

5/96  
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات

BIBLIOTHEQUE - المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

وزارة

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*ANALYSE DES ASPECTS MASSIQUE  
ET THERMIQUE DANS LES MILIEUX  
POREUX PAR UNE ETUDE DE  
SENSIBILITE AUX PARAMETRES.*

Proposé par :  
Mr S. LARBI

Etudié par :  
Dj. BENABDERRAHMANE  
K. AIT SIDHOUM

Dirigé par :  
Mr S. LARBI

PROMOTION : JUIN 1996

E.N.P. 10, Avenue Hassen Badi -El Harrach - Alger

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : *GENIE MECANIQUE*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

ANALYSE DES ASPECTS MASSIQUE ET THERMIQUE  
DANS LES MILIEUX POREUX  
PAR UNE ETUDE DE SENSIBILITE AUX PARAMETRES

Proposé par :  
Mr S. LARBI

Etudié par :  
Dj. BENABDERRAHMANE  
K. AIT SIDHOUM

Dirigé par :  
Mr S. LARBI

PROMOTION : JUIN 1996

E.N.P. 10, Avenue Hassen Badi - El Harrach - Alger

## REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier tout particulièrement notre promoteur le docteur S. LARBI pour sa confiance, ses encouragements, son suivi et pour les conseils qu'il a apportés pour l'achèvement de ce projet.

Nos remerciements vont aussi à . . .

Monsieur le président et Messieurs les membres du Jury

L'ensemble des enseignants qui ont contribué à notre formation

Sans oublier tous nos amis et aussi tout le personnel de la bibliothèque

### RESUME :

Nous nous sommes intéressés dans ce travail aux trois aspects ; description physique, formulation mathématique et résolution numérique des phénomènes couplés de transfert de chaleur et de masse en milieu poreux.

Le modèle mathématique utilisé découle des travaux de *PHILIP* et *DE VRIES*, ce modèle est ensuite appliqué au processus de condensation unidirectionnel dans un milieu poreux non saturé homogène et isotrope, soumis à de faibles gradients thermiques dans le cadre d'une étude de sensibilité aux paramètres qui a pour but de simplifier aussi bien le modèle mathématique que la résolution numérique.

### ABSTRACT :

We are interested in this thesis to three aspects of heat and mass transfer phenomena in porous media ; physic description, mathematical formulation and numeric resolution.

The mathematical model used here is derived from works of *PHILIP* and *DE VRIES* and applied to the unidirectional condensation process in an unsaturated homogenous and isotropic porous media, at small temperature gradient with a specific intent to simplify the mathematical model and numeric resolution .

SOMMAIRE

	Page
Introduction .....	1
Chapitre 1 Les milieux poreux .....	4
1.1 Description d'un milieu poreux .....	4
1.1.1 classe des milieux poreux .....	5
Milieux poreux non consolidés .....	5
Milieux poreux consolidés .....	5
1.1.2 Grandeurs spécifiques .....	5
Surface spécifique .....	7
Porosité .....	7
Tortuosité .....	7
1.2 Mécanismes de fixation de l'humidité dans une structure poreuse .....	8
1.2.1 Adsorption physique et condensation capillaire .....	8
Adsorption physique .....	8
Examen des différents mécanismes de fixation de l'humidité dans la zone hygroscopique .....	10
La condensation capillaire .....	10
1.2.2 Condensation thermique .....	11
1.2.3 Capillarité .....	12
Mouillage .....	12
1.3 Influence des propriétés du matériau sur la quantité d'eau fixée .....	15
Chapitre 2 Modélisation mathématique des transferts de masse et de chaleur en milieux poreux ..	18
2.1 Hypothèses .....	18
2.2 Equations de conservation .....	19
2.2.1 Conservation de la masse .....	20
Mouvement de l'humidité en phase liquide .....	20
Mouvement de l'humidité en phase vapeur .....	23
Equation de conservation de la masse globale .....	26
2.2.2 Conservation d'énergie .....	30
2.2.3 Système résultant .....	32
Modèle complet de PHILIP et DE VRIES .....	32
Modèle de PHILIP et DE VRIES simplifié .....	35
2.3 Application du modèle mathématique au modèle physique .....	36
2.3.1 Modèle physique .....	36
2.3.2 Conditions initiales et aux limites .....	36
Conditions initiales .....	36
Conditions aux limites .....	36
2.3.3 Modèle mathématique appliqué .....	37
Modèle de PHILIP et DE VRIES .....	37
Modèle de PHILIP et DE VRIES simplifié .....	37
Modèle de PHILIP et DE VRIES généré .....	37

