

M0036/00A

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ECOLE NATIONALE DES TRAVAUX PUBLICS

THESE DE MAGISTER

Présenté par :

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

OUANANI Mouloud

Ingénieur d'état en génie civil

THEME:

CONTRIBUTION A L'ANALYSE DYNAMIQUE TRIDIMENSIONNELLE DES PONTS - CAISSONS

Soutenue publiquement le 28 juin 2000 devant le jury composé de :

M	M. K. BERRAH	Professeur	E.N.P	Président
M	B. TILIOUINE	Professeur	E.N.P	Directeur de thèse
M	H. AFRA	Maître de recherche	C.G.S	Examineur
M	F. BELABDELOUAHAB	Chargé de cours	E.N.T.P	Examineur
M	M. AIMEUR	Chargé de cours	E.N.T.P	Examineur
M	A. MATOUGUI	Directeur général	S.A.E.T.I	Membre invité

Dédicaces

A mes parents
Et à tous ceux qui me sont chers

REMERCIEMENTS

Je remercie, Monsieur le professeur **B.TILIOUINE** qui a bien voulu me proposer ce sujet original et m'y encadrer, Il m'a guidé avec rigueur et fermeté, je lui dois beaucoup pour ma formation à la recherche et pour l'achèvement de cette thèse.

Je tiens à exprimer ma vive gratitude à Monsieur le professeur **M.K. BERRAH**, pour en avoir accepté la présidence.

Que Messieurs les membres du jury, **F. BELABDELOUAHAB**, **H.AFRA** et **M. AMIEUR** trouvent ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Je remercie la direction de l'école nationale des travaux publics pour la confiance qu'elle m'a accordé. Que Monsieur **A.B. ADEM**, responsable de post graduation soit remercié.

Mes remerciements vont également à Messieurs **MEZIANI** et **S. ZITOUNI** et Mesdames **N.ACED** et **H. ACED** pour leurs aides.

J'exprime également mes remerciements aux personnels et responsables de **L'I.S.T (C.E.R.I.S.T.)**, de la bibliothèque (**C.T.T.P**) pour leurs serviabilités. Que Madame **F. MOUSSAOUI** responsable de la bibliothèque de l'organisme **C.G.S** soit remerciée.

Enfin, dans le souci de n'oublier personne, tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin que ce soit par leurs amitiés, leurs conseils ou leurs soutient moral, trouvent ici dans ces quelques lignes l'expression de ma gratitude.

إن هدف هذه الدراسة يدور حول التحليلات الاهتزازات الحرة و الإستجابة الزلزالية. الجسور الحقيقية و المصغرة التي أخترت لهذه الدراسة. منهاج العناصر المنتهية مستعملة. نلاحظ إنخفاض حساب الوقت وأذا بذلك أساسا الإختبار النوع البسيط لتزيف و المبني علي المفهوم منهاج العناصر المنتهية .
وبعدها تقوم بتحليل الإستجابة الديناميكية الثلاثية الأبعاد البيوت الحسرية .
إن منهاج التركيبات، الرباعية الكاملة و منهاج التركيبات البسيطة المستعملة .
وكد لك تقوم بإجراء دراسات قياسية كاملة وعمامة نسبيا علي العوامل الديناميكية .

مفتاح الكلمات : الجسور ، إهتزازت ، الزلزال ، العناصر المنتهية ، دراسة القياسات القرية

Abstract :

The purpose of the study is the free vibration analysis and seismic response .Real Bridges and prototypes are selected to this study .The finit élément method is used for discrétisation. We note a reducing of calculated time due essentially to the choice of a simple model of simulation based on the concept of finit élément method .

We examine then the dynamic response 3D boxes girders-Bridges. The complete combination quadratique method (CQC) and the simple combination method (SRSS) are used .

By the way ,we proposed a parametric study relatively exhaustive on naturals modes.

Key word : Bridge ,vibration ,earthquake , finit élément ,parametric study.

Résumé:

L'objet de la présente étude est l'analyse en vibration libre et la réponse sismique des ponts-caissons. Des ponts réels et prototypes sont sélectionnés dans cette étude. La méthode des éléments finis est utilisée pour la modélisation . On note une réduction du temps de calcul due essentiellement au choix d'un modèle simple de simulation basé sur le concept de la méthode des éléments finis .

Nous examinons ensuite la réponse dynamique tridimensionnelle des ponts - caissons. La méthode de combinaison quadratique complète (CQC) et la méthode de combinaison simple (SRSS) sont utilisées .

Par la suite nous opérons une étude paramétrique relativement exhaustive sur les modes fondamentaux .

Mots clés : Ponts ,Vibrations , Séismes , élément fini , étude paramétrique.

AVANT PROPOS

La construction des ponts par encorbellements successifs a connu un essor considérable sous l'impulsion sans cesse croissante des maîtres d'ouvrages confrontés à la nécessité de franchir des portées de plus en plus importantes d'une part et du développement rapide des techniques d'autre part.

En Algérie où les besoins en infrastructures routières sont très importants, les ponts à voussoirs, de par leur aspect esthétique et leur coût compétitif continuent de jouir d'une évolution croissante. Les facteurs ayant permis un développement rapide de ces derniers sont multiples. Les avantages suivants peuvent être cités :

- Suppression de cintre et du système d'échafaudage.
- Rapidité d'exécution permise par le procédé.
- Augmentation du rendement de la main d'œuvre, due à la mécanisation des tâches à l'intérieur d'un cycle répétitif.
- Facilité d'entretien (circulation du personnel, passage de canalisations,... etc.).

Les ponts construits par encorbellements successifs présentent des difficultés de calcul inhabituelles. Le volume de calculs nécessaires est bien plus considérable que pour les autres types d'ouvrages. Cette complexité tient tout d'abord au nombre important de sections qu'il convient de vérifier ainsi qu'à l'évolution du schéma statique de l'ouvrage pendant sa construction. Elle tient ensuite au fait que la construction de tels ouvrages doit intégrer le facteur temps (fluage de béton et relaxation des aciers) et surtout au fait que le comportement vibratoire de cette classe particulière de structures n'est pas bien maîtrisé à ce jour. En effet, peu d'études ont été effectuées sur la réponse dynamique de ce type d'ouvrages, et la documentation sur le développement de modèles numériques permettant de mieux appréhender le comportement dynamique tridimensionnel de ces structures est plutôt limitée.

Pourtant, la compréhension des paramètres, objet du présent sujet de recherche, présentant un intérêt crucial dans les problèmes dynamiques des structures, tels que les fréquences, les modes propres de vibrations et la quantité d'énergie dissipée par la structure sont essentiels dans la compréhension du comportement dynamique des ponts sous l'effet des séismes, du vent, et des charges roulantes.

En vue de bien appréhender le comportement dynamique tridimensionnel des ponts-caissons, on se propose de présenter une synthèse de recherche subdivisée en plusieurs chapitres

Dans un premier chapitre on rappelle les généralités sur les ponts et on évoque les principaux ratios de prédimensionnement.

Nous exposons en détail dans le chapitre II, la méthode des éléments finis

Nous présentons dans le chapitre III la modélisation numérique des ponts caissons.

Le chapitre IV, fera l'objet d'une analyse modale dans les ponts unicellulaires. Le pont de Belle Ville sera un exemple d'application dans ce chapitre.

Dans le cinquième chapitre, nous abordons une analyse modale dans les ponts bi-caissons. Le pont de Gardiana est sélectionné pour ce chapitre.

Le chapitre VI présente une analyse modale et la réponse sismique dans les ponts multicellulaires

Nous interprétons dans le chapitre VII, les résultats obtenus d'une étude paramétriques sur les modes vibratoires des ponts caissons.

Cette recherche se termine par une conclusion générale et les recommandations futures et qui feront l'objet du chapitre VIII.

La plus belle chose que nous
puissions éprouver, c'est le
mystère des choses.

Einstein (Albert)

SOMMAIRE

DÉDICACE
 REMERCIEMENTS
 RÉSUMÉ
 AVANT PROPOS
 SOMMAIRE

CHAPITRE I. — GÉNÉRALITÉS SUR LES PONTS CONSTRUITS PAR ENCORBELLEMENTS SUCCESSIFS

I.1	Introduction	1
I.2	Histoire de la construction des ponts	1
I.3	Classification des ponts	3
I.3.1	Les ponts à câbles	3
I.3.2	Les ponts en arcs	3
■	Arc à deux articulations	3
■	Arc à deux articulations avec tirant	3
■	Arc bi-encasté	3
■	Arc à trois articulations	3
I.3.3	Les ponts en poutres	3
I.4	Principe de construction par encorbellements successifs	3
I.5	Avantages du procédé de construction par encorbellements successifs	4
I.6	Conception des Tabliers	5
I.6.1	Type de la section transversale	5
I.6.2	Nombre et Forme des poutres caissons	5
I.7	Principaux ratios de prédimensionnement	6
I.7.1	Distribution des portées	6
I.7.2	Elancements usuels	6
I.7.3	Épaisseur des âmes	7
I.7.4	Portée et épaisseur des hourdis	7
I.7.4.a	Portée et épaisseur du hourdis supérieur	7
I.7.4.b	Portée et épaisseur du hourdis inférieur	8

CHAPITRE II. — LA METHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

II. 1	Introduction	9
II.2	Formulation du problème par élément finis	10
II.3	Modélisation des coques par des éléments de plaques	11
II.3.1	Représentation des déplacements pour l'élément	11
II.3.1.1	Déplacements membranaires	11
II.3.1.2	Déplacements de flexions	12
II.3.2	Fonction de forme	13

II.3.3	Dérivées cartésiennes des fonctions de forme	13
II.3.4	Relation Déformations – Déplacements	14
II.3.4.1	Déformation membranaire.....	14
II.3.4.2	Déformations de flexion et de cisaillement	15
II.3.5	Relation Contrainte –Déformation	16
II.3.5.1	Etat de contraintes membranaires	17
II.3.5.2	Etat de contraintes flexionnelles	17
II.3.6	Matrice de rigidité	17
II.3.6.1	Matrice de rigidité membranaire.....	17
II.3.6.2	Matrice de rigidité flexionnelle	17
II.3.7	Forces nodales équivalentes.....	18
II.3.8	Forces résultantes	18
II.3.8.a	Moments de flexion sous forme condensée :	18
II.3.8.b	Effort tranchant sous forme condensée.....	18
II.3.8.c	Efforts normaux linéiques sous forme réduite.....	19
II.4	Convergence.....	19
II.4.1	Convergence monotone	19
II.4.2	Convergence non monotone	19
II.5	Méthode des éléments finis en dynamique	20
II.5.1	Discrétisation	20
II.5.2	Formulation des équations du mouvement	20
II.5.2.a	Energie potentielle	20
II.5.2.b	Energie cinétique	20
II.5.3	Matrice rigidité de l'élément poutre en 3D.....	21
II.5.4	Matrice des masses de l'élément poutre tridimensionnel.....	24
II.5.4.a	Matrice des masses axiale.....	24
II.5.4.b	Matrice des masses Flexionnelle	24
II.5.4.c	Matrice des masses torsionnelle.....	25
II.5.5	Vecteurs et valeurs propres.....	26

CHAPITRE III. — MODÉLISATIONS NUMÉRIQUES

III.1	Introduction.....	28
III.2	Description des modèles d'éléments finis	28
III.2.1	Modèle d'éléments finis de type portique tridimensionnels - Modèle MI.....	28
III.2.2	Modèle d'éléments finis de type coque tridimensionnels - Modèle MII.....	29
III.2.3	Modèle d'éléments finis de type volume - Modèle MIII.....	29
III.3	propriétés des éléments.....	30
III.3.1	Caractéristiques de l'élément de volume	30
III.3.1.a	Fonctions de forme de l'élément de volume.....	30
III.3.1.b	Matrice des déformations.....	31
III.3.1.c	Matrice d'élasticité	32
III.4	Analyse vibratoire	32
III.5	Etude comparative des modèles numériques.....	33
III.5.1	Présentation du Prototype unicellulaire.....	33
III.5.2	Résultats des modèles.....	34

III.6 Détermination du maillage optimal	36
III.6.1 Description du prototype multicellulaire	36
III.6.2 Principaux résultats numériques	38
III.7 Conclusion	38

CHAPITRE IV. — ANALYSE MODALE DES PONTS CAISSONS UNICELLULAIRES

IV.1 Introduction	39
IV.2 Description du viaduc de belle ville (france)	39
IV.3 Caractéristiques géométriques et mécaniques du pont de Belle ville	41
IV.4 Modèle discret du pont de Belle ville	41
IV.5 Analyse modale	42
IV.6 Conclusion	51

CHAPITRE V. — ANALYSE MODALE DES PONTS BI-CAISSONS

V.1 Introduction	52
V.2 Description générale du pont	52
V.3 Propriétés géométriques et mécaniques du pont de Serpa	54
V.4 Caractéristiques du model de calcul	54
V.5 Analyse modale	57
V.6 Conclusion	69

CHAPITRE VI. — ANALYSE DYNAMIQUE DES PONTS MULTICELLULAIRES

VI.1 Introduction	70
VI.2 Présentation générale du prototype	70
VI.3 Caractéristiques géométriques du pont multicellulaire	71
VI.4 Modélisation du pont	72
VI.5 Analyse modale 3D	75
Interprétation des résultats	75
VI.6 Analyse de la réponse sismique des ponts	82
VI.6.1 Formulation	82
VI.6.2 Résultats de l'analyse sismique	84
VI.7 Conclusion	90

CHAPITRE VII. — ETUDE PARAMÉTRIQUE

VII.1 Introduction	91
VII.2 Description du pont prototype	91
VII.3 Méthode d'analyse	92
VII.4 Resultats de l'analyse paramétrique	93
VII.4.1 Effet de l'élanement géométrique	93
VII.4.2 Effet du rapport des rigidités	95
VII.4.3 Effet des diaphragmes	96
VII.4.4 Effet de modélisation des masses	98
VII.5 Conclusion	99

CHAPITRE VIII. — CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

VIII.1 Conclusions.....	100
VIII.2 Recommandations futures.....	101
BILIOGRAPHIE	102
ANNEXE1.....	108
ANNEXE2.....	115

Chapitre I

Généralités sur les ponts construits par encorbellements successifs

I.1 INTRODUCTION

Le pont est un ouvrage d'art destiné à établir la communication entre les deux bords d'un bras de mer, d'un cours d'eau, d'une vallée.... etc. En terme général, il désigne tout ouvrage qui franchit un espace.

Depuis quelques dizaines d'années, la création du réseau autoroutier a multiplié ces ouvrages afin de franchir des rivières et des vallées, mais aussi des autres voies de transport, ferroviaires et routières, et même des zones urbanisées lorsque la densité des habitations ne permet pas l'implantation de l'autoroute au sol.

L'évolution de ce type d'ouvrage et les techniques de sa conception se sont améliorées au fil des années, et cela est dû principalement aux exigences de la société et surtout des matériaux de construction, comme le béton armé, le béton précontraint et l'acier.

Avant d'examiner et décrire avec confiance, les principaux critères permettant de mieux concevoir un pont, nous donnons un aperçu général sur l'historique des ponts.

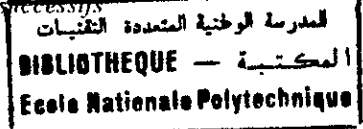
I.2 HISTOIRE DE LA CONSTRUCTION DES PONTS

Les ponts comptent parmi les plus anciens ouvrages de travaux publics. Ils furent d'abord en bois, souvent sur pilotis, inspirés des travaux lacustres ou suspendus à des lianes. Les romains construisirent les premiers ponts en pierres, très étroites et à arches voûtées ; il en reste de magnifiques spécimens.

L'histoire de la construction des ponts est avant tout celle des matériaux qui les constituent. Les ouvrages primitifs étaient réalisés avec des matériaux naturels tels que le bois, les lianes et la pierre. Avec des lianes, on a construit des passerelles suspendues ; avec la pierre, des ponts en poutre. Des passerelles de l'Himalaya constituent même des exemples de construction par encorbellements successifs, avec des troncs d'arbre encastrés dans une culée de pierres sèches et s'avancant de plus en plus au-dessus de la brèche.

La construction métallique est ancienne puisque, dès le premier siècle de notre ère, des moines bouddhistes ont bâti au Tibet des ponts suspendus dans lesquels des chaînes de fer ont remplacé les lianes. En Occident, le développement de la construction métallique date des débuts de l'ère industrielle, à la fin du XVIIIe siècle: un maître de forge, Abraham Darby III, construit le Coalbrookdale Bridge sur la Severn en 1779. L'ouvrage est constitué de cinq arcs parallèles en fonte. Le pont de Sunderland en Grande-Bretagne en 1796, avec une portée de 72 m, et la passerelle des Arts, réalisée par Cessart en 1803, marquent les débuts des ponts métalliques. Tous ceux qui ont été construits en fonte, jusque vers 1850, se sont effondrés, comme le pont Saint-Louis à Paris en 1939, ou ont été démolis, car ce matériau résistait mal à la traction et aux chocs.

Mais, avec le développement de la sidérurgie, le fer remplace la fonte. Parmi les ponts les plus célèbres, celui de Britannia construit en 1850 par Robert Stephenson, avec deux portées de 140 m, est une structure tubulaire en caisson rectangulaire à âmes pleines. On peut aussi citer les constructions de Gustave Eiffel comme le pont Maria Pia à Porto, qui est un arc de 160 m d'ouverture, en 1878, le viaduc



routier de Saint-André-de-Cubzac, en 1882, et le viaduc ferroviaire sur la Sioule. L'acier remplace le fer, grâce à ses caractéristiques mécaniques qui ne cessent de s'améliorer. Le premier pont en acier est celui de saint Louis sur le Mississippi, édifié par Ends en 1874. C'est le début d'une évolution extraordinaire marquée par la réalisation du célèbre pont du Firth of Forth par Fowler et Baker en 1890 qui est, à l'époque, le plus grand pont du monde avec deux travées de 521 m.

Avec l'invention par les frères Seguin des câbles formés de fils de fer parallèles de petit diamètre (3 mm), d'une résistance nettement supérieure aux chaînes à barres. Un autre chapitre de construction des ponts alla connaître un essor excessif, ils bâtissent le pont de Tournon sur le Rhône, en 1825, avec deux travées de 85 m. Le record est battu en 1883 par J. Roebling avec des câbles formés de fils d'acier parallèles. La portée du pont de Brooklyn, à New York, atteint 486 m. Les câbles sont désormais en acier à très haute limite élastique. La portée du George Washington Bridge, construit par O. H. Amman sur l'Hudson à New York en 1931, dépasse pour la première fois les 1 000 m. C'est le premier grand pont suspendu moderne, mais il est moins connu que le Golden Gate Bridge, édifié par J. Strauss en 1937 à San Francisco, qui lui ravit le record avec 1 281 m. Amman le reprendra en 1964 en bâtissent le Verrazzano Narrows Bridge, à l'entrée du port de New York (1298 m).

L'effondrement du pont de Tacoma Narrows, le 7 novembre 1940, quatre mois après sa construction, mit en évidence des phénomènes aérodynamiques insoupçonnés. Un vent de vitesse modérée (de l'ordre de 18 mètres par seconde) a pu produire des oscillations de flexion qui ont été entretenues et amplifiées par couplage avec la torsion de l'ouvrage, dont la période propre était très voisine. Les études aéroélastiques et de réponse aux effets du vent turbulent sont donc essentielles aujourd'hui pour les ponts de très grande portée, et conditionnent largement la conception. Mais, actuellement, les ponts suspendus ont perdu une grande partie de leur domaine d'emploi au profit des ouvrages à haubans, dont certains ont déjà été bâtis dès le début du XIXe siècle.

Un autre grand chapitre de la construction s'est ouvert au XIXe siècle avec l'invention du béton, du béton armé et, plus tard, du béton précontraint. Le véritable essor du béton précontraint date de l'après-guerre, avec le pont de Luzancy sur la Marne, commencé en 1941 et achevé en 1946, et avec la série des cinq autres ponts de Freyssinet sur la Marne entre 1947 et 1950 (Esbly, Annet, Trilbardou, Changis et Ussy); il s'agit d'ouvrages à une travée à petites béquilles obliques articulées dont la portée atteint 55 m à Luzancy et 74 m pour les cinq autres. Les ponts à travées isostatiques constitués de poutres préfabriquées et précontraintes sous chaussée se multiplient à partir de la fin de la guerre: pont de Bourg d'Oisans, 42 m en 1946; travées d'accès au pont de Tancarville, 50 m en 1956; pont du lac Ponchartrain aux États-Unis, long de 38 km et constitué de 2 232 travées de 17 m, en 1956.

En Allemagne, Ulrich Finsterwalder développe la construction par encorbellements successifs à partir de 1950 (ponts de Balduinstein et de Neckarrens en 1950, de Worms en 1952 et de Coblenze en 1953). Cette technique, introduite en France par Jean Courbon, a été utilisée pour réaliser le pont de Chazey, en 1957, et ceux de Beaucaire et de Savine. La technique a été améliorée ensuite par la constitution de poutres continues, et surtout par le développement par Campenon Bernard des voussoirs préfabriqués conjugués-collés. Les plus grands ponts qui ont été construits par encorbellements successifs sont ceux de la baie Urado (230 m) et de Hamana (240 m, en 1977) au Japon, et celui de Brisbane en Australie (260 m en 1986). En France, les deux plus grands sont les ponts de Gennevilliers (1976) et d'Ottmarsheim (1979) avec une portée de 172 m.

Enfin, le béton précontraint a permis la construction de quelques ponts suspendus (pont de Mariakerke en Belgique) et surtout de très nombreux ponts à haubans, lointains successeurs de l'aqueduc de Tampil et de l'ouvrage du canal de Donzère. C'est l'ingénieur italien Morandi qui a édifié les premiers grands ouvrages, avec des formes lourdes et coûteuses en matière, et avec des haubans très

peu nombreux (pont du lac Maracaibo en 1962, avec des portées de 235 m; pont de Wadi Kuf, en Libye, avec une portée de 282 m en 1972). Le premier grand pont à haubans moderne en béton précontraint est celui de Brotonne, construit par Jean Muller et Jacques Mathivat (portée de 320 m, 1977). Les ponts à haubans et ponts suspendus, constituent les seules solutions adaptées aux très grandes portées. Les ouvrages à haubans commencent à devenir plus économiques que ceux en poutre à partir de 200 m environ. Le pont Saint-Nazaire a détenu, pendant longtemps, le record du monde de portée (404 m, 1975) avec son caisson orthotrope de forme quasi rectangulaire.

1.3 CLASSIFICATION DES PONTS

Il est extrêmement difficile de classer les ponts en différentes catégories, car il existe de très nombreux critères de classement. Parmi ces derniers, on distingue :

- Selon le matériau de la superstructure porteuse (pont métallique, pont mixte.....etc)
- Selon la section transversale (pont à section fermée, pont à section ouverte)
- Selon le système porteur (pont à poutres, pont en arcs, pont à béquilles, pont à câbles porteurs)
- Selon la géométrie en plan de l'ouvrage (pont droit, pont courbe, pont biais)
- Selon le montage de l'ossature métallique (pont lancé, étayé, en encorbellement)
- Selon la nature de la voie portée (pont rail, pont route, autres ouvrages)

Traditionnellement, on distingue trois grandes familles de ponts en fonction de leurs structures porteuses longitudinales [20] :

1.3.1 Les ponts à câbles

Ils regroupent aussi bien les ouvrages suspendus classiques que ceux qui sont autoancrés, dans lesquels les grands câbles porteurs sont fixés sur le tablier par l'intermédiaire des suspentes, et les ponts à haubans, dans lesquels chacun des haubans vient directement s'accrocher sur le tablier.

1.3.2 Les ponts en arcs

Les ponts en arcs sont généralement classés en fonction du nombre de leurs articulations, on distingue :

- Arc à deux articulations
- Arc à deux articulations avec tirant
- Arc bi-encasté.
- Arc à trois articulations.

Le système couramment utilisé est l'arc à deux articulations, il permet d'atteindre des portées importantes.

Suivant la position du tablier par rapport à l'arc, les ponts en arcs peuvent être à tablier supérieur, intermédiaire ou inférieur. Rappelons aussi que ce type d'ouvrage nécessite un bon sol de fondation.

1.3.3 Les ponts en poutres

Ils présentent les formes les plus diverses. L'ouvrage peut tout d'abord être une poutre continue sur des appuis multiples, ou au contraire divisé en une succession de travées indépendantes. Les poutres constituant la partie porteuse de l'ouvrage peuvent être soit en acier, en béton armé ou précontraints, à âmes pleines ou en treillis de formes très diverses.

La suite de ce présent chapitre sera consacrée exclusivement à la construction des ponts par encorbellements successifs.

1.4 PRINCIPE DE CONSTRUCTION PAR ENCORBELLEMENTS SUCCESSIFS

La construction par encorbellements successifs consiste à construire le tablier en console au-dessus du vide sans l'aide d'aucun échafaudage. Elle se fait soit symétriquement à partir des piles, soit

exceptionnellement à partir d'une culée d'encastrement. Le Tablier est découpé en segment dans le sens transversal, dont chaque tranche appelée "**Voussoir**" qui est solidaire contre les voussoirs précédents par l'intermédiaire des câbles de fléaux [35].

La construction à partir d'une pile, suit les étapes indiquées par le schéma suivant :

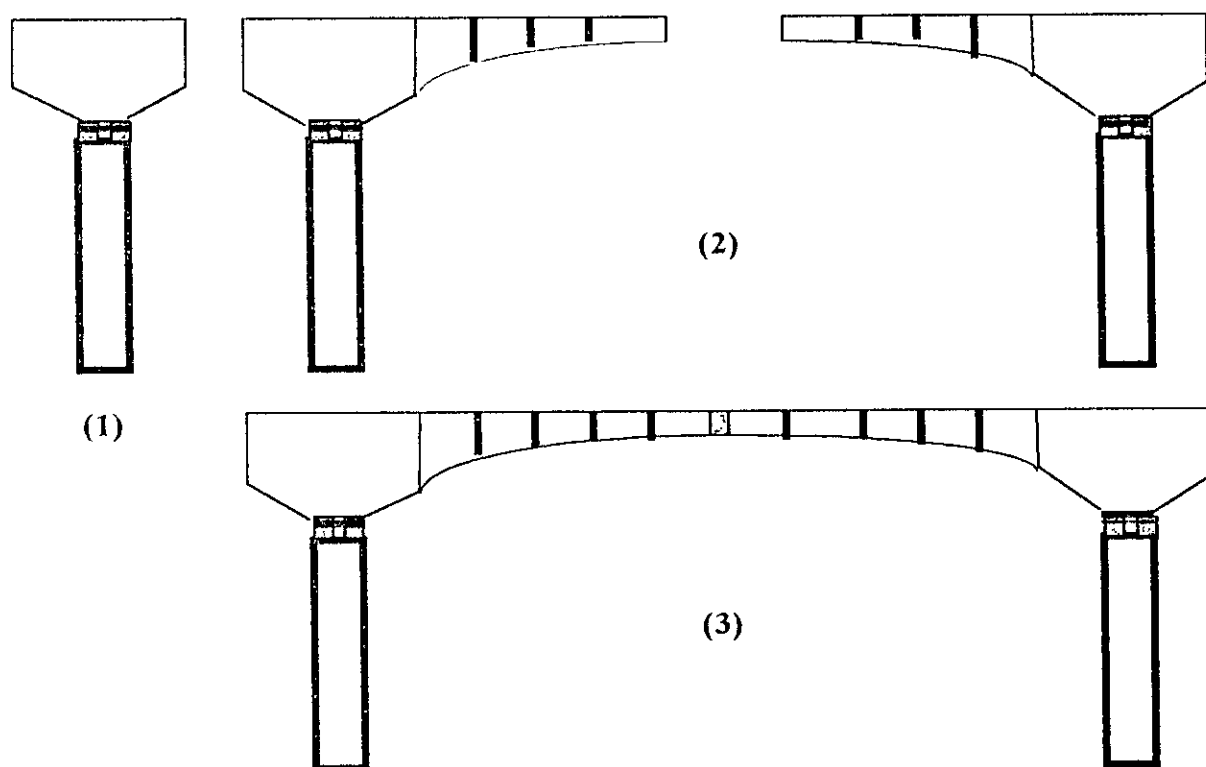


Fig. I.1- Construction par fléaux symétriques
(1) , (2) et (3)

■ Phase 1

Construction et enracinement sur pile du voussoir principal. Cet encastrement, lorsqu'il est provisoire, s'obtient par la mise en place des palets d'appuis de part et d'autre de la pile ou par clouage du tablier sur la pile par la précontrainte.

■ Phase 2

Construction en série de voussoirs suivants qui doit se faire symétriquement par rapport à la pile afin d'équilibrer le moment de flexion trop important, et mise en tension des câbles.

■ Phase 3

Une fois la construction des fléaux est achevée, on doit procéder à la liaison des deux fléaux par une articulation ou par construction du voussoir de clavage.

I.5 AVANTAGES DU PROCEDE DE CONSTRUCTION PAR ENCORBELLEMENTS SUCCESSIFS

Les ponts construits par encorbellements successifs ont pratiquement monopolisé les portés allant de 60 à 150m. D'autres facteurs ayant permis l'épanouissement de ces derniers sont nombreux. Les avantages suivants peuvent être cités :

- Suppression de cintre et du système d'échafaudage.
- Rapidité d'exécution permise par le procédé.

- Fabrication des voussoirs en atelier; avec une qualité supérieure à celle du chantier puisqu'en général, une partie notable du retrait s'est déjà effectuée et les mises en précontraintes se sont faites sur un béton durci.
- Augmentation du rendement de la main d'œuvre, due à la mécanisation des tâches à l'intérieur d'un cycle répétitif.
- Facilité d'entretien (circulation du personnel, passage de canalisations, ...etc.).
- Procédé économique qui a concurrencé ces dernières années les ponts métalliques

I.6 CONCEPTION DES TABLIERS

I.6.1 Type de la section transversale

Dans cette étude le choix de la section transversale sera de type tubulaire, puisqu'elle présente la section transversale la mieux adaptée à la construction par encorbellements successifs. Ce choix peut être justifié principalement par les raisons suivantes.

- La structure tubulaire présente un bon rendement mécanique.
- D'autre part, la stabilité élastique et dynamique du tablier pendant sa construction par encorbellements est assurée de façon plus satisfaisante avec une structure tubulaire présentant une grande raideur de torsion qu'avec une structure à profil ouvert.
- Vu l'importance de rigidité torsionnelle et flexionnelle des poutres caissons, on peut s'exempter des entretoises.

I.6.2 Nombre et Forme des poutres caissons

La largeur du pont intervient aussi dans la conception de la section transversale, particulièrement dans le cas des ouvrages en caisson dont la portée est supérieure à 50 m en général. À la fin des années 1960, la solution classique consistait à concevoir un caisson unique à deux âmes pour des ponts d'une dizaine de mètres de largeur. Les âmes peuvent être soit verticales soit inclinées dont l'angle d'inclinaison avec la verticale est entre 11.30° et 14° . On peut citer plusieurs exemples, comme le pont de Belle Ville en France, le pont de Béni chougane en Mascara et le pont de Coatzacoalcos au Mexique.

Pour les tabliers dont la largeur est comprise entre 13 et 18m, il est plus commode d'utiliser des caissons à trois âmes. Mais ces derniers présentent un bilan économique lamentable et de difficulté de réalisation. On citera comme exemple, le pont d'Oissel et de Joinville sur la seine.

Au-delà de 18m, il est préférable de raccorder les deux poutres-caissons simples, reliées par le hourdis supérieur permettant de réaliser les tabliers jusqu'à 25 m de largeur. On citera comme exemple le pont d'Elzaher et d'El hafayer à la Mecque (Arabie saoudite) et celui de Serpa au Portugal.

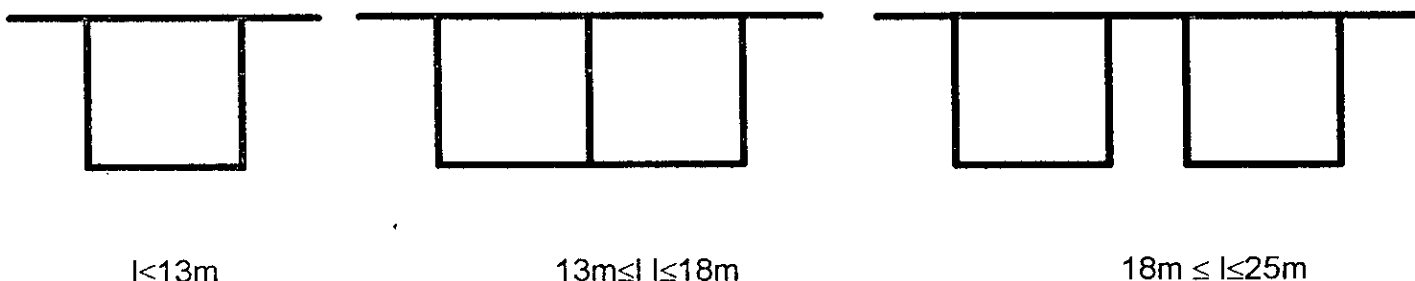


Fig. I.2- forme de la section transversale

On peut envisager de réaliser un tablier en caisson multicellulaire avec deux âmes centrales verticales et deux âmes de rives inclinées. Cette structure offre une très grande rigidité de torsion, une solution de ce type a été cependant optée pour le pont de Saint Cloud en France.

1.7 PRINCIPAUX RATIOS DE PREDIMENSIONNEMENT

Dans le cadre de construction, il est impérativement d'accorder et d'étudier avec attention les problèmes relatifs aux ponts. En effet, l'étude, la conception et le dimensionnement de ce type de structure fait appel à l'ensemble des connaissances acquises lors de l'élaboration d'un projet de ponts. Dans un premier temps, l'ingénieur doit procéder à une première esquisse de son ouvrage afin de calculer avec précision convenable les sollicitations dans les ponts.

Dans un premier temps, on doit estimer les dimensions de l'ouvrage à partir des statistiques relevées sur les dimensions des ouvrages existants.

Dans ce présent paragraphe, nous développons quelques aspects portant sur le prédimensionnement des ponts à voussoirs [28].

1.7.1 Distribution des portées

Si l'ouvrage admet les mêmes portées intermédiaires (l), dans ce cas les travées de rives seront nettement supérieures à la moitié des portées adjacentes. La longueur des travées de rive est de l'ordre de $0.58l$ à $0.6l$ si la hauteur du tablier est variable et de $0.68l$ à $0.7l$ si la hauteur de ce dernier est constante.

Dans le cas où les travées intermédiaires sont de longueurs différentes la distribution de portées doivent respecter la condition suivante :

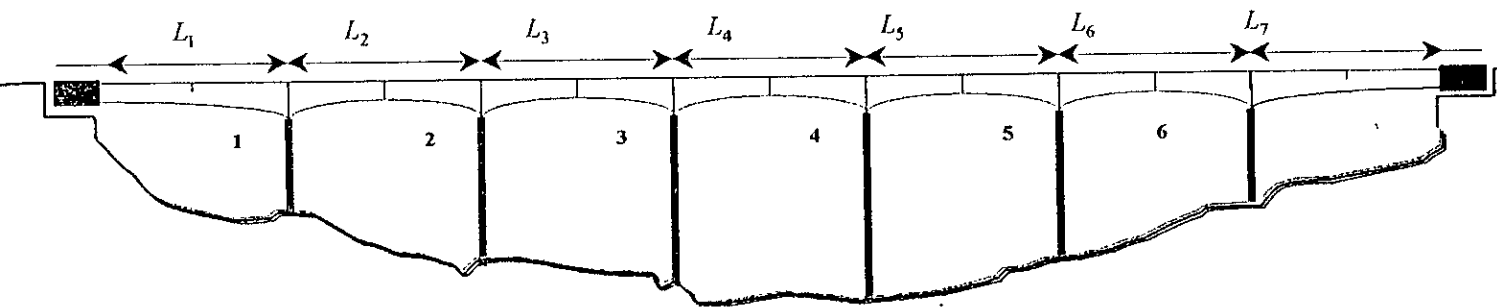


Fig. 1.3- Ouvrage avec les portées variant régulièrement

$$\sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i+1} l_i - d_i + (-1)^n d_n = 0 \quad (1.7.a)$$

d_1 et d_n représentent les longueurs des extrémités des travées de rive construites sur échafaudage.

1.7.2 Elancements usuels $\left[\frac{h}{l} \right]$

Les ponts à intrados courbe variant paraboliquement ou cubique offrent un certain nombre d'avantage :

- Economie de matériaux
- Aspect esthétique satisfaisant.

L'élancement usuel du tablier aux appuis est compris de 1/16 à 1/20 si la hauteur du caisson varie paraboliquement. Par contre l'élancement du tablier à la clé varie fréquemment entre 1/30 et 1/35, il est déconseillé d'aller au-delà 1/40. La valeur minimale requise est de 2.20m pour faciliter l'entretien de l'ouvrage.

Pour le tablier de hauteur constante le rapport entre la longueur et la hauteur varie entre 20 et 22 dans les cas courants.

1.7.3 Epaisseur des âmes

Leur exécution se traduit souvent par des difficultés de bétonnage liées à leur grande hauteur ainsi qu'à la densité du ferrailage passif et au tracé des nombreux câbles de précontrainte. Dans ces conditions il est apparu qu'une épaisseur minimale de 40 cm était souhaitable pour réduire les difficultés de mise en œuvre. Des valeurs inférieures devront être soigneusement justifiées compte tenu des conditions du bétonnage, notamment de la hauteur des âmes et de l'encombrement des armatures.

- Si les câbles de continuité sont ancrés à l'intérieur des goussets, l'épaisseur de l'âme est déterminée par la condition de résistance à l'effort tranchant et la facilité de l'introduction du béton à l'intérieur de l'âme. On peut s'inspirer de la formule suivante :

$$e_a = \frac{l}{275} + 1.25 \frac{b}{l} - 0.125 \tag{1.7.b}$$

Ou l et b en (m) sont les valeurs respectivement de la portée dominante et la largeur totale du tablier.

- Si les câbles sont enracinés à l'intérieur des âmes, l'épaisseur de ces dernières sera déduite par une simple application de la formule de gayon :

$$e_a \geq \frac{h}{36} + 5 + \theta(cm), \dots \dots \dots \text{si } h \leq 6m$$

$$e_a \geq \frac{h}{22} + 8 + \theta(cm), \dots \dots \dots \text{si } h \geq 7m \tag{1.7.c}$$

Remarque :

Pour des hauteurs égales ou légèrement supérieures à 6, il est préférable de ne pas descendre au-dessous de 30 cm

1.7.4 Portée et épaisseur des hourdis

1.7.4.a Portée et épaisseur du hourdis supérieur

On considère que le hourdis supérieur est parfaitement encasté sur les âmes reliées par le hourdis inférieur qui en jouant le rôle de tirant en empêchant les âmes de déverser.

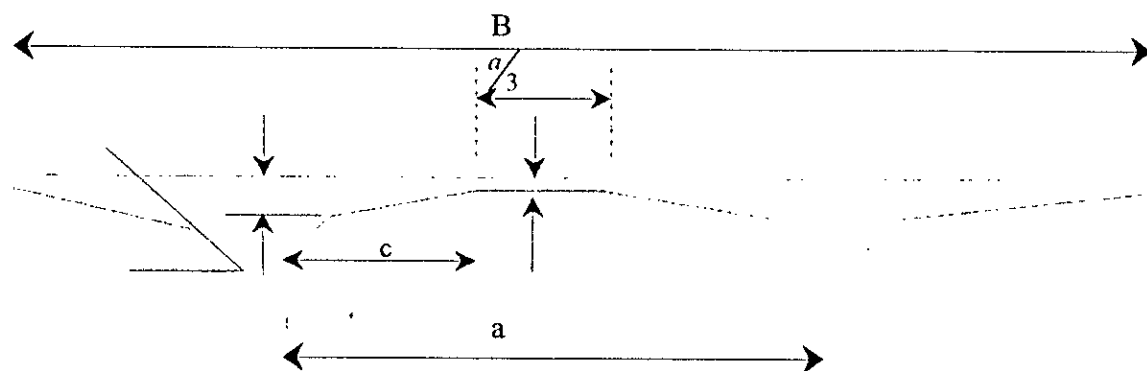


Fig. I.4

- $a = \frac{B}{2}$ dont a et B étant la portée et la largeur du hourdis supérieur,
- Le rapport $\frac{e_0}{a}$ est compris entre 0.04 et 0.033

- L'épaisseur e_0 peut être déterminée par la formule de Guyon :

$$e_0 = \frac{1}{36} + 10 \quad \text{en cm} \quad (1.7.d)$$

- L'épaisseur, à l'extrémité de l'encorbellement varie entre 20 et 25 cm
- Le rapport $\frac{e}{b}$ est compris entre 1/5 et 1/7

En appelant a la portée entre nu des âmes, la longueur c du gousset est déduite par la formule suivante :

$$c = \frac{21}{3} \times \left(a - \frac{e_0}{e_1} \right) \quad (1.7.e)$$

1.7.4.b Portée et épaisseur du hourdis inférieur

Elle est conditionnée par les règlements suivants :

- Les nouvelles règles conduisent à un ferrailage important du hourdis inférieur pour lequel il est convenable de prévoir une épaisseur minimale de 18 cm.
- Lorsque les câbles de continuité sont logés dans celui-ci, il est recommandé d'avoir une épaisseur au moins égale à trois fois le diamètre extérieur des gaines.
- Pour assurer une bonne diffusion et répartition des efforts, il convient de prévoir des épaisseurs non disproportionnées pour les âmes et le hourdis inférieur. A cet égard il semble souhaitable que l'épaisseur du hourdis inférieur ne descende pas au-dessous du tiers de celle des âmes. En cas de différence importante d'épaisseur pour ces divers éléments, des goussets de raccordement s'imposent.
- Il est rappelé enfin que l'épaisseur du hourdis inférieur dépend de la contrainte de compression longitudinale du béton admissible (flexion générale) et des efforts transversaux qui résultent notamment de la poussée au vide.

Chapitre II

LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

II. 1 INTRODUCTION

La méthode des éléments finis est introduite pour amener l'ingénieur à réaliser des projets d'envergures de plus en plus complexes et coûteux. La M.E.F est l'une des méthodes à domaine d'application très vaste. C'est une méthode très générale et à caractère pluridisciplinaire, car elle met en œuvre la compréhension de trois disciplines de base :

- La mécanique des structures (élasticité plasticité dynamique)
- Traitement par micro ordinateur
- L'analyse numérique

Le concept de la méthode des éléments finis est préalablement introduit par Turner et AL, et les idées de base de cette méthode ont été formulées par Hrennikof et Mchenry . L'appellation de la méthode des éléments revient au professeur R.W. Clough de l'université de Berkley dans une publication datée de 1960.

L'avènement de la M.E.F comme outil d'analyse essentiel a suivi l'évolution des ordinateurs comme outil de calcul indispensable. Les étapes principales de la méthode des éléments finis sont décrites de la manière suivante [76]:

1. Le milieu continu est divisé par des lignes ou des surfaces imaginaires en un certain nombre d'éléments finis.
2. Les éléments sont supposés reliés entre eux en un nombre fini de points nodaux situés sur leurs frontières. Les déplacements U de ces points seront les inconnues.
3. On choisit des fonctions permettant de définir de manière unique le champ de déplacement à l'intérieure de chaque élément en fonction des déplacements nodaux.
4. On définit ensuite l'état de déformation à l'intérieur de l'élément en fonction des déplacements nodaux, et compte tenu des propriétés élastiques du matériau, ces déformations vont nous permettre de définir l'état des contraintes en tout point de l'élément.
5. A partir de l'état de déformation de l'élément, on aboutit à la matrice de déformation de l'élément: il en résulte ensuite une matrice de rigidité globale de la structure.
6. On détermine un système de forces concentrées aux nœuds qui équilibre les contraintes s'exerçant aux frontières et d'éventuelles forces réparties.
7. On procède ensuite à la résolution de l'équation d'équilibre dont les inconnues seront les déplacements aux nœuds.

II.2 FORMULATION DU PROBLEME PAR ELEMENT FINIS

La méthode des éléments finis basée sur les fonctions des déplacements est une extension de la méthode des déplacements considérée comme une minimisation de l'énergie potentielle totale définie par l'expression suivante :

$$\Pi = L - V \quad (\text{II.2.1})$$

Π , représente l'énergie potentielle totale du système

U, Energie de déformation des contraintes internes

V, Potentiel des charges ou l'énergie des forces extérieures

Le principe du travail virtuel stipule que l'équilibre du milieu nécessite pour tout champ de déplacement virtuel (δu) infinitésimal, compatible, et satisfaisant les conditions aux limites essentielles (type déplacement) impose au milieu l'équilibre des travaux intérieurs et extérieurs.

$$\int_V \varepsilon' \tau dv = \int_V \delta b dv + \int_A \delta t dA + \delta f \quad (\text{II.2.2})$$

ou $b dv$ représente les forces volumiques de l'élément,

$t dA$, forces surfaciques élémentaires,

F, forces extérieures concentrées,

et δ , ε et τ sont respectivement le déplacement virtuel, déformation et vecteur contrainte .

Le premier terme de l'équation représente l'énergie de déformation, le second et le troisième sont les contributions du travail des forces volumiques et surfaciques et le dernier terme désigne le travail des charges ponctuelles.

Dans la démarche fondamentale de la M.E.F, le milieu continu est subdivisé en un ensemble d'éléments de manière à représenter le mieux possible sa géométrie. Par ailleurs, il est nécessaire de se donner une approximation du champ de déplacement à l'intérieur de l'élément, soit :

$$\{u\} = [H] \cdot \{\hat{u}\} \quad (\text{II.2.3})$$

H est une matrice contenant les fonctions de forme

$\{\hat{u}\}$ est le vecteur de déplacement nodal de l'élément

Les déformations en un point quelconque de l'élément peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\varepsilon = L \cdot u \quad (\text{II.2.4})$$

L désigne l'opérateur linéaire.

En faisant intervenir la relation (II. 2.3) l'expression ci dessus devient :

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{u\} \quad (\text{II.2.5})$$

Dans laquelle B représente la matrice de déformation !

$$[B] = L \cdot [H] \quad (\text{II.2.6})$$

Par ailleurs, en utilisant l'expression des travaux virtuels, les relations linéaires contraintes déformations et les expressions (II.2.3, II.2.4, II.2.5 et II.2.6), on aboutit facilement à un système d'équations régissant l'équilibre du milieu et dont les inconnues sont des déplacements nodaux.

$$[K] \cdot [u] = \{R\} \quad (\text{II.2.7})$$

Avec

$[K]$ étant la matrice de rigidité globale de la structure définie par l'intégrale suivante :

$$K = \int_v B^t \cdot D \cdot B \cdot dv \tag{II.2.8}$$

$\{R_i\}$: désigne le vecteur des forces nodales équivalentes

$$\{R_i\} = \int_v H^t b dv + \int_A H^t t dA + F \tag{II.2.9}$$

D est une matrice d'élasticité du matériau.

II.3 MODELISATION DES COQUES PAR DES ELEMENTS DE PLAQUES

Les coques constituent l'un des types de structure les plus difficiles à analyser et on peut les rencontrer souvent dans les constructions de génie civil (pont, Voûte, tours). Les éléments de plaques plans jouent un rôle très important dans l'analyse des structures coques et offrent une précision satisfaisante.

Nous adoptons l'hypothèse de la théorie de plaque qui stipule que les phénomènes de membranes (dans le plan) et de flexions (transversales) sont découplés [27]. Le principe d'obtention d'un élément de coque plan par superposition d'un élément de membrane et d'un élément de flexion est illustré sur la figure (II.1).

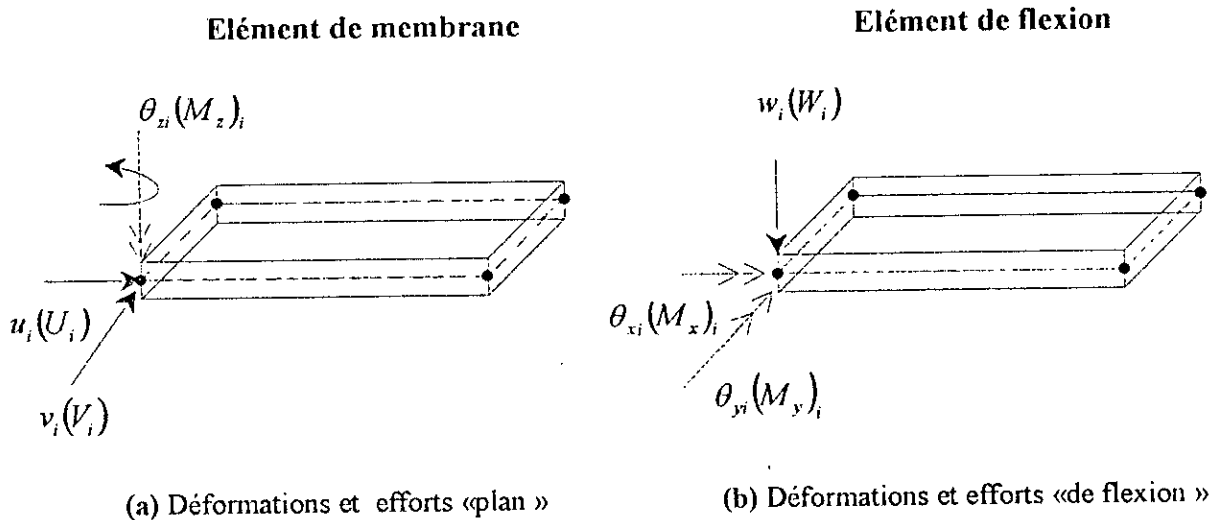


Fig. II.1- Elément serendip quadratique (membrane + flexion)

En tenant compte, de l'hypothèse que les effets membranaires et flexionnels sont découplés, les déplacements issus de cette superposition seront indépendants, et il serait préférable de supprimer le degré de liberté de rotation (θ_z) afin de s'échapper à la singularité de la matrice [27].

