

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT *Automatique*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Découplage des systèmes multivariables  
linéaires invariants dans le temps  
par la méthode retour d'état.*

Proposé par :

*M<sup>r</sup> R. ILLOUL*

Etudié par :

*S. IFERSEN*

Dirigé par

*M<sup>r</sup> R. ILLOUL*

PROMOTION

*juillet 1993*

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

*Automatique*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# PROJET DE FIN D'ETUDES

## SUJET

*Découplage des systèmes multivariables  
linéaires invariants dans le temps  
par la méthode retour d'état.*

Proposé par :

*M. M. ILLLOUL*

Etudié par :

*M. IFERSEN*

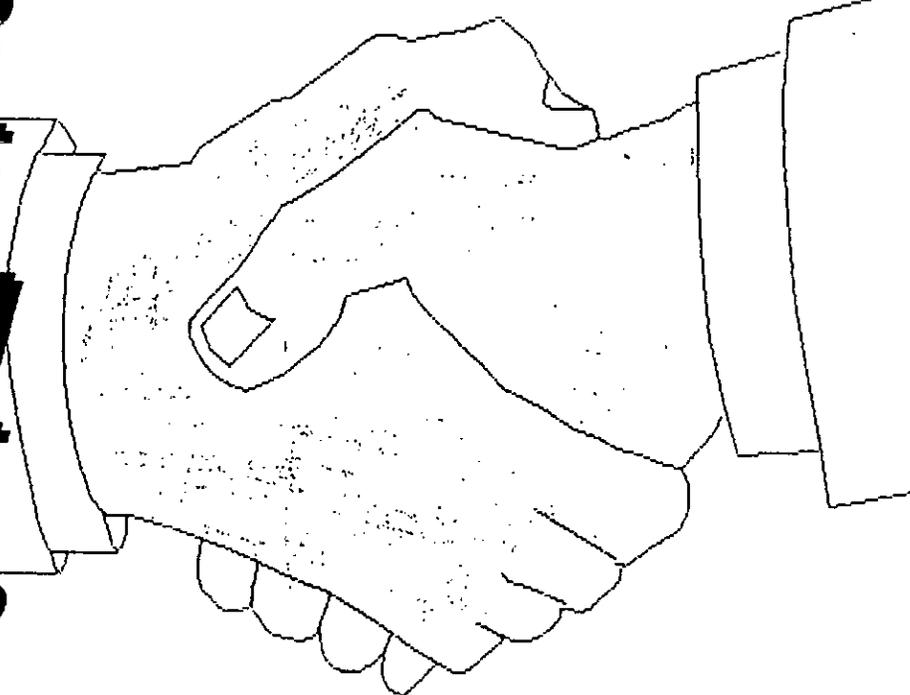
Dirigé par

*M. M. ILLLOUL*

PROMOTION

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**R  
E  
M  
E  
R  
C  
I  
E  
M  
E  
N  
T  
S**



Mes remerciements vont à toutes personnes ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

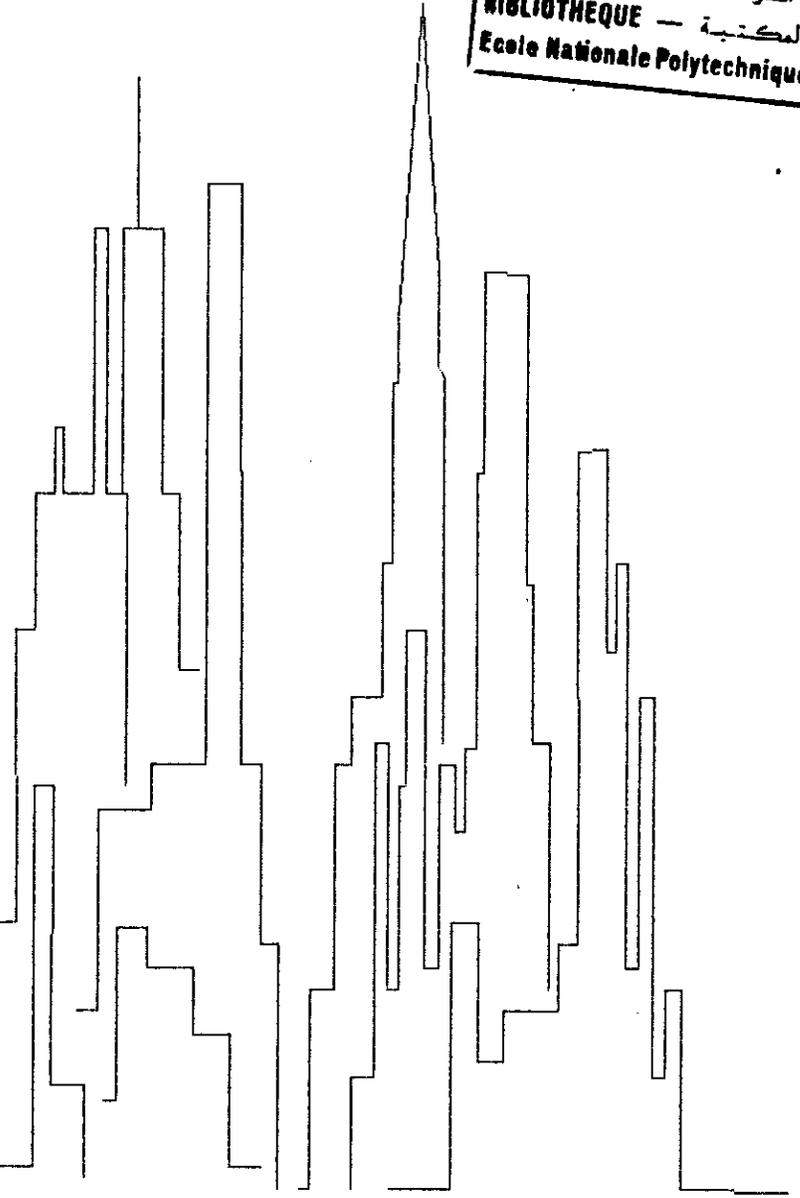
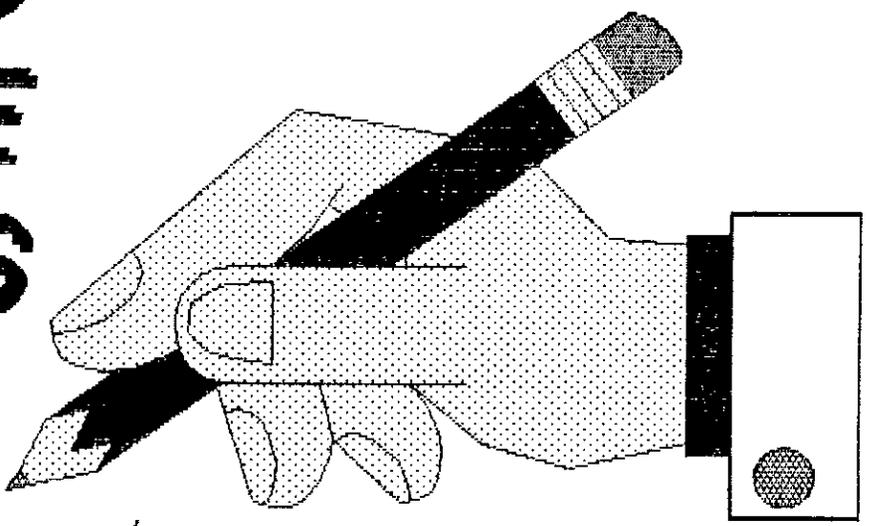
Je remercie, en particulier ILOUL en tant que promoteur; tous mes remerciements vont aussi, à Messieurs les membres du jury qui ont accepté de siéger dans ce jury.

J'associe, dans une même pensée reconnaissante mes remerciements à :

HOCINE, YUCEF, MUSTAPHA, MOURAD, DJAMEL, HAKIM et à toute la promotion, d'automatique et d'électrotechnique ainsi qu'à tous ceux avec qui j'ai pu établir des relations d'amitié durant mes trois années d'étude à l'E.N.P.

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**D  
E  
D  
I  
C  
A  
C  
E  
S**



**DEDICACES**

*Je dédie ce travail à :*

Mon défunt père,

Ma mère,

Mon frère Salim,

Mes soeurs,

Mon neveu HANAFI,

Mon oncle AHMED,

Mes amis,

### Spécification des notations

- A : Matrice d'évolution du système.
- B : Matrice d'application de la commande du système.
- C : Matrice d'observation du système en temps continue.
- E : Matrice des zéros de transmission à l'infinie.
- F : Matrice de contre réaction d'état.
- G : Matrice gain complexe.
- H : Matrice de contre réaction de sortie.
- K : Matrice d'observabilité.
- R : Sous matrice de  $P(s)$  concernant l'observabilité.
- S : Opérateur de LAPLACE.
- V : Vecteur consigne.
- X : Vecteur d'état.
- Z : Opérateur indiquant la variable associée au zéro.
- $U_i$  : Composante du vecteur de commande.
- $Y_i$  : Composante du vecteur de sortie.
- $d_i$  : Degré relatif associé à la sortie.
- : Classe de toute les matrices de contre réaction.
- $T_z$  : zéro de transmission.
- $H_c(s)$  : Matrice de transfert du précompensateur bicausale.
- $P(s)$  : Matrice de ROSENBROK.
- $Z_{odij}$  : Le  $i^{ème}$  zéro de découplage sortie associé à la  $j^{ème}$  sortie.
- $e_i(S)$  : Les mômomes des zéros de transmission.
- $p_j(S)$  : Les mômomes des pôles de transmission.
- L : Matrice hypothese pour aborder le découplage.
- $Q_1(s)$  : Matrice condition réalisant le découplage utilisant

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# GENERALITES

## INTRODUCTION

C'est au début des années cinquantes que messieurs Boksenbon A.S, R.Hood et Tsien H.S introduisirent la méthode de l'analyse matricielle dans la commande des systèmes à multivariables et proposèrent l'idée de commande non-interactive.

Dès lors, on note une activité toujours croissante dans ce domaine et plusieurs techniques ont été développées dans ce sens.

Bien que plusieurs articles ont été publiés dans différentes revues pendant les vingt dernières années, aucun livre n'a paru pour décrire de manière systématique le découplage des systèmes multivariables et éclaircir certaines questions que les lecteurs se posent:

- Quels systèmes peut-on utiliser pour réaliser le découplage ?
- Quels sont les avantages et les inconvénients de chaque méthode ?
- Quelle est la meilleure méthode ?
- etc.

On distingue plusieurs méthodes qui peuvent être utilisées pour résoudre ce problème de découplage des systèmes multivariables.

1) Méthode de la matrice diagonale proposée et développée par Boxen Bon et Hood.

2) Méthode de gain relatif proposée et développée par Bistol et Shinsky.

3) Méthode du domaine fréquentiel.

4) Méthode des variables d'état.

Il existe probablement d'autres méthodes [1].

Plus récemment sous l'impulsion de Morgan puis de Falb et Wolovich, le problème de la commande non interactive a été abordé sur la base de la représentation d'état [2].

Cette théorie moderne est un outil mathématique puissant qui permet de décrire entièrement le comportement d'un système linéaire car cette théorie se prête bien au traitement des systèmes continus et échantillonnés (par la transformée de Z ). Le développement de cette technique a donné un essor considérable à la commande des systèmes multivariable, ce qui fait l'objet d'application de cette théorie par plusieurs théoriciens.

## PRESENTATION DU MEMOIRE

L'idée génératrice de ce mémoire est de présenter la méthode de retour d'état qui permet de mettre en évidence le découplage des systèmes multivariable linéaires invariants dans le temps.

Ce mémoire contient quatre chapitres :

le premier chapitre sert d'introduction générale pour le découplage par retour d'état .On donnera une définition générale où l'on va illustrer quelques avantages de cette approche et de ses domaines d'application .Alors on va présenter deux techniques différentes qui nous permettront de réaliser le découplage :

- soit en utilisant la commande par retour d'état .
- soit en utilisant le précompensateur bicausale .

Le second chapitre sert d'introduction pour la commande par découplage , où on établira la commande adéquate pour résoudre ce problème , la structure de commande par retour d'état et la structure du précompensateur bicausale .

Le chapitre trois est la partie essentielle du mémoire où tous les algorithmes sont établis :

- degré relatif ,

- condition nécessaire et suffisante pour le découplage
- sans placement de pôles , avec placement de pôles par retour d'état et par retour de sortie ,
- observabilité du système découplé .

Au quatrième chapitre , nous essayerons de valider les algorithmes qui font l'objet d'une programmation en MATLAB sur quelques applications à caractère mathématique abstraites et d'autres applications concrètes (chaudières) que nous présenterons pour éclaircir certains critères ou certaines difficultés rencontrées en pratique.

A la fin de ce mémoire, nous tirerons quelques conclusions générales sur la commande par retour d'état et ses applications. Nous donnerons ensuite les perspectives de cette étude.

# S O M M A I R E

## Chapitre I

I.1/	Introduction .....	02
I.2/	Quelques aspects du découplage par retour d'état .....	04
I.3/	Commande par découplage par contre réaction d'état .....	05
I.4/	Conclusion .....	07

## Chapitre II

II.1/	Introduction .....	09
II.2/	Représentation du processus .....	09
II.3/	Loi de commande .....	10
II.4/	Précompensateur bicausale .....	11
II.5/	Conclusion .....	13

## Chapitre III

III.1/	Introduction .....	15
III.2/	Degré relatif .....	15
III.3/	Condition nécessaire et suffisante pour découplage .....	16
3.1/	En utilisant le précompensateur bicausale .....	16
3.2/	En utilisant la commande par retour d'état .....	19
III.4/	Par retour de sortie .....	23
III.5/	Observabilité .....	24
III.6/	Zéros de découplage sortie .....	25
III.7/	Zéros de transmission .....	26
III.8/	Conclusion .....	28

## Chapitre IV

APPLICATIONS .....	30
Conclusion et Perspective .....	55
Bibliographie .....	58

## Chapitre I

# **INTRODUCTION**

I/ 1)- INTRODUCTION :

*Les systèmes multivariables sont constitués de plusieurs entrées et de plusieurs sorties , et présentent des phénomènes de couplage. C'est à dire dans l'application d'un signal sur une entrée entraine en général une variation de plusieurs ou de toutes les sorties du système.*

*Les premières études sur la commande de ces systèmes débutèrent vers 1960 essentiellement , alors pour les besoins de l'industrie aérospatiale .Depuis , l'intérêt qui leur est apporté n'a cessé de s'affirmer avec la complexité croissante des systèmes à analyser et à commander et avec l'augmentation des performances exigées [3].*

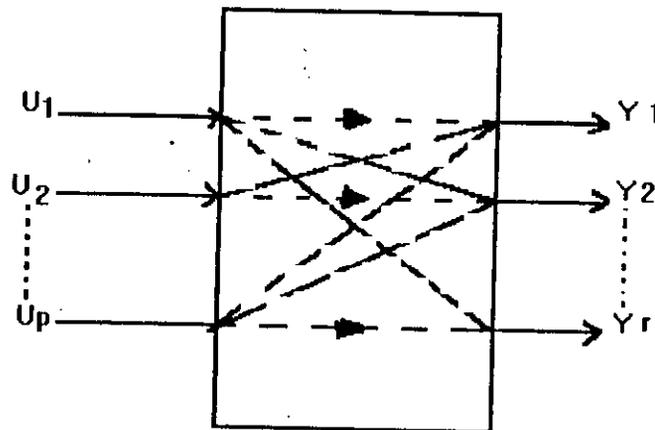


FIGURE II.1 : Structure d'un système multivariable avec interaction.

