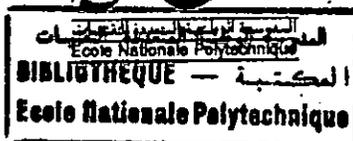


14/07

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



PROJET DE FIN D'ETUDES

*Pour l'obtention diplôme d'ingénieur d'état
en Mécanique*

Thème

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA
SUSPENSION ACTIVE DANS UN
CHARIOT DE TRANSPORT DE MALADE**

Proposé et Dirigé par :
M. Madani

Etudié par :
M. Douidi Abdelhamid
M. Cherbi M^{cd} Tahar

Promotion : Octobre 1997

E.N.P. 10, AVENUE HASSEN BADI - EL-HARRACH - ALGER

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



المدرسة الوطنية للتكنولوجيا
Ecole Nationale Polytechnique
المدرسة الوطنية للتكنولوجيا
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

*Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état
en Mécanique*

Thème

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA
SUSPENSION ACTIVE DANS UN
CHARIOT DE TRANSPORT
DE MALADE**

Proposé et Dirigé par :
M. Madani

Etudié par :
M. Doudi Abdelhamid
M. Cherbi M^{cd} Tahar

Promotion : Octobre 1997

E.N.P. 10, AVENUE HASSEN BADI - EL-HARRACH - ALGER

ملخص: نعرض في هذه الأطروحة تطبيقاً لنظرية التحكم الأمثل لأنظمة المعاليق العادية، الفعالة، وذات الإطلاع المسبق، ومدى حساسية هذه الأخيرة لتغيرات مختلف الوسائط، وقد أثبتت المعاليق ذات الإطلاع المسبق كفاءة معتبرة نسبة إلى العادية والفعالة حسب النتائج المتحصل عليها. نتائج المحاكاة العددية على جهاز الكومبيوتر أثبتت صحة الحقائق النظرية.

ABSTRACT :

An application of stochastic optimal control theory to active suspension system design with preview and to the sensitively to parametrics variations analysis for moving patient carrier, is considered.

The preview control gives more confort to active suspension system, and the study is followed by on sensitivity analysis, by witch we are able to evaluate system performances under parametries variations.

A computer simulations shows clearly the theoretical observations

RÉSUMÉ :

Une application de la théorie de la commande optimale stochastique à la conception des systèmes, de suspension active, de suspension active avec pré-information et à l'analyse de sensibilité aux variations paramétriques pour un chariot de transport du malade est considérée.

La commande pré-informée dote le système de suspension active de plus de confort et réduit les accélérations agissantes sur le malade. Cette étude suivie par une analyse de sensibilité, afin d'évaluer les performances du système vis-à-vis des variations paramétrique.

Les résultats de simulation numérique montent clairement les constations théoriques.

شكرًا

بمناسبة إلقاء هذا العمل نوجهُ شكرنا
إلى الأستاذ هادي عرفانًا بجهوده التي
بذلها لمساعدتنا.

كما نوجه شكرنا إلى كل أساتذة
المدرسة الوطنية متعددة التقنيات
الذين ساهموا في تكويننا.

نوجه شكرنا كذلك إلى إخواننا الطلبة
الذين ساعدونا، نذكر من بينهم:

التجاني زكرياء، شمسة علي، كرام محمد المبرغير

إهداء

إلى أمي العزيزة التي لم تبخل بنصائحها إليّ،
إلى من كان لي خير معين على مواصلة دراستي
والدعي العزيز .

إلى الإخوة الأعزاء : جمال ، محمد ، سليم
إلى جميع اخواني

إلى جدي الغالية : فطومة وابن العم عادل .

إلى كل الأصدقاء والأقارب

إلى كل زملاء الدراسة وأخص بالذكر رفيق الدرب
معتوق عبد الحميد

إلى كل هؤلاء أهدي هذا العمل المتواضع .

عبد الحميد

إلى

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة - BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

إلى أعزما أملك أمي الحبيبة
إلى من كان لي خير مرشد ومعين أبي العزيز.
إلى الإخوة الأكارم: محمد، عبد القادر، بوجمعة
أحمد، محمد العربي.
إلى الأخوات الفضليات
وإلى بقية أفراد العائلة
إلى زملائي في الدراسة
إلى جميع الأصدقاء وأخص بالذكر
عبد العزيز، يحيى، خدة.
إلى كل هؤلاء أهدي هذا العمل المتواضع.

محمد الطاهر

SOMMAIRE

NOTATION

INTRODUCTION GENERALE	2
CHAPITRE I: MODELISATION DU PROBLEME	4
I-1 MODELISATION DU PROFIL DE LA ROUTE	5
I-1-1 Classification des profils de la route	5
I-1-1-a Densité spectrale de puissance	5
I-1-1-b Densité spectrale temporelle	5
I-1-2 Bande de fréquence du profil de la route	6
I-1-3 Perturbation de type bruit blanc intégré	7
I-1-4 Perturbation de type bruit blanc filtré	8
I-2 MODELISATION DU SYSTEME	9
I-2-1 Equation de Lagrange	9
I-2-2 Equations différentielles du mouvement	11
CHAPITRE II: COMMANDE OPTIMALE DE LA SUSPENSION ACTIVE	18
II-1 INTRODUCTION	19
II-2 CRITERE DE PERFORMANCE	19
II-3 LES FACTEURS DE PONDERATION	21
II-4 L'OPTIMISATION DU SYSTEME	22
II-5 REALISATION PHYSIQUE DU SYSTEME	23
CHAPITRE III: COMMANDE PRE-INFORMEE DE SUSPENSION ACTIVE	26
III-1 INTRODUCTION	27
III-2 COMMANDE PRE-INFORMEE A HORIZON INFINI	27
III-3 COMMANDE PRE-INFORMEE A HORIZON FINI	29

III-4 CONCLUSION

30

CHAPITRE IV: ANALYSE DE SENSIBILITE DE LA COMMANDE

PRE-INFORMMEE

32

IV-1 INTRODUCTION

33

IV-2 DEFINITION DES FONCTIONS DE SENSIBILITE

33

IV-2-1 Fonction de sensibilité standard du 1^{er} ordre

33

IV-2-2 Fonction de sensibilité standard du 2^{ème} ordre

34

IV-2-3 Fonction de pourcentage de sensibilité du 1^{er} ordre

34

IV-2-4 Fonction de pourcentage de sensibilité du 2^{ème} ordre

35

IV-3 MESURE GENERALE DE LA SENSIBILITE

35

IV-4 DETERMINATION DU CRITERE DE SENSIBILITE

35

IV-5 LA NOUVELLE FORMULATION MATRICIELLE DU PROBLEME

38

IV-6 REFORMULATION DU CRITERE DE PERFORMANCE

39

IV-7 ELABORATION DE LA SOLUTION OPTIMALE

39

IV-8 CONCLUSION

43

CHAPITRE V: SIMULATION NUMERIQUE

44

V-1 INTRODUCTION

45

V-2 RESULTATS DES SIMULATIONS NUMERIQUES

45

V-2-1 Le système de suspension active

46

V-2-2 Le système de suspension active avec pré-information

53

V-2-3 L'analyse de sensibilité au variation paramétrique

59

V-3. Conclusion

67

BIBLIOGRAPHIE

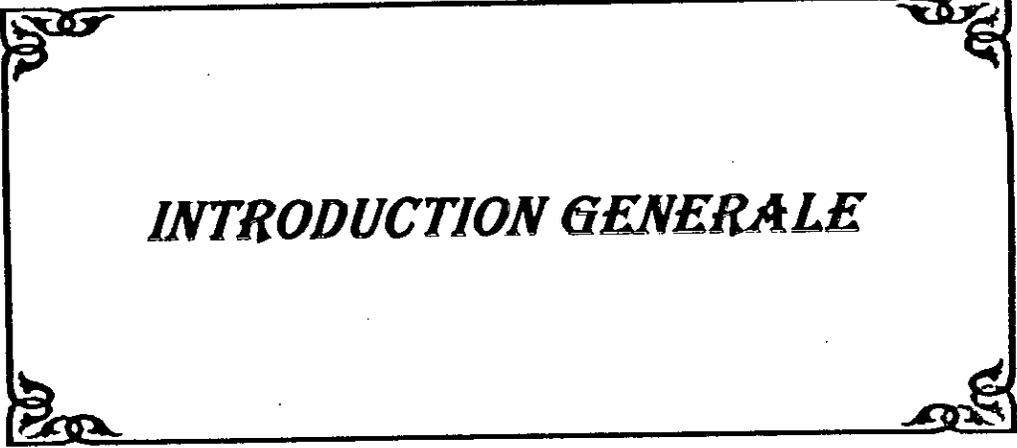
ANNEXE A: MODELISATION DU SYSTEME DE SUSPENSION PASSIVE

NOTATIONS



- $\Phi(\Omega)$: Densité spectrale de puissance.
- Ω : Fréquence spatiale
- R_c : Coefficient de rugosité de la surface de la route.
- ω : Fréquence temporelle.
- σ^2 : Variance des irrégularités de la route.
- M : Moitié de la masse du corps rigide et du malade.
- J : Moitié du moment d'inertie.
- M_1 : Masse de la roue avant.
- M_3 : Masse de la roue arrière.
- h_1 : Coefficient de raideur de pneu avant du brancard.
- h_3 : Coefficient de raideur de pneu arrière du brancard.
- X_a : Excitation de la route à l'avant.
- X_b : Excitation de la route à l'arrière.
- X_1 : Déplacement vertical du centre de gravité de la roue avant.
- X_3 : Déplacement vertical du centre de gravité à la roue arrière.
- Z : Déplacement vertical du centre de gravité de partie supérieure avec le malade.
- β : Angle de tangage.
- d_1 : Distance entre le centre de gravité du malade et l'axe vertical de la roue avant.
- d_2 : Distance entre le centre de gravité du malade et l'axe vertical de la roue arrière.
- r_1, r_3 et q_1 à q_4 : Facteurs de pondération
- K : Gain de stabilité.
- τ : Temps de pré-information.
- S : La fonction de sensibilité
- $y(t, \lambda)$: La fonction d'anticipation
- k_1, k_3 : Raideurs des ressorts
- a_1, a_3 : Coefficients d'amortissement.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique



INTRODUCTION GENERALE

Beaucoup de malades nécessitent de grandes précautions lors de leur transport de l'ambulance vers l'hôpital ou déplacement à l'intérieur d'un hôpital . A cet effet, les chariots roulant destinés à cette tâche ont été énormément perfectionnés durant cette décennie, pour faire face aux vibrations provenant du sol. Ces perfectionnements ont touchés surtout les systèmes de suspension des chariots .

Les fonctions principales d'un système de suspension consistent à doter le chariot d'un support, d'une stabilité, et d'un contrôle directionnel durant les manoeuvres d'utilisation et à procurer une isolation effective des perturbations dues aux déplacements. Ces différentes tâches se traduisent par des besoins de conception contradictoire.

Le contrôle directionnel et la stabilité nécessitent une suspension qui ne doit être ni trop dure ni trop molle.

L'insensibilité aux charges externes nécessite une suspension dure, alors que le confort de conduite nécessite une suspension molle.

Avec les nouveaux développements, dans les domaines de la micro-électronique et de la robotique, il y a eu un regain d'intérêt pour le concept du contrôle par suspension active.

Les suspensions actives ouvrent la possibilité d'être adaptées à la qualité de la surface de la route, à la vitesse du véhicule et aux différentes nécessités liées à la sécurité et au confort.

Durant les dernières années, le sujet a été repris par *CRAIGHEAD* [1] *GOODALL* et *KORTUM* [2], et plus récemment par *THOMPSON* et *DAVIS* [3]. Cependant la plupart des recherches de techniques d'optimisation, des stratégies et analyse de contrôle et de conception des différents systèmes actifs ont été basés sur le modèle de véhicule 1/4.

Bien que le modèle de véhicule 1/4 se soit révélé utile pour concevoir des stratégies de contrôle, il ne reflète pas le rapport existant entre les différents degrés de liberté, exemple entre l'inclinaison et le rebond et le roulis.

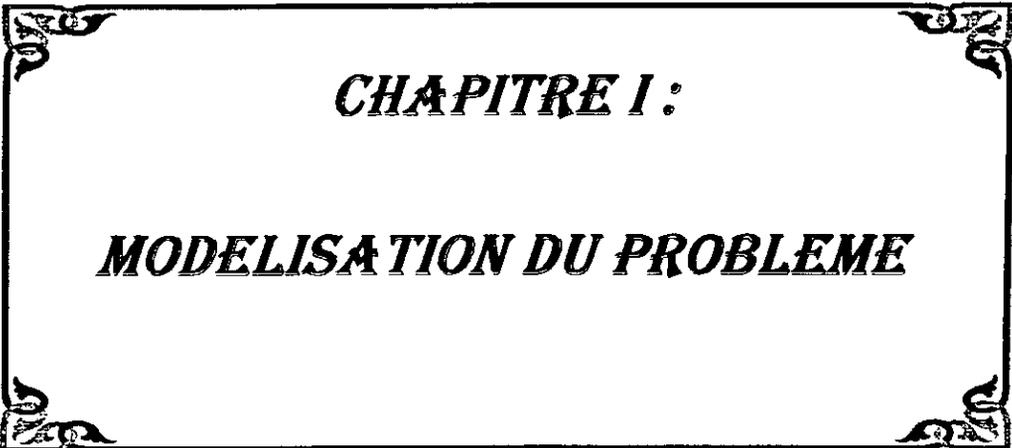
Dans notre modèle qui représente un brancard dont la largeur est très petite par rapport à son longueur, on peut négliger donc le mouvement de roulis, pour cela, il suffit d'étudier le modèle considéré en deux dimensions.

De plus le système réel subit des variations paramétriques, donc notre projet incorporé par une étude de la sensibilité aux variations des paramètres du système par exemple, la variation de la masse et des raideurs des ressorts...etc.

Ce mémoire est organisé en cinq chapitres et une annexe. Le but du premier chapitre est la formulation matricielle du système. Cette dernière est utilisée en deuxième chapitre pour optimiser le système de suspension active.

Dans le troisième chapitre, la technique de commande peut faire appel à la commande pré-informée. A partir de cette dernière, on va étudier la sensibilité du système aux variations des paramètres au quatrième chapitre.

Le but du cinquième chapitre est de faire une simulation numérique des résultats obtenus aux chapitres précédants. Finalement une conclusion générale résume les constatations et résultats de notre étude, suivie par une formulation de la suspension passive d'écrite dans l'annexe A , afin de faire une comparaison avec l'étude précédente.



CHAPITRE I :

MODELISATION DU PROBLEME

Le modèle utilisé dans notre étude, donné dans la figure (1), représente une moitié d'un brancard.

I-1 MODELISATION DU PROFIL DE LA ROUTE

Le profil de la route est une surface bien définie, mais son microprofil ne l'est nullement pas, ce dernier comporte des irrégularités aléatoires qui provoquent des forces aléatoires agissant sur les roues de véhicule.

Pour ce but, on parlera de la densité spectrale de puissance qui peut classer ces profils de la route, et on va voir sa variation en fonction de la vitesse de déplacement du brancard.

I-1.1 Classification des profils de la route

I-1.1.a La densité spectrale de puissance

On considère que les profils de la route comme des fonctions simples d'un processus aléatoire stationnaire [4]. Donc on peut les classer au moyen de la densité spectrale de puissance.

Dans le domaine fréquentiel, la densité spectrale de puissance s'écrit sous la forme :

$$\Phi(\Omega) = \frac{R_c}{\Omega^N} \quad (1.1)$$

où,

Ω représente la fréquence spatiale en rad /m, N est une constante.

R_c : Coefficient de rugosité de la surface de la route.

I-1.1.b Densité spectrale temporelle

Ce modèle de densité exige le travail par une fréquence temporelle d'unité [cyc/sec].

On suppose que le brancard se déplace à une vitesse constante V , soit x la coordonnée sur la route à l'instant t

L'application d'équation du mouvement donne : $x = Vt$, où t est le temps de déplacement, ce qui donne :

$$\omega \text{ [cyc / sec]} = \Omega \text{ [cyc / m] } V \text{ [m / sec]}$$

donc

$$\Phi(\omega) \text{ [m}^2\text{/cyc / sec]} = \Phi(\Omega) \text{ [m}^2\text{/cyc / m]} \frac{1}{V} \text{ [1/m / sec]}$$

I.1.2 Bande de fréquence de profil de la route

La densité spectrale donnée dans l'équation (1.1) n'est pas valable pour les très basses fréquences. Quelques modifications du spectre pour les faibles fréquences ont été proposées. Pour celle - là une fréquence limite Ω_0 est introduite de telle sorte que la densité spectrale de puissance soit constante pour ($\Omega < \Omega_0$).

D'après [5], l'équation (I -1) peut être remplacée par :

$$\Phi(\Omega) = \frac{R_c}{\alpha^2 + \Omega^2} \quad (1.2)$$

Dans laquelle α est une constante indique que les déplacements restent finis pour les faibles valeurs de fréquence spatiale Ω .

Dans le domaine spatial, la densité spectrale est exprimée par

$$\Phi(\Omega) = \frac{R_c \sigma^2}{\pi} \cdot \frac{1}{R_c^2 + \Omega^2} \quad (1.3)$$

où,

σ^2 : La variance des irrégularités de la route .

Et dans le domaine temporel , l'équation (1.3) est réécrite comme suit :

$$\Phi(\omega) = \frac{R_c v \sigma^2}{\pi} \frac{1}{R_c^2 v^2 + \omega^2} \quad (1.4)$$

où,

ω : est la fréquence temporelle .

v : la vitesse de déplacement du brancard .

En pratique, les systèmes de suspension filtrent les rugosités de la route qui ont des très faibles fréquences.

I-1.3 Perturbation de type bruit blanc intégré

Pour un système linéaire de perturbation de bruit blanc intégré, la densité spectrale s'écrit sous la forme suivante [6] :

$$\Phi(\omega) = \frac{R_c v}{\omega^2} \quad (1.5)$$

Dans ce cas, la valeur quadratique moyenne de n'importe quel signal de sortie du système est reliée à la valeur de l'intégrale des carrés du signal de cette même sortie résultant d'une entrée échelon unité.

Donc, si $y_r(t)$ est la sortie d'une excitation aléatoire et $y_s(t)$ est la sortie correspondant a une entrée échelon unité , la valeur quadratique moyenne de la réponse $y_r(t)$ sera [6] :

$$\langle y_r^2(t) \rangle = R_c \cdot v \int_0^{\infty} y_s^2(t) dt \quad (1.6)$$

L'équation (1.6) est valable uniquement si l'intégrale du membre de droite converge . Cette condition exige que la réponse transitoire $y_r(t)$ décroisse asymptotiquement vers zéro , ceci est le cas des forces, des accélérations, des vitesses et des déplacement relatifs des systèmes de suspension [6] .

De plus , l'équation (1-6) montre que , si le système est optimal pour une entrée échelon unité , il est aussi pour une entrée aléatoire de densité spectral de la forme (1.5) [6].

I-1.4 Perturbation de type bruit blanc filtré

On suppose que la perturbation $h(t)$ du profil de la route n'est pas un bruit blanc, mais un processus Gaussien stationnaire . Elle présente un problème pour l'application de la technique de commande optimale.

Pour éviter cette difficulté, on utilise un filtre.

La densité spectrale du processus Gaussien stationnaire (dans le domaine temporel) est donnée par la relation (1.4) .

Le processus $h(t)$ de densité spectral (1-4) est un bruit blanc filtré obtenu à l'aide d'un filtre de la forme suivante [7] :

$$\dot{h}(t) = A_{\omega} h(t) + I \xi(t) \quad (1.7)$$

où,

$\xi(t)$: est un bruit blanc (m/s)

I : la matrice identité

la matrice A_{ω} est donnée par :

$$A_{\omega} = -2 R_C v I$$

I.2 MODELISATION DU SYSTEME

Le modèle du système considéré représente la moitié d'un brancard dans chacun des deux cotés sont supposés dans le plan central de symétrie . D'où M est la moitié de la masse du corps rigide et du malade, et J la moitié du moment d'inertie de partie supérieure du brancard par rapport au centre de gravité. Les roues avant et arrière sont représentées, respectivement par des anti-ressorts: Les masses M_1 et M_3 , qui sont connectées à la masse M oscillante à travers l'induction idéale.

On suppose que les pneus sont représentés par des ressorts linéaires de raideurs h_1 (avant) et h_3 (arrière), et ils sont en contact permanent avec le sol.

Sous les composantes verticales de l'excitation de la route x_a (à l'avant) et x_b (à l'arrière), les masses M_1 et M_3 peuvent se déplacer seulement sur l'axe verticale par x_1 et x_3 , respectivement de la position initiale d'équilibre.

La masse M peut résister aux vibrations verticales et au mouvement de tangage , chacun d'eux est décrit par les déplacements verticaux x_2 et x_4 de partie supérieure, et l'angle de tangage β de position d'équilibre horizontale.

