V_0 l$ , le coefficient de portance prend l'expression finale:

$$C_z = \int_0^1 (k_{p_{\text{ext}}} - k_{p_{\text{int}}}) d\left(\frac{x}{c}\right)$$

Avec :  $k_p = \frac{p - p_0}{1/2 \rho V^2}$  par définition

De même pour la force suivant OX:

$$\delta x = - (p-p_0) \delta_s \sin(\epsilon)$$

Avec:  $\delta_s \sin(\epsilon) = \delta z$

le calcul nous conduit à l'expression finale du coefficient de traînée suivante :

$$C_x = \int_{z_2/l}^{z_1/l} k_p d\left(\frac{z}{l}\right) \quad (\text{I. 12})$$

Le moment de tangage de la force  $Z$  est calculée comme suite:

$$\delta M = [(p-p_0)_{\text{ext}} - (p-p_0)_{\text{int}}] x \delta x$$

d'où le coefficient des moments de tangage du à  $Z$ :

$$C_{Mz} = \int_0^1 (k_{p_{\text{ext}}} - k_{p_{\text{int}}}) \left(\frac{x}{l}\right) d\left(\frac{x}{c}\right) \quad (\text{I. 13})$$

Puisque:

$$C_M = \frac{M}{1/2 \rho V^2 S l}$$

Un calcul similaire au calcul de  $C_{Mz}$ , pour calculer  $C_{Mx}$  (coefficient de moment de tangage par rapport à la force X), nous conduit au résultat suivant:

$$C_{Mx} = \int_{z_1/l}^{z_2/l} (k p_{\text{ext}} - k p_{\text{int}}) \left(\frac{z}{l}\right) d\left(\frac{z}{l}\right) \quad (\text{I. 14})$$

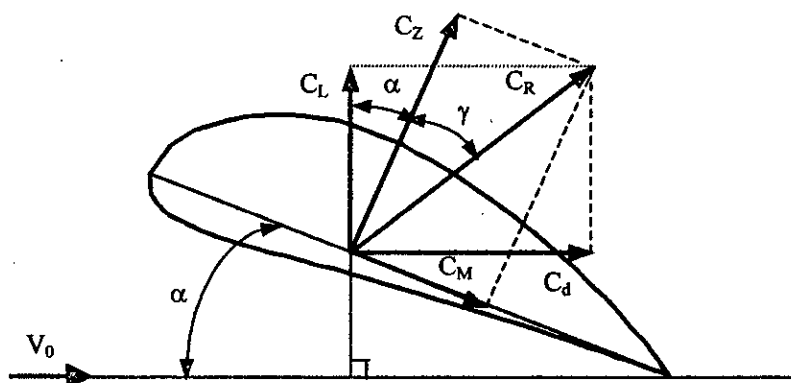
D'après la figure (I. 6), on peut tirer les coefficients suivants:

$$C_L = C_Z \cos(\alpha) - C_M \sin(\alpha) \quad (\text{I. 15})$$

$$C_R \cos(\gamma) = C_Z \quad \text{et} \quad C_R \sin(\gamma) = C_M \quad (\text{I. 16})$$

$$C_D = C_D \sin(\alpha) + C_M \cos(\alpha) \quad (\text{I. 17})$$

Avec :  $\gamma$  l'angle entre la résultante et la force Z.



Figure(I. 7)

## I. 6. TRANSFORMATIONS CONFORMES

### I. 6. 1. PROPRIETES DE LA TRANSFORMATION CONFORME

La transformation conforme permet de résoudre l'écoulement autour d'une forme quelconque à partir de l'écoulement connu autour d'une forme simple.

Au plan complexe d'étude  $(x_1, y_1)$  dans lequel est décrit l'écoulement connu, on va faire correspondre le plan complexe  $(x_2, y_2)$  ou  $(\xi, \eta)$  dans lequel sera décrit l'écoulement inconnu. Cette transformation s'effectuera suivant les principes et les règles de la

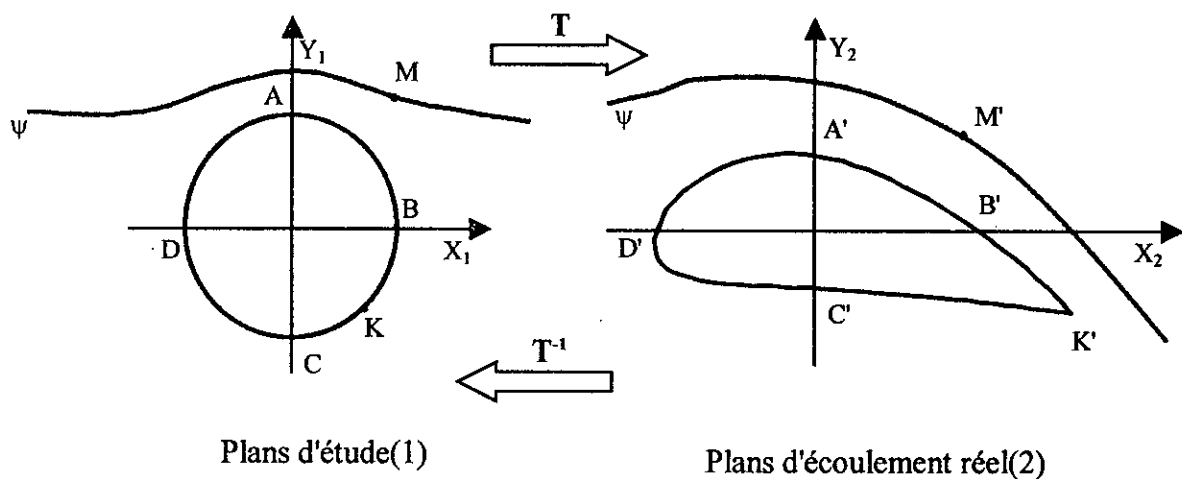
transformation conforme qui transformera à la fois la géométrie de l'obstacle et la géométrie des lignes de courant et des équipotentielles.

Cette transformation  $T$  s'effectuera à partir de la fonction  $f$  qui reste à définir à chaque application :

$$Z_2 \doteq f(Z_1) \quad (\text{I. 18})$$

On utilisera également la transformation inverse  $T^{-1}$  définie par la fonction  $f^{-1}$  :

$$Z_1 = f^{-1}(Z_2) \quad (\text{I. 19})$$



Figure(1. 8) : Transformation conforme  $T$

La figure (I. 8) traduit cette propriété, elle montre la correspondance entre les points A, B, C, D, K et A', B', C', D', K' appartenant respectivement à l'obstacle étudié ainsi qu'à la correspondance entre le point M appartenant à la ligne de courant  $\psi$  et le point M' appartenant à la ligne de courant homologue.

Le plan d'étude est ainsi entièrement transformé pour constituer le plan d'écoulement réel.

On démontre que dans l'espace complexe servant de base à la transformation conforme, les propriétés suivantes sont observées :

- La transformation conforme conserve les angles : si deux vecteurs forment dans le plan (1) un angle  $\alpha$  donné, cet angle sera conservé pour les deux vecteurs homologues du plan d'écoulement (2).

- Les lignes de courant et les équipotentiels étant orthogonales en un point du plan d'étude, elles conserveront cette propriété dans le plan (2) (en dehors des points singuliers de la transformation).
- Les cotes des équipotentiels et des lignes de courant se conserveront respectivement au cours de la transformation. La forme du profil réel correspond à la ligne  $\psi=0$  de l'écoulement de référence.
- La circulation du vecteur vitesse entre des points du plan (1) sera conservée entre les deux points homologues du plan (2).
- En Partant dans le plan d'étude d'un cercle, à chaque fonction de transformation  $f$  correspondra une forme, et une seule, de l'obstacle dans le plan réel. Inversement pour définir, à partir de la transformation conforme d'un profil déterminé, il faudra procéder à diverses retouches successives de la transformation  $f$ , c'est la difficulté majeure rencontrée au cours de cette application.
- Pour reconstituer l'écoulement réel, il est possible d'utiliser plusieurs transformations conformes successives.

Si  $f(Z_1)$  représente le potentiel complexe dans le plan d'écoulement (1), on peut remplacer  $Z_1$  grâce à la transformation inverse  $f^{-1}(Z_2)$ , on obtient ainsi :

$$F(Z_1) = F(f^{-1}(Z_2)) = G(Z_2) \quad (\text{I. 20})$$

Le second membre est une fonction de  $Z_2$  que l'on peut écrire  $G(Z_2)$ , c'est le potentiel complexe de l'écoulement (2).

Utilisant cette égalité, on peut faire apparaître les vitesses complexes (vitesses conjuguées) :

$$\begin{cases} V_1' = \frac{dF}{dZ_1} \\ V_2' = \frac{dG}{dZ_2} \end{cases} \quad (\text{I. 21})$$



On écrira successivement :

$$V_2' = \frac{dG}{dZ_2} = \frac{dF}{dZ_2} = \frac{dF}{dZ_1} \frac{dZ_1}{dZ_2} = V_1' \frac{dZ_1}{dZ_2}$$

En utilisant l'équation de la définition (I. 18), on peut écrire :

$$dZ_2 = \frac{df}{dZ_1} dZ_1$$

Soit finalement la relation entre les vitesses complexes :

$$V_2' = \frac{V_1'}{\frac{df}{dZ_1}} \quad (\text{I. 22})$$

Rappelons les expressions des vitesses complexes :

$$\begin{cases} V_1' = u_1 - iv_1 = (V_{R1} - iV_{U1}) \exp(-i\theta_1) \\ V_2' = u_2 - iv_2 = (V_{R2} - iV_{U2}) \exp(-i\theta_2) \end{cases}$$

## I. 6. 2. ECOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE DE SECTION CIRCULAIRE

Les transformations les plus courantes permettent, à partir de l'écoulement avec circulation autour d'un cylindre, de reconstituer l'écoulement autour d'un profil aérodynamique.

La fonction de courant est obtenue par superposition de l'écoulement autour d'un cylindre avec un écoulement à circulation de vitesse centrée en O :

$$F(Z_1) = V_0 \left( Z_1 + \frac{a^2}{Z_1} \right) + \frac{i}{2\pi} \Gamma \ln \frac{Z_1}{a} \quad (\text{I. 23})$$

La constante « a » représente le rayon du cercle,  $V_0$  la vitesse de l'écoulement à la l'infini amont et  $\Gamma$  la circulation de vitesse.

Si l'on souhaite étudier le même écoulement sous l'angle d'incidence  $\alpha$ , l'affixe  $Z_1$  sera transformée en  $Z_1 \exp(-i\alpha)$  correspondant à une rotation de  $\alpha$  dans le sens trigonométrique, d'où le potentiel complexe :

$$F(Z_1) = V_0 \left[ Z_1 \exp(-i\alpha) + \frac{a^2}{Z_1} \exp(i\alpha) \right] + \frac{i}{2\pi} \Gamma \ln \left[ \frac{Z_1}{a} \exp(-i\alpha) \right]$$

En posant  $Z_1 = r_1 \exp(i\theta_1)$ , la fonction potentielle  $F(Z_1)$  s'écrira alors:

$$F(Z_1) = V_0 \left( r_1 \exp(i(\theta - \alpha)) + \frac{a^2}{r_1} \exp(-i(\theta - \alpha)) \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left( \frac{r_1}{a} \exp(i(\theta - \alpha)) \right)$$

D'où l'on tire par identification avec  $F(Z_1) = \phi + i\Psi$

$$\begin{cases} \phi_1 = V_0 \left( r_1 + \frac{a^2}{r_1} \right) \cos(\theta_1 - \alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta_1 - \alpha) \\ \psi_1 = V_0 \left( r_1 - \frac{a^2}{r_1} \right) \sin(\theta_1 - \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r_1}{a} \end{cases} \quad (\text{I. 24})$$

La ligne de courant  $\psi_1 = 0$  est composée du cercle du rayon  $a$  ( $r_1 = a$ ) et de la courbe définie par :

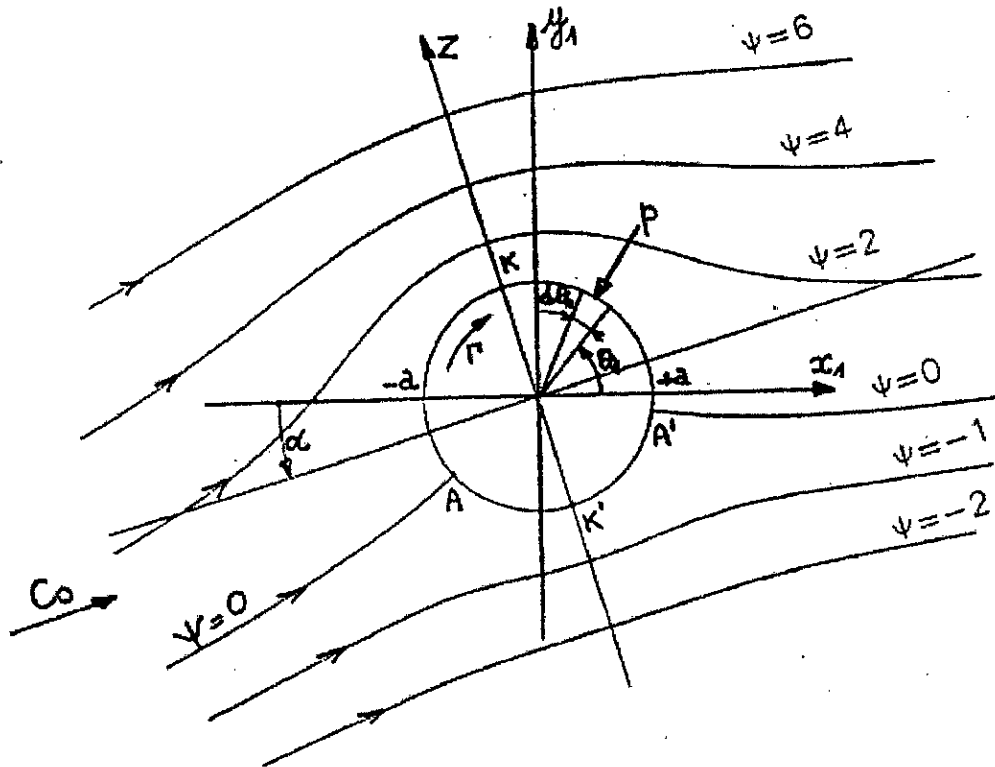
$$\sin(\theta_1 - \alpha) = -\frac{\Gamma}{2\pi V_0 r_1} \frac{\ln \frac{r_1}{a}}{1 - \frac{a^2}{r_1^2}} \quad (\text{I. 25})$$

Le champ de vitesses est défini à partir des relations classiques :

$$\begin{cases} V_{r1} = \frac{\partial \phi_1}{\partial r_1} = \frac{\partial \psi_1}{r_1 \partial \theta_1} = V_0 \left( 1 - \frac{a^2}{r_1^2} \right) \cos(\theta_1 - \alpha) \\ V_{\theta 1} = \frac{\partial \phi_1}{r_1 \partial \theta_1} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial r_1} = -V_0 \left( 1 + \frac{a^2}{r_1^2} \right) \sin(\theta_1 - \alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi r_1} \end{cases} \quad (\text{I. 26})$$

A la surface de l'obstacle, on aura ( $r_1 = a$ ) :

$$\begin{cases} V_{r1} = 0 \\ V_{\theta 1} = -2V_0 \sin(\theta_1 - \alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi a} \end{cases} \quad (\text{I. 27})$$



Figure(I. 9) : *Ecoulement avec circulation autour d'un cylindre de rayon a*

Les points d'arrêt A et A' sont obtenus pour  $V_1 = V_{1u} = 0$ , soit pour :

$$\sin(\theta - \alpha) = -\frac{\Gamma}{4\pi V_0 a} \tag{I. 28}$$

D'où les valeurs de  $\theta_A$  et  $\theta_{A'}$  correspondant aux points d'arrêts :

$$\begin{cases} \theta_A = \pi + \alpha + \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi V_0 a} \\ \theta_{A'} = \alpha - \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi V_0 a} \end{cases} \tag{I. 29}$$

La vitesse maximale est obtenue pour  $\theta_1 = \alpha + \frac{\pi}{2}$  (point K) et la vitesse minimale pour  $\theta_1 = \alpha - \frac{\pi}{2}$  (point K').

$$\begin{cases} V_{\max} = |V_{u1 \max}| = 2V_0 + \frac{\Gamma}{2\pi a} \\ V_{\min} = |V_{u1 \min}| = 2V_0 - \frac{\Gamma}{2\pi a} \end{cases} \tag{I. 30}$$

Cette valeur minimale est positive si  $V_0 > -\frac{\Gamma}{4\pi a}$ , c'est la limite de l'écoulement réel pouvant être engendrée par l'obstacle cylindrique.