Chapitre 3	Résolution numérique.....	39
3.1	Méthode des éléments finis .....	39
3.1.1	Application de la méthode des éléments finis au cas général .....	40
	Formulation intégrale.....	40
	Résidus .....	40
	Méthode des résidus pondérés .....	40
	Transformation des formes intégrales .....	40
	Forme intégrale faible.....	40
	Approximation des inconnues.....	41
	Discrétisation des formes intégrales.....	41
	Choix des fonctions de pondération.....	41
	Méthode de GALERKIN .....	41
	Méthode des éléments finis.....	42
3.1.2	Application de la méthode des éléments finis au cas traité .....	43
	Formulation intégrale.....	43
	Formulation intégrale faible.....	43
	Méthode de GALERKIN.....	44
	Méthode des éléments finis.....	45
3.2	Méthode des différences finies .....	48
	Consistance.....	48
	Stabilité.....	48
	Convergence.....	48
	Théorème de LAX.....	48
3.2.1	Application de la méthode des différences finies au cas général.....	49
	Méthode progressive.....	50
	Méthode régressive.....	52
	Méthode de CRANK NICOLSON .....	54
	Synthèse des méthodes .....	57
3.2.2	Application de la méthode des différences finies au cas traité .....	57
	Discrétisation des équations.....	58
	Discrétisation de l'équation thermique.....	58
	Discrétisation de l'équation hydrique.....	61
	Résolution du système résultant.....	65
Chapitre 4	Résultats et interprétations.....	66
4.1	Interprétations des résultats.....	68
4.1.1	Comparaison des modèles de PHILIP-DE VRIES complet et simplifié... ..	68
4.1.2	Comparaison des discrétisations avec 21 et 42 noeuds .....	68
4.1.3	Influence de la chaleur due au changement de phase et de la conductivité thermique .....	69
4.1.4	Comparaison des modèles généré et complet.....	70
4.1.5	Comparaison des résultats obtenus par la MEF et ceux obtenus par la MDF pour l'étude du modèle généré .....	70
	Conclusion générale.....	71
4.2	Présentation des résultats.....	72
4.2.1	Influence des termes d'accumulation en phase vapeur .....	72
4.2.2	Influence du nombre de noeuds de discrétisation .....	76
4.2.3	Influence du changement de phase.....	79
4.2.4	Influence de la conductivité thermique.....	83
4.2.5	Modèle généré .....	87
4.2.6	Comparaison des méthodes d'éléments finis et des différences finies appliquées au modèle généré.....	91
	ANNEXE A.....	95
	BIBLIOGRAPHIE .....	

NOMENCLATURE

Symboles

a	coefficient de transfert de masse global [m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> ]
A	surface de contrôle [m <sup>2</sup> ]
A <sub>s</sub>	surface spécifique [m <sup>2</sup> ]
c	chaleur spécifique ou massique [J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
c <sub>v</sub>	chaleur spécifique à volume constant [J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
c <sub>p</sub>	chaleur spécifique à pression constante [J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
C	chaleur volumique [J.m <sup>-3</sup> .K <sup>-1</sup> ]
D	coefficient de diffusion moléculaire de la vapeur d'eau dans l'air [m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> ]
D <sub>T</sub>	coefficient total de transfert de l'humidité dû à ∇T [m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
D <sub>θ</sub>	coefficient total de transfert de l'humidité dû à ∇θ [m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> ]
d	diffusivité thermique [m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> ]
d	diamètre [m]
f	facteur empirique ou fonction de pondération [-]
g	accélération de la pesanteur [m.s <sup>-2</sup> ]
h	enthalpie spécifique [J.kg <sup>-1</sup> ]
h	pas d'espace [m]
i	phase i
I	terme source ou puit (création ou de dissipation) [kg.m <sup>-2</sup> .s <sup>-1</sup> ]
J <sub>m</sub>	densité du flux de masse [kg.m <sup>-2</sup> .s <sup>-1</sup> ]
J <sub>q</sub>	densité du flux de chaleur [J.m <sup>-2</sup> .s <sup>-1</sup> ]
k <sup>-z</sup>	vecteur unitaire dans la direction de z [-]
k	perméabilité intrinsèque du milieu [m <sup>2</sup> ] ou [Darcy]

Symboles grec

α, η	coefficients traduisant l'accumulation de l'humidité en phase vapeur
τ	tortuosité
ε	porosité
θ	teneur volumétrique en humidité
θ	angle de contact entre fluides
θ	coefficient de pondération
λ	conductivité thermique (apparente)
ρ	densité ou masse volumique
ω	teneur massique ou pondérale en humidité
δ	coefficient de thermomigration

indices

c	critique
s	phase solide
a	phase gazeuse
v	phase vapeur
e	phase liquide
t	total
s	saturation
g	gravité
o	état sec du matériau

exposants

*	grandeur équivalente du matériau
*	en équivalent liquide condensé
e	élémentaire

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
 المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
 Ecole Nationale Polytechnique