*Vu les contraintes que présente un système multivariable :*

- *Qualité de réglage voulu .*
- *La complexité des circuits de réglage .*
- *La difficulté théorique et complexité du correcteur .*

*Plusieurs théoriciens ont voulu trouver une technique qui permettra de supprimer les interactions entre les entrées et les sorties et ainsi de réaliser un compensateur de façon à avoir a chaque entrée du système ne commande qu'une seule sortie alors le système pluridimensionnel se transforme en un système obtenu est dit découplé*

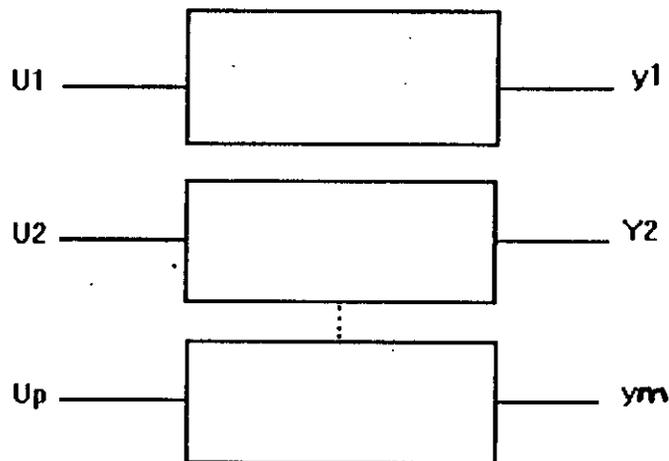


figure I.2 Structure D'un système sans interaction

L'objet de notre travail est le découplage par retour d'état des systèmes dynamiques linéaires et invariants dans le temps.

## I/ 2)- QUELQUES ASPECTS DU DECOUPLAGE PAR RETOUR D'ETAT :

C'est au environ des années 60 que c'est développée la théorie du découplage par contre réaction d'état , cependant elle a fait l'objet de plusieurs applications dans le domaine industriel .

Et cela grâce aux avantages que peut offrir cette technique :

- Stabilité si les pôles ont été correctement choisis .
- Réduction des perturbations externes de la réponse du système en B.F .
- Amélioration de la dynamique du système .

Cependant les avantages de cette technique sont mis en évidence en la comparant à une autre méthode qui réalise le découplage des systèmes multivariables .

On prend l'exemple de la méthode utilisant les compensateurs de découplage ; elle consiste à mettre des compensateurs entre chaque entrée et toutes les sorties du système . Et aussi des

compensateurs entre chaque sortie et toutes les entrées [8] cela est facile de point de vue théorique mais présente les contraintes suivantes :

- Difficulté de calculer le degrés relatif associe à chaque sortie (dimensionnement des compensateurs)
- Choix de la commande qui influe le plus sur une sortie .

Et ainsi la technique du découplage utilisant le retour d'état a été l'objet de plusieurs applications , on peut citer:

- Robots manipulateurs .
- Chaudières .
- engins aérospatiales.

Cette approche a produit des résultats performants de point de vue pratique.

### 1/ 3)- COMMANDE PAR DECOUPLAGE PAR CONTRE REACTION D'ETAT :

PAR DEFINITION :

Un système multivariable est dit découplé si et seulement si sa matrice fonction de transfert est diagonale et non singulière [9].

La commande par découplage qu'on va étudier utilise la technique du retour d'état qui est théorie moderne introduisant un régulateur robuste et performant .

La contre réaction d'état réduit l'effet des perturbations agissant sur les variables à régler , et on a aussi le choix de la dynamique du système en B.F .

Le problème du découplage peut être résolu de deux façons différentes :

-1- Soit en injectant une commande de contre réaction spéciale

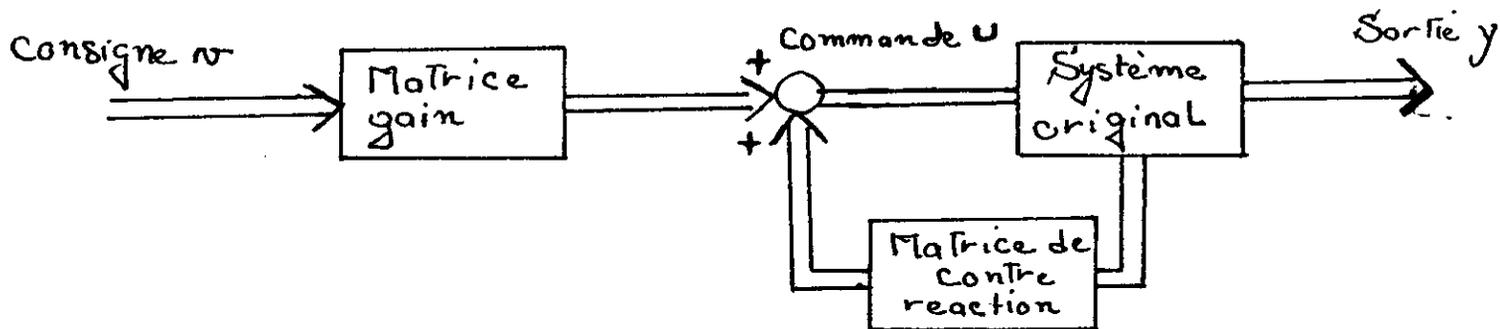


FIGURE I-3 : structure de base utilisant la commande par retour d'état .

-2- Soit en utilisant un compensateur en série avec le système original .

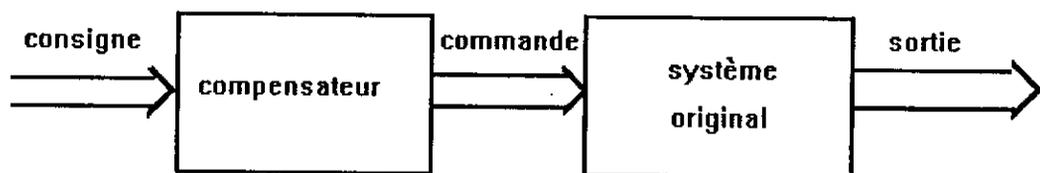


FIGURE I-4 : structure de base du système découplé utilisant le compensateur .

#### I/ 4- CONCLUSION :

Dans cette partie on a discute d'une manière succincte les contraintes que présente un système multivariable , puis on a pose le problème du découplage de ces systèmes qui peut être résolu en utilisant la technique de la contre réaction d'état qu'on a cite ces avantages et ces quelques domaines d'applications . Ensuite on a parle brièvement de l'objectif, qu'il faut réaliser pour que le découplage soit fait. Ce chapitre sert d'introduction sur tout ce qui suit .

## Chapitre II

# **PRINCIPE DE LA METHODE DE DECOUPLAGE PAR CONTRE REACTION D'ETAT**

## II/ 1)- INTRODUCTION :

Le réglage d'état est une technique moderne qui donne de biens meilleurs résultats que le réglage classique et cela réside dans le choix du comportement du système en B.F .

Dans ce chapitre on va établir des notions de base pour un système à régler , la représentation du système sous la forme d'état , la loi de commande , structure de precompensateur bicausale .

Le but principal de notre approche du découplage inclut l'utilisation de la contre réaction d'état pour nous donner une bonne stabilité du système en B.F.

On peut se rappeler qu'avant d'appliquer le retour d'état il faut que notre système soit commandable et observable ou bien ses sorties soient au moins mesurables ou détectables ( c'est à dire que les pôles non commandables ou non observables soient stables ) .

On peut obtenir l'information de commandabilité et d'observabilité a l'aide d'algorithmes adéquats .

## II/ 2)- REPRESENTATION DU PROCESSUS :

Avant toute procédure , la modélisation est l'étape importante en vue de la commande d'un système , elle consiste a décrire mathématiquement le système , cette description nécessite des connaissances ; des bases théoriques de l'électricité , de la mécanique , d'hydraulique .....etc, tout dépend du système qu'on veut commander ou dans notre cas découpler .

Ensuite établir ces équations et les mettre sous la forme différentielle:

$$Y'' + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_n U'' + \dots + b_1 U' + b_0 U + v \quad (2.1)$$

Afin de faire apparaître toutes les dynamiques du système .

Ensuite on appliquera aux équations différentielles trouvées la technique de la représentation sous la forme d'état .

$$\dot{X} = AX + BU \quad ( 2.2 )$$

$$Y = CX$$

En vue de faciliter la manipulation des équations .

### II/ 3)- LA LOI DE COMMANDE :

L'objectif de la commande est de trouver le retour d'état qui nous permet d'obtenir le découplage d'un système caractérisé par les équations d'état ( 2.2 ).

Cet objectif consiste à la réalisation d'une combinaison linéaire de contre réaction d'état et de consigne .

La commande choisit :

$$U = FX + Gv \quad ( 2.3 )$$

En substituant ( 2.3 ) dans ( 2.2 )

$$\text{on aura alors : } \dot{x} = ( A + BF ) x + BG v \quad ( 2.4 )$$

$$Y = cx$$

d'après un théorème fondamental , la commandabilité du système original ( 2.2 ) est la même que celle du système obtenu ( 2.4)

### ENONCE DU THEOREME :

La commandabilité de sous espace  $\{ A , B , C \}$  est la même que celle du sous espace  $\{ A + BF , BG , C \}$  avec  $F$  et  $G$  non singulières [ 4 ] Le système ( 2.4 ) est appelé système en BF. Structure du système en BF [ 4 ]

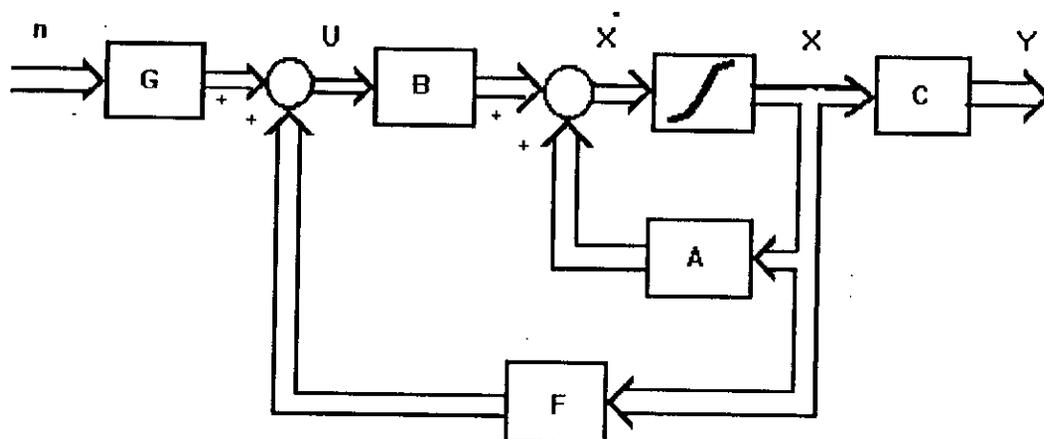


FIGURE II-1 : commande d'un système par retour d'état .

### II/ 4)- PRECOMPENSATEUR BICAUSALE :

Le but du découplage par retour d'état consiste à trouver le bouclage qui nous permettra de diagonaliser la matrice fonction de transfert ce qui revient à trouver la commande (2.3) c'est à dire déterminer les matrices  $F$  et  $G$  qui réalise ça .

en abordant le problème séparément c'est à dire sans toucher à la structure du système original , cela revient à trouver un precompensateur bicausale place en série avec le système original et qui permettra de résoudre le problème du découplage et qui peut se traduire par une relation entre la matrice fonction de transfert  $H_{v_0}(S)$  du système en B.F avec celle en B.O  $H(S)$ .

$$H(S) = C (SI - A)^{-1} B \quad (2.5)$$

avec ( 2.3 ) nous arrivons à la matrice fonction de transfert suivante :

$$\begin{aligned} H_{sc}(S) &= C (SI - A - BF)^{-1} BG \quad (2.6) \\ &= C (SI - A)^{-1} [(SI - A - BF) + BF] (SI - A - BF)^{-1} BG \\ &= C(SI-A)^{-1} BG + C(SI-A)^{-1} B[F(SI-A-BF)^{-1}B]G \\ &= H(S)[I+F(SI-A-BF)^{-1} B] G \end{aligned}$$

On voit que la matrice fonction de transfert du système découplé ,  $H_{sc}(S)$  est équivalent à la matrice de transfert du système non découplé multiplié par un precompensateur série. Cette interprétation du découplage est souvent plus facile à implémenter car on a besoin uniquement d'introduire un precompensateur en série et non de mesurer tous les états

#### LA MATRICE FONCTION DE TRANSFERT

$$H_c(S) = [ I + F (SI - A - BF)^{-1} B ] \quad (2.7)$$

Qui peut être représenté par les équations d'état :

$$\dot{X}_c = (A + BF) X_c + BG v \quad (2.8)$$

$$Y_c = FX_c + G v$$

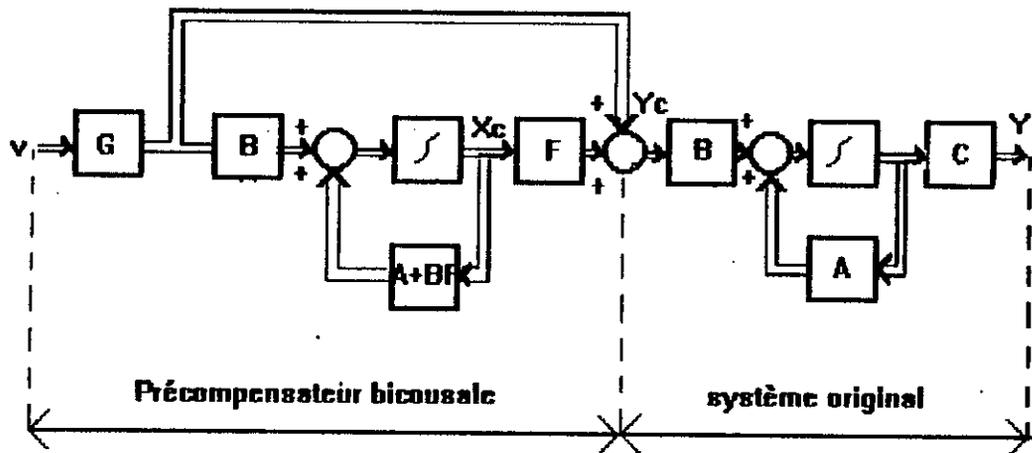


FIGURE II/ 2 : commande par compensateur bicausale

II/ 5)- CONCLUSION :

Dans ce chapitre on a établi les étapes essentielles pour pouvoir commander un système et qui est la modélisation et la représentation sous la forme d'état d'un système .