### I. 6. 3. PORTANCE

La relation de Bernoulli entre l'infini amont et un point M quelconque appartenant au cercle permet d'écrire :

$$p_\infty + \rho \frac{V_0^2}{2} = p + \rho \frac{V^2}{2} \quad (\text{I. 31})$$

La partie supérieure du cercle contenant les points AKA' est en dépression (grande vitesse) tandis que l'arc AK'A' est en surpression.

L'écoulement étant symétrique par rapport à l'axe OZ, la résultante globale aérodynamique  $F_z$  sera de même direction et de même sens que OZ. On la calculera par la projection de l'effort élémentaire associé à la pression  $P$  sur une bande de largeur  $ad\theta$  et de longueur  $L$ .

$$F_z = \int_0^{2\pi} P \sin(\theta_1 - \alpha) ad\theta_1 \quad (\text{I. 32})$$

Soit après (I. 31) :

$$F_z = \int_0^{2\pi} L \left( P_\infty + \frac{1}{2\rho} (V_0^2 - V^2) \right) \sin(\theta_1 - \alpha) ad\theta_1$$

En remplaçant  $V^2$  par la valeur issue du système (I. 27) et en remarquant que les termes en exposant impair de  $\sin(\theta_1 - \alpha)$  s'annulent dans le domaine d'intégration la portance  $F_z$  s'écrira :

$$F_z = L\rho \frac{V_0 \Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\theta_1 - \alpha) d\theta_1$$

soit :

$$F_z = L\rho \frac{V_0 \Gamma}{\pi} \left[ \frac{1}{2} (\theta_1 - \alpha) - \frac{1}{4} \sin 2(\theta_1 - \alpha) \right]_0^{2\pi}$$

Et soit finalement :

$$F_z = \rho V_0 \Gamma L \quad (\text{I. 33})$$

Cette dernière relation est la loi de JOUKOWSKI exprimant la portance exercée sur un obstacle. On peut noter que  $F_z$  est dirigée perpendiculairement à la direction de l'écoulement. On démontre que l'expression de la portance est identique quelle que soit la section du cylindre (circulaire ou quelconque)

#### I. 6. 4. TRANSFORMATION DE JOUKOWSKI

La transformation de JOUKOWSKI est définie de la façon suivante :

A tout point d'affixe  $Z_1$  du plan d'étude (1) est associé le point d'affixe  $Z_2$  du plan réel (2) par la transformation définie par la fonction :

$$Z_2 = f(Z_1) = \left( Z_1 + \frac{b^2}{Z_1} \right) \quad (\text{I. 34})$$

#### I. 6. 5. CONDITION DE KUTTA – JONKOWSKI

Toutes les conditions d'incidence et de circulation sont possibles concernant l'écoulement sur le cylindre. S'appuyant sur l'expérience et la physique des écoulements réels, KUTTA puis JOUKOWSKI ont montré qu'à chaque incidence  $\alpha$  correspond une circulation  $\Gamma$  donnée. Cette relation est établie sur la base de l'égalité des vitesses intrados et extrados au bord de fuite du profil.

La condition de KUTTA- JOUKOWSKI se traduit par la relation :

$$\Gamma = 4 \pi a V_0 \sin \alpha \quad (\text{I. 35})$$

Relation correspondant d'après (I. 33) à la portance par unité de longueur:

$$F_z = 4 \pi a \rho V_0^2 \sin \alpha \quad (\text{I. 36})$$

En introduisant le coefficient de portance  $C_z$  du profil plan, défini par la relation :

$$C_z = \frac{F_z}{\rho \frac{V_0^2}{2} L} \quad (\text{I. 37})$$

et on observe que la corde l du profil transformée est égal à  $4a$ , les relation (I. 37) et (I. 38) donnent la forme :

$$C_z = 2 \pi \sin \alpha \quad (\text{I. 38})$$

Relation montrant que la pente du coefficient de portance en fonction de l'incidence est constante et égale à  $2\pi$  (si l'incidence  $\alpha$  reste modérée).

# CHAPITRE II

---

*INTRODUCTION*  
*A LA*  
*METHODE DES ELEMENTS FINIS*

---

## INTRODUCTION

La méthode des éléments finis (M.E.F) consiste à ramener les problèmes de milieux continus à des problèmes discrets à nombre fini de paramètres inconnus qui sont déterminés par application de critères énergétiques [02], ces paramètres sont de nature différente selon la méthode employée.

### I. 1. METHODES MATRICIELLES

On peut distinguer deux classes de méthodes matricielles :

- *La méthode des forces* : dans laquelle les paramètres inconnus sont des contraintes ou les forces résultantes dans les éléments.
- *La méthode des déplacements* : dans laquelle les paramètres inconnus sont les déplacements (et éventuellement leurs dérivées) aux nœuds.

Lorsqu'on utilise ces techniques matricielles, on est amené successivement à s'intéresser à deux niveaux de formulation :

1. *La formulation élémentaire* : au niveau de l'élément fini.
2. *La formulation globale* : au niveau de la structure complète.

#### II. 1. 1. LA FORMULATION ELEMENTAIRE

Elle consiste à rechercher pour chaque élément les expressions matricielles des énergies (de déformation et cinétique) et du travail des forces appliquées en fonction des inconnues élémentaires (déplacements aux nœuds des éléments), ça nécessite le calcul des matrices caractéristiques de l'élément : matrice de rigidité, matrice de masse et vecteur des forces équivalentes.

#### II. 1. 2. LA FORMULATION GLOBALE

Elle consiste à rechercher pour la structure complète l'expression matricielle des énergies (de déformation et cinétique) et du travail des forces appliquées en fonction des déplacements inconnus à tous les nœuds de la structure, ça nécessite l'assemblage des matrices caractéristiques élémentaires pour tous les éléments.

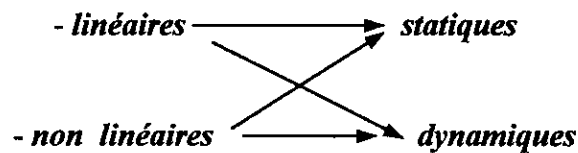


On peut récapituler les considérations précédentes en concluant que la formulation globale consiste d'une part à obtenir les caractéristiques énergétiques globales à partir des caractéristiques élémentaires et d'autre part à déterminer les inconnues du problème par la résolution des équations d'équilibre(ou du mouvement en dynamique).

## II. 2. CLASSIFICATION DES TRAITEMENTS

Nous avons vu précédemment comment le concept d'élément fini et l'utilisation des méthodes matricielles permettait de ramener le problème continu à un système d'équations à un nombre fini d'inconnues de déplacement. Examinons maintenant les grandes classes de problèmes de calcul des structures et les types de traitement numérique qui en résultent.

On peut classer les problèmes de structures en problèmes :



## II. 3. LES PROBLEMES LINEAIRES

Ils peuvent se subdiviser-en :

### II. 3. 1. PROBLEMES STATIQUES

C'est le problème le plus simple. Il consiste à déterminer les déplacements et contraintes dans une structure à comportement linéaire sous l'influence de charges statiques ou à variation lente. Ce problème se ramène à la résolution du système linéaire :

$$[K].\{q\}=\{F\} \quad (II. 1)$$

### II. 3. 2. PROBLEMES DYNAMIQUES

L'analyse dynamique linéaire consiste à déterminer les déplacements (éventuellement les vitesses et accélérations) et contraintes en fonction du temps pour une structure à comportement linéaire sollicitée par des forces dynamiques.

Dans la méthode des déplacements ce type de problème se ramène à la résolution du système différentiel du second ordre des équations du mouvement, soit :

$$[M].\{\dot{q}\}+[C].\{\dot{q}\}+[k].\{q\}=F(t) \quad (\text{II. 2})$$

## II. 4. DIFFERENTES FORMULATIONS

Dans la M.E.F. il y a plusieurs sortes de formulations en mécanique des structures :

- *Formulations déplacements.*
- *Formulations contraintes.*
- *Formulations hybrides.*
- *Formulations mixtes.*

Dans toutes ces formulations et pas seulement dans le cas de la formulation déplacements, on peut exprimer le comportement de l'élément sous la forme de relations matricielles (forces - déplacements) aux nœuds et utiliser la méthode des déplacements pour la résolution globale du problème [02].

Parmi ces modèles, le modèle le plus utilisé est celui des déplacements. Les modèles contraintes sont rarement utilisés en pratique [02].

Les différentes options possibles pour le choix des formulations variationnelles, les modèles élémentaires et les méthodes de résolution globale sont illustrées dans le tableau synoptique de la figure (II. 1).

### Remarque :

Dans notre étude, on utilise le modèle déplacements, dans laquelle on se donne une approximation du champ de déplacements, le critère variationnel étant celui de l'énergie potentielle totale  $\Pi$ , soit :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_v \{\epsilon\}^T \{\sigma\} - \int_v \{u\}^T \{f_v\} - \int_s \{u\}^T \{f_s\} ds \quad (\text{II. 3})$$

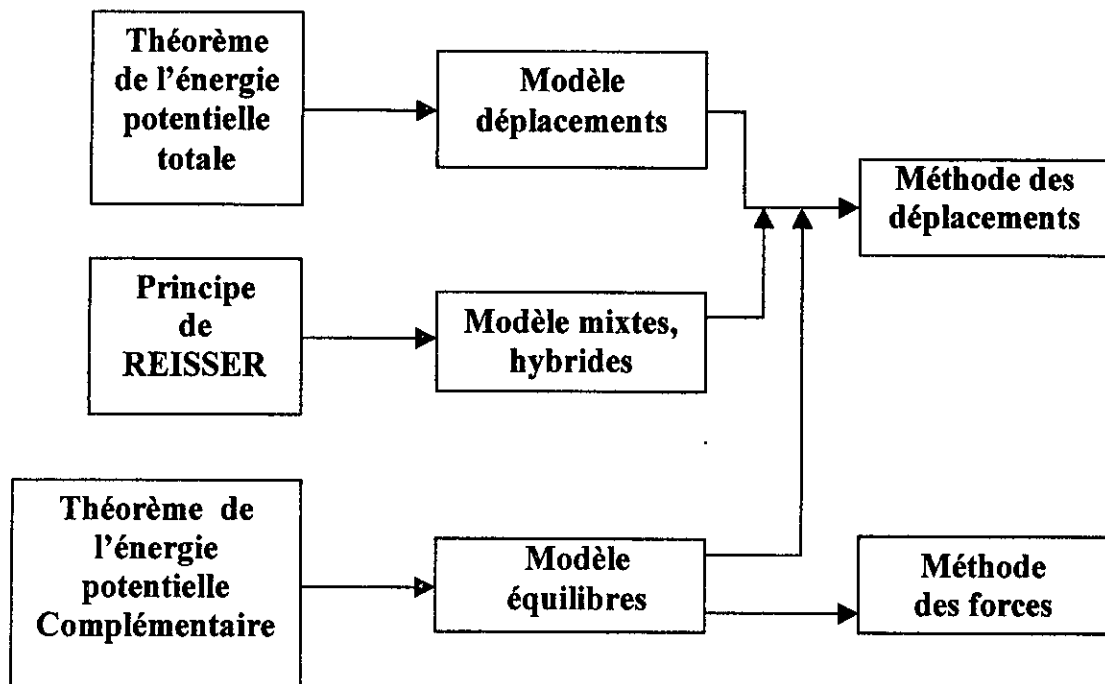


Figure (II. 1) : Synoptique des formulations de la M.E.F pour la mécanique des structures

## II. 5. CONSTRUCTION DES MATRICES CARACTERISTIQUES ELEMENTAIRES ET GLOBALES

Dans la démarche fondamentale de la M.E.F on distingue trois aspects qui sont :

*a* : la discrétisation du milieu continu en éléments(choix d'un maillage).

*b* : approximation du champ des déplacements :

$$\{u(m)_e\} = [\varphi(m)] \cdot \{a_e\} \quad m(x,y) \in V_e \quad (\text{II. 4})$$

Où:

$[\varphi(m)]$  : Matrice des fonctions base de l'approximation

$\{a_e\}$  : Vecteur des coordonnées généralisées de l'élément e

L'approche la plus simple pour décrire le comportement d'un élément consiste à approximer son champ de déplacements par des séries de polynôme.

*c* : chois des variables physiques(les déplacements aux nœuds) :

La relation de définition de l'approximation élémentaire (II. 4) ne peut pas être utilisée pour résoudre le problème global. En effet, les coordonnées généralisées varient d'un élément à l'autre, il est donc nécessaire d'adopter de nouvelles variables physiques

permettant d'assurer la compatibilité des déplacements et d'exprimer les conditions d'équilibre aux nœuds. On choisit comme nouvelles variables les déplacements aux nœuds de l'élément.

$$\{q_e\} = [\phi_e] \cdot \{a_e\} \quad (\text{II. 5})$$

Tel que:  $\{q_e\}$  vecteur des déplacements aux nœuds.

On peut écrire si  $[\phi_e]$  est non singulière.

$$\{a_e\} = [\phi_e]^{-1} \cdot \{q_e\}$$

On a donc :

$$\{u_e\} = [\varphi][\phi_e]^{-1} \{q_e\}$$

$$\{u_e\} = [N_e] \{q_e\} \quad (\text{II. 6})$$

avec:  $[N_e] = [\varphi][\phi_e]^{-1}$

$[N]$  : matrice d'interpolation.