II.3.1 Représentation des déplacements pour l'élément

II.3.1.1 Déplacements membranaires

Les déplacements membranaires s'expriment seulement en fonction des déplacements nodaux de translations, Ils sont donnés par les relations suivantes :

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{i=4} h_i(x, y) \hat{u}_i \quad \text{et} \quad v(x, y) = \sum_{i=1}^{i=4} h_i(x, y) \hat{v}_i \tag{II.3.1.a}$$

Où sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_i & 0 \\ 0 & H_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3.1.b})$$

H_i définit un vecteur ligne contenant les fonctions de formes (h_1, h_2, h_3, h_4)

$$\hat{u}^t = (u_1, u_2, u_3, u_4)$$

$$\hat{v}^t = (v_1, v_2, v_3, v_4)$$

II.3.1.2 Déplacements de flexions

La théorie des plaques correspondantes dans laquelle on néglige les effets de cisaillements transversaux, est due à Kirchoff. Cette théorie s'impose dans le cas des plaques minces ou lorsque les caractéristiques de cisaillement du matériau sont importantes. Dans cette théorie, les sections seront toujours droites et conservent leurs normalités à la surface moyenne ou cours de la déformation. Lorsque, les conditions précédentes ne sont pas remplies, les effets de cisaillement ne seront plus négligeables.

Il existe une théorie qui prend en considération ces effets: c'est la théorie de "Mindlin - Reissner" [27]. Elle suppose qu'une normale à la surface moyenne de la plaque non déformée reste droite mais pas nécessairement normale à la surface moyenne de la plaque déformée. Les déplacements seront en fonction de trois variables indépendantes : le déplacement transversal $w(x,y)$ et les deux rotations $\beta_x(x,y)$ et $\beta_y(x,y)$, Ces déplacements sont du premier ordre et exigent une continuité C_0 sur les déplacements.

Les déplacements u, v et w en n'importe quel point de l'élément mindlin dans le repère cartésien peuvent être exprimés comme suit :

$$u = Z \cdot \beta_x(x,y) \quad v = -Z \cdot \beta_y(x,y) \quad w = w(x,y) \quad (\text{II.3.1.c})$$

ou, w, β_x et β_y sont des variables cinématiques indépendantes représentant la déflexion verticale et respectivement des rotations de la normale à la surface moyenne dans le plan $x - z$ et $y - z$ (voir figure ci-après).

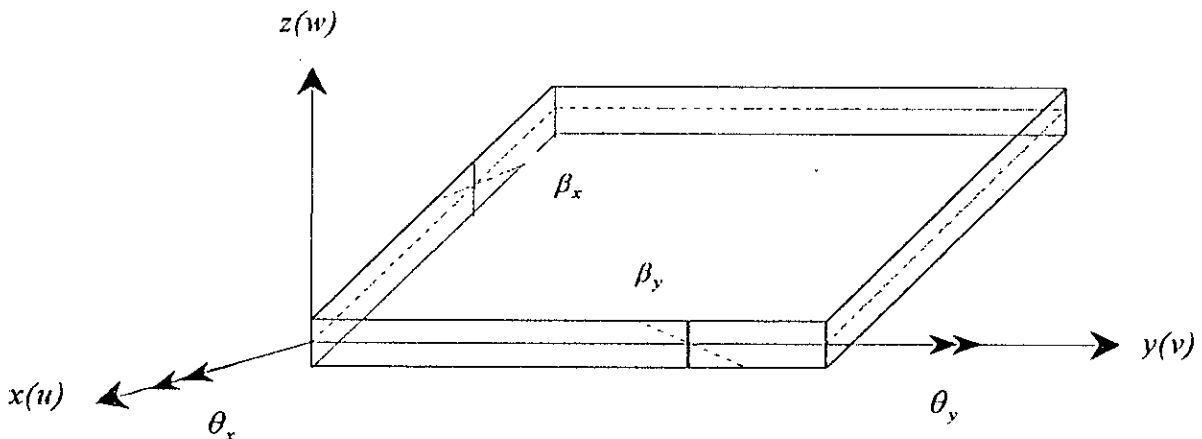


Fig. II.2- Déformation de la section transversale de la plaque de Mindlin

II.3.2 Fonction de forme

Une fonction de forme définit le champ de déplacement en fonction des déplacements nodaux, elle est liée au nombre de nœuds et le type d'élément (Fig. II.2). Le vecteur déplacement en n'importe quel point de l'élément serendip quadratique basé sur l'élément de plaque est donné par les relations simplifiées :

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i=1}^{i=4} h_i u_i \quad \text{et} \quad v = \sum_{i=1}^{i=4} h_i v_i && \text{Déplacements membranaires} \\
 w &= \sum_{i=1}^{i=4} h_i \hat{w}_i, \beta_x = \sum_{i=1}^{i=4} h_i \theta_x^i && \beta_y = \sum_{i=1}^{i=8} h_i \theta_y^i \quad \text{Déplacements de flexions}
 \end{aligned}
 \tag{II.3.2.a}$$

Ou encore sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_y \\ \beta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = H \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}
 \tag{II.3.2.b}$$

Avec $H_i = \langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle$

$\hat{u}^t = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $\hat{v}^t = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, $\hat{w}^t = (w_1, w_2, w_3, w_4)$, $\theta_x^t = (\theta_x^1, \theta_x^2, \theta_x^3, \theta_x^4)$ et $\theta_y^t = (\theta_y^1, \theta_y^2, \theta_y^3, \theta_y^4)$

h_i désignent les fonctions de formes dans un nœud (i) de l'élément à quatre nœuds données par zienkiewicz [75].

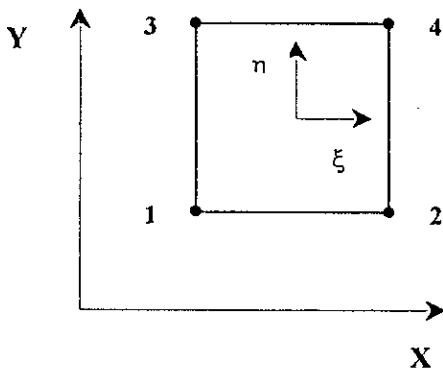


Fig. II.3- Elément isoparamétrique de plaque (type serendip)

$$h_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i)
 \tag{II.3.2.c}$$

II.3.3 Dérivées cartésiennes des fonctions de forme

Les dérivées cartésiennes des fonctions de forme peuvent être obtenues par l'utilisation de l'opérateur des dérivés partielles.

$$\begin{cases} \frac{\partial h_i}{\partial \eta} = \frac{\partial h_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial h_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial h_i}{\partial \xi} = \frac{\partial h_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial h_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{cases} \quad (\text{II.3.3.a})$$

Ou encore sous forme matricielle.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial h_i}{\partial \xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3.3.b})$$

Les fonctions d'interpolations géométriques des coordonnées $X(\eta, \xi)$ et $Y(\eta, \xi)$ en tout point de l'élément sont obtenues par les expressions suivantes :

$$X(\eta, \xi) = \sum_{i=1}^{i=4} h_i(\eta, \xi) \cdot x_i \quad \text{et} \quad Y(\eta, \xi) = \sum_{i=1}^{i=4} h_i(\eta, \xi) \cdot y_i \quad (\text{II.3.3.c})$$

x_i et y_i étant les coordonnées du nœud i dans le repère physique.

La relation de différentiation (II.3.3.b) peut s'écrire sous une forme réduite.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3.3.d})$$

J est le jacobien de la transformation défini par

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.3.e})$$

II.3.4 Relation Déformations – Déplacements

L'état de déformation d'une plaque se déduit de la superposition des déformations de membranes et de flexion :

$$\varepsilon = \varepsilon(m) + \varepsilon(f) \quad (\text{II.3.4.a})$$

II.3.4.1 Déformation membranaire

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3.4.b})$$

Ou bien sous forme matricielle

Ou bien sous forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3.4.c})$$

A partir des relations II.3.1.a, l'expression précédente devient.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial H_i}{\partial y} \\ \frac{\partial H_i}{\partial y} & \frac{\partial H_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3.4.d})$$

Qu'on peut écrire sous forme condensée :

$$\varepsilon = B \cdot \hat{u} \quad (\text{II.3.4.e})$$

Avec

$$B = L \cdot H$$

Ou L étant l'opérateur linéaire, B est une matrice de déformation regroupant les dérivées cartésiennes des fonctions d'interpolations.

II.3.4.2 Déformations de flexion et de cisaillement

- L'état de déformation de flexion de la plaque de Mindlin peut être exprimé en fonction de trois variables indépendantes par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = Z\beta_{x,x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial x} = -Z\beta_{y,y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = Z(\beta_{x,y} - \beta_{y,x}) \end{aligned} \quad (\text{II.3.4.f})$$

Sous forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = Z \begin{bmatrix} +\beta_{x,x} \\ -\beta_{y,y} \\ +\beta_{x,y} - \beta_{y,x} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.4.g})$$

Qu'on peut aussi récrire sous forme condensée.

$$\varepsilon = Z \cdot \lambda$$

λ définit le vecteur de variation de courbure

$$\lambda = \begin{bmatrix} +\beta_{x,x} \\ -\beta_{y,y} \\ +\beta_{x,y} - \beta_{y,x} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.4.h})$$

■ L'état de déformation de cisaillement de la plaque de Mindlin est formulé par les relations suivantes.

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_{yz} = w_{,y} - \beta_y \\ \gamma_{xz} = w_{,x} + \beta_x \end{cases} \quad (\text{II.3.4.i})$$

γ caractérise le vecteur de distorsion de la plaque

A partir des relations donnant la courbure et les distorsions (II.3.4.h et II.3.4.i) et les expressions des fonctions de forme (II.3.2.a) de la plaque de Mindlin, on aboutit aux matrices de déformation associées à la flexion et au cisaillement :

$$\lambda = \begin{bmatrix} \beta_{x,x} \\ -\beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} - \beta_{y,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{i,x} \\ 0 & -H_{i,y} & 0 \\ 0 & -H_{i,x} & H_{i,y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{w} \\ \hat{\theta}_x \\ \hat{\theta}_y \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3.4.j})$$

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_{yz} = w_{,y} - \beta_y \\ \gamma_{xz} = w_{,x} + \beta_x \end{cases} = \begin{bmatrix} H_{i,y} & -H_i & 0 \\ H_{i,x} & 0 & H_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{w} \\ \hat{\theta}_x \\ \hat{\theta}_y \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3.4.k})$$

Avec, $H = (h_1, h_2, h_3, h_4)$

Ces deux expressions peuvent se mettre sous une forme abrégée :

$$\begin{aligned} \lambda(r, s) &= \beta_\lambda u_i \\ \gamma(r, s) &= \beta_\gamma u_i \\ u'_i &= (\hat{w}, \hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y) \end{aligned} \quad (\text{II.3.4.l})$$

β_λ et β_γ désignent respectivement les matrices de déformation de flexion et de cisaillement.

u'_i , définit le vecteur transposé de déplacement nodal

La relation globale de déformation – déplacement de la plaque de Mindlin s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ZH_{i,x} \\ 0 & -ZH_{i,y} & 0 \\ 0 & -ZH_{i,x} & ZH_{i,y} \\ H_{i,x} & 0 & H_i \\ H_{i,y} & -H_i & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{w} \\ \hat{\theta}_x \\ \hat{\theta}_y \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3.4.m})$$

II.3.5 Relation Contrainte –Déformation

L'état de contrainte induit par les déformations de la plaque est obtenu par la superposition d'un état de contrainte symétrique par rapport au plan moyen (membrane) et d'un état de contrainte de flexion.

II.3.5.1 Etat de contraintes membranaires

La loi de HOOK généralisée, nous permet d'établir une relation contrainte - déformation définie comme suit :

$$\sigma - \sigma_0 = D(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (\text{II.3.5.a})$$

σ_0, ε_0 Etant des contraintes et déformations supplémentaires et D est la matrice d'élasticité en comportement membranaire :

II.3.5.2 Etat de contraintes flexionnelles

La prise en compte de cisaillement introduit un terme supplémentaire dans l'état de contraintes de flexions de la plaque de Mindlin, on distingue :

- Les contraintes induites par les déformations de flexion sous une forme condensée

$$\sigma = D\varepsilon = Z \cdot D \cdot \lambda \quad (\text{II.3.5.b})$$

- Les contraintes induites par les déformations de cisaillement sous une forme condensée

$$\tau = \gamma \cdot G \quad (\text{II.3.5.c})$$

ou sous forme matricielle.

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = G \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3.5.d})$$

II.3.6 Matrice de rigidité

La matrice de rigidité de l'élément plaque se calcule à partir de la superposition de la matrice de rigidité membranaire et la matrice de rigidité flexionnelle :

$$K = K_m + K_f \quad (\text{II.3.6.a})$$

II.3.6.1 Matrice de rigidité membranaire

La matrice de rigidité de membrane est donnée par la relation simplifiée suivante :

$$K_m = \int B^t(x, y) D B(x, y) dx dy = \int B^t(\eta, \xi) D B(\eta, \xi) \det J d\eta d\xi \quad (\text{II.3.6.b})$$

Où D et B représentent respectivement les matrices d'élasticité et de déformation.

II.3.6.2 Matrice de rigidité flexionnelle

La matrice de rigidité de flexion se calcule d'après l'expression suivante :

$$K_f = \int B_\lambda^t C_b B_\lambda dx dy + \int B_\gamma^t C_s B_\gamma dx dy \quad (\text{II.3.6.c})$$

Avec, C_b et C_s représentent respectivement des matrices d'élasticité de flexion et de cisaillement de la plaque de mindlin.

Le premier terme de cette expression correspond à des déformations dans le plan induite par la flexion et le second terme correspond à des déformations de cisaillement.

$$C_b = D \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.6.d})$$

Où D caractérise la rigidité flexionnelle de la plaque qui est égale à $\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

$$C_s = \frac{EhK}{2(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.6.e})$$

E, le module d'élasticité, ν le coefficient de poisson et K étant le facteur de correction du cisaillement, il est pris égale à 5/6 pour une plaque homogène et isotrope.

La matrice de rigidité 20×20 en axe local est obtenue par assemblage de la matrice 8×8 de membrane et 12×12 de flexion, et en vertu des règles de transformation orthogonales, on détermine facilement la matrice de rigidité élémentaire dans le plan physique.

II.3.7 Forces nodales équivalentes

Le vecteur force nodale de l'élément est donné par l'expression suivante :

$$F = \int H^T b dv + \int H^T t dA + F \quad (\text{II.3.7.a})$$

Avec : b , t et F sont les vecteurs forces volumiques, surfaciques et de traction de l'élément.

H : est la matrice d'interpolation obtenue par la relation II.3.2.b

II.3.8 Forces résultantes

Les forces dans le plan (N_x , N_y , N_{xy}), les moments de flexion (M_x , M_y , M_{xy}), et les forces de cisaillement (Q_x , Q_y) peuvent être déterminés de la manière suivante :

II.3.8.a Moments de flexion sous forme condensée :

$$M = C_b \lambda \quad (\text{II.3.8.a})$$

Ou sous forme matricielle.

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ -\beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} - \beta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3.8.b})$$

II.3.8.b Effort tranchant sous forme condensée

$$T = C_s \gamma \quad (\text{II.3.8.c})$$

Ou sous forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \frac{EhK}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,y} - \beta_y \\ w_{,x} + \beta_x \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3.8.d})$$

II.3.8.c Efforts normaux linéiques sous forme réduite

$$N = Dh\varepsilon \quad (\text{II.3.8.e})$$

h est l'épaisseur de la plaque

Ou sous forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3.8.f})$$

II.4 CONVERGENCE

La convergence de la M.E.F demeure une question primordiale pour s'approcher de la solution exacte du problème, il existe plusieurs sources d'erreurs lorsque la M.E.F est utilisée telles que : discrétisation, emploi des méthodes d'intégrations numériques, comportement non linéaire du matériau et l'emploi de la méthode de superposition modale pour la résolution des problèmes dynamiques.

La convergence peut se faire de manière monotone ou non monotone, on distingue :

II.4.1 Convergence monotone

Pour que la tendance de la convergence soit monotone, il faut que l'élément choisi remplisse la double exigence d'être;

- **Complet**

La fonction choisie de déplacement de l'élément permet de représenter un déplacement de corps rigide (déformations nulles) ou de représenter un état de déformation constante (déformations élastiques).

- **Compatible**

L'élément choisi doit assurer la continuité des déplacements (continuité C_0) pour les éléments de membrane ou les éléments de plaque de Mindlin et une continuité des déplacements et leurs dérivées premières (continuité C_1) pour les problèmes de flexion des plaques de Kirchoff.

Les éléments dont le champ de déplacement respecte les deux critères de convergence cités sont dits conformes.

II.4.2 Convergence non monotone

Elle doit satisfaire les deux conditions suivantes :

- Complétude de l'élément
- Satisfaction du patch test

Le patch test est un critère de complétude sur un groupe d'éléments en remplacement de la condition de compatibilité. La satisfaction du patch test dépend de la géométrie de l'élément les éléments carrés, rectangulaires et parallélogrammes sont recommandés

II.5 METHODE DES ELEMENTS FINIS EN DYNAMIQUE

Lorsque les déplacements d'une structure varient en fonction du temps, deux forces additives interviennent dans l'équation d'équilibre.

- La force d'inertie définie par son équivalence statique : $-\rho \ddot{u}$
 ρ et u désignent la masse volumique et l'accélération.

- La seconde force est une force d'amortissement qui s'oppose au mouvement de la structure; elle dépend de manière non linéaire de la vitesse de déplacement, son équivalent statique est une force de volume d'intensité : $-\nu \dot{u}$.

Où ν représente le coefficient d'amortissement.

Comme en statique, la méthode des Ef en dynamique est basée sur une discrétisation spatiale du milieu par élément fini de type déplacements, dont les inconnues du problème seront les déplacements nodaux en fonction du temps.

II.5.1 Discrétisation

On définit une approximation des déplacements en fonction des coordonnées spatiales et temporelles :

$$u(x, y, z, t) = H \hat{u}(x, y, z, t) \quad (\text{II.5.1})$$

$u(x, y, z, t)$ désigne un vecteur de déplacement en fonction du temps, H est une fonction d'interpolation et $\hat{u}(x, y, z, t)$ est un vecteur de déplacement nodale.

II.5.2 Formulation des équations du mouvement

L'énergie potentielle totale et l'énergie cinétique élémentaire sont exprimées sous une forme simplifiée par les relations suivantes :

II.5.2.a Energie potentielle

$$V = \frac{1}{2} u' k u - u' f(t) \quad (\text{II.5.2.a})$$

k étant la matrice de rigidité élémentaire, elle est donnée par l'intégrale suivante :

$$k = \int B' D B dv \quad (\text{II.5.2.b})$$

$f(t)$, représente une force extérieure regroupant les forces de volume, de surface et de traction, elle est donnée par l'intégrale suivante:

$$F(t) = \int H' b dv + \int H' t dA + F \quad (\text{II.5.2.c})$$

II.5.2.b Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \dot{u}' M \dot{u} \quad (\text{II.5.2.d})$$

On définit, une forme d'énergie de dissipation induite par l'amortisseur de la structure et qui vaut à :

$$A = \frac{1}{2} \dot{u}' C \dot{u} \quad (\text{II.5.2.e})$$

C est une matrice d'amortissement

Les équations discrètes du mouvement régissant l'équilibre du milieu sont obtenues par la résolution des équations de Lagrange – Euler, données par le système d'équations différentielles.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{U}} \right) - \frac{\partial L}{\partial U} + \frac{\partial A}{\partial \dot{U}} = \{F_i\} \quad (\text{II.5.2.f})$$

Avec :

$$L = T - V \quad (\text{II.5.2.g})$$

L représente le lagrangien, F_i est une force généralisée correspondante. Par dérivations successives des équations de Lagrange, on aboutit à un système d'équations différentielles en temps t et du second ordre :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{f(t)\} \quad (\text{II.5.2.h})$$

où $\{f(t)\}$, $\{u\}$ sont les vecteurs de sollicitations et de déplacements

Dans cette relation $[M]$, $[C]$ et $[K]$ désignent respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité de la structure obtenues par assemblage des matrices élémentaires :

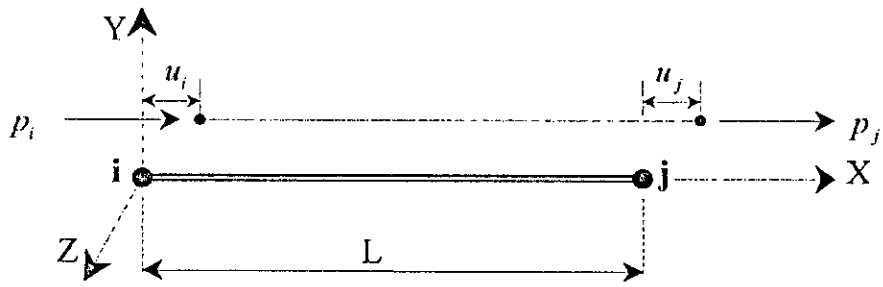
$$\begin{aligned} [K] &= \int B^T D \cdot B \cdot dV \\ [C] &= \int \mu \cdot [H^T] \cdot [H] dV \\ [M] &= \int \rho \cdot [H^T] \cdot [H] dV \end{aligned} \quad (\text{II.5.2.i})$$

Dans ce qui suit et pour le besoin des calculs ultérieurement, nous allons formuler les matrices de masse et de rigidité de l'élément poutre tridimensionnel.

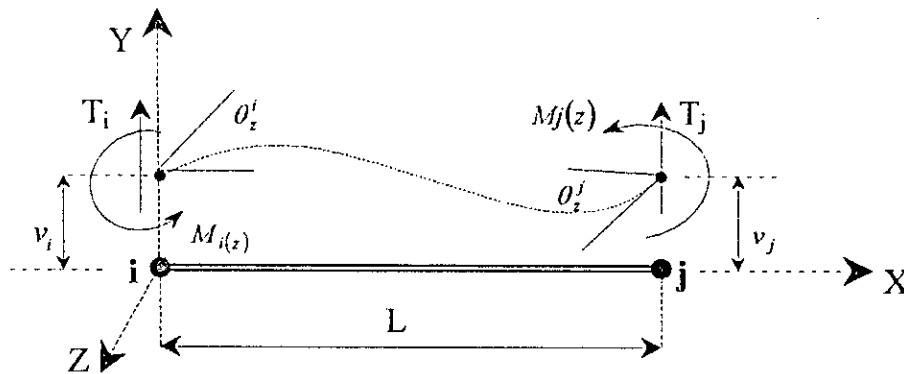
II.5.3 Matrice rigidité de l'élément poutre en 3D

Considérons une poutre tridimensionnelle à deux nœuds ayant chacun six degrés de libertés : trois degrés de libertés de translations le long des directions X - X, Y - Y et Z - Z et trois rotations [19, 25 et 58]

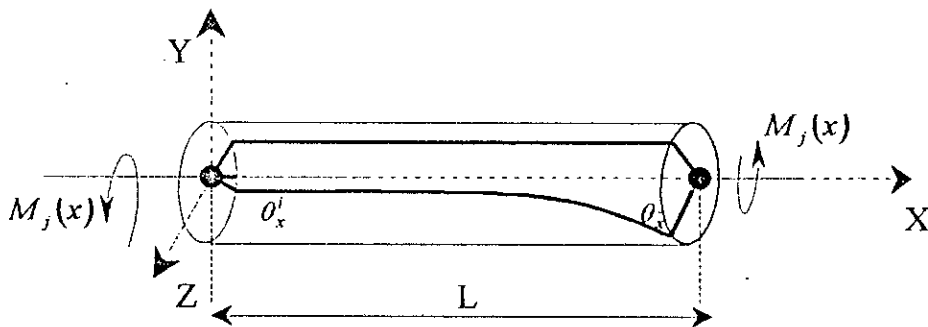
Dans un repère référentiel associé à l'élément, nous montrons par les figures ci - après, les déplacements et les forces relatifs aux effets axiaux, flexionnels et torsionnels.



(a) Axial



(b) Flexion



(c) Torsion

Fig. II.4- Forces et déplacements appliqués sur l'élément poutre en 3 D

La matrice rigidité de l'élément tridimensionnel, 12×12 relative aux effets axiaux, flexionnels et torsionnels est donnée par l'expression matricielle :

$$K^{\acute{e}} = \frac{E}{l}$$

u_i	v_i	w_i	θ_x^i	θ_y^i	θ_z^i	u_j	v_j	w_j	θ_x^j	θ_y^j	θ_z^j	
A	0	0	0	0	0	$-A$	0	0	0	0	0	u_i
0	$\frac{12I_z}{l^2}$	0	0	0	$\frac{6I_z}{l}$	0	$\frac{-12I_y}{l^2}$	0	0	0	$\frac{6I_z}{l}$	v_i
0	0	$\frac{12I_y}{l^2}$	0	$\frac{-6I_y}{l}$	0	0	0	$\frac{-12I_y}{l^2}$	0	$\frac{-6I_y}{l}$	0	w_i
0	0	0	$\frac{GJ}{E}$	0	0	0	0	0	$\frac{-GJ}{E}$	0	0	θ_x^i
0	0	$\frac{-6I_y}{l}$	0	$4I_y$	0	0	0	$\frac{6I_y}{l}$	0	$2I_y$	0	θ_y^i
0	$\frac{6I_z}{l}$	0	0	0	$4I_z$	0	$\frac{-6I_z}{l}$	0	0	0	$2I_z$	θ_z^i
$-A$	0	0	0	0	0	A	0	0	0	0	0	u_j
0	$\frac{-12I_z}{l^2}$	0	0	0	$\frac{-6I_z}{l}$	0	$\frac{12I_z}{l^2}$	0	0	0	$\frac{-6I_z}{l}$	v_j
0	0	$\frac{-12I_y}{l^2}$	0	$\frac{6I_y}{l}$	0	0	0	$\frac{12I_y}{l^2}$	0	$\frac{6I_y}{l}$	0	w_j
0	0	0	$\frac{-GJ}{E}$	0	0	0	0	0	$\frac{GJ}{E}$	0	0	θ_x^j
0	0	$\frac{-6I_y}{l}$	0	$2I_y$	0	0	0	$\frac{6I_y}{l}$	0	$4I_y$	0	θ_y^j
0	$\frac{6I_z}{l}$	0	0	0	$2I_z$	0	$\frac{-6I_z}{l}$	0	0	0	$4I_z$	θ_z^j

La matrice de rigidité obtenue a été déterminée en fonction des coordonnées locales de l'élément. Pour une structure donnée, on doit déterminer la matrice de rigidité en fonction des coordonnées globales (système physique pour toute la structure). D'où la nécessité de transformer la matrice de rigidité du système référentiel $x'y'z'$ au système physique de la structure xyz .

En vertu des règles des transformations orthogonales, la matrice de rigidité élémentaire $k^{\acute{e}}$ en coordonnées globales devient :

$$K^{g\acute{e}} = T^t \cdot K^{\acute{e}} \cdot T \tag{II.5.3.a}$$

T est une matrice diagonale formée à partir de matrice L en nombre égal au nombre des nœuds de l'élément, elle est donnée par:

$$T = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & L & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & L & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{II.5.3.b}$$

L est une matrice de passage du système local au système global , elle est définie par.

$$L = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{II.5.3.c})$$

λ est une matrice 3×3 contenant des cosinus directeurs

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix} \quad (\text{II.5.3.d})$$

Où $\lambda_{x'x}$ est le cosinus de l'angle que forment les axes x et x' et ainsi de suite.

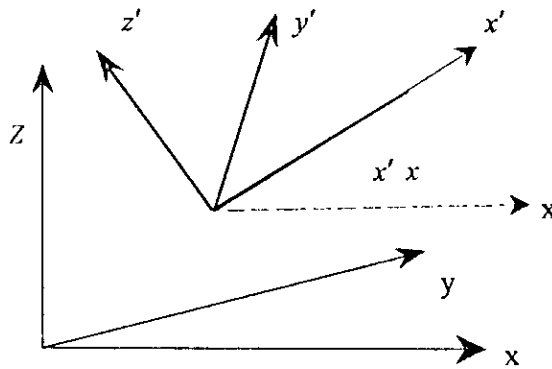


Fig. II.5- Coordonnées locales et globales

II.5.4 Matrice des masses de l'élément poutre tridimensionnel

La matrice de masse élémentaire dite matrice de masse cohérente est obtenue par l'expression de l'intégrale suivante :

$$M^e = \int [H] \rho [H] dv \quad (\text{II.5.4.a})$$

H définit une matrice contenant les fonctions de formes, ρ est la masse volumique de l'élément.

La matrice masse cohérente de l'élément poutre tridimensionnelle est obtenue par la combinaison des trois matrices de masses correspondants aux effets axiaux, flexionnels et torsionnels [44].

II.5.4.a Matrice des masses axiale

La matrice masse élémentaire relative aux effets axiaux est donnée par :

$$M^e = \frac{m}{6} \begin{bmatrix} u_i & u_j \\ 2 & 1 & u_i \\ 1 & 2 & u_j \end{bmatrix} \text{ Avec } m = \rho \cdot S \cdot l \quad (\text{II.5.4.b})$$

II.5.4.b Matrice des masses Flexionnelle

La matrice masse élémentaire relative aux effets flexionnels est donnée par :

On peut obtenir des matrices de masse similaires pour l'élément plaque présentée dans le paragraphe II.3 et suivants. Nous ne donnerons pas ici de formulations. Néanmoins, si l'on connaît les fonctions de formes relatives aux déformations dans le plan et de flexion, il est encore possible d'obtenir la matrice des masses de l'élément plaque

II.5.5 Vecteurs et valeurs propres

Dans le cas des structures faiblement amorties le plus fréquent dans le domaine d'application, la réponse dynamique se réduit à la résolution du problème aux valeurs générales [18].

$$\langle [K] - \omega^2 [M] \rangle \{X_i\} = \{0\} \quad (\text{II.5.5.a})$$

Où $[K]$ et $[M]$ sont les matrices globales de rigidité et de masse du système considéré d'ordre $N \times N$ et $\{X_i\}$ le vecteur des déplacements dynamiques.

Cette équation constitue un problème de valeurs propres; elle admet des solutions non nuls, si son déterminant est nul. Ce dernier fournit N valeurs propres associées aux carrés des pulsations propres $\lambda_i = \omega^2$. Etant donné que les matrices de rigidités et de masses sont positives, les racines de l'équation seront réelles et positives, et à chaque valeur de λ_i correspond un vecteur propre $\{X_i\}$ solution de l'équation précédente. De tels vecteurs sont appelés les modes propres du système et satisfont les relations d'orthogonalités suivantes [18] :

$$\begin{aligned} \langle X_i \rangle [K] \{X_j\} &= \lambda_i \delta_{ij} \\ \langle X_i \rangle [M] \{X_j\} &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{II.5.5.b})$$

Où δ_{ij} est le chronecker : 1 si $i = j$
0 si $i \neq j$

A partir de ces expressions, il est intéressant de remarquer que les vecteurs propres sont orthogonaux à $[K]$ et orthonormés à $[M]$. En regroupant ces derniers dans une matrice dite (Matrice modale), les relations (II.5.5.b) correspondant à l'ensemble des vecteurs propres s'écrivent :

$$\begin{aligned} [X]^T [K] [X] &= [\lambda] \\ [X]^T [M] [X] &= [I] \end{aligned} \quad (\text{II.5.5.c})$$

Où $[X]$ représente l'ensemble des vecteurs propres : $[X] = [\{X_1\}, \{X_2\}, \dots, \{X_i\}, \dots]$
 $[I]$ Etant la matrice identité, $[\lambda]$ est une matrice diagonale contenant des valeurs propres λ_i .

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 0 \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (\text{II.5.5.d})$$

La difficulté principale de résolution de l'équation (II.5.5.a) réside dans le fait que son ordre est très élevé, en effet, les modélisations par éléments finis entraînent couramment un nombre élevé de degré de liberté et la recherche des valeurs propres à partir de polynôme obtenu en développant le déterminant s'avère péniblement et s'effectue rarement.

De nombreuses méthodes numériques nouvelles et efficaces ont été proposées et ajoutées à l'arsenal des modules de programmes numériques pour déterminer les valeurs et vecteurs propres. Le lecteur désireux d'approfondir ces méthodes numériques est prié de se référer aux ouvrages spécialisés d'analyse numérique [17],[18], [45]et [64], les plus utilisés sont :

- Méthodes classiques de transformation (jacobien, Given et Householder)
- Méthode de ritz
- Les méthodes d'itération vectorielles
- Méthode basée sur la propriété des suites de sturm

des ponts-caissons.

III.2.1 Modèle d'éléments finis de type portique tridimensionnels - Modèle MI

Ce modèle est obtenu en subdivisant la structure par des éléments portiques tridimensionnels. Chaque élément est constitué de deux nœuds ayant chacun six degrés de liberté : trois degrés de translation le long des axes X - X, Y - Y et Z - Z et trois rotations autour de ces mêmes axes [25,26].

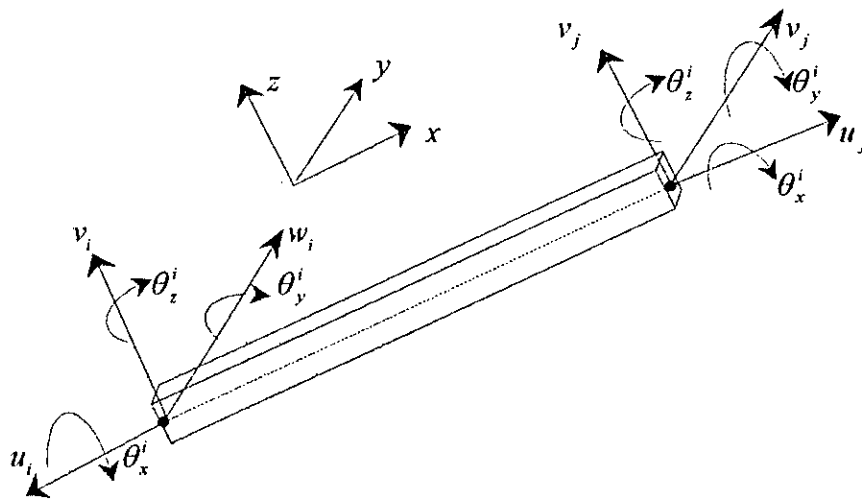


Fig. III.1- Élément tridimensionnel de portique

III.2.2 MODELE D'ELEMENTS FINIS DE TYPE COQUE TRIDIMENSIONNELS - MODELE MII

Ce modèle est construit à partir des éléments appartenant à la famille de " Serendip". L'élément coque tridimensionnel à quatre nœuds ayant six degrés de liberté par nœud est retenu [68,75]

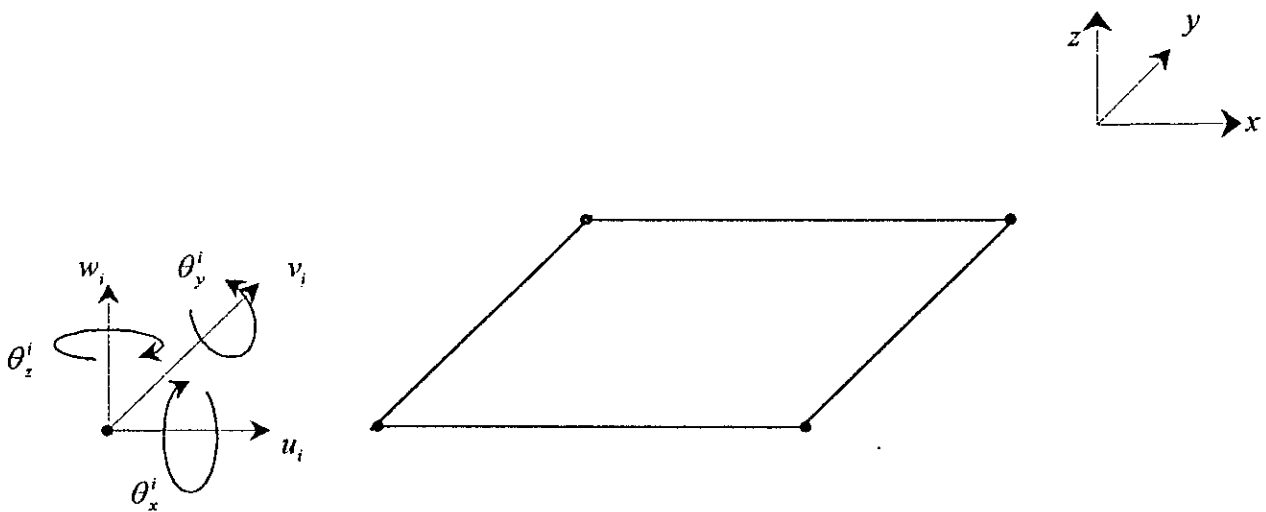


Fig. III.2- Élément coque tridimensionnel

III.2.3 Modèle d'éléments finis de type volume - Modèle MIII

Ce modèle est constitué par des éléments de volume. Chaque élément de volume possède 8 nœuds. Chaque nœud libre de l'élément de volume, possède trois degrés de liberté u_i , v_i et w_i représentant les déplacements longitudinal, latéral et vertical respectivement [68,75].

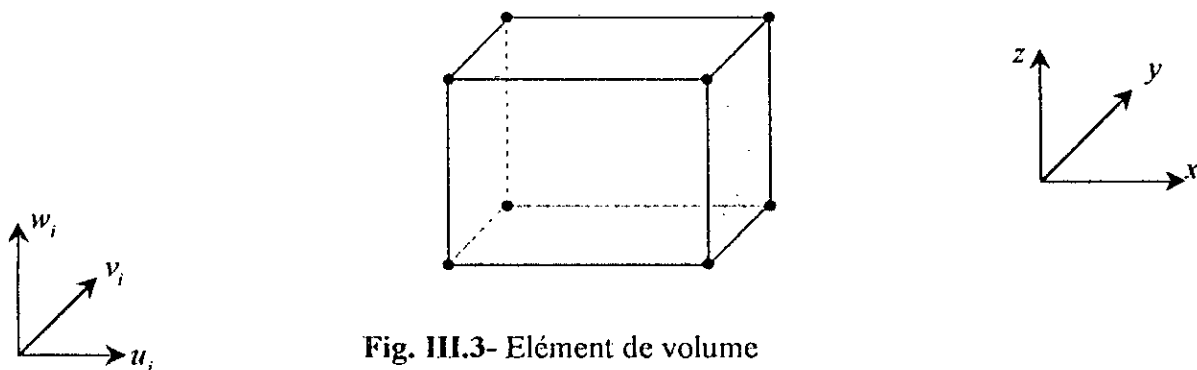


Fig. III.3- Élément de volume

III.3 PROPRIETES DES ELEMENTS

Dans ce paragraphe on se propose de déterminer les matrices de masse M et de rigidité K correspondantes aux trois modèles d'éléments finis tridimensionnels. Les propriétés des modèles MI et MII ont été présentées de manière explicite dans le chapitre II (cf. sections II.3 et II.5). Dans ce qui suit, nous donnons une formulation simple pour déterminer les propriétés de l'élément de volume. Il est rappelé que les matrices de masse M et de rigidité K sont calculées à partir des expressions suivantes.

$$\begin{aligned} [K] &= \iiint B^T D B dV \\ [M] &= \iiint \rho [N]^T [N] dV \end{aligned} \quad (\text{III.3.1})$$

où D , et B désignent respectivement, les matrices d'élasticité et de déformation de l'élément considéré, ρ et N représentent la masse volumique et N une matrice contenant les fonctions de forme de l'élément.

III.3.1 Caractéristiques de l'élément de volume

III.3.1.a Fonctions de forme de l'élément de volume

$$\begin{aligned} -1 &\leq \eta \leq +1 \\ -1 &\leq \zeta \leq +1 \\ -1 &\leq \xi \leq +1 \end{aligned}$$

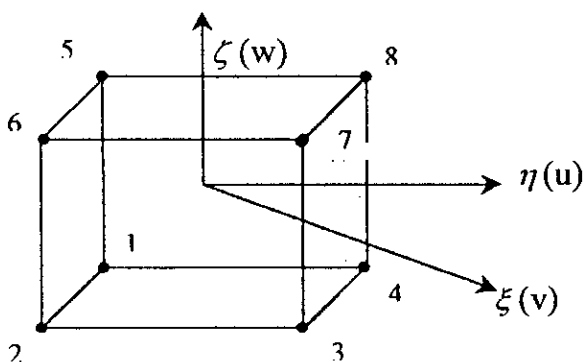


Fig. III.4- Élément linéaire de volume

L'élément de volume représenté sur la figure ci-dessus est précisément équivalent à l'élément à deux dimensions de type serendip linéaire (élément à quatre nœuds). En utilisant maintenant trois coordonnées normées, on obtient les fonctions de formes suivantes:

$$h_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i) \quad (\text{III.3.2})$$

η , ξ , et ζ étant les coordonnées du nœud (i) dans le repère référentiel.

Les déplacements d'un point quelconque à l'intérieur de l'élément de volume sont définis par trois composantes u , v , et w et exprimés par les relations suivantes :

$$u = \sum_{i=1}^{i=8} h_i \hat{u}_i \quad v = \sum_{i=1}^{i=8} h_i \hat{v}_i \quad W = \sum_{i=1}^{i=8} h_i w_i \quad (\text{III.3.3})$$

Où encore sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_i & 0 & 0 \\ 0 & H_i & 0 \\ 0 & 0 & H_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{v}_i \\ \hat{w}_i \end{Bmatrix} \quad (\text{III.3.4})$$

\hat{u}_i , \hat{v}_i , \hat{w}_i sont les vecteurs colonnes contenant les déplacements des nœuds de l'élément et sont définis par leurs vecteurs transposés.

$$\begin{aligned} \hat{u}_i^t &= \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8 \rangle \\ \hat{v}_i^t &= \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8 \rangle \\ \hat{w}_i^t &= \langle w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8 \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.3.5})$$

Avec $H_i = \langle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8 \rangle$

III.3.1.b Matrice des déformations

Six composantes de déformation interviennent en analyse complètement tridimensionnelle. La matrice des déformations peut donc être définie par

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = Lu \quad (\text{III.3.6})$$

L désigne l'opérateur différentiel

En appliquant la relation (III.3.3, III.3.6), on peut vérifier aisément que

$$\varepsilon = B\hat{a}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} H_i & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} H_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} H_i \\ \frac{\partial}{\partial y} H_i & \frac{\partial}{\partial x} H_i & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} H_i & \frac{\partial}{\partial y} H_i \\ \frac{\partial}{\partial z} H_i & 0 & \frac{\partial}{\partial x} H_i \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{v}_i \\ \hat{w}_i \end{Bmatrix} \quad (\text{III.3.7})$$

III.3.1.c Matrice d'élasticité

Pour un matériau isotrope, la matrice d'élasticité \mathbf{D} reliant les six composantes de contrainte aux six composantes de déformation s'écrit en fonction des constantes élastiques usuelles E (module de young) et ν (coefficient de poisson) comme suit.

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \text{Symétrique} \quad (\text{III.3.8})$$

Les matrices de rigidité et de masse définies par les relations (III.3.1) peuvent être maintenant intégrées de façon explicite puisque la matrice d'interpolation et les composantes de déformation et de contrainte sont obtenues.

III.4 ANALYSE VIBRATOIRE

Formulation générale du problème

La détermination des modes propres de vibrations d'une structure par la méthode des éléments finis nécessite le remplacement des forces inertielles distribuées par des forces d'inerties équivalentes appliquées aux nœuds et déterminées en utilisant le principe des travaux virtuels.

Par ailleurs, le pont considéré comme un corps homogène élastique; isotrope ayant un nombre infini de degrés de liberté et de modes propres de vibrations est remplacé par un ensemble d'éléments

finis ayant des masses concentrées aux nœuds et par suite un nombre fini de degrés de liberté et de fréquences propres de vibrations.

La procédure de calcul des modes propres fait appel en premier lieu à la formation des matrices de rigidité K et de masse globales M de la structure calculées à partir des expressions générales [17,45,64].

$$\begin{aligned} [K] &= \iiint B' D B dV \\ [M] &= \iiint \rho [N]' [N] dV \end{aligned} \quad (\text{III.4.1})$$

où D , et B désignent respectivement, les matrices d'élasticité et de déformation de l'élément considéré, ρ et N représentent la masse volumique et N une matrice contenant les fonctions de forme de l'élément.

Le problème non standard des formes propres de vibrations [17,45] résultant est résolu et les modes sont déduits en résolvant l'équation dynamique suivante :

$$[K - \omega^2 M] X_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \dots N \quad (\text{III.4.2})$$

où X_i et ω_i représentent le vecteur des déplacements dynamiques et ω_i la pulsation propre correspondante du système d'équations d'ordre $N \times N$. Pour une solution non triviale ($X_i \neq 0$) du système d'équations considéré, le déterminant de la matrice doit être nul.

$$|K - \omega^2 M| = 0 \quad (\text{III.4.3})$$

De nombreuses méthodes numériques existent pour la détermination des caractéristiques dynamiques, et sont décrites en détail dans les références spécialisées (e.g [17], [18],[45], [64]). les plus utilisés sont :

- Méthodes classiques de transformation (jacobien, Given et Householder)
- Méthodes classiques de transformation (Jacobien, Given, Householder et Algorithme du QR)
- Méthode de Ritz.

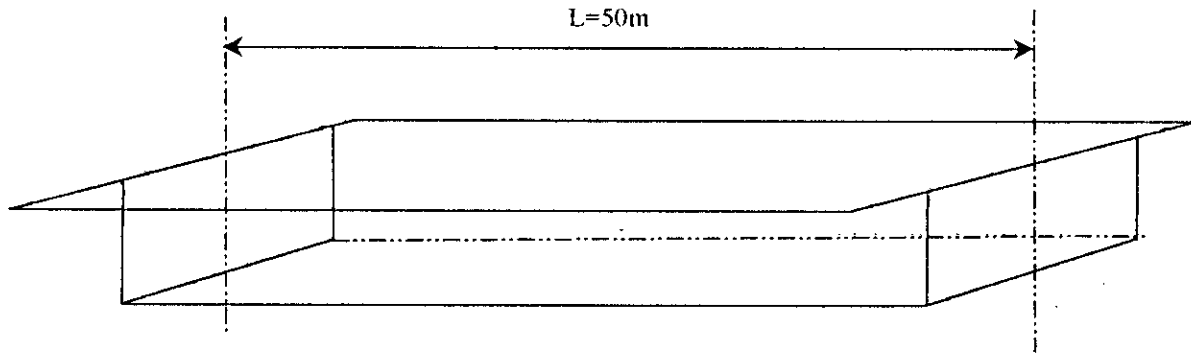
Le nombre de vecteurs ou de modes utiles à retenir lors d'une analyse dynamique est fixé selon la valeur du pourcentage de participation modale ; la somme des masses modales étant fixée en général à 90 ou 95% de la masse totale prise en compte dans la direction choisie[64].

III.5 ETUDE COMPARATIVE DES MODELES NUMERIQUES.

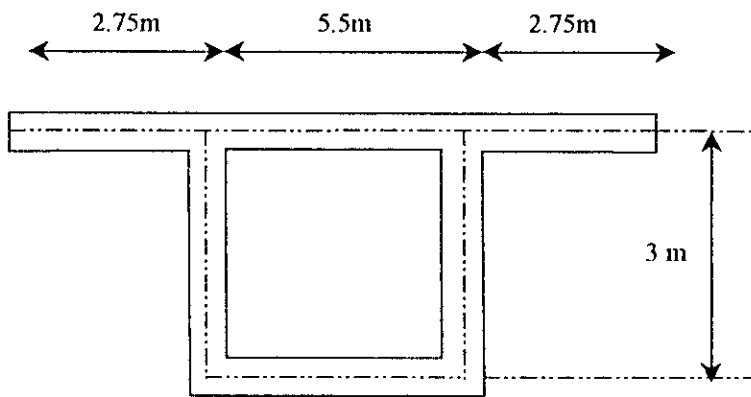
Les trois modèles d'éléments finis présentés dans la section III.2 ont été appliqués à l'étude du comportement vibratoire du prototype de pont unicellulaire.

III.5.1 Présentation du Prototype unicellulaire

Le prototype de pont est en béton précontraint et composé d'une seule travée de longueur totale 50m dont les extrémités reposent simplement sur des appuis. La structure porteuse est constituée d'une poutre caisson unicellulaire de largeur 11m. L'épaisseur $e=0.30$ m est maintenue constante sur tout le contour de la section transversale du prototype. Le comportement du béton est supposé linéaire, élastique, isotrope et caractérisé par les propriétés suivantes : masse volumique $\rho = 2500 \text{kg/m}^3$, coefficient de Poisson $\nu = 0.20$ et le module de Young $E=3.5 \cdot 10^{10}$ Pa. Les dimensions géométriques de ce pont sont portées sur la figure III.5.



(a) Vue du prototype en élévation



(b) Section transversale du prototype

Fig. III.5- Description du prototype unicellulaire

III.5.2 Résultats des modèles

A titre illustratif, les principaux résultats des deux premiers modes vibratoires de flexion verticale et latérale obtenus pour les trois modèles numériques tridimensionnels sont consignés dans le tableau 1, ci après.

Tableau 1 : Etude comparative des trois modèles numériques

Mode	Nature	Modèle M1		Modèle MII		Modèle MIII	
		Ordre	Période (s)	Ordre	Période	Ordre	Période
1	Vertical	2	0.262	2	0.227	1	0.213
2	Latéral	3	0.112	3	0.121	2	0.129

L'examen du tableau 1 montre que les valeurs de fréquences des deux premiers modes de vibrations verticales et latérales obtenus par les trois modèles sont très voisines. Par ailleurs, la taille du

Le système d'équations du modèle MI est nettement inférieur à celle des autres modèles. Le modèle MI offre une économie considérable en terme de saisie des données et de temps d'exécution de calcul. C'est pourquoi dans ce qui suit, nous nous intéresserons essentiellement à ce modèle en vue de la simulation du comportement dynamique des ponts-caissons.