Ensuite on a mis quelques éclaircissement sur l'idée de base établi dans le chapitre precedent ; on a spécifié la commande adéquate du retour d'état qui réalise le découplage , et ainsi on a présente la structure de commande par contre réaction d'état puis la structure de commande utilisant le precompensateur bicausal .

## Chapitre III

# **DEVELOPPEMENT DE LA METHODE DE DECOUPLAGE PAR CONTRE REACTION**

### III / 1)- INTRODUCTION :

Comme toute méthode , le découplage par retour d'état présente certaines contraintes c'est a dire qu'il faut une forme spéciale des matrices d'état . A , B , C et ainsi que G et F ; matrices introduites par la commande afin que cette méthode aboutisse à un résultat . Tout ça peut se traduire par des conditions nécessaires et suffisantes pour que le découplage par contre réaction d'état soit réalisable .

Dans ce chapitre , on étudiera la notion des zéros de transmission , l'observabilité d'un système découplé et ainsi que l'utilité de déterminer les zéros de découplage sortie.

### III / 2)- DEGRE RELATIF:

Le degrés relatif  $d_i$  est défini comme étant la plus petite différence entre ( le degré du dénominateur et celui du numérateur de chaque élément de  $i^{ème}$  ligne de la matrice fonction de transfert du système ) ôté de 1, le degré relatif est toujours positif [7].

Suivant la représentation d'état on peut définir le degré relatif  $d_i$  comme suit :

$$d_i = \min \begin{cases} j / C_i A^j B \neq 0 \text{ pour } j=0,1,2,\dots,n-1 \\ n-1 \text{ si } C_i A, B = 0 \text{ pour tous } j \end{cases} \quad (3.1)$$

### III-3 CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES POUR DECOUPLAGE

La première condition pour qu'un système soit découplable par contre réaction d'état est que le système soit carré ( c'est à dire que le nombre d'entrée du système égalant le nombre de sortie).

Mais cela ne cause pas un vrai problème; Dans le cas ou le système n'est pas carré ie, si le nombre d'entrées est supérieur au nombre de sorties on se permet d'ajouter des sorties fictives ou bien des sorties qui sont en combinaison linéaire avec les autres sorties jusqu'à atteindre le nombre d'entrée. Dans le cas contraire; nombre de sortie supérieur au nombre d'entrée, on procédera de la même manière.

#### III-3-1 EN UTILISANT LE PRECOMPENSATEUR BICAUSALE :

La condition nécessaire peut être donnée par un théorème fondamental du découplage des systèmes multivariables linéaires invariants dans le temps.

##### Théorème :

Il existe une commande de la forme  $U = FX + GV$  qui découple le système

$$X = AX + BU$$

$$Y = CX$$

Si et seulement si la matrice :

$$E = \begin{bmatrix} C_1 A^{n_1} B \\ C_2 A^{n_2} B \\ \vdots \\ C_n A^{n_n} B \end{bmatrix}$$

est non singulière ( $\det E \neq 0$ ).

Après démonstration du théorème (Voir Annexe) on trouve :

- La condition nécessaire pour que le découplage par retour d'état est réalisable :  $G = E^{-1}$ . (3.2)

Ceci est obtenue après identification avec la première forme de la matrice de la fonction de transfert du précompensateur bicosale.

- La suffisance est donnée par :  $F = -GL = -E^{-1}L$ . (3.3)

Ce résultat est mis en évidence en utilisant la seconde forme du précompensateur.

#### AVEC PLACEMENT DE PÔLE

Le but est de trouver les matrices F et G de sorte qu'on peut assigner des pôles au système découplé.

ENONCE DU THEOREME [4] :

Quand le système (2.2) pourra être découplé par contre-réaction d'état et F et G sont déterminées pour.

$$G = E^{-1}$$

$$(-GF)^{-1}_{i,j} = C_i A^{d_{i+1}+1} + f_{1,i} C_i A^{d_{i+1}} + f_{2,i} C_i A^{d_{i+1}-1} + \dots + f_{i,i} C_i \quad (3.4)$$

Où  $(-GF)^{-1}_{i,j}$  est la  $i^{ème}$  ligne du vecteur  $(-GF)^{-1}$

La matrice fonction de transfert obtenue est :

$$H_{r_g}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{S^{d_{1+1}} + f_{1,1} S^{d_{1+1}} + \dots + f_{1,d_{1+1}}} & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & \frac{1}{S^{d_{m+1}} + f_{m,1} S^{d_{m+1}} + \dots + f_{m,m}} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Démonstration [4] :

Soit la matrice fonction de transfert en B.D :

$$H(s) = C(SI-A)^{-1}B.$$

D'où  $h(s)_i = C_i (SI-A)^{-1} B$

(La  $i^{ème}$  ligne de cette matrice fonction de transfert)

On rappelle le développement limité au voisinage du zéro:

$$(SI-A)^{-1} = S^{-1} + AS^{-2} + A^2S^{-3} + A^3S^{-4} + \dots$$

D'où  $h(s)_i = C_i (SI-A)^{-1} B = C_i BS^{-1} + C_i ABS^{-2} + \dots$

On multiplie de part et d'autre par  $(S^{d_1+1} + f_{1,1}S^{d_1} + \dots + f_{1,m})$

On aura :

$$(S^{d_1+1} + f_{1,1}S^{d_1} + \dots + f_{1,m})h(s)_i = C_i A^{d_1} B + (C_i A^{d_1+1} + f_{1,1} C_i A^{d_1} + \dots + f_{1,m} C_i) BS^{-1} + \dots + (C_i A^{d_1+1} + f_{1,1} C_i A^{d_1} + \dots + f_{1,m} C_i) BS^{-d_1} + \dots$$

On rappelle que  $C_i A^k B = 0$  ;  $k = 0, 1, 2, \dots, d_i-1$

$$= CA^{d_1+1} B + (CA^{d_1+1} + f_{1,1} C_i A^{d_1} + \dots + f_{1,m} C_i) (SI-A)^{-1} B$$

On pose :

$$L_i = (C_i A^{d_1+1} + f_{1,1} C_i A^{d_1} + \dots + f_{1,m} C_i)$$

On passe à la représentation matricielle :

$$L = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1+1} + \sum_{j=0}^{d_1} f_{j,1} C_1 A^j & & \\ \vdots & & \\ C_m A^{d_m+1} + \sum_{j=0}^{d_m} f_{j,m} C_m A^j & & \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

On divise des deux côtés par  $(S^{d_1+1} + f_{1,1}S^{d_1} + \dots + f_{1,m}C_1)$

et on passe à la forme matricielle on aura :

$$H(s) = \text{diag}[(S^{d_1+1} + f_{1,1}S^{d_1} + \dots + f_{1,m})^{-1}, \\ (S^{d_2+1} + f_{2,1}S^{d_2} + \dots + f_{2,m})^{-1}, \\ \dots, (S^{d_m+1} + f_{m,1}S^{d_m} + \dots + f_{m,m})^{-1}] \times \\ [E + L(SI-A)^{-1}B]. \quad (3.7)$$

Or :

$$H_{r_g}(s) = H(s)[G^{-1} - G^{-1}F(SI-A)^{-1}B]^{-1}$$

Alors  $Hfg(s) = \text{diag}[(S^{d_1+1} + f_{1,1}S^{d_1} + \dots + f_{1,m})^{-1},$

$$(S^{d_2+1} + f_{2,1}S^{d_2} + \dots + f_{2,m})^{-1},$$

$$\dots, (S^{d_m+1} + f_{m,1}S^{d_m} + \dots + f_{m,m})^{-1}] \times$$

$$[E + L(SI-A)^{-1}A]G^{-1} - G^{-1}F(SI-A)^{-1}B \quad (3.8)$$

Alors  $E = G^{-1} \implies G = E^{-1}$

ET  $L = -G^{-1} \implies F = -GL = -E^{-1}L$

### III-3-2 EN UTILISANT LA COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT :

- Sans placement de pôles :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que le découplage soit réalisable par contre réaction d'état est mise en évidence par le théorème fondamental suivant :

Soit E une matrice  $m \times m$  donnée par :

$$E = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} B \\ C_2 A^{d_2} B \\ \vdots \\ C_m A^{d_m} B \end{bmatrix}$$

Il existe une paire de matrices F et G qui découple le système (2.2) si et seulement si E est non-singulière ( $\det E \neq 0$ ).

Avec :  $G = E^{-1}$

$F = -E^{-1}L$

Où :

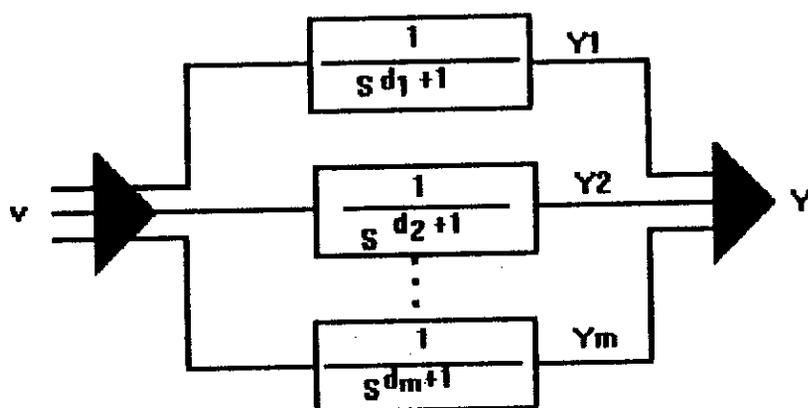
$$L = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1+1} \\ C_2 A^{d_2+1} \\ \vdots \\ C_m A^{d_m+1} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

**Remarque :**

La méthode utilisant le précompensateur bicausale est la plus aisée pour la démonstration des conditions nécessaires.

La matrice de transfert en B.F. obtenue en utilisant ces deux méthodes est diagonale et non-singulière et a la forme suivante :

$$H_{rg}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{d_1+1}} & & & 0 \\ & \frac{1}{s^{d_2+1}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{s^{d_m+1}} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$



**Figure III.1 : Structure d'un système découplé sans assignation des pôles**

## CARACTERISTIQUES :

- Le système découplé n'est donc pas seulement caractérisé par le découplage sortie/entrée; chaque sortie est de plus la  $(d^i+1)$ ième intégrale de l'entrée correspondante comme le montre la figure III.1 [2].

-Ce système est instable pour les systèmes linéaires et échantillonnés, cependant il n'est pas intéressant de point de vue pratique.

- Avec placement de pôles :

Le retour d'état c'est l'état du système qui est réinjecté à la consigne à travers une matrice de contre-réaction  $F$ . La procédure pour la détermination de la classe  $\Phi$  qui engendre toutes les matrices de  $F$  qui découplent le système (2.2) est donnée par le théorème suivant :

### ENONCE DU THEOREME [5] :

Si la paire  $(F,G)$  découple le système (2.2) alors le rang de la matrice  $Q_i(F)$  est égal à 1 pour tout  $i$  réciproquement si le rang de  $Q_i(F)$  est égal à 1 pour tout  $i$  et si  $E$  est non singulière alors la paire  $(F,E^{-1})$  découple le système (2,2). Où  $Q_i(F)$  est définie comme étant une matrice  $n \times m$  donnée par :

$$Q_i(F) = \begin{bmatrix} C_1 (A + BF)^{n-1} B \\ C_1 (A + BF)^{n-2} B \\ \vdots \\ C_1 (A + BF)^{d+1} B \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Cependant l'application directe de cette condition pour tout  $i$ , résulte seulement de la contrainte était le placement de certains des  $m \times n$  paramètres de  $F$ . Ce qui est exigé dans ce cas ; une procédure pour la spécification des pôles du système en B.F. Tant que le découplage du système utilise une matrice appropriée  $F$ .

$$F = -E^{-1} \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1+1} + \sum_{j=0}^{d_1} f_{j(1)} C_1 A^j \\ \vdots \\ C_m A^{d_m+1} + \sum_{j=0}^{d_m} f_{j(m)} C_m A^j \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

La matrice de transfert obtenue en B.F en utilisant la matrice  $F$ .

$$H_{rd}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{d_1+1} + f_{11}s^{d_1} + \dots + f_{1d_1+1}} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{s^{d_m+1} + f_{m1}s^{d_m} + \dots + f_{mm}} \end{bmatrix}$$

## REMARQUE:

Cette configuration est très intéressante du point de vue pratique, elle nous permet d'obtenir une bonne stabilité du système en B.F. dans le cas d'un bon choix des pôles et ainsi de choisir une dynamique adéquate du système en B.F.

### III .4.2 PAR RETOUR DE SORTIR:

Le retour de sortie est que la sortie du système est réinjectée à la consigne. Le retour de sortie est un cas particulier du retour d'état et on manipule moins de degré de liberté par rapport à ce dernier; Cela peut être expliciter en choisissant la commande suivante:

$$U_s = Hy + Gv$$

$$Y = CX \quad (3.15)$$

d'où

$$U = HCX + Gv$$

En remplaçant HC par F, on sera exactement sur les mêmes conditions qui réalisent le découplage par retour de sortie

$$HC = F \quad (3.16)$$

Où H est la matrice de retour de sortie.

Pour retrouver la forme du retour d'état en utilisant un retour de sortie, en multipliant de part et d'autre  $C^T$ , la matrice H est déduite de la manière suivante :

$$HC C^T = F C^T \implies H = F C^T (C C^T)^{-1} \quad (3.17)$$

$$H = E^{-1} \times \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1+1} + \sum_{j=0}^{d_1} f_{j(1)} C_1 A^j \\ \vdots \\ C_m A^{d_m+1} + \sum_{j=0}^{d_m} f_{j(m)} C_m A^j \end{bmatrix} \times C^T (C C^T)^{-1}$$

Dans un retour de sortie, il n'est pas possible d'assigner tous les pôles du système en B.F comme dans le cas d'un retour d'état (Dimension de F est supérieure à la dimension de H). Cependant, ce retour n'est pas souvent adéquat pour stabiliser le système, alors que la contre réaction d'état fournit de plus un plus haut degré de flexibilité (souplesse) [5].

#### Remarque

Dans le cas du retour d'état :  
le numérateur de la matrice de transfert  $H_{r_0}(s)$  en B.F est égal à un (1) et le dénominateur de chaque élément de celle-ci est de degré inférieur ou égal à n.

cela s'explique par une annulation de pôle par zéros appelé zéros de découplage.

### III.5 OBSERVABILITE

D'après la définition de GILLE [10], un système est observable à l'instant  $t_0$ , si de l'observation de sa sortie Y en  $[t_0, t_0+T]$  on peut déduire l'état du système à l'instant initial  $t_0$  et remonter de sa sortie à l'état initial.

Si l'observation de la sortie en  $[t_0, t_0+T]$ , il n'est possible de déduire qu'une partie de l'état du système à  $t_0$ , on dira que le système est inobservable.

Le critère d'observabilité d'un système découplé par retour d'état est donné par le théorème suivant:

Le système (2.2) est complètement observable si et seulement si la matrice K est de rang n :

$$K = \begin{bmatrix} C \\ C(A+BF) \\ \vdots \\ C(A+BF)^{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Or le rang de  $[K]$  est  $m + \sum_{i=1}^m d_i$ , pour la démonstration, voir [7]. Si  $m + \sum_{i=1}^m d_i = n$  le système est complètement observable, dans le cas contraire, il existe une classe de matrices de contre-réaction qui rend le système découplé inobservable, alors qu'il n'existe aucune matrice pouvant le rendre observable.