Les fonctions d'interpolation doivent vérifier les conditions suivantes :

- $N_i(x_i, y_i, z_i) = \delta_{ij} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$
- $\sum_{i=1}^n N_i = 1$

L'expression (II. 6) permet alors d'exprimer l'énergie potentielle totale de l'élément en fonction des déplacements aux nœuds. En effet, on peut aisément exprimer les déformations et contraintes en fonction des déplacements aux nœuds.

### II. 5.1. RELATIONS DEFORMATIONS - DEPLACEMENTS

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_e \quad (\text{II. 7})$$

$$\text{Donc } \{\varepsilon_e\} = [D]\{u_e\} = [D][N_e] \{q_e\} = [B_e] \{q_e\} \quad (\text{II. 8})$$

II. 5. 2. RELATIONS CONTRAINTES - DEFORMATIONS

Dans le cas d'un matériau isotrope. La loi de HOOKE s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ SYM & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (II. 9)$$

E : module de YOUNG

ν : coefficient de POISSON

Pour un matériau anisotrope. La loi de HOOKE s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{TL}}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ SYM & \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ & & G_{LT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (II. 10)$$

où :

E<sub>L</sub> : module de YOUNG dans le sens long

E<sub>T</sub> : module de YOUNG dans le sens travers.

ν<sub>LT</sub> et ν<sub>TL</sub> coefficient de POISSON.

G<sub>LT</sub> : module de glissement dans le plan (L, T).

Tel que :  $\frac{\nu_{LT}}{E_L} = \frac{\nu_{TL}}{E_T}$

Par ailleurs, en utilisant l'expression matricielle de l'énergie potentielle totale.

$$\Pi_e = \int_{ve} \frac{1}{2} \{\varepsilon_e\}^T [C] \{\varepsilon_e\} dv - \int_{ve} \{u\}^T \{f_{ve}\} dv - \int_{se} \{u\}^T \{f_{se}\} ds \quad (II. 11)$$

les relation (II. 6) et (II. 8) permettent de transformer la relation (II. 11) sous la forme suivante :

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{q_e\}^T [k_e] \{q_e\} - \{q_e\}^T \{F_e\} = U_e - L_e \quad (II. 12)$$

$[k_e]$  : matrice de rigidité élémentaire

$$[k_e] = \int_{ve} [B_e]^T [C] [B_e] dv \quad (\text{II. 13})$$

$\{F_e\}$  : vecteur des forces élémentaires équivalentes

$$\{F_e\} = \{f_{ve}\} + \{f_{se}\} = \int_{ve} [N_e]^T \{f_{ve}\} dv + \int_{se} [N_e]^T \{f_{se}\} ds \quad (\text{II. 14})$$

En ce qui concerne l'énergie cinétique de l'élément, on a :

$$T_e = \int_{ve} \rho \{u_e\}^T \{\dot{u}_e\} dv \quad (\text{II. 15})$$

Par ailleurs, on a :

$$\{u_e\} = [N_e] \{q_e\}$$

$$\text{D'où : } T_e = \{q_e\}^T [M_e] \{\dot{q}_e\}$$

$$\text{Avec : } [M_e] = \int_{ve} \rho [N_e]^T [N] dv \quad (\text{II. 16})$$

$[M_e]$  : matrice des masses cohérentes de l'élément e.

## II. 6. L'ASSEMBLAGE

La phase d'assemblage consiste à construire les matrices  $[K]$ ,  $[M]$  et  $\{F\}$  de la structure complète à partir des matrices élémentaires des différents éléments.

Pour faire l'assemblage on utilise l'approche énergétique.

### II. 6. 1. APPROCHE ENERGETIQUE

D'après (II. 12) on a :

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{q_e\}^T [k_e] \{q_e\} - \{q_e\}^T \{F_e\}$$

Si les éléments ont la compatibilité requise, l'énergie potentielle totale de la structure peut être obtenue par sommation des énergies potentielles totales élémentaires, soit :

$$\Pi = \sum_{\text{elements}} \Pi_e = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} - \{q\}^T \{F\} \quad (\text{II. 17})$$

Où :  $\{q\}^T = [q_1, \dots, q_n]$

$$[K] = \sum_{\text{elements}} [k_e]$$

$$\{F\} = \sum_{\text{elements}} \{F_e\}$$

de même pour l'énergie cinétique

$$T = \sum_{\text{elements}} T_e$$

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\} \quad (\text{II. 18})$$

avec:  $[M] = \sum_{\text{elements}} [M_e]$

ainsi l'équation exprime la statique de la structure sera :

$$[K]\{q\} = \{F\}$$

## II. 7. CONVERGENCE DE LA M.E.F

Les conditions de convergence de la méthode des éléments finis dans le cas de l'approche déplacements sont ceux de comptabilité et de complétude.

## II. 8. ERREUR DANS LA M.E.F

Pratiquement l'erreur dans la M.E.F est donnée par le corollaire suivant :

$$\|e\| \leq c.h^{k+1-m} \cdot \|u_{ex}\| \quad (\text{II. 19})$$

Où :

c : coefficient indépendant de l'élément.

h : taille de l'élément.

k : degré du polynôme d'interpolation.

m : ordre des dérivées apparaissant dans l'expression des variables nodales.

m= 1      problème de classe  $C^0$  ( problème d'élasticité... ).

m= 2      problème de classe  $C^1$  ( flexion des plaques, coques... )

## II. 9. PRECISION DE LA M.E.F

Pour améliorer la précision de la méthode (II. 19) nous pouvons soit :

- Diminuer la taille de chaque élément et par conséquent augmenter le nombre d'éléments nécessaires pour représenter le domaine entier.
- Augmenter l'ordre du polynôme d'approximation, ce qui implique une augmentation du nombre de variables nodales ou degré de liberté de chaque élément. ceci peut se faire :

**A** : par l'augmentation du nombre de nœuds d'interpolation de chaque élément, ce qui conduit à la famille des éléments de type LAGRANGE

**B** : par l'augmentation du nombre de variables nodales en chaque nœud conduit à la famille des éléments de type HERMITRE.



# CHAPITRE III

---

*LA METHODE DES ELEMENTS  
FINIS EN DYNAMIQUE*

---

De nombreux problèmes d'analyse des structures peuvent être traités par la méthode des éléments finis en statique qui été exposée dans le chapitre précédent. Cependant, il existe également de nombreux cas où l'on ne peut pas négliger les forces d'inertie et d'amortissement résultant de la variation des forces appliquées.

### III. 1. PRINCIPE DE LA M.E.F EN DYNAMIQUE

Comme en statique, nous allons considérer successivement :

1. La discrétisation spatiale du domaine en éléments finis.
2. La formulation au niveau de l'élément.
3. La formulation globale après l'assemblage.

On rappelle l'expression de l'énergie cinétique et de déformation :

$$T = \frac{1}{2} \{q\}^T [M] \{q\} \quad \text{avec: } [M] \text{ matrice de masse de la structure}$$

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \quad \text{avec : } [K] \text{ matrice de rigidité de la structure}$$

$\{q\}$  : Vecteur des déplacements aux nœuds de la structure.

Les équations de LAGRANGE permettent d'obtenir les équations discrètes du mouvement, soit pour une structure sans amortissement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i \quad i=1,n \quad (\text{III. 1})$$

d'où :

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = f(t) \quad (\text{III. 2})$$

Dans le cas d'un système avec amortissement visqueux, il faut ajouter au second membre leur terme additionnel de force de dissipation visqueuse  $f^* = -c\{\dot{q}(t)\}$ .

D'où les équations des mouvements :

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = f(t) \quad (\text{III. 3})$$

Donc l'analyse dynamique par la M.E.F d'une structure revient à résoudre un système d'équations différentielles de second ordre.

Il y a deux stratégies fondamentales de résolution : l'une d'entre elles consiste à résoudre ce système différentiel par intégration directe, l'autre méthode consiste à définir la solution dans la base des modes propres de vibrations de la structure, cette méthode qui est appelée *méthode de superposition modale* est la plus largement utilisée en analyse dynamique linéaire[02].

### III. 2. ANALYSE DYNAMIQUE PAR LA METHODE DE SUPERPOSITION MODALE

Les méthodes de superposition modale, peuvent être subdivisées en deux classes en fonction de la nature des modes propres utilisés pour exprimer les équations du mouvement. Le cas des structures à amortissement élevé et non uniforme nécessite l'utilisation comme base de la solution des *modes propres complexes* [02], solutions propres du système avec amortissement :

$$[M p^2 + C p + K]x = 0 \quad (\text{III. 4})$$

Heureusement, dans de nombreux problèmes, les structure étudiées sont faiblement amorties, en particulier celles des véhicules aérospatiaux, ce qui permet d'éviter le calcul des modes propres complexes, opération toujours longue et coûteuse. On utilise donc comme base de la solution *les modes propres réels*, solutions du système homogène sans amortissement :

$$\lambda \cdot [M] \{x\} = [K] \{x\} \quad (\text{III. 5})$$

#### III. 2. 1. PRINCIPE DE LA METHODE

Nous allons présenter le principe de la méthode de suppression modale dans le cas de structures faiblement amorties dont l'amortissement est représenté par amortissement visqueux équivalent.

Le système des équations du mouvement correspondant au modèle initial, s'écrit :

$$[M] \{ \ddot{q}(t) \} + [C] \{ \dot{q}(t) \} + [K] \{ q(t) \} = f(t)$$

avec : [C] matrice d'amortissement visqueux correspondant au d.d.l physiques {q}.  
 Exprimons le mouvement de la structure dans la base des modes propres réels, solution du système homogène :

$$\omega^2[M]\{x\}=[K]\{x\} \tag{III. 6}$$

Soient les valeurs propres et les solutions propres associées :

$$\lambda_1=\omega_1^2 \dots \dots \dots \lambda_n=\omega_n^2 \quad \text{et } \{x\}^{(1)} \dots \dots \dots \{x\}^{(n)}$$

En utilisant la base modale tronquée (m < n). On a l'expression fondamentale suivante :

$$\{q\} = \sum_{i=1}^m \{x\}^{(i)} \cdot \eta_i(t) = [\varphi]\{\eta\} \tag{III. 7}$$

avec :

$$\eta = \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \vdots \\ \eta_m(t) \end{Bmatrix} \quad \text{vecteur des coordonnées modales,}$$

$\varphi = [\{x\}^{(1)} \dots \dots \dots \{x\}^{(n)}]$  matrice modale tronquée.

En outre, on rappelle que la transformation (III. 7) diagonalise les matrices de masse et de rigidité. On a, en effet, les propriétés d'orthogonalité des modes :

$$[\varphi]^T[M][\varphi]=[m] \quad \text{matrice modale (mxm) des masses généralisées.}$$

$$[\varphi]^T[K][\varphi]=[k] \quad \text{matrice modale (mxm) des rigidités généralisées.}$$

On rappelle que pour le mode i, on a la relation :

$$k_i = m_i \cdot \omega_i^2 \tag{III. 8}$$

Cependant, en général, la transformation (III. 7) ne diagonalise pas la matrice d'amortissement. La matrice d'amortissement modale [c] est pleine :

$$[\varphi]^T[C][\varphi]=[c]$$

Après avoir utilisé la transformation (III. 7) dans le système (III. 3) et prémultiplié par  $[\varphi]^T$ , on obtient :

$$[m]\{\ddot{\eta}\} + [C]\{\dot{\eta}\} + [k]\{\eta\} = [\varphi]^T\{f(t)\} = \{F(t)\} \tag{III. 9}$$

avec :  $F(t)$  vecteur des forces modales

Ainsi, en général, les équations modales du mouvement sont couplées par l'amortissement.

### III. 2. 2. DECOUPLAGE DES EQUATIONS MODALES DU MOUVEMENT

Il existe certaines conditions sur l'amortissement qui permettent d'assurer un caractère diagonal à la matrice d'amortissement modal, c'est à dire :

$$[\varphi]^T [C] [\varphi] = [c_{ii}] = [2m_i \omega_i \zeta_i] \quad (\text{III. 10})$$

Avec  $\zeta_i$  facteur d'amortissement du mode  $i$  (rapport de l'amortissement modal  $c_{ii}$  et de l'amortissement critique  $2m_i \omega_i$ ).

- **Amortissement proportionnel**

La condition d'amortissement proportionnel introduite par RAYLEIGH s'exprime sous la forme :

$$[c] = a_0 [M] + a_1 [K] \quad (\text{III. 11})$$

$a_0$  et  $a_1$  étant deux constantes spécifiées.

Dans ce cas, on a :

$$[\varphi]^T [C] [\varphi] = [c] = a_0 [m] + a_1 [k]$$

d'où le facteur d'amortissement de l'  $i^{\text{ème}}$  mode :

$$\zeta_i = \frac{c_{ii}}{2m_i \omega_i} = \frac{a_0}{2\omega_i} + \frac{a_1 \omega_i}{2} \quad (\text{III. 12})$$

- **Séries de GAUGHEY**

GAUGHEY [01] a présenté une condition générale sur les matrices d'amortissement de telle sorte qu'elles puissent être diagonalisées par la transformation des modes réels. Cette condition s'exprime sous la forme de la série suivante :

$$[C] = [M] \sum_{j=0}^{m-1} a_j [[M]^{-1} [K]]^j \quad (\text{III. 13})$$

Notons que les deux premiers termes de la série correspondent au cas de l'amortissement proportionnel.

Dans ce cas, on a :

$$[\varphi]^T [C] [\varphi] = [2m_{ii} \omega_{ii} \zeta_{ii}]$$

$$\text{avec : } \zeta_{ii} = \frac{1}{2\omega_i} \sum_{j=0}^{m-1} a_j (\omega_{ii})^{2j} \quad i=1,2,\dots,m \quad \text{(III. 14)}$$

**III. 2. 3. HYPOTHESE DE DECOUPLAGE DYNAMIQUE**

La pratique la plus couramment utilisée actuellement pour l'analyse dynamique par superposition modale consiste à ne retenir pour le calcul de la réponse dynamique que les termes diagonaux de la matrice d'amortissement modal. Cette pratique n'est pas basée sur la nullité des termes non diagonaux de faibles valeurs (amortissement proportionnel, séries de GAUGHEY) car on peut mettre en évidence expérimentalement l'existence des termes de couplage d'amortissement modal pour des structures réelles[02]. En fait, cette pratique usuelle est justifiée par l'hypothèse du découplage dynamique des équations modales du mouvement, même si la matrice d'amortissement modal est couplée, cette hypothèse, dite hypothèse de BASILE, se formule de la façon suivante :

*Même en présence de couplage modal d'amortissement, les équations modales du mouvement sont dynamiquement découplées pour les structures faiblement amorties si la séparation des modes en fréquence est satisfaisante.*

Cette hypothèse a été justifiée par différents auteurs [02] qui ont formulé des critères de découplage sous des formes voisines. Ces critères de découplage s'expriment sous les formes suivantes pour un mode j donné :

$$\sqrt{2 \frac{\tau_j}{\Omega_{kj}} \left| \frac{c_{kj}}{c_{jj}} \right|} \ll 1 \quad \text{(III. 15)}$$

$$2\tau_j < \varepsilon \left| \frac{c_{jj}}{c_{kj}} \Omega_{kj} \right|_{\min k} \quad \text{(III. 16)}$$

avec :

$$\Omega_{kj} = \left( \frac{\omega_k}{\omega_j} \right)^2 - 1 \text{ facteur de séparation en fréquence pour deux modes k et j.}$$

$\varepsilon$  : paramètre d'erreur ( $\varepsilon = 0.05$ ).