K	1 Darcy = 9,87.10 <sup>9</sup> cm <sup>2</sup>
K	conductivité hydraulique [m.s <sup>-1</sup> ]
l	longueur d'un élément [m]
L	chaleur latente d'évaporation de l'eau [J.kg <sup>-1</sup> ]
L	épaisseur de l'échantillon [m]
L	opérateur de dérivation
L <sub>e</sub>	longueur moyenne des lignes de courant
M	masse molaire [kg.mol <sup>-1</sup> ]
M	point de la surface libre
M'	point à l'intérieur du capillaire
m	masse de la substance [kg]
Φ(t)	flux de masse [m.s <sup>-1</sup> ]
M(t)	loi exprimant la masse d'eau condensée ou évaporée en fonction du temps
n	nombre de noeuds
N	normale
p <sub>v</sub>	pression partielle de la vapeur d'eau [Pa]
P	pression total du gaz [Pa]
R	constante universelle des gaz [J.mol <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
R <sub>i</sub> , R <sub>z</sub>	rayons de courbures [m]
r	rayon du capillaire [m]
s	pas de temps [s]
S	surface de séparation des grains et des pores [m <sup>2</sup> ]
t	temps [s]
T	température [°K]
v	volume spécifique ou volume massique [m <sup>3</sup> .kg <sup>-1</sup> ]
V	volume [m <sup>3</sup> ]
x, y	coordonnées horizontales [m]
z	composante verticale, comptée positivement vers le bas [m]

∇	opérateur de dérivation
δ	symbole de Kronecker
δ	variation
η	normale à la surface
Ω	domaine d'étude
Γ	frontière du domaine d'étude
φ	humidité relative
ψ	potentiel hydraulique ou succion
ν	viscosité cinématique
σ	tension superficielle
Δ	pas de discrétisation

c	situation d'équilibre hygroscopique
c	capillaire
o	caractéristique de la paroi
c	convectif
d	diffusionnel
m	matriciel
p	de pression
0	conditions initiales
Δ	valeur discrétisée
^	valeur approchée ou prédite

## INTRODUCTION

De nombreux matériaux, tant naturels qu'artificiels, sont des matériaux poreux dont l'espace interstitiel est saturé par un ou plusieurs fluides. La compréhension de leur comportement est importante dans plusieurs domaines d'application tels la géophysique, le séchage du bois dans l'industrie papetière, les sciences biologiques, la chimie, l'hydrologie, le génie civil (secteur du bâtiment) et l'extraction pétrolière,... Ces secteurs industriels, de grand poids économique, sont largement tributaires des méthodes d'étude et de calcul concernant les structures poreuses pour effectuer des prévisions aussi fiables que possible, soit qu'il faille minimiser ou supprimer des infiltrations, soit au contraire augmenter le débit fluide tiré d'un gisement.

Afin de trouver la connexion entre le monde des idées et le monde des phénomènes, les ingénieurs, grâce à leurs qualités d'observation et à leur esprit inventif, ont été amenés à proposer dans des situations concrètes bien déterminées des règles opératoires relativement satisfaisantes, malheureusement les exigences de la technique actuelle ne permettent plus de s'en contenter. La physique des milieux poreux et des écoulements de fluides qui peuvent s'y produire doit, comme tant d'autres disciplines des sciences mécaniques, quitter le stade empirique pour devenir pleinement scientifique si l'on veut que les ingénieurs et les géophysiciens intéressés puissent, eux aussi, progresser dans la maîtrise des phénomènes et des situations complexes qu'ils rencontrent.

Les transferts de chaleur et de masse ne sont pas déjà tellement simples à étudier, le problème devient encore plus complexe lorsqu'ils ont pour siège des milieux très difficiles à définir comme les milieux poreux. Les millions de grains, la variété inépuisable de leurs formes et de leurs dimensions, le réseau compliqué de leurs interstices, où mille détours possibles s'offrent au cheminement d'un fluide, semblent défier les ressources de la description. Cette richesse n'est qu'apparente et sa diversité superficielle donne bientôt une impression de monotonie profonde : ce sont toujours les mêmes grains, les mêmes pores qui se répètent indéfiniment, identiques à eux-mêmes en dépit de variations insignifiantes. La géométrie complexe des grains se ramène alors à la forme simple de quelques courbes granulométrique et les itinéraires capricieux des filets de courant se résument, à l'aide d'une propriété unique, la perméabilité.



Il n'est pas possible, dans le cadre de ce mémoire de fin d'études, de citer tous les travaux sur les milieux poreux effectués à ce jour, Nous nous bornerons dans la suite de l'exposé, à l'étude de l'un des premiers modèles mathématiques théoriques illustrant aussi bien la description que le couplage des phénomènes d'échanges de masse et de chaleur dans une structure poreuse, celui proposé par *PHILIP J.R.* et *DE VRIES D.A.* en 1957.

Néanmoins nous survolerons sommairement,

au premier chapitre, une partie de la théorie et notions relatives aux milieux poreux : description, classification... ; pour plus de détails les références [3, 4, 5 et 15] sont largement suffisantes.

Le deuxième chapitre sera consacré à la modélisation mathématique des phénomènes de transferts de chaleur et masse dans une structure poreuse qui est obtenue à partir des concepts et théories développés en mécanique des milieux continus. On aboutira à la formulation d'un système d'équations aux dérivées partielles représentant le modèle dit de *PHILIP* et *DE VRIES*.

La résolution de ce genre de systèmes d'équation aux dérivées partielles présente de grandes difficultés mathématiques, aussi dans la majorité des cas, des méthodes de résolution numériques utilisant des calculateurs sont généralement employées. Chose que nous ferons dans le troisième chapitre grâce à la méthode des éléments finis et celle des différences finies.