Les représentations spatiales des déformées modales associées à chaque modèle de calcul sont également décrites dans la figure III.6 ci - après.

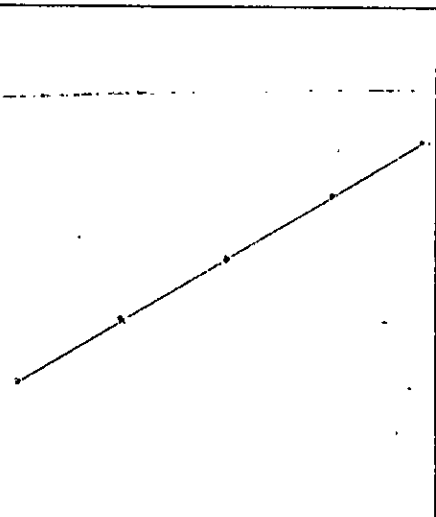
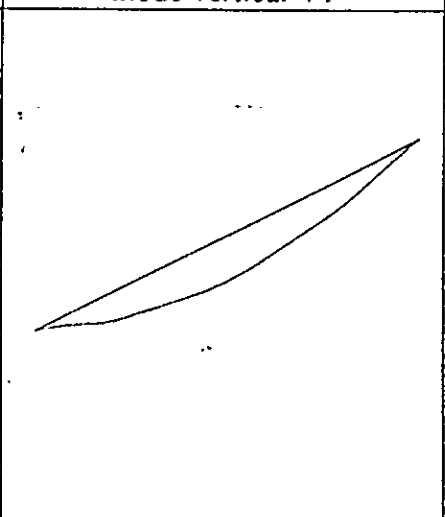
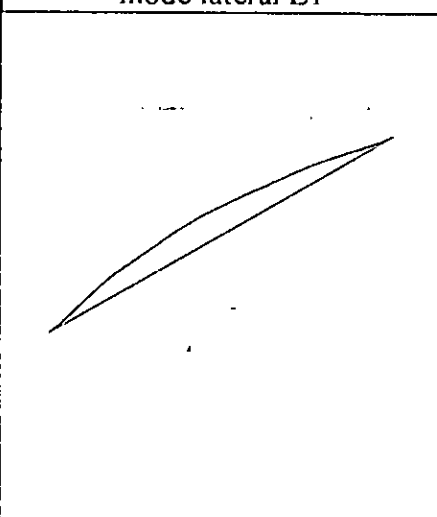
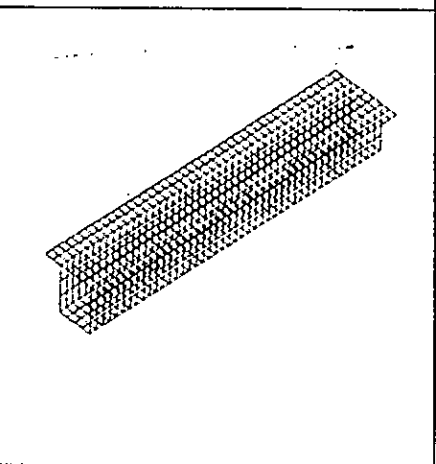
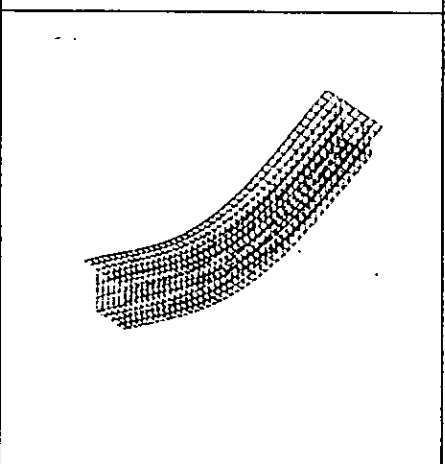
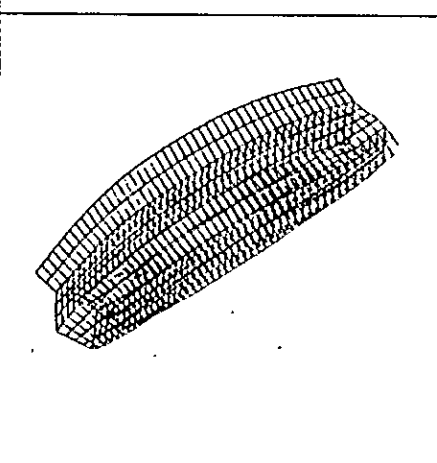
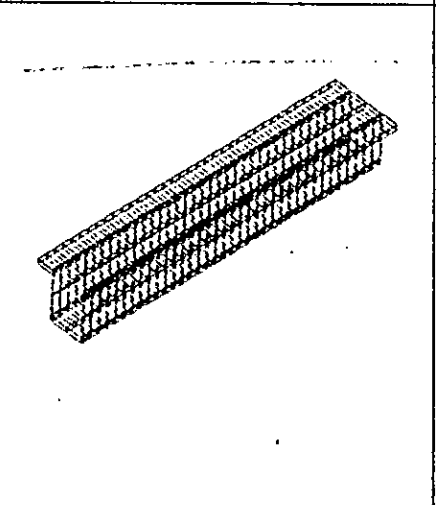
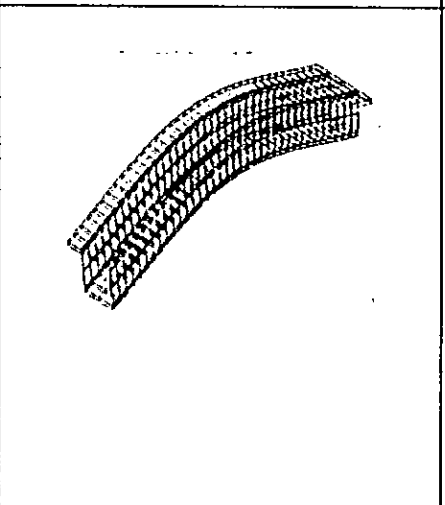
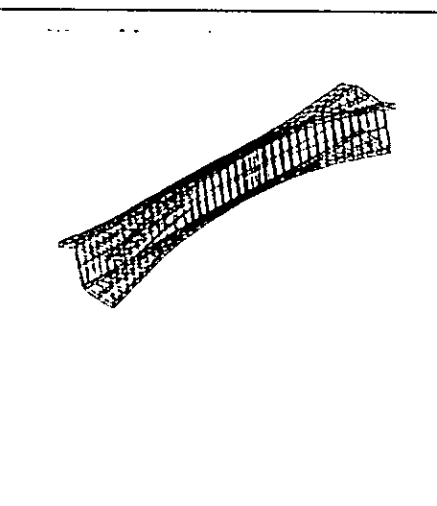
	Modèle d'éléments finis	1 ^{er} Mode de vibration mode vertical V1	2 ^{ème} Mode de vibration mode latéral L1
Modèle MI			
Modèle MII			
Modèle MIII			

Fig. III.6- Modèles d'éléments finis et déformées modales des deux premiers modes de vibrations

III.6 DETERMINATION DU MAILLAGE OPTIMAL

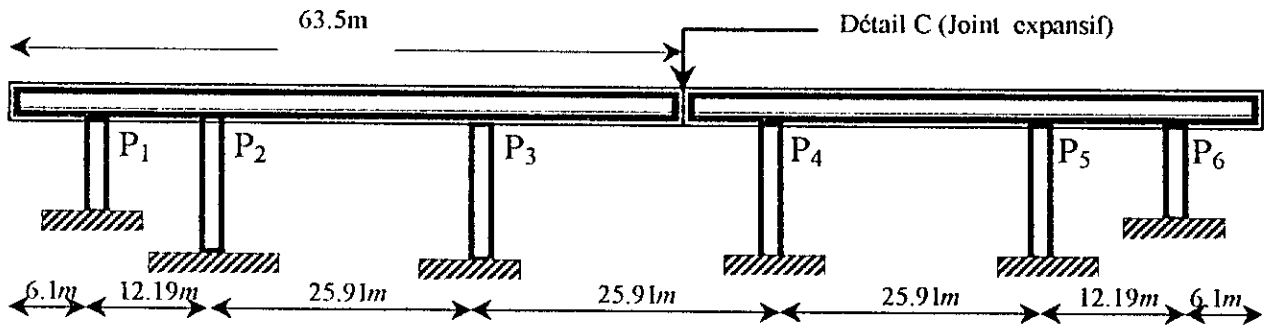
En vue de s'assurer de la convergence des résultats de l'analyse dynamique indépendamment du maillage considéré d'une part, et de faciliter la saisie du fichier de données d'entrée d'autre part; il est important d'optimiser la taille du modèle éléments finis retenu. Un tel maillage devrait simuler au mieux le comportement dynamique tridimensionnel des ouvrages de pont étudiés.

Le critère de convergence retenu est celui de la période fondamentale obtenue. Le maillage final retenu ou maillage dit optimal, est celui correspondant au nombre minimum de nœuds par travée et par pile. Celui ci est fixé en deux étapes : 1) en étudiant dans une première étape, la convergence des périodes fondamentales de divers modèles discrets de type MI obtenues en augmentant progressivement leur nombre de nœuds par travée ; le nombre de nœuds par pile étant fixe (4 nœuds en général). 2) Dans une deuxième étape, la convergence de périodes fondamentales de divers modèles discrets de type MI obtenues, en augmentant progressivement le nombre de nœuds par pile; le nombre optimal de nœuds du tablier étant égal à celui obtenu lors de la première étape (soit 5 nœuds en général). Le prototype de pont multicellulaire à inertie constante est utilisé pour cette présente étude. Les techniques de modélisation de ce prototype seront décrites en détail dans le chapitre VI.

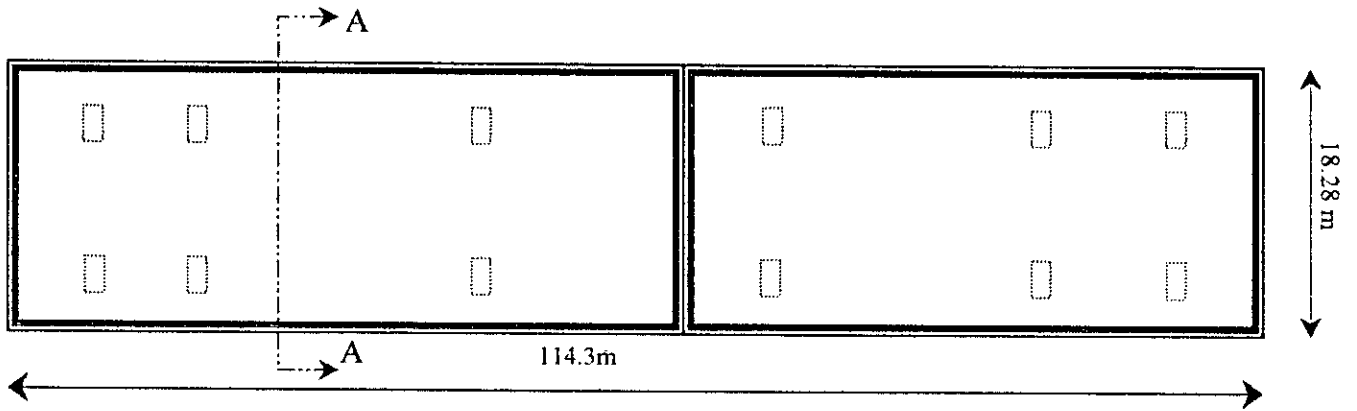
III.6.1 Description du prototype multicellulaire

L'ouvrage étudié est un pont plat et droit à inertie constante. Il s'étend sur une longueur totale de 114.30m. La superstructure est composée d'un total de sept travées présentant un joint d'expansion situé sur la travée centrale à 63.5m de la culée gauche. Les travées ont pour longueurs ; $2 \times 6.09m$, $2 \times 12.19m$ et $3 \times 25.91m$. La hauteur de la section transversale est de 1.1m et de largeur 18.28m. La chaussée comporte quatre voies de circulation et elle est doublement appuyée sur ces deux culées et supportée par six lignes d'appuis composées chacune de deux piles. La poutre caisson ainsi définie ne présente aucun encorbellement au niveau du hourdis supérieur.

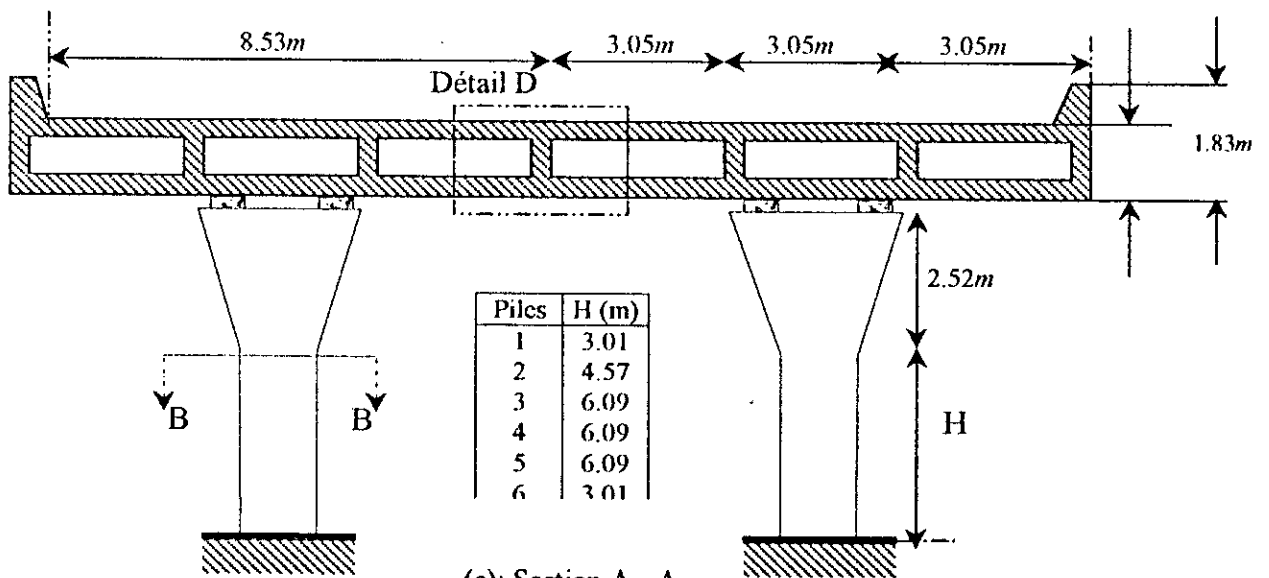
La géométrie de la structure et ses dimensions de base sont représentées sur la figure III.7



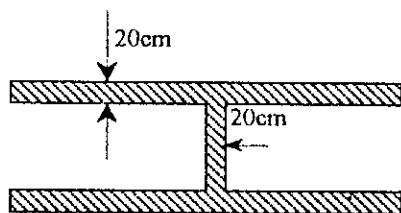
(a) : Pont type en élévation (U.S.A)



(b) : Vue en plan



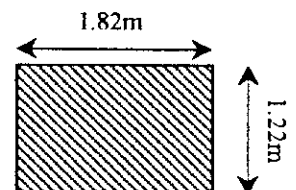
(c) : Section A - A



(d) : Détail D



(e) : Détail C

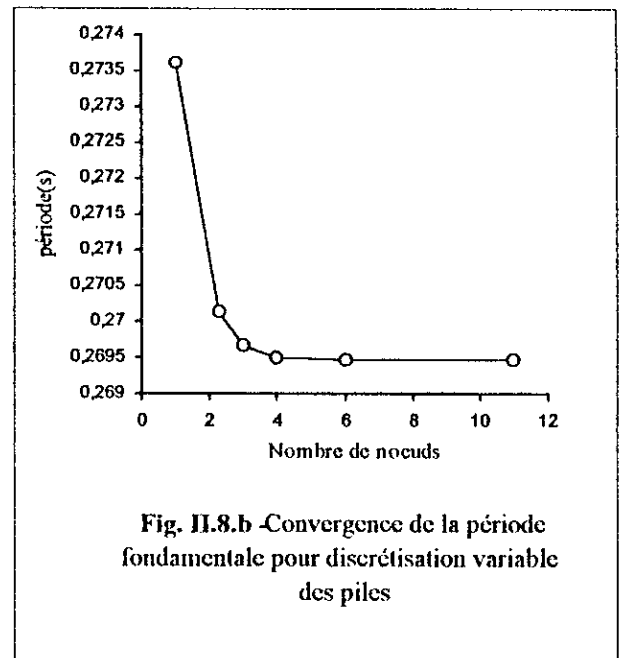
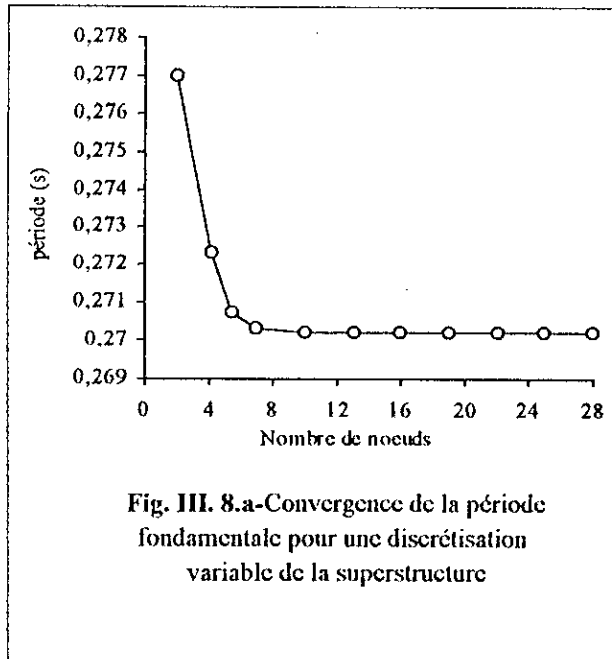


(f) : Section B - B

Fig. III.7- Présentation détaillée du pont type (vues, coupes et détails)

III.6.2 Principaux résultats numériques

Les résultats de l'analyse de convergence sont illustrés dans les figures (III.8.a et III.8.b) ci-après correspondant respectivement à la première et la deuxième étape de la méthodologie ci dessus proposée.



L'application de cette méthodologie à d'autres ponts unicellulaires ou multicellulaires discrétisés par des éléments finis de type MI, montre que cinq (05) nœuds par travée et quatre (04) nœuds par pile (y compris les nœuds extrêmes) fournissent des résultats en excellente concordance avec des modèles numériques beaucoup plus raffinés.

III.7 CONCLUSION

Au vu des résultats obtenus des trois modèles de simulation par la méthode des éléments finis, les conclusions suivantes semblent importantes à souligner.

1. Le modèle tridimensionnel de type portique (Modèle MI) est approprié pour la simulation par la méthode des éléments finis du comportement dynamique des ponts offrant une économie considérable en terme de saisie des données et de temps d'exécution de calcul.
2. Les résultats de l'étude d'optimisation du maillage ont permis d'établir deux règles simples exprimant le nombre de nœuds par travée et par pile nécessaires pour une simulation adéquate du comportement dynamique des ponts-caissons.

Chapitre IV

ANALYSE MODALE DES PONTS CAISSONS UNICELLULAIRES PONT DE BELLE VILLE (FRANCE)

IV.1 INTRODUCTION

Ces dernières années, les réseaux routiers de transport ont connu des progrès considérables dans le domaine technique de construction des ponts. En particulier, les ponts à voussoirs présentant divers avantages. Parmi ces derniers, on peut citer leurs sections tubulaires qui offrent une grande rigidité à la torsion permettant ainsi d'atténuer la torsion du pont sous l'effet des vibrations torsionnelles induites par les charges dynamiques et des charges statiques excentriques.

Malheureusement, en cas d'un séisme, ces ponts subissent des dommages très prononcés et les effets vibratoires sur la structure étaient considérés comme la cause principale de l'échec de la majorité des ponts endommagés. Une bonne connaissance des caractéristiques dynamiques de ces ponts (telles que : fréquences et modes propres de vibrations, quantité d'énergie dissipée etc...) est donc d'un intérêt primordial pour leur dimensionnement.

Dans le cas de vibrations induites par le vent, les tests ont montré que seul un des modes en basse fréquence est réellement excité. En revanche, lors d'un tremblement de terre, plusieurs modes de vibrations d'un pont donné, contribuent généralement à la réponse, notamment les modes de torsion qui peuvent devenir prépondérants par rapport aux modes horizontaux et verticaux de vibrations.

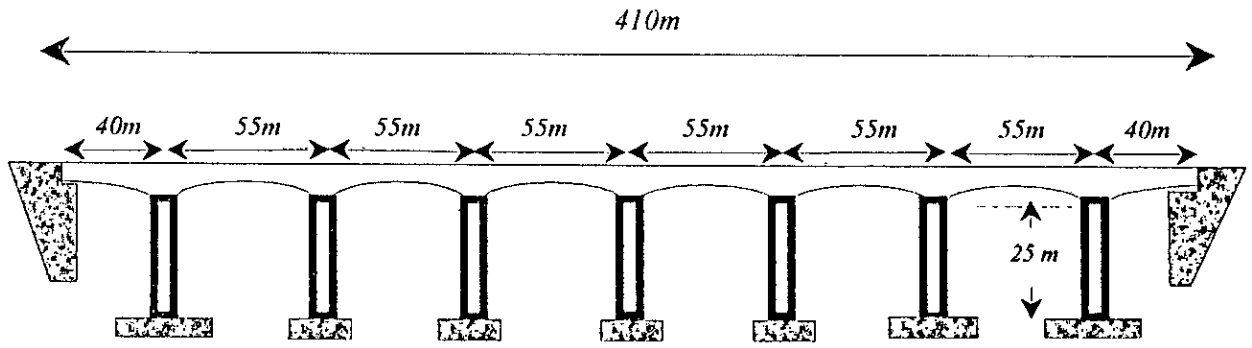
Dans ce qui suit, nous procédons à des investigations numériques sur les caractéristiques modales du pont de Belle Ville (France). A cet effet, le modèle en éléments finis de type portique tridimensionnels (Modèle MI) est utilisé en vue de simuler le comportement vibratoire du pont.

IV.2 DESCRIPTION DU VIADUC DE BELLE VILLE (FRANCE)

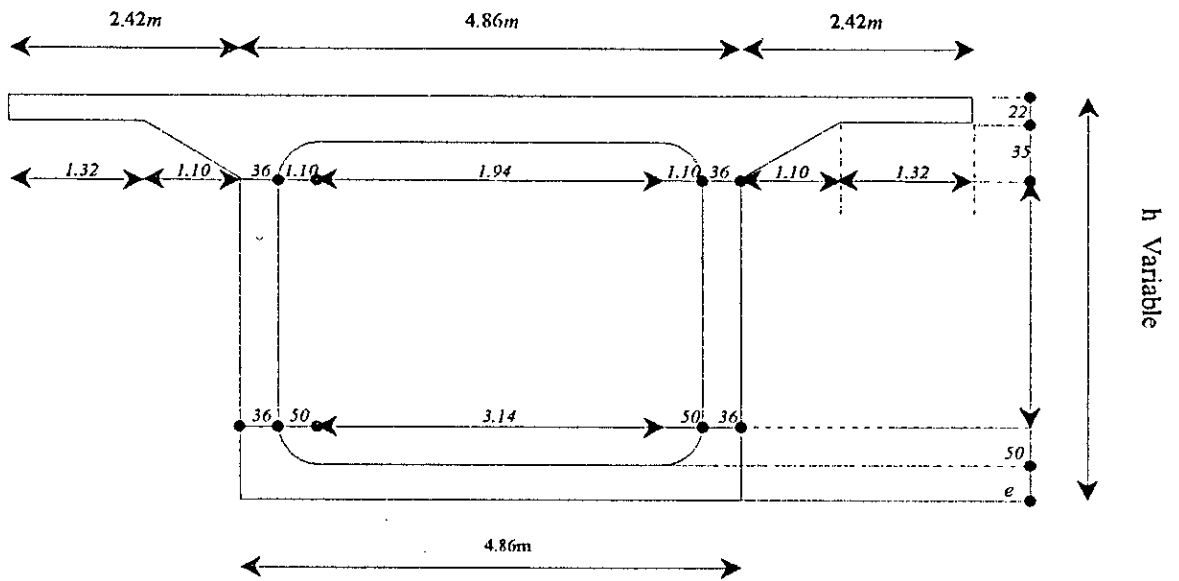
Le viaduc de belle ville est l'un des ouvrages les plus remarquables réalisés en France par encorbellements successifs. Il s'étend sur une longueur totale de 410m, il comporte huit travées continues en béton précontraint dont : deux travées de rive de longueur 40m chacune et six travées centrales de longueur 55 m chacune (Figure IV.1.a)

La structure porteuse est constituée d'une poutre caisson unicellulaire de largeur totale 9.70m (les encorbellements sont compris) et de hauteur variable de 4.04m à l'appui et 2.5m à la clé. L'épaisseur du hourdis supérieur est constante ($e = 0.22\text{m}$), alors que celle du hourdis inférieur varie paraboliquement de 0.20m à l'appui et 0.40m à la clé (Figure IV.1.b).

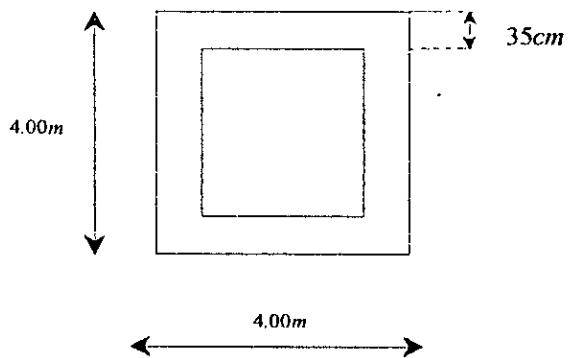
Le tablier est partiellement encasté aux culées, il repose sur des piles flexibles par l'intermédiaire des appuis en Néoprène dédoublés. La hauteur des piles est de 25m, leurs sections transversales sont tubulaires de formes rectangulaires avec des parois de 35cm d'épaisseur. (Figure IV.1.c)



(a) Vue générale du pont de belle ville



(b) Section transversale du pont



(c) Section transversale de la pile

Fig. IV.1- Description générale du pont de Belle Ville (France)

IV.3 CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES ET MECANIQUES DU PONT DE BELLE VILLE

Le pont de Belle ville est construit par encorbellements successifs à inertie variable. Les dimensions géométriques des travées de rives et intermédiaires sont portées sur la figure IV.2.

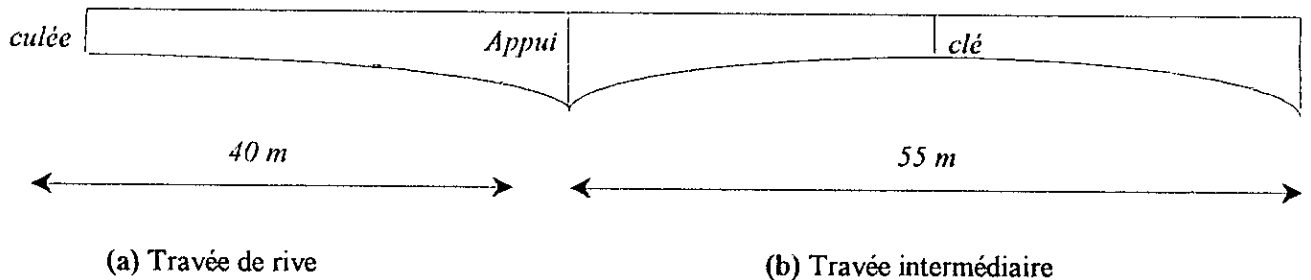


Fig. IV.2- Dimensions géométriques du pont de Belle Ville

Le tableau 1 donne les caractéristiques géométriques du pont de Belle ville

Tableau 1 Caractéristiques de l'ouvrage

Longueur Totale (m)	Portées (m)	Hauteur des piles	Epaisseur de l'âme	Largeur du tablier	Hauteur du tablier (h)		Epaisseur du hourdis Inférieur (e)	
					Appui	clé	Appui	clé
410m	40m, 6×55m, 40m	7×25m	0.36m	9.70m	4.04m	2.5m	0.40m	0.20m

Le comportement du béton dans le pont est supposé linéaire, élastique, isotrope et caractérisé par les propriétés suivantes : masse volumique $\rho = 2500 \text{Kg} / \text{m}^3$, coefficient du poisson $\nu = 0.2$, et module d'élasticité $E = 3.5 \times 10^4 \text{Mpa}$

IV.4 MODELE DISCRET DU PONT DE BELLE VILLE

Le pont de Belle Ville à caisson unicellulaire représente un bon exemple pour l'analyse du comportement vibratoire tridimensionnel. En appliquant la règle du maillage optimal (Cf. chapitre III, paragraphe III.5.2), la structure porteuse est subdivisée en une série de 32 éléments étendus sur l'axe neutre de la chaussée ; les axes locaux de ces éléments sont définis de sorte que l'axe (2) du système référentiel soit parallèle à l'axe (Z) du système physique. Notons que l'axe local (1) est pris confondu avec l'axe longitudinal de la chaussée (Fig. IV.3.b).

Chaque pile de ce viaduc est subdivisée en trois éléments poutres, leurs axes locaux sont spécifiés de sorte que l'axe 2 est parallèle à l'axe global (X) (Fig. IV.3.c). Etant donné que la hauteur de ces piles est très importante, ces dernières seront assimilées à des poutres flexibles. Le comportement vibratoire en 3D du viaduc est identique à celui d'un portique (Fig. IV.3.a)

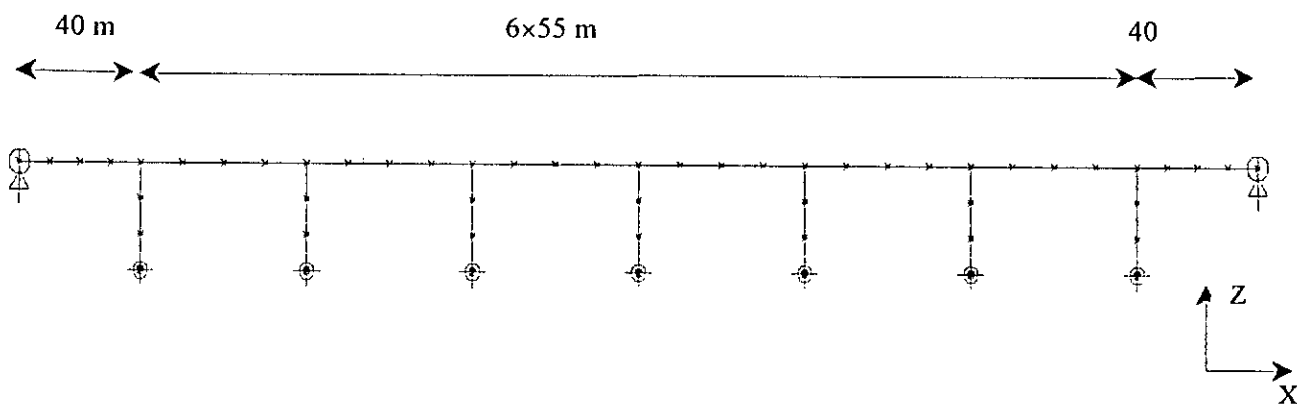


Fig. IV.3.a- Vue en élévation du modèle (Modèle MI) de pont.

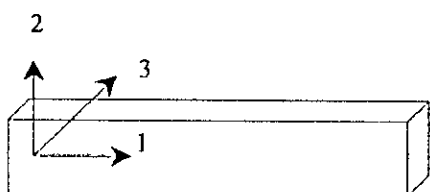


Fig. IV.3.b- Axes locaux de l'élément poutre (Chaussée)

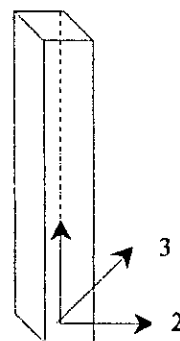


Fig. IV.3.c- Axes locaux de l'élément poutre (pile)

Fig. IV.3 : Modélisation du pont de Belle Ville (France)

IV.5 ANALYSE MODALE

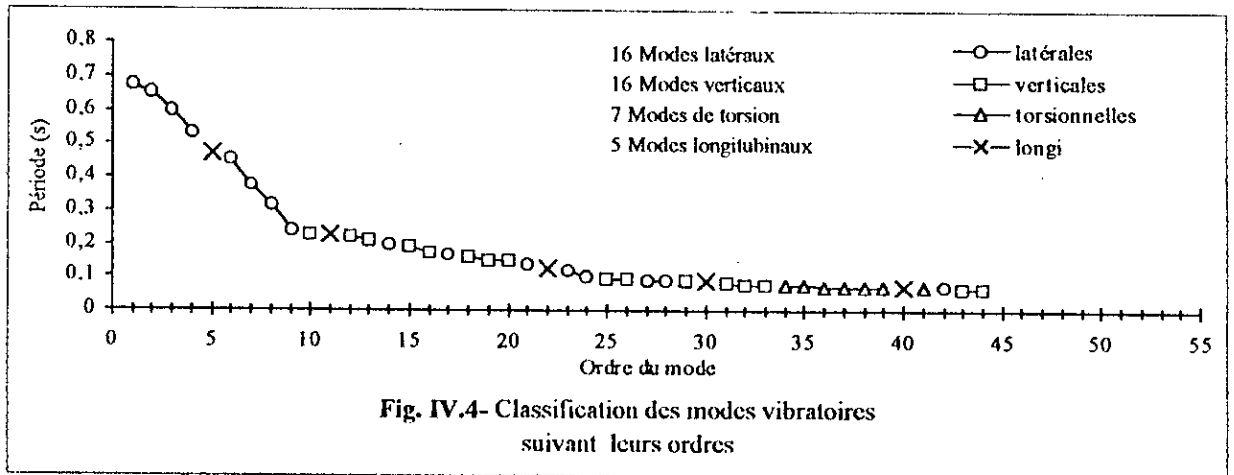
Dans ce présent paragraphe, nous tentons d'appréhender le comportement vibratoire du pont de Belle Ville). Pour cette approche, il faut impérativement déterminer ses caractéristiques dynamiques, telles que, les valeurs propres (fréquences ou périodes) et les vecteurs propres (formes propres ou vecteurs modaux). Par la suite, nous identifions le type et la nature des modes retenus dans cette étude..

Le nombre de vecteurs ou de modes utiles à retenir lors d'une analyse vibratoire est fixé selon la valeur du pourcentage de participation modale ; la somme des masses modales étant fixée en général à 90 ou 95% de la masse totale prise en compte dans la direction choisie. Par ce critère, 44 modes de vibrations sont retenus correspondant à des facteurs de participation modale : 90.87%, 95.857%, et 36.818% respectivement dans les directions $x - x$, $y - y$ et $z - z$.

La courbe de la figure IV.4 ci-après, illustre le classement des modes par catégories. Sur les 44 modes retenus, on distingue :

- 16 Modes verticaux
- 16 Modes latéraux

- 7 Modes torsionnels
- 05 Modes longitudinaux



A titre illustratif, la figure IV.4 montre que les quatre premiers modes vibratoires sont de nature latérale. On peut aussi constater que les modes de torsion se manifestent au-delà du 34^{ème} rang.

Les caractéristiques dynamiques de vibrations latérales, verticales, torsionnelles et longitudinales pour les modes supérieurs symétriques et antisymétriques du pont sont présentées dans les tableaux ci après.

Tableau 2 : Périodes et natures des modes de vibrations Latérales (pont de Belle Ville)

Modes Symétriques					Modes Antisymétriques				
Mode	Périodes (s)	Coefficients de Participation modale%			Mode	Périodes (s)	Coefficients de Participation modale%		
		X - X	Y - Y	Z - Z			X - X	Y - Y	Z - Z
1	0.675	0	72.34	0	1	0.648	0	0	0
2	0.600	0	7.38	0	2	0.532	0	0	0
3	0.455	0	2.52	0	3	0.379	0	0	0
4	0.319	0	0.86	0	4	0.237	0	0	0
5	0.199	0	0.55	0	5	0.166	0	0	0
6	0.140	0	0.35	0	6	0.120	0	0	0
7	0.104	0	0.45	0	7	0.092	0	0	0
8	0.0885	0	2.78	0	8	0.069	0	0	0

Tableau 3 : Périodes et natures des modes de vibrations verticales (Pont de Belle Ville)

Modes Symétriques					Modes Antisymétriques				
Mode	Périodes (s)	Coefficients de Participation modale%			Mode	Périodes (s)	Coefficients de Participation modale%		
		X - X	Y - Y	Z - Z			X - X	Y - Y	Z - Z
1	0.218	0	0	0.004	1	0.229	0.036	0	0
2	0.190	0	0	0.126	2	0.206	0.196	0	0
3	0.161	0	0	5.973	3	0.176	0.27	0	0
4	0.149	0	0	30.63	4	0.150	0.86	0	0
5	0.093	0	0	0.001	5	0.096	2.84	0	0
6	0.083	0	0	0.001	6	0.0882	0.22	0	0
7	0.077	0	0	0.002	7	0.080	0.057	0	0
8	0.0682	0	0	0.057	8	0.0675	0.036	0	0

Tableau 4 : Périodes et natures des modes de vibrations torsionnelles (Pont de Belle Ville)

Modes Symétriques					Modes Antisymétriques				
Mode	Périodes (s)	Coefficients de Participation modale%			Mode	Périodes (s)	Coefficients de Participation modale%		
		X - X	Y - Y	Z - Z			X - X	Y - Y	Z - Z
1	0.075	0	0.52	0	1	0.076	0	0	0
2	0.074	0	6.37	0	2	0.074	0	0	0
3	0.073	0	1.64	0	3	0.072	0	0	0
4	0.0714	0	0.041	0					

Tableau 5 : Périodes et natures des modes de vibrations longitudinales (Pont de Belle Ville)

Modes Symétriques					Modes Antisymétriques				
Mode	Périodes (s)	Coefficients de Participation modale%			Mode	Périodes (s)	Coefficients de Participation modale%		
		X - X	Y - Y	Z - Z			X - X	Y - Y	Z - Z
1	0.474	86.34	0	0	1	0.228	0	0	0.008
2	0.123	41.02	0	0	2	0.087	0	0	0
3	0.0719	0.006	0	0					

Les déformées modales correspondantes aux modes supérieurs symétriques et antisymétriques de vibrations latérales, verticales, torsionnels et longitudinales sont également illustrées dans les figures ci-après.