On peut conclure de ce critère de découplage, que les équations modales sont découplées si :

- Les termes d'amortissement sont petits, ce qui est vérifié pour les structures faiblement amorties.
- Les fréquences propres sont correctement séparées.

Dans ce cas, on peut pour le calcul de la réponse ne retenir que les termes diagonaux d'amortissement. Le système des équations modales du mouvement [01] se ramène à  $m$  équations différentielles découplées, soit :

$$[m] \ddot{\eta} + [c] \dot{\eta} + [k] \eta = [\phi]^T f = F(t) \quad (\text{III. 17})$$

soit pour le  $i^{\text{ème}}$  mode :

$$\eta_i + 2\tau_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = \frac{F_i}{m_i}(t) \quad (\text{III. 18})$$

Avec  $F_i(t) = \{ \{x\}^{(i)} \}^T f(t)$  force généralisée du  $i^{\text{ème}}$  mode.

# CHAPITRE IV

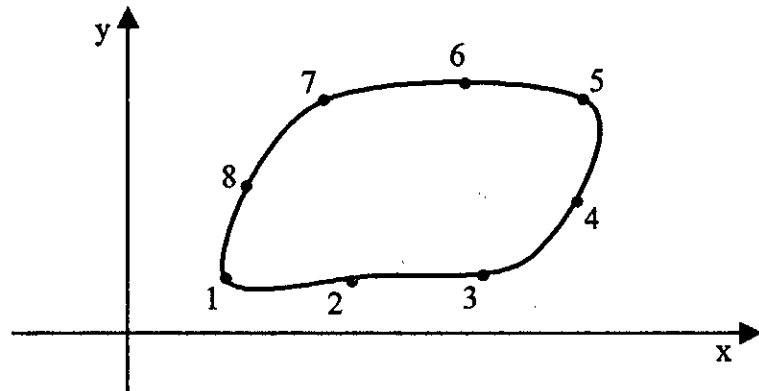
---

*APPLICATION SUR UN  
PROFIL D'AILE d'AVION*

---



Au début de cette étude, nous avons opté pour la discrétisation du profil de l'aile en élément plan. Cette discrétisation convient très bien à la géométrie du profil. Cet élément utilisé sous sa forme *isoparamétrique*, qui comprend huit nœuds, Figure( IV. 1 ).



Figure(IV. 1) : *Elément réel*

### VI. 1. DEFINITION

Un élément fini est dit *isoparamétrique* quand il est basé sur des interpolations identiques pour sa géométrie et son champ de déplacement. On peut donc écrire pour tel élément les relations d'interpolation sous la forme suivante :

$$x = \sum_{i=1}^m N_i(r,s) x_i \quad \text{Interpolation géométrique} \quad (\text{IV. 1})$$

$$y = \sum_{i=1}^m N_i(r,s) y_i$$

$$u = \sum_{i=1}^m N_i(r,s) u_i \quad \text{Interpolation des déplacements} \quad (\text{IV. 2})$$

$$v = \sum_{i=1}^m N_i(r,s) v_i$$

## VI. 2. PROPRIETES

## ⊗ CONTINUITÉ INTER - ELEMENT

Si les fonctions d'interpolation satisfont les conditions de continuité requises pour l'élément parent alors ces conditions de continuité seront également satisfaites pour l'élément isoparamétrique. Cette propriété est évidente s'il y a unicité de la transformation géométrique.

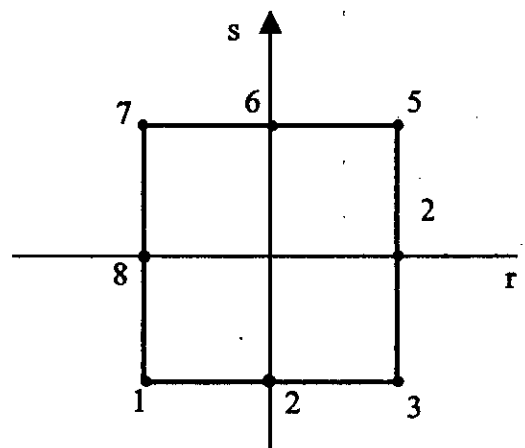
## ⊗ COMPLETEUDE

Les états de déformation constante sont correctement représentés dans les éléments isoparamétriques si la condition suivante est respectée :

$$\sum N_i = 1 \quad (\text{IV. 3})$$

## IV. 3. CONSTRUCTION DES MATRICES ELEMENTAIRES

La construction des matrices élémentaires nécessite l'intégration des fonctions complexes sur des domaines géométriquement complexes, ces intégrales sont calculées numériquement, de plus les fonctions d'interpolations, ainsi que leurs dérivées intervenant dans ce calcul sont définies sur l'élément de référence. Ceci nous oblige à l'utilisations de coordonnées intrinsèques permettant de définir une transformation bijective entre le domaine physique de l'élément et un domaine simple sans dimensions et pour lequel il est aisé de construire les fonctions d'interpolation des déplacements.



Figure(IV. 2) : *Elément de référence (élément parent)*

Cette transformation conduit à un élément (*élément parent*) quadratique. Figure(IV. 2).

Les coordonnées des nœuds de cet élément sont données dans le tableau (IV.1).

Les fonctions de forme et leurs dérivées  $\partial N_i/\partial r$  et  $\partial N_i/\partial s$  sont données dans le tableau (IV.2).

Tableau(VI. 1)

Nœud i	1	2	3	4	5	6	7	8
r	-1	0	1	1	1	0	-1	-1
s	-1	-1	-1	0	1	1	1	0

Tableau(IV. 2)

Nœuds i	$N_i$	$\partial N_i/\partial r$	$\partial N_i/\partial s$
1	$-1/4(1-r)(1-s)(1+r+s)$	$1/4(1-s)(2r+s)$	$1/4(1-r)(r+2s)$
2	$1/2(1-r^2)(1-s)$	$-(1-s)r$	$-1/2(1-r^2)$
3	$-1/4(1+r)(1-s)(1+s-r)$	$1/4(1-s)(2r-s)$	$-1/4(1+s)(r-2s)$
4	$1/2(1+r)(1-s^2)$	$1/2(1-s^2)$	$-(1+r)s$
5	$-1/4(1+r)(1+s)(1-r-s)$	$1/4(1+s)(2r+s)$	$1/4(1+r)(r+2s)$
6	$1/2(1-r^2)(1+s)$	$-(1+r)r$	$1/4(1-r^2)$
7	$-1/4(1-r)(1+s)(1-s+r)$	$1/4(1+s)(2r-s)$	$-1/4(1-r)(r-2s)$
8	$1/2(1-r)(1-s^2)$	$-1/2(1-s^2)$	$-(1-r)s$

On a pour une fonction f quelconque :

$$\frac{df}{dr} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \tag{IV. 4}$$

Donc on peut écrire la formule de différentiation suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{IV. 5}$$

On pose :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}$$

$[J]$  étant le Jacobien de la transformation

La transformation géométrique est unique. Le Jacobien est non singulier on peut donc écrire :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix}$$

Le changement des variables précédentes permet le passage de l'intégration d'une fonction  $f$  sur l'élément réel à une intégration plus simple sur l'élément de référence.

$$\int_{ve} f(x,y) dx dy = \int_{vr} f(r,s) \det J dr ds \quad (\text{IV. 6})$$

$\det J$  : est le déterminant de la matrice JACOBIENE.

Donc les expressions usuelles (II. 13) (II. 16) des matrices caractéristiques deviennent :

$$[k_e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [C] [B] \det J dr ds \quad (\text{IV. 7})$$

$$[M_e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T \rho [N] \det J dr ds \quad (\text{IV. 8})$$

Le calcul des matrices par intégration explicite ne peut être effectué que pour les éléments les plus simples. Par ailleurs, l'intégration exacte peut soulever de sérieuses difficultés pour certains types d'élément, c'est le cas des éléments isoparamétriques.

Ces intégrales peuvent être effectuées en utilisant l'une des deux méthodes :

- la méthode de NEWTON-COTES.
- la méthode de GAUSS

Dans notre étude, on utilise la méthode de GAUSS qui dans le cas général pour les problèmes bidimensionnels s'écrit :

$$\iint_{-1}^{+1} f(r,s) dr ds = \sum_1^n \sum_1^n w_i w_j f(r_i, s_j) \quad (\text{IV. 9})$$

$n$  : nombre des points de GAUSS.

$w$  : poids des points de GAUSS.

On pose que :

$$F(r,s) = [B]^T [C] [B] \det J \quad (\text{IV. 10})$$

$$G(r,s) = \rho [N]^T [N] \det J \quad (\text{IV. 11})$$

Alors:

$$[k_e] = \iint_{-1}^{+1} F(r,s) dr ds = \sum_1^n \sum_1^n w_i w_j F(r_i, s_j) \quad (\text{IV. 12})$$

$$[M_e] = \iint_{-1}^{+1} G(r,s) dr ds = \sum_1^n \sum_1^n w_i w_j G(r_i, s_j) \quad (\text{IV. 13})$$

#### IV. 4. CHOIX DE L'ORDRE D'INTEGRATION

Le choix du nombre d'intégration dépend du type de l'élément utilisé. En pratique on choisit le plus souvent un nombre de points aussi faible que possible pour diminuer le volume de calcul [03 ].

En ce qui concerne notre programme, nous avons opté pour un choix de (2 x 2) point d'intégration.

#### IV. 5. CHARGES VOLUMIQUES

On rappelle l'expression de la charge volumique (II. 14) :

$$\{F_{ve}\} = \iiint [N]^T \{f_{ve}\} dv$$

Le calcul de  $\{F_v\}$  se fait de la même manière pour la matrice  $[M_e]$ .

La force volumique qui est prise en compte est le poids  $f_v = -\rho g$ .

donc :

$$\{F_{ve}\} = \iiint [N]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{Bmatrix} dv \quad (\text{IV. 14})$$

$$\{F_{ve}\} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{Bmatrix} \det j \, dr \, ds \quad (IV. 15)$$

$$\{F_{ve}\} = \sum_1^n \sum_1^n w_i w_j [N]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{Bmatrix} \det j \quad (IV. 16)$$

#### IV. 6. CHARGES SURFACIQUES

Pour les charges surfaciques, on prend les résultats des distributions de pression le long du profil déterminé par la méthode de singularité.

Pour notre étude, on a considéré un vol à Mach 0.3, et à une altitude de 10000 mètres, ce qui donne:

$$\rho_\infty = 0.4127 \text{ kg/m}^3 \quad \text{et} \quad V_\infty = 90 \text{ m/s}$$

#### IV. 7. CALCUL DES CONTRAINTES

Le calcul des contraintes peut se faire en n'importe quel point de l'élément il suffit pour cela de spécifier les coordonnées. Les étapes de calcul seront identiques à celles utilisées pour le calcul de la matrice [k].

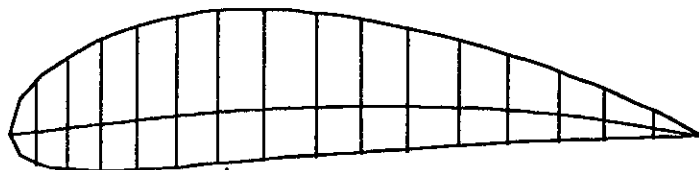
$$\{\sigma_e\} = [C] \{\varepsilon_e\} = [C] [B_e] \{q_e\} \quad (IV. 17)$$

Dans notre étude nous avons opté à calculée les contraintes aux nœuds.

#### IV. 8. MAILLAGE

Les problèmes d'espace mémoire, de temps d'exécution ont limité notre choix du maillage. Pour notre étude nous avons opté pour le maillage suivant:

- ⊛ 32 Eléments.
- ⊛ 133 Nœuds.
- ⊛ 266 Degrés de liberté.



Le matériau utilisé est de l'acier dont les caractéristiques suivantes :

$$E = 2.1 \text{ E}11 \text{ N/m}^2$$

$$\rho = 7.8 \text{ E}03 \text{ Kg/m}^3$$

$$\nu = 0.285$$

# CHAPITRE V

---

---

## *PRESENTATION DES PROGRAMMES ET RESULTATS*

---

---

Dans ce chapitre nous présentons deux programmes, le premier MCG élaboré en langage FORTRAN permet de calculer les matrices caractéristiques globales du système et l'autre RES élaboré en langage MATLAB permet de déterminer les déplacements nodaux en cas statique et dynamique.

## V. 1. CALCUL DES MATRICES CARACTERISTIQUES GLOBALES

Nous présentons tout d'abord les sous-routines utilisées par le programme MCG , ensuite nous donnons l'organigramme du programme, voir figure(V. 1).

### V.1. 1. Subroutine MAILLE :

Ce sous programme permet de déterminer les coordonnées des nœuds par la méthode "CUBIQUE SPLINE".

### V. 1 .2. Subroutine GRILLE :

Il permet la lecture des coordonnées des nœuds et leurs numérotations.

### V. 1 .3. Subroutine KFME :

Ce sous programme permet de calculer les matrices caractéristiques élémentaires  $[K_e]$ ,  $[M_e]$  et  $\{F_e\}$ .

### V. 1. 4. Subroutine VJN :

Il permet de calculer la matrice JACOBIENNE  $[ J ]$ , l'inverse  $[ J ]^{-1}$  , son déterminant  $\det j$  et la matrice  $[B]$  en chaque point d'intégration.

### V. 1. 5. Subroutine LOCEF :

Ce sous programme utilisé pour la création d'une table de localisation élémentaire.

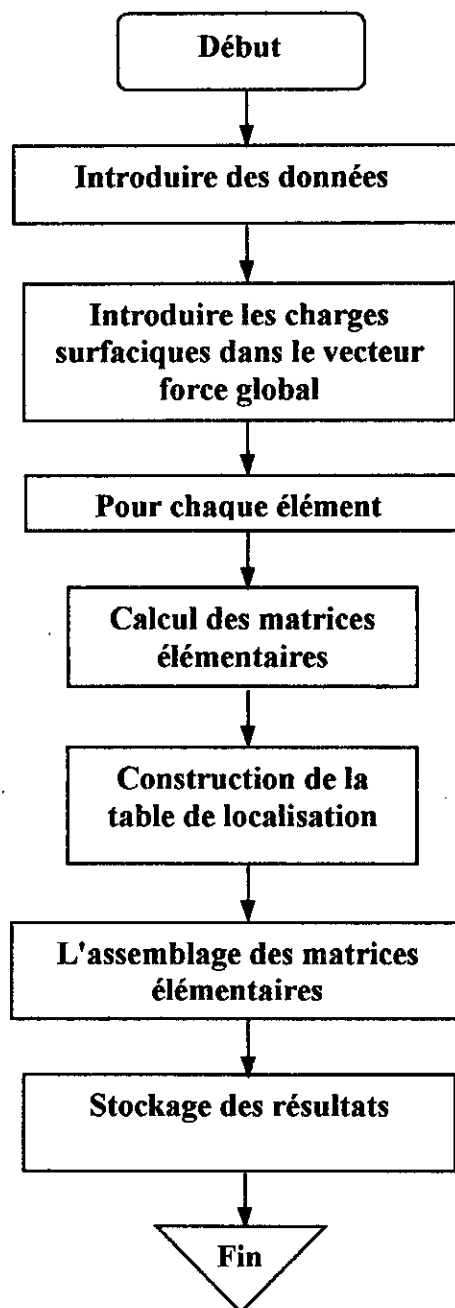
### V. 1 .6 Subroutine ASSEMB :

Ce sous programme utilisé pour l'assemblage des matrices caractéristiques élémentaires.