I.2.1 Equation de Lagrange

L'équation de Lagrange s'écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{P}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial P_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (1.8)$$

avec:

T : énergie cinétique

V : énergie potentielle

Q : force généralisée

D'où,

L représente le Lagrangien :

$$L = T - V$$

Puisque V est indépendante de P_i donc :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{P}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{P}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{P}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{P}_i}$$

Et comme T est indépendante du déplacement P_i :

$$\frac{\partial L}{\partial P_i} = \frac{\partial T}{\partial P_i} - \frac{\partial V}{\partial P_i} = -\frac{\partial V}{\partial P_i}$$

D'où la réduction de l'équation (1.8) à :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{P}_i} \right] + \frac{\partial V}{\partial P_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Energie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_3 \dot{x}_3^2 + \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\beta}^2$$

Energie potentielle :

$$V = \frac{1}{2} h_1 (x_a - x_1)^2 + \frac{1}{2} h_3 (x_b - x_3)^2$$

Forces généralisées :

$$Q_1 = -U_1$$

$$Q_2 = -U_3$$

$$Q_3 = U_1 + U_3$$

$$Q_4 = d_1 U_1 - d_3 U_3$$

1.2.2 Equations différentielles du mouvement

Pour un angle de tangage faible ($\beta \cong \text{tg } \beta$) : les déplacements de la masse M , x_2 à l'avant, et x_4 à l'arrière, sont donnés en fonction de z et β comme suit :

$$x_2 = z + d_1 \beta \tag{1.9}$$

$$x_4 = z - d_2 \beta$$

En appliquant les équations de Lagrange :

- Pour $P_1 = x_1$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{P}_1} = M_1 \dot{x}_1 \quad , \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{P}_1} \right] = M_1 \ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial P_1} = h_1 (x_a - x_1)$$

$$Q_1 = -U_1$$

l'équation de Lagrange devient :

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{h_1}{M_1} (x_a(t) - x_1(t)) - \frac{1}{M_1} U_1(t) \quad (1.10)$$

- Pour $P_2 = x_3$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{P}_2} = M_3 \dot{x}_3, \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{P}_2} \right] = M_3 \ddot{x}_3$$

$$\frac{\partial V}{\partial P_2} = h_3 (x_b - x_3)$$

$$Q_2 = -U_3$$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\ddot{x}_3(t) = \frac{h_3}{M_3} (x_b(t) - x_3(t)) - \frac{1}{M_3} U_3(t) \quad (1.11)$$

- Pour $P_3 = z$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{P}_3} = M \dot{z}, \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{P}_3} \right] = M \ddot{z}$$

$$\frac{\partial V}{\partial P_3} = 0$$

$$Q_3 = U_1 + U_3$$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{M} U_1(t) + \frac{1}{M} U_3(t) \quad (1.12)$$

- Pour $P_4 = \beta$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} = J \dot{\beta} \quad , \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} \right] = J \ddot{\beta}$$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\ddot{\beta}(t) = \frac{d_1}{J} U_1(t) - \frac{d_2}{J} U_3(t) \quad (1.13)$$

L'application des équations (1.9) à (1.13) donne :

$$\ddot{x}_2(t) = \left(\frac{1}{M} + \frac{d_1^2}{J} \right) U_1(t) + \left(\frac{1}{M} - \frac{d_1 d_2}{J} \right) U_3(t) \quad (1.14)$$

$$\ddot{x}_4(t) = \left(\frac{1}{M} - \frac{d_1 d_2}{J} \right) U_1(t) + \left(\frac{1}{M} + \frac{d_2^2}{J} \right) U_3(t) \quad (1.15)$$

D'où les équations différentielles du mouvement :

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{h_1}{M_1} (x_a(t) - x_1(t)) - \frac{1}{M_1} U_1(t)$$

$$\ddot{x}_3(t) = \frac{h_3}{M_3} (x_b(t) - x_3(t)) - \frac{1}{M_3} U_3(t)$$

$$\ddot{x}_2(t) = \left(\frac{1}{M} + \frac{d_1^2}{J} \right) U_1(t) + \left(\frac{1}{M} - \frac{d_1 d_2}{J} \right) U_3(t)$$

$$\ddot{x}_4(t) = \left(\frac{1}{M} - \frac{d_1 d_2}{J} \right) U_1(t) + \left(\frac{1}{M} + \frac{d_2^2}{J} \right) U_3(t)$$

La forme matricielle de ces dernières équations s'écrit sous la forme :

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B U(t) + D Z(t) \quad (1.16)$$

Cette dernière équation a fait intervenir les relations suivantes :

$$x_5 = \dot{x}_1, \quad x_6 = \dot{x}_2, \quad x_7 = \dot{x}_3, \quad x_8 = \dot{x}_4$$

où,

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T$$

et

$$U(t) = \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_3(t) \end{bmatrix} ; \quad Z(t) = \begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \end{bmatrix}$$

avec

$X(t)$: Vecteur d'état du système

$U(t)$: Vecteur de commande

$Z(t)$: Vecteur de perturbation

Les matrices A, B et D sont données par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{h_1}{M_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{h_3}{M_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{M_1} & 0 \\ \left(\frac{1}{M_1} + \frac{d_1^2}{J}\right) & \left(\frac{1}{M} - \frac{d_1 d_2}{J}\right) \\ 0 & -\frac{1}{M_3} \\ \left(\frac{1}{M} - \frac{d_1 d_2}{J}\right) & \left(\frac{1}{M} + \frac{d_2^2}{J}\right) \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{h_1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{M_3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On définit un autre vecteur $y(t)$, qui s'écrit sous la forme :

$$Y(t) = C X(t) \tag{1.17}$$

avec :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce dernier vecteur représente le vecteur de sortie :

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \\ y_3(t) = x_3(t) \\ y_4(t) = x_4(t) \end{bmatrix}$$

Pour des quantités: M_1 , M_3 , M , J , h_1 , h_3 constantes, l'ensemble des équations (1.16) et (1.17) représente le modèle d'un système linéaire invariant dans le temps.

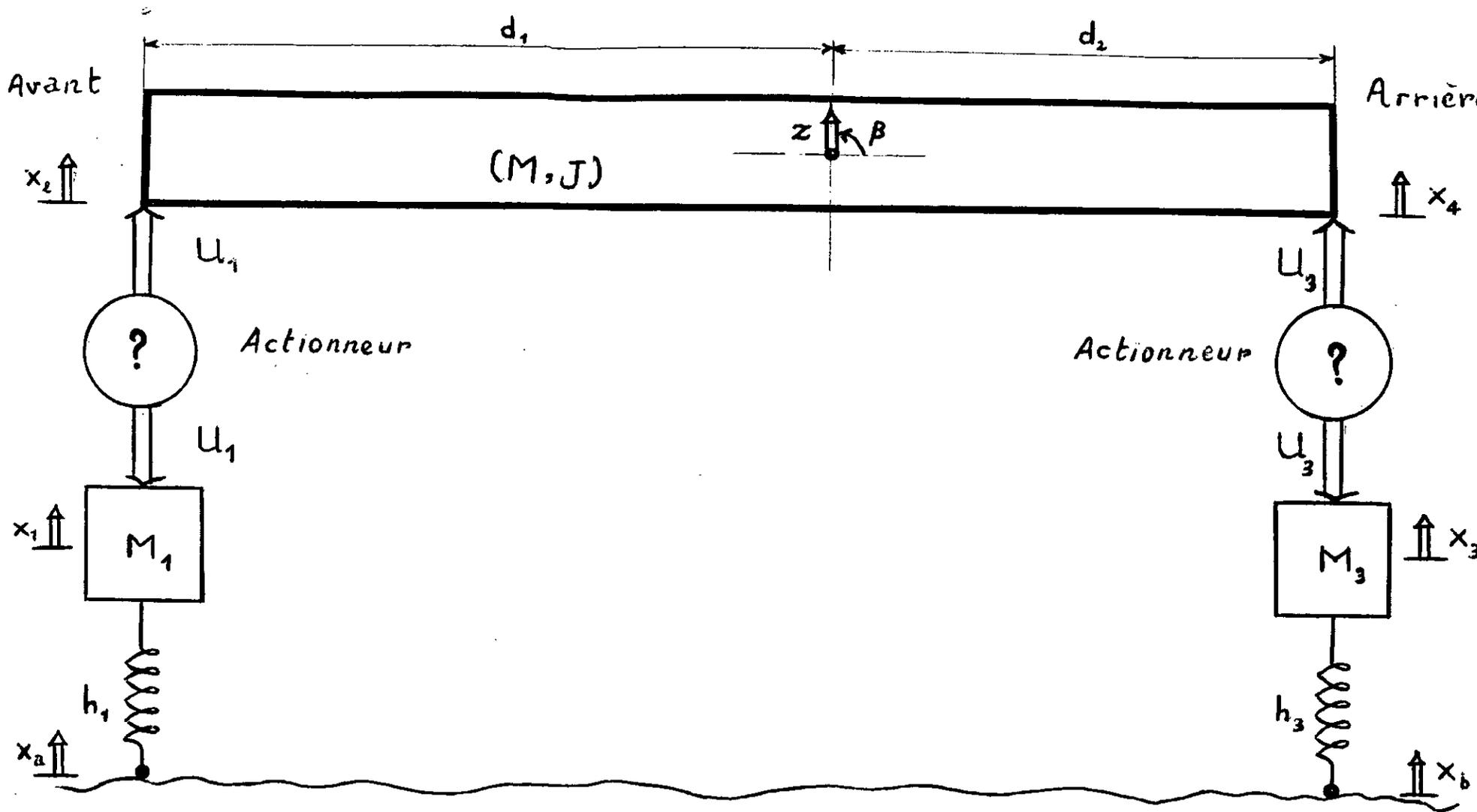
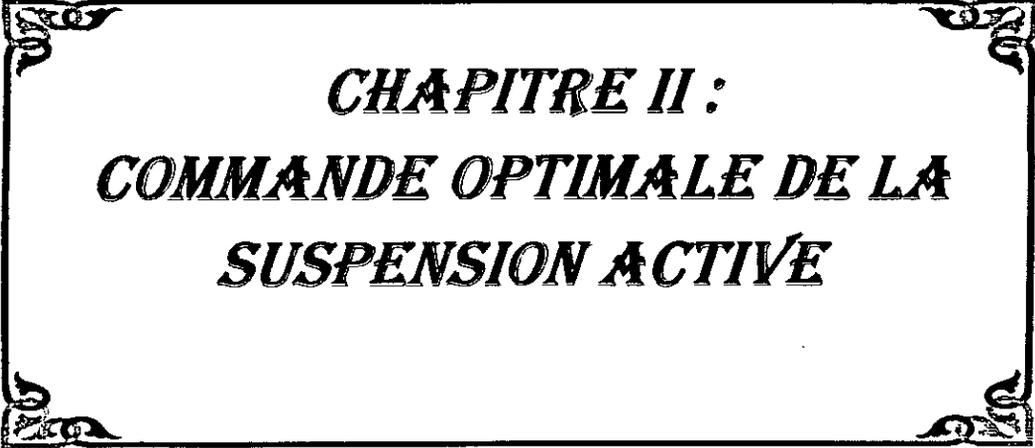


Fig 1 : Modélisation du système d'une moitié du bancard doté d'une suspension active.



CHAPITRE II :
COMMANDE OPTIMALE DE LA
SUSPENSION ACTIVE

II-1 INTRODUCTION

Pour avoir un bon confort, il faut diminuer au maximum l'intensité des vibrations, donc les accélérations, ce qui nécessite une liaison très molle, mais dans ce cas les déplacements deviennent très importants.

Par contre, lorsque la liaison est très rigide, celle-ci réduit les déplacements, mais les accélérations augmentent.

Pour cela, nous serons obligés de trouver une solution qui fait un compromis entre les deux exigences contradictoires ci-dessus .

II-2 CRITÈRE DE PERFORMANCE

Lors de la conception d'une suspension active pour un brancard, le système de suspension est optimisé quand les normes concernant le confort du malade et la tenue de la route sont respectés.

Le critère de performance qui peut être adopté dans ce problème est le suivant :

$$\begin{aligned}
 J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [q_1(x_1(t) - x_a(t))^2 + q_2(x_1(t) - x_2(t))^2 \\
 + q_3(x_3(t) - x_b(t))^2 + q_4(x_3(t) - x_4(t)) \\
 + r_1 u_1^2(t) + r_3 u_3^2(t)] dt \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

où

$(x_1(t) - x_a(t)), (x_3(t) - x_b(t))$ représentent deux indications sur le décollement de la roue du sol .

$(x_2(t) - x_1(t)), (x_4(t) - x_3(t))$ renseignent sur l'espace physique requis pour l'excursion de la roue.

r_1 , r_3 et q_1 à q_4 sont des facteurs de pondération.

Le dernier critère peut être réécrit sous la forme matricielle suivante :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [(X(t) - r(t))^T Q (X(t) - r(t)) + U^T(t) R U(t)] dt \quad (2.2)$$

avec :

$$r(t) = \begin{bmatrix} x_a \\ x_a \\ x_b \\ x_b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

qui peut être réécrit :

$$r(t) = N Z(t) \quad (2.3)$$

où
$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_3 \end{bmatrix}$$

et :

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et la matrice Q s'écrit sous la forme :

$$Q = C^T Q_1 C$$

avec : $Q_1 = \begin{bmatrix} q_1 + q_2 & -q_2 & 0 & 0 \\ -q_2 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 + q_4 & -q_4 \\ 0 & 0 & -q_4 & q_4 \end{bmatrix}$

II-3 LES FACTEURS DE PONDÉRATION

Les facteurs de pondération q_2 et q_4 sont pris égaux à l'unité [8]. Les autres facteurs de pondération q_1 et q_3 sont donnés par :

$$q_1 = \left(\frac{\delta_{of}}{\delta_{uf}} \right)^2, q_3 = \left(\frac{\delta_{or}}{\delta_{ur}} \right)^2 \quad (2.4)$$

où

δ_{of} , δ_{or} sont, respectivement les limites admissibles des espaces de fonctionnement avant, et arrière, à partir de la position d'équilibre en charge.

et

δ_{tf} , δ_{tr} sont, respectivement les décollements statiques avant et arrière.

Les facteurs de pondération r_1 , r_3 sont choisis empiriquement de telle sorte à minimiser la durée des pics transitoires des forces de commande u_1 et u_3 , et d'amortir les accélérations du châssis.

II-4 L'OPTIMISATION DU SYSTÈME

Sous les transformations suivantes [9]:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= x_1 - x_a & \hat{x}_2 &= x_2 - x_a & \hat{x}_3 &= x_3 - x_b \\ \hat{x}_4 &= x_4 - x_b & \hat{x}_5 &= x_5 & \hat{x}_6 &= x_6 \\ \hat{x}_7 &= x_7 & \hat{x}_8 &= x_8 \end{aligned}$$

Les équations (1-16), (1-17) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}(t) = A \hat{X}(t) + B u(t) \\ \hat{Y}(t) = C \hat{X}(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

avec $\hat{X}(0) = -(1,1,1,1,0,0,0,0)^T$

où \hat{X} , \hat{Y} désignent respectivement, le nouveau vecteur d'état et le nouveau vecteur de sortie.

Nous remarquons que le vecteur de perturbation $Z(t)$ a été éliminé, et le problème est réduit à une étude standard de régulation avec des conditions initiales. Le critère de performance devient donc :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\hat{X}^T Q \hat{X} + U^T R U] dt \quad (2.6)$$

La solution au problème posé, (2.5),(2.6) existe si la paire de matrice [A,B] est controlable, et la paire [A,Q] est observable . Elle est donnée par [10] :

$$U_{opt}(t) = -R^{-1} B^T K \hat{X}(t) \quad (2.7)$$

où : $K[8 \times 8]$ est la matrice symétrique définie positive, solution de l'équation algébrique de Riccati suivante :

$$K A + A^T K - K B R^{-1} B^T K + Q = 0 \quad (2.8)$$

II-5 RÉALISATION PHYSIQUE DU SYSTÈME

On suppose que le système est commandable, alors la loi de commande peut s'écrire par :

$$U_{opt} = \begin{bmatrix} U_{opt_1} \\ U_{opt_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} & h_{16} & h_{17} & h_{18} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & h_{35} & h_{36} & h_{37} & h_{38} \end{bmatrix} \hat{X} \quad (2.9)$$

qui est la même que :

$$\begin{aligned} U_{opt_1} &= h_{11} \hat{x}_1 + h_{12} \hat{x}_2 + h_{13} \hat{x}_3 + h_{14} \hat{x}_4 + h_{15} \hat{x}_5 + h_{16} \hat{x}_6 + h_{17} \hat{x}_7 + h_{18} \hat{x}_8 \\ U_{opt_3} &= h_{31} \hat{x}_1 + h_{32} \hat{x}_2 + h_{33} \hat{x}_3 + h_{34} \hat{x}_4 + h_{35} \hat{x}_5 + h_{36} \hat{x}_6 + h_{37} \hat{x}_7 + h_{38} \hat{x}_8 \end{aligned}$$

Ces deux dernières équations peuvent être réarrangées sous ces nouvelles formes :

$$\begin{aligned} U_{opt_1} &= h_{11}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) + h_{15}(\hat{x}_5 - \hat{x}_6) + (h_{11} + h_{12})\hat{x}_2 + (h_{15} + h_{16})\hat{x}_6 + \\ & h_{13}(\hat{x}_3 - \hat{x}_4) + (h_{13} + h_{14})\hat{x}_4 + (h_{17} + h_{18})\hat{x}_8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{opt_3} &= h_{31}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) + h_{35}(\hat{x}_5 - \hat{x}_6) + (h_{31} + h_{32})\hat{x}_2 + (h_{35} + h_{36})\hat{x}_6 + \\ & h_{33}(\hat{x}_3 - \hat{x}_4) + h_{37}(\hat{x}_7 - \hat{x}_8) + (h_{33} + h_{34})\hat{x}_4 + (h_{37} + h_{38})\hat{x}_8 \end{aligned}$$

En remplaçant \hat{x}_1 à \hat{x}_4 par leurs valeurs on obtient :

$$U_{opt_1} = h_{11}(x_1 - x_2) + h_{15}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (h_{11} + h_{12})(x_2 - x_a) + (h_{15} + h_{16})\dot{x}_2 + h_{13}(x_3 - x_4) + h_{17}(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + (h_{13} + h_{14})(x_4 - x_b) + (h_{17} + h_{18})\dot{x}_4 \quad (\text{II} - 10)$$

$$U_{opt_3} = h_{31}(x_1 - x_2) + h_{35}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (h_{31} + h_{32})(x_2 - x_a) + (h_{35} + h_{36})\dot{x}_2 + h_{33}(x_3 - x_4) + h_{37}(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + (h_{33} + h_{34})(x_4 - x_b) + (h_{37} + h_{38})\dot{x}_4 \quad (\text{II} - 11)$$

D'après ces deux dernières équations, on remarque que les forces de commande peuvent être représentées par deux ressorts conventionnels de rigidité $S_1 = h_{11} + h_{31}$ (avant) et $S_3 = h_{13} + h_{33}$ (arrière), en parallèle avec deux amortisseurs $a_1 = h_{15} + h_{35}$ (avant) et $a_3 = h_{17} + h_{37}$, et un excitateur générant les deux forces suivantes :

$$f_1 = (h_{11} + h_{12})(x_2 - x_a) + (h_{15} + h_{16})\dot{x}_2 + (h_{13} + h_{14})(x_4 - x_b) + (h_{17} + h_{18})\dot{x}_4 \quad (\text{II} - 12)$$

$$f_3 = (h_{31} + h_{32})(x_2 - x_a) + (h_{35} + h_{36})\dot{x}_2 + (h_{33} + h_{34})(x_4 - x_b) + (h_{37} + h_{38})\dot{x}_4 \quad (\text{II} - 13)$$

Donc : La structure du système et de commande est donnée par la figue(1)

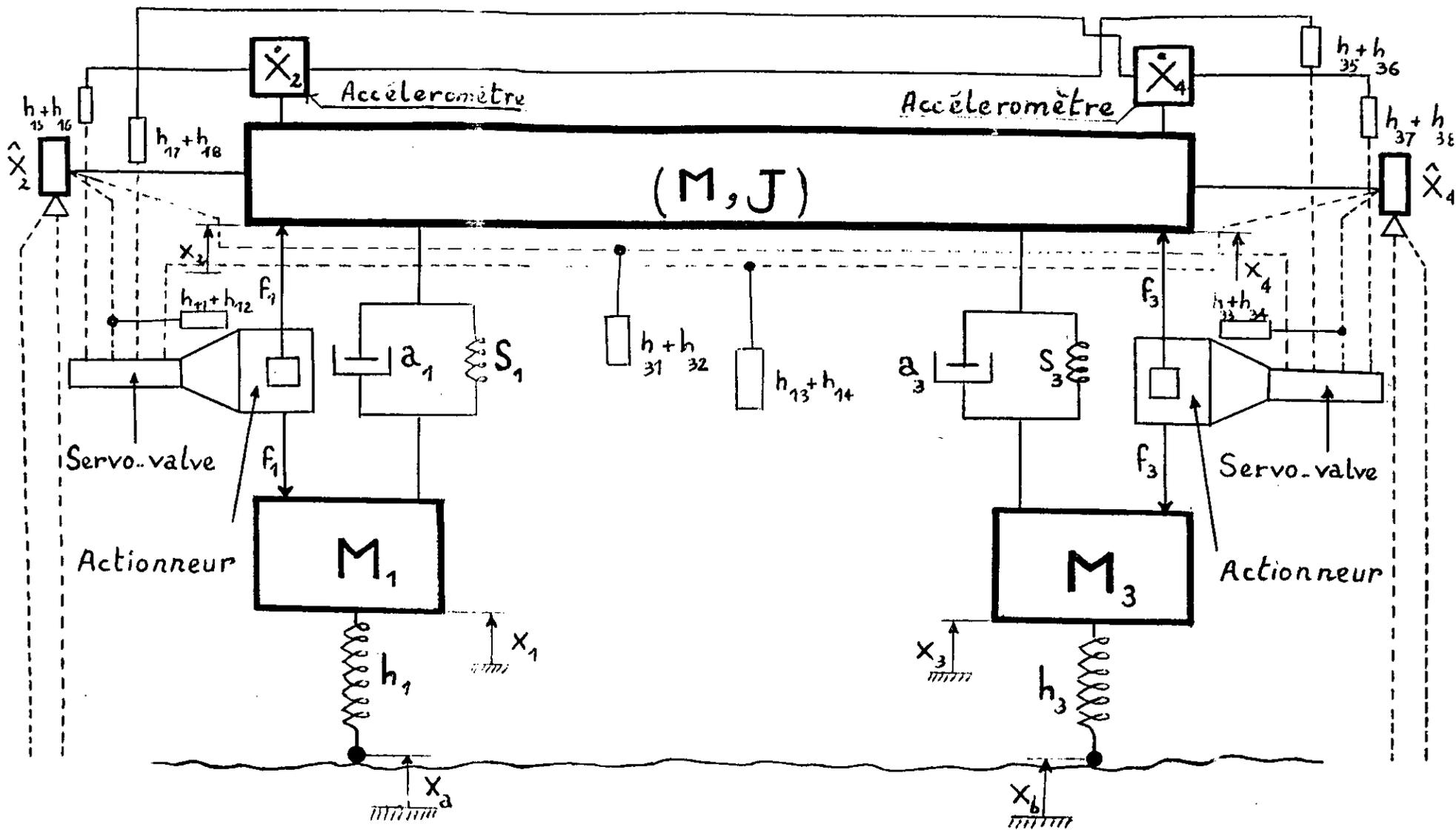


Figure 2 : Structure globale de la suspension active d'une moitié du brancard.

CHAPITRE III :

**COMMANDE PRE-INFORMEE
DE LA SUSPENSION ACTIVE**

III -1 INTRODUCTION

Un brancardier qui voit soudainement surgir sur sa route un obstacle (comme un trou, par exemple), prend en général, par réflexe, immédiatement une décision pour l'éviter au mieux. Cette décision (ou commande) est connue, depuis 1967, comme étant une commande particulière, dite commande pré - informée.

Dans ce chapitre, une formulation mathématique précise de la commande pré-informée linéaire est présentée. Elle est utilisée pour améliorer les performances de la suspension active d'un brancard poursuivant une route quelconque.

III- 2 COMMANDE PRÉ-INFORMÉE À HORIZON INFINI

La solution au problème défini par (1-16),(2.2) est donnée par [11] :

$$U^*(t) = -R^{-1} B [K X(t) - g(t)] \quad (3- 1)$$

où K est la solution de l'équation algébrique de Riccati (II-8) :

$$K A + A^T - K B R^{-1} B^T K + Q = 0$$

avec $\dot{K}(t) = 0$.