Fig. IV.5- Modes symétriques (S) de vibrations latérales

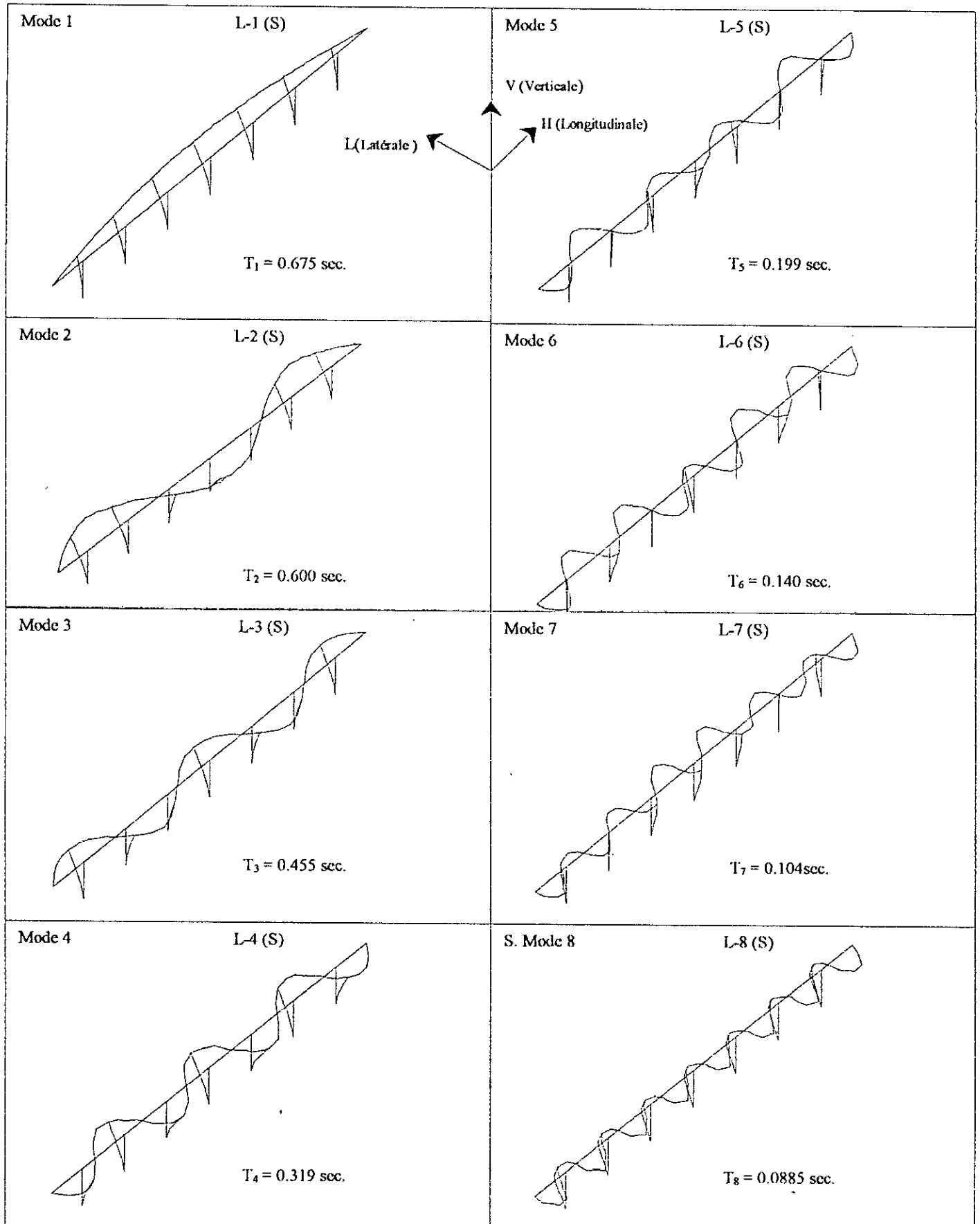


Fig. IV.6- Modes antisymétriques (AS) de vibrations latérales

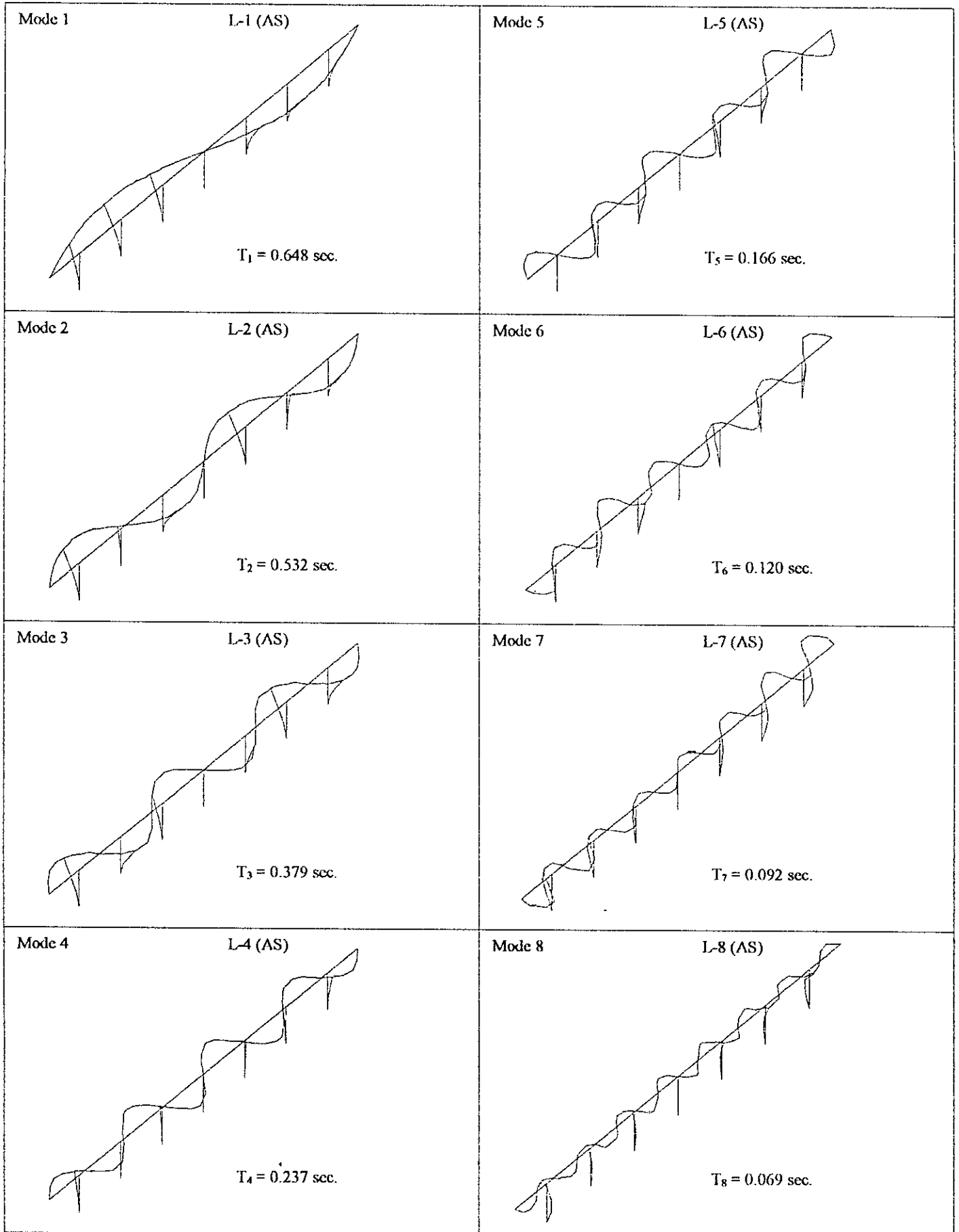


Fig. IV.7- Modes symétriques (S) de vibrations verticales

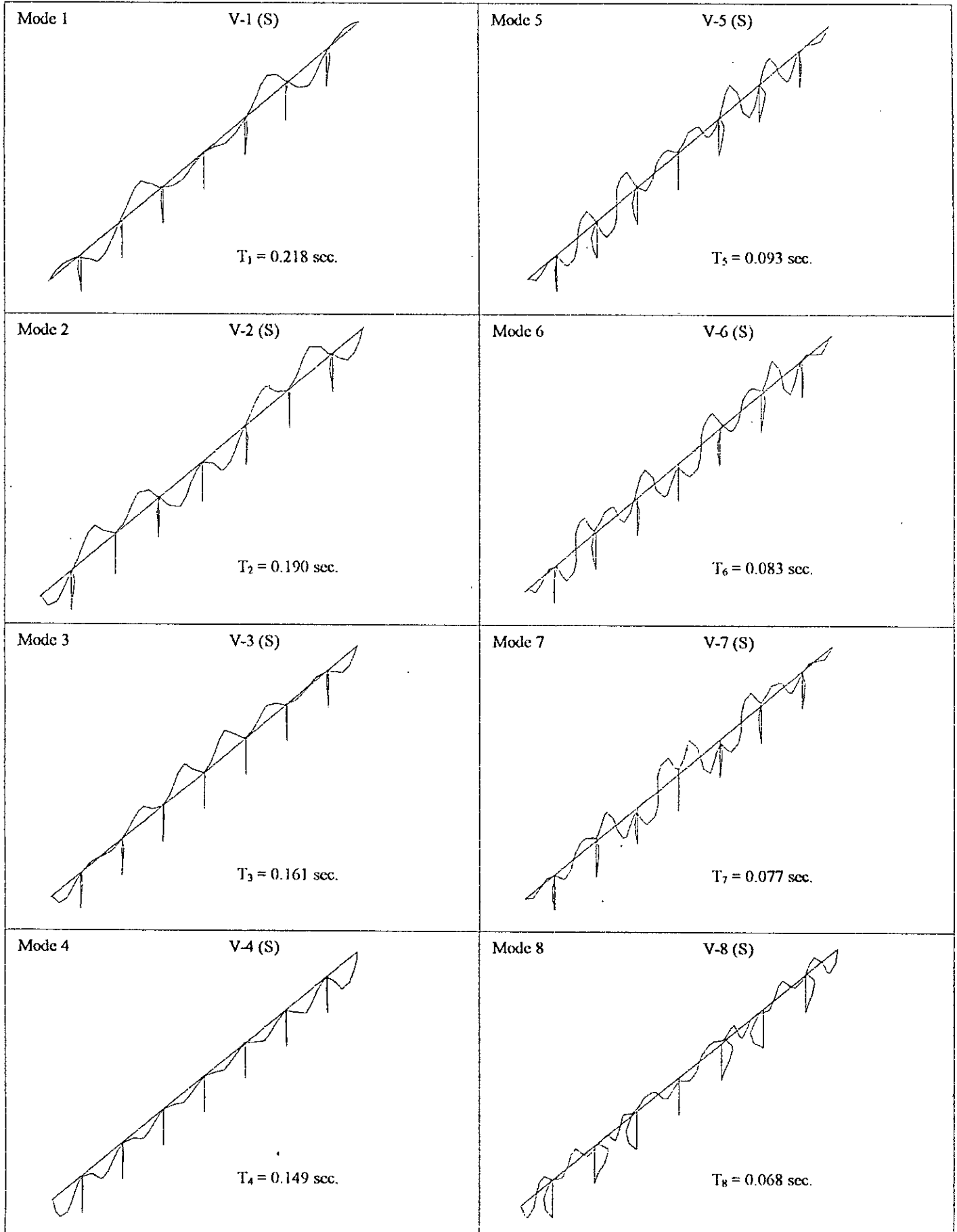


Fig. IV.8- Modes antisymétriques (AS) de vibrations verticales

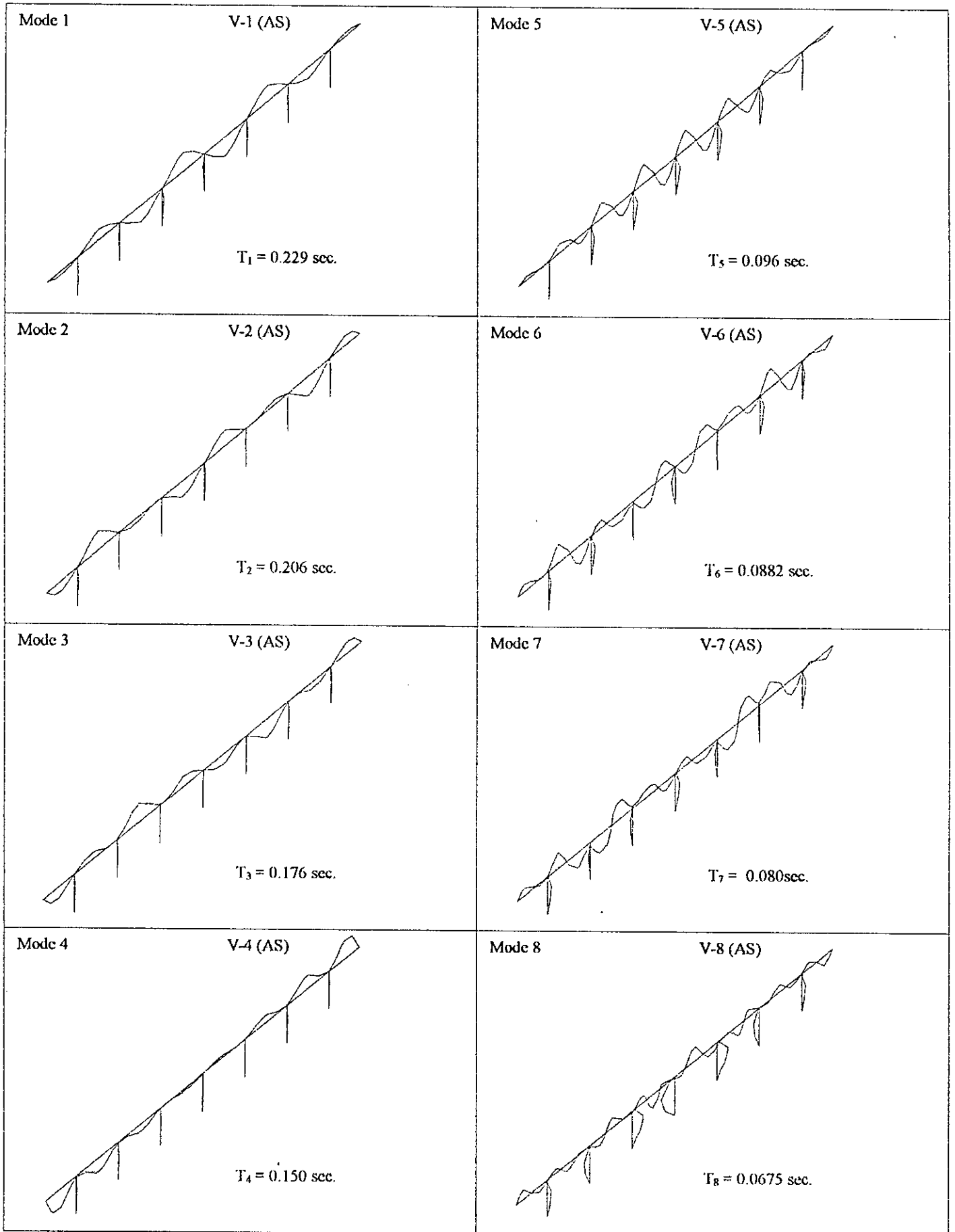


Fig. IV.9- Modes symétriques (S) de vibrations torsionnelles

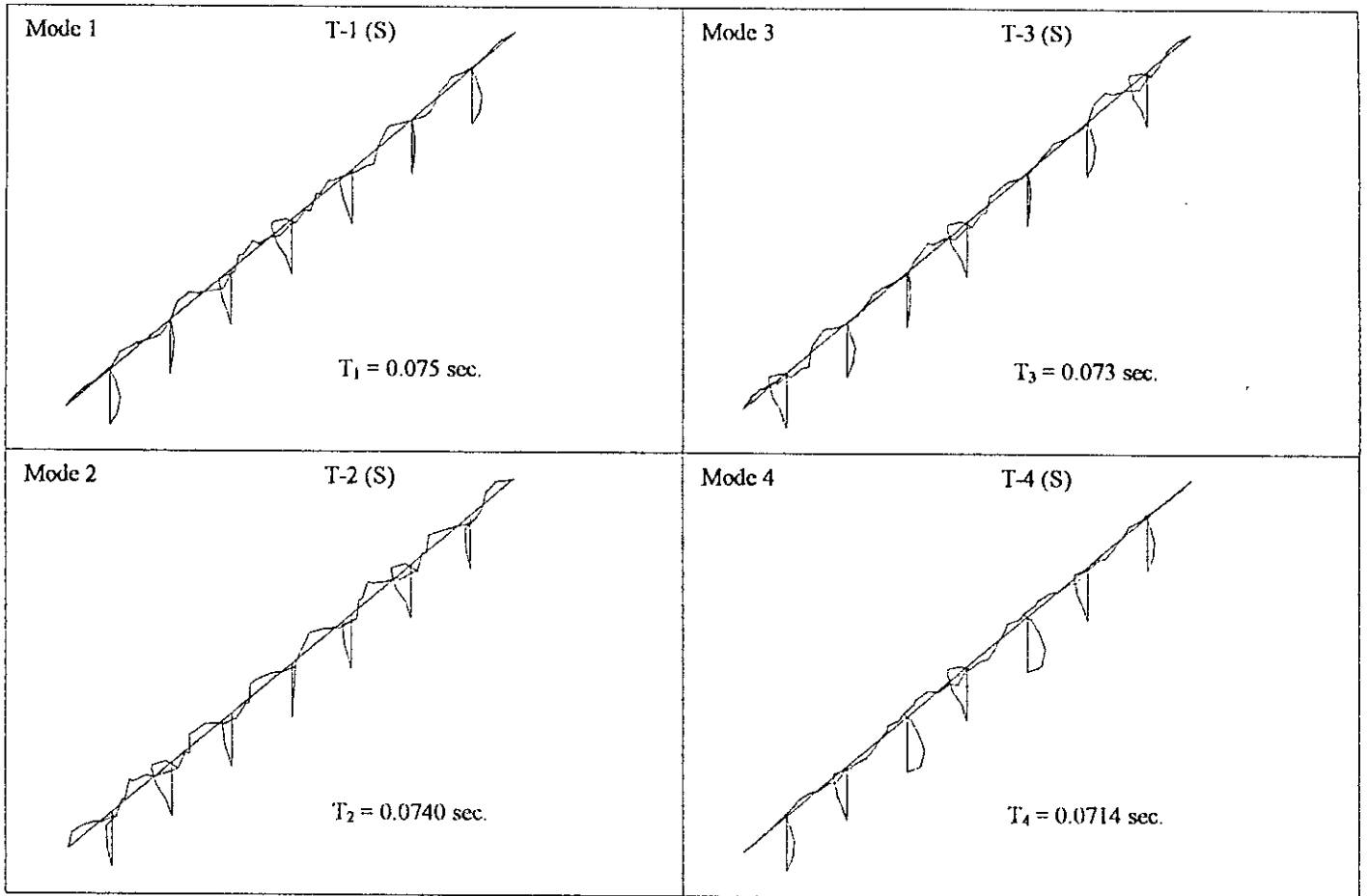


Fig. IV.10- Modes antisymétriques (AS) de vibrations torsionnelles

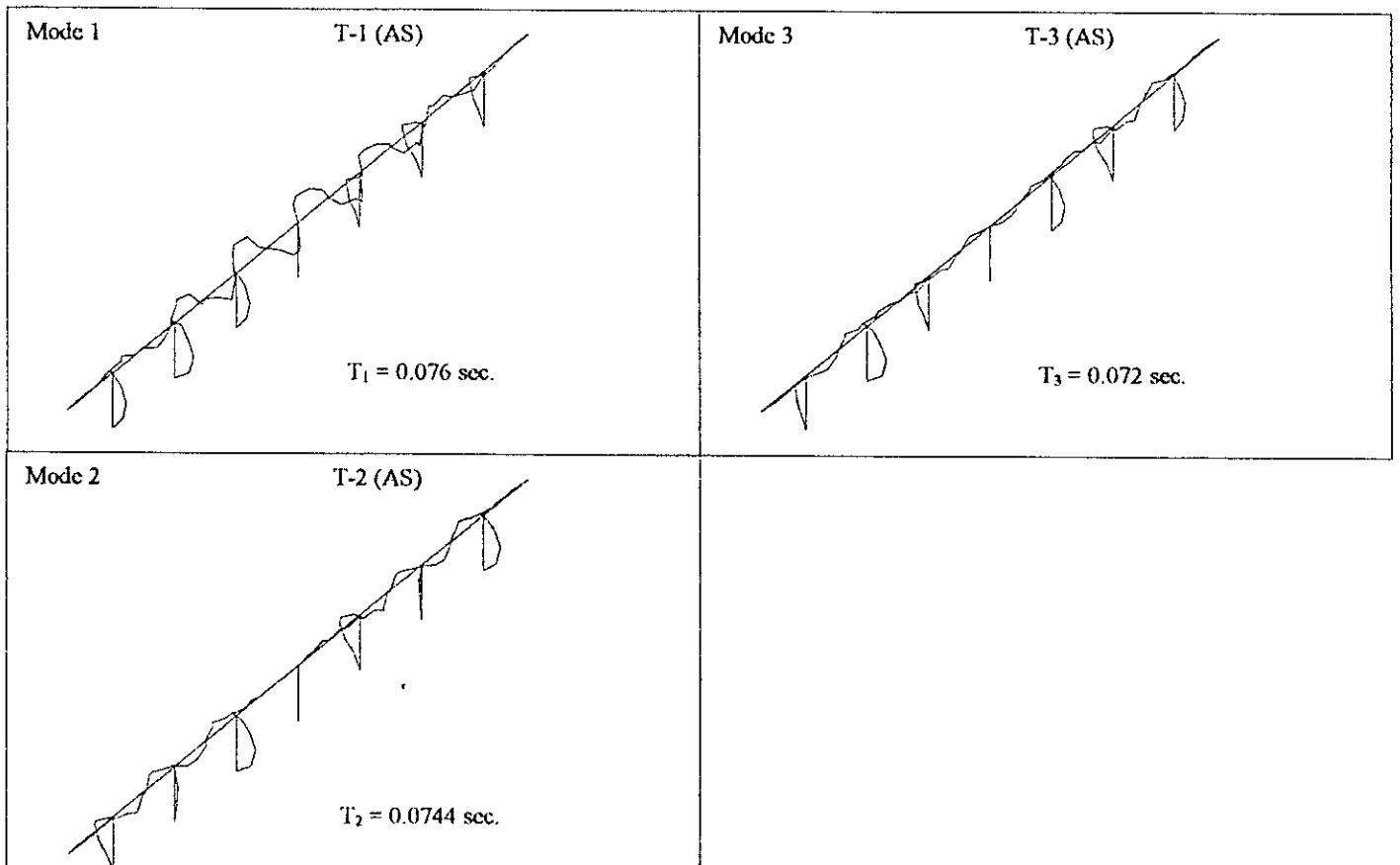
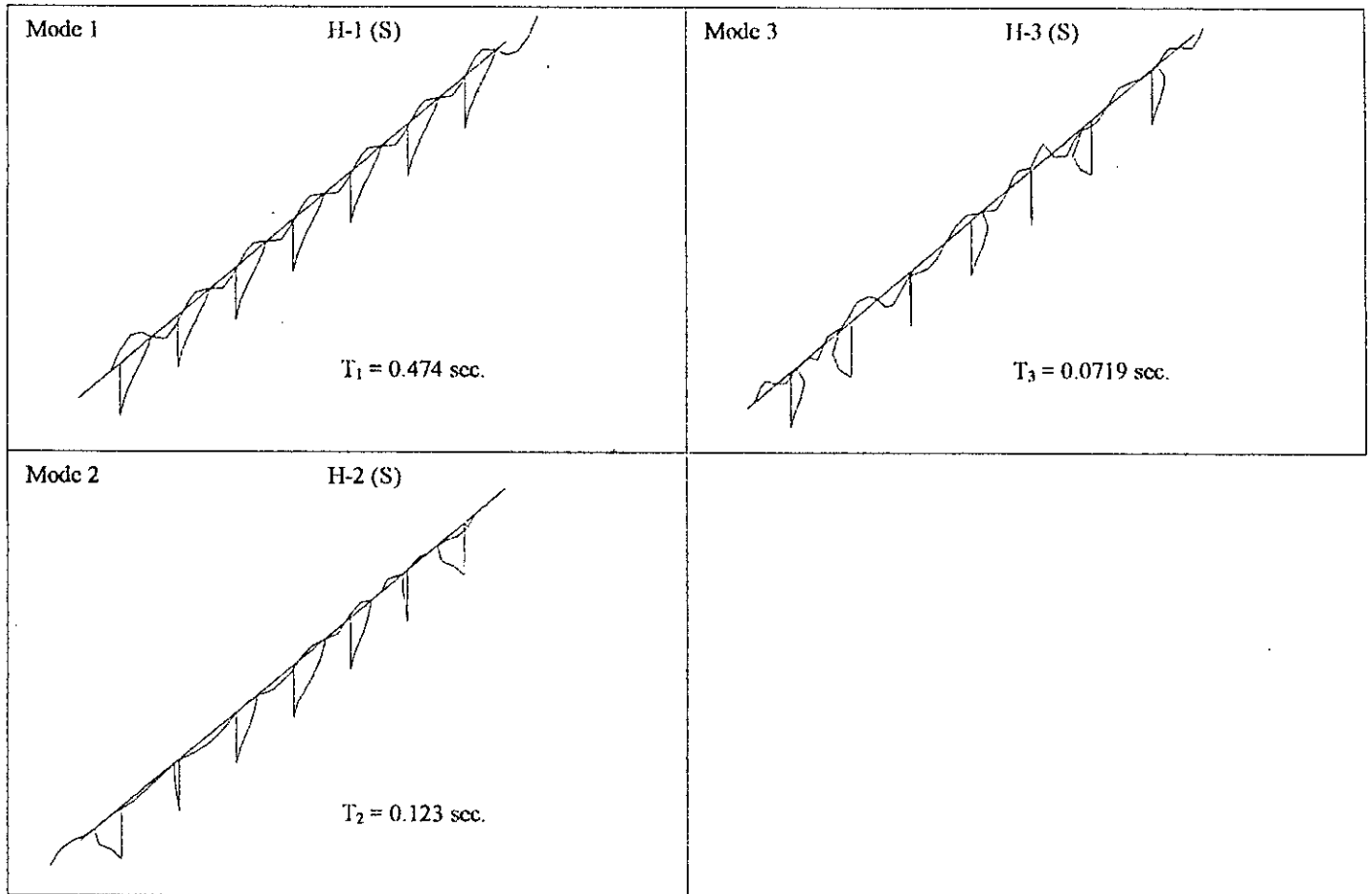
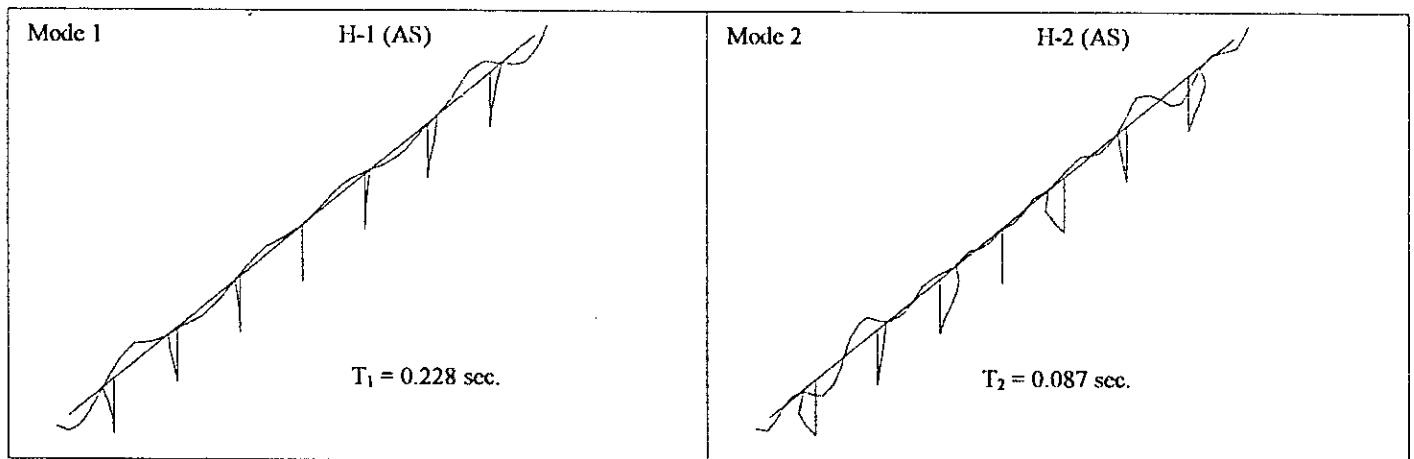


Fig. IV.11- Modes symétriques (S) de vibrations longitudinales**Fig. IV.12- Modes antisymétriques (AS) de vibrations longitudinales**

IV. 6 CONCLUSION

1. Le modèle tridimensionnel de type portique (Modèle MI) est approprié pour la simulation par la méthode des éléments finis du comportement vibratoire du pont.
2. L'étude des fréquences propres et des déformées modales de vibrations du pont de Belle Ville, met en évidence un fort couplage entre les modes latéraux et torsionnels d'une part, et entre les modes de vibrations longitudinales et verticales d'autre part.
3. Les résultats de l'analyse modale, montrent que les quatre premiers modes de vibrations du pont de Belle Ville sont dominés essentiellement par des modes de vibration en flexion latérale. On remarque aussi que les modes de torsion se manifestent au-delà du 34^{ème} rang.

Chapitre V

ANALYSE MODALE DES PONTS BI-CAISSONS PONT DE SERPA (PORTUGAL)

V.1 INTRODUCTION

Le choix de la section transversale demeure un critère important sur la conception générale de l'ouvrage, si l'on veut réaliser une structure sûre, économique et d'un aspect esthétique. L'ingénieur doit établir les critères nécessaires au choix du type de la section transversale la mieux adaptée aux exigences de son projet et d'être conçue pour qu'elle résiste aux effets simultanés des charges statiques et dynamiques. L'un des critères le plus important est la largeur du pont, cette dernière intervient systématiquement dans la conception de la section transversale du pont, particulièrement, dans le cas où la largeur du pont est très large dont la solution classique consiste à concevoir deux caissons parallèles reliés par un hourdis supérieur. Cette section convenablement choisie possède une grande rigidité de torsion offrant aux ponts un avantage au cas où ils seront astreints de résister aux effets de torsion d'un séisme.

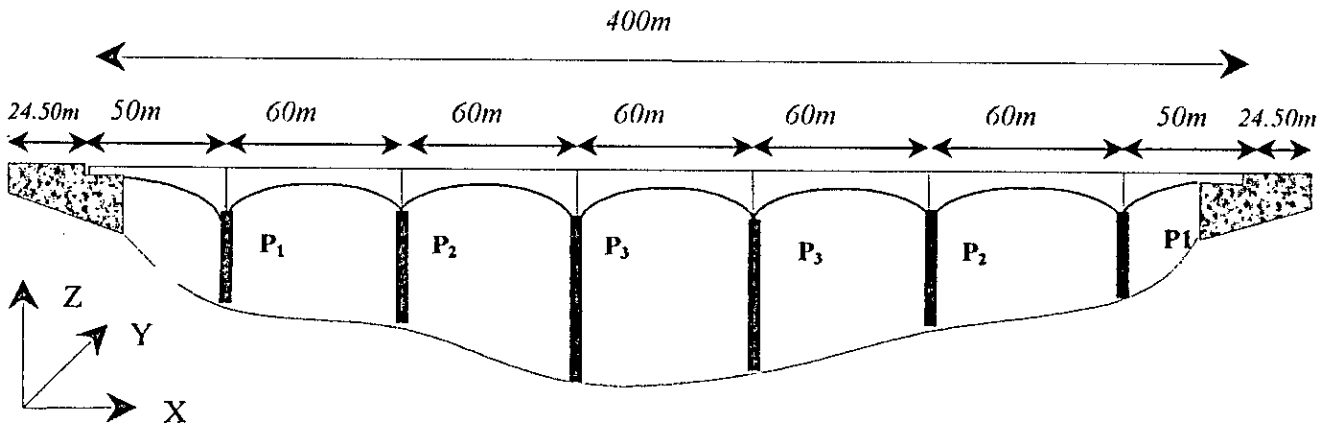
Dans cette étude, nous attelons à fixer à priori deux objectifs majeurs : celui de présenter une modélisation du pont par le modèle d'éléments finis de type portique tridimensionnels - Modèle MI, ensuite, la compréhension des caractéristiques modales du pont. Dans ce qui suit, nous menons l'étude sur un pont à deux caissons parallèles. Le pont de Serpa au Portugal est un bon exemple.

V.2 DESCRIPTION GENERALE DU PONT

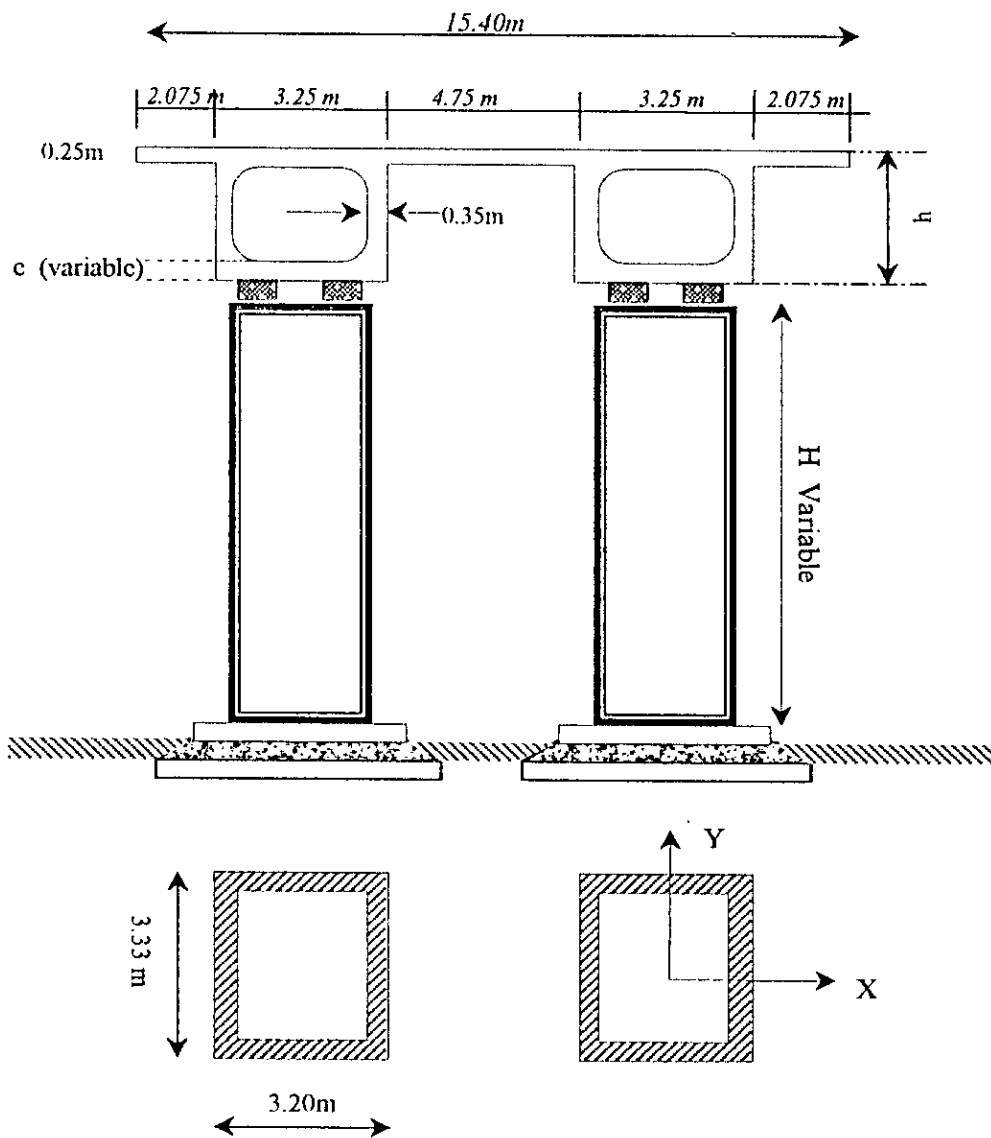
Le viaduc de SERPA sur le Gardiana au Portugal est un pont routier à inertie variable, construit par encorbellements successifs, assurant le franchissement du fleuve Gardiana dans la région de SERPA. Il comporte un total de sept travées continues dont cinq travées intermédiaires de 60m de longueur et deux travées de rives de 50m de longueur. Les travées d'accès sont portées par les piles et les culées (Fig. V.1.a)

Le tablier en béton précontraint est continu sur une longueur totale de 400m et se compose de deux poutres caissons parallèles de hauteurs variables, encastées élastiquement sur des piles de section évidée en béton armé, avec lesquelles il constitue un portique à nœuds déplaçables. La section transversale est formée de deux caissons identiques de largeur totale de 15.40m et une hauteur légèrement variable de 3m à l'appui et 2m à la clés. Les portes -à - faux sont symétriques de 2.075m, les âmes sont verticales avec une épaisseur de 0.35m.

Les piles sur lesquelles le tablier est encasté élastiquement par l'intermédiaire d'appui en Néoprène dédoublé, ont une section tubulaire de forme rectangulaire avec des parois de 0.50m d'épaisseur. Ces appuis sont fondés sur semelles superficielles descendues au rocher.



(a) Vue générale



(b) Section transversale - Piles courantes

Fig. V.1- Viaduc de serpa (Portugal)

V.3 PROPRIETES GEOMETRIQUES ET MECANIQUES DU PONT DE SERPA

Le tablier du pont de Serpa à inertie variable est construit par encorbellements successifs en voussoirs préfabriqués de 3.30m de longueur. La géométrie des travées de rive et intermédiaires du pont de Serpa est illustrée sur la figure V.2

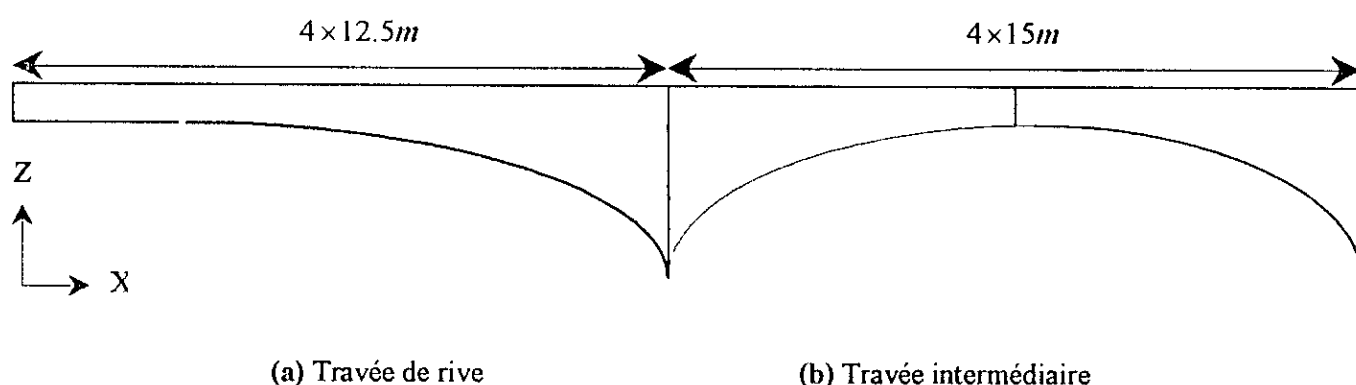


Fig. V.2- Représentation des sections aux niveaux des travées

Le tableau ci après fournit les caractéristiques géométriques du pont de Serpa (Portugal)

Tableau 1 Propriétés structurales du pont de Serpa

Longueur Totale (m)	Portées (m)	Hauteur des piles (m)			Epaisseur de l'âme	Largeur du tablier r	Hauteur du tablier (h)		Epaisseur du hourdis Inférieur (e)	
		1	2	3			Appui	clé	Appui	clé
400m	50m, 5x60m, 50m	23	44	75	0.35m	15.4m	3m	2m	0.45m	0.30m

Le comportement du béton dans le pont est supposé linéaire, élastique, isotrope et caractérisé par les propriétés suivantes : masse volumique $\rho = 2500\text{Kg} / \text{m}^3$, coefficient du poisson $\nu = 0.2$, et module d'élasticité $E = 3.5 \times 10^4 \text{Mpa}$

V.4 CARACTERISTIQUES DU MODEL DE CALCUL

Le viaduc de Serpa présente un bon exemple pour la simulation par la méthode des éléments de type portique tridimensionnels (Modèle MI) du comportement vibratoire tridimensionnel des ponts bi-caissons. Ce dernier est supporté par des piles flexibles. Par ce critère, le comportement vibratoire du pont bi-caissons sera assimilé à celui d'un comportement portique.

En adoptons la règle du maillage optimal (Cf. chapitre III, paragraphe III.5.2). La structure porteuse est subdivisée en une série de 28 éléments répartis sur l'axe neutre de la chaussée ; les axes locaux de ces éléments sont définis de sorte que l'axe (2) du système référentiel soit parallèle à l'axe (Z) du système physique. Notons que l'axe local (1) est pris confondu avec l'axe longitudinal de la chaussée.

Les travées d'accès sont supportées par les culées et six lignes d'appuis de deux piles chacune, La connexion de ces dernières aux nœuds communs de la superstructure est réalisée par l'intermédiaire de deux éléments artificiellement rigides et sans masse.

Le maillage de la pile est constitué de trois éléments poutres 3D liés à quatre nœuds. On définit pour chaque nœud un système référentiel d'axes locaux (1, 2, 3) orientés dans l'espace de la façon suivante ; l'axe local (1) est toujours considéré confondu avec celui de la ligne neutre de la pile, l'axe (2) est parallèles a l'axe global (y).

Les conditions d'appuis de l'ouvrage sont; Les piles sont enracinées dans le sol, les travées d'accès sont portées par les piles et les culées. Les tableaux ci après donnent les caractéristiques de la taille du modèle et les conditions d'appuis.

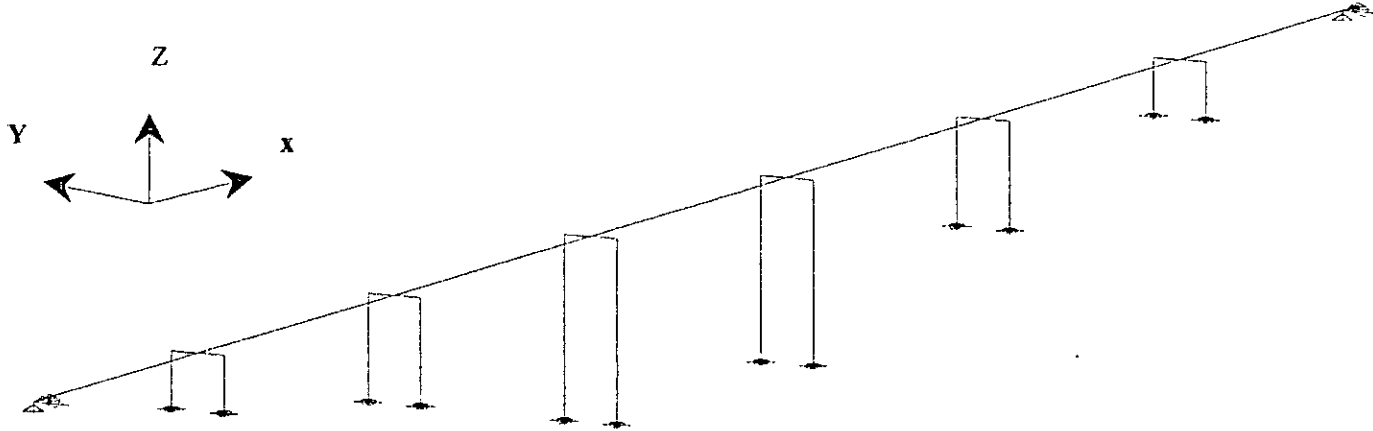
Tableau 2 : Caractéristiques du modèle

Nombre de nœuds à 6 ddl	63	Nombre d'éléments souples	64
Nombre de nœuds à 3 ddl (culée)	2	Nombre d'éléments rigides	12
Nombre de nœuds à 0 ddl (encas)	12		
Total	77	Total	76

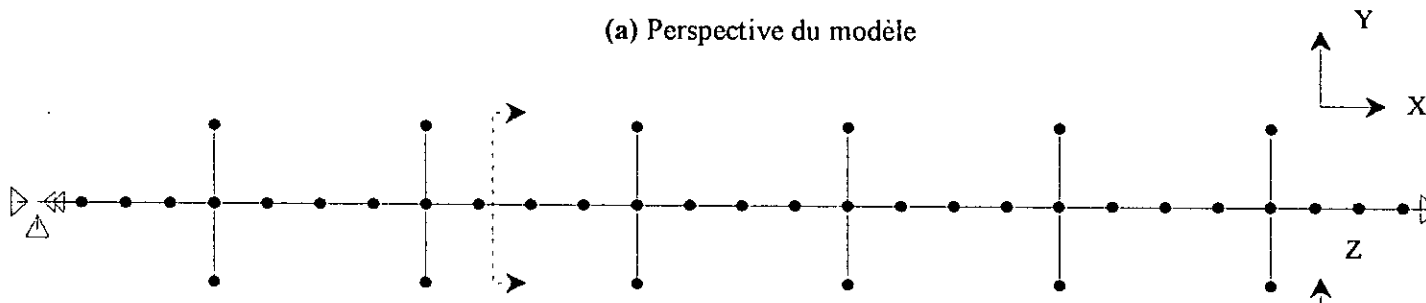
Tableau 3 : Conditions de liberté des nœuds

Nœuds	Déplacements			Rotations		
	u	v	w	θ_x	θ_y	θ_z
Culées	0	1	1	1	0	0
Encastremets	1	1	1	1	1	1
Nœuds restants	0	0	0	0	0	0

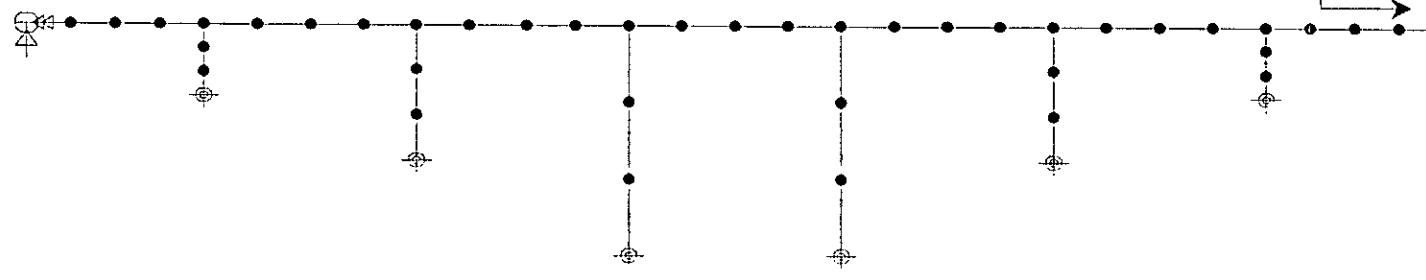
Nous montrons par les figures ci-après, la perspective du modèle en éléments finis, une vue en plan du modèle, une représentation en élévation du modèle.



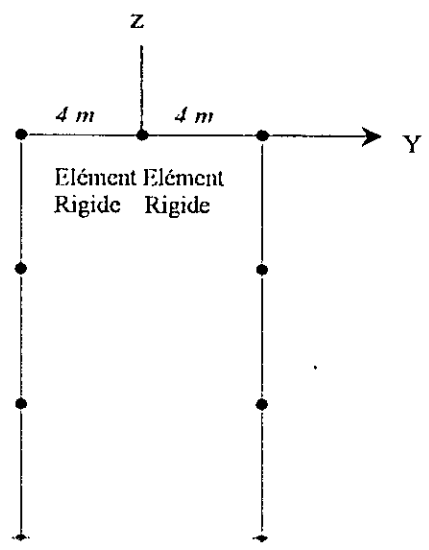
(a) Perspective du modèle



(b) Vue en plan



(c) Elévation du modèle



(d) Coupe A - A

Fig. V.3- Modèle discret spatial du
Perspective du modèle
Vue en plan
Elévation du modèle
Coupe

5 ANALYSE MODALE

La procédure de calcul des modes propres fait appel en premier lieu à la formation des matrices masse et rigidité globales de la structure. La matrice de rigidité globale correspond à l'état d'équilibre statique. Ses termes rendent compte des raideurs géométriques et mécaniques de chaque élément de la structure. Ainsi, il est supposé que le comportement vibratoire tridimensionnel soit élastique et linéaire autour de l'état d'équilibre statique.

Afin de tenir compte du couplage entre les forces inertielles, la matrice des masses consistantes est introduite dans la procédure de calcul des modes propres. Les termes qui se trouvent à l'extérieur de la diagonale ont une valeur significative. Les paramètres de périodes sont calculés en utilisant une des méthodes numériques connues pour la solution d'un problème standard de valeurs propres.

Pour analyser de manière qualitative le comportement vibratoire du pont bi-caisson, on a pris en compte 58 modes de vibration pour un modèle spatial d'éléments finis ayant 77 nœuds (384 degrés de libertés) et 76 éléments. Ces modes obtenus étaient nécessaires pour atteindre un coefficient de participation modale de 98.21%, 97.53% et 71.75% dans les directions choisies $x - x$, $y - y$ et $z - z$, on est arrivé alors à une période fondamentale de 1.56s avec un minimum de 0.0678s.

L'objectif de ces calculs était de mettre en évidence et interpréter les phénomènes de vibration des différentes parties de la structure.

Les tableaux ci après commentent les principaux résultats obtenus.

Tableau 4 : Périodes et natures des modes de vibrations latérales (Pont de Serpa)

Modes Symétriques					Modes Antisymétriques				
Mode	Périodes (s)	Coefficients de Participation modale%			Rang du mode	Périodes (s)	Coefficients de Participation modale%		
		X - X	Y - Y	Z - Z			X - X	Y - Y	Z - Z
1	1.56	0	61	0	1	0.80	0	0	0
2	0.51	0	13.28	0	2	0.327	0	0	0
3	0.2609	0	5.217	0	3	0.220	0	0	0
4	0.1383	0	1.934	0	4	0.116	0	0	0
5	0.0957	0	0.036	0	5	0.0817	0	0	0
6	0.071	0	0.040	0					

Tableau 5 : Périodes et natures des modes de vibrations torsionnelles (Pont de Serpa)

Modes Symétriques					Modes Antisymétriques				
Mode	Périodes (s)	Coefficients de Participation modale%			Rang du mode	Périodes (s)	Coefficients de Participation modale%		
		X - X	Y - Y	Z - Z			X - X	Y - Y	Z - Z
1	0.393	0	10.876	0	1	0.45	0	0	0
2	0.1807	0	1.219	0	2	0.178	0	0	0
3	0.178	0	0.042	0	3	0.177	0	0	0
4	0.151	0	1.163	0	4	0.147	0	0	0
5	0.146	0	1.67	0	5	0.145	0	0	0
6	0.0678	0	0.739	0	6	0.0681	0	0	0

Tableau 6 : Périodes et natures des modes de vibrations verticales (Pont de Serpa)

Modes Symétriques					Modes Antisymétriques				
Mode	Périodes (s)	Coefficients de Participation modale%			Rang du mode	Périodes (s)	Coefficients de Participation modale%		
		X - X	Y - Y	Z - Z			X - X	Y - Y	Z - Z
1	0.48	0	0	0	1	0.264	0	0	1.78
2	0.337	0	0	0.20	2	0.215	0	0	0.110
3	0.289	0	0	0.78	3	0.102	0	0	0.011
4	0.240	0	0	0.28	4	0.0986	0	0	0.073
5	0.206	0	0	44.73	5	0.089564	0.040	0	0.001
6	0.150	0	0	0.079	6	0.074	0.037	0	0
7	0.106	0	0	4.45					
8	0.0993	0	0	0.084					
9	0.089598	0	0	0.48					
10	0.0835	0	0	17.93					

Tableau 7 : Périodes et natures des modes de vibrations longitudinales (Pont de Serpa)

Modes Symétriques					Modes Antisymétriques				
Mode	Périodes (s)	Coefficients de Participation modale%			Rang du mode	Périodes (s)	Coefficients de Participation modale%		
		X - X	Y - Y	Z - Z			X - X	Y - Y	Z - Z
1	0.83	89.65	0	0	1	0.217	2.70	0	0
2	0.43	1.617	0	0	2	0.0776	0	0	0.013
3	0.181	1.250	0	0					
4	0.1525	2.506	0	0					
5	0.1143	0.135	0	0					
6	0.0686	0.796	0	0					

Tableau 8 : Modes locaux (Pont de Serpa)

Mode	Périodes (s)	Coefficients de Participation modale%			Rang du mode	Périodes (s)	Coefficients de Participation modale%		
		X - X	Y - Y	Z - Z			X - X	Y - Y	Z - Z
1	0.405	0	0.301	0	5	0.174143	0	0	0
2	0.404	0	0	0	6	0.174143	0	0	0
3	0.395985	0	0	0	7	0.142069	0	0	0
4	0.395986	0	0	0	8	0.142069	0	0	0

Fig. V.4- Modes symétriques (S) de vibrations latérales (Pont de Serpa)

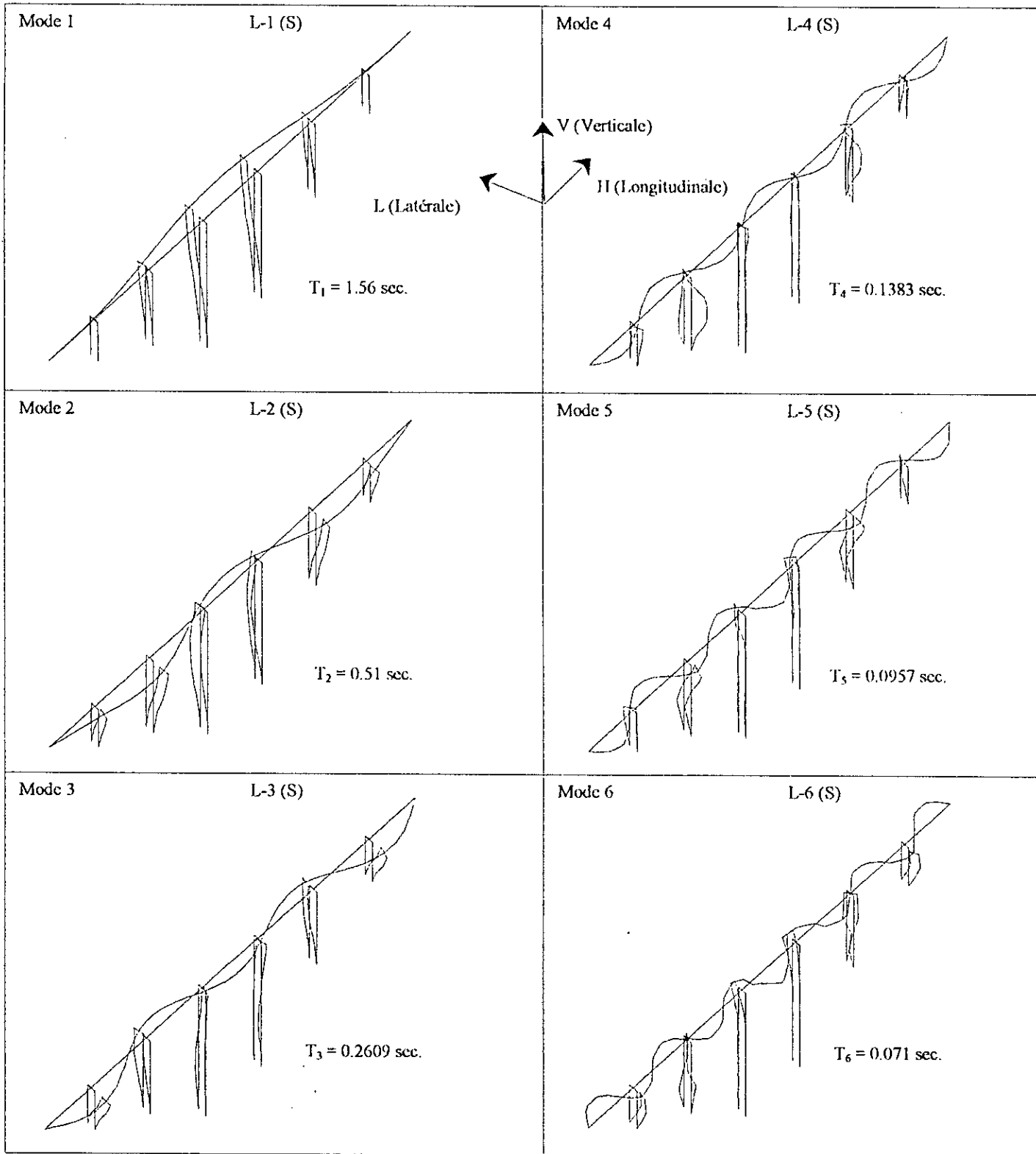


Fig. V.5- Modes antisymétriques (AS) de vibrations latérales (Pont de Serpa)

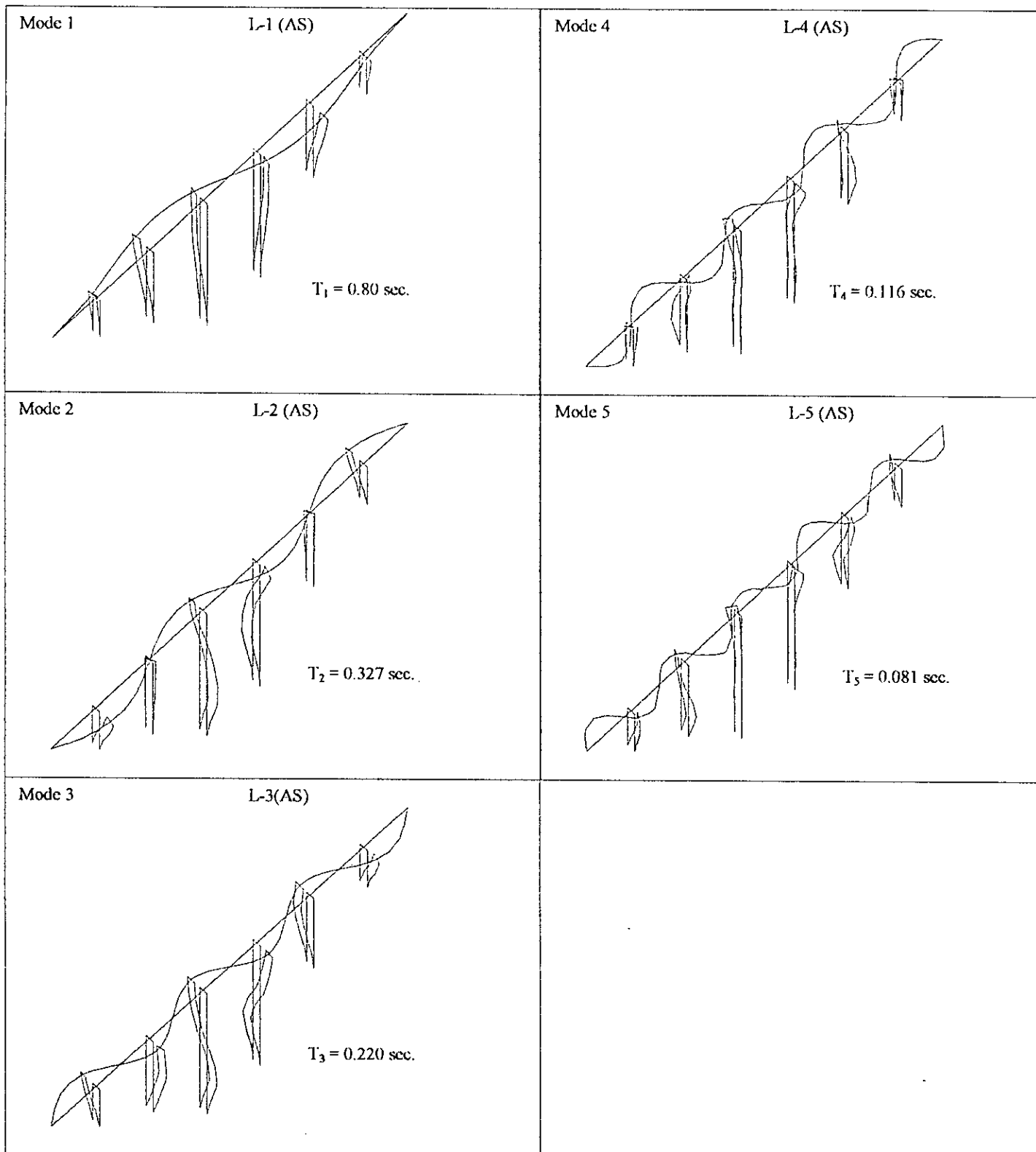


Fig. V.6- Modes symétriques (S) de vibrations torsionnelles (Pont de Serpa).