### V. 1. 7. Subroutine CONTE :

Il permet de calculer les contraintes en n'importe quel point.





**Figure(V. 1) :** *Organigramme du programme qui calcule les matrices caractéristiques globales(MCG) :*

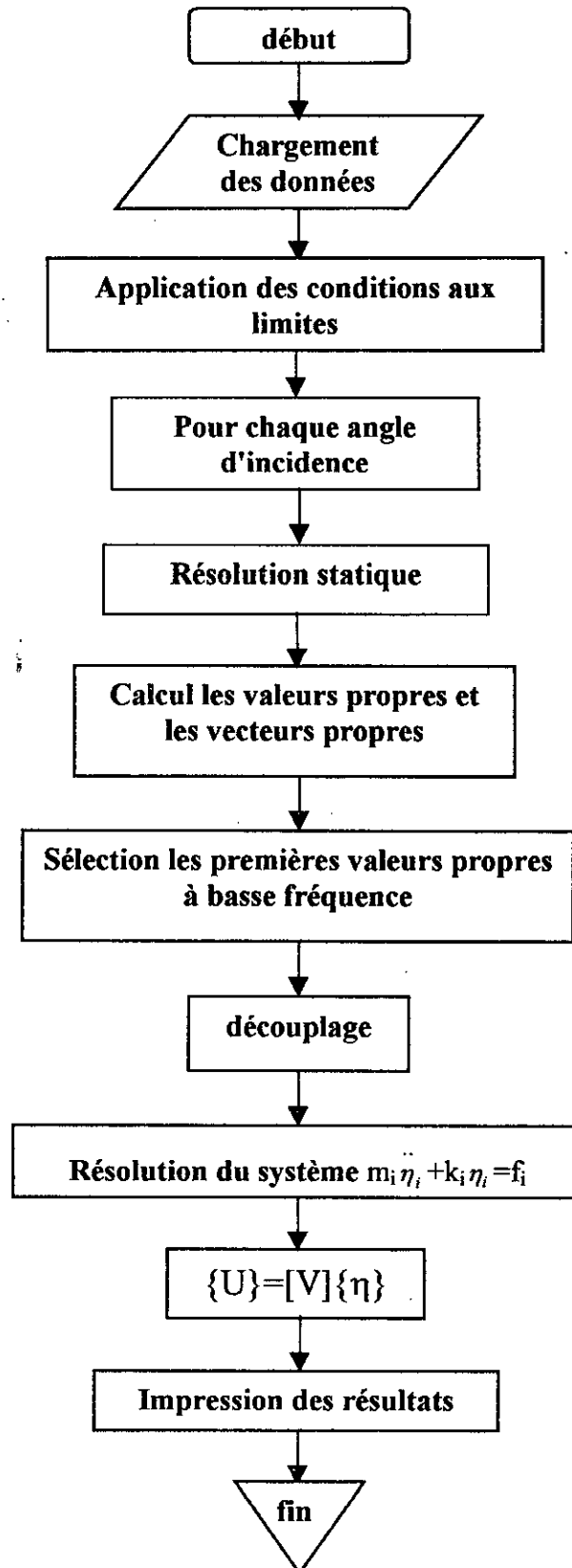
## V. 2. RESOLUTIONS STATIQUE ET DYNAMIQUE

Dans le calcul dynamique, on a calculé les valeurs propres et les vecteurs propres, puis on calcule les déplacements nodaux après le découplage du système.

Dans cette étude, on a pris en considération que les valeurs correspondant à la porte basse fréquence.

Pour faire le calcul on introduit les données suivantes :

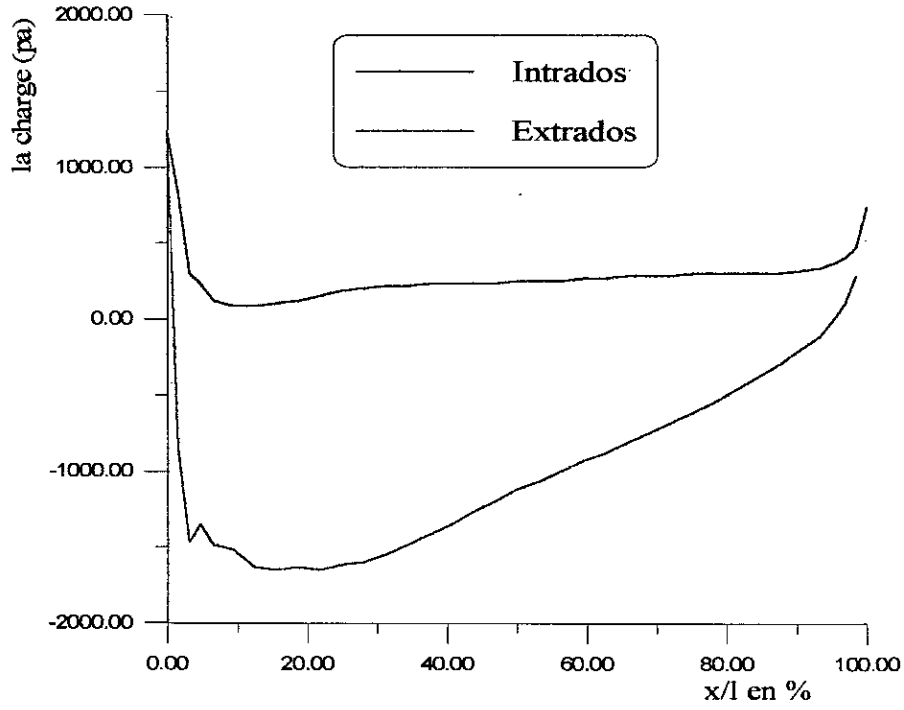
- ✱ Matrice de rigidité.
- ✱ Matrice de masse.
- ✱ Vecteur de force global pour les différents angles d'incidence:  $2^\circ$ ,  $8^\circ$  et  $16^\circ$ .
- ✱ Nombre de valeurs propres sélectionnées.
- ✱ Le pas de temps (15 sec) .



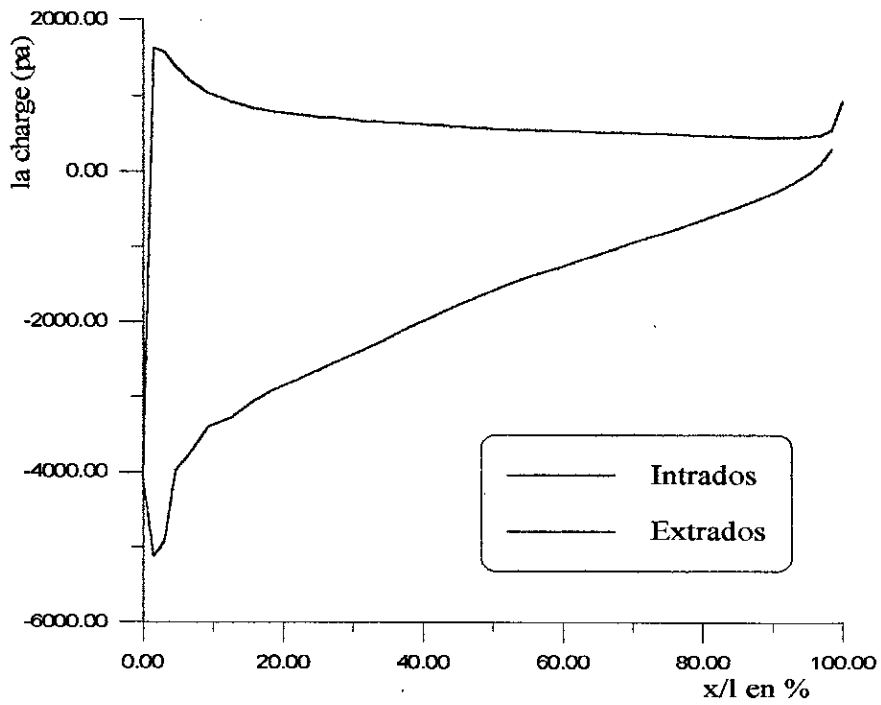
Figure(V. 2) : Organigramme de résolution statique et dynamique(RES)

V. 3. EXPERIENCES NUMERIQUES

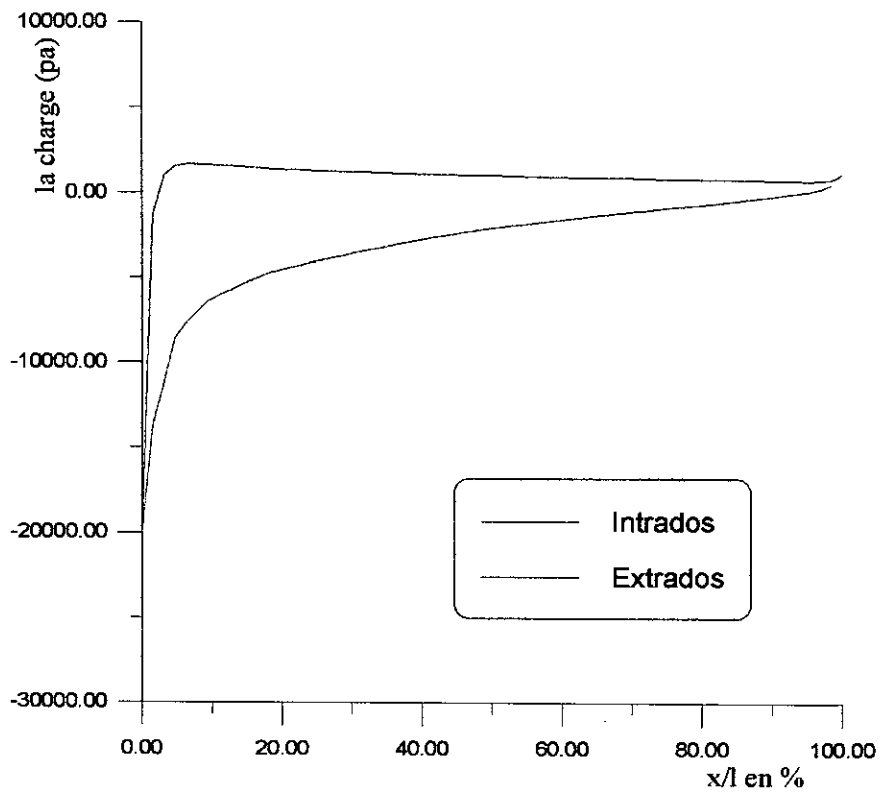
V. 3. 1. PRESENTATION DES DISTRIBUTIONS DE PRESSION SUR UN PROFIL D'AILE



Figure(V. 3) : Distribution de pression pour  $\alpha=2^\circ$

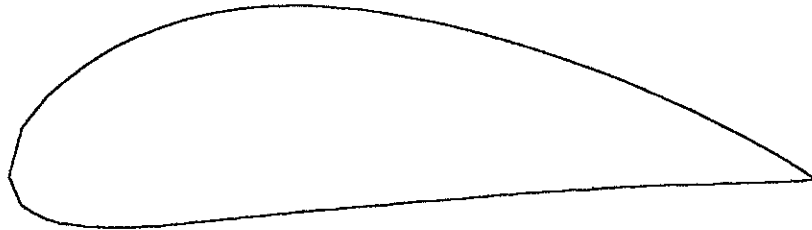


Figure(V. 4) : Distribution de pression pour  $\alpha=8^\circ$

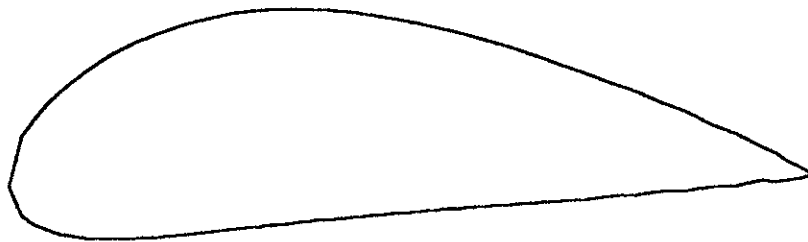


Figure(V. 5) : *Distribution de pression pour  $\alpha=16^\circ$*

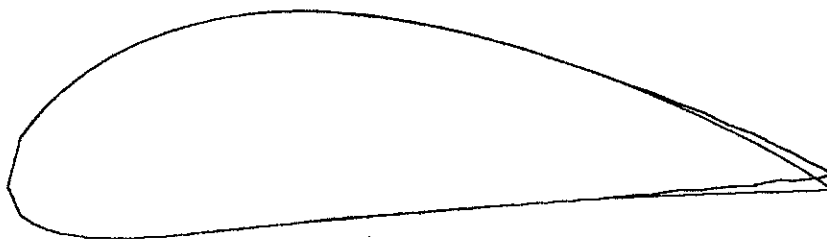
## V. 3. 2. PRESENTATION DES RESULTATS STATIQUES



Figure(V. 6-a) : Profil d'aile sans amplification des déplacements

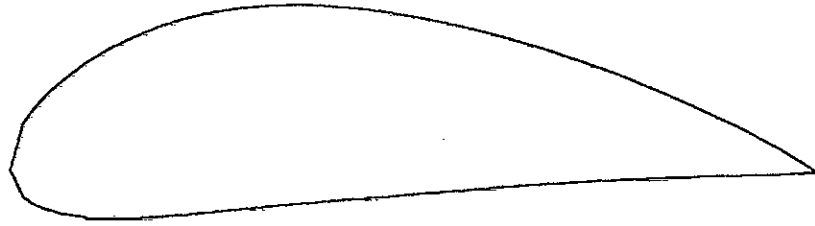


Figure(V. 6-b) : Profil d'aile avec amplification des déplacements d'ordre 1E +05

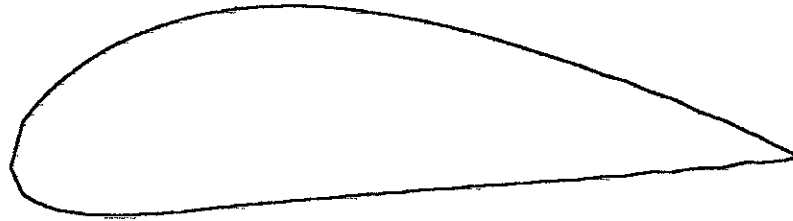


Figure(V. 6-c):Superposition du profil avant et après déformation

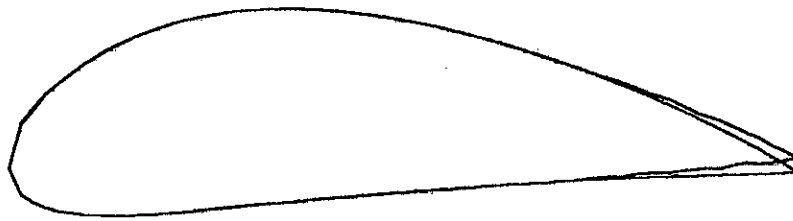
Figure (V. 6) : Comparaison du profil d'aile avant et après déformation pour un angle d'attaque ( $\alpha=2^\circ$ )