Quant au quatrième chapitre, nous y exposerons les résultats obtenus de l'étude des différentes variantes du modèle de *PHILIP* et *DE VRIES*, appliqué à un modèle physique particulier en utilisant les deux méthodes précédentes. Cette étude a pour but, d'une part, de simplifier autant que possible la modélisation mathématique de *PHILIP-DE VRIES* tout en gardant une représentation fidèle des phénomènes de transfert de chaleur et de masse qui se manifestent dans une structure poreuse et, d'autre part, à simplifier la résolution numérique par l'utilisation de méthodes de mise en oeuvre simple.

# **CHAPITRE PREMIER**

## **LES MILIEUX POREUX**

### **DESCRIPTION D'UN MILIEU POREUX**

Classes des milieux poreux.

Milieux poreux non consolidés

Milieux poreux consolidés

Grandeurs spécifiques.

Surface spécifique

Porosité

Tortuosité

### **MECANISMES DE FIXATION DE L'HUMIDITE DANS UNE STRUCTURE POREUSE**

Adsorption physique et condensation capillaire.

L'adsorption physique

EXAMEN DES DIFFERENTS MECANISMES DE FIXATION DE  
L'HUMIDITE DANS LA ZONE HYGROSCOPIQUE.

La condensation capillaire

Condensation thermique.

Capillarité.

Mouillage

### **INFLUENCE DES PROPRIETES DU MATERIAU SUR LA QUANTITE D'EAU FIXEE**

# 1 LES MILIEUX POREUX

## 1.1 DESCRIPTION D'UN MILIEU POREUX.

Un milieu poreux est un milieu dont la matrice solide, de forme quelconque, comprend des espaces interstitiels vides appelés pores. Ces pores peuvent contenir un fluide sous une ou plusieurs phases et communiquer entre eux. L'espace interstitiel ou espace poreux connecté est donc l'espace par l'intermédiaire duquel s'effectuent les échanges fluides.

Un milieu poreux dont les espaces interstitiels sont occupés par la même phase fluide est un milieu saturé. Par contre, un milieu poreux non saturé est un milieu où plusieurs phases fluides occupent ces mêmes espaces interstitiels. Il est ainsi saturé par rapport au fluide mais non saturé par rapport à une seule phase fluide de référence. Deux points du fluide saturant l'espace poreux sont toujours reliés par un trajet intérieur à cet espace et, dans ce sens, la phase fluide saturante est continue. La matrice est alors définie par simple complémentarité avec l'espace précédent.

On voit ainsi que la matrice peut être constituée à la fois d'une partie solide et d'un espace poreux occlus, saturé ou non, non connexe. Cet espace poreux occlus n'est le lieu d'aucune filtration. Quasi inexistant dans le cas des sols (sables, argiles), il existe indiscutablement dans les roches. Le milieu poreux peut être alors représenté par la superposition dans le temps et dans l'espace de deux milieux continus ; l'un représentant le squelette solide, l'autre la phase fluide [3].

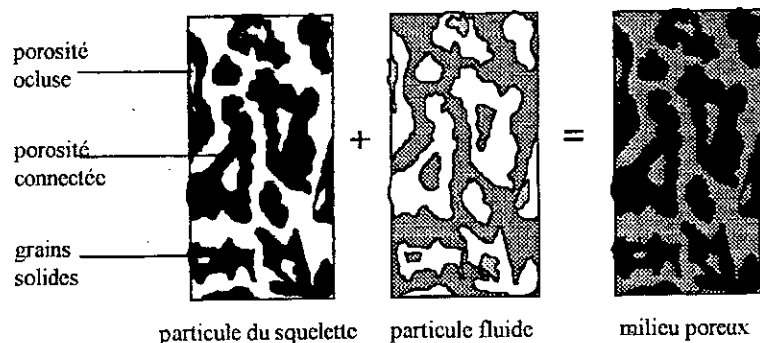


Figure 1- Le milieu poreux vu comme la superposition de deux milieux continus.

### 1.1.1 CLASSES DES MILIEUX POREUX.

**Milieux poreux non consolidés.** Un milieu poreux non consolidé est un milieu poreux dont la phase solide est constituée de grains ou de fibres non soudés entre eux [3]. Comme exemples de grains, on peut citer les graviers, les sables, le limon, les billes de verre ou d'acier, ... Pour les fibres, par contre, on rencontre deux catégories : les fibres minérales (amiante, laine de verre, ...) et les fibres organiques (coton, laine, ...).

**Milieux poreux consolidés.** Un milieu poreux consolidé est un milieu poreux dont la matrice solide est compacte et dont les grains ou fibres peuvent provenir du domaine minéral (roches calcaires, argiles, grès, ...) ou du domaine artificiel (céramiques, poudres frittées, ...). Les tissus végétaux et animaux peuvent aussi bien former la matrice [6].

### 1.1.2 GRANDEURS SPECIFIQUES.

Nous étudierons le cas d'un milieu poreux indéformable de phase solide (s) et dont lequel les pores sont occupés par un seul constituant fluide sous ses deux phases liquide (e) et vapeur (v) et par l'air sec. L'air sec et la vapeur d'eau constituent l'air humide ou la phase gazeuse (a).