Le vecteur $g(t)$ est donné par :

$$g(t) = \int_t^{\infty} e^{(s-t)A_c^T} M(s) ds \quad , t \geq 0 \quad (3.2)$$

c'est la solution de l'équation différentielle :

$$\dot{g}(t) = A_c^T g(t) + M(t) \quad (3.3)$$

celle-ci est considérée avec la condition finale nulle et la condition initiale particulière suivante [11] :

$$g(0) = \int_0^{\infty} e^{A_c^T s} M(s) ds \quad (3.4)$$

où :

$$A_c = -A - B R^{-1} B^T K \quad (3.5)$$

$$M(t) = (QN - KD) Z(t)$$

finalement la trajectoire du vecteur d'état du système devient :

$$X^*(t) = A_c X(t) + B R^{-1} B^T g(t) + D Z(t) \quad (3.6)$$

La forme de la relation (3.1) est très connue dans la résolution de problème quadratique linéaire de poursuite [12], il n'en demeure pas moins qu'ici elle ressort avec une différence remarquable caractérisée par [11] :

- une matrice K constante.
- un vecteur $g(t)$ d'anticipation restant toujours borné, dû au choix particulier de la condition initiale (3.4) .

Nous remarquons que le calcul de $g(t)$ dans (3.2) exige la connaissance préalable des informations déterministes continues dans le vecteur $Z(t)$ de l'instant t à l'infini . Ceci conduit au concept de pré-information.

Il est évident que dans la relation (3-2) cette pré- information est requise sur un horizon infini théoriquement, c'est une exigence de la solution optimale.

En pratique, il est clair que dans certaines situations de poursuite de trajectoires, une décision adéquate ne nécessite pas forcément des données sur un horizon fini.

On peut générer une telle décision avec un nombre fini de données, c-à-d considérer seulement un horizon fini, donné par un intervalle égale à τ secondes, par exemple. Ceci conduit à la commande pré-informée à horizon fini.

III- 3 COMMANDE PRÉ-INFORMÉE À HORIZON FINI

Dans cette partie, nous avons à résoudre le problème de poursuite à horizon infini donnée par (I-16), (II-2). Mais au lieu que toutes les données futures représentant la perturbation extérieure $Z(t)$ soient connues au préalable, comme il a été le cas pour le schéma de commande pré-informée (3.1), (3-2), seulement, une information limitée sur la perturbation extérieure est maintenant considérée disponible, soit sur $(t, t + \tau)$.

C'est le problème de la commande pré-informée à horizon fini, pour lequel il existe une solution.

En théorie, il est montré dans [10], qu'avec les conditions de commandabilité de la paire $[A,B]$ et l'observabilité de $[A,Q]$, si on considère un horizon de pré-information fini dans le temps, défini par une fenêtre de durée τ , alors on peut générer une solution donnée par un vecteur de la forme :

$$U_p(t) = -R^{-1}B^T [K X_p(t) - g_p(t)] \quad (3.7)$$

Cette solution serait sous-optimale si la durée τ de pré-information est prise suffisamment grande [11]. K resterait alors la matrice constante symétrique, définie positive et solution de l'équation algébrique de Riccati, et le vecteur $g(t)$ est borné sur $[0, \infty]$ exprimé par l'équation :

$$g_p(t) = \int_t^{t+\tau} e^{(s-t)A_c^T} M(s) ds, \quad t \geq 0 \quad (3.8)$$

La trajectoire "sous-optimale" du vecteur d'état est :

$$\dot{X}_p(t) = A_c X_p(t) + B R^{-1} B^T g_p(t) + D Z(t) \quad (3.9)$$

Il est à signaler cependant que la durée τ de pré-information, nécessaire à la commande pré-informée sous-optimale, ne peut être déterminée qu'empiriquement [11].

Il faut signaler que dans les résultats de commande pré-informée à horizon fini, il est supposé que la matrice A_c reste constante comme dans le cas de l'horizon infini, car K est supposée encore calculée à partir de l'équation algébrique de Riccati.

Ainsi, avec cette approximation particulière, la robustesse et la fiabilité des résultats de la commande pré-informée à horizon infini (en particulier) ne sont pas a priori garantis [11]. Certainement elles le seront encore moins si certaines variations paramétriques sont envisageables et ce à cause de changement des conditions de fonctionnement (par l'usure, la dégradation, l'échauffement, etc.....), ce qui fait l'objet du chapitre 4.

III-4 CONCLUSION

Une solution au problème de poursuite optimale à horizon infini, compliqué par la présence d'une perturbation extérieure à l'entrée du système, est présentée dans le présent chapitre.

Cette loi de commande, donnée sous le nom de commande pré-informée, qui est apparentée aux commandes réflexes chez l'être humain, est traduite dans le présent

chapitre par une formulation mathématique claire, pour le cas d'un problème linéaire .

Elle est en particulier caractérisée par :

- 1- un gain de stabilité constant ($K = Cte$)
- 2- une fonction vectorielle d'anticipation $g(t)$ restant toujours bornée sur $[0, \infty]$
dû au choix particulier de la condition initiale de $g(t)$.
- 3- une trajectoire de vecteur d'état tout le temps stable.

CHAPITRE IV :
ANALYSE DE SENSIBILITE
DE LA COMMANDE
PRE-INFORMEE

IV-1. INTRODUCTION

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudiés le problème dans le cas où les paramètres du système sont fixés, c'est-à-dire à un état des paramètres nominaux. Ces derniers représentent les points de fonctionnement.

Mais en réalité, la variation paramétrique est souvent présentée, cette dernière fait une modification des performances de la commande.

Le but de ce chapitre est la formulation mathématique du double problème de la synthèse du contrôleur pré-informé optimal et la réduction de la sensibilité aux variations des paramètres. Pour cela on va définir avant les différentes fonctions de sensibilité.

IV-2. DEFINITION DES FONCTIONS DE SENSIBILITE

Soit une fonction $V(\lambda)$ variée en fonction de paramètre λ , dont la valeur nominale est désignée par λ_0 . Les fonctions principales relatives à la variation du paramètre λ sont données comme suites.

IV-2.1 Fonction de sensibilité standard du 1^{er} ordre

La fonction de sensibilité standard du premier ordre représente la dérivée partielle de $V(\lambda)$ par rapport à λ , au point de fonctionnement nominale λ_0 . Elle est exprimée par:

$$S = \left. \frac{\partial V(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda = \lambda_0} \quad (4.1)$$

Mathématiquement, cette dernière fonction de sensibilité est égale à la pente de variable $V(\lambda)$ au point nominale λ_0 .

Ce type de fonction de sensibilité est souvent employé pour la détermination de l'influence d'un paramètre particulier sur une variable particulière du système. De même, il est très utile pour la comparaison de l'influence de différents paramètres ayant les mêmes unités de mesure, sur une variable particulière du système.

Les petites variations de λ autour du point de fonctionnement nominal λ_0 , représentent conventionnellement une augmentation d'une unité de mesure du paramètre nominale λ_0 [13].

IV-2.2. Fonction de sensibilité standard du 2^{ème} ordre

Elle représente la 2^{ème} dérivée partielle d'une variable $V(\lambda)$ par rapport à un paramètre λ du système au point de fonctionnement nominal λ_0 .

La formule représentative de cette fonction est donnée par [14]:

$$S = \frac{\partial^2 V(\lambda)}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda = \lambda_0} \quad (4.2)$$

Ce type de fonction de sensibilité est employé pour déterminer le taux de variation de $V(\lambda)$ par rapport à λ autour du point de fonctionnement.

IV-2.3. Fonction de pourcentage de sensibilité du 1^{er} ordre

La fonction de pourcentage de sensibilité du 1^{er} ordre qui représente la variation de la variable $V(\lambda)$ par rapport à la variation paramétrique λ , est donnée par [14]:

$$S = \frac{\partial V(\lambda)}{\partial \lambda} \Delta \lambda \quad (4.3)$$

où $\Delta \lambda$ représente le pourcentage de la variation de λ . Cette fonction est utilisée pour la comparaison de l'influence d'un ensemble de paramètres différents du système sur la variable $V(\lambda)$, elle ne dépend que de l'unité de la variable $V(\lambda)$ [13].

IV-2.4. Fonction de sensibilité logarithmique du 1^{er} ordre

Elle est donnée par [14]:

$$S = \frac{\partial V(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial V(\lambda)} = \frac{\partial \ln(V(\lambda))}{\partial \ln(\lambda)} \quad (4.4)$$

où: \ln désigne le logarithme népérien.

C'est une fonction de sensibilité sans dimension, elle est utilisée pour la comparaison et la classification de l'influence des différents paramètres sur les variables du système.

IV-3. MESURE GENERALE DE LA SENSIBILITE

La mesure générale de la sensibilité est donnée, d'après [13], par:

$$S_G = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_i} \quad (4.5)$$

où: S_i est la fonction de sensibilité relative à la variation du $i^{\text{ème}}$ paramètre λ_i , et n représente le nombre des paramètres considérés.

Cette mesure détermine l'effet global de tous les paramètres sur une variable $V(\lambda)$ d'un système.

Les fonctions les plus utilisées pour la mesure générale de la sensibilité sont les fonctions de pourcentage de sensibilité du 1^{er} ordre et la fonction de sensibilité logarithmique du 1^{er} ordre parce qu'elles possèdent des unités compatibles [13].

IV-4. DETERMINATION DU CRITERE DE SENSIBILITE

Pour un système dynamique, le problème de poursuite optimale d'écrit au 3^{ème} chapitre est donné par:

$$\dot{X}(t, \lambda) = A(\lambda).X(t, \lambda) + B(\lambda).U(t, \lambda) + D(\lambda).Z(t) \quad (4.6)$$

$$Y(t, \lambda) = C.X(t, \lambda) \quad (4.7)$$

Le problème de poursuite quadratique optimale consiste à déterminer la commande $U^*(t, \lambda)$ dans (4.6) qui minimise le critère de performance suivant:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[(X(t, \lambda) - r(t))^T . Q . (X(t, \lambda) - r(t)) + U^T(t, \lambda) . R . U(t, \lambda) \right] dt \quad (4.8)$$

La dérivation de la première équation par rapport à λ , pour une variation paramétrique $d\lambda$, est donnée par:

$$\frac{\partial \dot{X}(t, \lambda)}{\partial \lambda} = A(\lambda_0) . \frac{\partial X(t, \lambda)}{\partial \lambda} + X(t, \lambda_0) + B(\lambda_0) . \frac{\partial U(t, \lambda)}{\partial \lambda} + B_{\lambda} . U(t, \lambda_0) + D_{\lambda} . Z(t) \quad (4.9)$$

avec:

$$A_{\lambda} = \left. \frac{\partial A(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda = \lambda_0} \quad B_{\lambda} = \left. \frac{\partial B(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda = \lambda_0} \quad D_{\lambda} = \left. \frac{\partial D(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda = \lambda_0}$$

où λ_0 représente la valeur nominale du paramètre λ .

Posons :

$$\begin{aligned} \Psi(t, \lambda) &= \frac{\partial X(t, \lambda)}{\partial \lambda} \\ \Phi(t, \lambda) &= \frac{\partial U(t, \lambda)}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (4.10)$$

avec:

Ψ et Φ sont respectivement les fonctions de sensibilité relatives à la trajectoire d'état et à la commande, l'équation (4.9) peut être réécrit comme suit:

$$\dot{\Psi}(t, \lambda) = A(\lambda_0) . \Psi(t, \lambda) + A_{\lambda} . X(t, \lambda) + B(\lambda_0) . \Phi(t, \lambda) + B_{\lambda} . U(t, \lambda) + D_{\lambda} . Z(t) \quad (4.11)$$

La fonction de sensibilité de perturbation $Z(t)$ est nulle, car cette dernière est indépendante des paramètres du système, donc les fonctions de sensibilité relatives aux déplacements dynamiques des roues avant et arrière du véhicule, $(x_1(t, \lambda) - x_a(t))$ et $(x_3(t, \lambda) - x_b(t))$ sont données respectivement par:

$$\frac{\partial [x_1(t, \lambda) - x_a(t)]}{\partial \lambda} = \psi_1(t, \lambda) \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial [x_3(t, \lambda) - x_b(t)]}{\partial \lambda} = \psi_3(t, \lambda) \quad (4.13)$$

Les fonctions de sensibilité relatives aux espaces de fonctionnement $(x_1(t, \lambda) - x_2(t, \lambda))$ et $(x_3(t, \lambda) - x_4(t, \lambda))$ sont données par:

$$\frac{\partial [x_1(t, \lambda) - x_2(t)]}{\partial \lambda} = \psi_1(t, \lambda) - \psi_2(t, \lambda) \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial [x_3(t, \lambda) - x_4(t)]}{\partial \lambda} = \psi_3(t, \lambda) - \psi_4(t, \lambda) \quad (4.15)$$

Les fonctions de sensibilité relatives aux forces $u_1(t, \lambda)$ et $u_3(t, \lambda)$ sont données comme suit:

$$\frac{\partial U_1(t, \lambda)}{\partial \lambda} = \phi_1(t, \lambda) \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial U_3(t, \lambda)}{\partial \lambda} = \phi_3(t, \lambda) \quad (4.17)$$

Pour réduire la sensibilité du système de suspension active du vecteur de sortie $Y(t)$ par rapport à la variation paramétrique λ , il faut minimiser les fonctions de sensibilité relatives aux décollements dynamique des roues, sous les contraintes imposées par les fonctions de sensibilité relatives aux espaces de fonctionnement. Donc, il faut minimiser le critère suivant:

$$J_S = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\rho_1 \phi_1^2 + \rho_3 \phi_3^2 + \bar{q}_1 \psi_1^2 + \bar{q}_2 (\psi_1 - \psi_2)^2 + \bar{q}_3 \psi_3^2 + \bar{q}_4 (\psi_3 - \psi_4)^2 \right] dt \quad (4.18)$$

où:

ρ_1, ρ_3 et \bar{q}_1 à \bar{q}_4 sont des facteurs de pondération. Ils sont choisis, de telle sorte à réduire la sensibilité du système.

Le dernier critère peut être réécrit sous la forme matricielle suivante:

$$J_S = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\Psi^T(t, \lambda) \cdot Q_S \cdot \Psi(t, \lambda) + \Phi^T(t, \lambda) \cdot R_S \cdot \Phi(t, \lambda) \right] dt \quad (4.19)$$

avec, Q_S et R_S sont respectivement des matrices définie positives et non négative. Elles peuvent s'écrire sous les formes :

$$Q_S = C^T \cdot Q_{S_1} \cdot C \quad R_S = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_3 \end{bmatrix}$$

Il faut noter que la réduction optimale de la sensibilité dépend essentiellement du choix de Q_S et R_S .

IV-4. LA NOUVELLE FORMULATION MATRICIELLE DU PROBLEME

La reformulation du problème donné par (4.6), (4.8) en vue de l'analyse et la réduction de sensibilité du contrôle pré-informée, est effectuée comme suit:

On forme deux nouveaux vecteurs :

$$X_S(t, \lambda) = \begin{bmatrix} X(t, \lambda) \\ \Psi(t, \lambda) \end{bmatrix} \quad U_S(t, \lambda) = \begin{bmatrix} U(t, \lambda) \\ \Phi(t, \lambda) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

En tenant compte de (4.6), (4.11) et de ces deux dernières équations, le système augmenté peut être exprimé par:

$$\dot{X}_S(t, \lambda) = A_S(\lambda) \cdot X_S(t, \lambda) + B_S(\lambda) \cdot U_S(t, \lambda) + D_S(\lambda) \cdot Z(t) \quad (4.21)$$

avec:

$$A_s = \begin{bmatrix} A & [0] \\ A_\lambda & A \end{bmatrix}, \quad B_s = \begin{bmatrix} B & [0] \\ B_\lambda & B \end{bmatrix}, \quad D_s = \begin{bmatrix} D \\ D_\lambda \end{bmatrix}$$

où, [0] sont des matrices nulles de dimensions appropriées.

IV-5. REFORMULATION DU CRITERE DE PERFORMANCE

Pour optimiser la solution du système, il faut additionner le critère de sensibilité (4.19) avec le critère de performance (4.8) cette technique est développée par [Krindler,69], [Fleming,73,77], [Subbayan et Al., 77] et [Gopal et Al., 84]. Par conséquent, le nouveau critère de performance relatif au système (4.20) est donné par la relation[13]:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [(\mathbf{X}(t,\lambda) - \mathbf{r}(t))^T \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{X}(t,\lambda) - \mathbf{r}(t)) + \mathbf{U}^T(t,\lambda) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}(t,\lambda) + \Psi^T(t,\lambda) \cdot \mathbf{Q}_s \cdot \Psi(t,\lambda) + \Phi^T(t,\lambda) \cdot \mathbf{R}_s \cdot \Phi(t,\lambda)] dt \quad (4.22)$$

Le critère global relatif aux nouvelles variables X_s et U_s est exprimé par:

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_0^\infty [(\mathbf{X}_s(t,\lambda) - \Gamma(t))^T \cdot \bar{\mathbf{Q}} \cdot (\mathbf{X}_s(t,\lambda) - \Gamma(t)) + \mathbf{U}_s^T(t,\lambda) \cdot \bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{U}_s(t,\lambda)] dt \quad (4.23)$$

avec:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & [0] \\ [0] & \mathbf{Q}_s \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & [0] \\ [0] & \mathbf{R}_s \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ [0] \end{bmatrix}$$

IV-6. ELABORATION DE LA SOLUTION OPTIMALE

On suppose que la paire $[A_s, B_s]$ est commandable, et la paire $[A_s, \bar{Q}]$ est observable et la trajectoire à poursuivre Γ est uniformément continue et bornée sur $[0, \infty[$.

Pour un temps de pré-information infini, une solution au problème exprimé par (4.21), (4.22), conformément aux résultats du troisième chapitre, par:

$$U_s(t, \lambda) = -\bar{R}^{-1} B_s^T \cdot [K_s \cdot X_s(t, \lambda) - g_s(t, \lambda)] \quad (4.24)$$

où, K_s est une matrice symétrique définie positive, solution de l'équation algébrique de Riccati:

$$K_s A_s + A_s^T K_s - K_s B_s \bar{R}^{-1} B_s^T K_s + \bar{Q} = 0 \quad (4.25)$$

et, $g_s(t, \lambda)$ est la fonction d'anticipation, donnée par:

$$g_s(t, \lambda) = \int_t^{\infty} e^{(\xi-t)A_{s_c}^T} \cdot M_s(t, \lambda) d\xi \quad t \geq 0 \quad (4.26)$$

avec:

$$A_{s_c} = A_s - B_s \cdot \bar{R}^{-1} \cdot B_s^T \cdot K_s$$

$$M_s(t, \lambda) = \bar{Q} \cdot \Gamma - K_s \cdot D_s \cdot Z(t)$$

La trajectoire d'état optimale, sous la commande exprimée par l'équation (4.24), est donnée par:

$$\dot{X}_s(t, \lambda) = A_{s_c}(\lambda) \cdot X_s(t, \lambda) + B_s \cdot \bar{R}^{-1} \cdot B_s^T \cdot g_s(t, \lambda) + D_s(\lambda) \cdot Z(t) \quad (4.27)$$

On peut exprimer cette dernière équation en fonction des variables du système et leurs fonctions de sensibilité, par la relation suivante:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}(t, \lambda) \\ \dot{\Psi}(t, \lambda) \end{bmatrix} = A_{s_c} \cdot \begin{bmatrix} X(t, \lambda) \\ \Psi(t, \lambda) \end{bmatrix} + B_s \cdot \bar{R}^{-1} \cdot B_s^T \begin{bmatrix} g(t, \lambda) \\ g_\lambda(t, \lambda) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ D_\lambda \end{bmatrix} \cdot Z(t) \quad (4.28)$$

où, $g_\lambda(t, \lambda)$ est la fonction de sensibilité relative à la fonction $g(t, \lambda)$, donc elle s'écrit sous la forme:

$$g_\lambda(t, \lambda) = \frac{\partial g(t, \lambda)}{\partial \lambda}$$

Par la décomposition de l'expression (4.24), la loi de commande $U(t, \lambda)$ peut être réécrite comme suit:

$$\begin{bmatrix} \frac{U(t,\lambda)}{\Phi(t,\lambda)} \end{bmatrix} = -\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{B}_s^T \cdot \mathbf{K}_s \begin{bmatrix} \frac{X(t,\lambda)}{\Psi(t,\lambda)} \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{R}}^{-1} \cdot \mathbf{B}_s^T \begin{bmatrix} \frac{g(t,\lambda)}{g_\lambda(t,\lambda)} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

en général, la matrice \mathbf{K}_s peut être exprimée par:

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}$$

donc,

$$\begin{bmatrix} \frac{U(t,\lambda)}{\Phi(t,\lambda)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}_{11} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_\lambda^T \mathbf{K}_{12} & \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}_{12} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_\lambda^T \mathbf{K}_{22} \\ \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}_{12} & \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{X(t,\lambda)}{\Psi(t,\lambda)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T & \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_\lambda^T \\ 0 & \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{B}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{g(t,\lambda)}{g_\lambda(t,\lambda)} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Par conséquent, la loi de commande $U(t,\lambda)$ est donnée en tenant compte de (4.30) par:

$$U(t,\lambda) = -(\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}_{11} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_\lambda^T \mathbf{K}_{12}) \cdot X(t,\lambda) - (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}_{12} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_\lambda^T \mathbf{K}_{22}) \cdot \Psi(t,\lambda) + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \cdot g(t,\lambda) + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_\lambda^T \cdot g_\lambda(t,\lambda) \quad (4.31)$$

Et la fonction de sensibilité $\Phi(t,\lambda)$ peut être donnée, à partir de (4.29) par:

$$\Phi(t,\lambda) = \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}_{12} \cdot X(t,\lambda) + \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}_{22} \cdot \Psi(t,\lambda) + \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{B}^T \cdot g_\lambda(t,\lambda) \quad (4.32)$$

Le vecteur d'anticipation $g(t,\lambda)$ et sa fonction de sensibilité $g_\lambda(t,\lambda)$ peuvent être donnés par :

$$\begin{bmatrix} \dot{g}(t,\lambda) \\ \dot{g}_\lambda(t,\lambda) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_s \cdot \begin{bmatrix} \frac{g(t,\lambda)}{g_\lambda(t,\lambda)} \end{bmatrix} + \mathbf{M}_s(t,\lambda) \quad (4.33)$$

où:

$$\mathbf{M}_s(t,\lambda) = \bar{\mathbf{Q}} \cdot \Gamma - \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{D}_s \cdot \mathbf{Z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \cdot r(t) - (\mathbf{k}_{11} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{D}_\lambda) \mathbf{Z}(t) \\ -(\mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{k}_{22} \cdot \mathbf{D}_\lambda) \mathbf{Z}(t) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

et la matrice \mathbf{A}_{sc} est définie par:

$$A_{s_c} = A_s - B_s \cdot \bar{R}^{-1} \cdot B_s^T \cdot K_s$$

Après la simplification de formule de A_{s_c} nous trouvons:

$$A_{s_c} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

avec:

$$a_{11} = A - BR^{-1}B^T k_{11} - BR^{-1}B_\lambda^T k_{12}$$

$$a_{12} = -BR^{-1}B^T k_{12} - BR^{-1}B_\lambda^T k_{22}$$

$$a_{21} = A_\lambda - B_\lambda R^{-1}B^T k_{11} - BR_s^{-1}B^T k_{12} - B_\lambda R^{-1}B_\lambda^T k_{12}$$

$$a_{22} = A - B_\lambda R^{-1}B^T k_{12} - BR_s^{-1}B_\lambda^T k_{22} - B_\lambda R^{-1}B_\lambda^T k_{22}$$

En tenant compte des équations (4.27) à (4.32) la trajectoire d'état optimale $X(t, \lambda)$ qui représente la réponse de la loi de commande (4.28), et sa fonction de sensibilité, sont données respectivement par :

$$\begin{aligned} \dot{X}(t, \lambda) = & a_{11}X(t, \lambda) + a_{12}\Psi(t, \lambda) + BR^{-1}B^T \cdot g(t, \lambda) \\ & + BR^{-1}B_\lambda^T \cdot g_\lambda(t, \lambda) + D \cdot Z(t) \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(t, \lambda) = & a_{21}X(t, \lambda) + a_{22}\Psi(t, \lambda) + B_\lambda R^{-1}B^T \cdot g(t, \lambda) \\ & + (B_\lambda R^{-1}B_\lambda^T + BR_s^{-1}B^T)g_\lambda(t, \lambda) + D_\lambda \cdot Z(t) \end{aligned} \quad (4.36)$$

En supposant que la paire (A_s, B_s) est commandable, la paire (A_s, Q_s) est observable, et la trajectoire à poursuivre Γ est uniformément continue et bornée sur $[0, \infty[$, mais seulement connue sur un horizon fini $[t, t+\tau]$ à chaque instant t . Donc, la solution au problème, exprimé par (4.21), (4.23) est alors donnée par:

$$U_{s_\tau}(t, \lambda) = -\bar{R}^{-1}B_s^T \cdot [K_s \cdot X_{s_\tau}(t, \lambda) - g_{s_\tau}(t, \lambda)] \quad (4.37)$$

où, g_{s_τ} est donnée par :

$$g_{s_\tau}(t, \lambda) = \int_t^{t+\tau} e^{(\xi-t)A_{s_c}^T} \cdot M_s(t, \lambda) d\xi \quad t > 0 \quad (4.38)$$

$$g_{s_t}(t + \tau, \lambda) = 0,$$

avec:

$$A_{s_c} = A_s - B_s \cdot \bar{R}^{-1} \cdot B_s^T \cdot K_s,$$

$$M_s(t, \lambda) = \bar{Q} \cdot \Gamma(t) - K_s \cdot D_s \cdot Z(t)$$

où la matrice K_s est la solution de l'équation algébrique de Riccati (4.25).