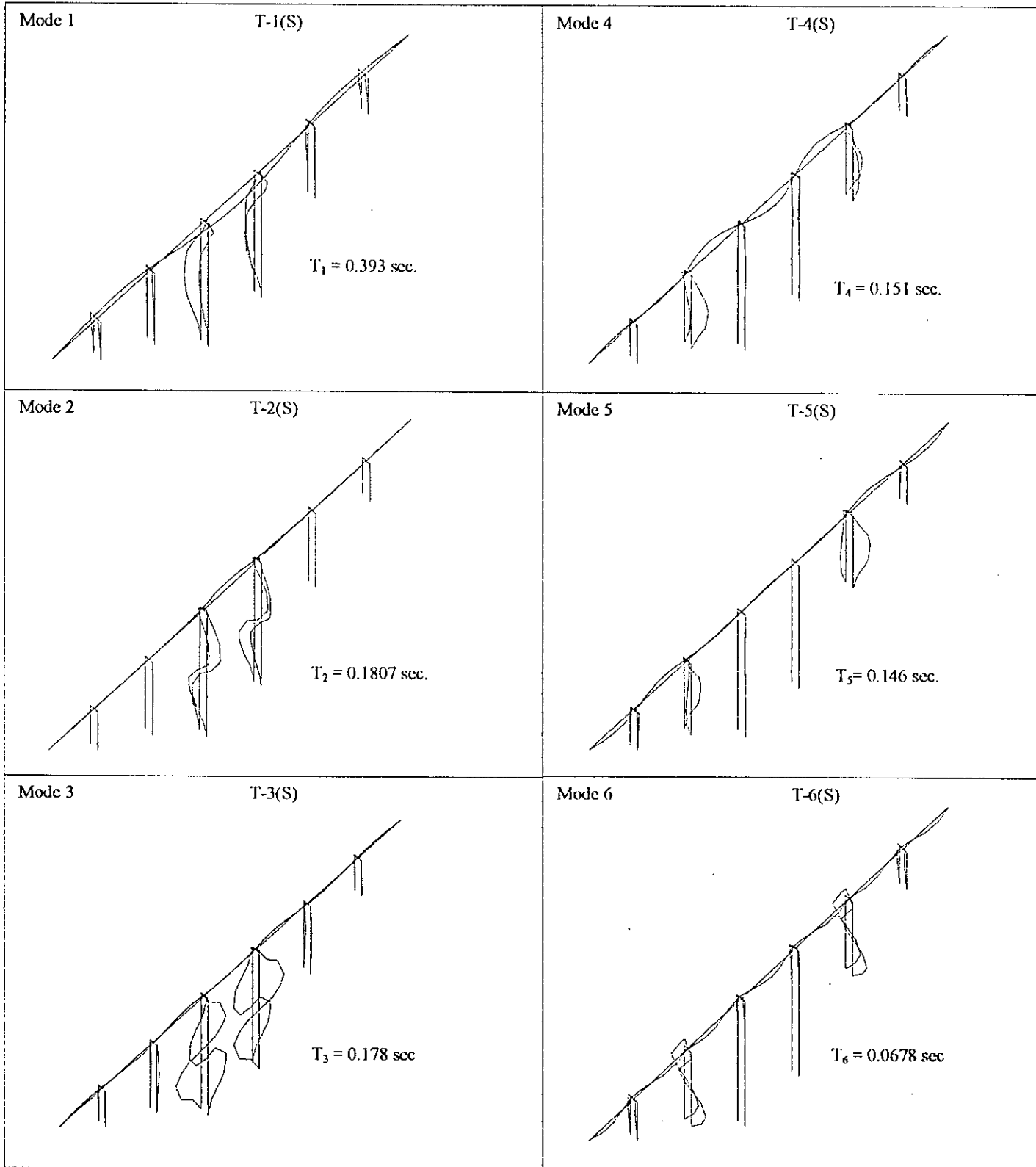


Fig. V.7- Modes antisymétriques (AS) de vibrations torsionnelles (Pont de Serpa)

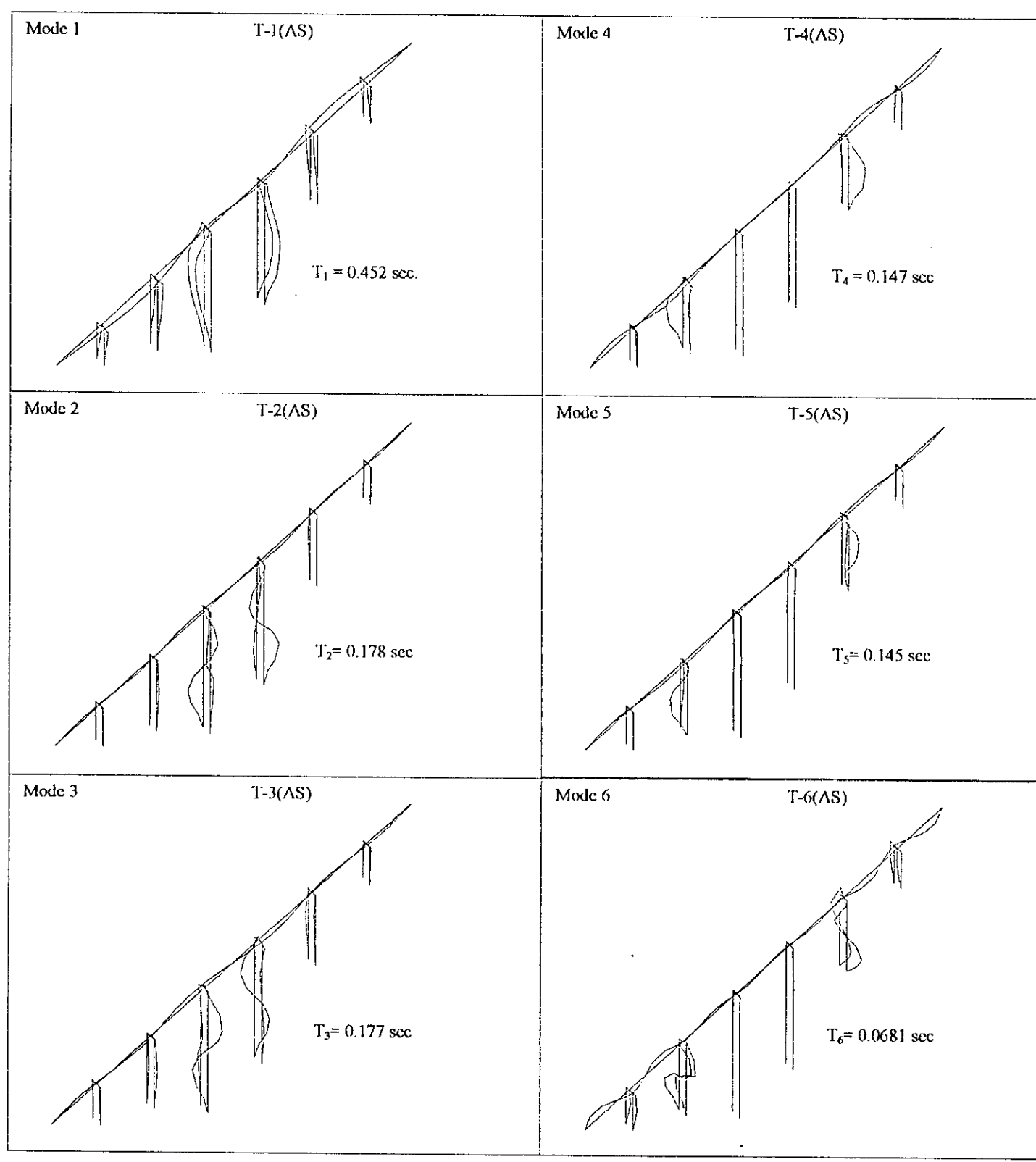
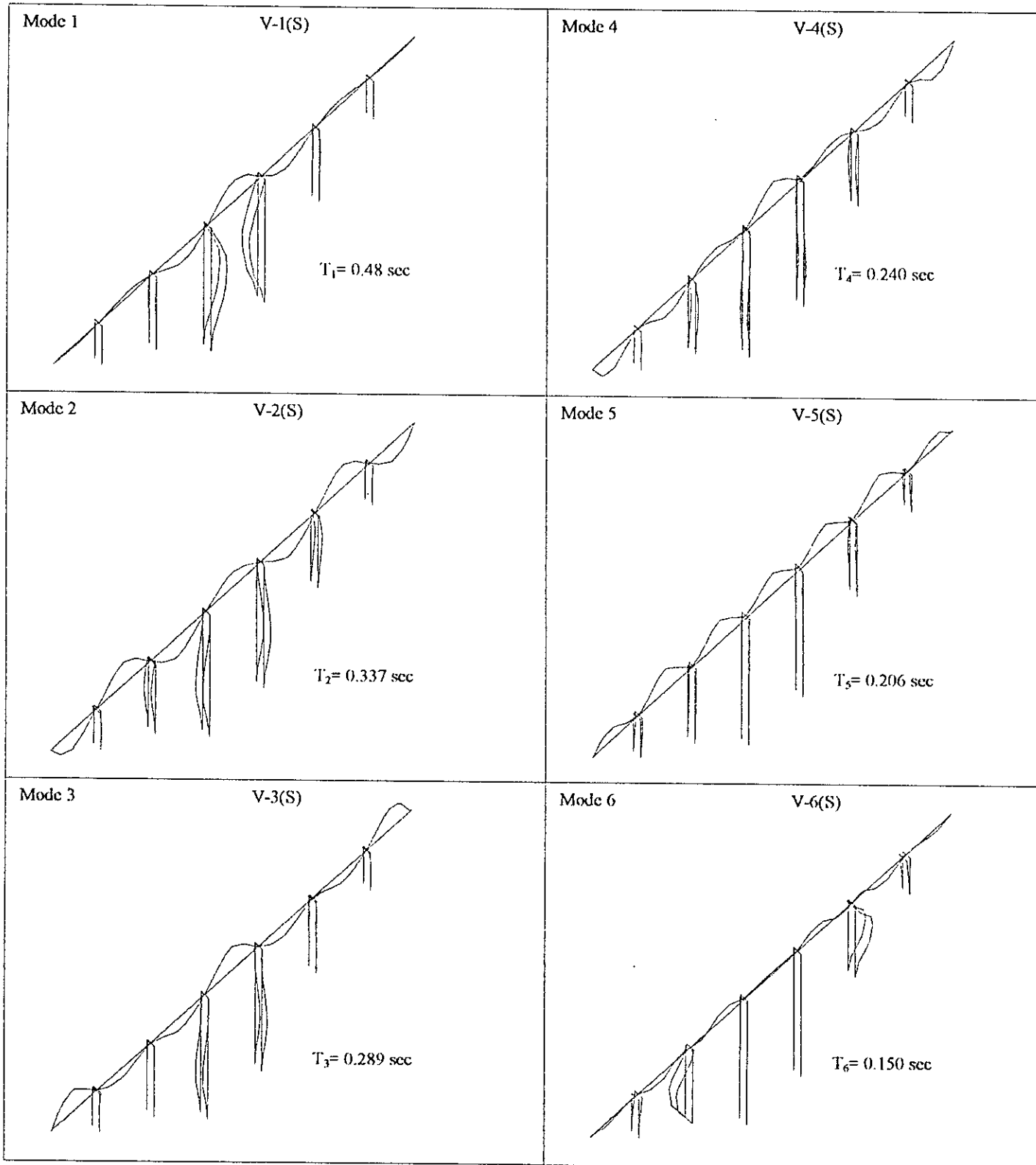


Fig. V.8- Modes symétriques (S) de vibrations verticales (pont de Serpa).



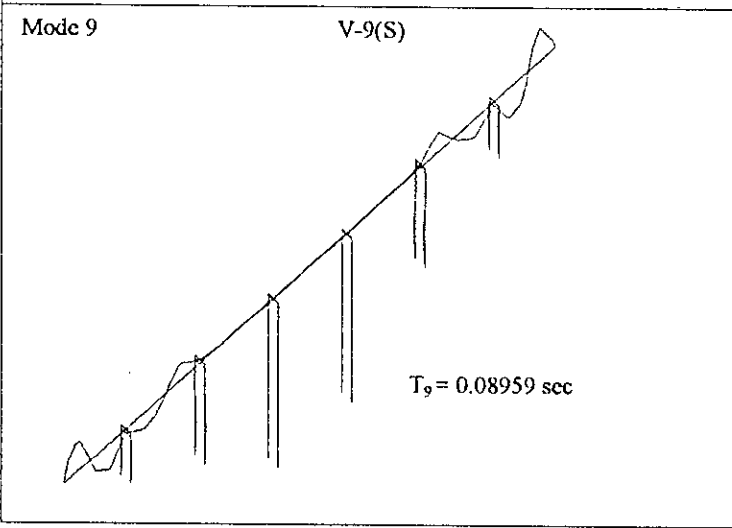
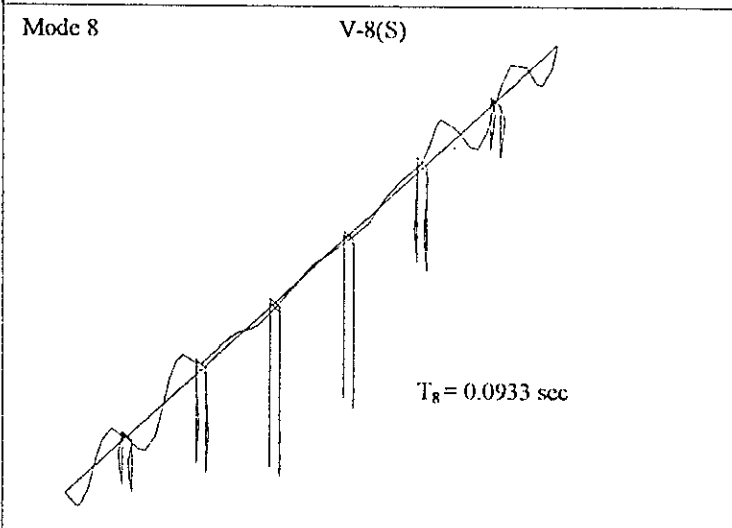
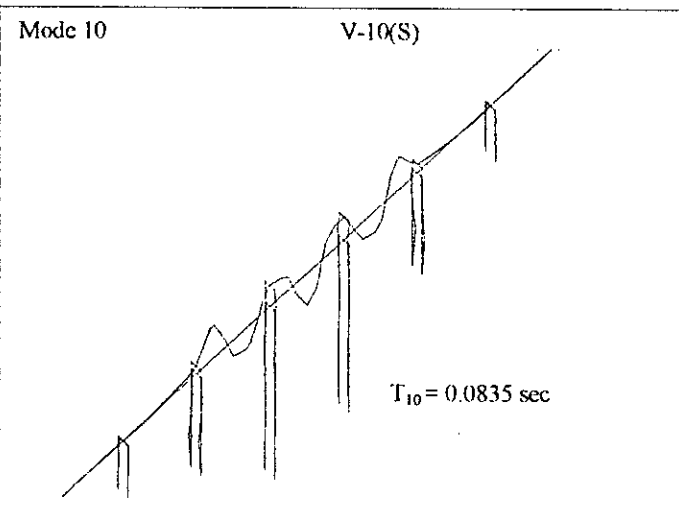
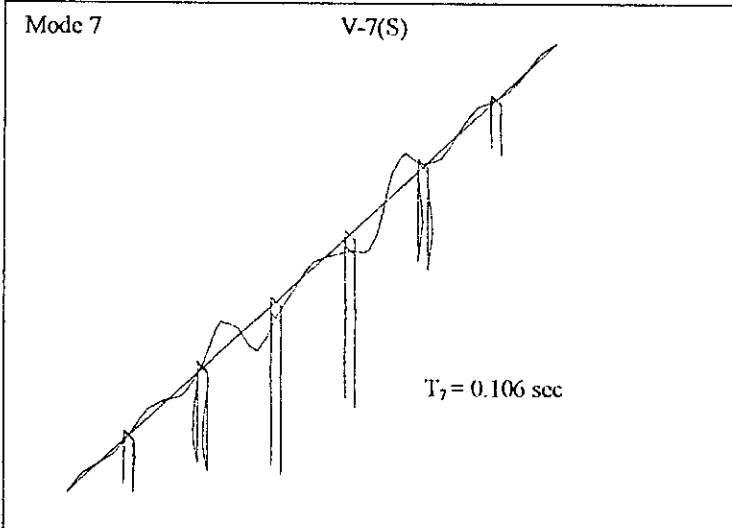


Fig. V. 9- Modes antisymétriques (AS) de vibrations verticales (pont de Serpa).

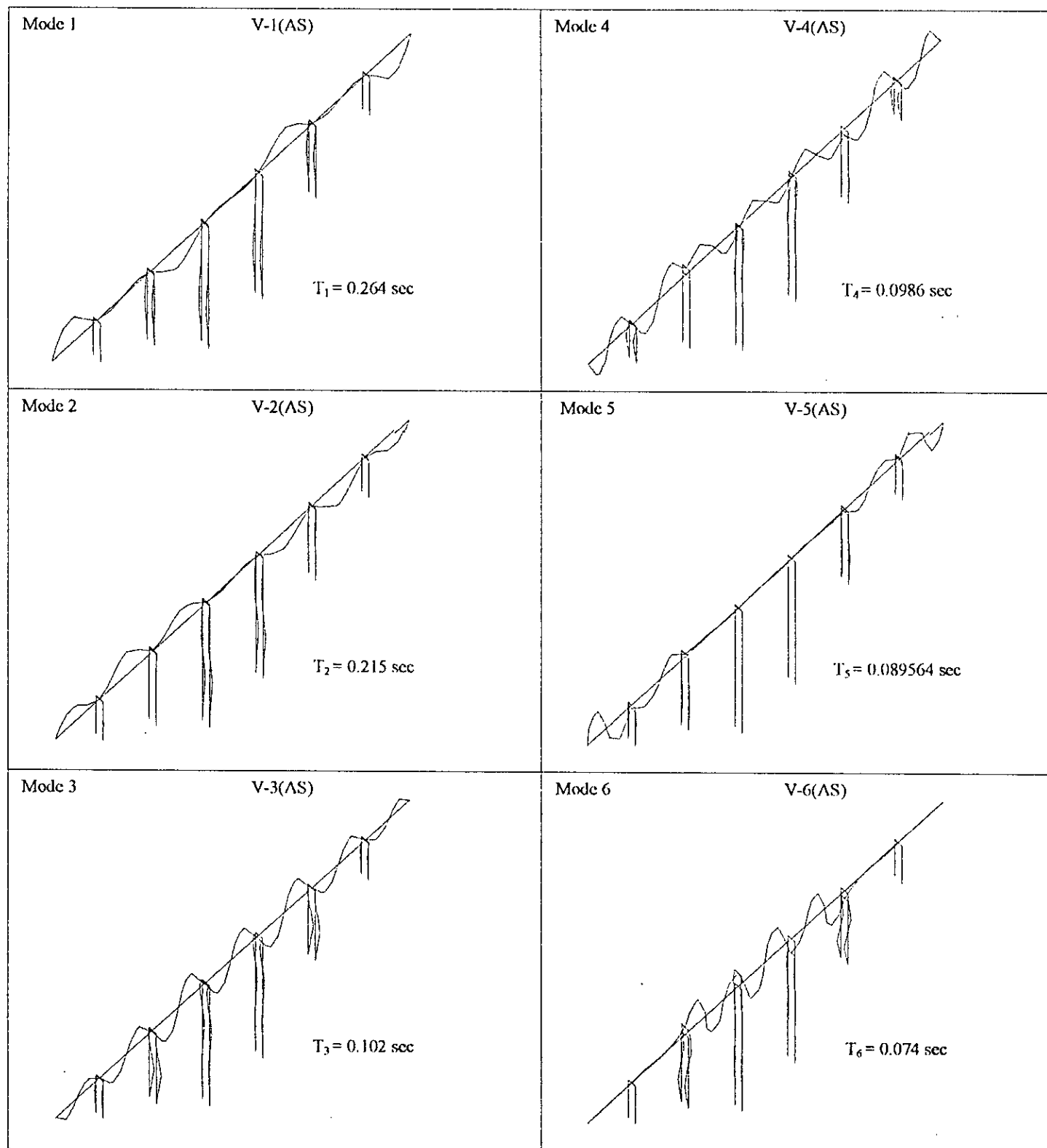


Fig. V.10- Modes symétriques (S) de vibrations longitudinales (pont de Serpa)

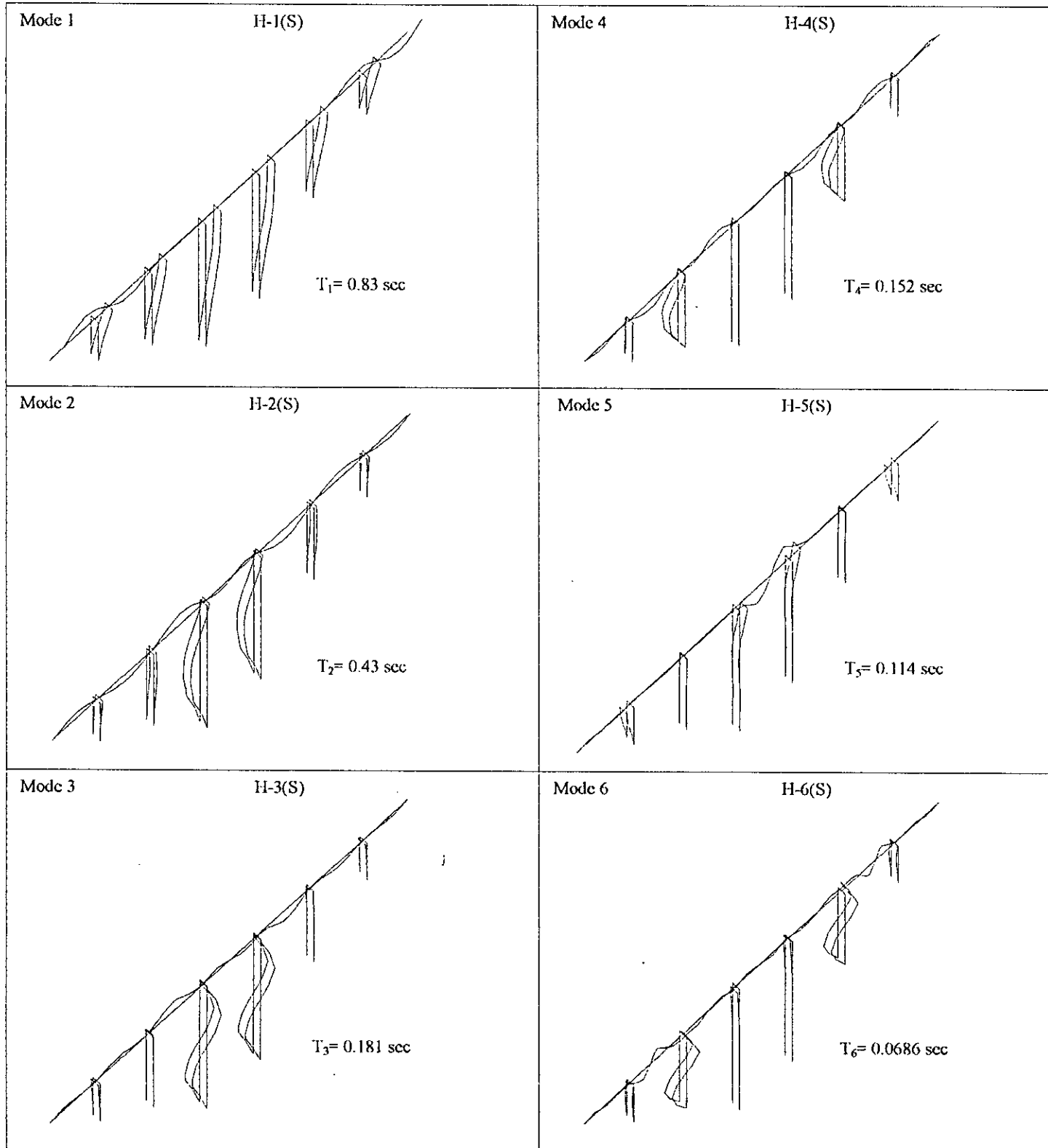


Fig. V.11- Modes antisymétriques (AS) de vibrations longitudinales (pont de Serpa)

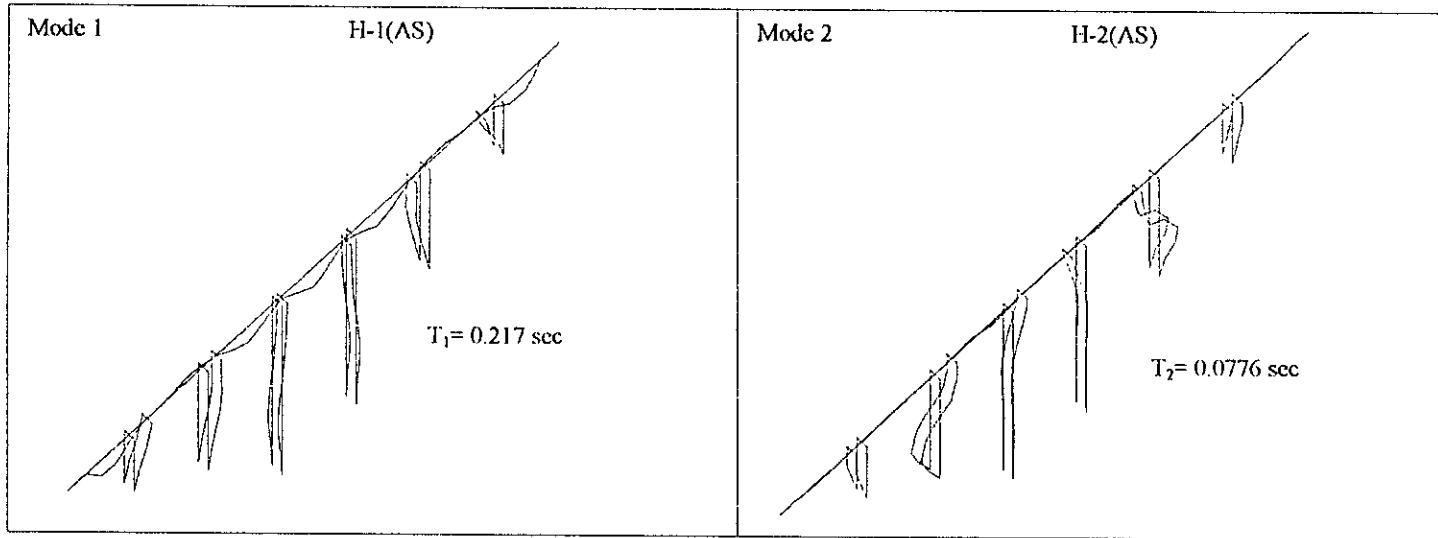
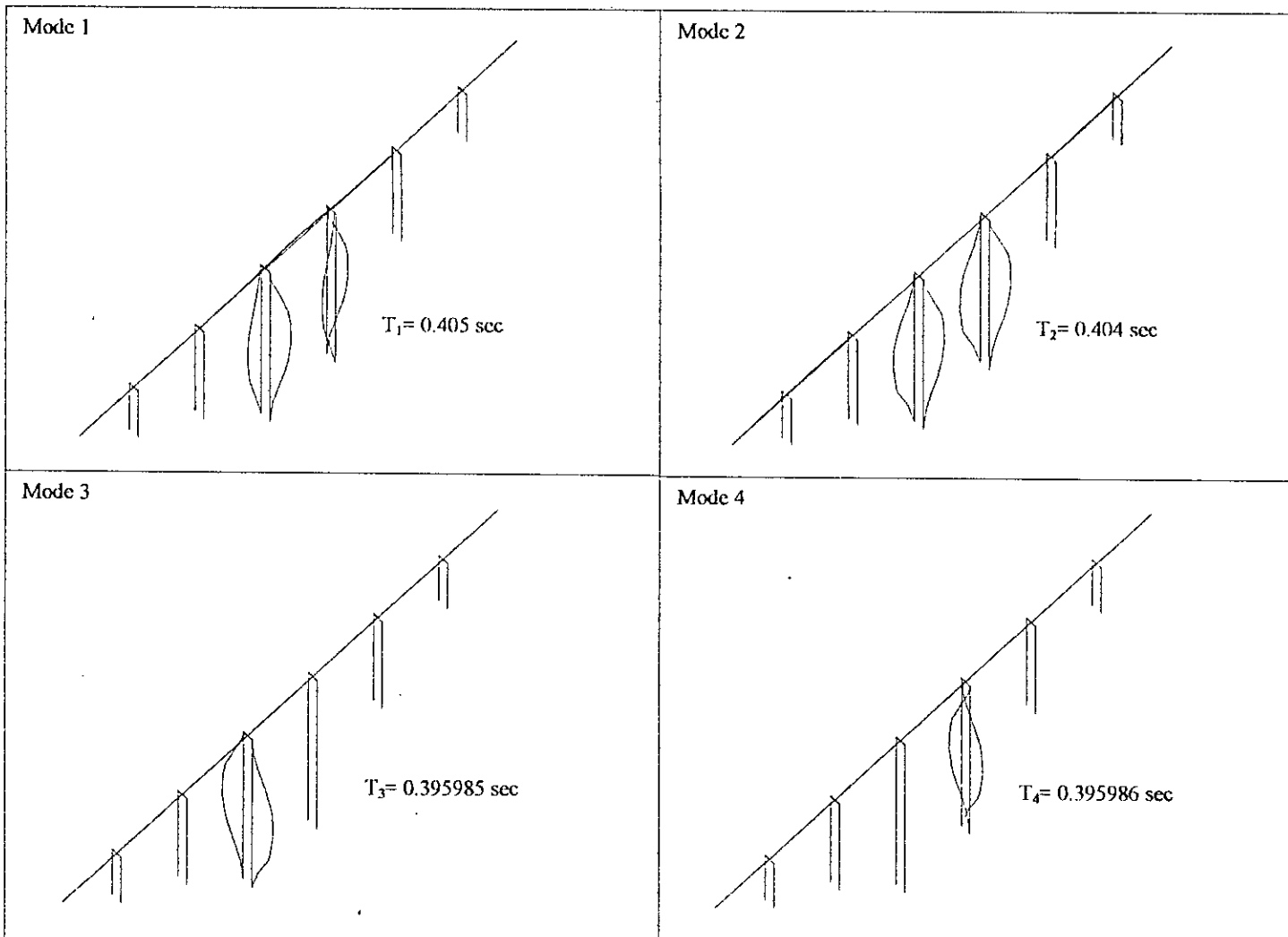
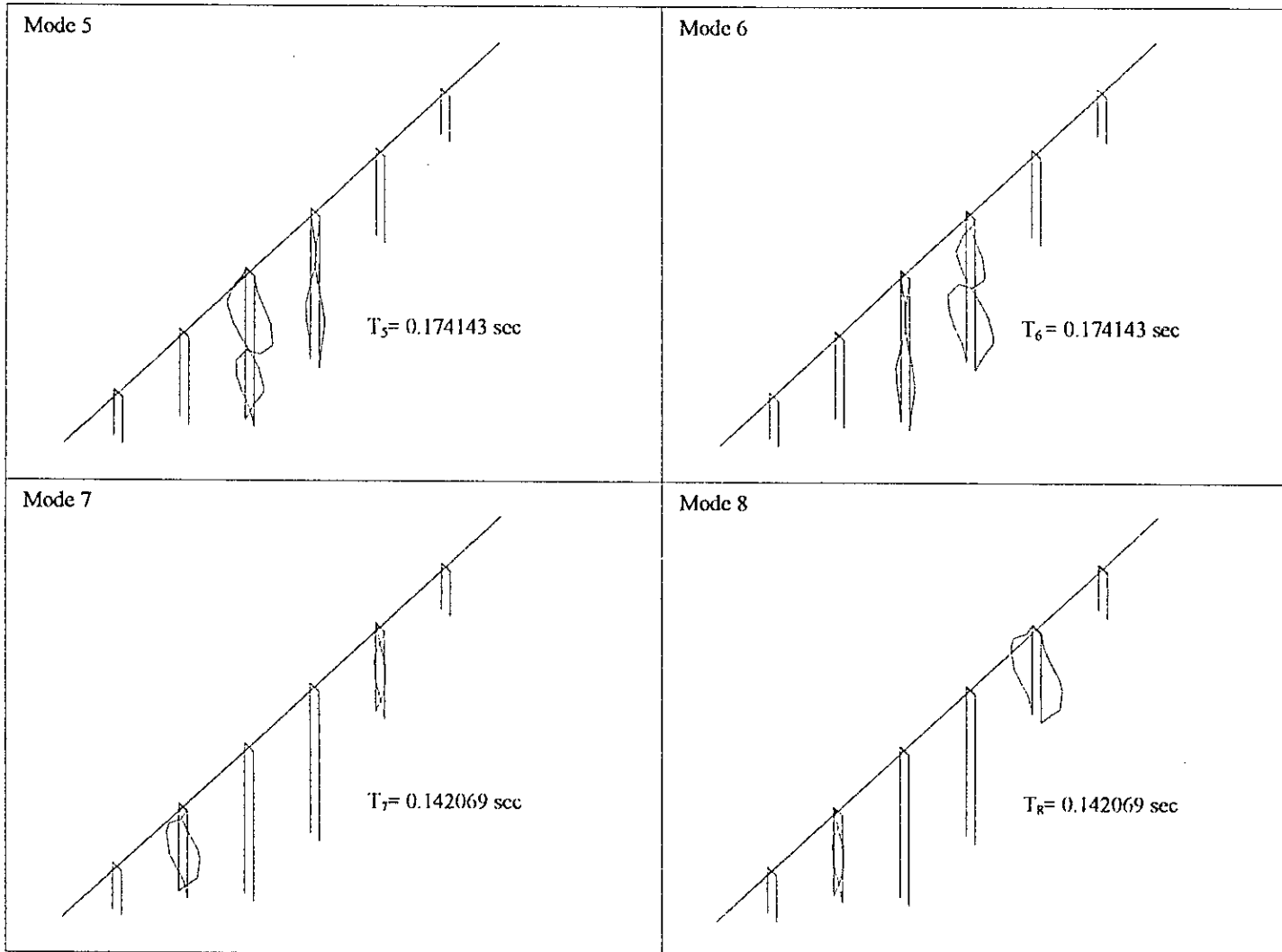


Fig. 12- Pont de Serpa au Portugal : Modes locaux de vibrations





V.6 CONCLUSION

En résumé, il est clair que l'élément de portique tridimensionnel (Modèle MI) permet de simuler au mieux le comportement vibratoire des ponts bi-caissons. En outre, les résultats en fréquences obtenus sur la base de la forme des modes utiles et les pourcentages de participation modale correspondantes montrent que le pont de Serpa vibre de manière symétrique ou antisymétrique dans les modes de vibrations. On note que la plus part des modes sont rigoureusement couplés ; les modes de vibrations latérales sont pratiquement associés avec les modes de torsion et vis versa, et les modes dominants de vibrations verticales sont couplés avec ceux de vibrations longitudinales.

Chapitre VI

ANALYSE DYNAMIQUE DES PONTS MULTICELLULAIRES

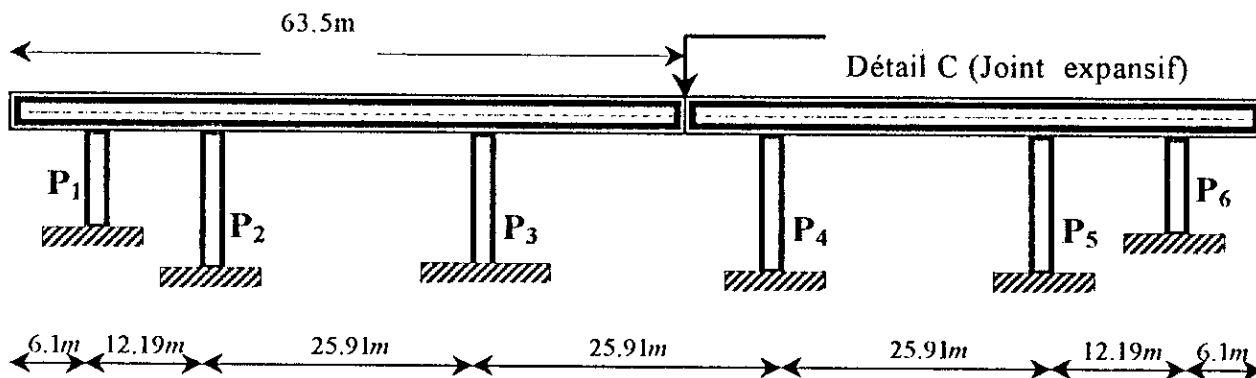
PONT PROTOTYPE (U.S.A)

VI.1 INTRODUCTION

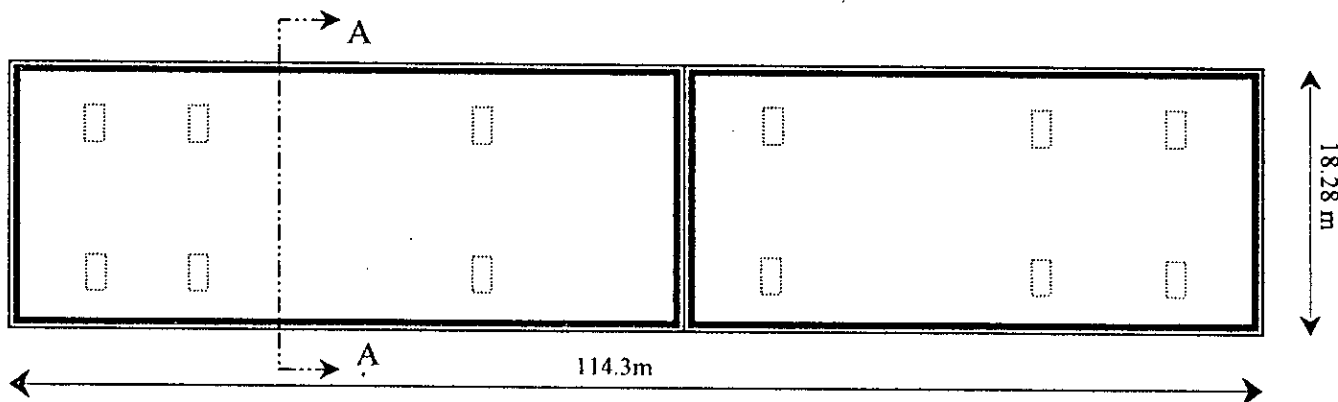
L'objectif majeur de cette étude, concernera en premier lieu la modélisation tridimensionnelle en éléments finis et le comportement vibratoire des ponts multicellulaires. A cet effet, le modèle d'éléments finis tridimensionnel (modèle MI) est utilisé. En second lieu, nous analysons de manière exhaustive la réponse dynamique des ponts multicellulaires. Pour cela, il est impérativement de connaître les paramètres dynamiques de la structures. Ces derniers, sont essentiels pour appréhender le comportement vibratoire et interpréter avec confiance la réponse dynamique du pont. Dans ce qui suit, l'analyse dynamique sera effectuée sur un prototype de pont multicellulaire en béton précontraint.

VI.2 PRESENTATION GENERALE DU PROTOTYPE

Le prototype de pont a été décrit dans le chapitre III, section III.6. A titre de rappel, nous montrons ses dimensions géométriques dans les figures ci - après.



(a): Pont type en élévation



(b): Vue en plan

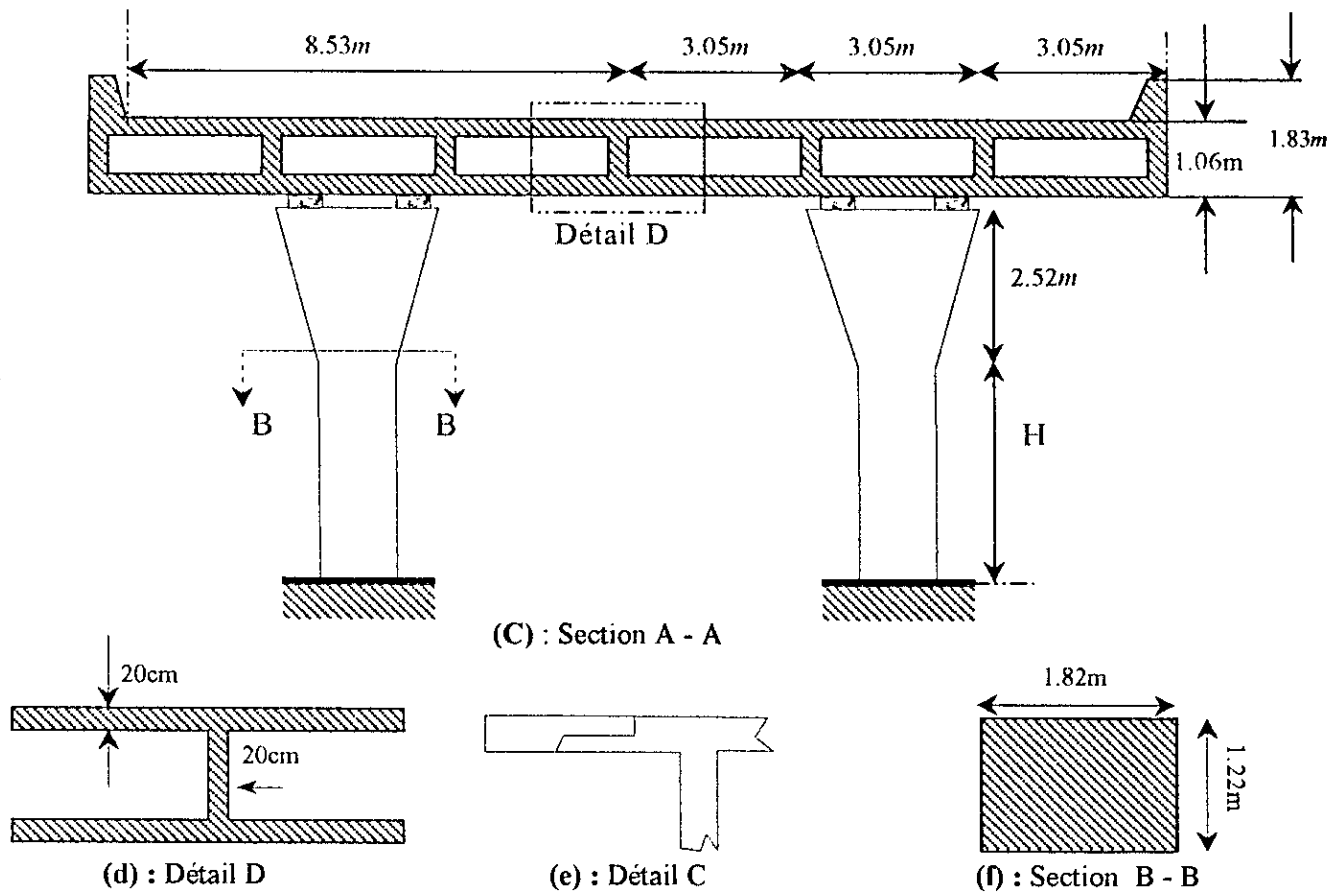


Fig. VI.1- Présentation détaillée du prototype multicellulaire (vues, coupes et détails)

VI.3 CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DU PONT MULTICELLULAIRE

Le tablier du pont multicellulaire est à inertie constante. Le tableau ci après fournit les caractéristiques géométriques du pont.

Tableau 1 Caractéristiques géométriques du pont de Serpa

Longueur Totale (m)	Portées (m)	Largeur du tablier	Hauteur du tablier	Epaisseur du tablier	Hauteur des piles (m)					
					P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
114.3m	6.1m, 12.19m, 3×25.91m, 12.19m, 6.1m	18.28	1.06	0.20m	3.01	4.57	6.09	6.09	6.09	3.01

VI.4 MODELISATION DU PONT

La Modélisation des ponts multicellulaires en éléments finis est l'une des plus importantes étapes à considérer dans l'analyse vibratoire tridimensionnelle. Elle représente l'une des puissantes méthodes de résolution des problèmes dynamiques des ponts. Avec le développement des outils de calcul, elle est devenue la clé qui permettait de résoudre les problèmes de structures les plus complexes. La structure étudiée est remplacée par un ensemble d'éléments supposés liés les uns aux autres en un nombre fini de points appelés «points nodaux ou nœuds». L'élément approprié pour subdiviser le pont est porté sur l'élément tridimensionnel de type portique (Modèle MI)

En appliquant la règle du maillage optimal, énoncée précédemment dans le chapitre. La chaussée du pont est subdivisée en une série d'éléments portique tridimensionnels qui se répartissent en nombre égal sur chaque travée du pont (4 éléments par travée). Au total 28 éléments ont été utilisés pour le maillage de la chaussée.

On munit à chaque nœud de l'élément portique d'un repère référentiel d'axes locaux (1, 2, 3) qui sont orientés de la manière suivante: l'axe local (1) est toujours pris confondu avec la ligne moyenne tablier tandis que l'axe local (2) du système référentiel est parallèle à l'axe global (Z) du système physique.

La chaussée du pont est composée de deux tronçons continus qui sont reliés par un joint expansif (figure VI.1. e). Ce joint nécessite une attention particulière, il est modélisé par deux nœuds (nœud 16 et nœud 17) ayant les mêmes coordonnées spatiales et connectent les deux éléments de la chaussée qui leurs sont adjacents (élément 15 au nœud 16 et élément 16 au nœud 17). Les déplacements verticaux, transversaux et les rotations flexionnelles de ces joints expansifs sont similaires.

Chaque pile du pont est constituée de deux éléments (élément supérieur et élément inférieur). L'élément supérieur est de forme aurique et celui inférieur sa forme est prismatique. La longueur des éléments supérieurs est la même pour toutes les piles du pont, quant à celle des éléments inférieurs, elle dépend de la hauteur de leurs lignes d'appuis correspondantes.

Suivant la règle du maillage optimal, l'élément supérieur de la pile est représenté par un élément tridimensionnel de portique, quant à l'élément inférieur de la pile, il est segmenté en deux éléments tridimensionnels de portique. Au total, la maille de la pile est constituée de trois éléments de type portique connectés à quatre points nodaux. On préconise à chaque nœud de l'élément un système d'axes locaux orienté dans l'espace de la façon suivante :

L'axe local (1) est toujours considéré confondu avec l'axe neutre de la pile, l'axe local (2) est orienté transversalement parallèle à l'axe global (Y).

La jonction des piles à la superstructure est réalisée par l'intermédiaire de deux éléments artificiels extra rigide, ces derniers seront connectés aux nœuds communs de la ligne moyenne de la poutre caisson. Il est souhaitable de représenter les zones de connections entre différents éléments par une modélisation en zones rigides représentées par r_i et r_j respectivement (voir figure VI.2)

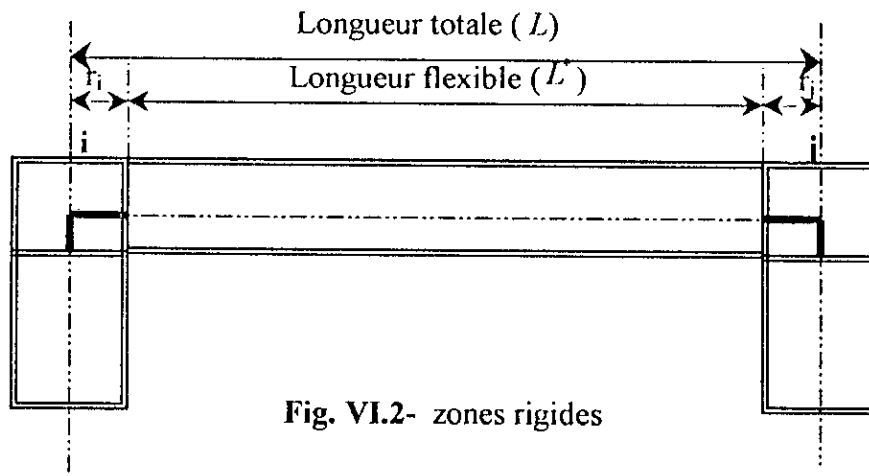


Fig. VI.2- zones rigides

Notons que la longueur flexible de l'élément est donnée par la relation suivante :

$$L^* = L - (r_i + r_j)$$

Le nœud situé à la pointe de l'élément supérieur de la pile à une zone rigide de longueur 53cm, cette valeur représente la moitié de la hauteur de la poutre caisson. Les éléments de la chaussée connectés aux lignes d'appuis des piles ont une zone rigide de longueur 61cm qui représente la moitié de la dimension minimale de la pile. Les conditions d'appuis imposées à l'ouvrage sont les suivantes :

La chaussée repose aux extrémités sur des appuis doubles (les déplacements verticaux, latéraux et les rotations de torsions ont été fixés égaux à zéro. Les piles du pont sont encastrées au sol.

Le tableau 1 résume les conditions de libertés des nœuds

Tableau 1 : Conditions de liberté des nœuds

Nœuds	Déplacements			Rotations		
	u	v	w	θ_x	θ_y	θ_z
1 et 30 (culées)	0	1	1	1	0	0
Encastrements	1	1	1	1	1	1
Nœuds restants	0	0	0	0	0	0

Notations : 0 Nœuds libres

1 Nœuds libres

Nous illustrons par les figures ci - après les techniques de modélisation du pont multicellulaire.