**Figure(V. 7-a) : Profil d'aile sans amplification des déplacements**

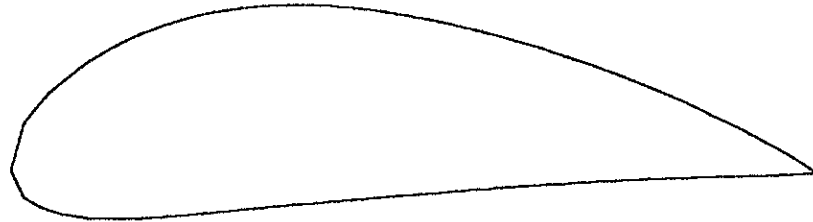


**Figure(V. 7-b) : Profil d'aile avec amplification des déplacements d'ordre 1E +05**

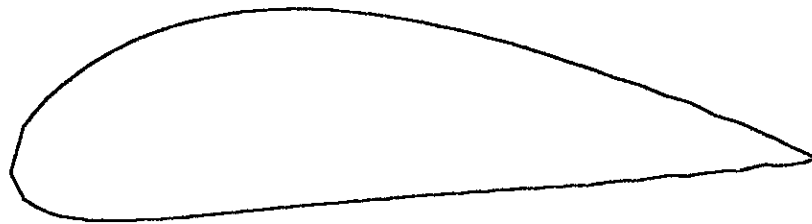


**Figure(V. 7-c) : Superposition du profil avant et après déformation**

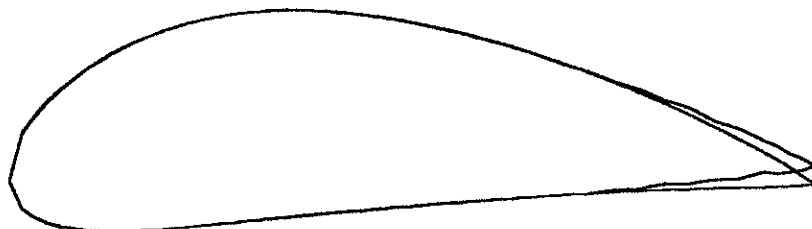
**Figure (V. 7) : Comparaison du profil d'aile avant et après déformation pour un angle d'attaque ( $\alpha=8^\circ$ )**



**Figure(V. 8-a) : Profil d'aile sans amplification des déplacements**



**Figure(V. 8-b) : Profil d'aile avec amplification des déplacements d'ordre 1E +05**

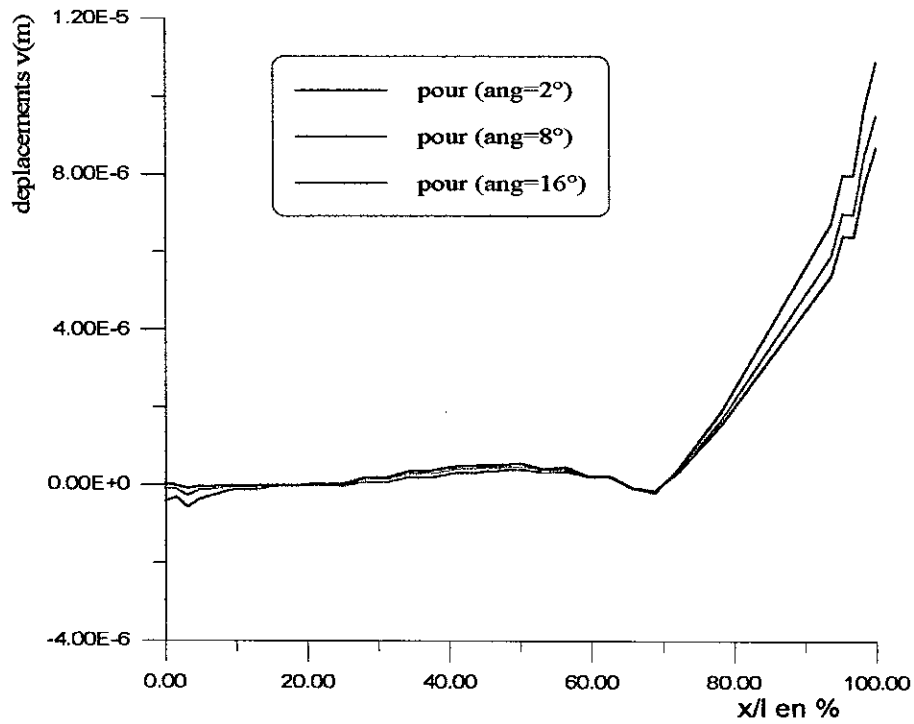


**Figure(V. 8-c): Superposition du profil avant et après déformation**

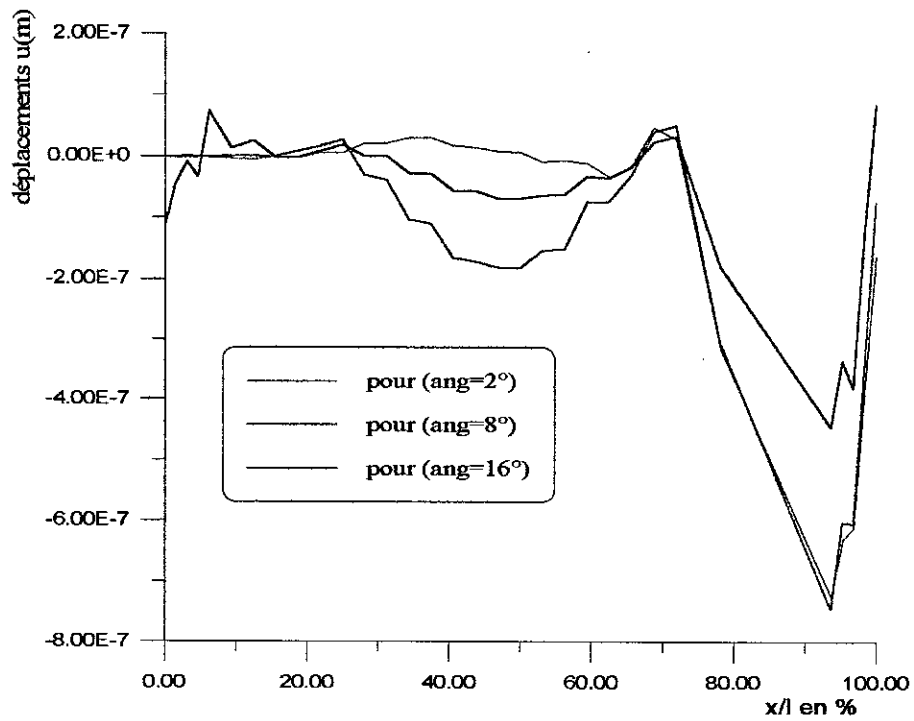
**Figure (V. 8): Comparaison du profil d'aile avant et après déformation pour un angle d'attaque ( $\alpha=16^\circ$ )**



⊙ PRESENTATION DES DEPLACEMENTS A L'EXTRADOS



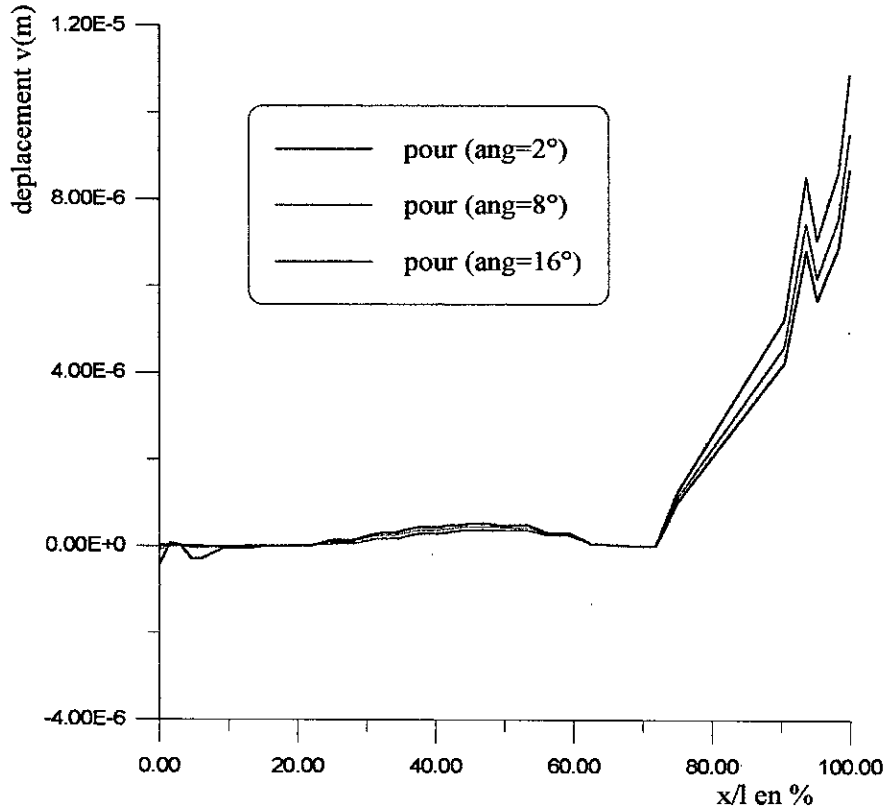
Figure(V. 9-a) : Déplacements suivant Y



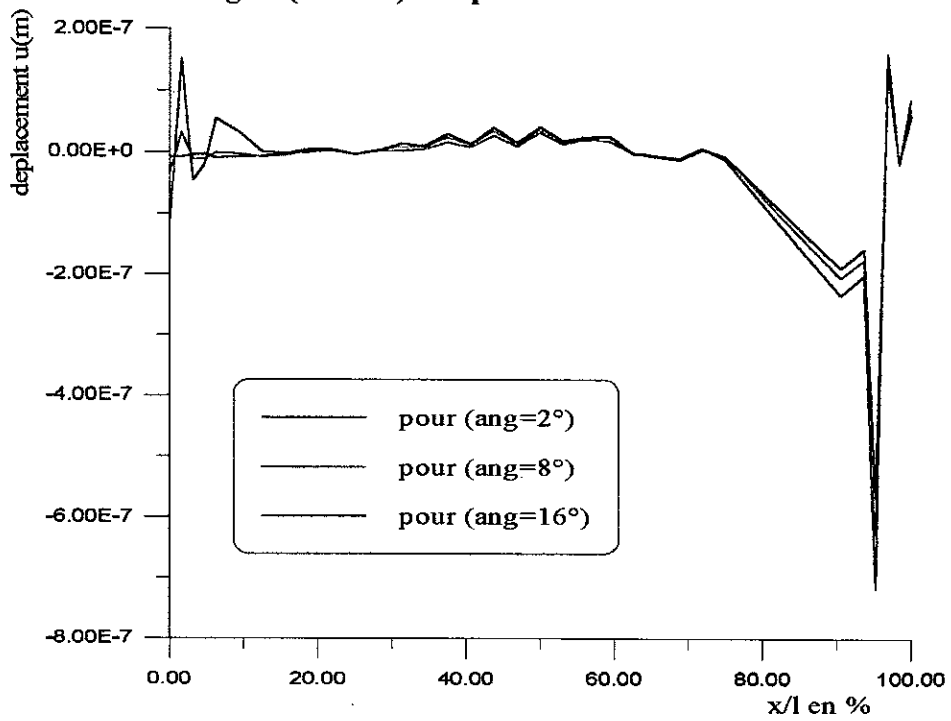
Figure(V. 9-b) : Déplacements suivant X

Figure(V. 9) : Déplacements à l'extrados pour les différents angles d'attaque

⊙ PRESENTATION DES DEPLACEMENTS A L'INTRADOS



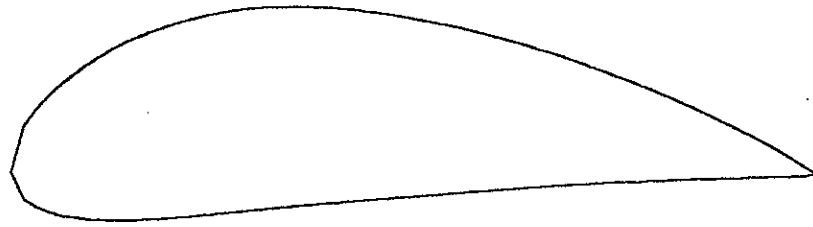
Figure(V. 10-a) : Déplacement suivant Y



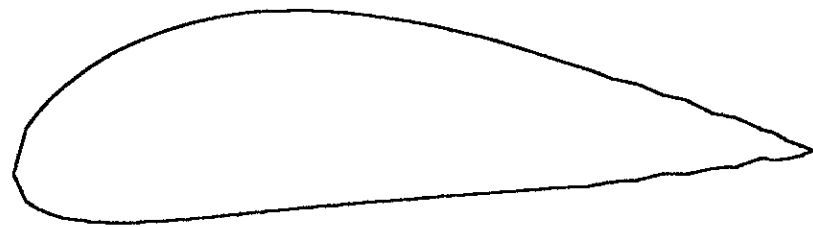
Figure(V. 10-b) : Déplacement suivant X

Figure(V. 10) : Déplacements à l'extrados pour les différents angles d'attaque

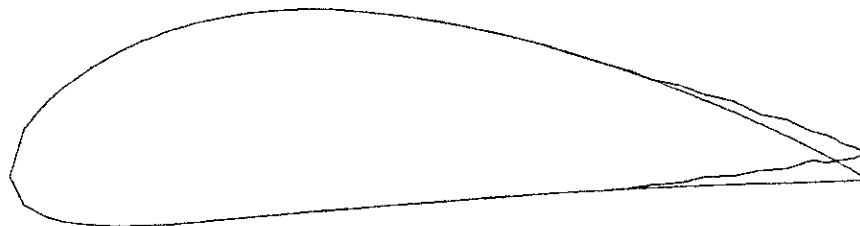
## V. 3. 3. PRESENTATION DES RESULTATS DYNAMIQUES



Figure(V. 11-a) : Profil d'aile sans amplification des déplacements

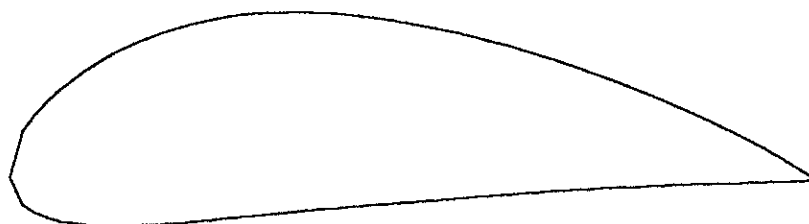


Figure(V. 11-b) : Profil d'aile avec amplification des déplacements d'ordre 1E +05