Finalement la trajectoire d'état sous optimale, est alors exprimée par:

$$\dot{X}_{s_t}(t, \lambda) = A_{s_c}(\lambda) \cdot X_{s_t}(t, \lambda) + B_s \cdot \bar{R}^{-1} \cdot B_s^T \cdot g_{s_t}(t, \lambda) + D_s(\lambda) \cdot Z(t) \quad (4.39)$$

Ce dernier vecteur représente la réponse à la loi de commande (4.37).

IV-7. CONCLUSION

Le modèle de sensibilité élaboré n'est pas limité à l'emploi de la fonction de sensibilité particulière du 1^{er} ordre.

On peut utiliser aussi des autres fonctions de sensibilité comme la fonction de pourcentage du 1^{er} ordre, et celle de sensibilité logarithmique.

La technique utilisée est basée sur la théorie de la commande optimale linéaire quadratique et l'élaboration d'un modèle augmenté incorporant le modèle du système et le modèle de sensibilité

CHAPITRE V :

SIMULATION NUMERIQUE

V-1. INTRODUCTION

La simulation numérique sera effectuée sur ordinateur pour illustrer les performances des différents systèmes, de suspension active, de suspension active avec pré-information, et en tenant compte l'effet de la variation des paramètres du système. Pour cela, les résultats établis ci-dessous sont simulés avec l'utilisation du logiciel MATLAB, et des données numériques suivantes [10] :

$$M=60 \text{ kg} \quad M_1=M_3=1 \text{ kg} \quad h_1=h_3=100 \text{ kN/m}$$

Et on prend aussi pour notre modèle :

$$d_1=1.2 \text{ m} \quad d_2=0.8 \text{ m} \quad J=22.4 \text{ Kg.m}^2$$

D'après le chapitre II, q_1 et q_3 sont pris égaux à l'unité, et on prend d'après [10] :

$$q_2=q_4=2.$$

Les autres facteurs de pondération r_1 et r_3 sont choisis empiriquement par :

$$r_1=r_3=4.10^{-10}.$$

De plus les résultats de simulation numérique donnent les valeurs des éléments passifs (ressorts et amortisseurs), qui peuvent implanter en parallèle avec l'actionneur. Ces derniers sont nécessaires pour assurer un équilibre statique et des déformations limitées.

V-2. RESULTATS DE SIMULATION NUMERIQUE

Pour obtenir ces résultats, il faut connaître le vecteur de perturbation qui représente le profil de la route. Dans notre étude, nous avons utilisés deux types de profil de la route, chacun d'eux correspond les deux entrées, avant et arrière, un échelon unité et bosse (alternance positive d'une onde sinusoïdale) de 0.5 sec de durée.

Les formules théoriques obtenues aux chapitres précédants sont illustrées pratiquement dans les sections prochaines.

V-2.1. Système de suspension active

La détermination des paramètres optimaux du système de suspension active et des réponses temporelles se fait avec les valeurs particulières de r_1 et r_3 afin de minimiser les pics des accélérations.

La figure (5-1) donne les courbes des réponses temporelles x_1, x_2, x_3 et x_4 représentant respectivement les déplacements des essieux avant et arrière et des points de connections au châssis à une entrée échelon unitaire. Les courbes des réponses temporelles correspond à une entrée de bosse sont données au figure (5-2). Ces deux figures montrent que les réponses sont amortis plus rapidement, et les amplitudes sont réduits, comparant à ceux du système de suspension passive de même brancard donnés aux figures (A-1), (A-2) de l'annexe.

Les déplacements du centre de gravité (z) et de l'angle de tangage (β) pour un échelon unité et bosse sont donnés respectivement aux figures (5-3), (5-4). On remarque dans la figure (5-3) que le déplacement du centre de gravité illustre la rapidité d'amortissement des réponses, par conséquent l'angle de tangage illustre la réduction des amplitudes, cependant que dans la figure (5-4), l'angle (β) montre la rapidité d'amortissement et (z) montre la réduction des amplitudes.

Les figures (5-5), (5-6) représentent les accélérations (\ddot{z}) et ($\ddot{\beta}$) respectivement pour un échelon et bosse. Ces accélérations sont réduites comparant à celles du système passif données aux figures (A-5), (A-6) de l'annexe.

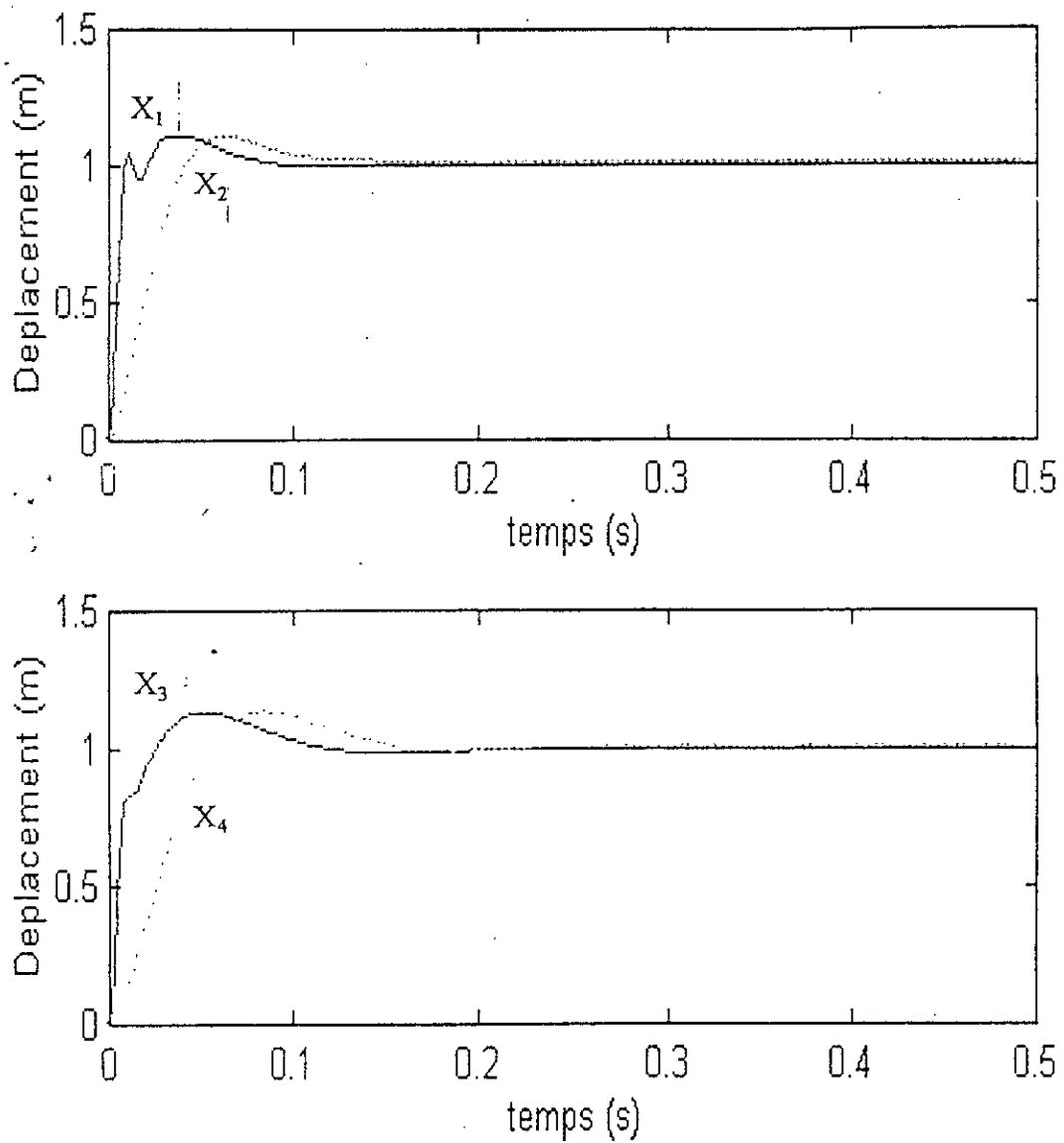


Fig. (5.1) : déplacements des essieux avant et arrière et des points de connexion au châssis pour une entrée échelon unitaire de la suspension active

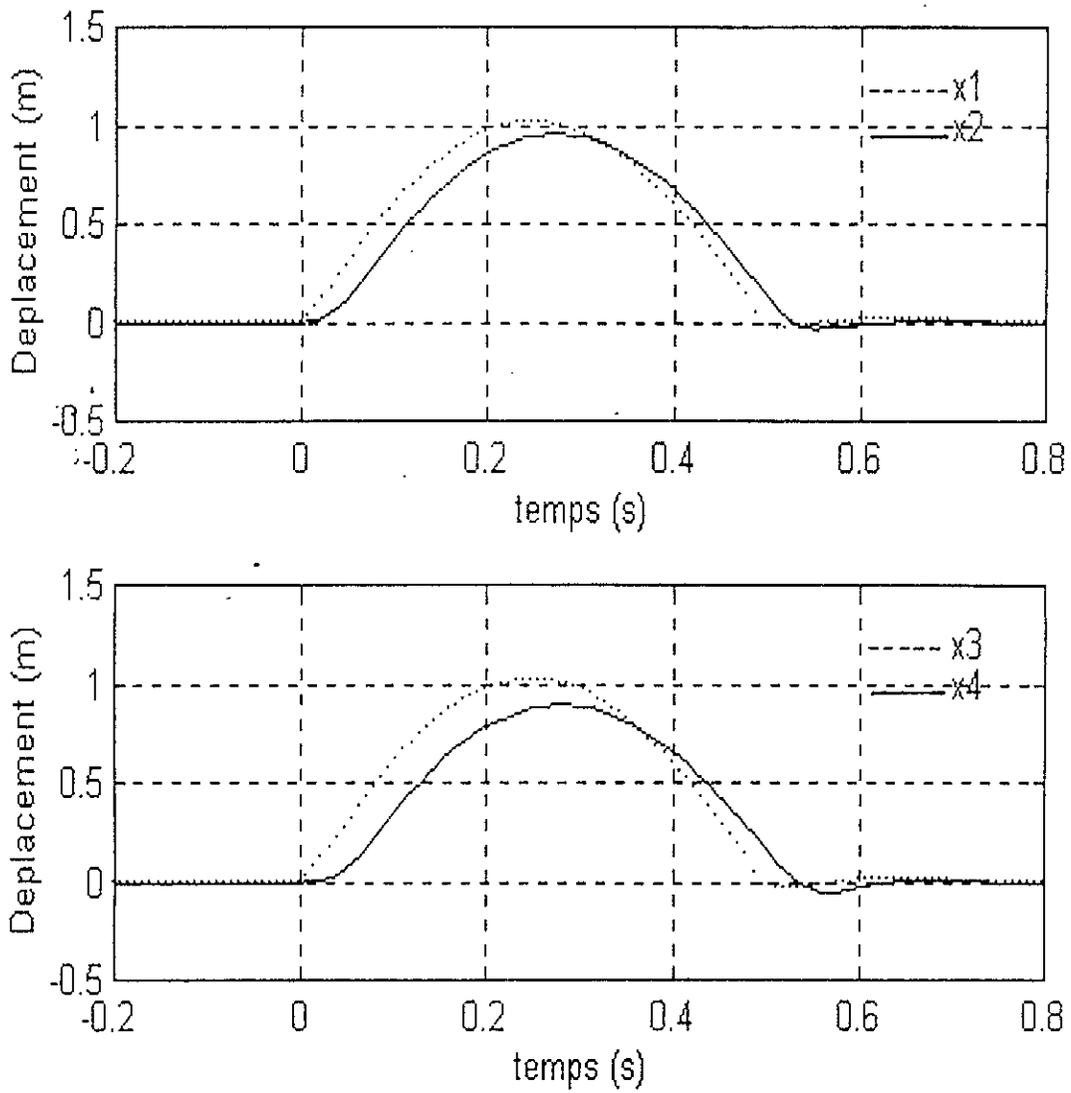


Fig. (5.2) : déplacements du centre de gravité (Z) et de l'angle de tangage (β) pour une entrée de bosse d'une suspension active

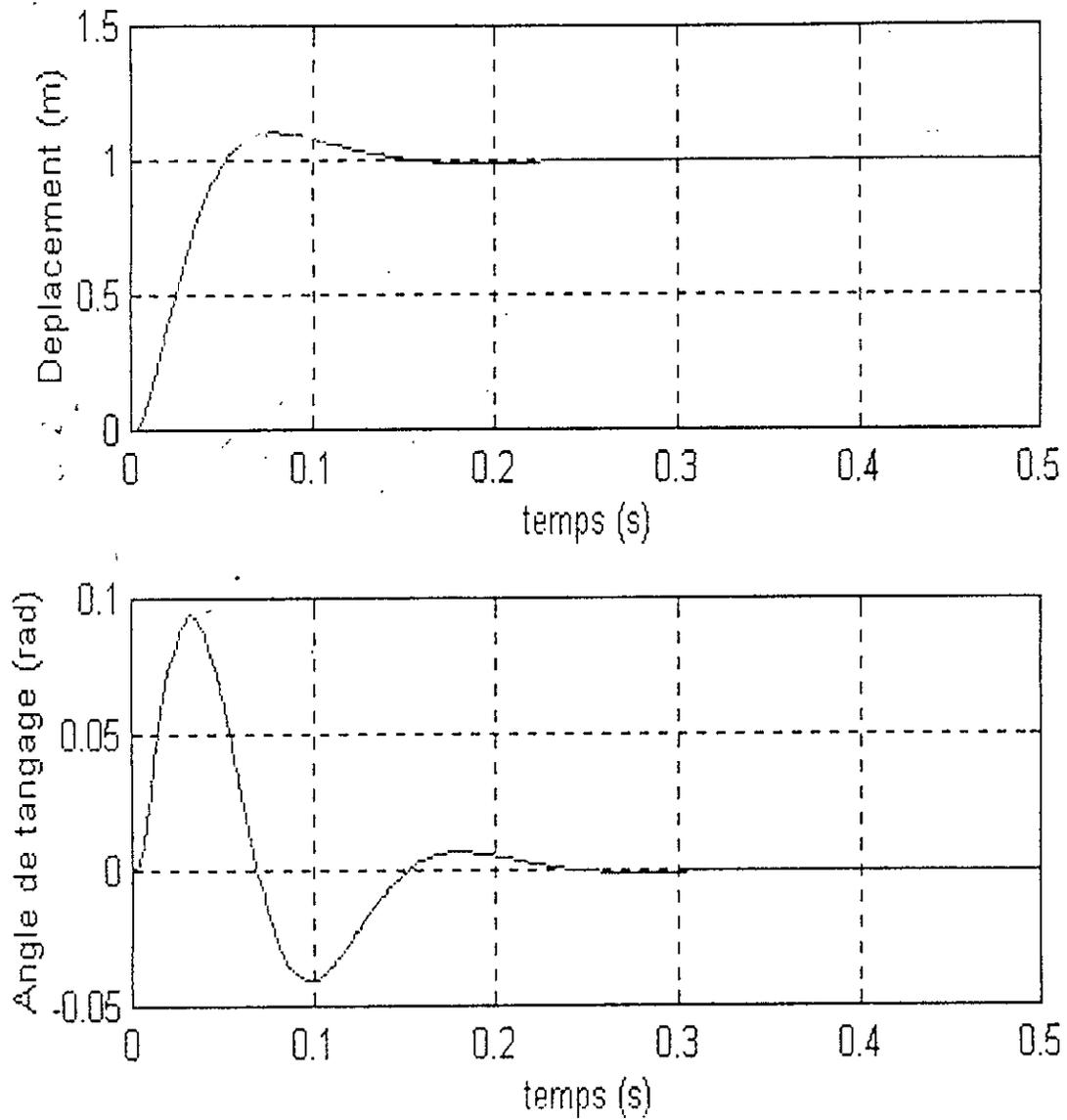


Fig.(5.3) : déplacements du centre de gravité (Z) et de l'angle de tangage (β) pour une entrée échelon unitaire d'une suspension active

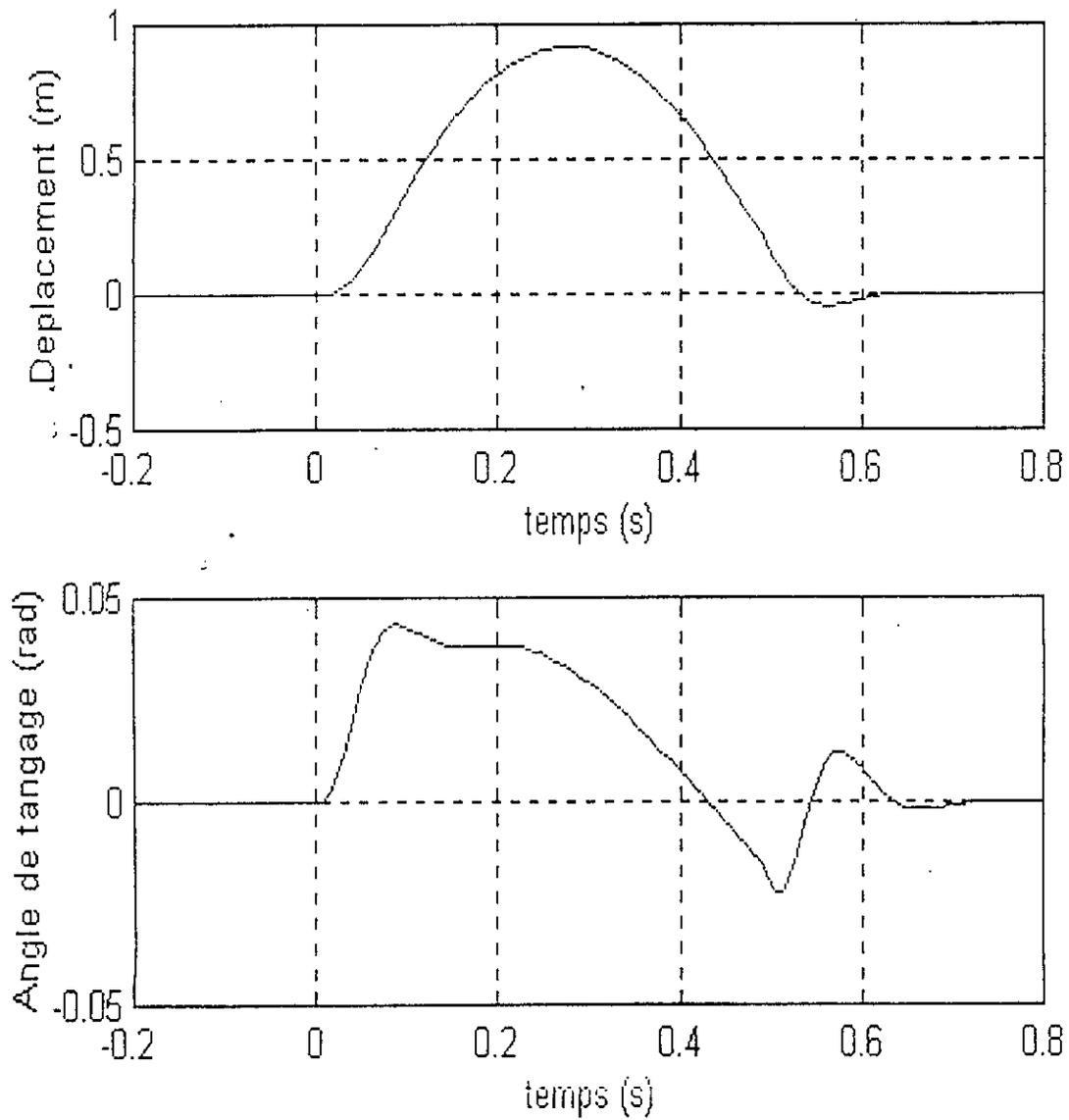


Fig.(5.4) : déplacements du centre de gravité (Z) et de l'angle de tangage (β) pour une entrée de bosse d'une suspension active