On notera par  $m_s$ ,  $m_e$  et  $m_a$  les masses respectives de la phase solide, de la phase liquide et de la phase gazeuse et par  $v_s$ ,  $v_e$  et  $v_a$  leurs volumes respectifs [2].

La masse totale du matériau sera alors :

$$m_t = m_s + m_e + m_a \quad (1.1-1)$$

et son volume total

$$v_t = v_s + v_e + v_a \quad (1.1-2)$$

A partir des deux relations précédentes, nous pouvons définir la masse volumique équivalente du matériau  $\rho^*$ , la masse volumique de la phase solide  $\rho_s$  et la masse volumique apparente du matériau  $\rho_0$  ( qui correspond à l'état sec du matériau ) par, respectivement :

$$\rho^* = \frac{m_t}{v_t} \quad (1.1-3)$$

$$\rho_s = \frac{m_s}{v_s} \quad (1.1-4)$$

et

$$\rho_0 = \frac{m_s}{v_t} \quad (1.1-5)$$

Injectons la relation (1.1-1) dans (1.1-3) :

$$\rho^* = \frac{m_s + m_e + m_a}{v_t}$$

et exprimons la masse volumique équivalente en fonction de la masse volumique apparente :

$$\rho^* = \rho_0 \left( 1 + \frac{m_e}{m_s} + \frac{m_a}{m_s} \right) \quad (1.1-6)$$

En négligeant la masse de la phase gazeuse devant celle de la phase solide ou celle de la phase liquide, la relation (1.1-6) devient :

$$\rho^* = \rho_0 \left( 1 + \frac{m_e}{m_s} \right) \quad (1.1-7)$$

Les teneurs massique et volumique en humidité en phase liquide [17] sont respectivement :

$$\omega_e = \frac{m_e}{m_s} \quad (1.1-8)$$

et

$$\theta_e = \frac{v_e}{v_t} \quad (1.1-9)$$

alors qu'en phase vapeur, elles sont respectivement :

$$\omega_v = \frac{m_v}{m_s} \quad (1.1-10)$$

et

$$\theta_v = \frac{v_v}{v_t} \quad (1.1-11)$$

La teneur massique totale du matériau en humidité est donc :

$$\omega = \omega_v + \omega_e \quad (1.1-12)$$

En introduisant la relation (1.1-12) dans (1.1-7), nous aurons l'expression de la masse volumique équivalente du matériau en fonction de sa masse volumique apparente et de la teneur massique en l'humidité :

$$\rho^* = \rho_0(1 + \omega) \quad (1.1-13)$$

avec  $\omega = \omega_e$  dans le cas où on négligerait  $\omega_v$  devant  $\omega_e$ .

**Surface spécifique  $A_s$ .** Elle est définie comme étant le rapport de la surface totale des vides au volume total de l'échantillon.

$$A_s = \frac{\text{surface des vides } S}{\text{volume de l'échantillon } V} \quad (1.1-14)$$

où :

$S$  est la mesure de la surface de séparation des grains et des pores contenus dans un volume donné  $V$ .

Cette notion prend une grande importance dans tous les problèmes physiques où les échanges de chaleur ou d'énergie se produisent à la surface de séparation [3, 6].

**Porosité  $\varepsilon$ .** C'est une caractéristique adimensionnelle définie comme étant le rapport du volume des pores accessibles au volume de l'échantillon [3, 17] :

$$\varepsilon = \frac{\text{volume des pores accessibles}}{\text{volume de l'échantillon}} \quad (1.1-15)$$

soit :

$$\varepsilon = \frac{v_t - v_s}{v_t} = 1 - \frac{v_s}{v_t} = 1 - \frac{\rho_0}{\rho_s} \quad (1.1-16)$$

avec

$v_t$  : volume total de l'échantillon,

$v_s$  : volume du squelette solide de l'échantillon,

$\rho_0$  : masse volumique apparente du milieu poreux,

$\rho_s$  : masse volumique du solide.

**Tortuosité  $\tau$ .** C'est le rapport de la longueur moyenne du chemin parcouru par une particule fluide traversant un échantillon à la longueur ou épaisseur de cet échantillon [3]:

$$\tau = \left( \frac{L_e}{L} \right)^2 \quad (1.1-17)$$

avec :

$L_e$  : la longueur moyennée des lignes de courant du fluide traversant l'échantillon et,

$L$  : la longueur de l'échantillon.

## 1.2 MECANISMES DE FIXATION DE L'HUMIDITE DANS UNE STRUCTURE POREUSE.

Trois mécanismes peuvent contribuer à la fixation de l'humidité au sein du milieu poreux: la *sorption*, la *condensation thermique* et la *capillarité*.

La *sorption* désigne tout processus d'*adsorption physique*, d'*absorption*, de *chimisorption* ou de *condensation capillaire*. Le *sorbant* désigne la structure poreuse concernée.