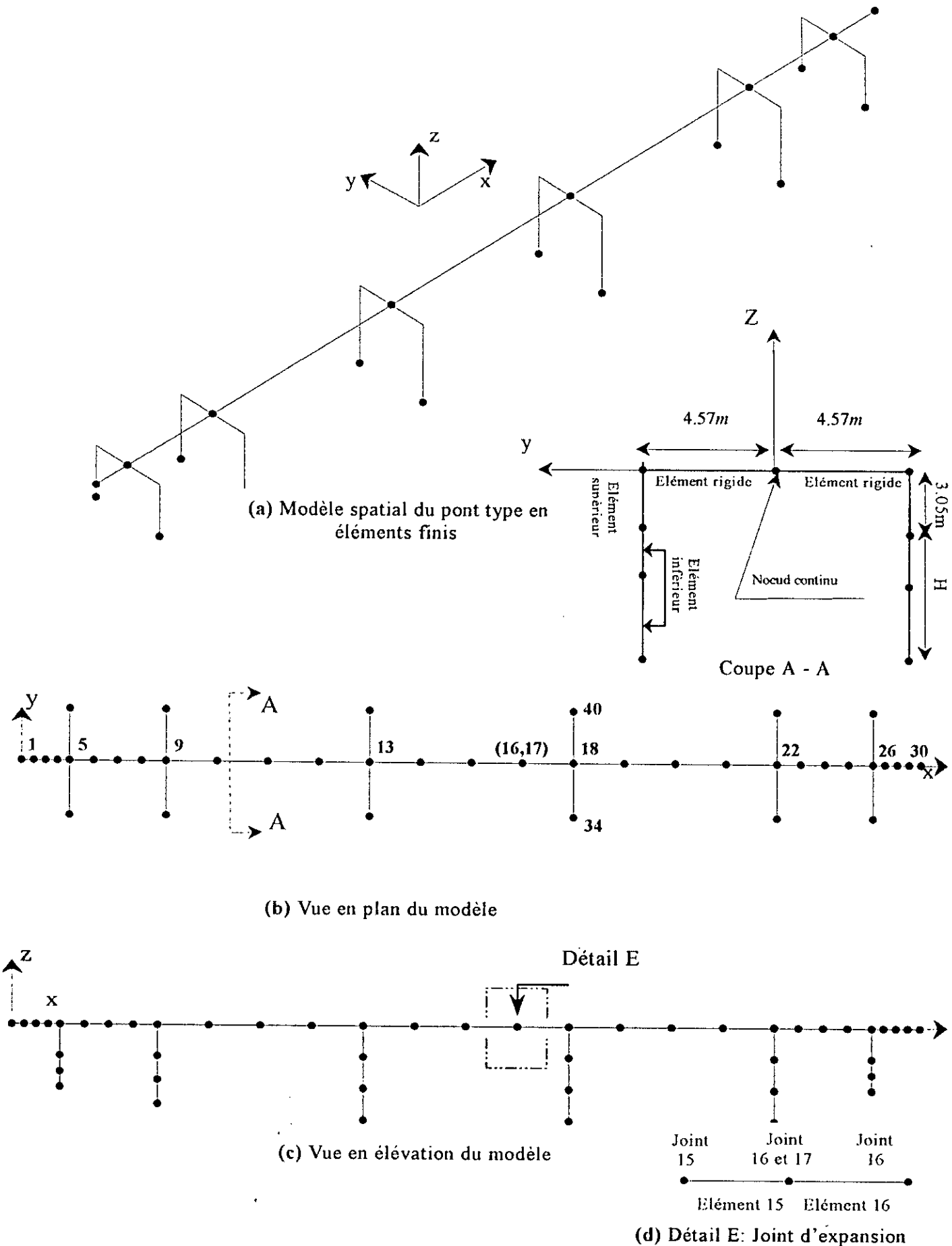


Fig. VI.3- Modèle discret spatial du pont type (Vues, détail, et coupes)

VI.5 ANALYSE MODALE 3D

Dans le cas d'une analyse modale rien ne permet de prévoir à priori le nombre de mode à rechercher, les modes locaux ne sont pas filtrés et les modes principaux dans chaque direction (ceux dont la masse modale est significative) peuvent très bien situer au-delà du 100 rangs. Un tel calcul nécessite de grandes capacités informatiques.

Notre présente analyse modale montre que les 24 premiers modes calculés dont la plage de fréquence est de 3.64 à 21Hz correspondent à 93.19%, 79.00%, et 42.14% de la masse participante de l'ouvrage choisie respectivement dans le sens longitudinal, latéral, et vertical du pont.

Interprétation des résultats

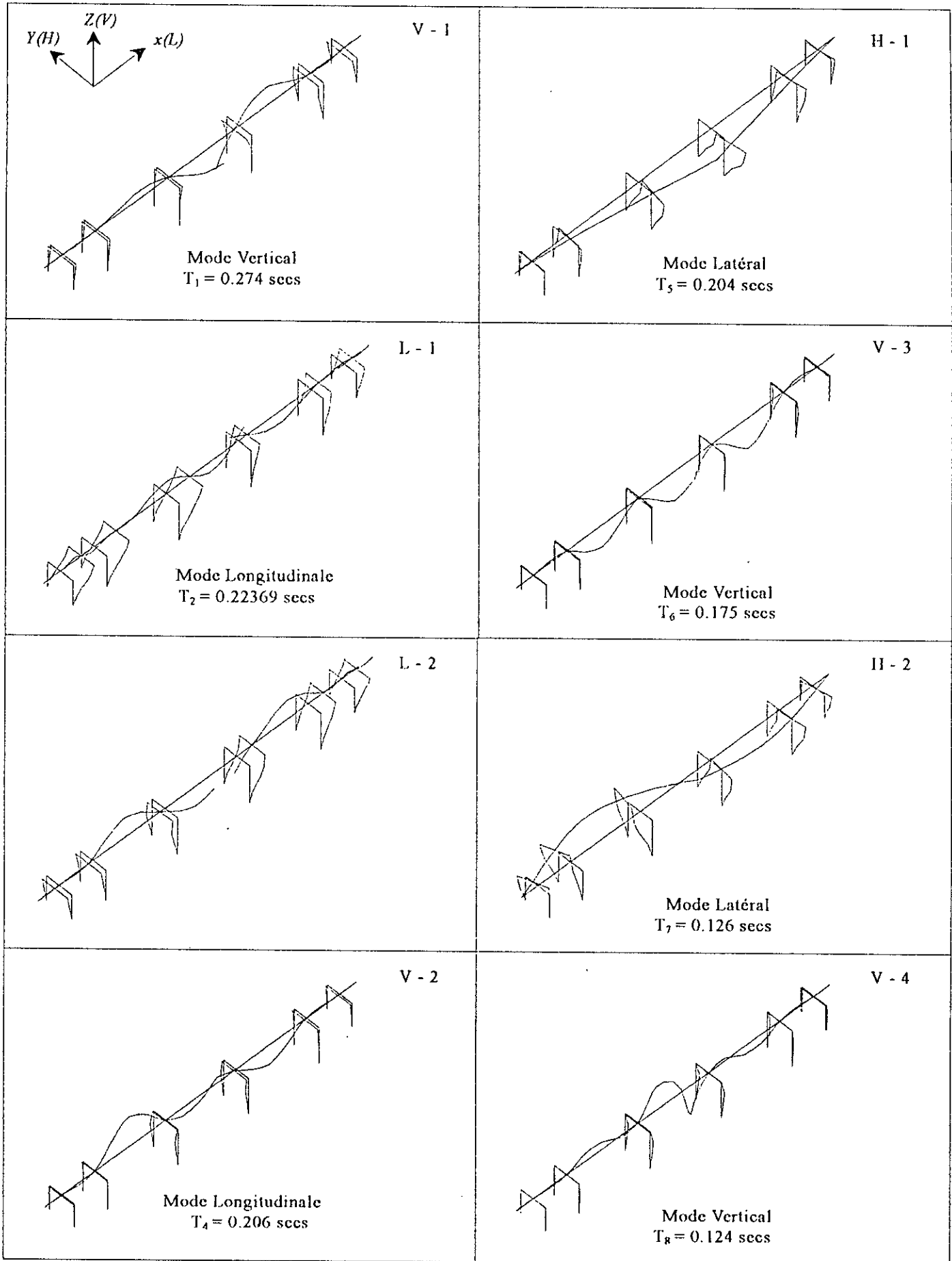
Le tableau ci après donne les valeurs des caractéristiques dynamiques et met en évidence l'interprétation de chaque mode de vibration. Les déformées modales sont également illustrées par la figure VI.4

Tableau 3 : Résumé de l'analyse modale

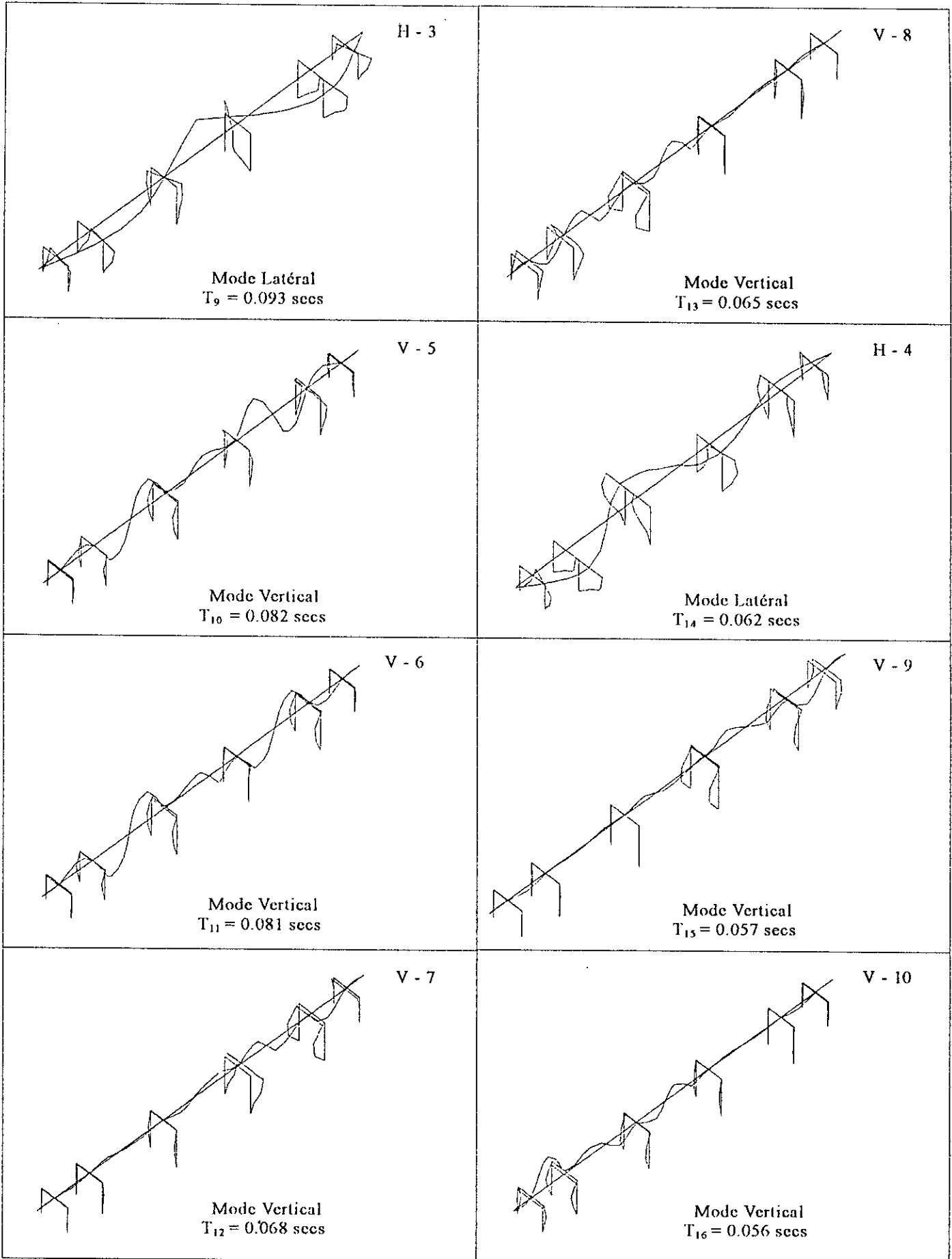
Ordre Du mode	Période (s)	Fréquence (Hz)	Pourcentage de Participation Modale (%) Sens			Interprétations
			X - X Longit	Y - Y Latérale	Z - Z Vertical	
1	0.2741	3.64810	1.959	0.000	0.020	Le mode vertical dominant est couplé avec le mode longitudinal. Les piles des deux tronçons du pont vibrent longitudinalement en sens inverse.
2	0.2369	4.21960	66.90	0.000	0.028	Vu l'importance du pourcentage de participation modale dans le sens longitudinal, on peut dire qu'on est en présence d'un mode longitudinal. Les piles du pont vibrent dans le même sens.
3	0.2217	4.51051	10.96	0.000	0.524	Mode longitudinal couplé avec la flexion verticale du tablier de pont. Les deux tronçons vibrent longitudinalement dans les directions opposées.
4	0.2064	4.84390	4.585	0.000	0.257	Le mode vertical de vibration dominant de la structure porteuse est rigoureusement couplé avec les vibrations longitudinales des piles du pont.
5	0.2045	4.88776	0.000	58.07	0.000	Il s'agit du premier mode de flexion latérale, ceci est amplement justifié par la valeur maximale du pourcentage de participation modale dans le sens latéral. Amplitude latérale est maximale au niveau du joint d'expansion.
6	0.1754	5.69938	0.014	0.000	22.16	A partir de la déformée modale et des valeurs de participation modales dans le sens verticale et longitudinal, la flexion transversale domine largement le comportement vibratoire du pont.
7	0.1268	7.88242	0.000	1.680	0.000	Les résultats du pourcentage de participation modale obtenus uniquement dans la direction latérale montre qu'on est en présence d'un deuxième mode vibratoire de flexion latérale. Ceci peut être confirmé par les deux ventres présents dans la déformée modale.
8	0.1244	8.03558	1.584	0.000	0.136	Ce mode indique le quatrième mode vertical. Il est associé avec les vibrations de flexion des piles. Amplitude verticale au niveau du joint d'expansion est prépondérante, ce point représente un point anguleux.

			Pourcentage de Participation Modale (%)			
			Sens			
9	0.0937	10.6630	0.000	16.42	0.000	Les résultats du pourcentage de participation modale et la configuration en trois lobes de la déformée modale attestent l'existence du troisième mode de flexion latérale. Les élongations latérales maximale et minimale sont localisées respectivement au niveau du joint d'expansion et de la ligne d'appui 5
10	0.0828	12.0638	0.000	0.000	1.184	Dans ce mode le tablier subit une flexion verticale sur toute sa longueur. Ce mode correspond au cinquième mode vertical de vibrations flexionnelles. Dans ce mode les travées du pont vibrent symétriquement exceptée la travée centrale, cela est dû à la présence d'une articulation à son niveau.
11	0.0813	12.2926	0.777	0.000	0.018	Mêmes constatations que le mode précédent, seulement dans ce sixième mode verticale les travées vibrent antisymétriquement.
12	0.0679	14.7166	0.000	0.000	0.740	D'après la forme modale des élongations, on voit bien que le mode dominant de vibrations verticales couplé avec le mode longitudinal, domine le comportement vibratoire tridimensionnel du pont. Les deux tronçons vibrent indépendamment dans ce mode avec une large dominance du tronçon droit.
13	0.0648	15.4201	0.069	0.000	0.620	Même comportement vibratoire que le mode précédent, sauf à l'occurrence de ce mode les vibrations sont dominées par le tronçon gauche du pont.
14	0.0620	16.1069	0.000	1.209	0.000	Il s'agit en fait d'un quatrième mode de flexion latérale, il est détecté par l'existence de quatre courbures dans sa déformée modale et la valeur maximale du pourcentage de participation modale dans le sens latérale et nulle dans les autres directions
15	0.0574	17.4059	0.436	0.000	2.145	Ce mode correspond au neuvième mode de vibration verticale de flexion. Dans ce mode le tronçon droit a prévalu le comportement vibratoire du pont type

			Pourcentage de Participation Modale (%)			
			Sens			
16	0.0563	17.7346	0.255	0.000	2.145	Les deux tronçons vibrent indépendamment dans le dixième mode de vibrations verticales amplitudes verticales du tronçon gauche sont prédominantes
17	0.0551	18.1377	0.000	0.683	0.000	Ce mode représente le cinquième mode de vibration latérale. La flexion latérale est plus importante au niveau du tronçon droit du pont que l'autre tronçon
18	0.0542	18.4381	0.000	0.210	0.000	Ce mode représente le cinquième mode de vibration latérale.
19	0.0541	18.4845	0.000	0.005	0.001	Les résultats du pourcentage de participation modale dans le sens transversal et la configuration en six lobes de la déformée modale attestent l'existence d'un sixième mode de flexion latérale avec la flexion verticale. Les piles vibrent de manière antisymétrique dans le sens longitudinal
20	0.0540	18.4899	0.027	0.000	3.113	Le pont fléchit verticalement sur toute sa longueur, chaque tronçon à sa propre vibration verticale. Le mode de vibration dominant est vertical
21	0.0503	19.8553	2.301	0.000	3.506	Le comportement vibratoire tridimensionnel est largement dominé par le tronçon droit du pont, l'autre portion vibre de la même manière avec de faibles élongations.
22	0.0487	20.5188	.690	0.000	1.975	Même constatations que le mode précédent, seulement dans ce cas le tronçon droit domine.
23	0.0483	20.6634	0.022	0.000	3.271	Il s'agit d'un quatorzième mode de vibrations verticales. Ces dernières sont importantes au niveau du tronçon droit.
24	0.047	21	2.59	0.000	1.786	Le tronçon gauche domine le comportement vibratoire dans le quinzième mode de vibrations verticales



V : Vibrations verticales
 L : Vibrations longitudinales
 H : Vibrations latérales



V : Vibrations verticales
 L : Vibrations longitudinales
 H : Vibrations latérales

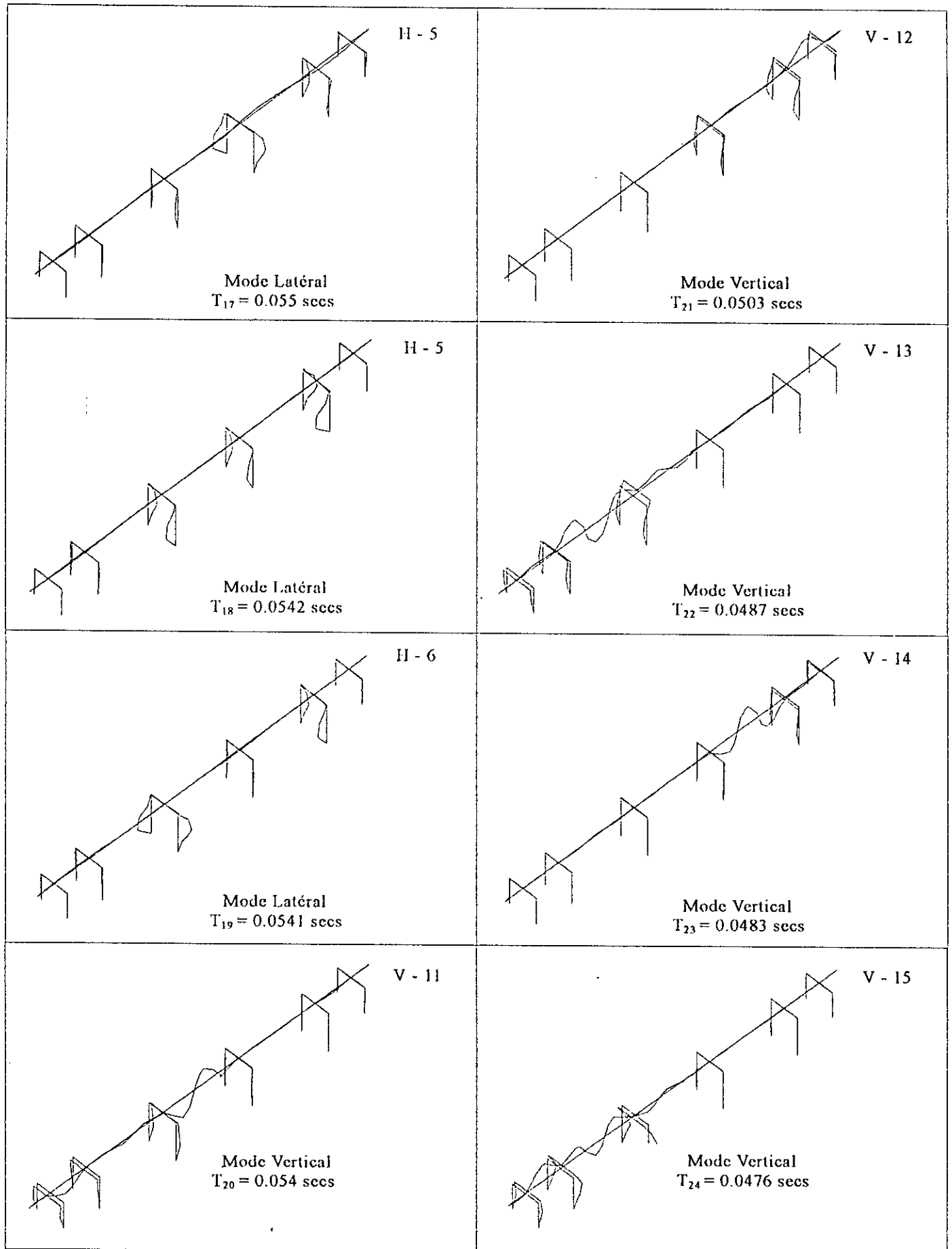


Fig. VI.4- Identification 24 premiers modes de vibrations et leurs déformées modales du prototype

V : Vibrations verticales
 L : Vibrations longitudinales
 H : Vibrations latérales

VI.6 ANALYSE DE LA REPONSE SISMIQUE DES PONTS

Les tremblements de terre qui se sont produits ces dernières années en Algérie, nous rappelle une fois de plus que l'Algérie du nord est une région où de violents séismes peuvent se produire. Ces séismes ont causé d'importants dégâts matériels et occasionnés la perte de nombreuses vies humaines. Compte tenu de la réalité du risque sismique quasi-permanent, des recommandations avaient été faites pour au moins réduire ces risques. Parmi ces dernières, il s'avère nécessaire de tenir compte dans le dimensionnement de la structure des effets dynamiques.

L'analyse sismique des ouvrages passe toujours par un calcul des modes propres qui nécessitent généralement des outils puissants et des machines à forte capacité. Les résultats du calcul dépendent totalement de la façon dont a été discrétisée la structure : nature des éléments, finesse du maillage et répartition des masses de manière concentrées ou cohérentes.

VI.6.1 Formulation

L'équilibre d'un système discret en mouvement soumis à des excitations uniformes d'appuis est traduit par la relation matricielle classique.

$$[M]\ddot{U} + [C]\dot{U} + [K]U = F = -M\ddot{X}_s \quad (\text{VI.6.1})$$

\ddot{U} , \dot{U} et U sont les vecteurs accélération, vitesse et déplacement de l'ensemble du système; \ddot{X}_s est le vecteur des accélérations de sol appliquées.

Dans cette relation $[M]$, $[C]$ et $[K]$ désignent respectivement les matrices globales de masse, d'amortissement et de rigidité de la structure obtenues par assemblage des matrices élémentaires [53,76]:

$$\begin{aligned} [K] &= \iiint B^T D B dV \\ [M] &= \iiint \rho [N]^T [N] dV \\ [C] &= \iiint \mu [N]^T [N] dV \end{aligned} \quad (\text{VI.6.2})$$

Dans l'analyse dynamique des structures, il y'a deux stratégies fondamentales de résolution, la méthode directe et la méthode de superposition modale. Le choix entre ces deux stratégies dépend de la nature du problème (linéaire ou non linéaire) et du contenu fréquentiel de l'excitation. La méthode de résolution directe est appropriée pour les problèmes non linéaires ou si le contenu fréquentiel de l'excitation est susceptible d'exciter un grand nombre de modes de la structure, ce qui est le cas dans les problèmes d'impacts. La méthode de superposition modale est adéquate pour l'analyse dynamique linéaire des structures, cette méthode est probablement la plus utilisée en pratique. Dans ce qui suit, on tire profit de cette méthode pour résoudre l'équation (VI.6.1). A cet effet, on introduit la transformation de coordonnées.

$$U = \Phi \cdot Z \quad (\text{VI.6.3})$$

où Φ représente la matrice modale et Z les coordonnées généralisées. En remplaçant la relation (VI.6.3) dans l'équation (VI.6.1), et en vertu des propriétés orthogonales des modes de vibrations, l'équation d'équilibre est réduite à un système de N équations couplées pouvant être découplées en introduisant l'hypothèse de l'amortissement visqueux de «Rayleigh».

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (\text{VI.6.4})$$

C désigne la matrice d'amortissement de Rayleigh obtenue par une combinaison linéaire des matrices de masse et de rigidité de la structure. Les paramètres α et β sont des facteurs de proportionnalité restant à déterminer [17,44,64]. On obtient alors tout simplement un ensemble d'équations scalaires indépendantes.

$$\ddot{Z}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{Z}_i + \omega^2 Z_i = -\frac{\Phi_i' M}{\Phi_i' M \Phi_i} \ddot{X}_s = -\Gamma_i \cdot \ddot{X}_s \quad i = 1, 2, 3 \dots N \quad (\text{VI.6.5})$$

où ω_i et ξ_i désignent respectivement la pulsation propre de vibration et le coefficient d'amortissement relatifs au mode i .

Les équations scalaires du système (VI.6.5) sont résolues par des méthodes élémentaires indépendantes les unes des autres et le vecteur total du déplacement de la réponse s'obtient par superposition en suivant la relation (VI.6.3).

La réponse dynamique du pont est déterminée par une analyse de type modalo- spectral ; cette dernière s'effectue par une combinaison appropriée de la réponse modale maximale dans chaque mode. La méthode de combinaison quadratique complète (CQC) ou la méthode quadratique (SRSS) (Square Root of Sum of the Squares) sont les plus fréquemment utilisées.

La méthode CQC introduite par Kiureghian [39,40,41,42] requiert que la contribution de tous les termes de la réponse modale soient combinés selon par la relation type suivante.

$$U_k = \sqrt{\sum_i \sum_j U_{ki} \rho_{ij} U_{jk}} \quad (\text{VI.6.6})$$

où u_k représente la k ème composante du vecteur réponse en déplacements; i et j représentent les indices relatifs aux modes correspondants. Les coefficients ρ_{ij} désignent les coefficients de corrélation modaux. Ils dépendent de la durée, du contenu fréquentiel du signal d'entrée, ainsi que des fréquences propres, et du pourcentage d'amortissement critique des modes i et j . Si la durée du séisme considéré est longue, comparativement aux périodes de vibrations de la structure et si de plus le spectre du séisme est relativement lisse sur une large plage de fréquences, alors les coefficients de corrélation modaux peuvent être estimés par la relation approchée suivante.

$$\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{\xi_i \xi_j} (\xi_i + r \xi_j) r^{\frac{3}{2}}}{(1 - r^2)^2 + 4\xi_i \xi_j r (1 + r^2) + 4(\xi_i^2 + \xi_j^2) r^2} \quad (\text{VI.6.7})$$

où $r = \frac{\omega_j}{\omega_i}$ représente le rapport de deux pulsations consécutives, ξ_i et ξ_j étant les pourcentages d'amortissement critiques des modes i et j respectivement. Pour un amortissement modal constant ($\xi_i = \xi_j$), l'équation (VI.6,7) prend la forme simplifiée suivante.

$$\rho_{ij} = \frac{8\xi^2 (1 + r) r^{\frac{3}{2}}}{(1 - r^2)^2 + 4\xi^2 r (1 + r)^2} \quad (\text{VI.6.8})$$

Si les coefficients de corrélation modaux sont tels que $\rho_{ij} = 1$ si $i = j$, et $\rho_{ij} = 0$ si $i \neq j$, alors la règle CQC se réduit à la règle SRSS (Square Root of the Sum of the Squares).

$$U_k = \sqrt{\sum_i U_{ki}^2} \quad (\text{VI.6.9})$$

VI.6.2 Résultats de l'analyse sismique

La formulation théorique de l'analyse sismique présentée précédemment a été appliquée à l'étude de la réponse dynamique du prototype multicellulaire soumis à un signal dont le spectre lissé a été défini sur la base de données américaines [1,60]. Pour les besoins de l'étude, on admettra dans ce qui suit que ce spectre agit également dans la direction latérale

En considérant un amortissement modal invariant égal à 0.05 pour tous les modes, les valeurs des coefficients de corrélations modales correspondant aux vingt quatre premiers modes de vibrations sont déterminées et regroupées dans le tableau 4 ci-après.

Tableau 4: Valeurs des coefficients de corrélations modales

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24		
1	1.00	0.32	0.18	0.11	0.10	0.05	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
2	0.32	1.00	0.69	0.34	0.32	0.10	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.18	0.69	1.00	0.66	0.61	0.15	0.03	0.03	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.11	0.34	0.66	1.00	0.99	0.27	0.04	0.04	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5	0.10	0.32	0.61	0.99	1.00	0.30	0.04	0.04	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6	0.05	0.10	0.15	0.27	0.30	1.00	0.09	0.08	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	0.01	0.02	0.03	0.04	0.04	0.09	1.00	0.96	0.10	0.05	0.05	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
8	0.01	0.01	0.03	0.04	0.04	0.08	0.96	1.00	0.11	0.06	0.05	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
9	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.10	0.11	1.00	0.40	0.33	0.09	0.07	0.05	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
10	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.05	0.06	0.40	1.00	0.97	0.20	0.14	0.11	0.07	0.06	0.05	0.05	0.05	0.05	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
11	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.05	0.05	0.33	0.97	1.00	0.23	0.16	0.12	0.07	0.07	0.06	0.06	0.05	0.05	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
12	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.09	0.20	0.23	1.00	0.82	0.55	0.26	0.22	0.18	0.16	0.16	0.16	0.10	0.08	0.08	0.07	0.07	0.07
13	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.07	0.14	0.16	0.82	1.00	0.84	0.40	0.34	0.27	0.24	0.23	0.23	0.13	0.11	0.10	0.09	0.09	0.09
14	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.05	0.11	0.12	0.55	0.84	1.00	0.62	0.52	0.41	0.35	0.34	0.34	0.18	0.14	0.14	0.12	0.12	0.12
15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.04	0.07	0.07	0.26	0.40	0.62	1.00	0.97	0.85	0.75	0.73	0.73	0.36	0.27	0.25	0.22	0.22	0.22
16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.04	0.06	0.07	0.022	0.34	0.52	0.97	1.00	0.95	0.87	0.85	0.85	0.44	0.32	0.30	0.26	0.26	0.26
17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.03	0.05	0.06	0.18	0.27	0.41	0.85	0.95	1.00	0.97	0.97	0.96	0.55	0.40	0.37	0.32	0.32	0.32
18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.03	0.05	0.06	0.16	0.24	0.35	0.75	0.87	0.97	1.00	1.00	1.00	0.65	0.47	0.43	0.37	0.37	0.37
19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.03	0.05	0.05	0.16	0.23	0.34	0.73	0.85	0.97	1.00	1.00	1.00	0.66	0.48	0.45	0.38	0.38	0.38
20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.03	0.05	0.05	0.16	0.23	0.34	0.73	0.85	0.96	1.00	1.00	1.00	0.66	0.48	0.45	0.38	0.38	0.38
21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.04	0.04	0.10	0.13	0.18	0.36	0.44	0.55	0.65	0.66	0.66	1.00	0.90	0.86	0.76	0.76	0.76
22	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	0.03	0.08	0.11	0.14	0.27	0.32	0.40	0.47	0.48	0.48	0.90	1.00	1.00	0.95	0.95	0.95
23	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	0.03	0.08	0.10	0.14	0.25	0.30	0.37	0.43	0.45	0.45	0.86	1.00	1.00	0.97	0.97	0.97
24	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	0.03	0.07	0.09	0.12	0.22	0.26	0.32	0.37	0.38	0.38	0.76	0.95	0.97	1.00	1.00	1.00

Le tableau 5 fournit également un résumé récapitulatif des valeurs maximales des déplacements et des sollicitations sismiques au niveau de la superstructure et de la ligne d'appui P₄, obtenues d'une part par la méthode de combinaison quadratique complète (CQC) et d'autre part, par la méthode de combinaison quadratique simple (SRSS).

Tableau 5 : Valeurs maximales des efforts sismiques calculées par les méthodes CQC et le SRSS

Structure porteuse				Pile 4			
Réponse sismique		CQC	SRSS	Effets sismiques		CQC	SRSS
Déplacements (cm)	U_x (rotule) Nœud 16	1.34	1.46	Déplacements (cm)	U_x en tête Nœud 18	1.01	0.74
	U_y (rotule) Nœud 16,17	1.35	1.35		U_y en tête Nœud 18	1.12	1.13
	U_z (rotule) Nœud 16,17	0.77	0.83		U_z en tête Nœud 18	0.058	0.058
Moments 10^6 (N.m)	M_z Nœud 22	34.95	35.52	Moments 10^6 (N.m)	M_y (base) Nœud 34,40	7.57	7.57
	M_y Nœud 5	18.32	19.91		M_x (base) Nœud 34,40	22.85	22.85
	M_x Nœud 26	0.21	0.21		M_z (base) Nœud 34,40	0.33	0.34
Efforts Tranchants	V_z Nœud 1	3.39	3.68	Efforts Tranchants 10^6 (N.)	V_y (base) Nœud 34,40	5.96	6.01
	V_y Nœud 17,18	3.44	3.47		V_x (base) Nœud 34,40	2.0	1.5
Efforts normaux	P Nœud 9	10.33	10.35	Efforts normaux	P (base) Nœud 34,40	5.52	5.52

On note immédiatement que les valeurs de fréquences (calculées par la méthode des masses cohérentes) des modes de vibrations 2 et 3; 3, 4 et 5; 7 et 8; 10 et 11; 12, 13 et 14; 15,16,17,18,19 et 20; 18 et 21; 19,21 et 22; 20 et 21 et enfin 21,22,23 et 24 sont très voisines. Les coefficients de corrélations modales correspondant à ces modes sont nettement plus importants que les autres valeurs indiquées dans le tableau 4. On en déduit que pour l'étude de ce pont, les interactions entre les modes supérieurs auront une influence significative sur la valeur finale de la réponse sismique. Cette observation est corroborée par la nette différence (de l'ordre de 25%) entre les valeurs fournies par les règles de combinaison CQC et SRSS, pour les déplacements U_x en tête et l'effort tranchant V_x et à la base de la pile 4 (cf. tableau 5).

La figure VI.5 illustre l'allure de déplacements latéraux, longitudinaux et verticaux obtenus le long de la superstructure. On remarque que les valeurs de déplacements sont maximales au niveau du joint d'expansion et que les déplacements longitudinaux au niveau des culées sont significatifs et fournissent une mesure de la longueur du joint d'expansion

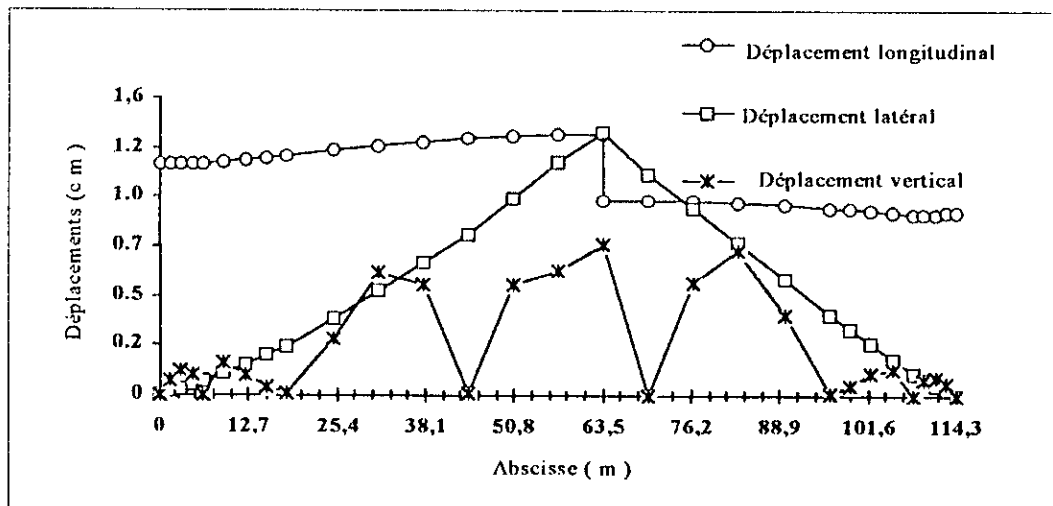


Fig. VI.5- Déplacements le long de superstructure

A titre illustratif, les figures VI.6.a, VI.6.b et VI.6.c montrent respectivement la distribution des moments de flexion et de torsion dans le sens longitudinal du pont. On peut aussi vérifier que les moments de flexion latérale et verticale sont bien nuls aux niveaux des appuis extrêmes et du joint d'expansion. On peut également noter à partir de la figure VI.6.c et VI.7(a,b) que les moments de torsion et les efforts de cisaillement sont bien maximaux aux niveaux des appuis.

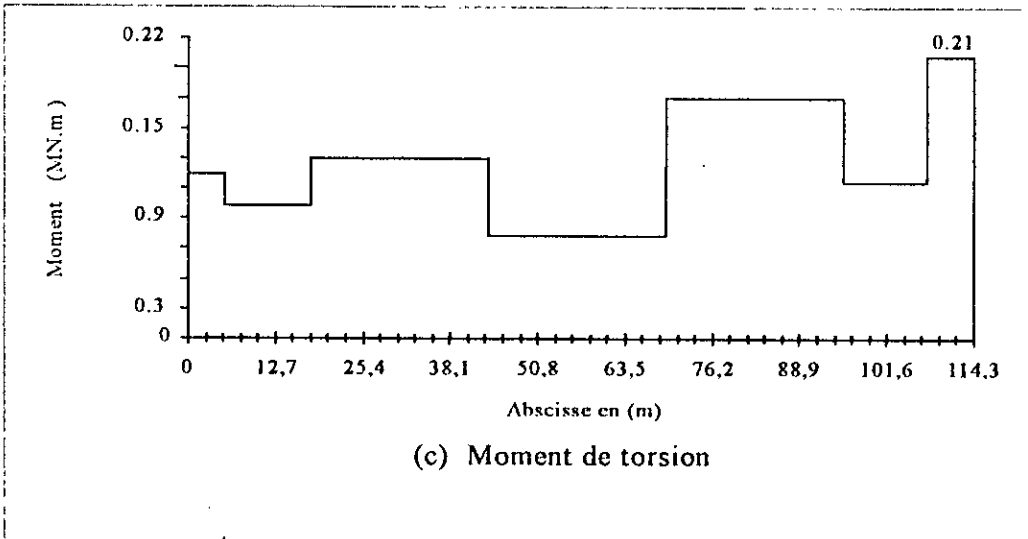
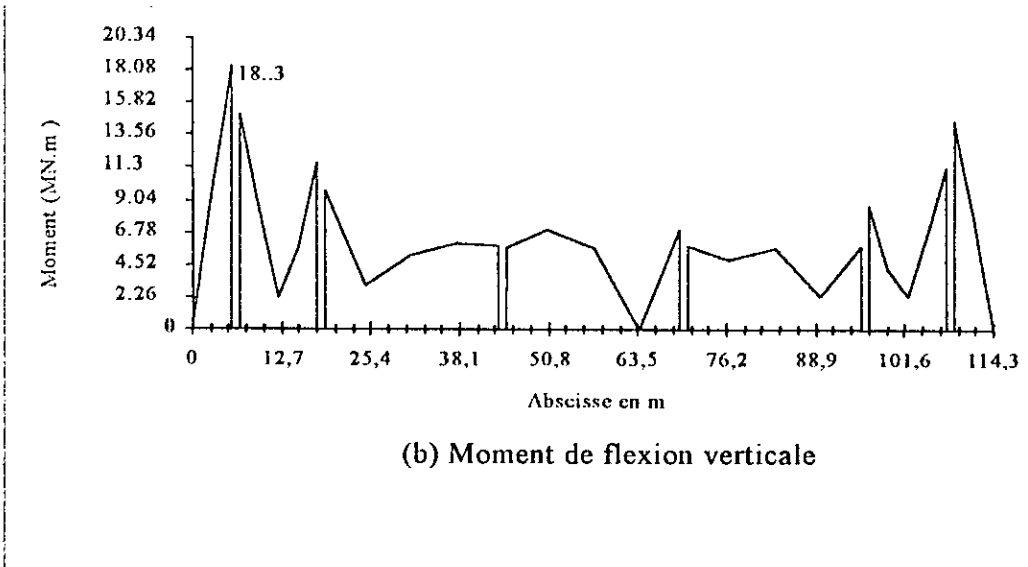
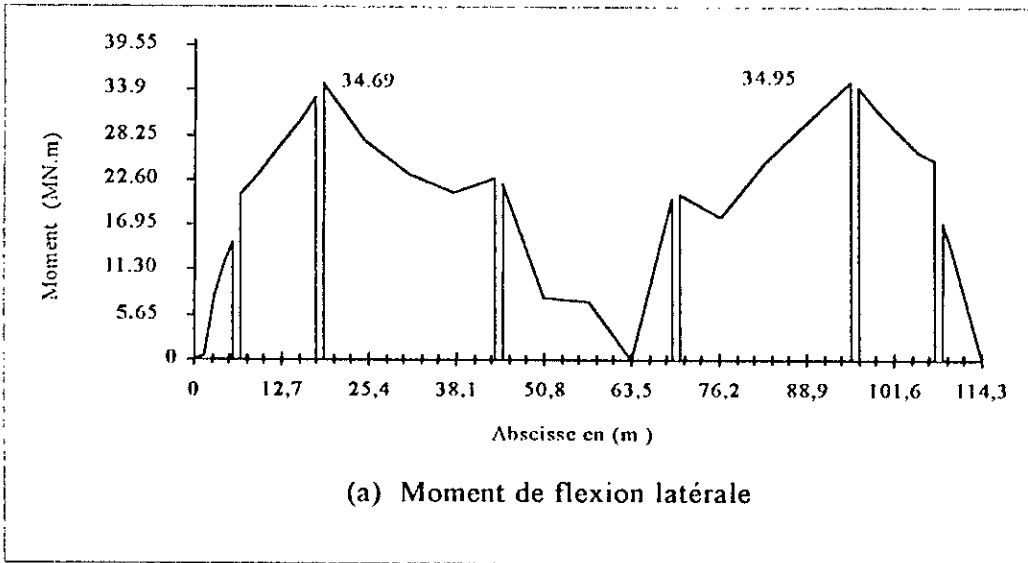


Fig. VI.6- L'allure des moment le long de la chaussée du pont (a,b,c)