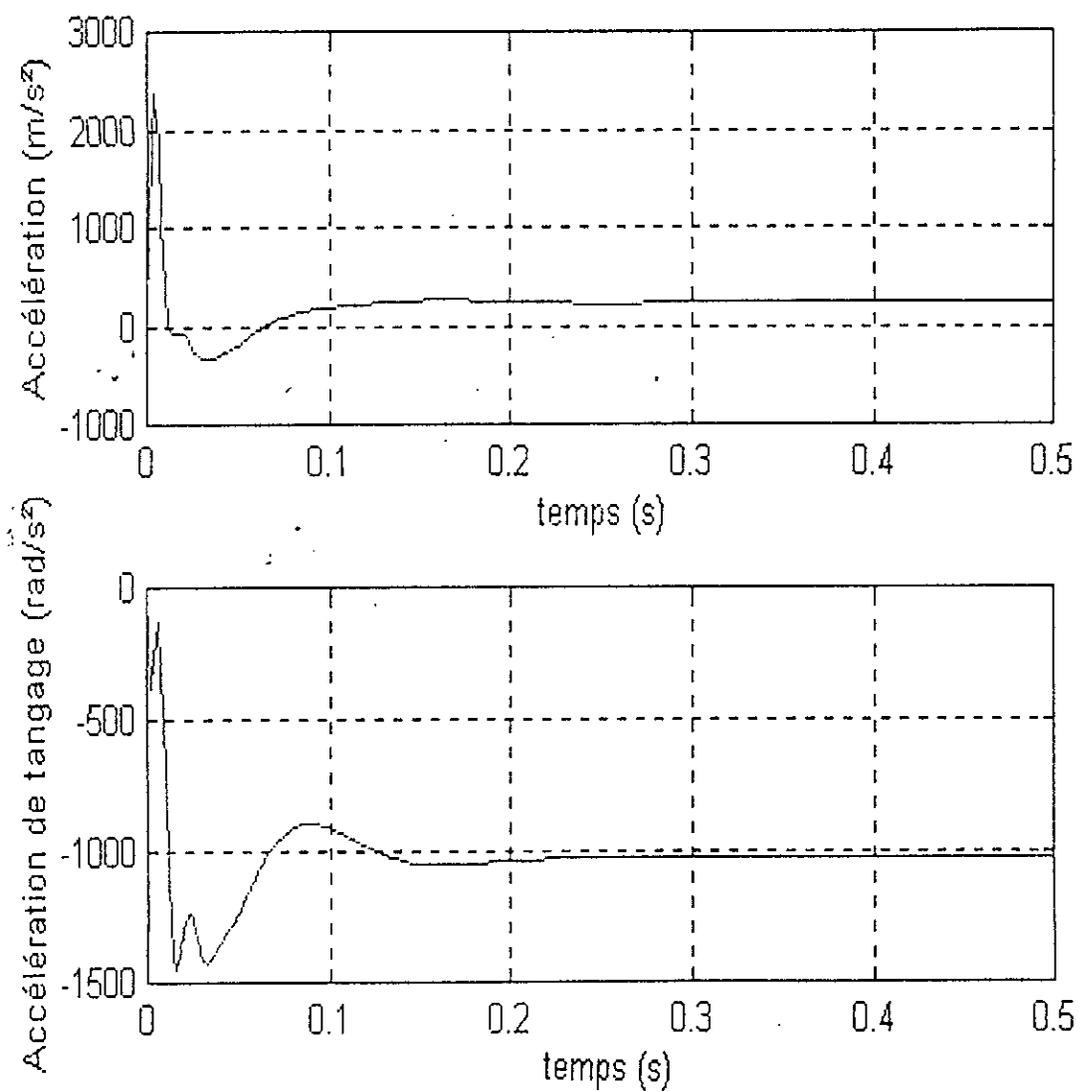


Fig. (5.5) : accélérations du centre de gravité (Z) et de l'angle de tangage (β) pour une entrée échelon unitaire d'une suspension active

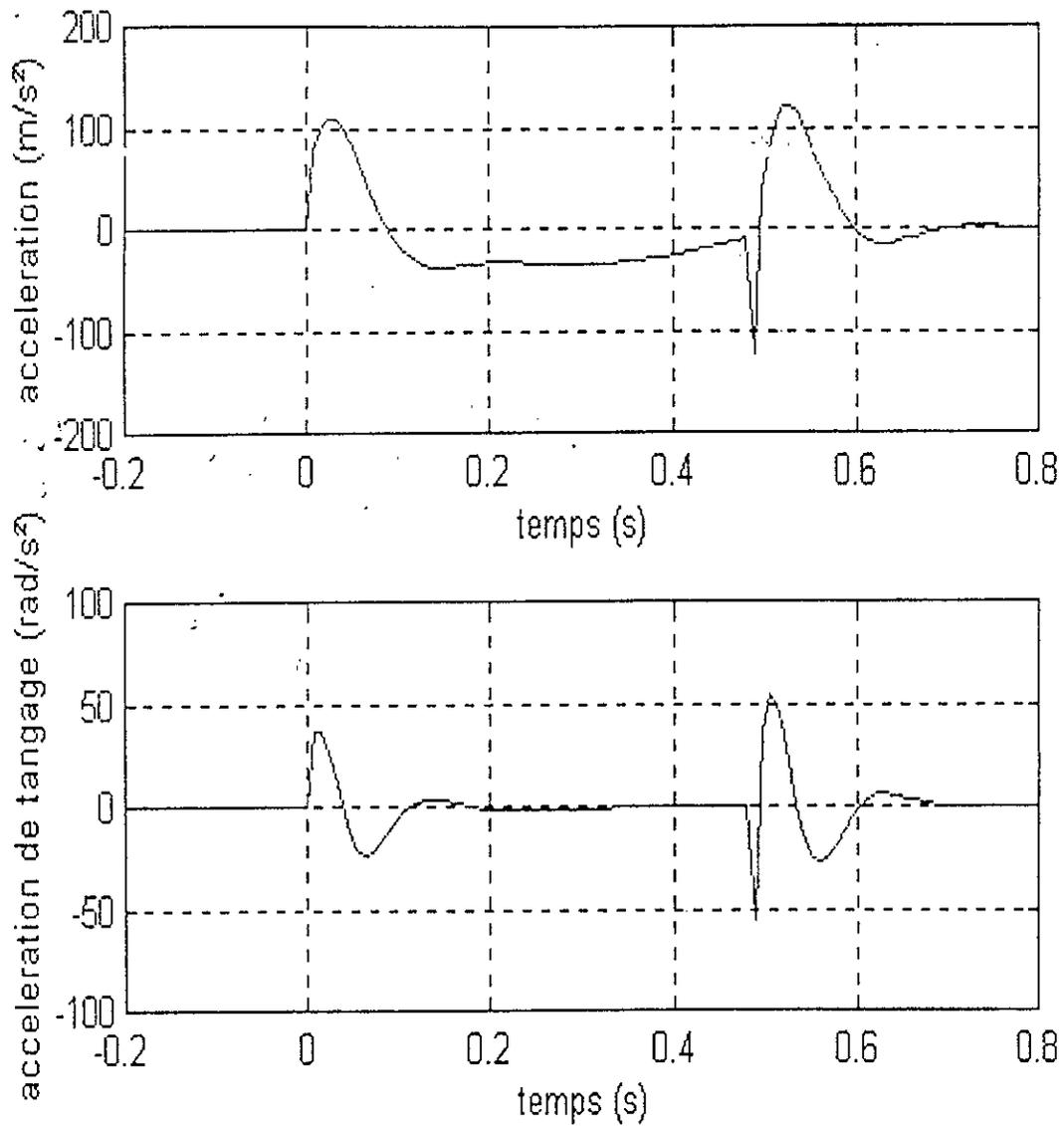


Fig. (5.6) : accélérations du centre de gravité (Z) et de l'angle de tangage (β) pour une entrée de bosse d'une suspension active

V-2.2. Système de suspension active avec pré-information

Dans cette partie, on va étudier l'effet du temps de pré-information sur le critère de performance. Pour une entrée échelon unitaire, la figure (5-7) montre que le critère prend sa valeur minimale à partir du temps de pré-information supérieur à 0.5 sec. Cependant ce critère dégrade énormément avec un temps de pré-information inférieur à 0.1 sec.

Le déplacement (z) et l'angle (β), pour un échelon unité et bosse sont donnés respectivement dans les figures (5-8), (5-9). Ces dernières montrent que le déplacement (z) est réduit à la moitié, ceci est surtout remarqué pour l'entrée de bosse, bien que l'angle de tangage est baissé en avant, il augmente en arrière, à cause qu'au moment où les roues arrières se préparent à franchir l'obstacle, les roues avant l'on déjà franchir.

Par ailleurs l'efficacité de commande pré-informée est bien remarqué dans les accélérations du centre de gravité et de l'angle de tangage, montrées dans la figure (5-10) pour l'échelon et (5-11) pour une entrée bosse. Ces accélérations sont réduites considérablement comparées à celles du système de suspension active et passive. Donc on peut dire que ce système est le plus confortable.

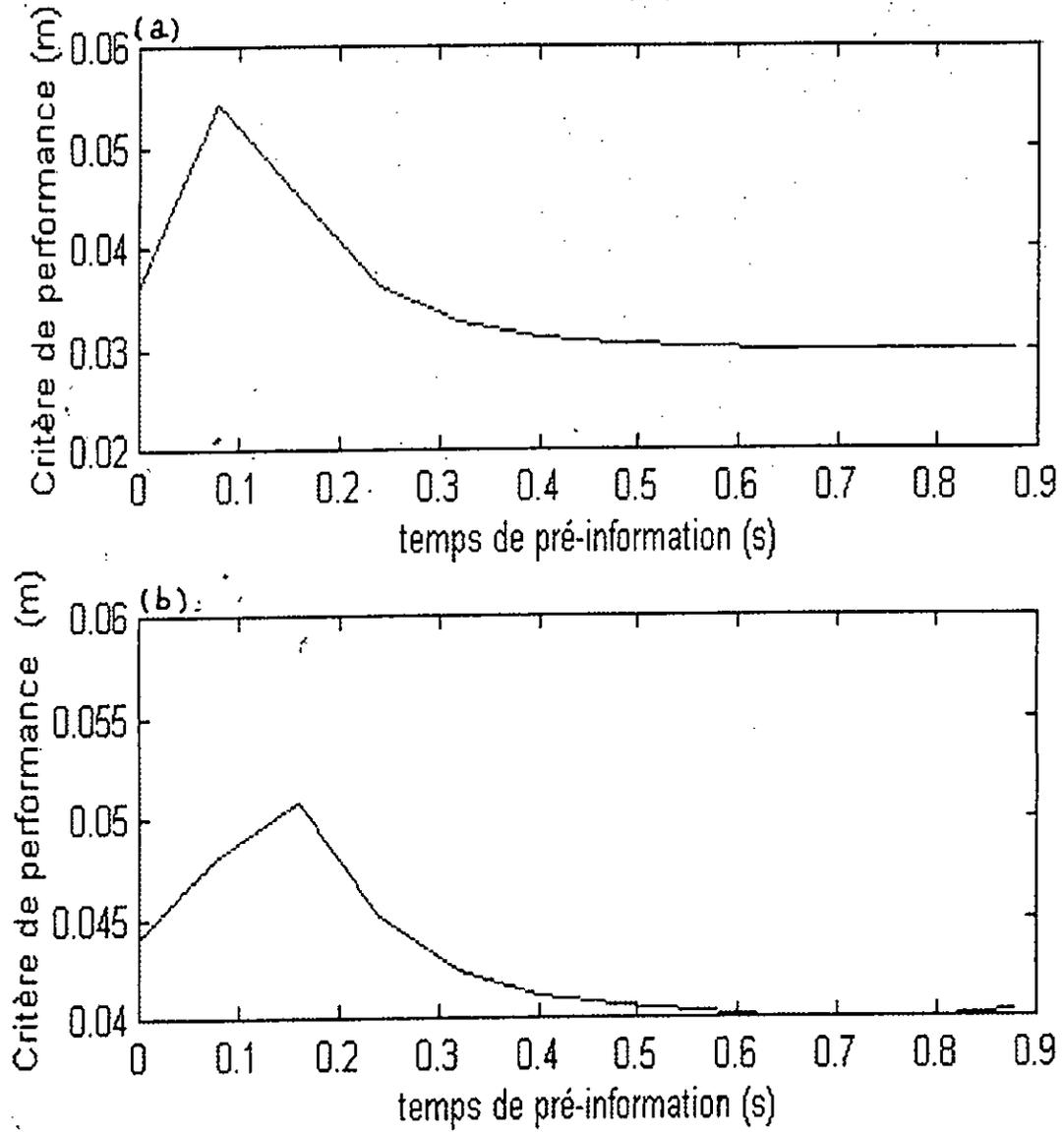


Fig.(5.7) : variation du critère de performance respectivement pour une entrée échelon unitaire et de bosse (a), (b) en fonction de temps du pré-information (τ)

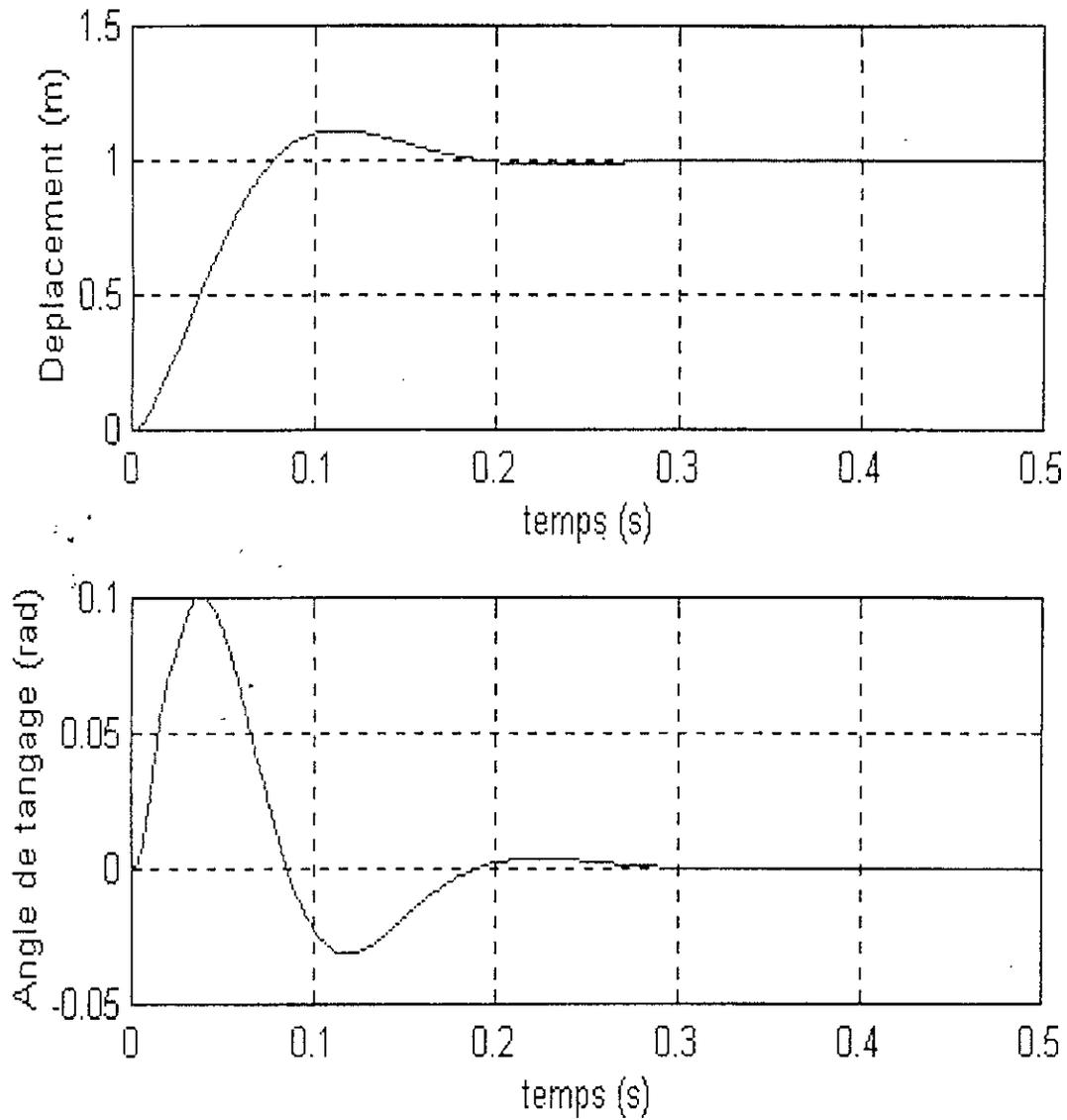


Fig.(5.8) : déplacements du centre de gravité (Z) et de l'angle de tangage (β) pour une entrée échelon unitaire d'une suspension active avec pré-information ($\tau = 0.8$ sec)

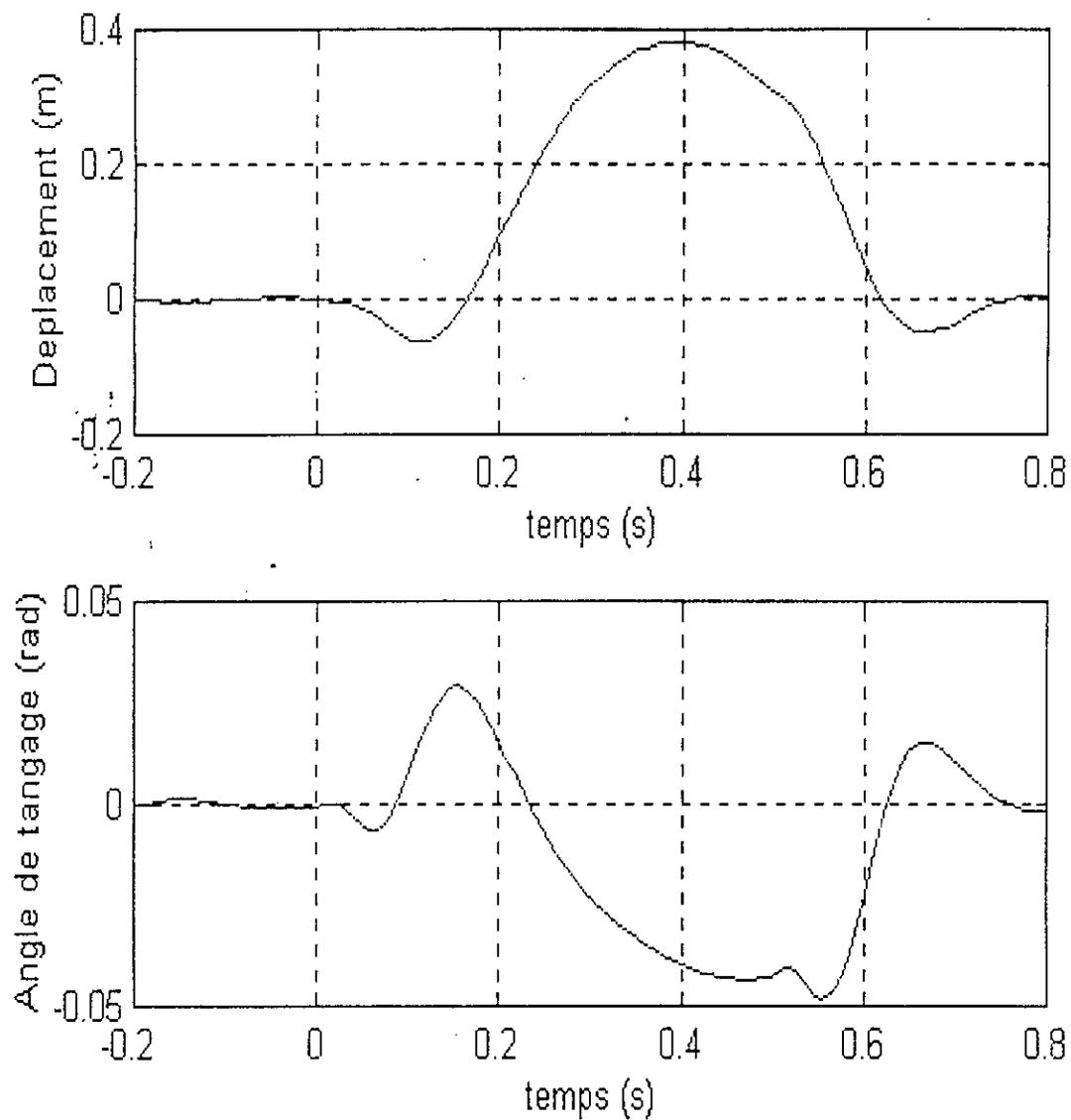


Fig.(5.9) : déplacements du centre de gravité (Z) et de l'angle de tangage (β) pour une entrée de bosse d'une suspension active avec pré-information ($\tau = 0.8$ sec)