Il est bien meilleur dans ce cas de mettre en évidence les zéros de découplage de sortie.

### III.6 ZEROS DECOUPLAGE SORTIE

Les zéros découplage sortie reflètent sur l'observabilité du système découplé, car ils dépendent des zéros de transmission et annulent les pôles du système découplé à la sortie.

Ce pendant si les zéros de transmission n'existent pas, le système découplé est observable, dans le cas contraire le système est inobservable ce qui est une conséquence directe de III.6.

Dans un système carré les zéros de transmission font partie des zéros de découplage sortie [8].

On peut retrouver la fonction de transfert de chaque sortie en calculant le rapport :

#### Zéros de découplage sortie

#### Polynôme caractéristique du système

Les zéros de découplage de sortie sont déterminés à partir de la forme de ROSENBROK :

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Pour les zéros de découplage sortie on s'intéresse à la matrice C.

$$R = \begin{bmatrix} zI - A \\ C \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Où A est la matrice diagonale des valeurs propres du système, et z un opérateur.

Les zéros de découplage sortie sont définis comme les zéros qui chutent le rang de la matrice R.

### III.7 ZEROS DE TRANSMISSION

Les zéros de transmission d'un système sont les zéros qui chutent le rang de la matrice de transfert en B.F, ou plus précisément le degré de chaque élément de cette matrice. Il est important de déterminer ces zéros qui jouent un rôle important sur l'observabilité et la stabilité d'un système.

Pour pouvoir déterminer ces zéros de transmission, il faut déterminer la forme de SMITH MC MILLAN [8] et [9].

$$S_m(s) = \begin{bmatrix} \text{dia} [e_1(s)/p_1(s), \dots, e_m(s)/p_m(s)] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Où les zéros de transmission sont définis :

$$Z(s) = \prod_1^m e_j(s) \quad (3.22)$$

et les  $e_1(s)$  divisent tous les  $e_{1+j}(s)$  avec  $j=1, \dots, m$ .

Avec : 
$$e_i = \frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)}$$

Où

$D_i(s)$  : Le plus grand diviseur commun de tous les déterminants des mineurs d'ordre  $i$ .

$D_{i-1}(s)$  : Le plus grand diviseur commun de tous les déterminants des mineurs d'ordre  $i-1$ .

### III.B CONCLUSION

Dans ce chapitre, les algorithmes permettant de réaliser le découplage d'un système ont été réalisés.

En premier lieu, nous avons introduit la notion de degré relatif de chaque sortie, les conditions nécessaires et suffisantes qui réalisent le découplage par contre réaction d'état ainsi que la forme de la matrice de transfert obtenue. Nous avons aussi discuté des avantages que présentent la forme avec placement de pôle par rapport à la forme sans placement. Aussi, la classe des matrices de contre réaction qui découple le système a été déterminée.

La procédure de synthèse a été réalisée, permettant d'obtenir la configuration désirée des pôles en B.F pour retour de sortie et retour d'état.

L'algorithme permettant la détermination des zéros de transmission a été établi.

Les critères d'observabilité ont été discutés dans cette partie avec détermination des zéros de découplage sortie.

## Chapitre IV

# **APPLICATIONS**

## IV.1. introduction

Nous avons établi au chapitre précédent les algorithmes du découplage par contre réaction d'état ; le premier algorithme consistait à déterminer le degré relatif associé à chaque sortie et ainsi déterminer les matrices gain consigne et de contre réaction à partir d'autres matrices choisies au départ ensuite déterminer de pôles ; par retour d'état et par retour de sortie . La stabilité et l'observabilité du système decouplé ont été étudiées . Dans ce chapitre nous présenteront quelques applications qui se résument par des modèles mathématiques et système de chaudière pour les quels nous donneront par la suite des essais dans ce but nous avons à développer tous les algorithmes en MATLAB qui présente une assez bonne rapidité avec un coprocesseur mathématique, afin de simuler par la suite la réponse du système decouplé.

## IV.2 REPRESENTATION DU PREMIER PROCEDE

Ce système est un modèle mathématique pour permettre d'éclaircir la théorie du découplage.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(Voir figure IV.2)

Degré relatif

$$d_1 = 0 \quad d_2 = 0$$

#### IV.2.1 PAR RETOUR D'ETAT :

\* Sans placement de pôles :

$$G=E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad F=-E^{-1}L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Où  $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  et  $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Les pôles du système en B.F sont :

$$s=0; \quad s=0; \quad s=2.$$

Stabilité :

Ce système possède deux pôles à la limite de stabilité et un pôle instable ( $s=2$ ), donc il est instable.

Observabilité :

On a :

$$m + \sum_{i=1}^m d_i = 2 + 0 + 0 = 2 < N = 3$$

Alors ce système est instable.

Zéros de découplage sortie

- Associés à la première sortie :

$$Z_{0d,1} = 0$$

$$Z_{0d,2} = 2$$

- Associés à la deuxième sortie :

$$Z_{0d,1} = 0$$

$$Z_{0d,2} = 2$$

Zéros de transmission

$$Tz = 2$$

Remarque :

Il y a présence d'un zéro de transmission instable ( $S=2$ )  
alors notre système est instable et inobservable.

La forme du précompensateur correspondante :

$$H_c(s) = \begin{bmatrix} \frac{2S^3 - 4S^2 + 3S}{S^3 - 2S^2} & \frac{-S^2 + 2S}{S^3 - 2S^2} \\ \frac{-2S^3 + 2S^2 + S}{S^3 - 2S^2} & \frac{2S^3 - 6S^2 + 4S}{S^3 - 2S^2} \end{bmatrix}$$

\* Avec placement de pôles :

Les pôles choisis sont :

$$S = -1 ; S = -2 ; S = 2.$$

La matrice de contre réaction d'état qui correspond :

$$F = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Les pôles du système en B.F :

$$S = -1 ; S = -2 ; S = 2.$$

Stabilité :

Le système dispose toujours d'un pôle instable ( $S=2$ )  
quelque soit le choix des pôles attribué, donc aucune matrice  
de contre-réaction ne peut le stabiliser.

Observabilité :

$$m + \sum_{i=1}^m d_i = 2 + 0 = 2 < N = 3$$

Ce système reste toujours inobservable aucune matrice de  
contre-réaction peut le rendre observable.

Zéros de découplage sortie

- Associé à la première sortie :

$$Zod11 = -2$$

$$Zod12 = 2$$

- Associé à la deuxième sortie :

$$Zod21 = -1$$

$$Zod22 = 2$$

Zéros de transmission

$$Tz = 2$$

**Remarque :**

Aucune influence sur le zéro de transmission quelque soit le placement de pôle choisi donc le système reste instable et inobservable. *Malgré que théoriquement il apparaît stable mais en pratique il est instable.*

La forme de la matrice fonction de transfert du précompensateur bicausale pour obtenir cette configuration des pôles en B.F.

$$H_c(s) = \begin{bmatrix} \frac{2S^3 + S^2 - 2S + 4}{S^3 + S^2 - 4S - 4} & \frac{-S^2 + S + 2}{S^3 + S^2 - 4S - 4} \\ \frac{-2S^3 - 4S^2 + 2S + 4}{S^3 + S^2 - 4S - 4} & \frac{2S^3 - S^2 - S + 2}{S^3 + S^2 - 4S - 4} \end{bmatrix}$$

#### IV.2.2 Retour de sortie

\* Sans placement de pôles :

La matrice de contre-réaction de sortie attribuée pour  $\mathcal{G}_a$ :

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

\* Avec placement de pôles :

Les pôles du système en B.F sont :

$$S=-2,3; \quad S=+1,3; \quad S=-5.$$

La matrice de contre réaction correspondante :

$$H = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$$

La forme du précompensateur réalisant cette configuration des pôles en B.F :

$$H_c(s) = \begin{bmatrix} \frac{2S^3+8S^2-11S-5}{S^3+5S^2-4S-20} & \frac{-S^2+4}{S^3+5S^2-4S-20} \\ \frac{-2S^3-10S^2+5S+25}{S^3+5S^2-4S-20} & \frac{2S^3+3S^2-8S-12}{S^3+5S^2-4S-20} \end{bmatrix}$$

#### IV.3 REPRESENTATION DU DEUXIEME PROCEDE :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Voir Figure IV.3).

Degré relatif :

$$d1=0; \quad d2=0$$

##### IV.3.1 Par retour d'état :

\* Sans placement de pôles :

Les pôles du système en B.F sont :

$$S=0; \quad S=0; \quad S=-0,667$$

La matrice gain consigne correspondante :

$$G=E^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 \\ 0,111 & -0,25 \end{bmatrix} \quad F=-E^{-1}L = \begin{bmatrix} -0,25 & -0,25 & -0,25 \\ -0,083 & -0,416 & 0,027 \end{bmatrix}$$

Où

$$E = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Stabilité :

Ce système possède deux pôles à la limite de stabilité qui ont tendance à rendre le système instable.

Observabilité :

$$m + \sum_{i=1}^m d_i = 2 + 0 + 0 = 2 < N=3$$

Ce système est inobservable d'où présence des zéros de transmissions.

\* Zéros de découplage :

- Associé à la première sortie :

$$Zod11=0$$

$$Zod12=-0,667$$

- Associé à la deuxième sortie :

$$Zod21=0$$

$$Zod22=-0,667$$

\* Zéros de transmission :

$$Tz=-0,667$$

Caractéristiques :

Le système est instable ( 2 pôles à la limite de stabilité) et inobservable à cause de la présence du zéro de transmission.

La forme du précompensateur correspondante :

$$H_c(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0,138s - 0,0833s}{s^2 + 0,66s} & \frac{0,5s^2 + 0,33s + 0,027s}{s^2 + 0,66s} \\ \frac{0,22s - 0,015s - 0,08}{s^2 + 0,66s} & \frac{-0,5s - 0,055s + 0,25}{s^2 + 0,66s} \end{bmatrix}$$

\* Avec placement de pôles :

Les pôles choisis en B.F sont :

$$s = -1,5; \quad s = -2,5$$

La matrice qui correspond à ça :

$$F = \begin{bmatrix} -0,25 & -0,25 & -0,87 \\ -0,58 & -0,58 & 0,31 \end{bmatrix}$$

Les pôles du système en B.F sont :

$$s = -1,5; \quad s = -2,5; \quad s = -0,667$$

Stabilité :

Ce système est stable car il possède 3 pôles à partie réelle négative.

Observabilité :

$$m + \sum_{i=1}^m d_i = 2 + 0 + 0 = 2 < N = 3 \quad (\text{Ordre du système})$$

Ce système est inobservable d'où présence de zéro de transmission.

\* Zéros de découplage sortie :

- Associés à la sortie 1 :

$$Z_{o11} = -2,5$$

$$Z_{o12} = -0,667$$

- Associés à la sortie 2 :

$$Z_{o21} = -1,5$$

$$Z_{o22} = -0,666$$

La matrice de Transfert :

$$H_{FG}(s) = \begin{bmatrix} \frac{(s+0,66)(s+2,5)}{(s+0,66)(s+2,5)(s+1,5)} & 0 \\ 0 & \frac{(s+0,66)(s+1,5)}{(s+0,66)(s+2,5)(s+1,5)} \end{bmatrix}$$

\* Zéros de transmission :

$$Tz = -0,666$$

Caractéristique :

Ce système est stable (les pôles assignés et le zéro de transmission sont stables) et inobservable (présence d'un zéro de transmission)

La forme du précompensateur pour ce choix des pôles :

$$H_c(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0,138s^2 - 0,435s - 0,208}{s^3 + 4,66s^2 + 6,416s + 2,5} & \frac{0,55s^2 + 1,7s + 1,95 + 0,6}{s^3 + 4,66s^2 + 6,41s + 2,5} \\ \frac{0,25s^2 + 0,7s + 0,45 + 0,06}{s^3 + 4,66s^2 + 6,416s + 2,5} & \frac{-0,55s^2 - 1,45s - 1,15 - 0,25}{s^3 + 4,66s^2 + 6,41s + 2,5} \end{bmatrix}$$

IV.3.2 Par retour de sortie :

\* Sans placement de pôles :

$$s=0; \quad s=0; \quad s=-0,666$$

La matrice H :

$$H = \begin{bmatrix} -0,1 & -0,05 \\ -0,066 & -0,16 \end{bmatrix}$$

\* Avec placement de pôles :

Les pôles choisis en B.F sont :

$$s = \quad ; \quad s = \quad ; \quad s = \quad .$$

$$H = \begin{bmatrix} -0,1 & -1,3 \\ -0,28 & 1,41 \end{bmatrix}$$

La forme du précompensateur réalisant ce choix :

$$H_c(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0,138s^2 - s - 0,52}{s^3 + 6,66s^2 + 8,91s + 4,6} & \frac{0,55s^2 + 2,15s + 2,85 + 1,5}{s^3 + 6,66s^2 + 8,91s + 4,6} \\ \frac{0,25s^3 + 1,1s^2 + 0,02s + 0,1}{s^3 + 6,66s^2 + 8,91s + 4,6} & \frac{-0,55s^2 - 1,8s^2 - 1,55 - 0,33}{s^3 + 6,66s^2 + 8,91s + 4,6} \end{bmatrix}$$

**Remarque :**

Ce système reste toujours stable pour un bon choix des pôles. Pour un retour de sortie, le zéro de transmission dépend des paramètres de H; cependant il n'existe pas ~~de~~ <sup>Souvent</sup> zéro de transmission pour un retour de sortie.

#### IV.4 REPRESENTATION DU TROISIEME PROCEDE :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Voir figure IV.4)

Degré relatif

$$d1=0 ; d2=1$$

IV.4.2 Par retour d'état :

\* Sans placement de pôles :

les pôles en B.F

$$s=0; \quad s=0; \quad s=0.$$

La matrice G :

$$G = E^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

avec

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice F :

$$F = -E^{-1}L = \begin{bmatrix} -0,5 & 2 & 4,5 \\ -0,5 & -3 & -4,5 \end{bmatrix}$$

et

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Stabilité :

Système instable trois pôles à la limite de stabilité.

Observabilité :

$$m + \sum_{i=1}^m d_i = 2 + 0 + 1 = 3 = N \quad (\text{Ordre du système})$$

Système complètement observable.

\* zéro de découplage sortie :

Pour la sortie Y1

$$Z_{od11} = 0$$

$$Z_{od12} = 0$$

Pour la sortie Y2

$$Z_{od21} = 0$$

\* zéro de transmissions :

$$T_z = \emptyset$$

Caractéristique :

Ce système est instable et complètement observable  
d'où inexistence des zéros de transmissions.

La forme du précompensateur :

$$H_c(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2 - 0,5s^2}{s^2} & \frac{-s^2 + 2s^2 - 1,5s}{s^2} \\ \frac{s^2 - 0,5s^2}{s^2} & \frac{s^2 - 3s^2 + 4,5}{s^2} \end{bmatrix}$$

\* Avec placement de pôles :

Les pôles choisis sont :

$$s = -2; \quad s = -1 + 1,4i; \quad s = -1 - 1,4i.$$

Stabilité :

Système très stable, tous les pôles à partie réelle négative.