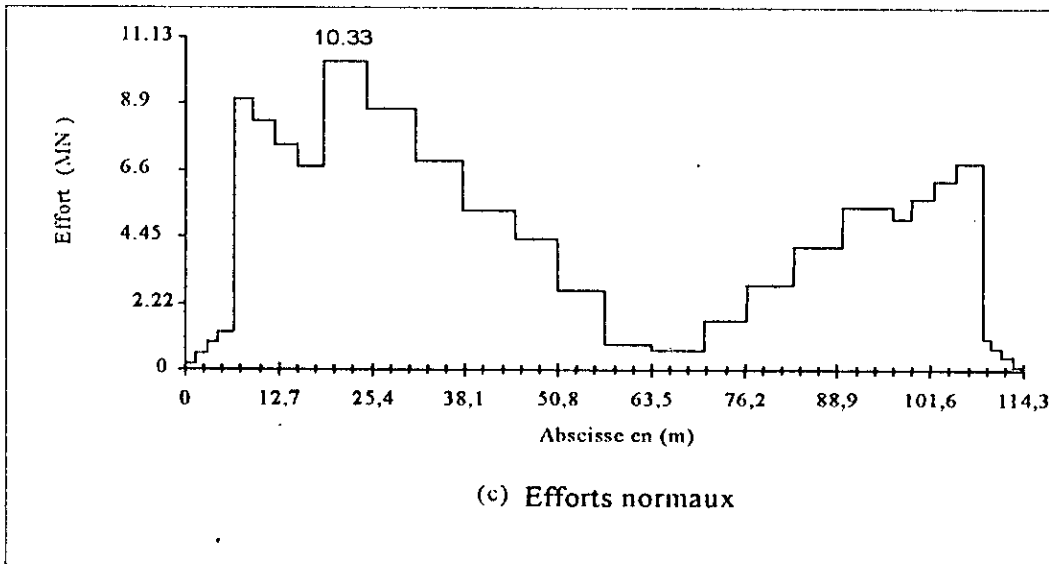
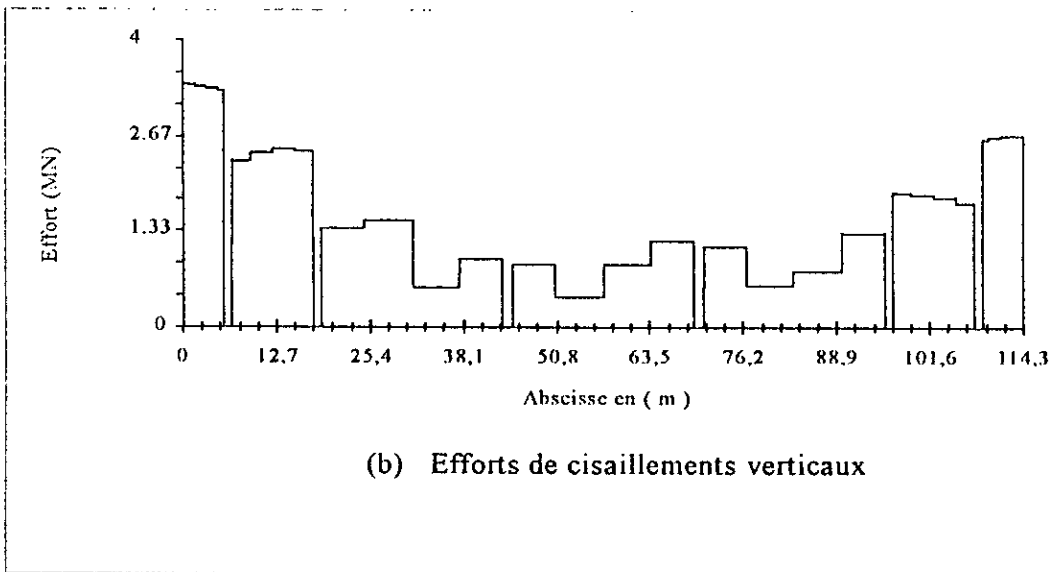
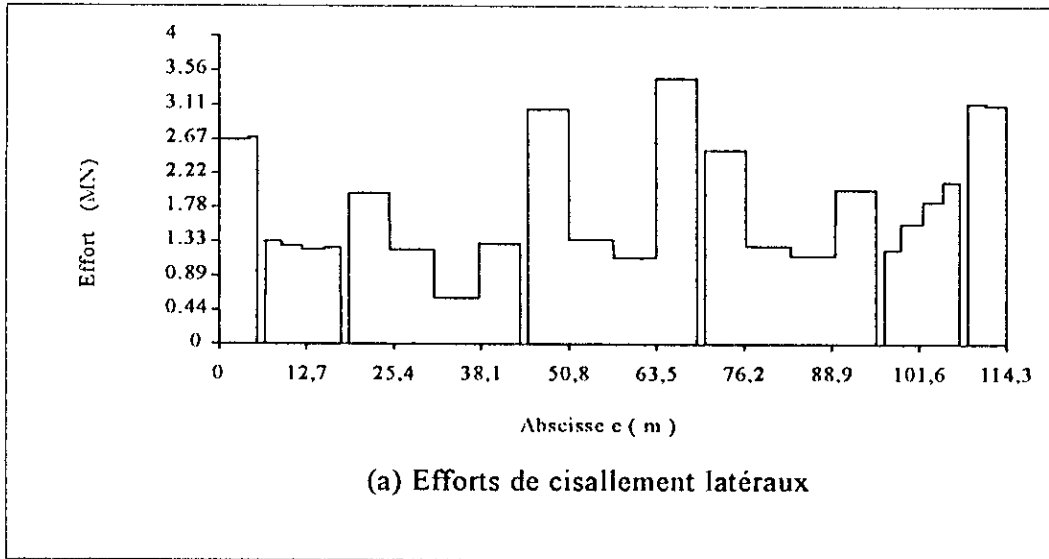
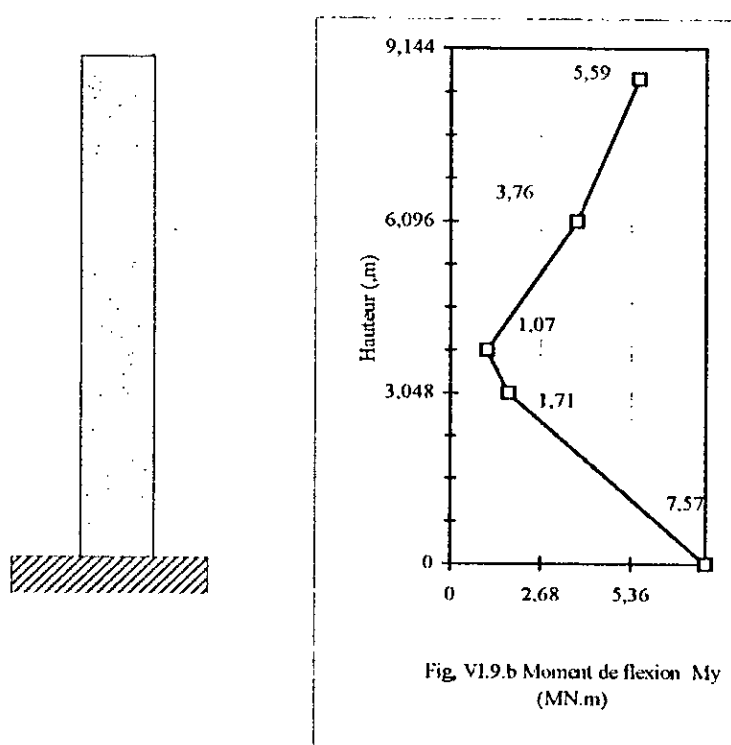
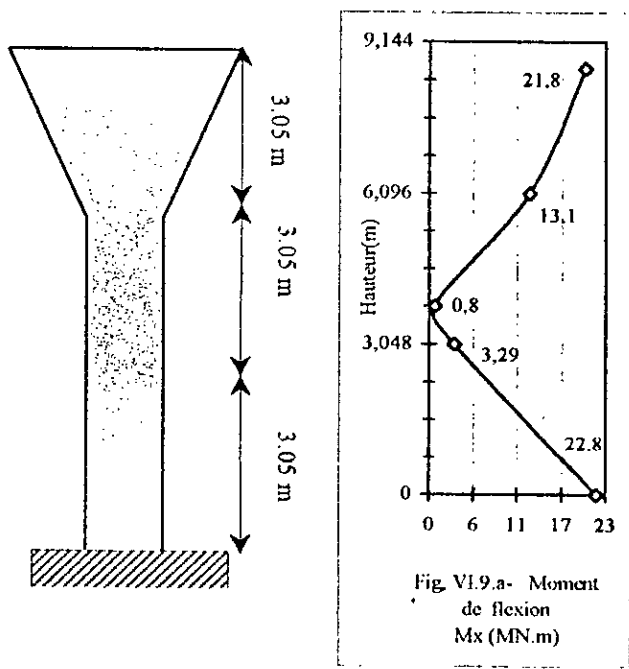
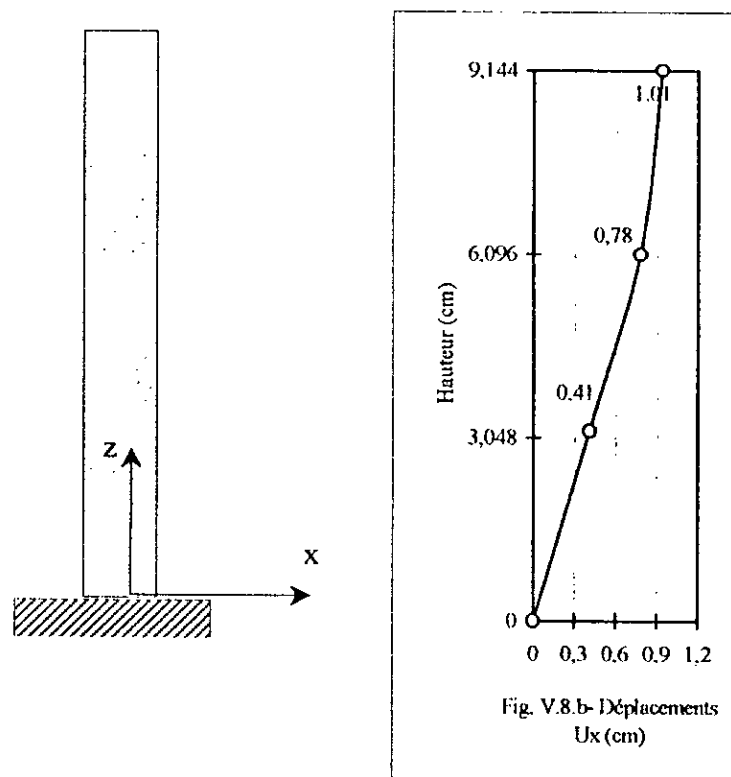
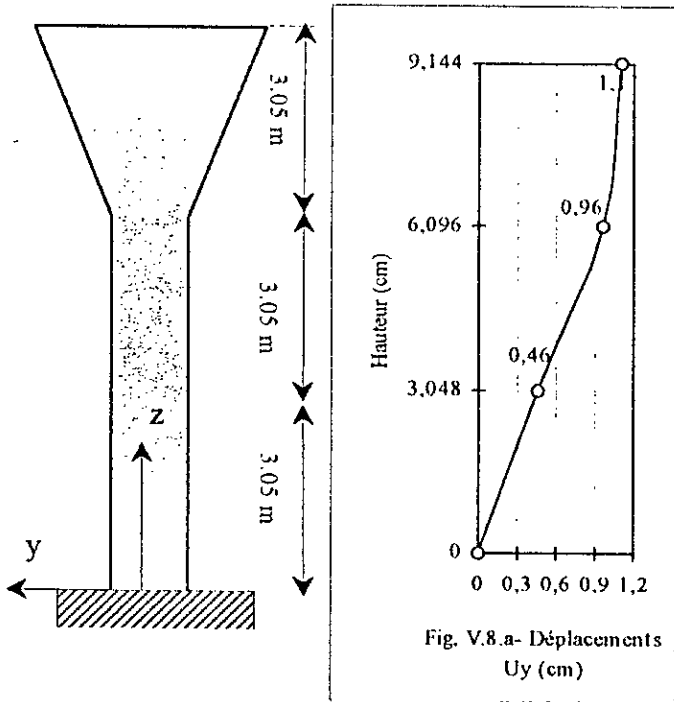
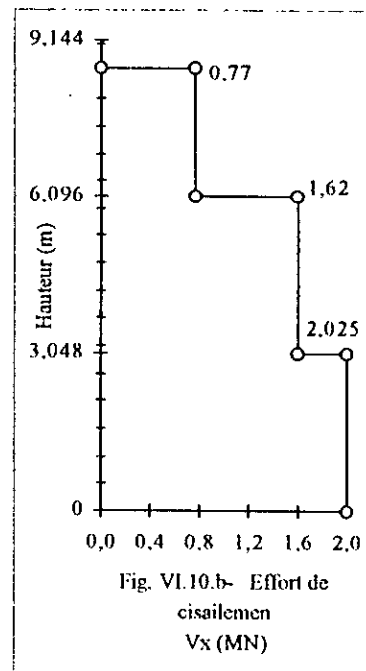
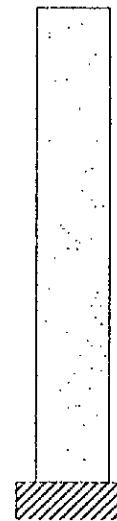
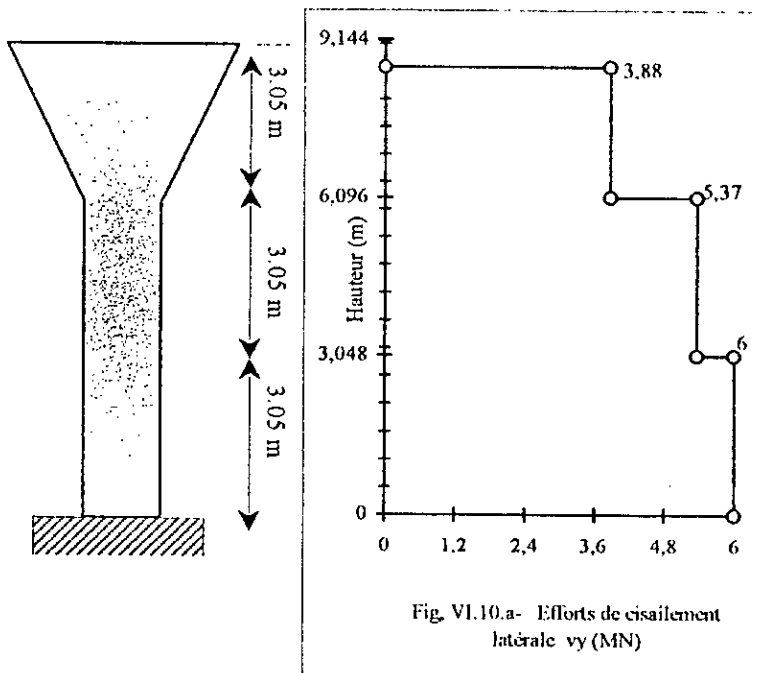


Fig. VI.7- L'allure des efforts de cisaillements et normaux le long de la chaussée (a,b,c)

A toutes fins utiles, les figures VI.8, VI.9 et VI.10 ci après, indiquent respectivement les variations des déplacements, des moments de flexion et des efforts de cisaillements en fonction de la hauteur. On constate que le déplacement en tête est maximal alors que les moments de flexion et les efforts tranchants sont maximaux à la base de la pile





VI.7 CONCLUSION

Outre la mise au point d'outils numériques en dynamique, les apports de cette étude détaillée du comportement en dynamique des ponts multicellulaires concernent principalement les points suivants :

1. Les valeurs des fréquences des modes supérieurs notamment pour des ponts-caissons élancés sont très voisines. Les coefficients de corrélations modales correspondant sont relativement importants, permettant à augurer un fort couplage de certains modes de vibrations et la nécessité de leurs prises en considération dans la détermination de la réponse sismique totale.
2. L'analyse dynamique a montré que les résultats des effets dynamiques calculés, d'une part, par la méthode de combinaison quadratique complète (CQC) et, d'autre part, par la méthode de combinaison simple (SRSS) sont souvent en bonne corrélation. Toutefois, les résultats obtenus montrent dans certains cas une différence importante (de l'ordre de 25%) entre les valeurs fournies par les règles de combinaison CQC et SRSS, pour les déplacements longitudinaux en tête et les efforts de cisaillements (V_x) à la base de certaines piles.

Chapitre VII

ETUDE PARAMETRIQUE

VII.1 INTRODUCTION

Lorsqu'une charge est en mouvement, un pont subit des contraintes et des flèches qui excèdent de beaucoup celles causées par la même charge appliquée de manière statique. Les flèches dynamiques sont plus prononcées dans les ponts avec les modes de torsion dominants et particulièrement aux extrémités de ses encorbellements. Un autre facteur susceptible d'affecter le confort des piétons est la nature du mode de vibration dominant. En particulier, l'agressivité des modes de torsion sur la sensibilité humaine est plus accentuée que celle des modes de flexion. Ces modes indésirables doivent en général être évités. On note que la plupart des études prévues sur la dynamique des ponts se concentrent entièrement sur l'aspect modélisation et réponse dynamique, avec une moindre ou aucun effort d'investigations des effets de différents modes sur la sensation humaine. Dans ce qui suit, nous résumons les principaux résultats d'une étude paramétrique relativement exhaustive effectuée sur un prototype de pont-bicaisson en béton précontraint.

VII.2 DESCRIPTION DU PONT PROTOTYPE

Le prototype de pont est en béton précontraint est composé d'une seule travée de longueur totale 50m dont les extrémités reposent simplement sur des appuis. La section transversale de largeur totale 10m est constituée de deux caissons parallèles espacés de 2.50m. L'épaisseur $e=0.30m$ est maintenue constante sur tout le contour de la section transversale du prototype. Le comportement du béton est supposé linéaire, élastique, isotrope et caractérisé par les propriétés suivantes : masse volumique $\rho = 2500kg/m^3$, coefficient de Poisson $\nu = 0.20$ et le module de Young $E = 3.5 \cdot 10^{10} Pa$. Les dimensions géométriques sont portées sur la figure VII.1

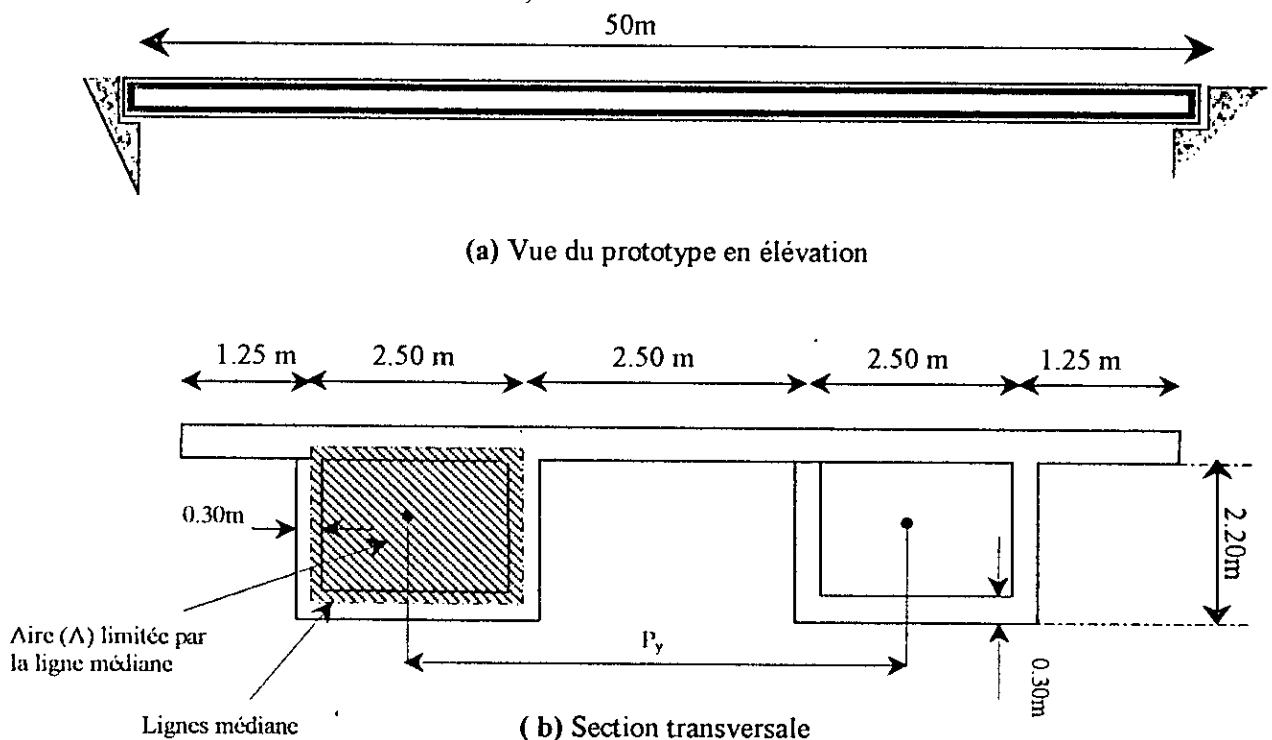


Fig. VII.1- Description du pont prototype

VII.3 METHODE D'ANALYSE

A ce titre, il est rappelé que la méthode des éléments finis est introduite dans cette présente étude. Comme tous les éléments coques convergent vers la bonne réponse, on peut tous les utiliser en confiance et le choix se réduit à celui de la commodité et de l'économie. A cet effet, l'élément fini de type coque tridimensionnel (Modèle MII) est utilisé.

Comme le montre la figure VII.2, la maille de la section transversale est constituée de 20 éléments répartis de la manière suivante :

- 08 Eléments pour le hourdis supérieur.
- 04 Eléments pour les hourdis inférieurs.
- 08 Eléments pour les âmes.

Au totale, 589 nœuds et 600 éléments ont été utilisés pour modéliser le prototype

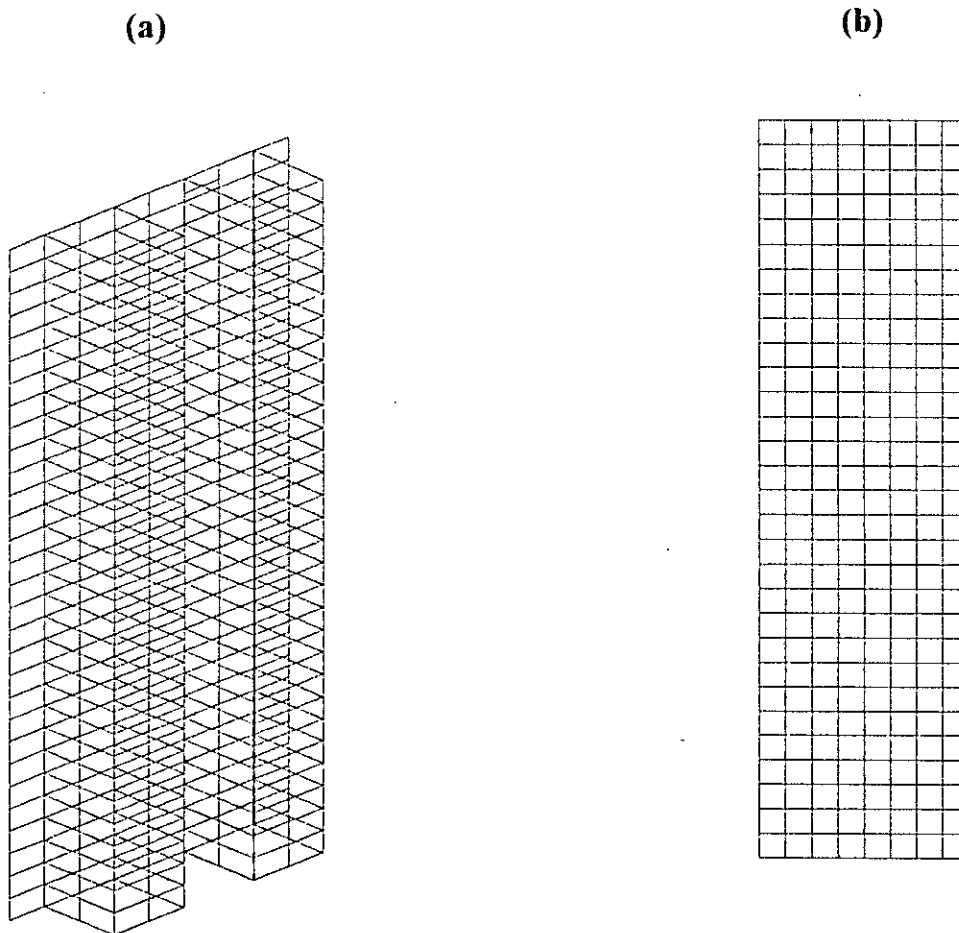


Fig. VII.2- Modèle en éléments finis du prototype :

- (a) Idéalisation spatiale du prototype
- (b) Idéalisation du tablier

VII.4 RESULTATS DE L'ANALYSE PARAMETRIQUE

VII.4.1 Effet de l'élanement géométrique ($R = \frac{L}{W}$)

L'élanement géométrique (R) est défini comme le rapport de la longueur du pont (L) à sa largeur (W). Dans cette étude, l'analyse est opérée sur un ensemble de prototypes présentant des sections transversales identiques.

Les résultats obtenus sont représentés dans la figure VII.3 ci après, pour diverses valeurs de l'élanement géométrique comprises entre 1 et 6.

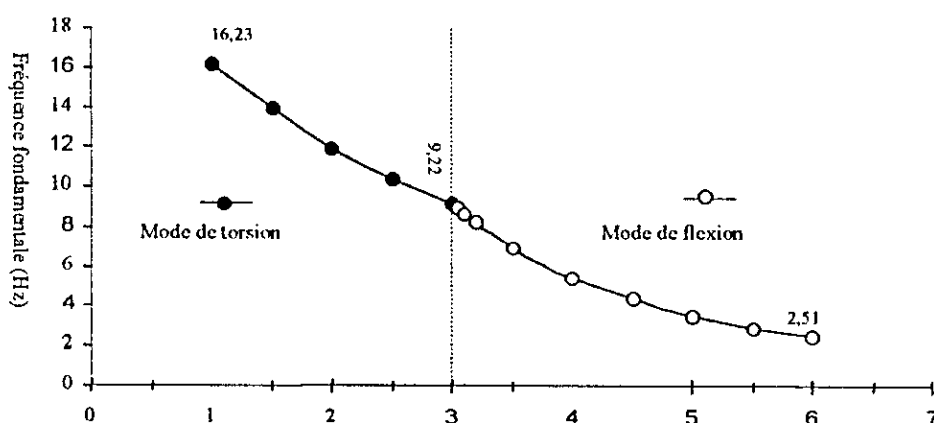
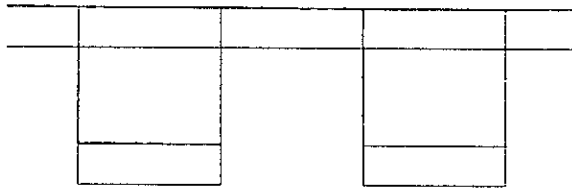


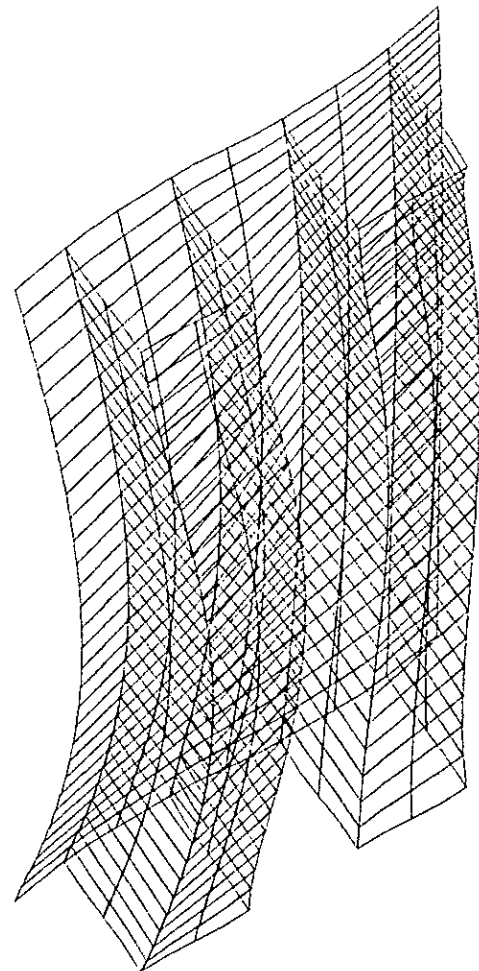
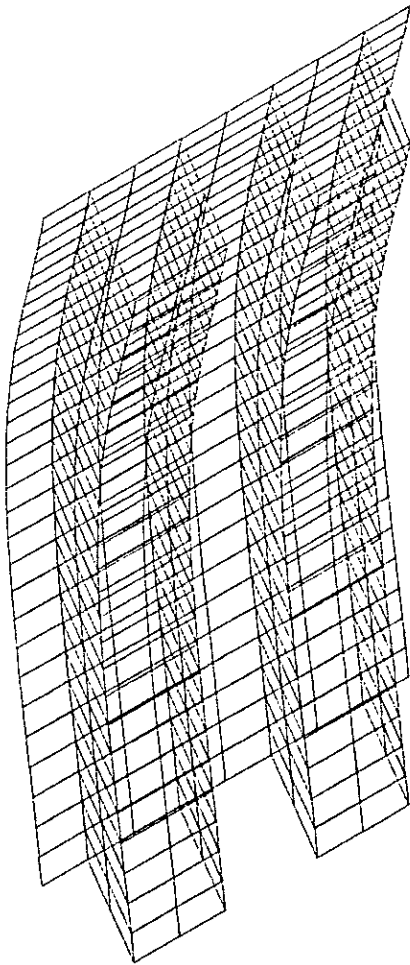
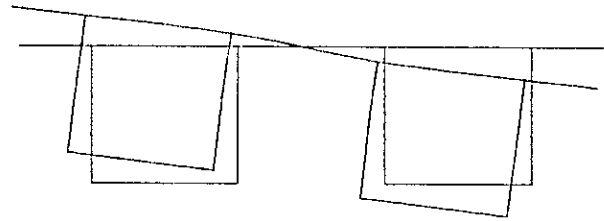
Fig. VII.3- Effet de l'élanement géométrique sur la fréquence fondamentale et son type de mode dominant

Nous remarquons une chute importante des fréquences pour des valeurs croissantes de R . Le mode dominant torsionnel (Fig. VII.4.b) régissant le comportement vibratoire tridimensionnel du pont change en mode flexionnel (Fig. VII.4.a) au point d'abscisse $R = 3$. Ainsi, on peut conclure que les vibrations des ponts de longue portée sont régies par des modes de vibrations flexionnelles.

(a) mode de flexion verticale



(b) mode de torsion

**Fig. VII.4-** Déformées modales des deux premiers modes vibratoires

- (a) Mode de flexion
- (b) Mode de torsion

VII.4.2 Effet du rapport des rigidités

Le rapport de rigidités est défini comme le ratio de la rigidité ; flexionnelle (D_x) à la rigidité torsionnelle (D_{xy}).

- La rigidité de flexion D_x par unité de longueur est :

$$D_x = \frac{EI}{P_y}$$

où E et I désignent respectivement, le module d'élasticité du béton et le moment d'inertie de la section transversale. P_y est la distance séparant les centres des caissons (Fig. VII.1.b).

- La rigidité de torsion D_{xy} [5], par unité de longueur est :

$$D_{xy} = \frac{4GA^2}{P_y \int_s \frac{1}{e\eta_s} ds}$$

Dans cette équation, les paramètres désignent :

G : Le module de cisaillement du béton

A : Aire limitée par le contour de la ligne médiane des parois des caissons.

$\int_s \frac{1}{e} ds$: Intégrale étendue au contour fermé, le long de la ligne moyenne (s) de la paroi

e : Epaisseur de la paroi à l'abscisse curviligne (s)

η_s : Rapport entre les modules de cisaillement du hourdis supérieur et du hourdis inférieur. Pour un pont constitué d'un matériau isotrope et homogène, la valeur de $\eta_s = 1$.

La figure VII.5 illustre les variations de la fréquence du mode fondamental en fonction du rapport des rigidités.

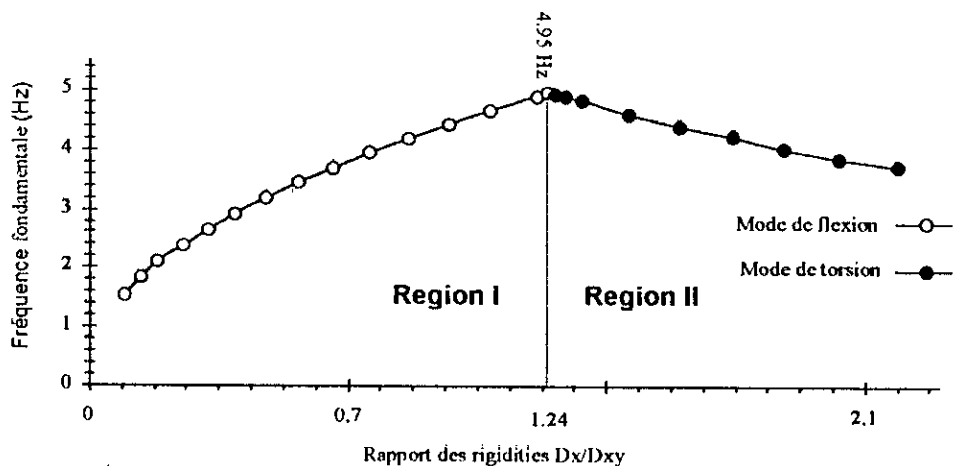


Fig. VII.5- Effet du rapport des rigidités sur la fréquence fondamentale et le type de mode de vibration dominant

On constate immédiatement que dans la région I, la fréquence fondamentale augmente considérablement avec le rapport de rigidités. Dans cette région, le mode de vibrations en flexion domine. Au-delà de la frontière $D_x/D_{xy} \approx 1.2$, les valeurs de fréquences subissent une légère diminution et les modes de vibrations dominants sont toujours des modes de torsion. Les conclusions que l'on peut tirer des résultats de l'analyse, nous permet de confirmer que le mode de vibration dominant change de flexion à la torsion, quant on fait croître le rapport des rigidités.

VII.4.3 Effet des diaphragmes

Il s'agit en fait des plaques en béton dissimulées à l'intérieur des caissons aux niveaux des appuis du pont. Les propriétés mécaniques des diaphragmes sont identiques à celles du pont.

Les coques seront subdivisées par des éléments finis de type coque tridimensionnels.

Les figures VII.6.a, VII.6.b et VII.6.c illustrent l'influence de l'épaisseur des diaphragmes sur les valeurs de fréquences des deux premiers modes. Les symboles F et T dans ces figures désignent les modes de vibrations flexionnels et torsionnels respectivement.

- La figure VII.6.a illustre par un graphe les principaux résultats de l'effet des diaphragmes sur les valeurs de fréquences des deux premiers modes vibratoires du pont avec l'élanement géométrique $R = 2$
- Nous montrons par l'allure de la figure VII.6.b, l'influence des diaphragmes sur les valeurs des deux premières fréquences et leurs modes correspondants pour un pont avec l'élanement géométrique $R = 3$
- On voit sur le graphe de la figure VII.6.c les principales investigations des résultats en fréquences et leurs types de modes menées sur un prototype de pont élané $R = 5$

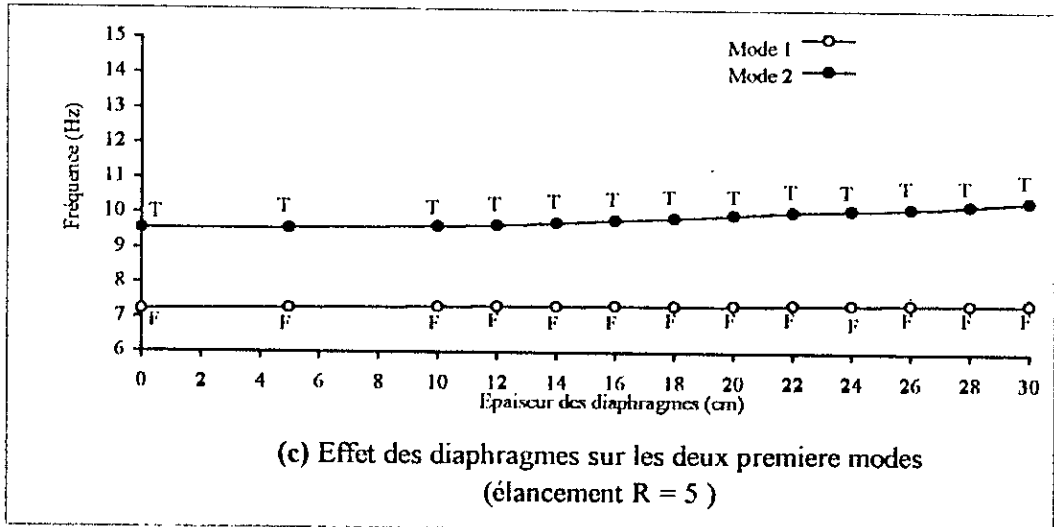
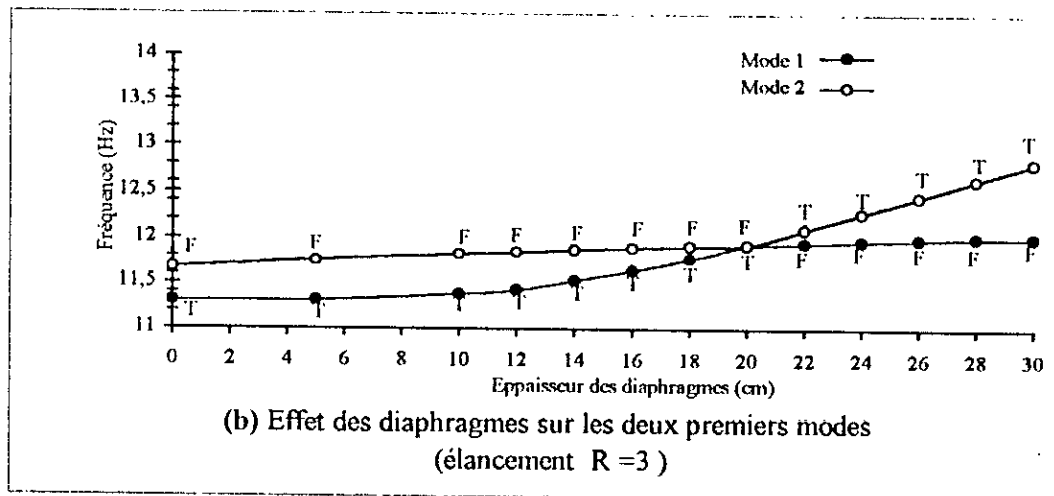
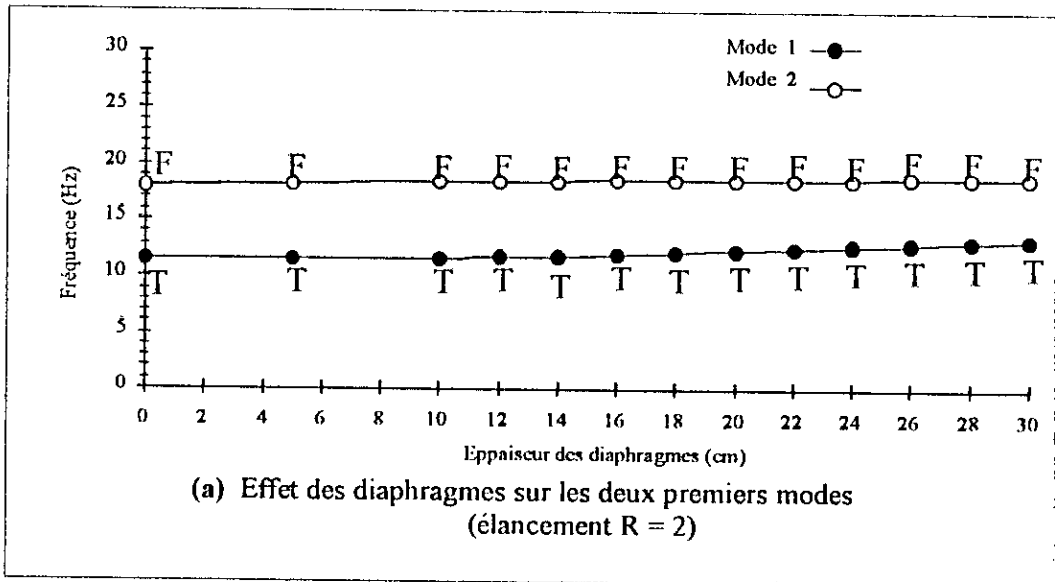


Fig. VII.6- Effet des diaphragmes Sur la fréquence des deux premiers modes et leurs modes dominant

La figure VII.6.a montre clairement que l'ajout des diaphragmes au niveau des appuis de pont d'élançement géométrique $R=2$, ne modifie pas la nature du mode dominant pour les deux premières fréquences. On remarque aussi que les modes torsionnels sont plus sensibles à l'accroissement d'épaisseur des diaphragmes que les modes flexionnels.

Les résultats de la figure VII.6.b, permettent de conclure pour les ponts d'élançement géométrique $R=3$ que l'ajout de diaphragmes d'épaisseur $e=20\text{cm}$ affectent la nature des deux premiers modes de vibrations. En effet, le 1^{er} mode de vibration initialement mode torsionnel devient flexionnel alors que le second mode de vibration initialement flexionnel change en mode torsionnel. On peut de nouveau noter que les diaphragmes ont une influence notable sur les valeurs de fréquences torsionnelles.

La figure VII.6.c montre aussi l'évolution des fréquences des deux premiers modes en fonction de l'épaisseur des diaphragmes pour un pont d'élançement géométrique plus important $R=5$. A ce titre, il est rappelé que les premiers modes dominants sont de type flexionnel. On constate comme indiqué sur la figure VII.6.c que la présence des diaphragmes ne perturbe pas la nature des deux premiers modes vibratoires. On peut aussi observer que les valeurs des fréquences de flexion sont pratiquement constantes alors que celles de fréquences torsionnelles subissent une légère variation.

Les résultats présentés ci-dessus permettent de conclure que de façon générale l'adjonction des diaphragmes aux niveaux des appuis, ne modifie sensiblement la fréquence et la nature du mode correspondant, que dans le cas où le mode dominant est un mode de type torsionnel.

VII.4.4 Effet de modélisation des masses

Pour analyser de manière qualitative le comportement dynamique des ponts, on peut avoir recours à deux méthodes analytiques: méthode des masses continues, dans lesquelles les propriétés dynamiques à savoir la rigidité et la masse de la structure sont traitées de manière continue, l'autre est la méthode des masses discrètes regroupée en deux méthodes:

- L'une est relative à des masses concentrées. Dans cette méthode, la procédure usuelle pour définir la matrice des masses concentrées consiste à distribuer la masse élémentaire aux nœuds de l'élément ou les forces d'inerties sont développées. Les coefficients extra diagonale de cette matrice sont nuls par contre ceux de la diagonale sont associés aux degrés de liberté de translation et de rotation.
- L'autre méthode est relative à des masses consistantes. Cette dernière est obtenue par un processus logique de discrétisation du problème par éléments finis. La matrice des masses consistantes est donnée par l'intégrale suivante.

$$M = \iiint H^t \rho H dV$$

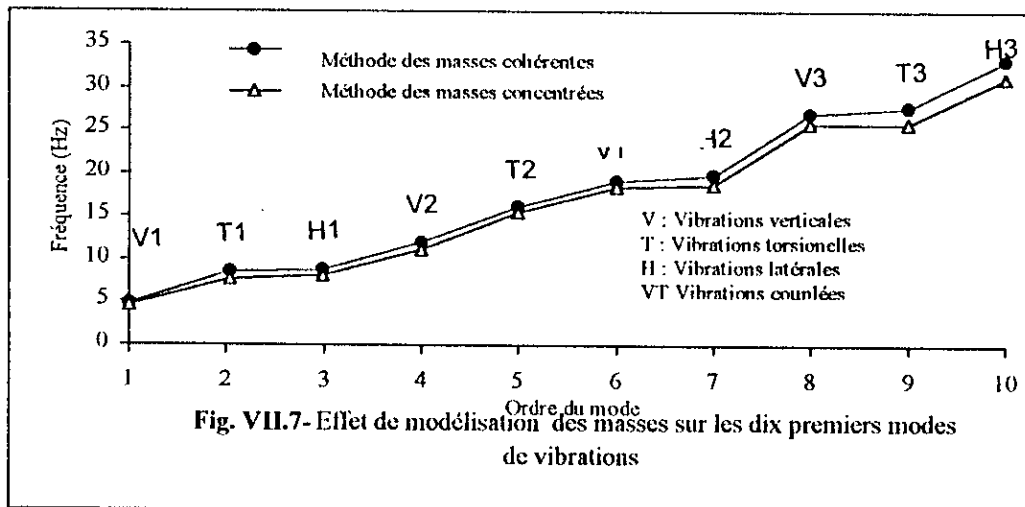
Où H et ρ désignent respectivement la fonction d'interpolation et la masse volumique de l'élément.

La forme symétrique de cette intégrale montre que la matrice des masses consistantes est symétrique ($m_{ij} = m_{ji}$) et elle possède la même configuration que la matrice de rigidité (termes extra diagonale sont symétriques et non nuls).

Bien que la configuration de la matrice des masses consistantes diffère de celle des masses concentrées mais les résultats obtenus en pratique sont presque identiques. Par conséquent, la méthode des masses consistantes demande un effort de calculs considérables que la méthode des masses concentrées d'où le choix de la méthode sera porté sur la commodité et l'économie de la méthode.

Dans ce qui suit, nous allons effectuer une étude comparative des résultats obtenus en fréquence d'une part par la méthode des masses consistantes et d'autre part par la méthode des masses concentrées.

La figure ci après illustre les variations de fréquences des dix premiers modes de vibrations du pont prototype calculées par deux méthodes: la méthode des masses concentrées et la méthode des masses cohérentes [19,53]. On remarque qu'il n'y a pas de différences notables entre les résultats de fréquences obtenus en utilisant les deux hypothèses de discrétisation des masses. On peut cependant noter que les écarts de fréquences entre les deux modèles croissent légèrement avec l'ordre des modes supérieurs. Dans tous les cas, le modèle de masses cohérentes fournit des valeurs de fréquences supérieures à celles déduites du modèle de masses concentrées.



VII.5 CONCLUSION

Au vu des résultats obtenus d'une étude paramétrique effectuée sur le prototype de pont bi-caissons, les conclusions suivantes semblent importantes à souligner.

- L'étude paramétrique menée sur le prototype a permis de confirmer que les vibrations des ponts de longue portée sont régies par des modes de vibrations flexionnelles.
- Nous énonçons que le mode de vibration dominant change de flexion à la torsion quand le Rapport de rigidité flexionnelle à la rigidité torsionnelle augmente.
- L'adjonction des diaphragmes aux niveaux des appuis, ne modifie sensiblement la fréquence et la nature du mode correspondant, que dans le cas où le mode dominant est un mode de type torsionnel.

A partir de ces investigations, on dispose maintenant des paramètres qu'on peut modifier afin d'éviter les modes de torsions, d'où la perception humaine aux vibrations sera améliorée et le confort des piétons empruntant le pont sera assuré. Malheureusement, ces conclusions ne peuvent pas être généralisées ou interprétées pour d'autres types de ponts car cette étude paramétrique est seulement restreinte aux ponts ayant la même configuration que le prototype étudié.

- Les résultats de l'effet de modélisations des masses obtenus, montrent qu'il n'y a pas de différences notables entre les résultats de fréquences obtenus en utilisant les deux modèles de discrétisation des masses. On peut cependant noter que les écarts de fréquences entre les deux modèles croissent légèrement avec l'ordre des modes supérieurs. Dans tous les cas, le modèle de masses cohérentes fournit des valeurs de fréquences supérieures à celles déduites du modèle de masses concentrées.

CHAPITRE VIII

CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

VIII.1 CONCLUSIONS

Trois modèles d'éléments finis ont été proposés et étudiés pour l'étude dynamique 3D des ponts-caissons. A partir des résultats obtenus de l'analyse du comportement vibratoire tridimensionnel et de la réponse sismique approfondie des études de plusieurs cas réels de ponts-caissons, il est possible de tirer les conclusions suivantes:

1. Le modèle tridimensionnel de type portique (Modèle MI) est approprié pour la simulation par la méthode des éléments finis du comportement dynamique des ponts offrant une économie considérable en terme de saisie des données et de temps d'exécution de calcul.
2. Les résultats de l'étude d'optimisation du maillage ont permis d'établir deux règles simples exprimant le nombre de nœuds par travée et par pile nécessaires pour une simulation adéquate du comportement dynamique des ponts-caissons.
3. L'étude des fréquences propres et des déformées modales de vibrations des ponts-caissons, met en évidence un fort couplage entre les modes latéraux et torsionnels d'une part, et entre les modes de vibrations longitudinales et verticales d'autre part.
4. Les résultats de l'analyse modale des études de cas réels étudiés, montrent que les cinq premiers modes de vibrations des ponts-caissons présentant une configuration symétrique sont dominés essentiellement par des modes de vibration en flexion latérale.
5. L'étude paramétrique montre que les vibrations des ponts de longue portée sont régies par des modes de vibrations flexionnelles.
6. Les résultats d'effet du rapport des rigidités sur le mode de vibration dominant montrent que ce dernier change de flexion à la torsion quand le rapport de rigidité augmente.
7. On peut montrer que de façon générale l'adjonction des diaphragmes aux niveaux des appuis, ne modifie sensiblement la fréquence et la nature du mode correspondant, que dans le cas où le mode dominant est en mode de type torsionnel.
8. Les résultats de l'effet de modélisations des masses obtenus, montrent qu'il n'y a pas de différences notables entre les résultats de fréquences obtenus en utilisant les deux modèles de discrétisation des masses. On peut cependant noter que les écarts de fréquences entre les deux modèles croissent légèrement avec l'ordre des modes supérieurs. Dans tous les cas, le modèle de masses cohérentes fournit des valeurs de fréquences supérieures à celles déduites du modèle de masses concentrées.
9. Les valeurs des fréquences des modes supérieurs notamment pour des ponts-caissons élancés sont très voisines. Les coefficients de corrélations modales correspondants sont relativement importants,

permettant à augurer un fort couplage de certains modes de vibrations et la nécessité de leurs prises en considération dans la détermination de la réponse sismique totale.

10. L'analyse dynamique a montré que les résultats des effets dynamiques calculés, d'une part, par la méthode de combinaison quadratique complète (CQC) et, d'autre part, par la méthode de combinaison simple (SRSS) sont souvent en bonne corrélation. Toutefois, les résultats obtenus montrent dans certains cas une différence importante (de l'ordre de 25%) entre les valeurs fournies par les règles de combinaison CQC et SRSS, pour les déplacements longitudinaux en tête et les efforts de cisaillements à la base de certaines piles.

VIII.2 RECOMMANDATIONS

Les résultats importants issus de cette présente recherche, nous incitent à tirer au clair des suggestions et des recommandations futures, qui sont les suivantes :

1. Le modèle tridimensionnel de type portique (Modèle MI) s'est avéré très judicieux et instructif pour la simulation par la méthode des éléments finis du comportement dynamique des ponts caissons.
2. La règle du maillage optimal est recommandée pour toute modélisation des ponts-caissons. Delà, l'analyse dynamique n'est pas coûteuse.
3. Il est suggéré d'utiliser la matrice des masses concentrées dans le processus de calcul des modes propres de la structure. Cependant, cette même matrice est plus commande et économique.
4. Il est recommandé aux concepteurs des ponts de dimensionner leurs ouvrages sous les effets simultanés des charges statiques (fixes et mobiles) et des charges dynamiques exactes; les efforts dynamiques considérés sont ceux déterminés par la règle de CQC.
5. Lors de l'élaboration d'un projet de pont, il est recommandé aux ingénieurs des ponts de procéder à une étude paramétrique approfondie sur les diaphragmes qu'il faut prévoir au niveau des appuis, et ce, dans le but d'éviter les modes de torsion. Ces derniers influent de manière négative sur le confort des piétons empruntant le pont.

Bibliographie

(Par ordre alphabétique)

- [1] - AASHTO. (The American Association of State Highway and Transportation Officials, INC). "Standard specifications for highways bridges, 14th edition, as amended by the interim specifications - bridges, Washington DC, 1990.
- [2] - A.M. ABDEL-GHAFFAR. "Vibrations studies and tests of suspension bridges". Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.6, 473 - 496,1978.
- [3] - A.M .ABDEL-GHAFFAR. "Dynamics analysis of suspension bridge structures". Earthquake Engineering Research Laboratory EERL - 76 - 01,California institute of technology, PASADENA, U.S.A.
- [4] - A.M. ABDEL- GHAFFAR, S.E MASRI AND A,S.M NIAZY. "Seismic performance evaluation of suspension bridges". Earthquake Engineering Tenth World Conference. Belekema, Rotterdam, 1992
- [5] - BAKHT, B, AND JAEGER. L.G."Bridges Analysis Simplified". Mc Graw Hill, New York, 1985.
- [6] - BATHE K.J. AND DVORKIN, EN. " A Four Nodes Plate Bending Element Based on Mindlin / Reissener Plate Theory and Mixed interpolation. Int. Jnl. For Numerical Methods in Eng. Vol 21, 1985,pp367 - 383.
- [7] - BIGGS- "Vibration and Stress in Girders Bridges". Bulletin High. Way. Res. N°124,1956.
- [8] - B.D. DOUGLAS ET AL., "Behaviour of the molland road. Overcrossing during the 1979 Imperial Valley earthquake". Seismic Research for Highway Bridge, Univer of Pittsburgh, PA, pp 339 - 365, 1984.
- [9] - B.Z VLASOV "Pièces longues en voiles minces "(Ed. Eyrolles Paris 1972).
- [10] - CARLOS. MATA, JORGE GIL SARAIVA. " Aerodynamic Study Of Arade Cable -Stayed bridge, Czechoslovakia conference with International Participation On Dynamic Of Building Structures, KARLOVYVARY, Checoslovaquia, 1989.
- [11] - C.F KOLLBRUNER et K. Basler. "-Torsion- Application à l'etude des structures"- SPES- Laussane - Bordas - Paris.
- [12] - CHEUNG,M.S, AND MIRZA, M.S. "A Study of The Response of Composite Concrete desk- steel box girder bridges". Proceeding of the 3rd International conference on computational and experimental measurements, Porto caras, Greece, pp. 549 - 565, 1986.

- [13] - CHEUNG MS ET MEGHNOUNIF. "Parametric study of design variations on the Vibrations modes of boxes Girders bridges - Canadian journal of civil Engineering, N° 18 pp. 789 - 798.
- [14] - C. HUENTA, E. LASO, S. GOMEZ - LERA ET E. ALARCON. "Importance of Local modes in seismic response of bridges". Earthquake Engineering, Tenth World Conference, Belekema, Rotterdam, 1992. Ba | kema
- [15] - CHIN - HSIUNGLOH AND ZHENG KUAN LEE. "Seismic Monitoring of bridge, Assessing Dynamic Characteristics from both weak and strong motion ground excitations". Earthquake Engineering and Structural Dynamics. Vol 26, 269 - 288, 1997. By John Willey & Son, Ltd.
- [16] - CLOUGHT, R.W. " The Finite Element Method in Plane Stress Analysis". Proc. 2nd Confe. On Electronic Computation, ASCE, New York. 1960, pp345 - 377.
- [17] - CLOUGH. R.W. AND PENZIEN, J. "Dynamics of Structures. New York, Mc Graw Hill, 1975.
- [18] - DHATT, G. ET TOUZOT, G. "Une présentation de la méthode des éléments finis". 2nd Edition, Maloine S.A Ed. paris 1984.
- [19] - E. HINTON, A. ROCK AND O.C ZIENKIEWICZ. "A note on Masse Lumping in related Process in the Finite Element Method", Int. J. Earthquake. Eng. Stru. Dynamic. 4, 245 - 9, 1976.
- [20] - E.P.F.L (Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne). "Conception des structures métalliques (dimension des ponts)"
- [21] - G. GRATESSAT "Conception des ponts" (collection Cours de L'E.N.P.C., Ed. Eyrolles).
- [22] - G. GRATESSAT. "Une nouvelle famille de ponts en béton précontraint". (Revue Travaux, 1/1966).
- [23] - GUPTA, A.K "Combined Membrane and Flexural reinforcement in Plates and Shells". Jnl. of Str Engineering, ASCE, Vol. 112, N° 3 March 1986, pp.550 - 558.
- [24] - G. WORONTZOFF. "La construction des ponts en béton précontraint par la méthode de l'encorbellement". (Numéro spécial " Ouvrages d'Art " de l'ingénieur constructeur, 4/1971).
- [25] - HAYASHIKAWA, T. "Natural Vibration analysis of rigid frame bridge with V- Shaped and its accuracy investigation, journal of structural Engineering, Vol., 35 A, 719 - 725, 1989.
- [26] - HAYASHIKAWA, T., KAKUTA, Y. AND MATSU, Y. "Calculation of Fundamental natural Period of Three dimensional Continuous Viaducts". Journal of structural Engineering, 1992.
- [27] - HINTON, E. AND HWANG, H.C. " A Family of Quadrilateral Mindlin Plate Element with Substitute Shear Strain Fields". Computers and Structures, Vol., 23. N° 3, 1986 pp 409 - 432.