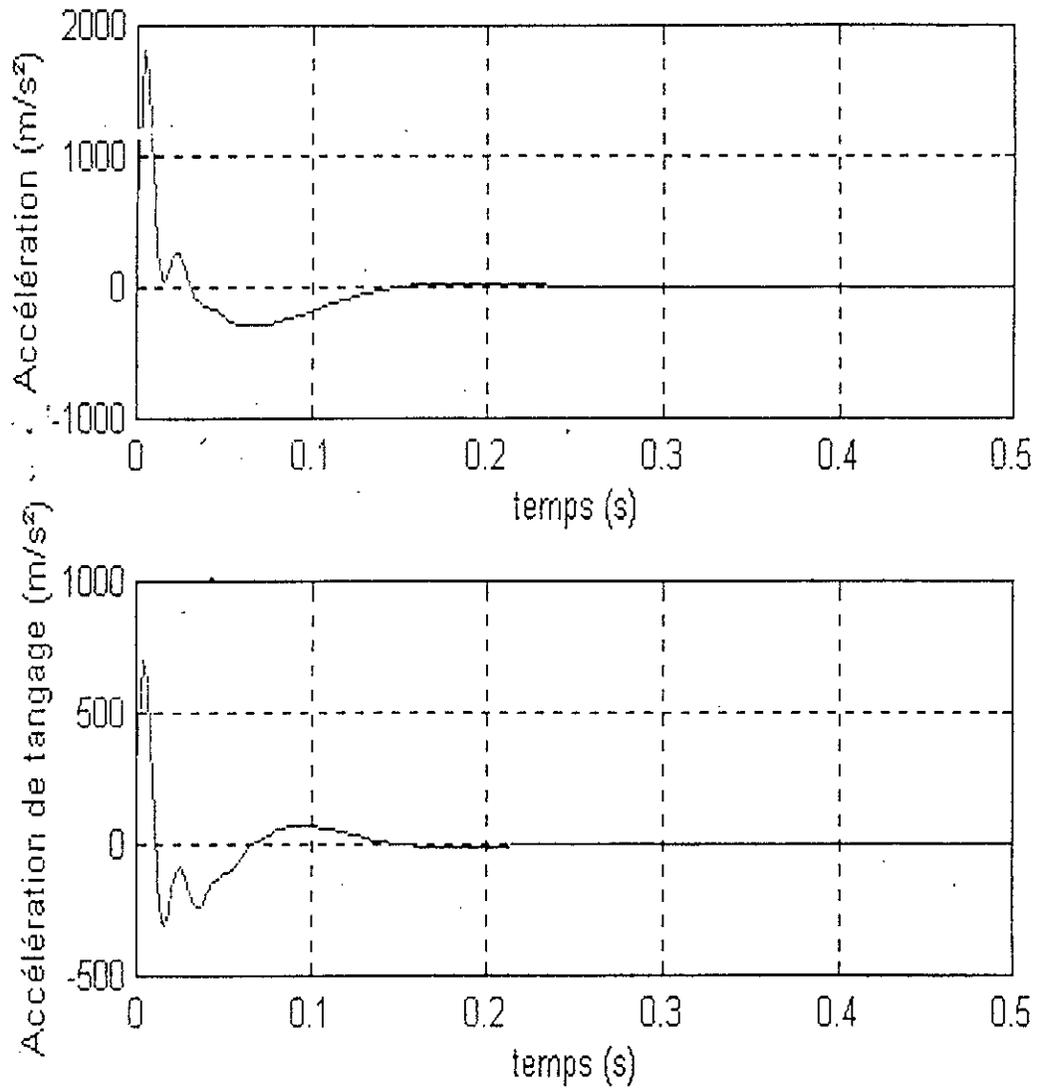


Fig. (5.10) : accélérations du centre de gravité (Z) et de l'angle de tangage (β) pour une entrée échelon unitaire d'une suspension active avec pré-information ($\tau = 0.8$ sec)

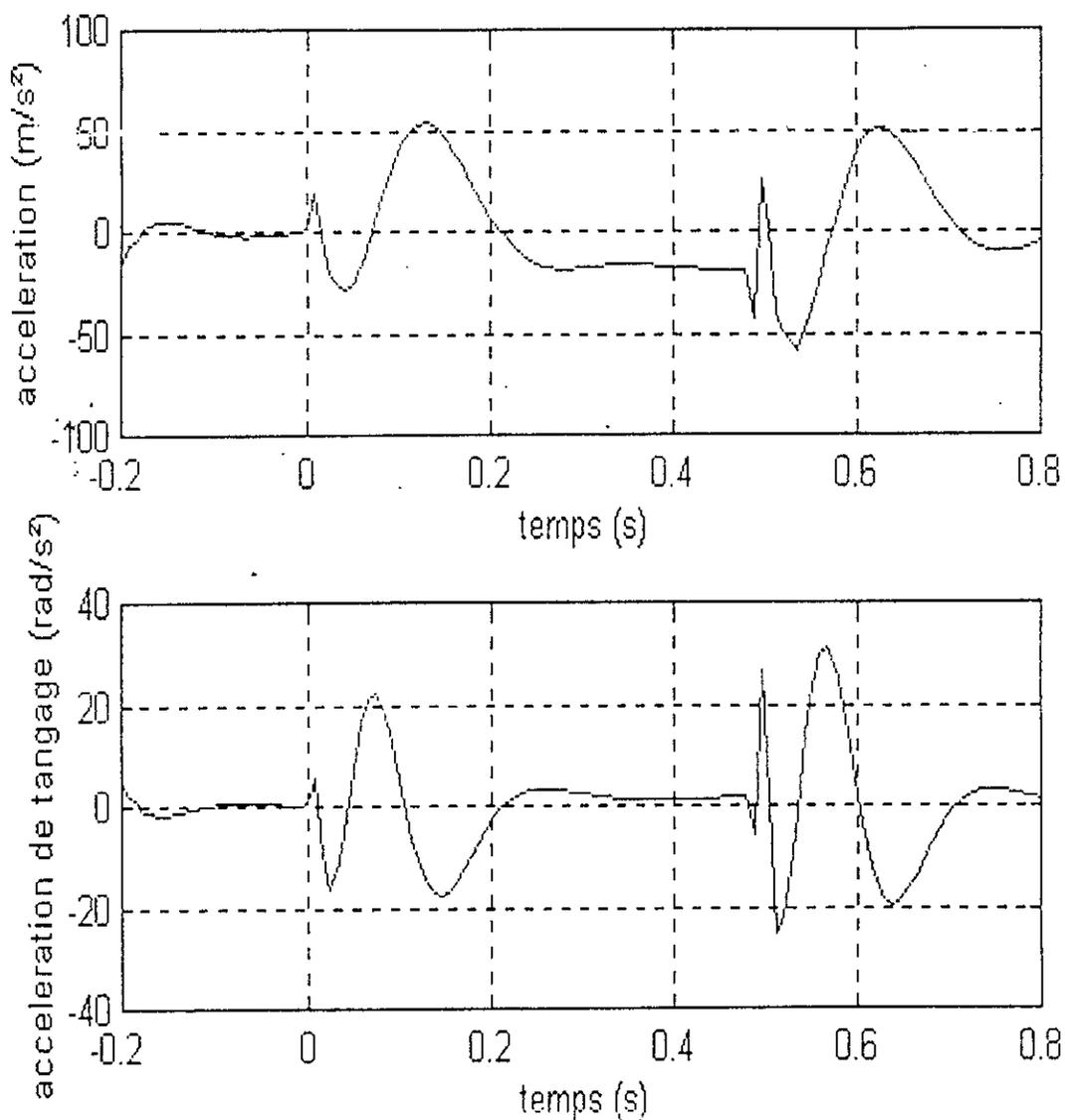


Fig. (5.11) : accélérations du centre de gravité (Z) et de l'angle de tangage (β) pour une entrée de bosse d'une suspension active avec pré-information ($\tau = 0.8$ sec)

V-2.3.Sensibilité aux variations paramétriques de la commande pré-informée

nous avons utilisés dans cette partie la fonction de pourcentage de sensibilité car leur unité ne dépend que de l'unité de la variable, ce qui nous permet de faire une comparaison de l'influence des différents paramètres sur la variable. On prend une variation de 50% des paramètres M (la moitié de masse du châssis et de malade) et h (raideur de pneu).

Les fonctions de pourcentage de sensibilité relatives aux déplacements verticaux en avant et en arrière du brancard sont données aux figures (5.12), (5.13) respectivement pour une entrée échelon unitaire et bosse.

On remarque que l'effet de la variation du paramètre M est envisagé sur les déplacements du châssis, par contre le paramètre h influe considérablement sur les déplacements des essieux.

Il faut signaler qu'après l'intervention de la perturbation extérieure, les déplacements verticaux du brancard avant et arrière du système augmenté deviennent les même que celle du système sans variations paramétriques du fait que les fonctions de pourcentage de sensibilité correspondantes s'annulent en régime établis.

Les déplacements du châssis (Z , β) et leurs accélérations sont donnés respectivement aux figures (5.14), (5.16) pour une entrée échelon unitaire, et aux figures (5.15), (5.17) pour une entrée de bosse.

On remarque que les déplacements verticaux presque restent les mêmes, mais il faut noter qu'il existe une légère dégradation au niveau des accélérations.

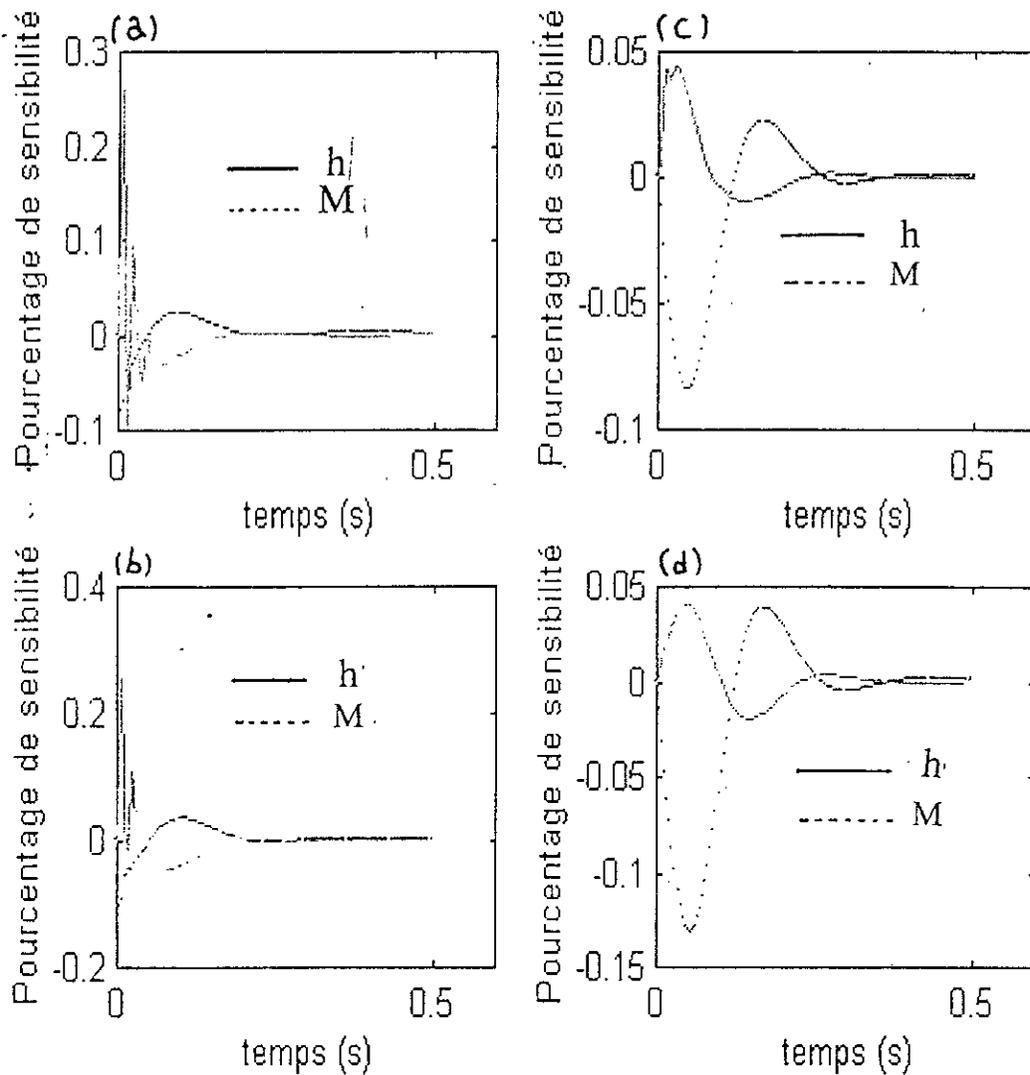


Fig.(5.12) : pourcentages de sensibilité relatifs au déplacement de l'essieux avant (a) et arrière (b) et de l'avant du châssis (c) et de l'arrière (d), pour une variation de 50% de M et h à une entrée échelon unitaire

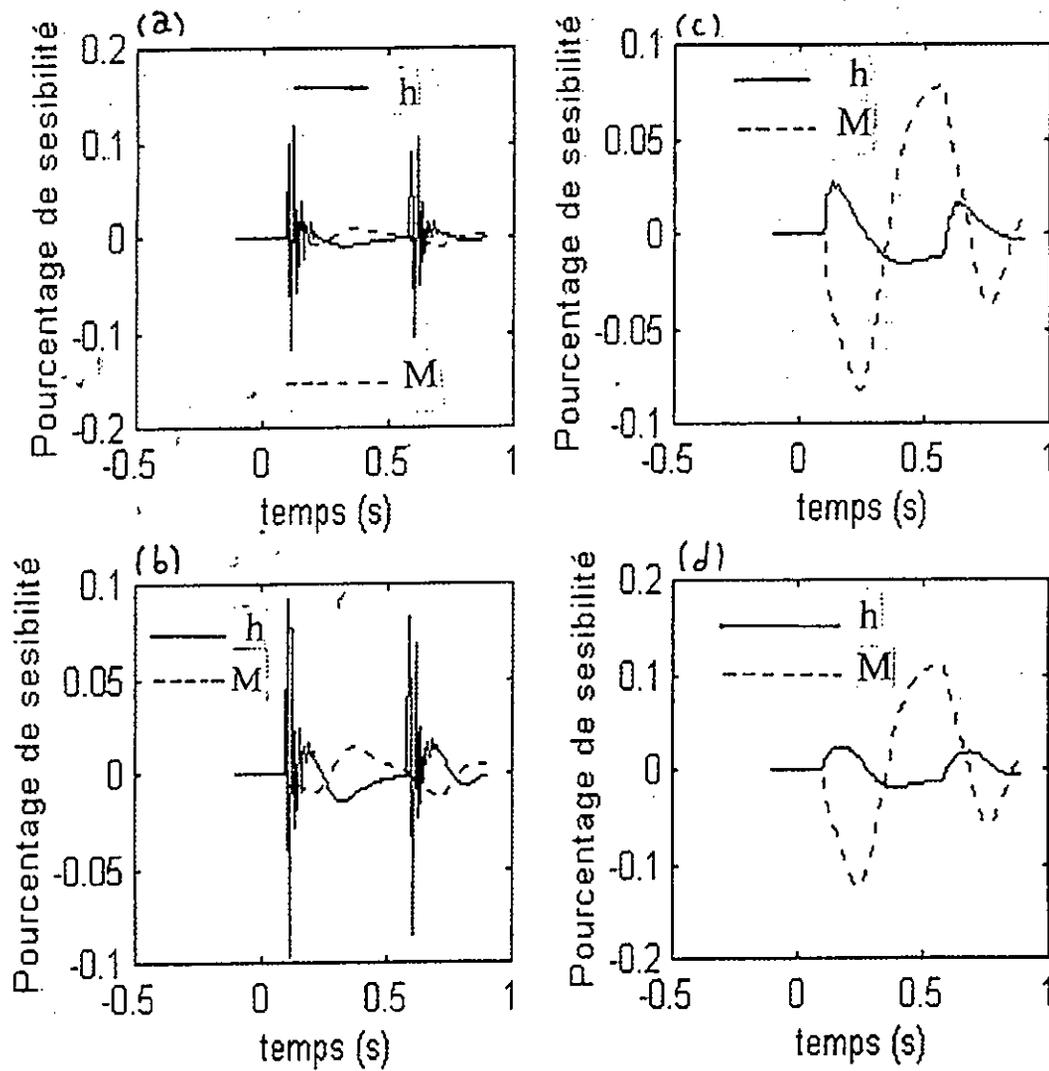


Fig.(5.13) : pourcentages de sensibilité relatifs au déplacement de l'essieux avant (a) et arrière (b) et de l'avant du châssis (c) et de l'arrière (d), pour une variation de 50% de M et h à une entrée de bosse

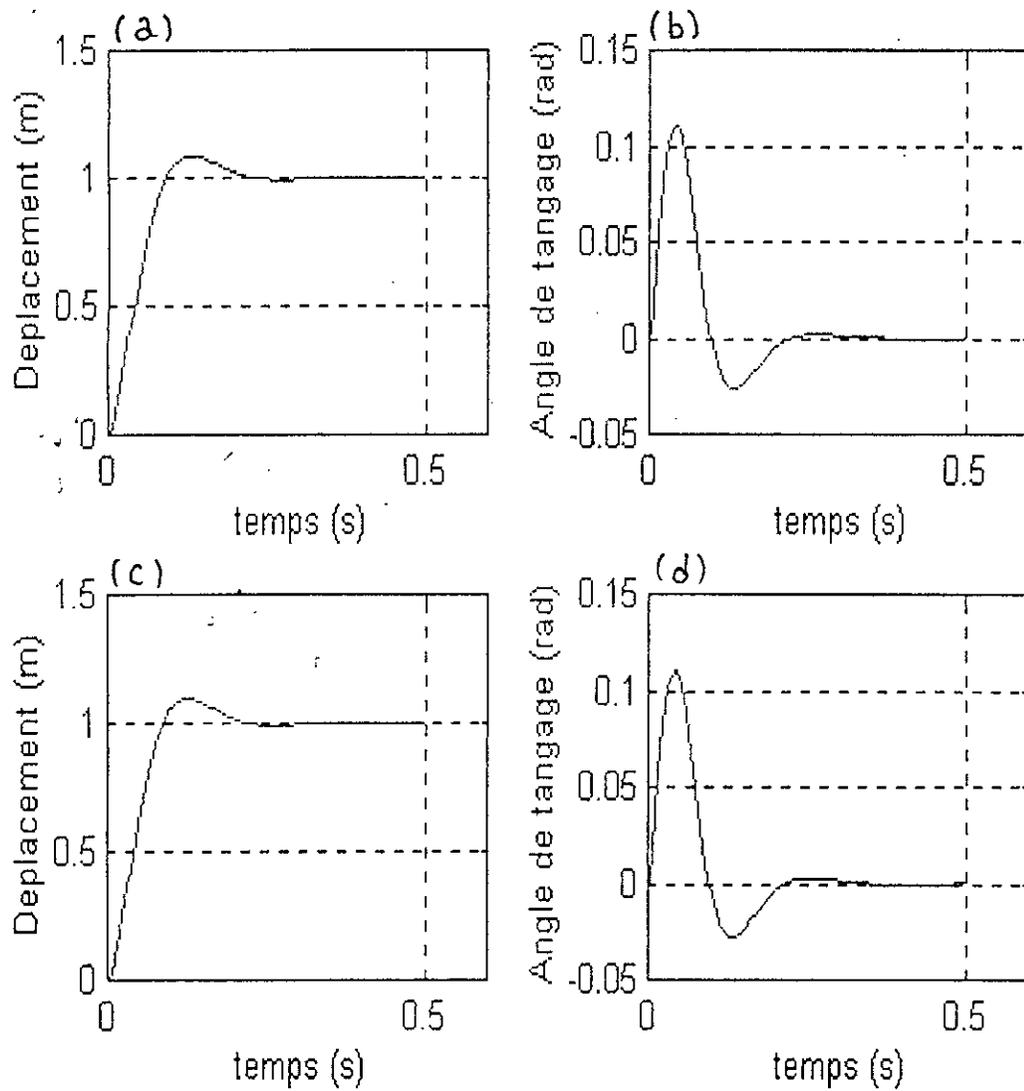


Fig.(5.14) : déplacements du centre de gravité (Z) et de l'angle de tangage (β) pour une variation de 50% de M (a), (b) et une variation de 50% de h (c), (d) à une entrée échelon unitaire

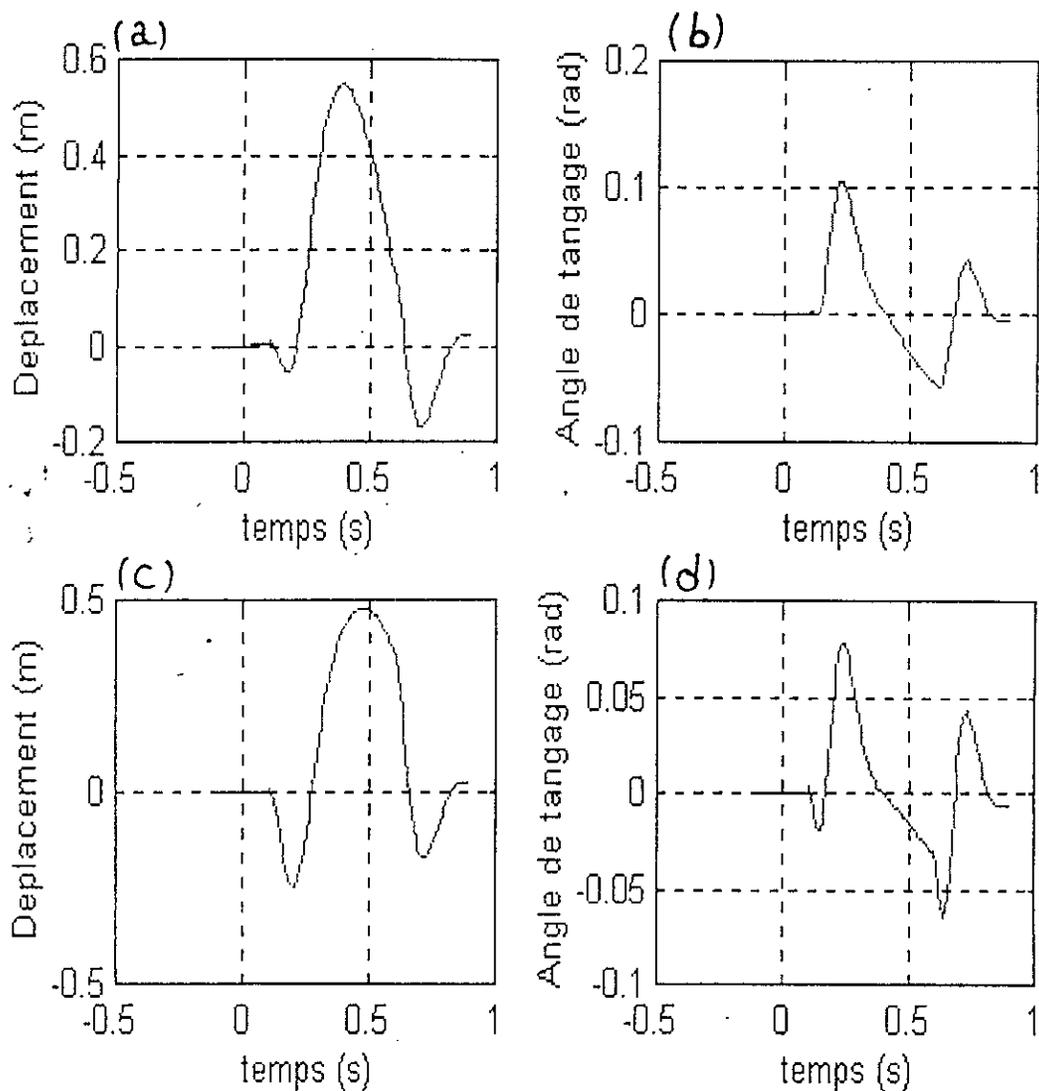


Fig.(5.15) : déplacements du centre de gravité (Z) et de l'angle de tangage (β) pour une variation de 50% de M (a), (b) et une variation de 50% de h (c), (d) à une entrée de bosse