- a. Lorsque la *sorption* concerne toute la masse du *sorbant*, on a affaire à une *absorption* ; la dissolution des gaz dans les liquides en est un exemple. Par contre, si elle ne concerne que sa couche superficielle, elle est appelée *adsorption*.
- b. La *sorption* accompagnée de réactions chimiques est appelée *chimisorption* ou *adsorption chimique* ; par exemple, l'adsorption de l'oxygène et de l'humidité par les métaux conduisant à la formation d'oxydes et d'hydroxydes.
- c. La *condensation capillaire* consiste en un processus de liquéfaction des vapeurs dans les sorbants microporeux [11].

Etablissons les hypothèses qu'il n'y a pas de réaction chimique entre le matériau solide constituant la structure poreuse et l'eau en phase liquide ou vapeur et que la sorption ne concerne que la couche superficielle. La *sorption* est alors réduite à l'*adsorption physique* et à la *condensation capillaire*.

### 1.2.1 ADSORPTION PHYSIQUE ET CONDENSATION CAPILLAIRE.

**L'adsorption physique.** On appelle par adsorption physique le phénomène qui se caractérise par des différences entre la concentration de matières aux interfaces, par rapport à la concentration au sein des phases volumiques.

Nous nous limiterons au cas de l'adsorption d'un gaz à la surface d'un corps solide. La concentration des molécules du gaz appelé *adsorbat*, au voisinage d'une surface solide, appelé *adsorbant*, est évidemment plus grande que celle régnant dans la phase gazeuse. La cause essentielle de cet accroissement de concentration à la surface, est l'existence de forces attractives, émanant de la surface du solide.

Dans la suite, seules les forces de nature physique ; forces de *VAN DER WALLS* seront considérées. Lorsque la température augmente les forces de *VAN DER WALLS* diminuent de même que pour l'adsorption physique [6].

Pour déterminer la quantité d'humidité fixée par adsorption, on place un échantillon d'un milieu poreux sec de masse  $m_0$  dans une enceinte dont on peut contrôler la température  $T$  et l'humidité relative.

L'humidité relative est donnée par :

$$\phi = \frac{P_v}{P_{vs}} \quad (1.2-1)$$

où

$P_v$  : est la pression de la vapeur régnant dans l'enceinte et,

$P_{vs}$  : la pression de la vapeur saturante à la température  $T$ .

En faisant varier l'humidité relative tout en maintenant la température constante, nous remarquons que le poids de l'échantillon augmente au fur et à mesure que la pression de vapeur dans l'enceinte se rapproche de la pression de vapeur de saturation.

La teneur en eau est

$$\omega_e = \frac{m}{m_o} \quad (1.2-2)$$

où

$m$  : représente la masse d'eau fixée et

$m_o$  : la masse du matériau sec.

La fonction reliant la teneur massique en eau du corps à l'humidité relative est représentée par une courbe (fig. 2) appelée isotherme [4, 6, 11 et 15].

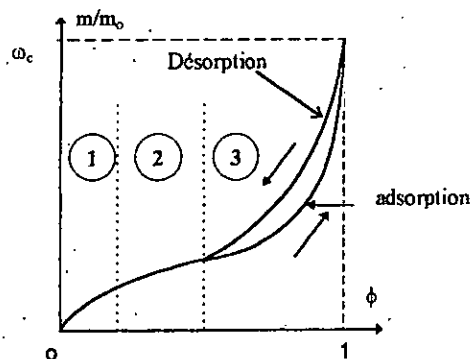


Figure 2- isotherme d'adsorption / désorption

- $0 \leq \phi \leq 1$  représente la zone hygroscopique.
- La teneur en humidité d'équilibre correspondant à  $\phi = 1$  est appelée teneur maximale en humidité ou humidité hygroscopique maximale.
- Dans l'état d'équilibre, la teneur en eau de l'échantillon homogène est la même à travers tout son volume ; fait confirmé par l'expérience [15].

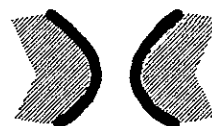


L'état d'équilibre entre le corps poreux et l'air environnant est atteint lorsque la température du corps est égale à celle de l'air et la pression partielle de la vapeur d'eau dans ce corps est égale à celle de la vapeur d'eau dans l'air. Cet équilibre dépend aussi de la manière avec laquelle il est atteint. Ainsi, dans le cas de la fixation de l'humidité, il est atteint par sorption ou humidification, l'isotherme est alors appelée *isotherme de sorption*. Tandis que dans celui où le corps dégage de l'humidité, il est atteint par désorption ou séchage ; l'isotherme est appelée *isotherme de désorption*. [16].

#### EXAMEN DES DIFFERENTS MECANISMES DE FIXATION DE L'HUMIDITE DANS LA ZONE HYGROSCOPIQUE.

L'interprétation des courbes des isothermes de sorption et de désorption a conduit à distinguer trois zones [4, 6, 16 et 17]. Chacune d'elles correspond à une étape dans le processus de fixation de l'humidité (fig. 2).

Zone 1 où  $\phi \in [0, 0.2]$  environ : adsorption monomoléculaire caractérisée par la fixation d'une couche de molécules d'eau sur la surface des pores. Elle est décrite par la théorie de *LANGMUIR*.