Observabilité :

$$m + \sum_1^m d_i = 3$$

Le système toujours observable.

\* zéro de découplage sortie :

-Pour la sortie Y1

$$Z_{od11} = -1 + 1,4i$$

$$Z_{od12} = -1 - 1,4i$$

-Pour la sortie Y2

$$Z_{od21} = -2$$

\* zéro de transmissions :

$$T_z = \emptyset$$

La matrice  $F_1$  :

$$F = \begin{bmatrix} -1,5 & 3,5 & -10 \\ -1,5 & -4,5 & -10 \end{bmatrix}$$

La matrice de transfert :

$$H_{FC}(s) = \begin{bmatrix} \frac{(s^2 + 2s + 3)}{(s^2 + 2s + 3)(s + 2)} & 0 \\ 0 & \frac{(s + 2)}{(s^2 + 2s + 3)(s + 2)} \end{bmatrix}$$

Caractéristique :

système très stable et complètement observable.

La forme du précompensateur correspondante :

$$H_c(s) = \begin{bmatrix} \frac{S^3+2,5S^2+4S+1,5}{S^3+4S^2+7S+6} & \frac{-S^3-S^2-S-6}{S^3+4S^2+7S+6} \\ \frac{S^3+2,5S^2+4S+1,5}{S^3+4S^2+7S+6} & \frac{S^3+2S+12}{S^3+4S^2+7S+6} \end{bmatrix}$$

Pour retour de sortie :

\* Sans placement de pôles :

La matrice H correspondante :

$$H = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 \\ 0 & 4,5 \end{bmatrix}$$

\* Avec placement de pôles :

La matrice H se présente de la façon suivante :

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 \\ 0 & h_{22} \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique du système en B.F avec placement de pôles par retour de sortie :

$$S^3 - (5-h_{12}+1)S^2 + (6-h_{22}+h_{12})S - 4h_{12} - 1 + 2h_{12}h_{22} + h_{22} = 0.$$

On voit bien qu'il est difficile de stabiliser ce système avec retour de sortie.

**Remarque :**

La technique du retour de sortie utilisée pour découpler un système multivariable possède un inconvénient qui consiste à trouver les pôles qui stabilisent le système .

VI.5 REPRESENTATION DU QUATRIEME PROCEDE :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Degré relatif :

$$d1=0; \quad d2=0; \quad d3=0;$$

(Voir Figure IV.5).

IV.5.1 Retour d'état :

\* Sans placement de pôles :

Les pôles du système en B.F sont :

$$s=0; \quad s=0; \quad s=0; \quad s=-6,85.$$

La matrice gain consigne correspondante :

$$G=E^{-1} = \begin{bmatrix} -0,21 & 0,42 & 0,35 \\ -1,92 & -1,85 & 2,21 \\ -0,92 & 0,85 & 1,21 \end{bmatrix}$$

La matrice de contre réaction d'état :

$$F=-E^{-1}L = \begin{bmatrix} -1,28 & -3,42 & 1 & -1,57 \\ -3,57 & -13,85 & -1 & -4,14 \\ -1,57 & -6,85 & 0 & -2,14 \end{bmatrix}$$

Où

$$E = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -8 & 4 \\ 4 & 7 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Stabilité :

Ce système possède trois pôles à la limite de stabilité qui ont le pouvoir de le diverger (distabiliser).

Observabilité :

$$m + \sum_{i=1}^m d_i = 3 + 0 + 0 + 0 = 3 < N = 4.$$

Ce système est inobservable d'où présence des zéros de transmission.

\* Zéros de découplage :

- Associés à la première sortie :

$$Z_{0d11} = 0$$

$$Z_{0d12} = 0$$

$$Z_{0d13} = -6,85$$

- Associés à la deuxième sortie :

$$Z_{0d21} = 0$$

$$Z_{0d22} = 0$$

$$Z_{0d23} = -6,85$$

- Associés à la troisième sortie :

$$Z_{0d31} = 0$$

$$Z_{0d32} = 0$$

$$Z_{0d33} = -6,85$$

\* Zéro de transmission :

$$T_z = -6,85$$

Caractéristiques :

Ce système est instable (3 pôles nuls) et inobservable; présence de zéro de transmission.

La forme du précompensateur correspondante :

$$H_c(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0,45s^4 + 0,45s^3 + 2,95s^2}{s^4 + 6,85s^3} & \frac{-0,85s^4 + 2,25s^3 - 1,85s^2}{s^4 + 6,85s^3} & \frac{0,75s^4 + 0,15s^3 - 2s^2}{s^4 + 6,85s^3} \\ \frac{-3,85s^4 - 15s^3 - 3,45s^2}{s^4 + 6,85s^3} & \frac{3,71s^4 + 11,87s^3}{s^4 + 6,85s^3} & \frac{4,45s^4 + 12s^3 - 3s^2}{s^4 + 6,85s^3} \\ \frac{-1,85s^4 - 6,55s^3 - 0,75s^2}{s^4 + 6,85s^3} & \frac{1,75s^4 + 4,65s^3 + 0,35s^2}{s^4 + 6,85s^3} & \frac{2,45s^4 + 7,35s^3 + 2s^2}{s^4 + 6,85s^3} \end{bmatrix}$$

\* Avec placement de pôle :

Les pôles choisis sont :

$$s = -2; s = -3; s = -4.$$

La matrice qui correspond à ce placement de pôles :

$$F = \begin{bmatrix} -5,85 & -7,71 & 0,85 & -3,14 \\ -18,71 & -28,42 & 1,71 & -16,28 \\ -7,71 & -13,42 & 0,71 & -9,28 \end{bmatrix}$$

Les pôles du système en B.F sont :

$$s = -2; s = -3; s = -4; s = -6,85.$$

Stabilité :

Système très stable; tous les pôles sont situés dans le demi-plan gauche de l'axe des imaginaires pure.

Observabilité :

$$m + \sum_{i=1}^m d_i = 3 + 0 + 0 + 0 = 3 < N = 4.$$

Ce système reste toujours inobservable pour toutes les matrices de contre réaction F qu'on veut attribuer.

\* Zéros de découplage sortie :

- Associés à la sortie 1 :

$$Zod11 = -3$$

$$Zod12 = -4$$

$$Zod13 = -6,85$$

- Associés à la sortie 2 :

$$Zod21 = -2$$

$$Zod22 = -4$$

$$Zod23 = -6,85$$

- Associés à la sortie 3 :

$$Zod31 = -2$$

$$Zod32 = -3$$

$$Zod33 = -6,85$$

\* Zéros de transmission :

$$Tz = -6,85$$

Caractéristique :

Ce système est stable (Tous les pôles en B.F sont à partie réelle négative). Il reste toujours inobservable avec présence d'un zéro de transmission.

La forme du précompensateur :

$$H_c(s) = \begin{array}{|l} \hline -0,425s^2 - 2,965s - 4,935 + 0,295s - 0,122 \quad 0,855s^2 + 8,655s + 34,875 + 69,835s + 55,67 \quad 0,715s^2 + 6,385s + 22,345 + 40,935s + 32,16 \\ \hline s^2 + 15,855s + 87,715 + 202,285s + 164,57 \quad s^2 + 15,855s + 87,715 + 202,285s + 164,57 \quad s^2 + 15,855s + 87,715 + 202,285s + 164,57 \\ \hline -3,855s^2 - 45,865s - 208,235 - 435,555s - 358,53 \quad 3,715s^2 + 39,735s + 172,615 + 3685 + 305,63 \quad 4,425s^2 + 51,065s + 235,265 + 513,35s + 423 \\ \hline s^2 + 15,855s + 87,715 + 202,285s + 164,57 \quad s^2 + 15,855s + 87,715 + 202,285s + 164,57 \quad s^2 + 15,855s + 87,715 + 202,285s + 164,57 \\ \hline -1,855s^2 - 21,365s - 94,35 - 194,555s - 161,38 \quad 1,715s^2 + 17,445s + 74,615 + 164,815s + 143 \quad 2,425s^2 + 28,775s + 137,265 + 309,35s + 261 \\ \hline s^2 + 15,855s + 87,715 + 202,285s + 164,57 \quad s^2 + 15,855s + 87,715 + 202,285s + 164,57 \quad s^2 + 15,855s + 87,715 + 202,285s + 164,57 \\ \hline \end{array}$$

IV.4.2 PAR RETOUR DE SORTIE :

\* Sans placement de pôles :

La matrice de contre réaction de sortie :

$$H = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,86 & -1,35 \\ 0,3 & -2,38 & -3,83 \\ 0,32 & -1,22 & -1,9 \end{bmatrix}$$

\* Avec placement de pôles :

Les pôles attribués pour le même placement de pôle que celui du retour d'état sont :

$$S = -2,2163 + 6,626j$$

$$S = -2,2163 - 6,626j$$

$$S = -3,3380$$

$$S = -1,6552$$

Ces pôles sont très stable donc le système est stable.

La matrice H correspondante :

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1,0577 & -2,14 & -2,78 \\ 4,166 & -7,95 & -12,64 \\ 2,18 & -3,79 & -6,84 \end{bmatrix}$$

La forme du précompensateur :

$$H = \begin{bmatrix} -0,425s^4 - 0,215s^3 + 11,85s^2 + 21,68s - 16,03 & 0,855s^4 + 3,145s^3 + 20,205s^2 + 97,75s + 122,3 & 1,715s^4 + 0,495s^3 + 6,365s^2 + 80,495s + 119,76 \\ s^4 + 9,425s^3 + 76,485s^2 + 268,275s + 269,75 & s^4 + 9,425s^3 + 76,485s^2 + 268,275s + 269,75 & s^4 + 9,425s^3 + 76,485s^2 + 268,275s + 269,75 \\ -3,855s^4 - 21,065s^3 - 112,115s^2 - 482,165s - 656,78 & -3,855s^4 - 21,065s^3 - 112,115s^2 - 482,165s - 656,78 & 4,425s^4 + 15,25s^3 + 131,25s^2 + 669,295s + 216,9 \\ s^4 + 9,425s^3 + 76,485s^2 + 268,275s + 269,75 & s^4 + 9,425s^3 + 76,485s^2 + 268,275s + 269,75 & s^4 + 9,425s^3 + 76,485s^2 + 268,275s + 269,75 \\ -1,855s^4 - 9,425s^3 - 46,545s^2 - 211,765s - 298,49 & 1,715s^4 + 6,425s^3 + 38,55s^2 + 225,55s + 301,56 & 2,425s^4 + 8,75s^3 + 76,715s^2 + 370,565s + 439,53 \\ s^4 + 9,425s^3 + 76,485s^2 + 268,275s + 269,75 & s^4 + 9,425s^3 + 76,485s^2 + 268,275s + 269,75 & s^4 + 9,425s^3 + 76,485s^2 + 268,275s + 269,75 \end{bmatrix}$$

#### IV.6 REPRESENTATION DU CINQUIEME PROCEDE : (Voir [11])

Ce système est un système réel (chaudière) et consiste à la commande de pression de vapeur Y2 dans le tambour et la température de vapeur Y1 d'un surchauffeur.

Les grandeures de commande sont :

U1 : Debit du combustible.

U2 : Debit d'eau vaporisé.

(Voir figure VI.6).

Soit :

$$G_{11}(s) = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)$$

$$G_{22}(s) = \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = G_{10}(s)G_{13}(s)G_{14}(s)G_{15}(s)$$

$$G_{12}(s) = \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} = G_1(s)G_5(s)G_{14}(s)G_{15}(s)$$

$$G_{21}(s) = \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = G_{10}(s)G_5(s)G_4(s)G_4(s)$$

La matrice de transfert obtenue est :

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{21}(s) \\ G_{12}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Application numérique :

$$G_{11}(s) = \frac{(1+13,81s)(1+18,4s)}{(1+59s)^2}$$

$$G_{22}(s) = \frac{1,771}{(1+153,5s)(1+24s)(1+15s)}$$

$$G_{21}(s) = \frac{0,96}{6955(1+15s)}$$

$$G_{12}(s) = \frac{0,0605}{695s}$$

D'où la matrice de transfert suivante :

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{(1+13,81s)(1+18,4s)}{(1+59s)} & \frac{0,96}{695s(1+15s)} \\ \frac{1,771}{(1+153,5s)(1+24s)(1+15s)} & \frac{0,0605}{695s} \end{bmatrix}$$

Passage à représentation d'état :

$$A = \begin{bmatrix} -0,2 & -0,01 & -0,6E-3 & -0,2E-4 & -0,3E-6 & -0,2E-8 & -0,1E-10 & -0,2E-13 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & . & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & . & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & . & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & . & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 8,7E-5 & 1,24E-5 & -1,4E-7 & -1,33E-7 & -1,07E-8 & -3,78E-10 & -5,81E-12 & -2,42E-14 & 2,2E-18 \\ 0 & 9,2E-5 & 4,4E-5 & 3,41E-6 & 1,11E-7 & 1,88E-9 & 1,63E-9 & 6,13E-14 & 3,44E-17 \end{bmatrix}$$

Degré relatif :

$$d1=0$$

$$d2=2$$

La matrice E :

$$E = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,87 & 0,87 \\ 0,92 & 0,92 \end{bmatrix}$$