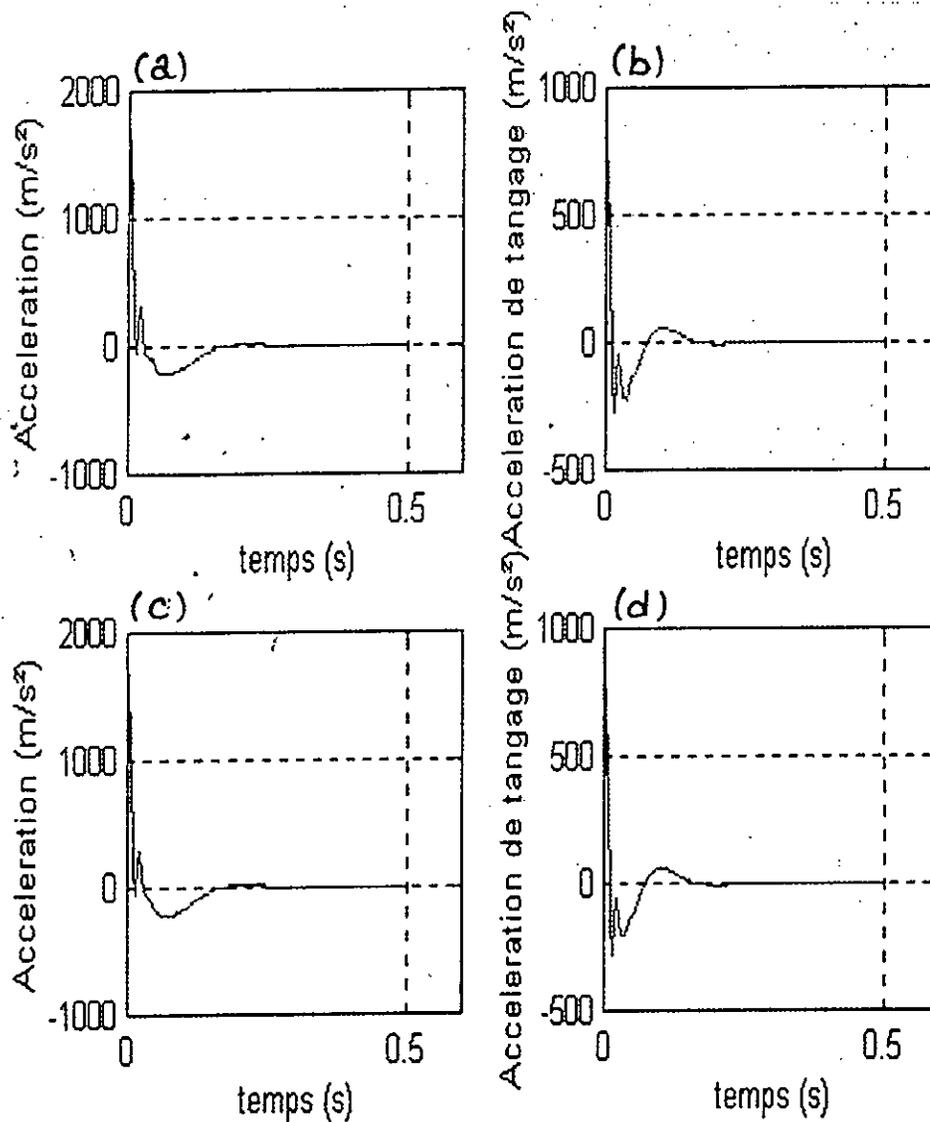


Fig.(5.16) : accélérations du centre de gravité (Z) et de l'angle de tangage (β) pour une variation de 50% de M (a), (b) et une variation de 50% de h (c), (d) à une entrée échelon unitaire

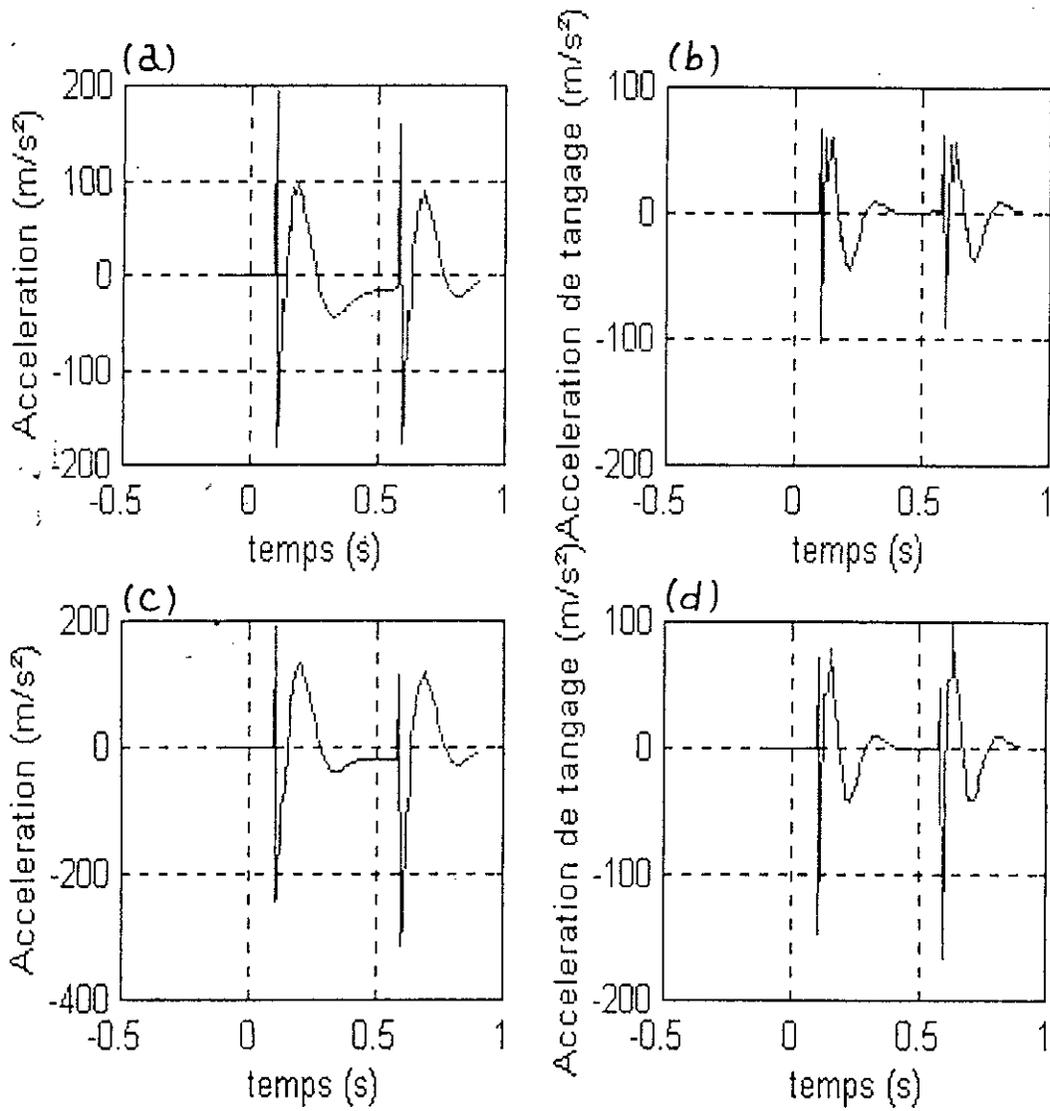


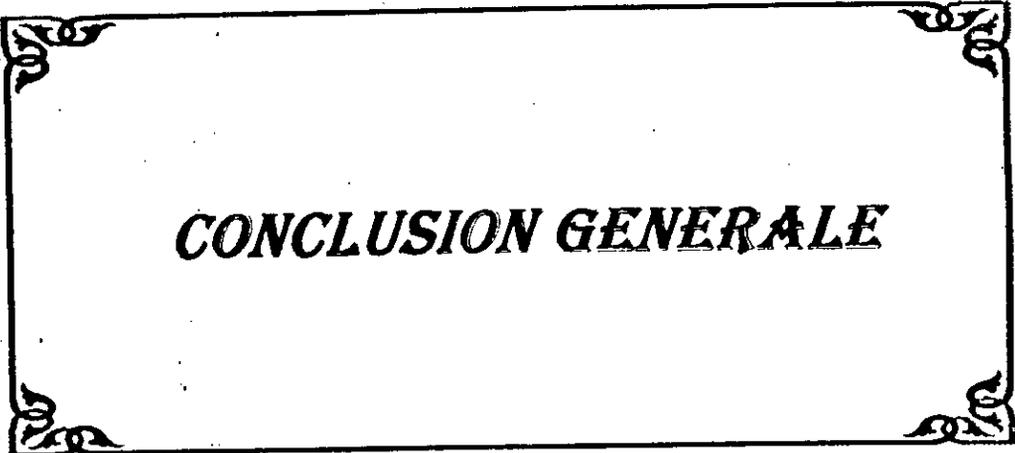
Fig.(5.17) : accélérations du centre de gravité (Z) et de l'angle de tangage (β) pour une variation de 50% de M (a), (b) et une variation de 50% de h (c), (d) à une entrée de bosse

V-3. Conclusion

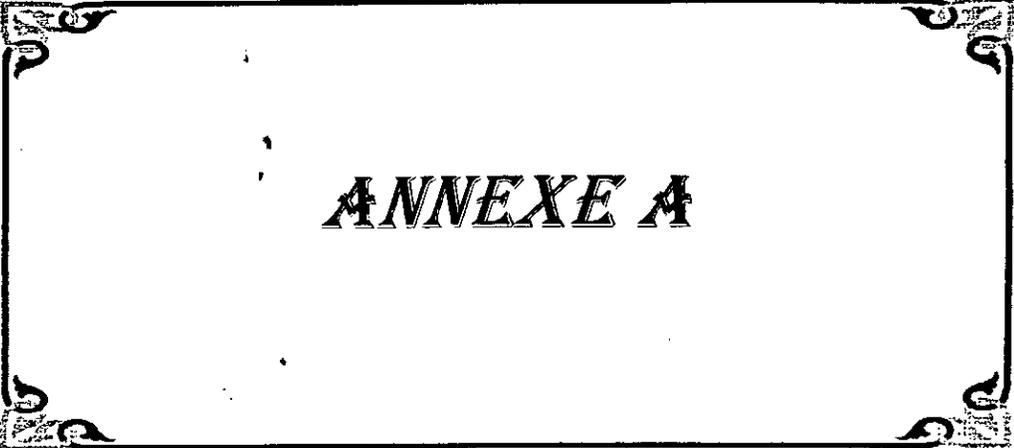
Avec le système de suspension active on obtient un système qui réduit les amplitudes et le temps de réponse, par conséquent améliore les accélérations comparant à ce de système de suspension passive.

Le système de suspension active avec pré-information offre de bon confort à cause de la réduction considérable des accélération, ceci est revenu à la diminution des amplitudes et l'augmentation du temps de réponses.

L'optimisation du système augmenté d'écrit dans le Chapitre IV, donne des résultats plus proches que celle du système de suspension active avec pré-information, mais une légère dégradation est observée.



CONCLUSION GENERALE



ANNEXE A

Les systèmes de suspension passives sont considérés comme "traditionnel" suspension moyenne.

Les éléments principaux de ce modèle de suspension consistent à des ressorts, amortisseurs connectés aux corps du moyeu de la roue, possiblement des ressorts traditionnels pour supporter le brancard.

Les autres éléments de ce système sont comme ceux dans le système de suspension active (voir figure 3).

Dans cette annexe on va formuler les équations différentielles du système de suspension passive, puis leur formulation matricielle.

La forme générale de l'équation de Lagrange est :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{P}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial P_i} = Q_i \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (A-1)$$

Avec :

$$L = T - V$$

T et V sont respectivement, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système, qui sont données respectivement par :

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_3 \dot{x}_3^2 + \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\beta}^2 \\ V = \frac{1}{2} h_1 (x_1 - x_a)^2 + \frac{1}{2} h_3 (x_3 - x_b)^2 + \frac{1}{2} k_1 (x_2 - x_1)^2 \\ \quad + \frac{1}{2} k_3 (x_4 - x_3)^2 \end{array} \right. \quad (A-2)$$

Q_i représentent les forces généralisées qui sont données par :

$$\begin{cases} Q_1 = -a_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ Q_2 = -a_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) \\ Q_3 = a_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + a_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) \\ Q_4 = a_1d_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - a_3d_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) \end{cases} \quad (\text{A-3})$$

Puisque T est indépendante de P_i et V est indépendante de \dot{P}_i , donc on peut réduire l'équation (A-1) à :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{P}_i} \right] + \frac{\partial V}{\partial P_i} = Q_i, \quad i=1,2,3,4 \quad (\text{A-4})$$

Pour un angle de tangage faible ($\beta \cong \text{tang } \beta$), on peut écrire :

$$\begin{cases} x_2 = Z + d_1\beta \\ x_4 = Z - d_2\beta \end{cases} \quad (\text{A-5})$$

L'application des équations de (A-2) à (A-5) donne les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases}
 \ddot{x}_1 = \frac{h_1}{M_1}(x_a - x_1) - \frac{k_1}{M_1}(x_1 - x_2) - \frac{a_1}{M_1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\
 \ddot{x}_3 = \frac{h_3}{M_3}(x_b - x_3) - \frac{k_3}{M_3}(x_3 - x_4) - \frac{a_3}{M_3}(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) \\
 \ddot{x}_2 = \left(\frac{k_1}{M} + \frac{d_1^2 k_1}{J}\right)(x_2 - x_1) - \left(\frac{k_3}{M} - \frac{k_3 d_1 d_2}{J}\right)(x_4 - x_3) \\
 \quad + \left(\frac{a_1}{M} + \frac{a_1 d_1^2}{J}\right)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \left(\frac{a_3}{M} - \frac{a_3 d_1 d_2}{J}\right)(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) \\
 \ddot{x}_4 = -\left(\frac{k_1}{M} - \frac{d_1 d_2 k_1}{J}\right)(x_2 - x_1) - \left(\frac{k_3}{M} - \frac{d_2^2 k_3}{J}\right)(x_4 - x_3) \\
 \quad + \left(\frac{a_1}{M} - \frac{a_1 d_1 d_2}{J}\right)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \left(\frac{a_3}{M} - \frac{a_3 d_2^2}{J}\right)(\dot{x}_3 - \dot{x}_4)
 \end{cases}$$

On suppose les variables d'etat suivantes :

$$\begin{aligned}
 x_5(t) = \dot{x}_1(t) \quad , \quad x_6(t) = \dot{x}_2(t) \quad , \quad x_7(t) = \dot{x}_3(t) \\
 x_8(t) = \dot{x}_4(t)
 \end{aligned} \tag{A-7}$$

L'utilisation des équations (A-6) et (A-7) donne la forme matricielle suivante :

$$\dot{X}(t) = A X(t) + DZ(t) \tag{A-8}$$

Avec les deux matrices A et D sont données par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{h_1 + k_1}{M_1} & \frac{k_1}{M} & 0 & 0 & -\frac{a_1}{M_1} & +\frac{a_1}{M_1} & 0 & 0 \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} & \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} & \alpha_{67} & \alpha_{68} \\ 0 & 0 & \frac{h_3 + k_3}{M_3} & \frac{k_3}{M_3} & 0 & 0 & -\frac{a_3}{M_3} & \frac{a_3}{M_3} \\ \alpha_{81} & \alpha_{82} & \alpha_{83} & \alpha_{84} & \alpha_{85} & \alpha_{86} & \alpha_{87} & \alpha_{88} \end{bmatrix}$$

et :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{h_1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{M_3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{61} &= -\alpha_{62} = \frac{k_1}{M} + \frac{d_1^2 k_1}{J} \\ \alpha_{63} &= -\alpha_{64} = \frac{k_3}{M} - \frac{k_3 d_1 d_2}{J} \\ \alpha_{65} &= -\alpha_{66} = \frac{a_1}{M} + \frac{d_1^2 a_1}{J} \\ \alpha_{67} &= -\alpha_{68} = \frac{a_3}{M} - \frac{d_1 d_2 a_3}{J} \\ \alpha_{81} &= -\alpha_{82} = \frac{k_1}{M} - \frac{d_1 d_2 k_1}{J} \\ \alpha_{83} &= -\alpha_{84} = \frac{k_3}{M} + \frac{d_2^2 k_3}{J} \\ \alpha_{85} &= -\alpha_{86} = \frac{a_1}{M} - \frac{a_1 d_1 d_2}{J} \\ \alpha_{87} &= -\alpha_{88} = \frac{a_3}{M} + \frac{a_3 d_2^2}{J} \end{aligned} \right\}$$

De même que la suspension active, le vecteur de sortie $Y(t)$ s'écrit sous la forme :

$$Y(t) = CX(t) \tag{A-9}$$

où :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \\ y_3(t) = x_3(t) \\ y_4(t) = x_4(t) \end{bmatrix}$$

Les deux dernières équations (A-8), (A-9) représentent aussi comme dans le cas de suspension active, le modèle d'un système linéaire invariant dans le temps .

Les graphes établis ci-dessous pour la suspension passive du brancard, sont simulés sur ordinateur avec l'utilisation du logiciel MATLAB et des mêmes données numériques du système de suspension de chapitre V

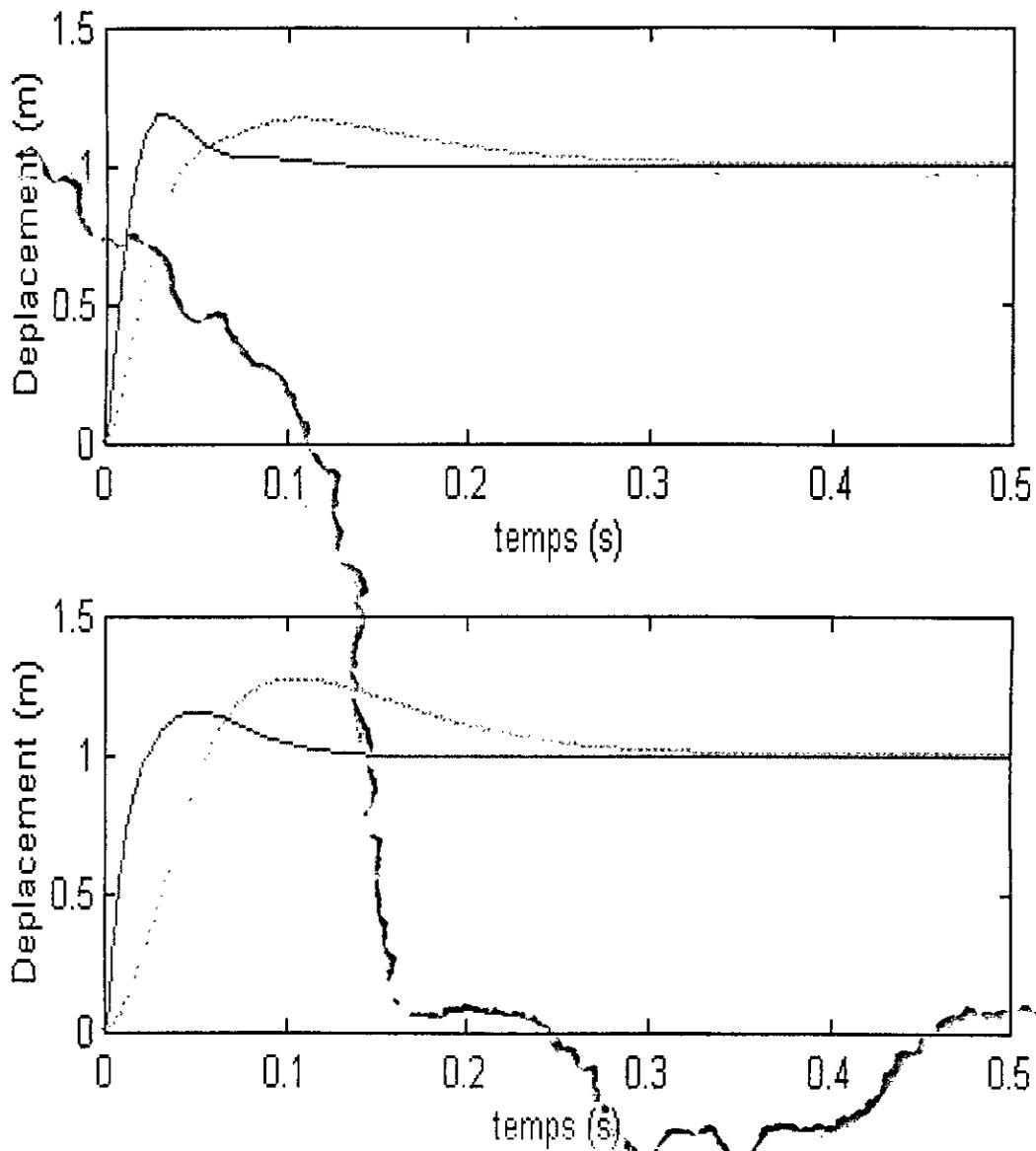


Fig. (A.1) : déplacements des essieux avant et arrière et des points de connexion au châssis pour une entrée échelon unitaire de la suspension passive

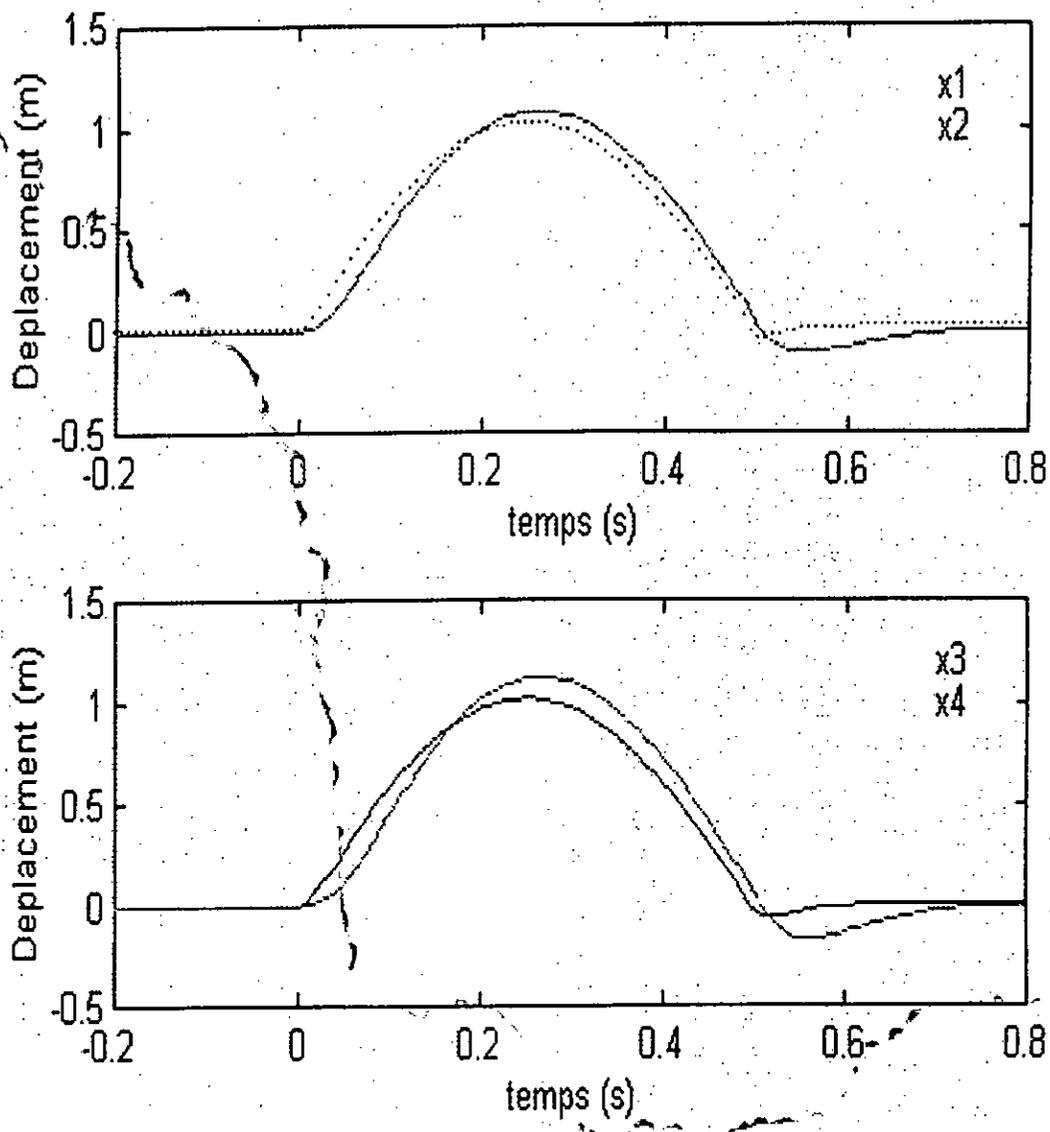


Fig. (A.2) : déplacements des essieux avant et arrière et des points de connexion au châssis pour une entrée de bosse de la suspension passive