- [28] - **J.A, CALGARO ET M, VIRLOGEUX.** "Projet et construction des ponts". Tommes I et II, presse de l'école nationale des ponts et chaussées.
- [29] - **JAPAN ROAD ASSOCIATION.** "Specification for Highway bridges". Earthquake resistant design of highway bridges, 8 - 29, 1990.
- [30] - **J. COURBON.** "Resistance des matériaux". Tommes I et II, (Ed. Dunod).
- [31] - **J.CHAUDESAIGUES.** "Evolution de la technique de construction des ponts en encorbellements en France". (Revue Travaux, 1/1966).
- [32] - **J.C. Wilson.** "Analysis of the observed earthquake response of a multiple span bridge, EERL, Report N° 84 - 01, California institute of technology, Pasadena.
- [33] - **J.L CANCIO, MARTIN ET ARMONDO.A. MARQUESRITO** "Construction des ponts sur le Rio Guardian et le Rio ARADE au Portugal". Annales de l'institut technique du bâtiment et des travaux publics. (N° 518. 1993).
- [34] - **J. MATHEVAT.** "Structures de piles adaptées à la construction par encorbellement". (Journée de l'A.F.P.C.Paris, 4/1974).
- [35] - **J. MATHEVAT.** "Evolution et récents développements des ponts à voussoirs préfabriqués". (Annales ITBTP, 9/1976).
- [36] - **J . MULLER.** "Ten years of experiences in precast segmental construction". (Journées of the P.C.I., 1-2/1974).
- [37] - **JOHN .C. WILSON.**" Analysis of the observed seismic response of highway bridge". Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol, 14, 339 - 54, 1986.
- [38] - **J.R.A.** "Specification for highway bridges"., 1968, Tokyo, Japan.
- [39] - **KIUREGHIAN, A.D.** "On Response structures to stationary excitation". Report N° UCB /EERC - 79 - 32, University of California Berkley, U.S.A., 1979.
- [40] - **KIUREGHIAN, A.D.** "A response Spectrum Method for random vibration ". Report N°. UCB / EERC - 80 - 15, University of California, Berkley. U.S.A., 1980.
- [41] - **KIUREGHIAN, A.D A.NEUEHOFEN.** "Response spectrum method for incoherent support motion". Earthquake Engineering, Tenth World Conference, Belekema, Rotterdam, 1992.
- [42] - **KIUREGHIAN, A.D.** "CQC modal combinaison rule for high frequency modes". Trans. 11th. Int. Conference on Stut. Mech. In Reactor Technology, Tokyo, Japan, August .K
- [43] - **KIYOTA. R, NATORI. T, SASAKA. Y ET YOKO. , M.** "Vibration characteristics in five span continuous steel bridge with rubber bearings Yokogawa bridge". Giho. N° 19, 21 - 36.

- [44] - **K.J. BATHE AND E.L. WILSON**, "Large eigenvalue problems in dynamics analysis" Proc. Am. Soc. Civil. Eng, 98,EM6, 1471 - 85, 1972.
- [45] - **K. J. BATHE AND E.L WILSON**, "Solution Method for eigenvalue problem in Structural Dynamics". Int. J.Num. Meth. Eng., 6,213 - 26,1973.
- [46] - **KLAUSS. JURGEN BATH**. " Finite Element Procedures in Engineering Analysis.
- [47] - **KRISTEK** "Theory of Boxes girders". John Willey.
- [48] - **MEGHNOUNIF, A.** "Parametric Study on human responses to vibrations of box girder bridges". M.A.S.C. Thesis, University Ottawa Ontario, 1988.
- [49] - **MICHEL KAHAN, RENE J.GIBERT ET PIERRE. YVES BARD**. "Influence of seismic waves spatial variability on bridges: A sensitive analysis". Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol, 25, 795 - 814, 1996, by Willey & Son, Ltd.
- [50] - **M. VIRLOGEUX, J.C FOUCRIAT et B. DEROUBAIX**. "Design of the Normandy Cable Stayed Bridge near Honfleur". PRO of the Int. Conf. On Cable Stayed Bridges. Bangkok, November 1987.
- [51] - **O.C ZIENKIEWICZ AND Y.K CHEUNG**. "Finite Element Procedures in the Solution of plate and Shell Problems, Chapter 8 of Stress Analysis. Edition O.C Zienkiewicz and G.S .Holister. Willy, 1965.
- [52] - **O.C. ZIENKIEWICZ AND J.J.M. TOO**. "The Finite Prism in Analysis of Thick Simply supported Bridges Boxes". Proc. Ins. Civil 53, 147 - 72, 1972.
- [53] - **P. TONG, T.H.H. PIAN AND L.L. BUCIOVELLI**, "Modes Shapes and Frequencies by the Finite Element Method Using Consistent and Lump Matrices". J. Comp. Stru, 1,623 - 38,1971.
- [54] - **PUBLICS WORK RESEARCH INSTITUTE** "A case History of bridge performance during earthquake in Japan". Pro. Int. Conf. Case. History. Eng., St. Louis, MO, 1984.
- [55] - **R.ALIVEZA, G. AMIN**. "An investigation into the effect of earthquake bridges". Earthquake Engineering, Tenth World Conference, Belekema, Rotterdam, 4763 - 67, 1992.
- [56] - **R.H. GALLAGHER**. "Shell elements" World conf on Finite Element Methods in Structural Mechanics". Bournemouth, 1975.
- [57] - **R.W. CLOUGH† AND C.P. JOHNSON**. "A Finite Element Approximation For The Analysis of Thin Shell". J. Solids structures.4, 43 - 60, 1986.
- [58] - **R.W. CLOUGH†**. "Analysis of Structures Vibrations and Response, Recent Advances in Matrix Method of Structure Analysis and design". pp 25 - 45 (Edition R.H. Gallaghen, Y.Yamada and

J.T Oden) First US - Japan Seismic, Alabama press, 1971.

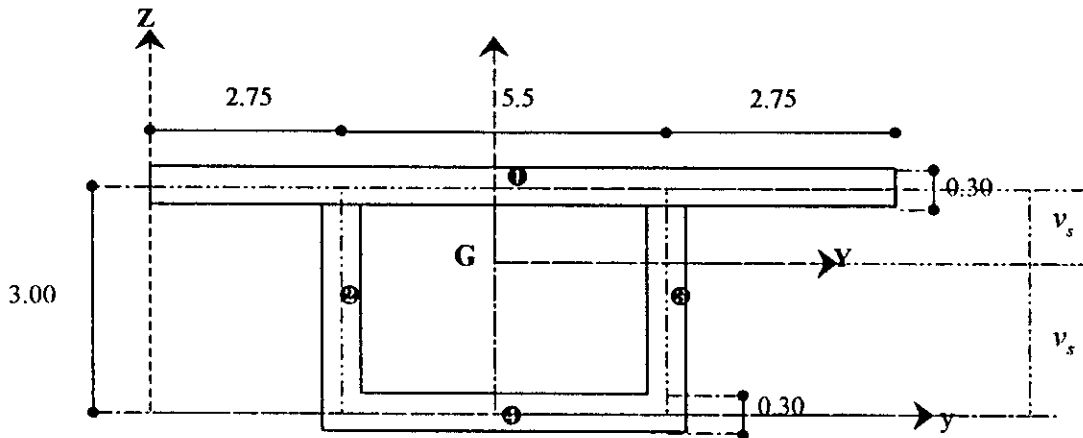
- [59] - SAP - 90. " Bridge Analysis User Manual", Developed and written in U.S.A.
- [60] - S.C.D.T, (State of California, Department of Transportation). " Bridge Design Aids Manual, N°. 14. Caltrans, Sacramento, CA, October 1989.
- [61] - SEAOC. "Recommended lateral forces requirements and commentary". Structural Engineering Association of California, Sacramento. CA, 1990
- [62] - SETRAT "Ponts en béton précontraint construits par encorbellements successifs" (Service d'Etude Technique des Routes et Autoroutes), Bulletin Technique.
- [63] - S. KITAGAWA, K. UNO, T. ASO, ET T. YASUMATSU. " Dynamics and dispersion mechanism in a four span bridge". Earthquake Engineering, Tenth World Conference, Belekema, Rotterdam, 4881 - 85, 1992.
- [64] - TILIOUINE B. " dynamique des structures, Aspects vibratoires ". GECOTEC, Alger, 2000.
- [65] - TIMONSHENKO. S AND J. N GOODIER. " Theory of Elasticity". 2nd. Ed. Mc Graw Hill, 1951.
- [66] - TIMONSHENKO, S. ET WOINOWSKY - KREIGER, S " Theory des plaques et coques" 2nd E.d Americaine, librairie polytechnique Berabger CH. 1961.
- [67] - TIMOSHENKO. "Résistances des matériaux", Tommes I et II, (Ed. Dunod, Paris, 1972).
- [68] - WILSON, E.L AND A. HABIBULLAH. " Sap - 90 User Manual". Computer and Structures, Inc, Berkely, California, 1989.
- [69] - WILSON. E.L AND HABIBULLAH. A. "SAP - 90 a series of computers programs for the finite element analysis of structures - Structural Analysis User Manual. Computers and Structures". Inc, Berkeley, CA, 1991.
- [70] - YAMADA. Y AND VELESTOSA. "Free Vibration of Simple span I beam bridges". - 8th process report, university of Illinois.
- [71] - Y. GUYON. "Construction en béton précontraint", Tomes I et II (Ed. Eyrolles).
- [72] - Y.K. CHEUNG, M.S. CHEUNG AND A. GHALI, "Analysis of Slab and Girders Bridges by the Finite Strip Method". Building Science, 5, 95 - 104, 1970.
- [73] - Y. MATSUI, T. HAYASHIKAWA & Y. KAKUTA, T. KANEKO ET N. SUGAWARA. " Calculations of natural periods of bridges structures by using static frame method". Earthquake engineering, Tenth World Conference Belkema. Rotterdam, 1992.
- [74] - ZIENKIEWICZ, O.C. AND TAYLOR, R.L. Too, J.M. "Reduced integration Technique in General

Analysis of Plates and Shells". Int. Jnl. For Numerical method engineering, Vol.3, 1971, pp275 - 29.

- [75] - ZIENKIEWICZ, O.C. "La methode des éléments finis". 3^{ème} Edition, Mc Graw - Hill. Inc, Paris 1979.
- [76] - ZIENKIEWICZ, O.C. AND TAYLOR, R.L. " The Finite Element method" 4th. Edition. Mc Graw Hill 1989 (Tome I), 1991 (Tome II).
- [77] - IX WORLD CONFERENCE, "Seismic Study of the ARADE River Cable Stayed Bridge" Earthquake Eng, Vol.6, Page. 507-512, Japao, 1988.

Annexe. 1

CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DE LA SECTION TRANSVERSALE



Dimensions de la section transversale

- Aire de la section transversale

$$A = \sum y_i A_i = 6.75 \cdot m^2$$

- Position du centre de gravité

$$v_s = h \cdot \frac{1 + \alpha_i}{2 + \alpha_s + \alpha_i}$$

$$\alpha_i = \frac{A_i}{A_a} = \frac{b_i e_i}{h e_a} = \frac{5.5 \cdot 0.30}{3 \cdot 0.30} = 1.80$$

$$\alpha_s = \frac{A_s}{A_a} = \frac{b_s e_s}{h e_a} = \frac{2 \cdot 5.5}{3} = 3.67$$

En remplaçant ces deux valeurs dans l'équation (1.2), on déduit la position du centre de gravité

$$v_s = 1.13 \cdot m$$

$$v_i = h - v_s = 1.86 \cdot m$$

- Inerties principales

Les inerties principales sont déterminées par les relations classiques (théorème des axes parallèles) :

$$I_{y_i} = \sum (I_{y_i} + A_i d_i^2)$$

$$I_{z_i} = \sum (I_{z_i} + A_i dy_i^2)$$

Avec:

$$dz_i = |z_i - z_g|$$

$$dy_i = |y_i - y_g|$$

z_i, y_i et z_g, y_g les positions des tronçons de la section par rapport au repère (x,y) et la position du centre de gravité par rapport au même repère.

Après calcul, on obtient les valeurs des inerties principales

$$I_z = 51.01 \cdot m^4 \text{ et } I_y = 51.01 \cdot m^4$$

• Inertie de torsion pur K_t

$$K_t = K + K_1$$

- K est l'inertie globale de torsion de la section , elle est formulée par la relation suivante :

$$K = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{e}}$$

A est l'aire intérieure de la cellule du caisson , elle vaut :

$$A = 5.5 \cdot 3 = 16.5 \cdot m^2$$

$\oint \frac{ds}{e}$, est le périmètre des tronçons de la cellule divisé par leurs épaisseurs, elle est égale à

$$\oint \frac{ds}{e} = \frac{5.5 \cdot 2 + 3 \cdot 2}{0.30} = 56.6$$

On déduit alors l'inertie globale de la section.

$$K = 19.217647 \cdot m^4$$

- K_1 est l'inertie propres des parois (saint-venant) de, elle est donnée par la relation suivante :

$$K_1 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{i=4} l_i e_i^3$$

e_i et L_i Etant respectivement l'épaisseur et la longueur de chaque élément de la section.

$$K_1 = \frac{1}{3} \cdot (0.30)^3 (17 + 2 \cdot 2.75) = 0.20 \cdot m^4$$

l'inertie totale de torsion de la section est :

$$K_t = 19.217 + 0.20 = 19.20 \cdot m^4$$

CARACTERISTIQUES SECTORIELLES

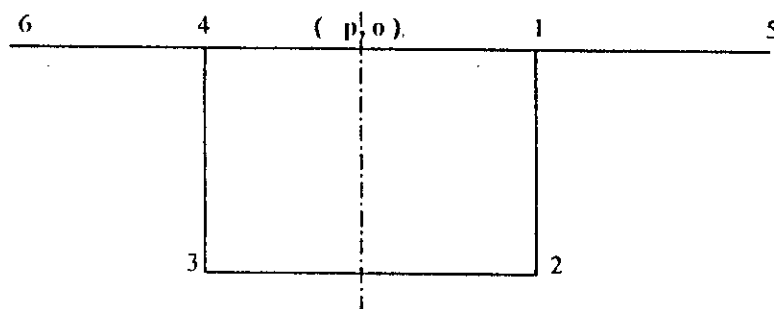
• Aire sectorielle

On définit aire sectorielle par l'expression suivante :

$$\omega(p) = \int_0^s r ds$$

$\omega(p)$ est pris positif dans le sens d'une aiguille de montre

r est la distance qui sépare la tangente au point considéré d'abscisse curviligne et le pôle p



Le pôle (p) et l'origine (o) se situent au milieu du hourdis supérieur

- Tronçon : 0 - 1 $r = 0 \Rightarrow \omega(p) = 0$
- Tronçon : 1 - 5 $r = 0 \Rightarrow \omega(p) = 0$
- Tronçon : 1 - 2 $2.75 \leq s \leq 5.75$

$$\omega(p) = \omega(p)_1 + \int_{2.75}^s 2.75 ds = 0 + 2.75(s - 2.75)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(p)_1 = 0 \\ \omega(p)_2 = 8.25 \end{array} \right\}$$

- Tronçon 3 - 4 : $11.25 \leq s \leq 14.25$

$$\omega(p) = \omega(p)_3 + \int_{11.25}^s 2.75 ds = 24.75 + 2.75(s - 11.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(p)_3 = 24.75 \\ \omega(p)_4 = 33 \end{array} \right\}$$

- Tronçon 4 - 0 : $14.25 \leq s \leq 17$

$$\omega(p) = \omega(p)_4 + \int_{14.25}^s 0 ds = 33$$

$$\omega(p)_4 = \omega(p)_0 = 33$$

- Tronçon 4 - 6

$$\omega(p) = \omega(p)_4 - \int_{17}^s 0 ds = \omega(p)_4 = 33$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(p)_3 = 24.75 \\ \omega(p)_4 = 33 \end{array} \right\}$$

• Fonction sectorielle

La fonction sectorielle est définie par :

$$\psi(p) = \omega(p) - f(s)$$

$$f(s) = \lambda \int \frac{ds}{e}$$

$$\lambda = \frac{\Omega}{\int \frac{ds}{e}} = \frac{2A}{\int \frac{ds}{e}} = \frac{2 \cdot 5,5 \cdot 3}{56,66}$$

$$\lambda = 0,58235$$

$$f(s) = 1,94 \int ds$$

- tronçon 0 - 1 : $0 \leq s \leq 2,75$

$$f(s) = 1,941176 \int_0^s ds$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(2,75) = 5,3382 \end{cases}$$

- tronçon 1 - 5:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(2,75) = 5,3382 \end{cases}$$

- tronçon 1 - 2 : $0 \leq s \leq 2,75$

$$f(s) = 1,941176 \int_0^s ds, f(s) = 1,94(s - 2,75) + f(5)$$

$$\begin{cases} f(1) = 5,33 \\ f(2) = 11,16 \end{cases}$$

- tronçon 2 - 3 : $5,75 \leq s \leq 11,25$

$$f(s) = 1,941176 \int_{5,75}^s ds + f(2) = 1,94(s - 2,75) + 11,16$$

$$f(3) = 21,83$$

- tronçon 3 - 4 : $11,25 \leq s \leq 14,25$

$$f(s) = f(3) + 1,941176 \int_{11,25}^s ds = f(3) + 1,94(s - 11,25)$$

$$f(4) = 27,66$$

- tronçon 4 - 0 : $5,75 \leq s \leq 11,25$

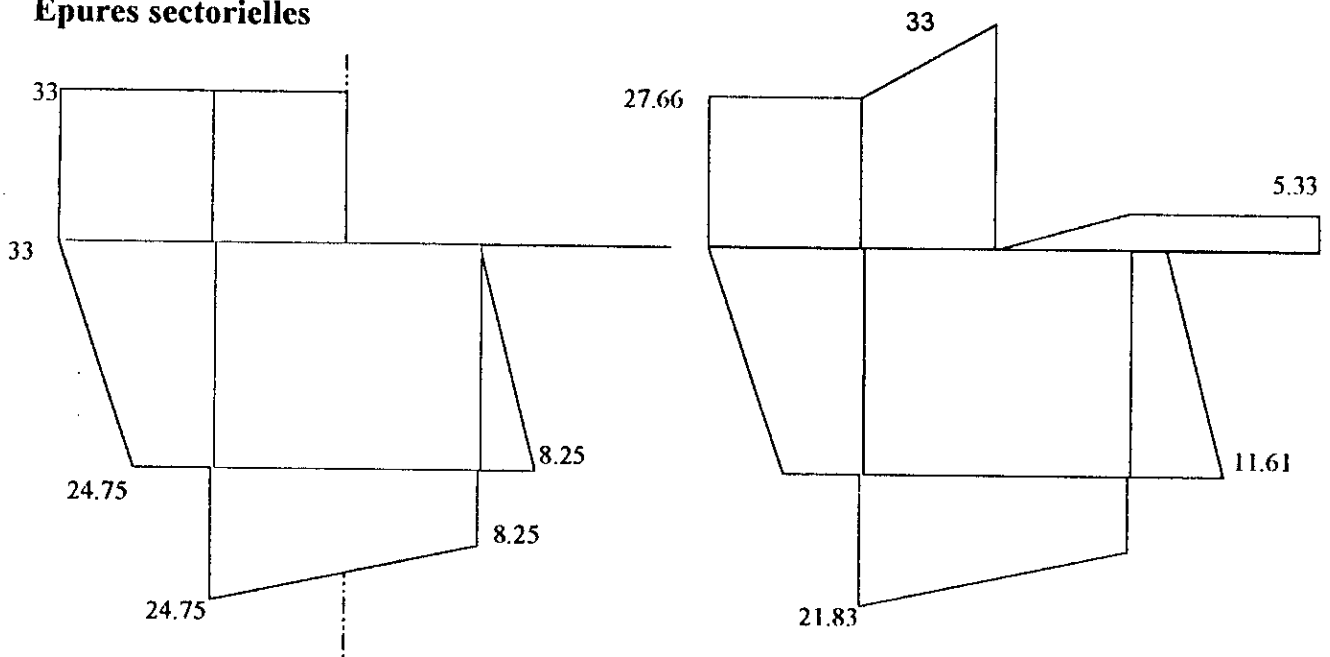
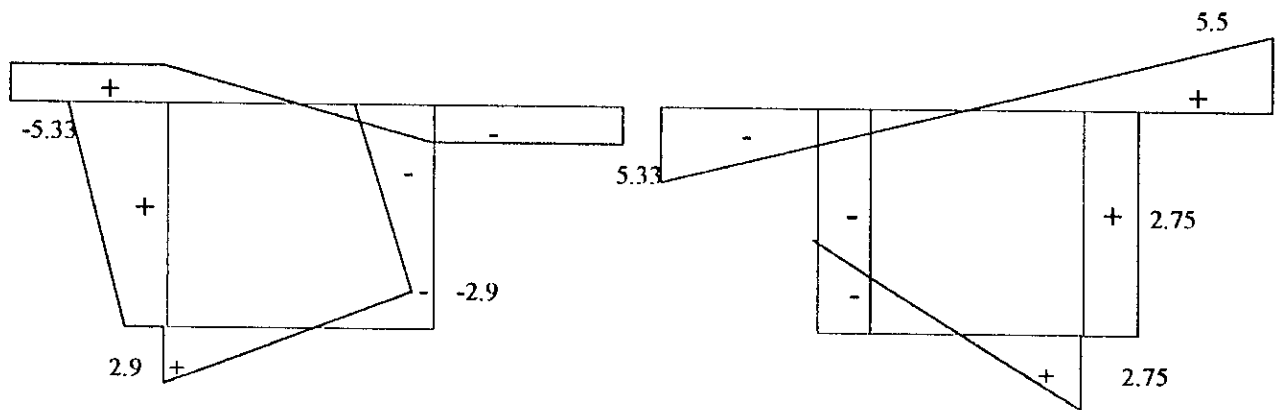
$$f(s) = f(4) + 1,941176 \int_{14,25}^s ds = f(4) + 1,94(s - 14,25)$$

$$f(0) = 33$$

- tronçon 4 - 6

$$f(s) = 27,66$$

• Epures sectorielles

Epure de l'aire sectorielle $\omega(p)$ Epure de la fonction $f(s)$ Epure de la fonction sectorielle $\psi(p)$

Epure en y

• Centre de torsion (ou cisaillement)

Les coordonnées du centre de cisaillement c se déduisent de celles du pôle par les formules :

$$y_c = y_p + \frac{\int_{\Gamma} \psi_p y_e ds}{I_y}, \quad z_c = z_p - \frac{\int_{\Gamma} \psi_p z_e ds}{I_z}$$

Le centre de torsion se situe sur l'axe Gz puisque ce dernier représente l'axe de symétrie de la section.

$\int_{\Gamma} \psi_p y_e ds$ est déterminé par le produit de mohr entre l'épure de l'aire sectorielle et celle en y.

Après calcul on obtient :

$$\int_{\Gamma} \psi_p y \, ds = -2 \left(\frac{2.75 \cdot 5.33}{2} \times 1.83 + \frac{(5.33 + 2.91)}{2} \times 3 \cdot 2.75 + \frac{2.91 \cdot 2.75}{2} \times 1.83 + 2.75 \cdot 5.33 \cdot 4.125 \right)$$

$$\int_{\Gamma} \psi_p y \, ds = -69.23$$

On déduit alors l'ordonnée du centre de cisaillement c par rapport à celle du pôle o

$$Z_c = Z_p - \frac{-69.23}{51.03} = Z_p + 1.35$$

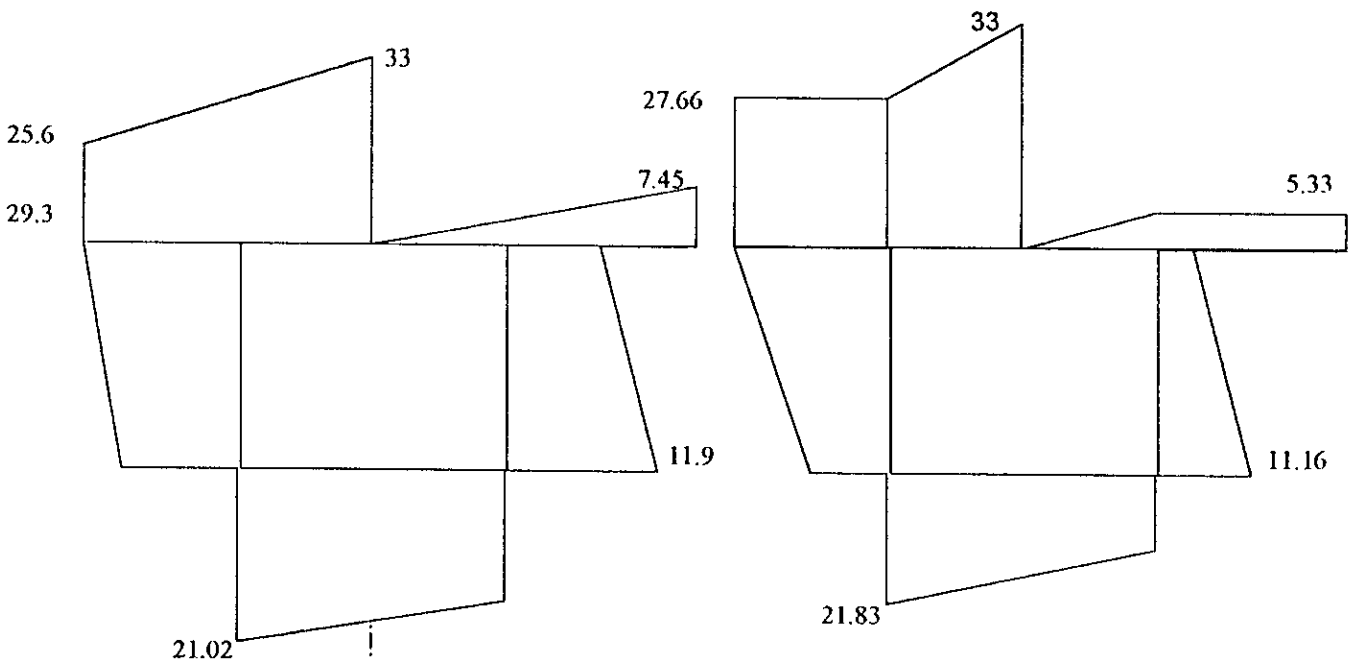
• **Aire sectorielle principale $\omega(c)$**

La formule du changement de pôle donne :

$$\omega(c) = \omega(p) - (y_c - y_p)(z - z_o) + (z_c - z_p)(y - y_o)$$

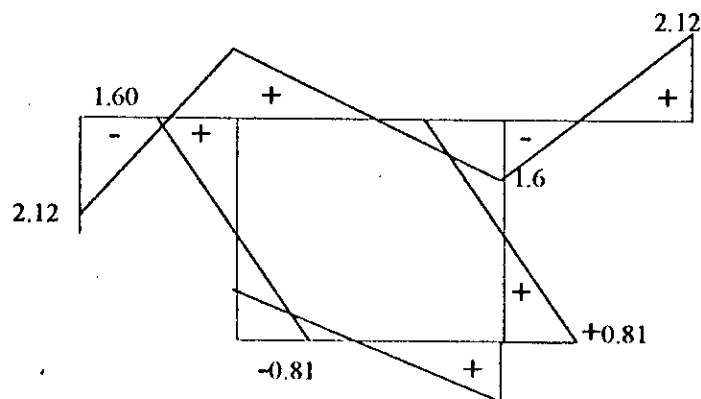
$$\omega(c) = \omega(p) + 1.35(y - 0) = \omega(p) + 1.35y$$

On peut maintenant tracer l'épure de la fonction sectorielle principale $\omega(c)$



Epure de l'aire sectorielle Principale $\omega(c)$

Epure de la fonction $f(s)$



Epure de la fonction sectorielle $\psi(c)$

- **Inertie sectorielle (gauchissement)**

Elle est déterminée par l'intégrale suivante :

$$\omega(c) = \omega(p) - (y_c - y_p)(z - z_o) + (z_c - z_p)(y - y_o)$$

$$\omega(c) = \omega(p) + 1.35(y - 0) = \omega(p) + 1.35y$$

On peut maintenant tracer l'épure de la fonction sectorielle principale $\omega(c)$

$$I_\psi = \int \psi_c^2 eds = e \int \psi_c^2 ds$$

$\int \psi_c^2 ds$ est obtenue par l'intégrale de Mohr entre la fonction sectorielle principale $\psi(c)$ et elle-même.

$$\int \psi_c^2 ds = 2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1.60 \cdot 2.75}{2} \cdot 1.07 + \frac{1.186 \cdot 1.60}{2} \cdot 1.072 + \frac{1.56 \cdot 2.12}{2} \cdot 1.41395 + \\ \frac{1.98 \cdot 1.60}{2} \cdot 1.072 + \frac{1.02 \cdot 0.81}{2} \cdot 0.544 + \frac{0.81 \cdot 2.75}{2} \cdot 0.54 \end{array} \right\} = 16.59 m^3$$

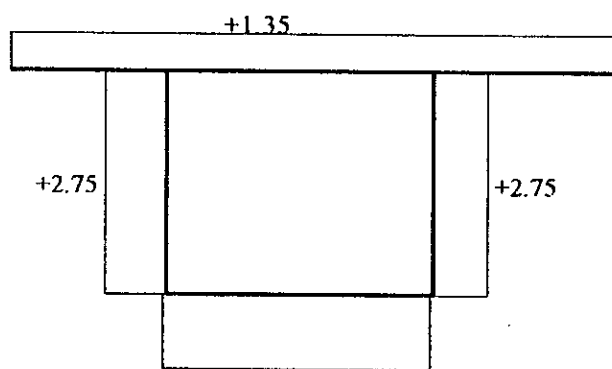
$$I_\psi = 4.97 m^6$$

- **Inertie tangente polaire**

Cette caractéristique est calculée en effectuant l'intégration suivante :
l'inertie tangente polaire,

$$I_c = \int r^2 eds = e \int r^2 ds$$

On trace l'épure de $r(s)$



+1.65

Epure de $r(s)$

$$\int r^2 ds = 1.35 \cdot 11 \cdot 1.35 + 2 \cdot 2.75 \cdot 3 \cdot 2.75 + 1.65 \cdot 5.5 \cdot 1.65 = 80.39$$

$$I_c = 0.30 \times 80.39 = 24.12 m^4$$

On déduit la valeur du paramètre k

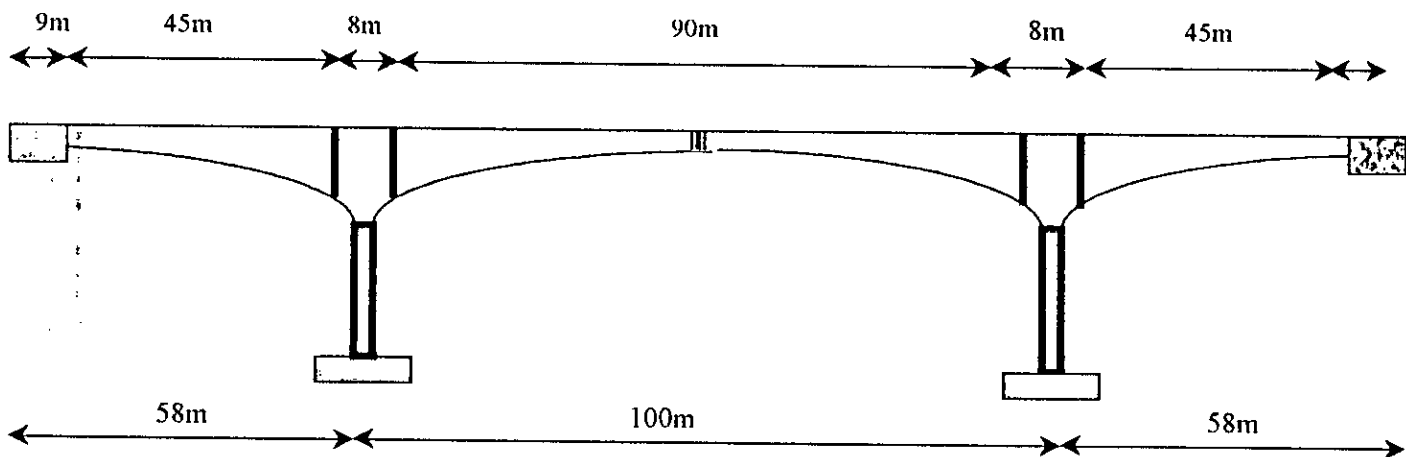
$$k = 1 - \frac{K}{I_c} = 1 - \frac{19.20}{24.12} = 0.203$$

1 DESCRIPTION DE L'OUVRAGE

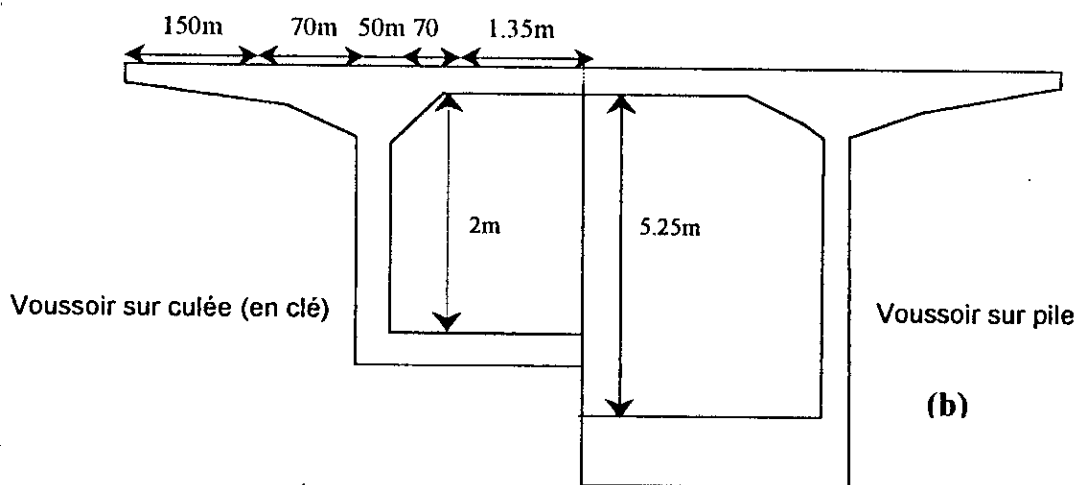
L'ouvrage proposé dans cette annexe est l'un des premiers ponts en Algérie construits par encorbellements successifs. Il est situé à 16Km de Mascara permettant le franchissement de l'oued fergous dans les monts de beni Chougrane.

Le pont en question, comporte une travée centrale de 100m de longueur et deux travées de rive de 58m chacune. La superstructure de largeur totale de 9.50m reposant sur des piles en caissons par l'intermédiaire des appareils d'appuis. La section transversale du tablier est composée d'un caisson unicellulaire à âmes verticales et de hauteur variable de 2m à la clé et sur les culées et 5.40m à la pile.

2 DIMENSIONS GEOMETRIQUES DU PONT



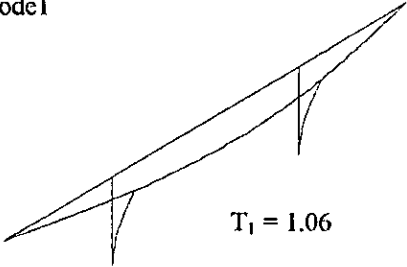
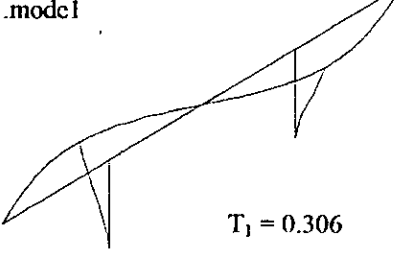
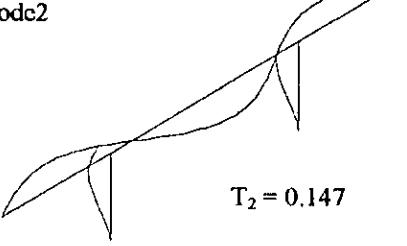
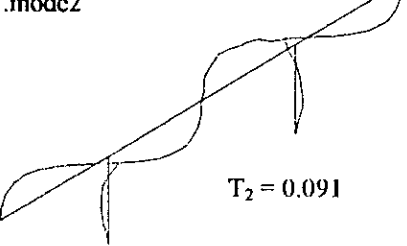
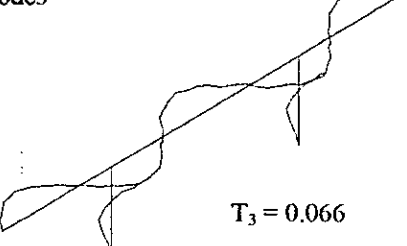
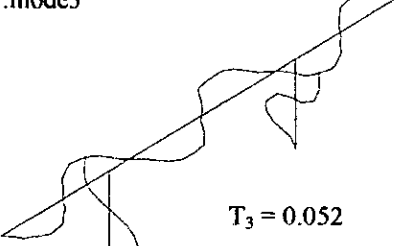
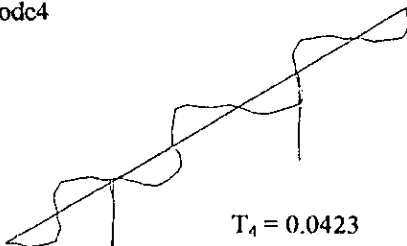
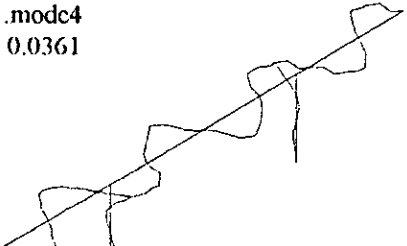
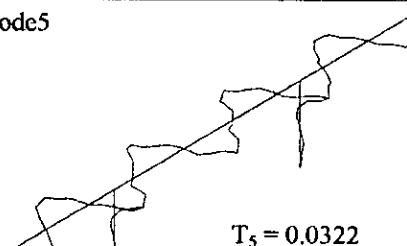
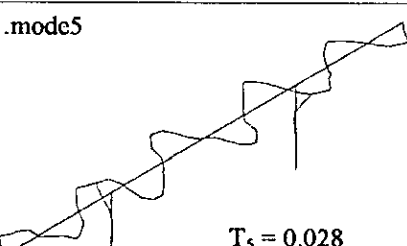
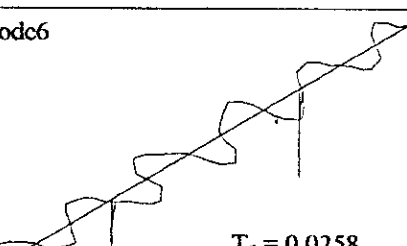
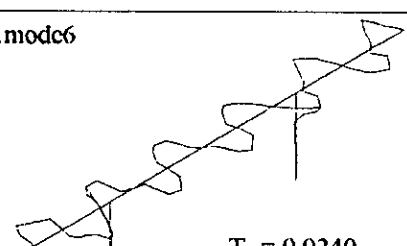
(a)



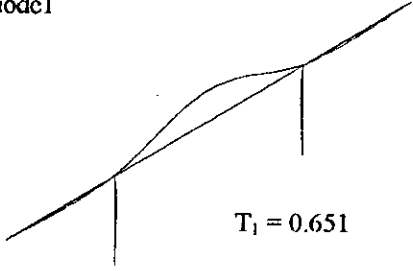
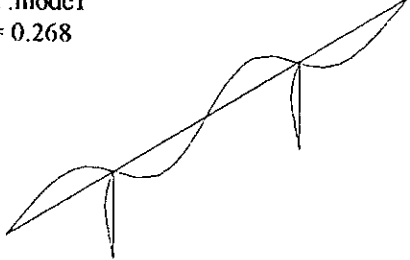
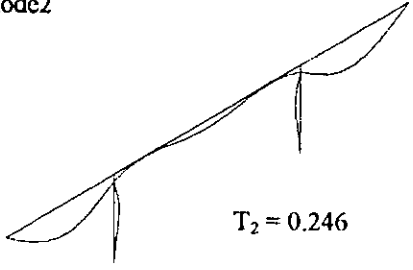
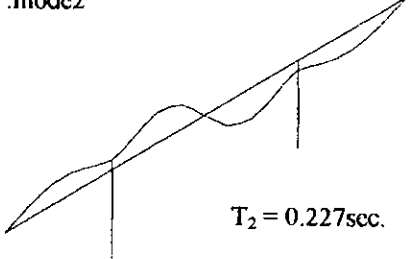
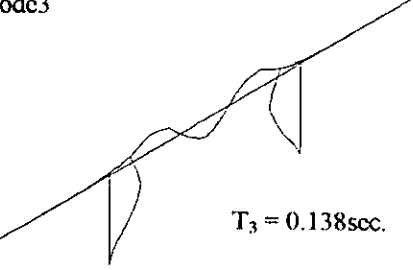
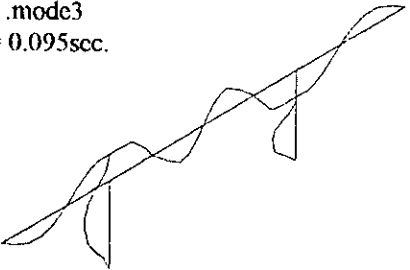
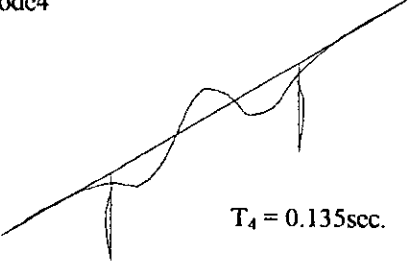
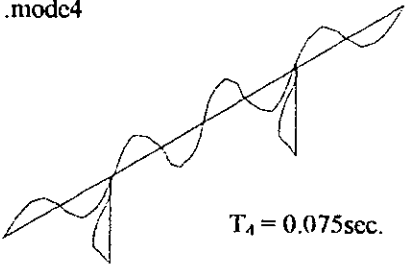
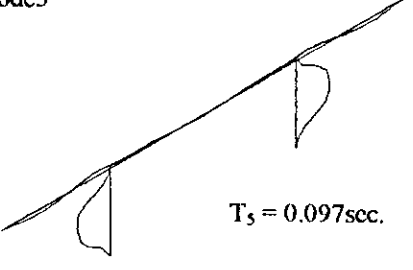
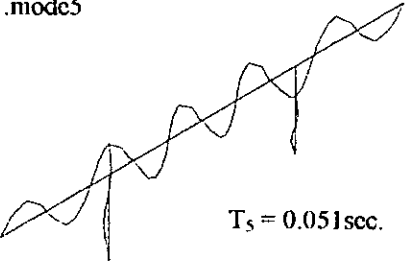
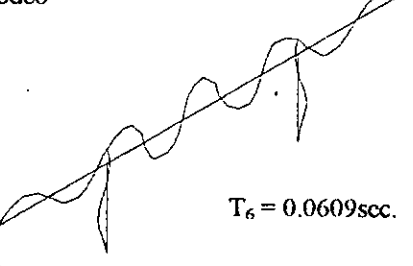
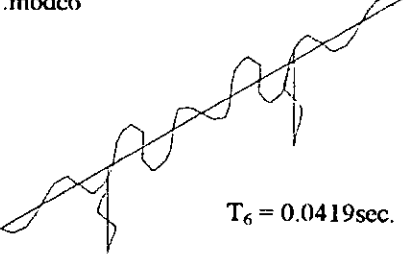
(b)

Fig. I- Pont de Mascara
 (a) Vue du pont en élévation (c) Section transversale du pont

Pont de Fergane en Algérie
Modes symétriques de vibrations latérales Modes antisymétriques de vibrations latérales

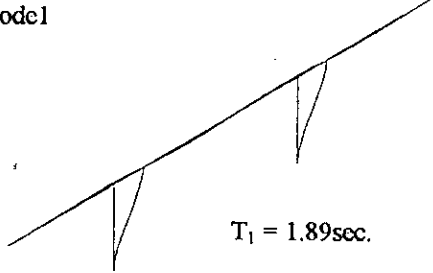
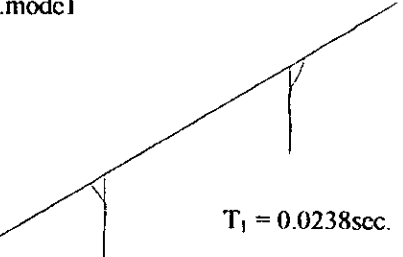
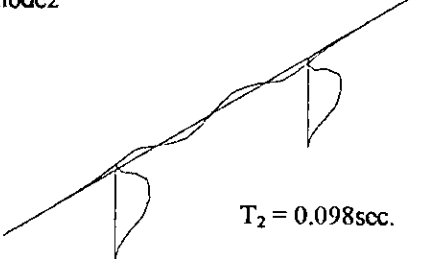
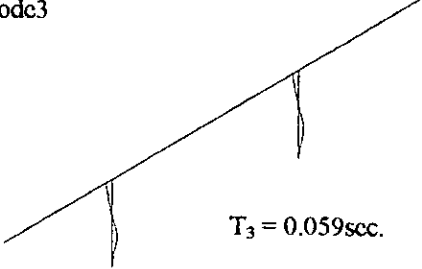
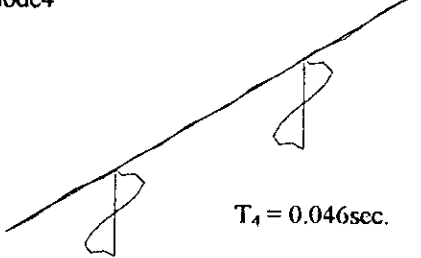
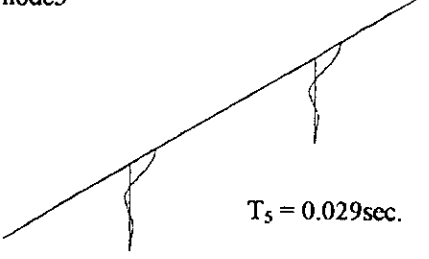
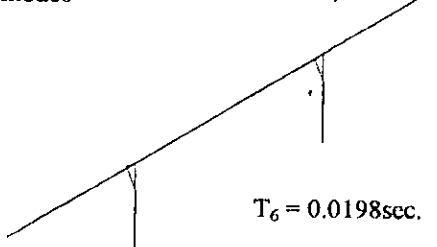
<p>S.mode1</p>  <p>$T_1 = 1.06$</p>	<p>S-A .mode1</p>  <p>$T_1 = 0.306$</p>
<p>S.mode2</p>  <p>$T_2 = 0.147$</p>	<p>S-A .mode2</p>  <p>$T_2 = 0.091$</p>
<p>S.mode3</p>  <p>$T_3 = 0.066$</p>	<p>S-A .mode3</p>  <p>$T_3 = 0.052$</p>
<p>S.mode4</p>  <p>$T_4 = 0.0423$</p>	<p>S-A .mode4</p>  <p>$T_4 = 0.0361$</p>
<p>S.mode5</p>  <p>$T_5 = 0.0322$</p>	<p>S-A .mode5</p>  <p>$T_5 = 0.028$</p>
<p>S.mode6</p>  <p>$T_6 = 0.0258$</p>	<p>S-A .mode6</p>  <p>$T_6 = 0.0240$</p>

Pont de Fergous en Algérie
 Modes symétriques de vibrations verticales Modes antisymétriques de vibrations verticales

<p>S.mode1</p>  <p>$T_1 = 0.651$</p>	<p>S-A .mode1</p> <p>$T_1 = 0.268$</p> 
<p>S.mode2</p>  <p>$T_2 = 0.246$</p>	<p>S-A .mode2</p>  <p>$T_2 = 0.227\text{sec.}$</p>
<p>S.mode3</p>  <p>$T_3 = 0.138\text{sec.}$</p>	<p>S-A .mode3</p> <p>$T_3 = 0.095\text{sec.}$</p> 
<p>S.mode4</p>  <p>$T_4 = 0.135\text{sec.}$</p>	<p>S-A .mode4</p>  <p>$T_4 = 0.075\text{sec.}$</p>
<p>S.mode5</p>  <p>$T_5 = 0.097\text{sec.}$</p>	<p>S-A .mode5</p>  <p>$T_5 = 0.051\text{sec.}$</p>
<p>S.mode6</p>  <p>$T_6 = 0.0609\text{sec.}$</p>	<p>S-A .mode6</p>  <p>$T_6 = 0.0419\text{sec.}$</p>

Pont de Fergous en Algérie

Modes symétriques de vibrations longitudinales Modes antisymétriques de vibrations longitudinales

<p>S.mode1</p>  <p>$T_1 = 1.89\text{sec.}$</p>	<p>S-A .mode1</p>  <p>$T_1 = 0.0238\text{sec.}$</p>
<p>S.mode2</p>  <p>$T_2 = 0.098\text{sec.}$</p>	
<p>S.mode3</p>  <p>$T_3 = 0.059\text{sec.}$</p>	
<p>S.mode4</p>  <p>$T_4 = 0.046\text{sec.}$</p>	
<p>S.mode5</p>  <p>$T_5 = 0.029\text{sec.}$</p>	
<p>S.mode6</p>  <p>$T_6 = 0.0198\text{sec.}$</p>	

Pont de Fergous en Algérie

Modes symétriques de vibrations torsionnelles Modes antisymétriques de vibrations torsionnelles