Zone 2 où  $\phi \in [0.2, 0.5]$  : l'adsorption devient plurimoléculaire, caractérisée par la fixation de plusieurs couches de molécules d'eau sur la première couche adsorbée. Elle est décrite par la théorie de *BRENAUER, EMMET et TELLER* [BET].



Zone 3 où  $\phi \in [0.5, 1]$  environ : lorsque les diamètres des pores sont suffisamment petits (fixation de plusieurs couches de molécules d'eau), la jonction des couches plurimoléculaires forme la condensation capillaire sur les ménisques.



**La condensation capillaire.** A faibles valeurs de l'humidité relative, la fixation de l'humidité est due principalement à l'adsorption physique des molécules d'eau par les surfaces des pores. A des valeurs plus importantes de l'humidité relative, elle est due à la condensation capillaire qui est liée à la pression de la vapeur au dessus de la surface courbe de l'eau.

La relation de *KELVIN* (1.2-3) met en évidence l'influence du rayon du capillaire sur la pression de la vapeur qui évoluent inversement l'un par rapport à l'autre [3] :

$$\phi = \frac{P_v}{P_{vs}} = e^{\frac{-2\sigma M_v}{r \rho_e RT}} \quad (1.2-3)$$

où

$\sigma$  : tension interfaciale eau-vapeur,

$M_v$  : masse moléculaire de la vapeur,

$r$  : rayon du capillaire,

$\rho_e$  : masse volumique de l'eau,

$R$  : constante des gaz parfaits,

$T$  : température.

Elle suit, du même coup, l'évolution de la dimension des pores en fonction de la température d'adsorption.

Si l'air ambiant est totalement saturé ( $\phi = 1$ ), la relation (1.2-3) indique que tous les capillaires doivent être remplis ( $r = \infty$ ). Mais l'expérience a montré que cette relation n'est valable que pour des capillaires dont le rayon  $r \in [0.5 \times 10^{-07}, 10^{-05}]$  cm car la teneur hygroscopique maximum en eau est toujours inférieure à la saturation complète (remplissage de tous les pores) [15].

A partir de la situation d'équilibre hygroscopique ( $\omega_e = \omega_c$ ,  $\phi = 1$ ), l'accroissement de la teneur en eau ne peut se poursuivre que s'il y a apport d'eau en masse. Deux mécanismes peuvent concourir à cela : la condensation thermique et la capillarité.

### 1.2.2 CONDENSATION THERMIQUE.

Le passage d'une substance de l'état gazeux à l'état liquide est appelé condensation de la vapeur. Considérons une paroi poreuse dont l'une des faces, rendue étanche à la vapeur d'eau, est en équilibre hygrothermique.

Soient :

$T_o$  : sa température,

$P_{vo}$  : la pression de la vapeur dans l'espace des pores,

$P_{vso}$  : la température de vapeur saturante correspondant  
à  $T_o$ .

Supposons que, par suite d'un refroidissement de la face imperméable, s'établisse un régime stationnaire caractérisé par une variation de température de  $T_o$  à  $T_e$  telle que  $T_e < T_o$ .

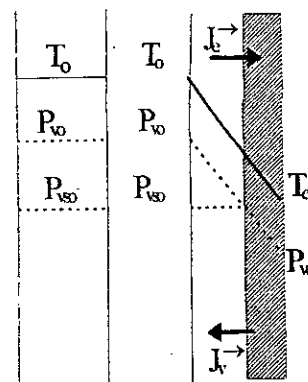


Figure 3

Si la courbe de pression de vapeur saturante qui correspond à cette nouvelle distribution de température se situe, en certains points de la paroi, en dessous de la valeur  $P_{vo}$ , il y aura bien condensation.

La masse d'eau liquide ainsi formée proviendra, d'une part, de la condensation de la vapeur initialement en place dans ce domaine et, d'autre part, de la condensation d'une partie de flux d'humidité en phase vapeur s'écoulant vers les zones froides par diffusion moléculaire.

Cette analyse schématique prend en considération la contribution de effets capillaires conduisant à l'apparition d'un flux d'eau liquide opposé au flux de vapeur dans la zone de condensation. Elle constitue le fondement du modèle théorique de *GLASER* complété ultérieurement par *KRISCHER* [4].

### 1.2.3 CAPILLARITE.

La capillarité est un mécanisme de fixation de l'humidité qui intervient lorsque la structure poreuse est mise en contact avec l'eau liquide. Le domaine correspondant est appelé *domaine humide*. L'eau s'y présente sous forme continue à la différence du *domaine hygroscopique* dans lequel elle occupe seulement les pores ayant un rayon supérieur au dixième de micron ( $r > 10^{-7}$  m).

La teneur en humidité fixée par capillarité est supérieure à la teneur maximum par adsorption ( $\omega > \omega_c$ ). Elle est liée aux phénomènes de *mouillabilité*.