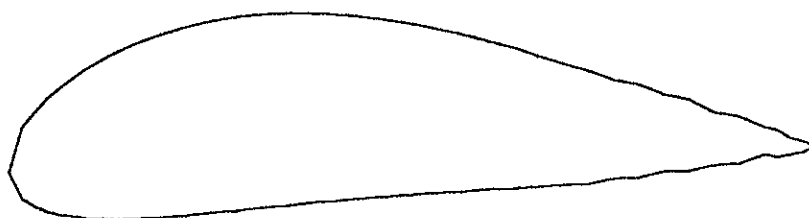


Figure(V. 11-c) : Superposition du profil avant et après déformation

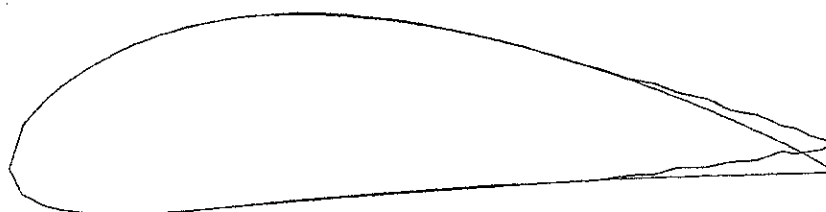
Figure (V. 11) : Comparaison du profil d'aile avant et après déformation pour un angle d'attaque ( $\alpha=2^\circ$ )



**Figure(V. 12-a) : Profil d'aile sans amplification des déplacements**

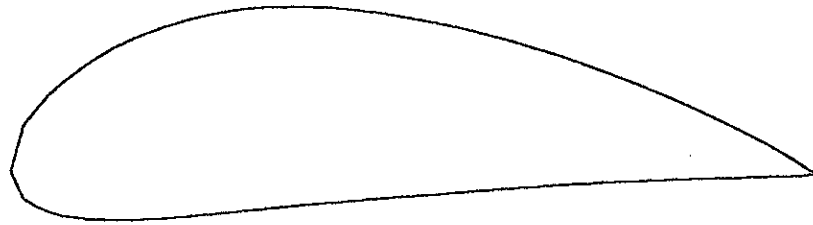


**Figure(V. 12-b) : Profil d'aile avec amplification des déplacements d'ordre 1E +05**

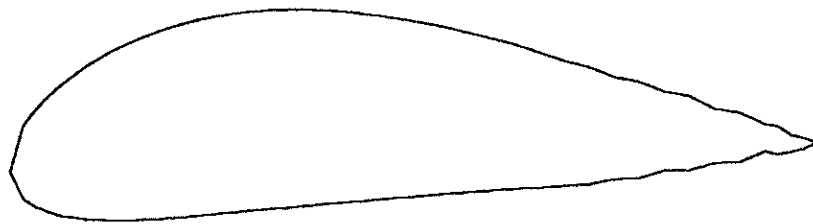


**Figure(V. 12-c) : Superposition du profil avant et après déformation**

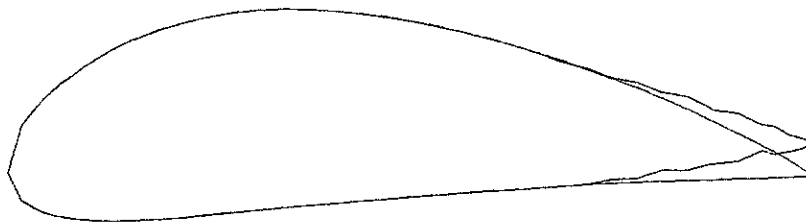
**Figure (V. 12) : Comparaison du profil d'aile avant et après déformation pour un angle d'attaque ( $\alpha=8^\circ$ )**



**Figure(V. 13-a) : Profil d'aile sans amplification des déplacements**



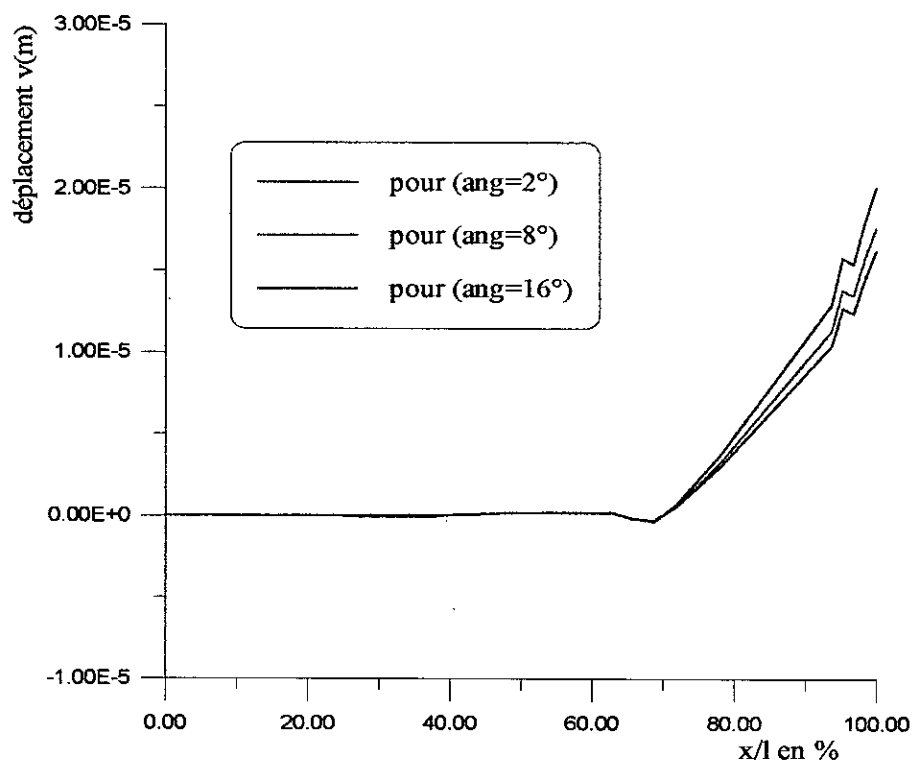
**Figure(V. 13-b) : Profil d'aile avec amplification des déplacements d'ordre 1E +05**



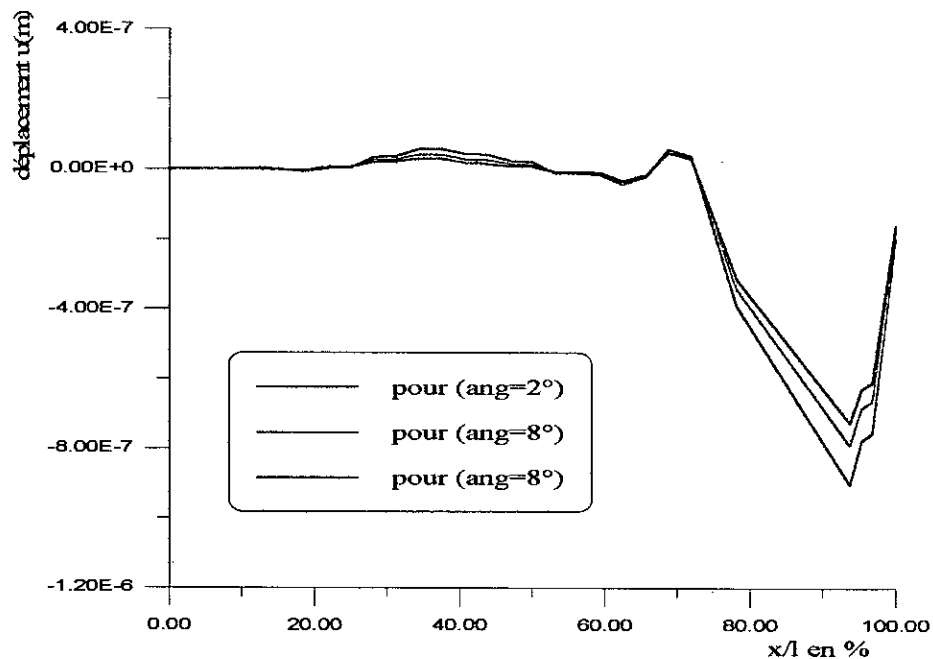
**Figure(V. 13-c): Superposition du profil avant et après déformation**

**Figure (V. 13) : Comparaison du profil d'aile avant et après déformation pour un angle d'attaque ( $\alpha=16^\circ$ )**