La matrice L :

$$L = 10^{-4} \begin{bmatrix} -0,048 & -0,015 & -0,0001 & -0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,019 & 0,0011 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G=E^{-1}$$

$$\text{Or } \det(E) = 0$$

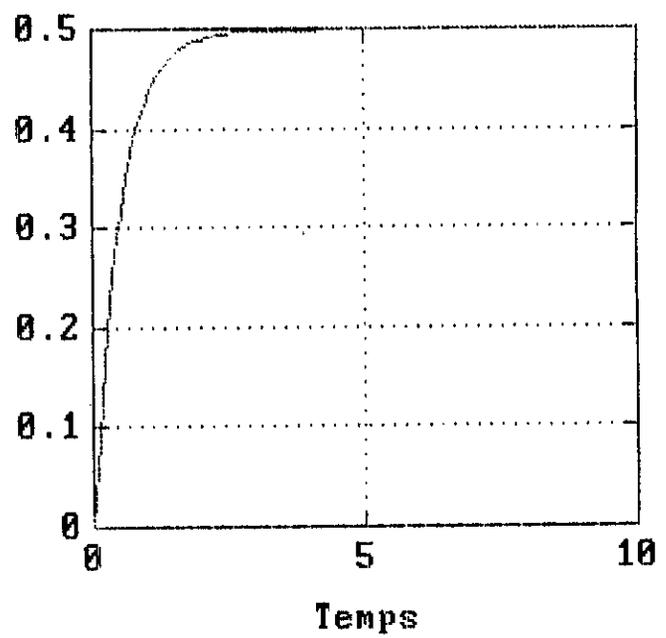
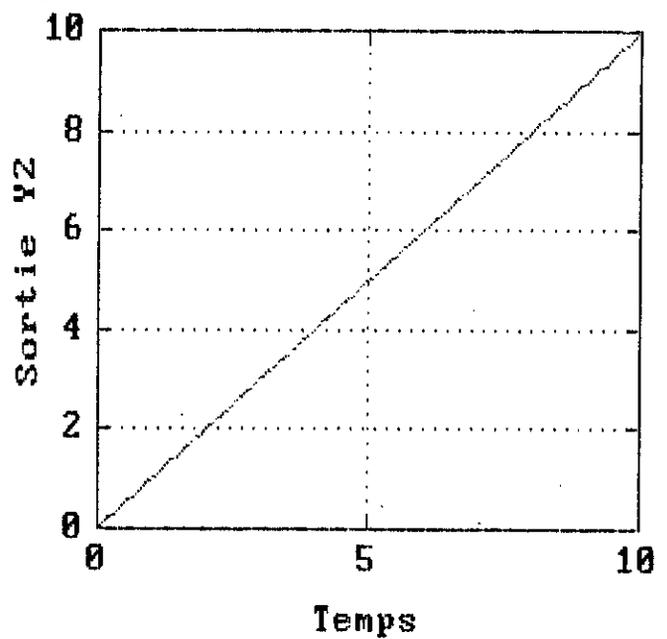
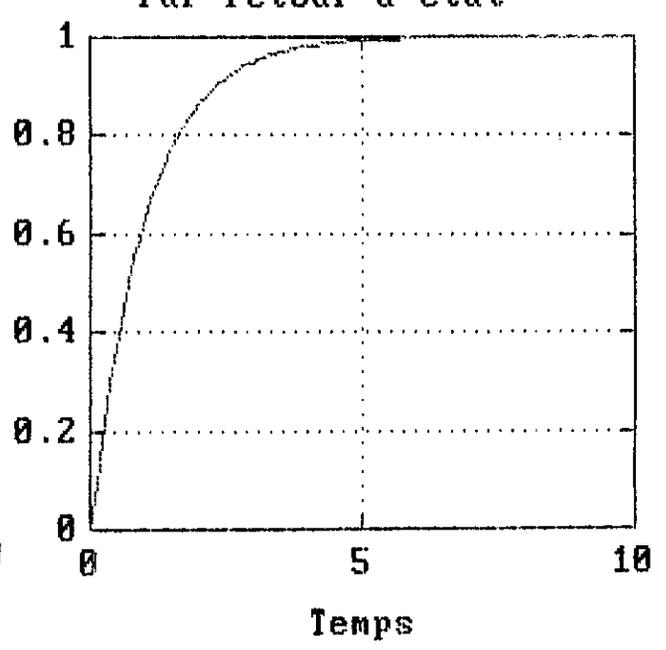
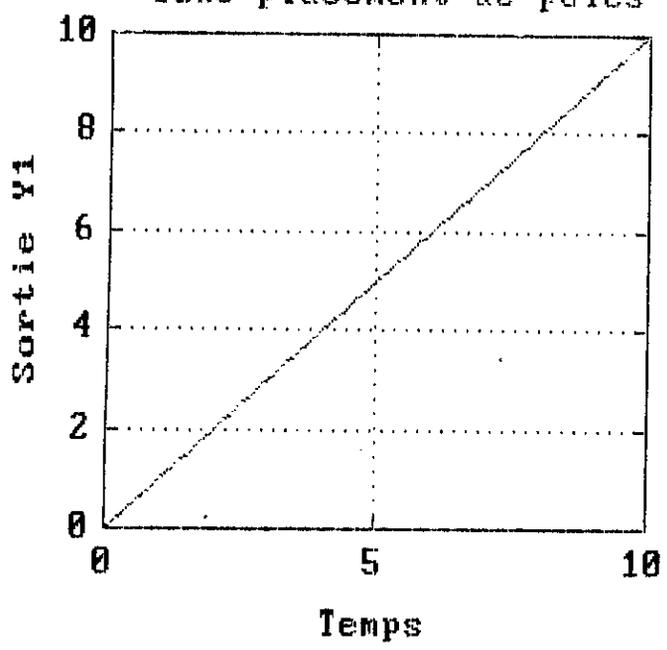
Alors E est singulière donc ce système n'est pas découplable par retour d'état.

Remarque :

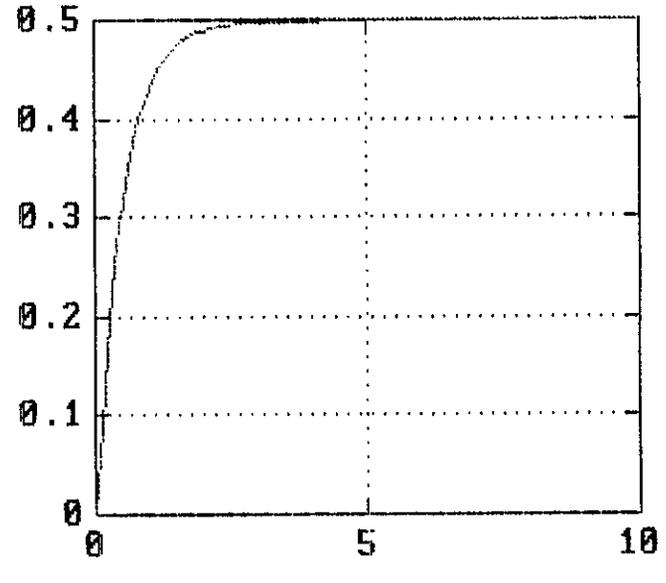
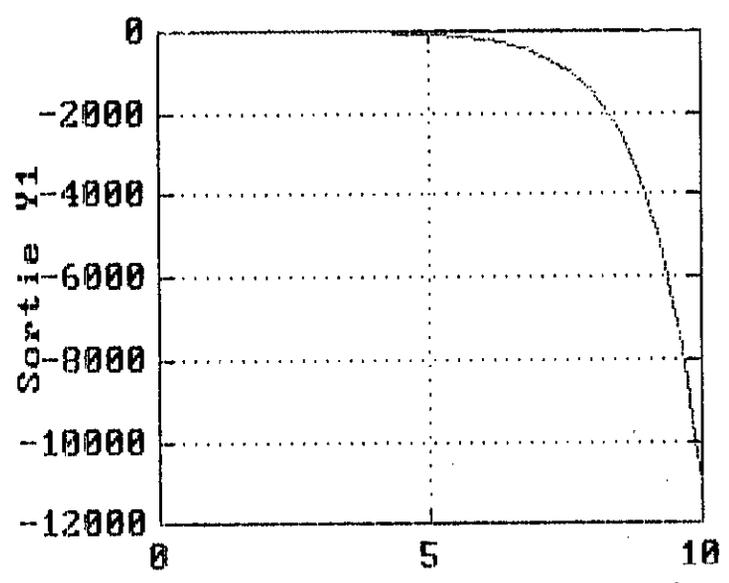
Cette application nous montre qu'il existe des systèmes physique non découplable par retour d'état.

sans placement de pices

Par retour d etat

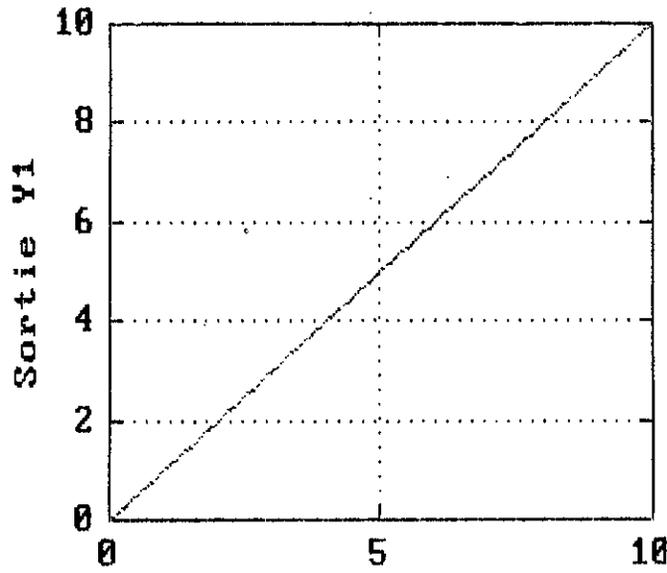


Par retour de sortie

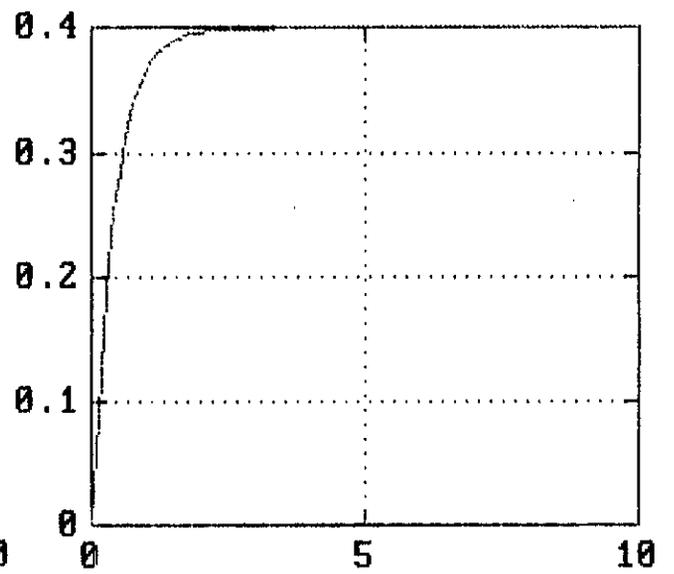
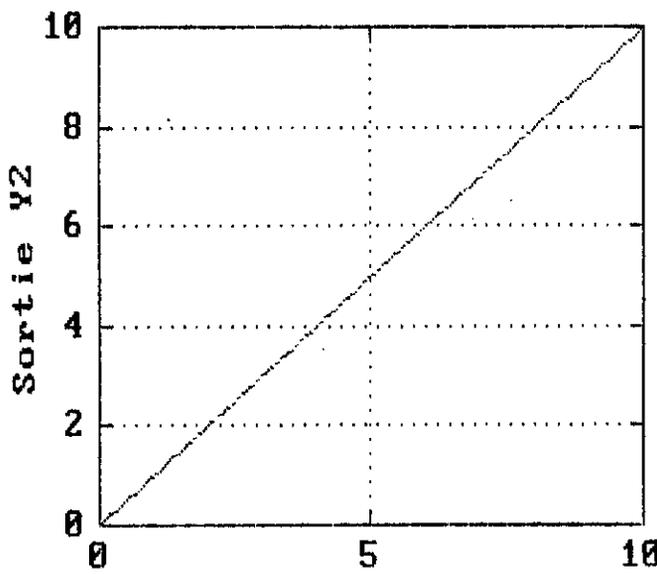
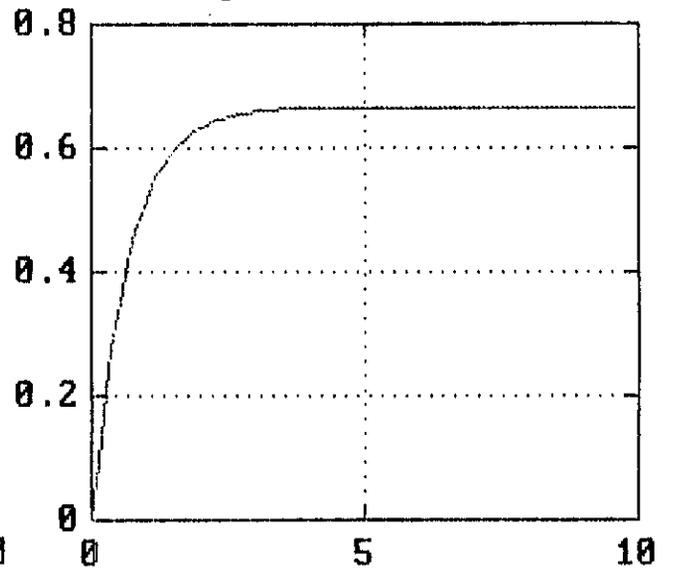


fig(IV.2)

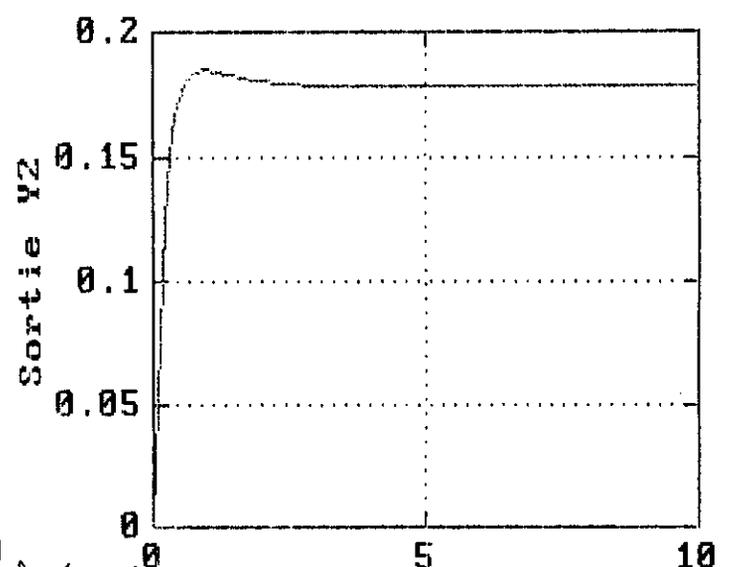
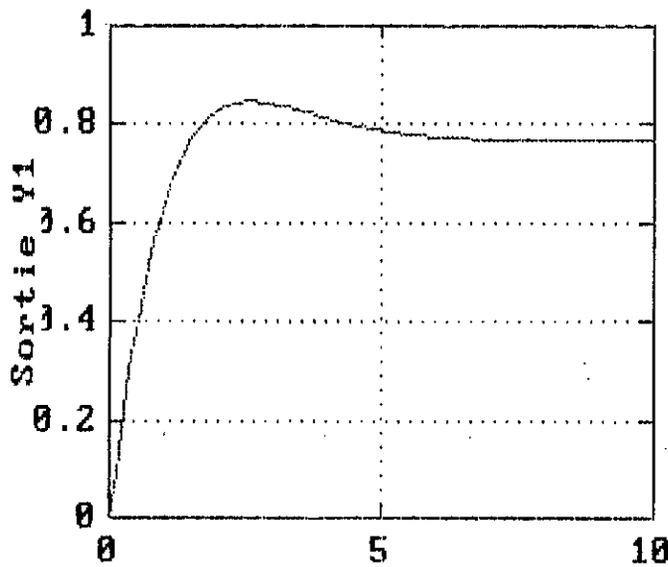
Sans placement de poles



Avec placement de poles



Par retour de sortie



fig(IV.3)