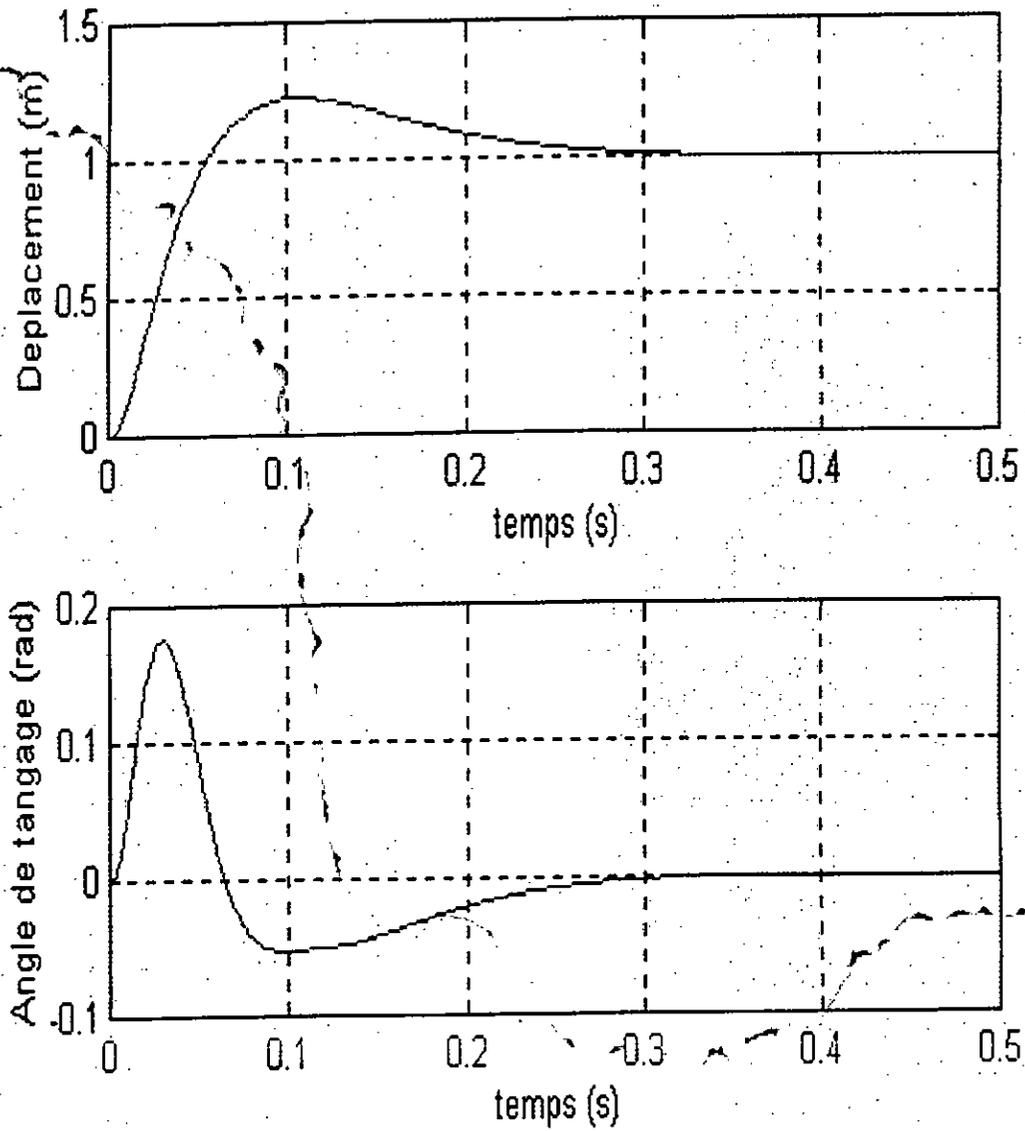


Fig.(A.3) : déplacements du centre de gravité (Z) et de l'angle de tangage (β) pour une entrée échelon unitaire d'une suspension passive

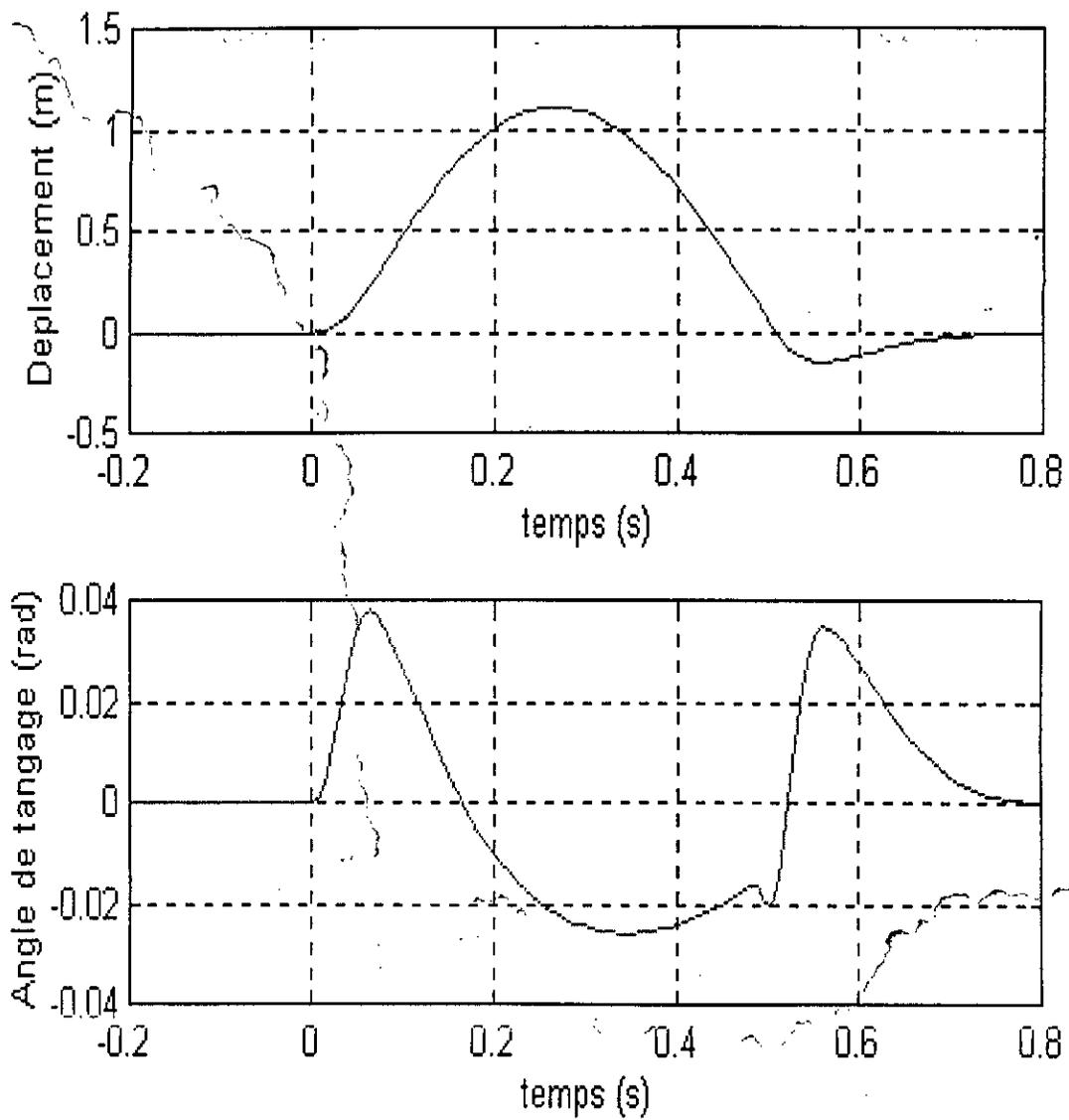


Fig.(A.4) : déplacements du centre de gravité (Z) et de l'angle de tangage (β) pour une entrée de bosse d'une suspension passive

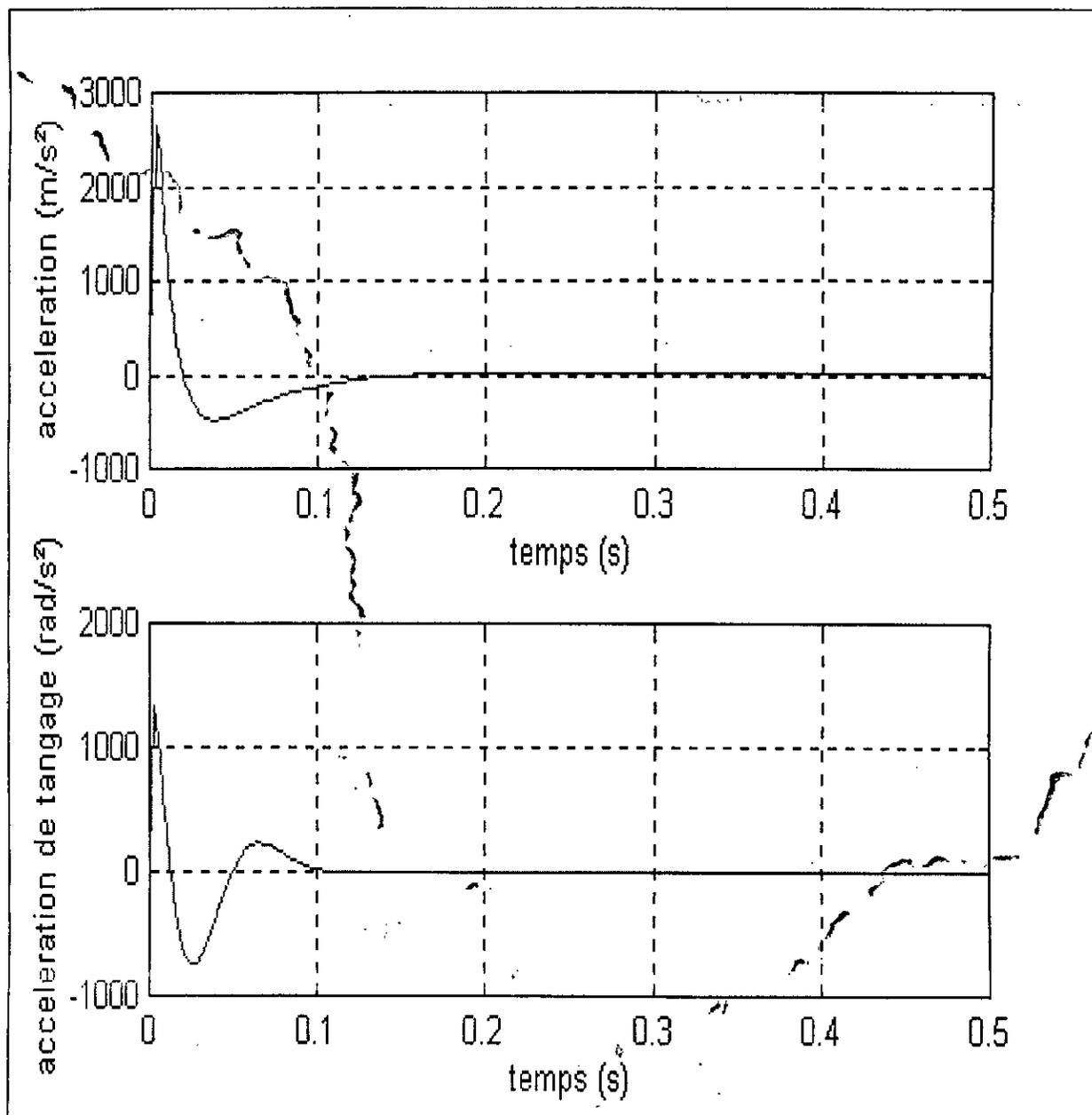


Fig. (A.5) : accélérations du centre de gravité (Z) et de l'angle de tangage (β) pour une entrée échelon unitaire d'une suspension passive

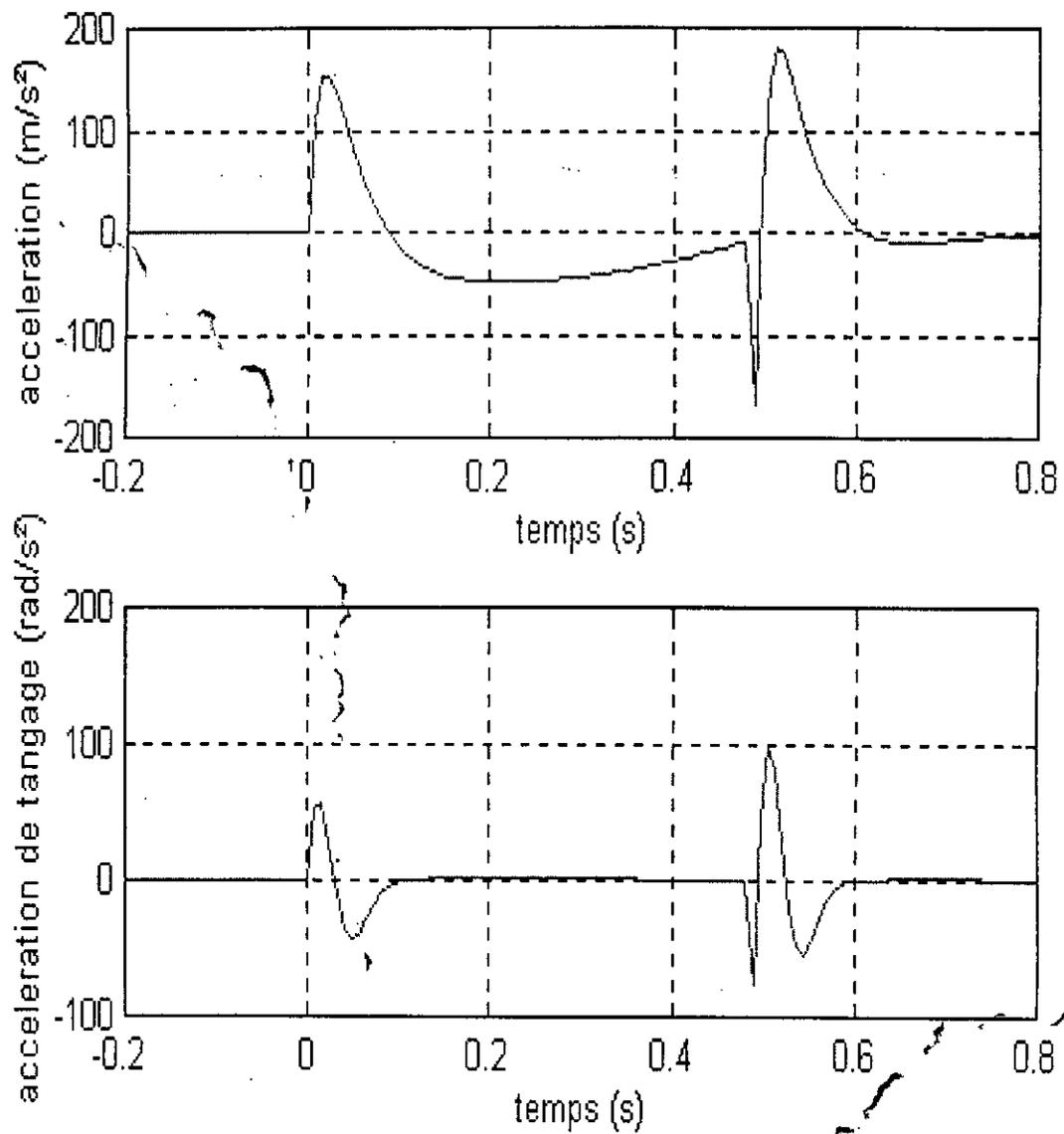


Fig. (A.6) : accélérations du centre de gravité (Z) et de l'angle de tangage (β) pour une entrée de bosse d'une suspension passive

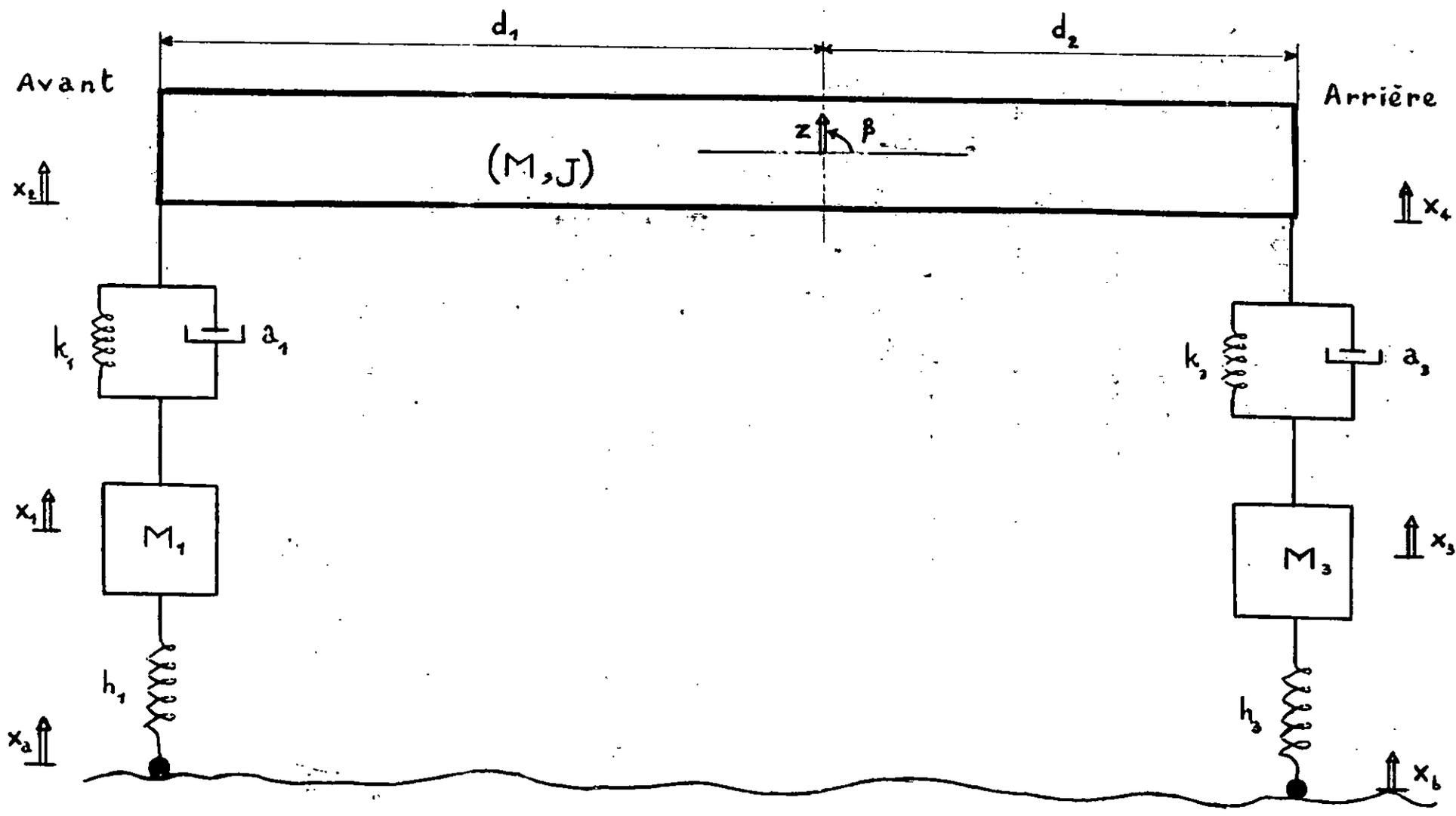


Figure 3 : Modélisation du système d'une moitié du brancard dote d'une suspension passive

[13] **A. Moussaoui** : Thèse de magister (1994).

 Analyse et réduction optimale de la sensibilité de la commande pré-informée.

[14] **R. C. Redfeld et D. C. Karnopp** (1989).

 Performance sensitivity of an activity damped vehicle suspension de feed-back variation.

ERRATA

Dans ce tableau, on résume les différents erreurs de frappe et leurs corrections.

Page	Ligne	Erreur	Correction
2	21	<i>CRAIGHEAD</i>	<i>TOMPSON et DAVIS</i>
2	22	<i>TOMPSON et DAVIS</i>	<i>CRAIGHEAD</i>
15	6	M_1	M
19	16	$q_4 (x_3(t) - x_4(t))$	$q_4 (x_3(t) - x_4(t))^2$
24	13	figure (1)	figure (2)
27	13	A^T	$A^T.K$
28	5	- A	A
29	2	un horizon fini	un horizon infini
30	10	infini	fini
35	3	$\frac{\partial \lambda}{\partial v(\lambda)}$	$\frac{\lambda}{v(\lambda)}$
36	8	+ $X(t, \lambda_0)$	+ $A_{\lambda_0} X(t, \lambda_0)$
45	10	q_1, q_3	q_2, q_4
45	11	$q_2 = q_4 = 2$	$q_1 = q_3 = 2$
48	fig (5.2)	Erreur au titre	déplacement des essieux avant et arrière et des points de connection au chassis pour une entrée de basse d'une suspension active