⊕ PRESENTATION DES DEPLACEMENTS A L'EXTRADOS



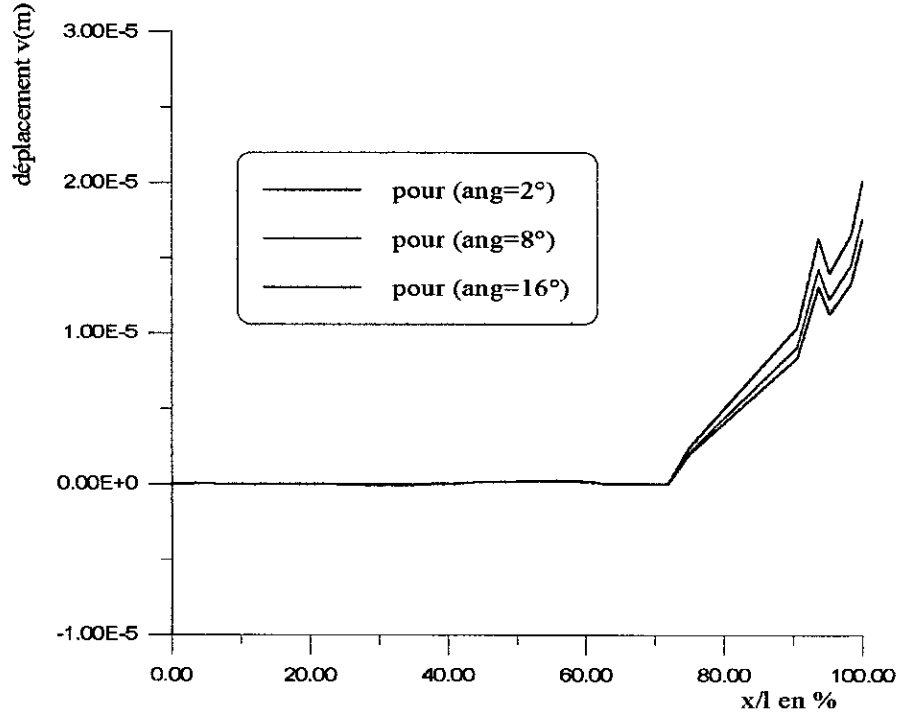
Figure(V. 14-a) : Déplacement suivant Y



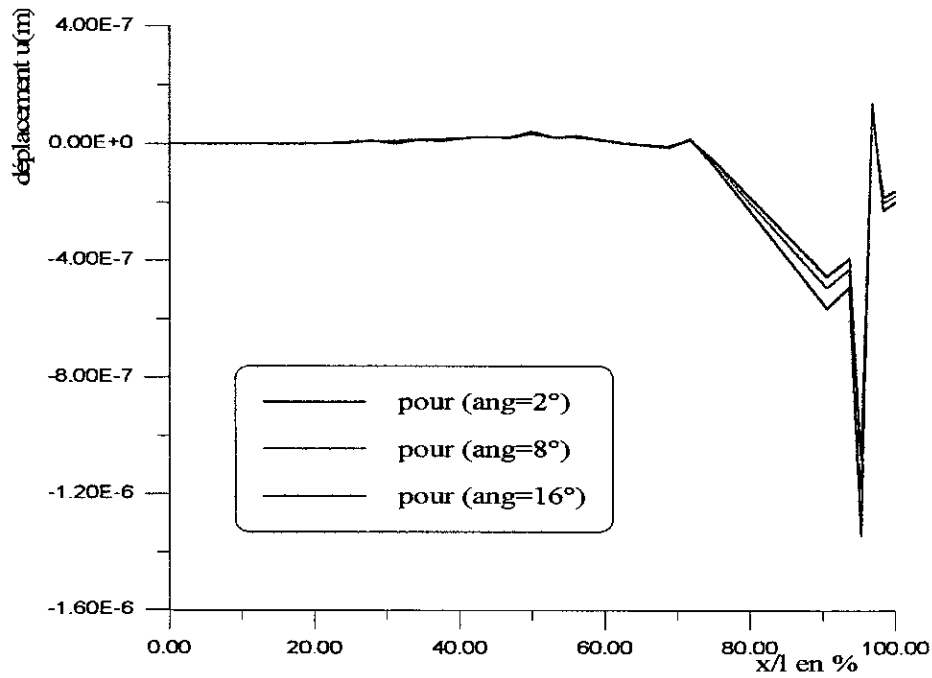
Figure(V. 14-b) : Déplacement suivant X

Figure(V. 14) : Déplacements à l'extrados pour les différents angles d'attaques

⊛ PRESENTATION DES DEPLACEMENTS A L'INTRADOS



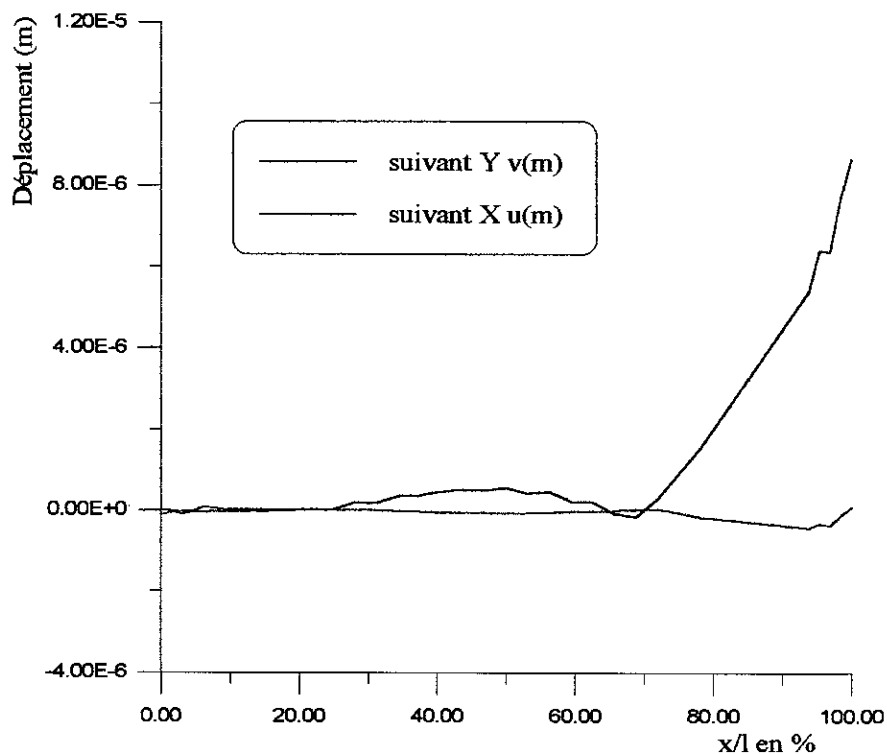
Figure(V. 15-a):Déplacements suivant Y



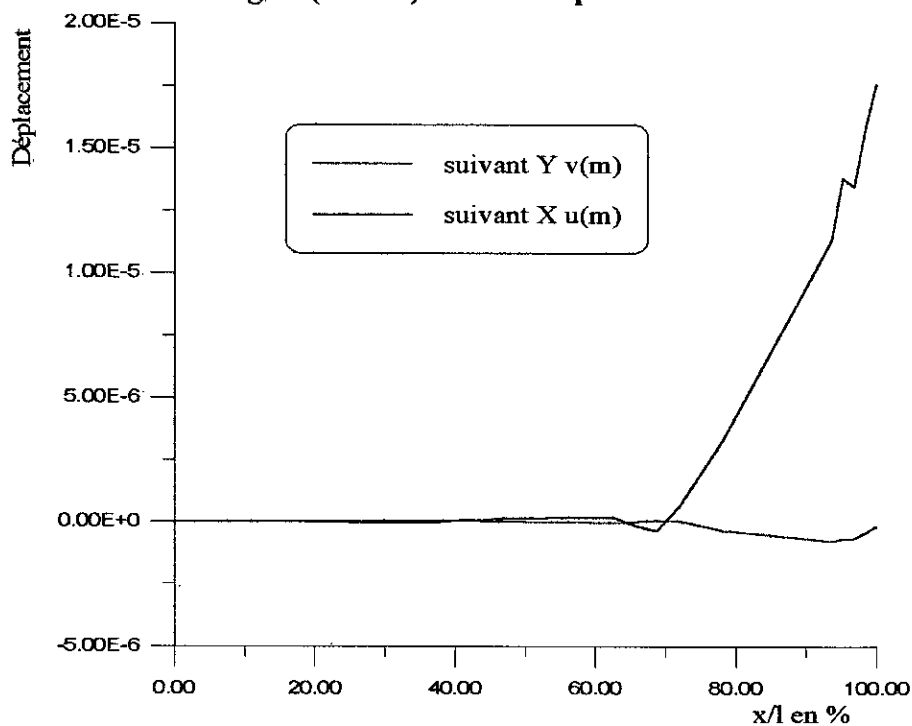
Figure(V. 15-b):Déplacements suivant X

Figure(V. 15) : Déplacements à l'extrados pour les différents angles d'attaque

V. 3. 4. COMPARAISON ENTRE LES DEPLACEMENTS HORIZONTALES ET VERTICALES



Figure(V.16-a) : Cas statique

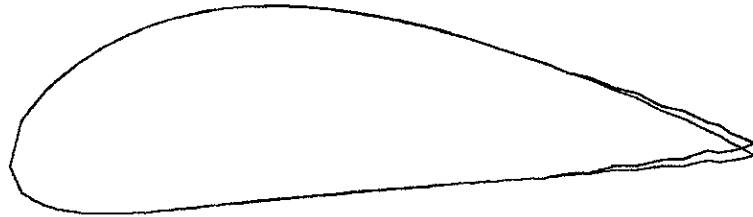
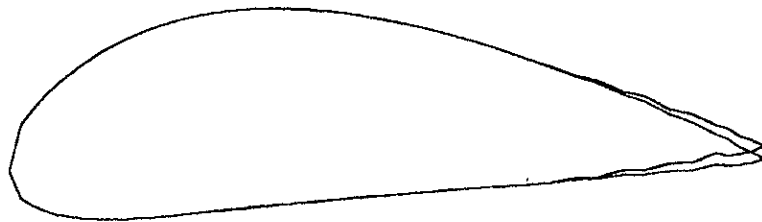
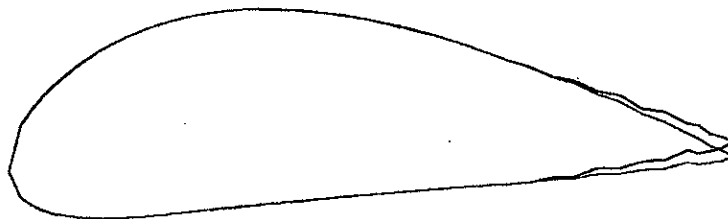


Figure(V. 16-b) : Cas dynamique

Figure(V. 16) : Comparaison entre les déplacements horizontales et verticales



## V. 3. 5 COMPARAISON DES DEFORMATIONS ENTRE LE CAS STATIQUE ET DYNAMIQUE

Figure(V. 17-a) : Pour un angle d'attaque  $\alpha=2^\circ$ Figure(V. 17-b) : Pour un angle d'attaque  $\alpha=8^\circ$ Figure(V. 17-c) : Pour un angle d'attaque  $\alpha=16^\circ$ 

\_\_\_\_\_ Cas dynamique

\_\_\_\_\_ Cas statique

Figure(V. 17) : Comparaison des déformations entre statique et dynamique

## V. 4. INTERPRETATION DES RESULTATS

### V. 4. 1. CAS STATIQUE

- La déformation maximale est localisée au bord de fuite du fait que l'épaisseur du profil est minimale.
- La variation des déformations pour les différents angles d'attaque permet de choisir l'incidence la mieux adaptée à notre profil ( $\alpha=2^\circ$ ), par contre les déformations sont plus importantes pour une incidence ( $\alpha=16^\circ$ ).
- Les déplacements verticaux sont plus important par rapport aux déplacements horizontaux, vu du type de chargement qui est imposé verticalement .

### V. 4. 2. CAS DYNAMIQUE

- Les déformations dans le cas dynamique sont plus importantes que celles dans le cas statique, qui sont essentiellement des forces d'inertie qui influent sur la rigidité de l'aile.
- Les déplacements sont très importants au bord de fuite du fait que l'épaisseur est minimale.
- La déformation au bord de fuite présente une rotation dirigée vers le haut du fait que la portance a tendance de déformer l'aile vers le haut.
- Comme dans le cas du statique, les déplacements verticaux sont plus importants par rapport aux déplacements horizontaux.
- En faisant varier l'incidence, on remarque également que l'angle d'incidence de deux degré est toujours bien adapté à l'écoulement autour du profil étudié, alors que l'angle d'incidence de  $16^\circ$  présente dans le cas étudiés le cas le plus défavorable.
- Le choix des 18 valeurs propres les plus petites est entièrement satisfaisant parce qu'il nous permet d'avoir des réponses dynamiques acceptables.

---

---

# *CONCLUSION GENERALE*

---

---

## **CONCLUSION GENERALE**

*Dans ce présent travail, nous avons étudié les interactions des forces aérodynamiques, élastiques et d'inertie et l'influence de ces interactions sur le comportement de l'aile d'avion.*

*Nous avons mis au point un programme en élément finis, qui permet d'obtenir des grandeurs fidèles des déformations et des contraintes. En calcul statique, les résultats montrent que les déformations n'apparaissent qu'au bord de fuite, cette déformation, pour des incidences plus petites, est très tolérable. Dans le calcul dynamique la déformation est plus importante, ceci traduit l'influence des forces d'inertie sur le comportement élastique de l'aile.*

*Dans cette étude, on a pris en considération les charges de pression et de masse, mais une éventuelle force extérieure peut être prise pour exprimer des perturbations agissant sur l'aile, tel que : les effets trous d'air ou dysfonctionnement des moteurs, ce qui permet d'ouvrir un autre axe de recherche portant sur l'étude sur la résistance de l'aile devant ces considérations.*

*De nombreuses questions n'ont pas été abordé et qui seraient encore à considérer pour une étude complète du problème, tel que :*

- ✱ *La vérification des exigences de stabilité dimensionnelle.*
- ✱ *Une géométrie de l'aile réelle ( aile creuse ).*
- ✱ *L'utilisation des matériaux composites au lieu des matériaux ordinaires.*

---

---

# *ANNEXES*

---

---

Le problème de type mécanique des solides revient à déterminer les deux champs inconnus : déplacements  $u_i$  et contraintes  $\sigma_{ij}$  sous l'effet des forces appliquées, forces de surface  $\phi_i$  et forces de volumes  $f_i$ . Le phénomène de déformation des corps solides est régi par des EDP avec des conditions mixtes aux limites. Deux démarches principales suivant que l'on formule complètement le problème en fonction de l'un des champs inconnus, soit le champ des déplacements, soit le champ des contraintes. La première approche en fonction des déplacements est appelée *approche cinématique*, l'autre approche en fonction des contraintes est appelée *approche équilibre*.

## LES RELATIONS ET EQUATIONS DE CHAMP

Définies dans le domaine solide  $v$  peuvent se classer en :

### ⊛ Relations déformations – déplacements

Dans le cas de la théorie linéaire de l'élasticité (déplacements et déformations petits) on a :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{A. 1})$$

Equations d'équilibre :

$$\sigma_{ij,i} + f_i = 0 \quad (\text{A. 2})$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (\text{A. 3})$$

Equation de compatibilité :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (\text{A. 4})$$

Cette équation permet d'exprimer six équations de compatibilité en élasticité tridimensionnelle.

On rappelle que les équations de compatibilité sont les conditions d'intégrabilité des déformations qui assurent l'unicité des déplacements. Ces conditions d'intégrabilité sont obligatoires si l'on résout le problème d'élasticité en fonction des contraintes, c.-à-d. dans le cas d'une approche équilibre. Si l'on effectue la résolution en fonction des déplacements, C.-à-d. dans le cas de l'approche cinématique, la compatibilité des déplacements est immédiate et les équations de comptabilité sont sans objet.

### ⊛ Relations contraintes – déformations

Dans le cas de matériaux à comportement élastique linéaire, on a de façon générale :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{A. 5})$$

Avec  $C_{ijkl}$  composantes de tenseur d'élasticité.

Dans le cas particulier des matériaux isotropes, les coefficients d'élasticité se réduisant à 2 constantes indépendantes ( $\lambda$  et  $\mu$  soit  $E$  et  $\nu$ ), les relations d'élasticité peuvent s'écrire sous les deux formes suivantes connues sous le nom de la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{A. 6})$$

Avec  $\varepsilon_{kk} = \text{Tr}(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  (premier invariant du tenseur des déformations).

$\lambda, \mu$  coefficient de Lamé :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{A. 7})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{A. 8})$$

Avec  $\sigma_{kk} = \text{Tr}(\sigma_{ij}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$  (premier invariant du tenseur de contraintes).

$E$  = module de Young

$\nu$  = coefficient de Poisson.

## PRINCIPE DE HAMILTON

Le mouvement d'un système élastique conservatif entre deux instants ( $t_1$  et  $t_2$ ) s'effectue de telle sorte que la fonctionnelle  $\int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt$  soit stationnaire, c-à-d :

$$\delta \left[ \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt \right] = 0 \quad \forall \delta u_i \neq 0 \quad (\text{B. 1})$$

On a respectivement pour l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle totale  $\Pi$  :

$$T = \frac{1}{2} \int_v \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dv \quad (\text{B. 2})$$

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv - \int_{S_\sigma} \bar{\Phi}_i u_i ds - \int_v f_i u_i dv \quad (\text{B. 3})$$

## EQUATIONS DE LAGRANGE

En pratique, on cherche à obtenir des solutions approchées du problème continu en le réduisant à un problème discret à un nombre fini de degrés de liberté. Le plus souvent, on va définir une approximation des déplacements en séparant les variables d'espace et de temps, en écrivant pour chaque composante de déplacement :

$$\tilde{u}_j(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x, y, z) a_i(t) \quad (\text{B. 4})$$

avec :  $a_i(t)$  coordonnées généralisées en fonction du temps.

$\phi_i(x, y, z)$  fonctions base de l'approximation définies dans le domaine  $v$ .

On a de même pour les composantes de vitesses :

$$\tilde{u}_{j'}(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x, y, z) \dot{a}_i(t) \quad (\text{B. 5})$$

On peut ainsi exprimer le Lagrangien  $L = T - U$  à l'aide des coordonnées généralisées et leurs dérivées, si l'on effectué les intégrations des fonctions connues par rapport aux coordonnées d'espace:

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= T[\tilde{u}_{j'}] - \Pi[\tilde{u}_j] \\ &= T[\dot{a}_i] - \Pi[a_i] \end{aligned} \quad (\text{B. 6})$$



Pour les systèmes conservatif, le principe de Hamilton s'énonce alors simplement :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L[a_i, \dot{a}_i, t] dt = 0 \quad \forall \delta a_i \neq 0 \quad (\text{B. 7})$$

Il s'agit d'un problème variationnel classique à n fonctions arguments ( $a_i, i=1, \dots, n$ ) de la variable temps.

On rappelle que les conditions d'extremum de cette fonctionnelle sont les équations d'Euler suivantes:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial a_i} = 0 \quad i=1, \dots, n \quad (\text{B. 9})$$

ou encore :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{a}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial a_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad i=1, \dots, n$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{a}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial a_i} + \frac{\partial U}{\partial a_i} = Q_i \quad i=1, \dots, n \quad (\text{B. 10})$$

avec  $Q_i$  force généralisées correspondant à la coordonnée  $a_i$  et définie par le travail virtuel des forces extérieures :

$$\delta W = Q_i \delta a_i \quad (\text{B. 11})$$

Ces équations appelées équations de Lagrange ou encore équations d'Euler – Lagrange. Elles sont les équations du mouvement du système continu avec n coordonnées généralisées.

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir les équations du mouvement du système à partir des expressions des énergie cinétique, potentielle et de dissipation. Dans le cas des petits mouvements de systèmes élastiques, les énergies cinétique et de déformation s'expriment en formes quadratiques symétriques des vitesses et des coordonnées généralisées respectivement.

- [01] O.C.ZIENKIEWIC *The Finite Element Method*  
4<sup>e</sup> édition. Mac Graw-hill; 1989.
- [02] J.F. IMBERT *Analyse des Structures par Eléments Finis*  
3<sup>e</sup> édition. CEPAD; 1995.
- [03] G. DHATT *Une Représentation de la Méthode des Eléments Finis*  
G. TOUZOT 2<sup>e</sup> édition. Maloine. S. A; 1984.
- [04] J. L. BATOZ *Modélisation des Structure par la Méthode des Eléments Finis*  
G. DHATT Hermès; 1990.
- [05] Y. W. KWON *The Finite Element Method Using MATLAB*  
H. BANG C R C, Press; 1997.
- [06] W. T. THOMSON *Theory of Vibration With Application*  
I N C; 1981.
- [07] O. C. ZIENKIEWICZ *The Finite Element Method*  
*Formulation de Base et Problèmes Linéaires*  
4<sup>e</sup> édition Mac Grow-Hill; 1989.
- [08] R. W. CLOUTH *Dynamics of Structures*  
J. PENZIEN Mac Graw – Hill ; 1975.
- [09] BATHE *Numerical Method in Finite Element Analysis*  
WILSON
- [10] P. REBUFFET *Aérodynamique Expérimentale*  
Dunod; 1969.
- [11] R. REY *Dimensionnement des Turbomachines*  
E N S A M. Paris.
- [12] M. BOUMAHATH *Méthodes Numériques Appliquée*
- [13] P. VALLAT *Résistance des Matériaux Appliquée à l'aviation*  
L P CH. Beranger.
- [14] R. H. GALLAGHER *Introduction au Méthode des Eléments Finis*  
Prentice – Hall; 1975.
- [15] P. LOCEMTE *Mecanique du Vol*  
Dunoud. Paris, 1962.