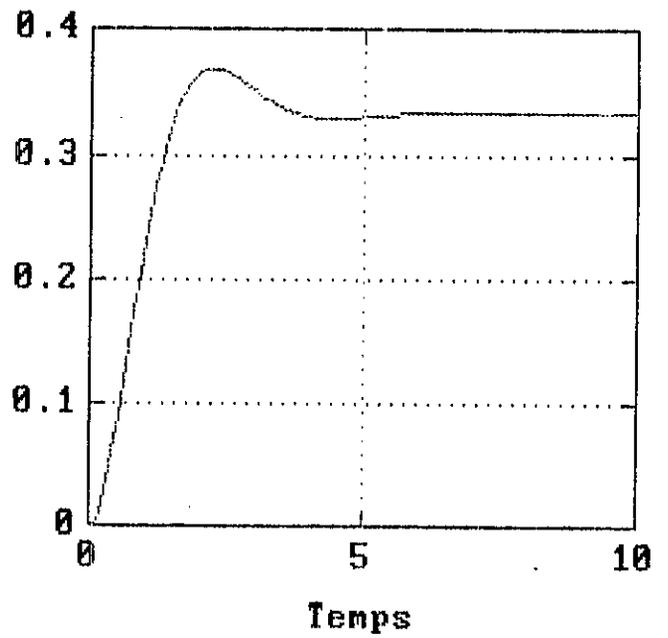
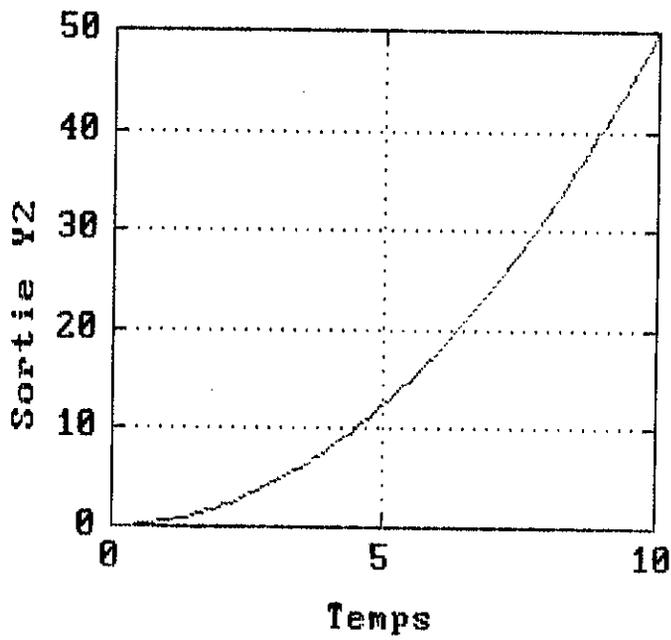
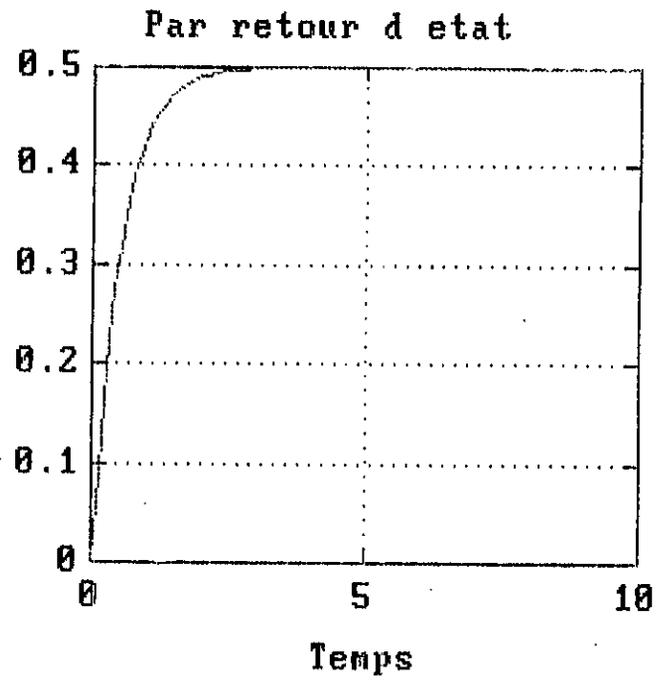
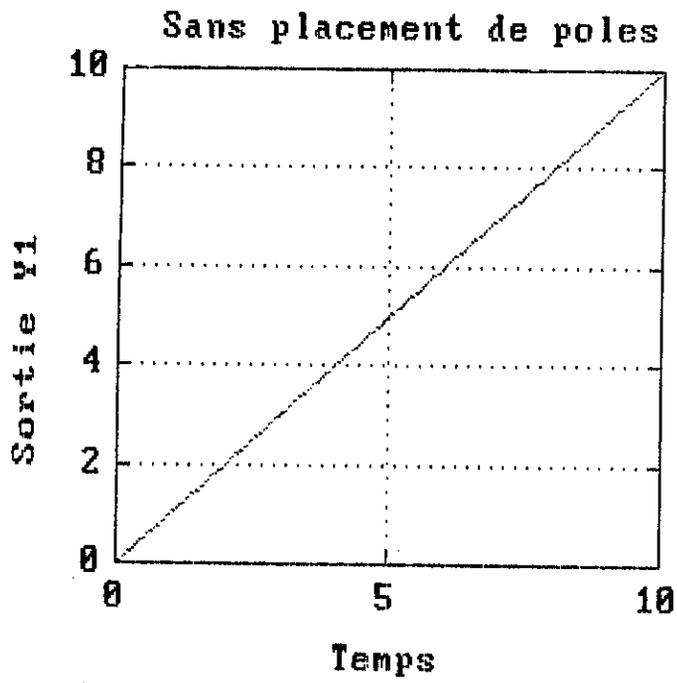
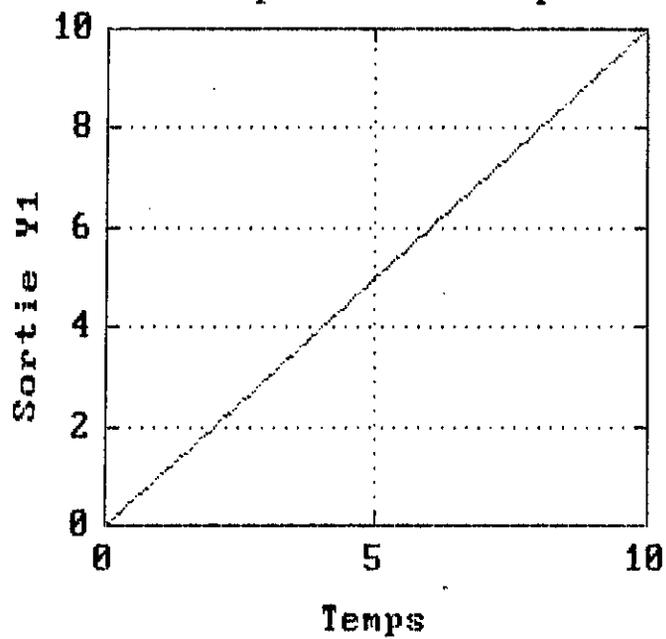


fig (IV.4)

Sans placement de poles



Par retour d etat

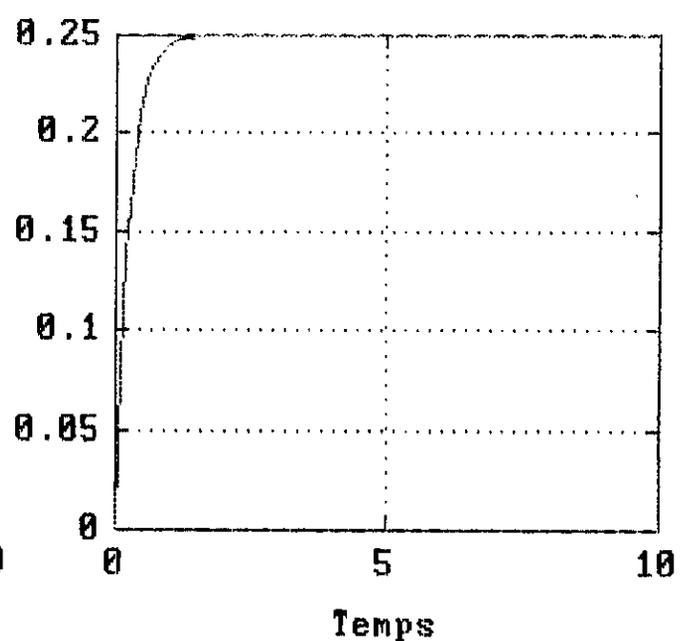
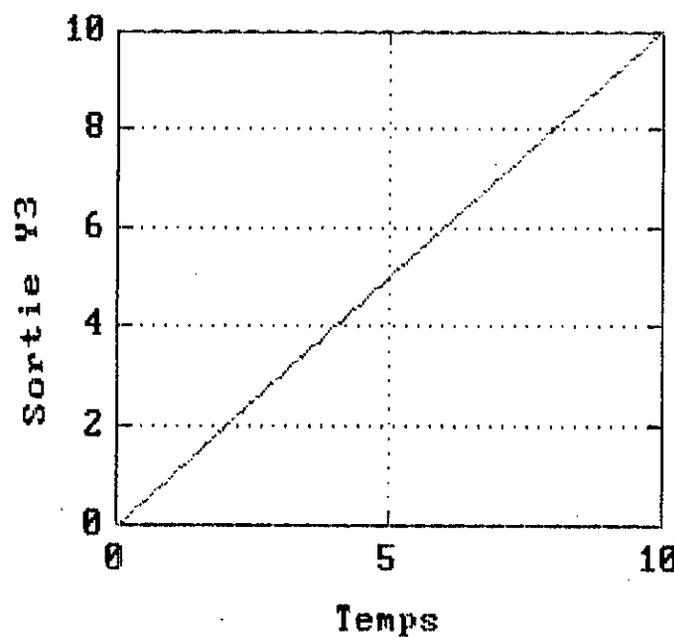
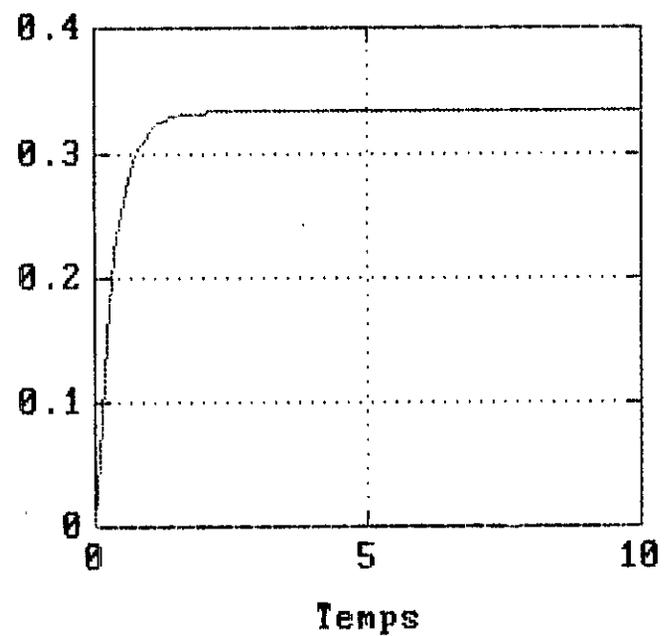
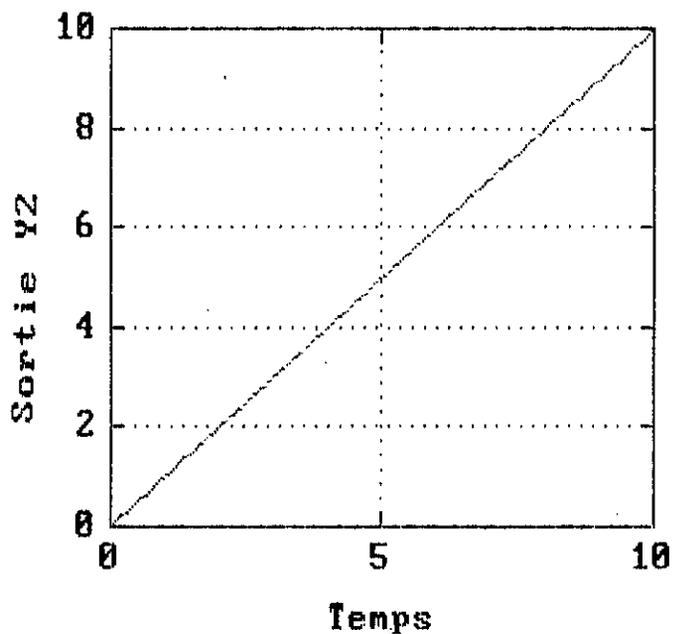
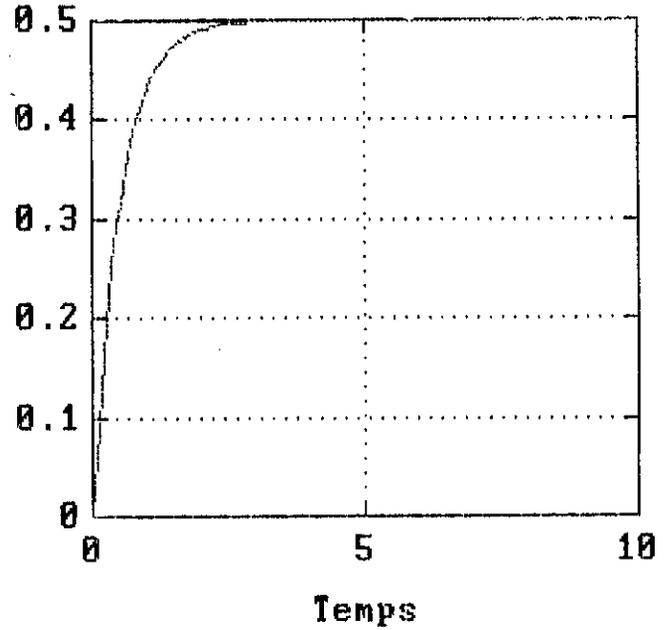
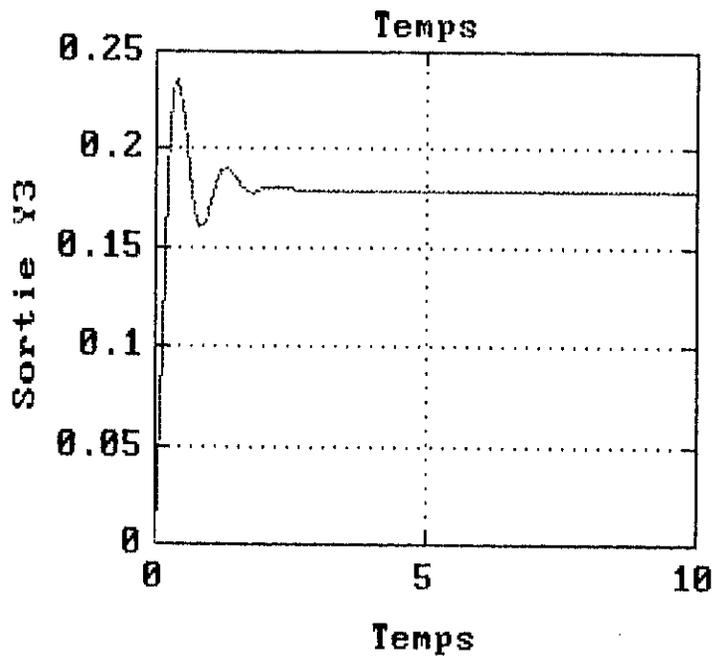
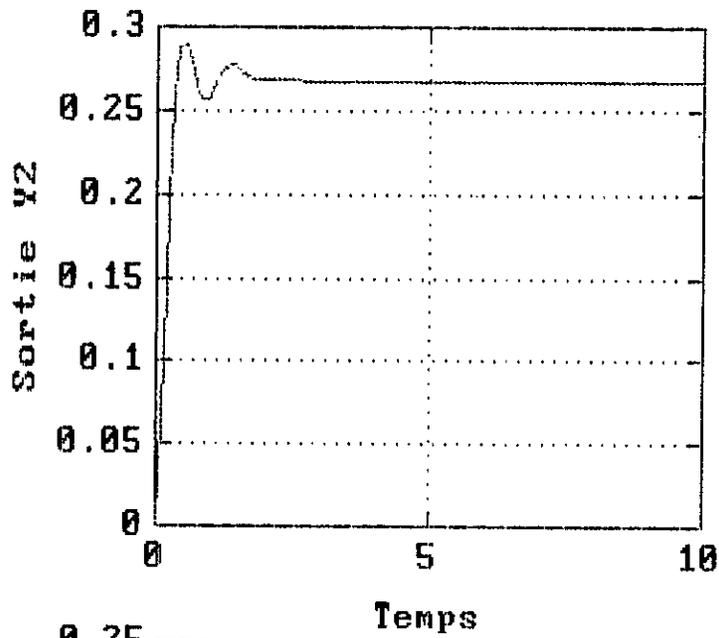
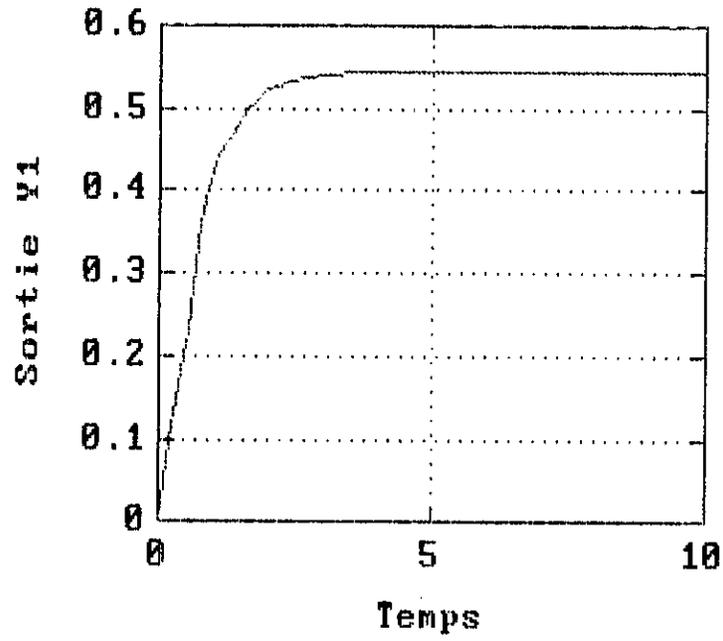
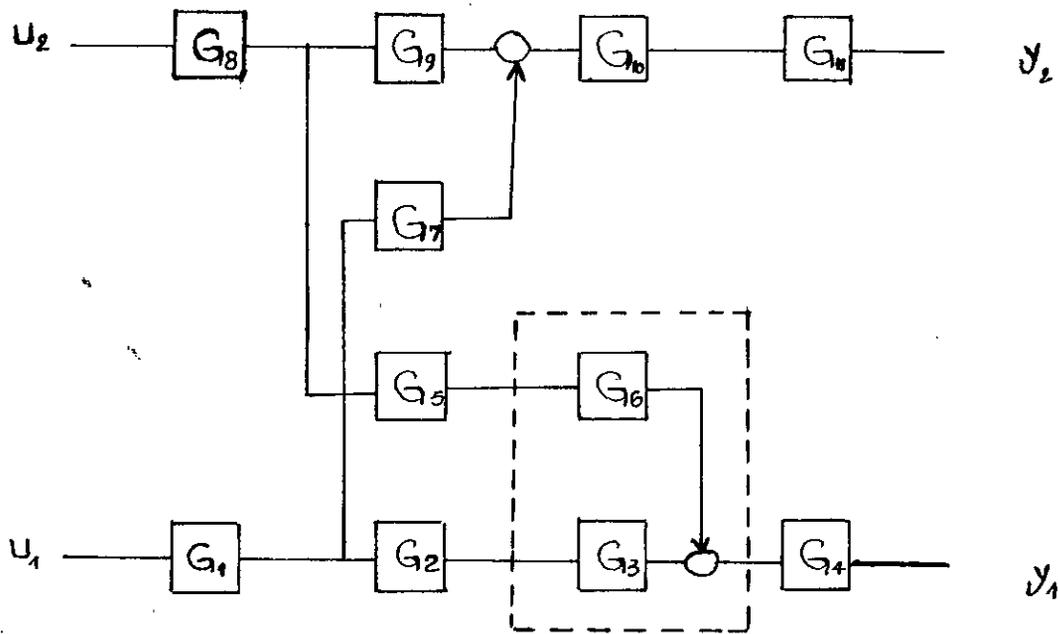


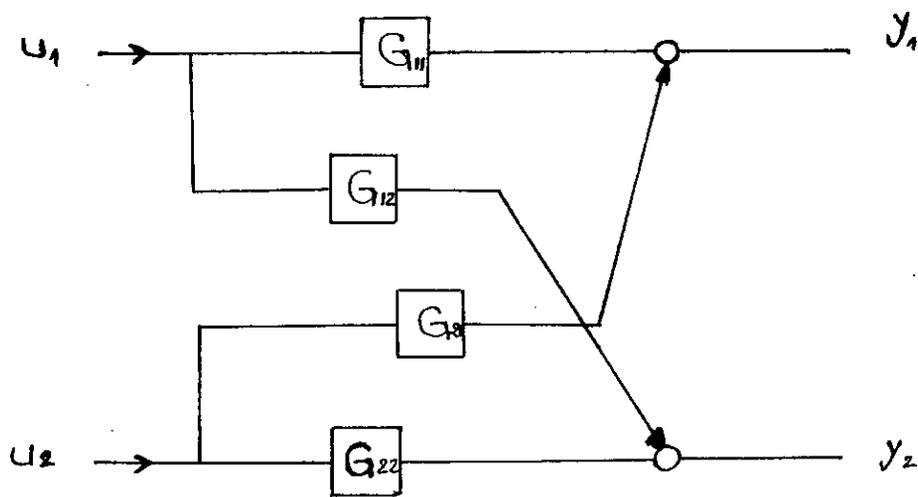
fig (IV.5)

Par retour de sortie





Structure du système sans perturbation



structure simplifiée du système

fig (IV.6)

Chapitre V

**CONCLUSIONS &  
PERSPECTIVES**

## CONCLUSION

Le domaine de la commande des systèmes découplés est assez vaste mais nous nous sommes penchés, dans ce travail, sur l'étude d'un cas très intéressant qui est le découplage par retour d'état qui est l'objet des recherches actuelles.

Dans cette étude, nous avons discuté, en première étape des résultats dans le domaine de la commande noninteractive, ainsi :

nous citons brièvement quelques méthodes réalisées dans ce domaine en vue de la résolution du problème du découplage. Cette étape est suivie des généralités nécessaires pour la compréhension de notre travail et la présentation des contraintes de la commande des systèmes multivariables d'où l'utilité de résoudre ce problème par découplage en utilisant l'approche d'état qui est une technique moderne présentant de avantages considérables.

Le chapitre II présente les premières étapes de mise en forme du problème nécessaire afin de pouvoir aborder la partie commande proprement dite:

Découplage par contre réaction d'état.

Le découplage par réaction d'état nécessite une commande un peu spéciale qui est une combinaison linéaire entre l'état et la consigne où le vecteur consigne dispose d'une matrice gain, ensuite on essaie de résoudre le problème de découplage de deux (02) façons différentes :

- soit on utilise la commande par retour d'état,

- on utilise la structure de précompensateur bicausule qui présente l'avantage de découpler le système sans toucher à sa structure.

Afin d'aboutir à la forme du système découplé, on a essayé d'établir dans le chapitre III les algorithmes réalisants ce but.

Ces algorithmes reposent sur la connaissance du degré relatif associé à chaque sortie qui est une notion importante pour la suite. Il consiste en la détermination des conditions nécessaires et suffisantes pour que le découplage par retour d'état soit réalisable. Ainsi, on établira la forme des matrices Gain -consigne et de contre réaction (La démonstration de la nécessité et la la suffisance de ces conditions est donnée).

La structure du système en BF obtenue sans placement de pôles, présente un inconvénient du point de vue de la stabilité, soit pour les systèmes continus, soit pour les systèmes échantillonnés. Cependant, cette structure est ignorée par les praticiens.

La technique de synthèse pour la réalisation de la configuration désirée de pôles en BF a été établie.

Cette structure est obtenue soit en utilisant le retour d'état, soit en utilisant le retour de sortie. Nous avons

vu que le degré de flexibilité de la voie retour d'état est plus élevée que celui de sortie.

L'observabilité du système découplé est étudiée dans ce chapitre. Cependant, il y a introduction des zéros de découplage sortie qui jouent un rôle sur l'observabilité du système en BF. On a constaté que, si un système est inobservable aucune matrice de contre-réaction ne peut rendre le système observable.

La notion des zéros de transmission a été établie dans le but de voir l'influence de ces derniers sur la stabilité et l'observabilité du système découplé, cela est bien mis en évidence au chapitre application (. IV).

A travers les applications étudiées, on a pu voir de façon concrète ces notions à caractère purement théorique.

## PERSPECTIVES

Il serait intéressant de poursuivre les recherches afin d'établir une extension de cette théorie pour les systèmes variants dans le temps qui présente un intérêt considérable. Le système découplé est stable (pour un bon choix des pôles) mais non régulé, un régulateur classique pourra faire l'affaire pour obtenir une meilleure dynamique en envisageant de faire quelques transformations sur la matrice de contre réaction d'état pour la commande des système par découplage et par retour d'état.

# **BIBLIOGRAPHIE**

- [1] LIU CHEN HUI  
 General decoupling theory of multivariable process control theory.  
 Springer Verlag  
 Berlin Heidelberg New York Tokyo 1983.  
 474 pages.
- [2] ANDRE FOSSARD  
 Commande des systèmes multidimensionnels.  
 Edition DUNOD 1972.  
 349 pages.
- [3] TECHNIQUE DE L'INGENIEUR  
 Les systèmes multivariable.  
 Ref: R7220.
- [4] KUMURA  
 Control multivariable systèmes by state feedback.
- [5] WOLOVICH  
 Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems.  
 IEEE TRANS Automatic control.  
 Vol.AC12  
 PP.651-659, December 1967.
- [6] CHEN  
 Introduction to linear system theory.
- [7] H.MUFTI  
 On the observability of decoupled systems.  
 IEEE TRANS Automatic control.  
 Vol.AC12  
 PP.75-77, February 1969.
- [8] BARNET  
 Introduction to mathematical control multivariable systems.
- [9] N.KARCANIAS  
 Poles and zeros of linear multivariable systems : a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory.  
 INT.J.Control.  
 Vol.24, N°1.  
 PP.33-74, 1976.
- [10] JEAN-CHARLES GILLES  
 Systèmes linéaires équations d'état.  
 Edition EYROLLES.  
 198 pages.
- [11] ROLF ISERMANN  
 Digital control systems.  
 Edition SPRINGER VERLAG 1981.  
 566 pages.

# **ANNEXE**

Soit la  $i^{ème}$  ligne de la matrice de la fonction de transfert :

$$h(s) = C_i (SI-A)^{-1} B$$

On fait le développement limité de celle-ci au voisinage de zéro.

$$h(s) = C_i (SI-A)^{-1} B = C_i B S^{-1} + C_i A B S^{-2} + \dots$$

On met  $S^{-(d_i+1)}$  en facteur, et comme on sait que  $C_i A^{d_i} B = 0$  pour  $0 \leq k \leq d_i - 1$ , alors on a :

$$h(s) = S^{-(d_i+1)} [C_i A^{d_i} B + C_i A^{d_i+1} (SI-A)^{-1} B]$$

On passe à la représentation matricielle :

$$H(s) = \begin{bmatrix} S^{-(d_1+1)} & & & 0 \\ & S^{-(d_2+1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & S^{-(d_m+1)} \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E + L(SI-A)^{-1} B \end{bmatrix}$$

Où

$$L_i = C_i A^{d_i+1}$$

Alors

$$L = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1+1} \\ C_2 A^{d_2+1} \\ \vdots \\ C_m A^{d_m+1} \end{bmatrix}$$

Ensuite on va opter à une identification de la forme de  $H(s)$  avec la forme (2.5) et en tenant compte des propriétés de la matrice de transfert en B.F. (diagonale et non singulière)  $H(s) = H(s) [I + F(SI-A-BF)^{-1} B] G$ .

$$= \text{dia}(S^{-(d_1+1)}, S^{-(d_2+1)}, \dots, S^{-(d_m+1)}) [E + L(SI-A)^{-1} B] \times [I + F(SI-A-BF)^{-1} B] G$$

Or  $H(s)$  peut être exprimé en série de termes en  $S^{-1}$  dont chacun est diagonal, le premier terme étant  $EG$ , il faut qu'il soit diagonal d'où :

$$EG = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ & & & & a_m \end{bmatrix}$$

Les  $a_i$  sont choisis égal à 1

$EG = I \implies G = E^{-1}$ ; donc  $E$  doit être une matrice inversible la suffisance est donné à l'aide de la deuxième forme de la matrice de transfert du précompensateur

$$[I + F(SI - A - BF)^{-1}B]G = [I - F(SI - I)^{-1}B]^{-1}G$$

Preuve :

Il faut que :

$$[I + F(SI - A - BF)^{-1}B][I - F(SI - A)^{-1}B] = I.$$

$$[I + F(SI - A - BF)^{-1}B][I - F(SI - A - BF + BF)^{-1}B]$$

$$= I + F(SI - A - BF)^{-1}(SI - A - BF + BF)(SI - A)^{-1}B - F(SI - A)^{-1}B$$

$$- F(SI - A - BF)^{-1}BF(SI - A)^{-1}B.$$

$$= I + F(SI - A - BF)^{-1}[(SI - A - BF + BF) - BF](SI - A)^{-1}B - F(SI - A)^{-1}B$$

$$= I + F(SI - A)^{-1}B - F(SI - A)^{-1}B$$

$$= I$$

D'où  $H_{rG}(s) = \text{diag}[S^{-(d_1+1)}, S^{-(d_2+1)}, \dots, S^{-(d_m+1)}] \times$

$$[E + (SI - A)^{-1}B][G^{-1} - G^{-1}F(SI - A)^{-1}B]^{-1}.$$

Comme on a vu que  $E = G^{-1}$

Pour que  $H_{rG}(s)$  soit diagonale et non singulière il faut que:

$$[G^{-1} + L(SI - A)^{-1}B][G^{-1} - G^{-1}F(SI - A)^{-1}B]^{-1} = I$$

En procédant par identification on aura

$$L = -G^{-1}F \implies F = -GL$$

d'où  $F = -E^{-1}L$ .