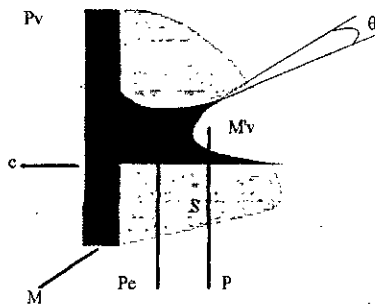


Figure 4

**Mouillage.** On observe à la surface de séparation de trois phases (1-liquide, 2-gaz, 3-solide) des phénomènes que l'on appelle *mouillage* (fig.4 et 5).

La surface libre du liquide est incurvée près de la surface solide et s'appelle *ménisque*. La ligne selon laquelle le ménisque coupe le solide est le *périmètre de mouillage*.

Le mouillage est mesuré par la grandeur  $\cos \theta$  déterminée par l'équation :

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{23} - \sigma_{13}}{\sigma_{12}} \quad (1.2-4)$$

où

$\sigma_{ik}$  sont les tensions superficielles sur les trois interfaces solide-liquide, liquide-vapeur et vapeur-solide.

L'angle de mouillage  $\theta$  est l'angle de raccordement entre la surface mouillée du solide et le ménisque aux points de leur intersection dont le lieu géométrique n'est autre que le périmètre de mouillage.

Par convention on choisit l'angle de mouillage tel qu'il contienne la région occupée par la phase la plus dense (fig. 5).

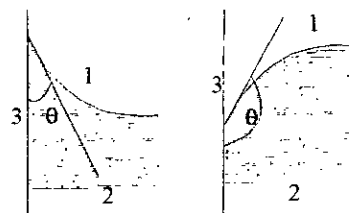


Figure 5

- Si  $\sigma_{23} > \sigma_{13}$ , on a  $\theta < \Pi/2$ . Le liquide a un ménisque concave et *mouille* le solide. La surface de celui-ci est appelée *hydrophile* : c'est le cas des carbonates, silicates, sulfates, quartz.
- Si  $\sigma_{23} < \sigma_{13}$ , on a  $\theta > \Pi/2$ . Le liquide a un ménisque convexe et *ne mouille pas* le solide. La surface de ce dernier est appelée *hydrophobe* : c'est le cas des métaux purs, sulfures, graphites.
- Si  $\sigma_{23} - \sigma_{13} \rightarrow \sigma_{12}$ , on a  $\theta \rightarrow 0$ . Autrement dit, le ménisque est tangent à la surface du solide. Nous aurons alors un *mouillage parfait*. Dans ce cas, les forces intermoléculaires agissant sur une particule de la couche superficielle sont entièrement compensées et l'énergie superficielle libre de cette couche a une valeur minimale.
- Si  $\sigma_{23} \rightarrow \sigma_{13}$ , on a  $\theta \rightarrow \Pi/2$ . Le liquide a une surface plane et il y aura alors *absence de mouillage*.

L'équilibre mécanique entre phases séparées par une interface courbe est réalisé pour des valeurs de pression différentes dans chacune des phases. La différence de pression qui en résulte dépend de la tension superficielle  $\sigma$  et de la courbure de la surface.

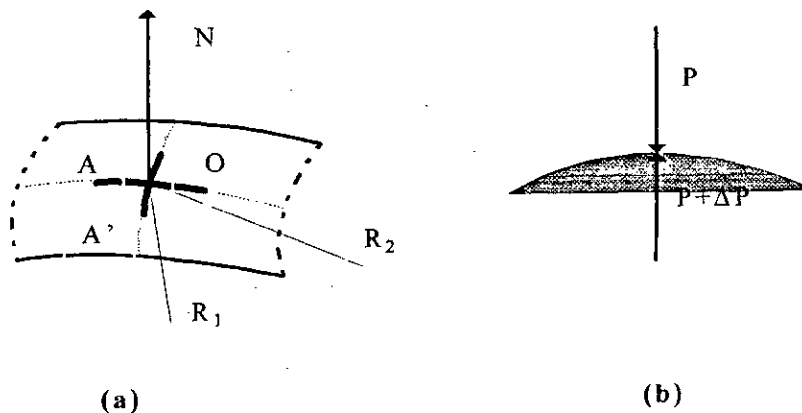


Figure 6

En vertu de la loi de LAPLACE [19], cette différence de pression est :

$$\Delta P = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \tag{1.2-5}$$

où

$R_1$  et  $R_2$  sont les rayons de courbure de deux sections orthogonales de la surface du liquide (fig. 6).

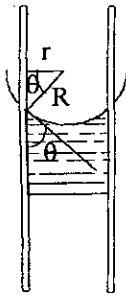


Figure 7

L'expérience montre que l'eau en masse a un comportement mouillant par rapport aux structures poreuses rencontrées dans le bâtiment, le ménisque qui se forme est donc concave.

Considérons un capillaire de section droite circulaire de rayon  $r$  (fig. 7). Les rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$  étant égaux à  $R$ , la relation (1.2-5) devient :

$$\Delta P = \frac{2 \sigma}{R} \tag{1.2-6}$$

Soit, en fonction de l'angle de mouillage  $\theta$  :

$$\Delta P = \frac{2 \sigma \cos \theta}{r} \tag{1.2-7}$$

La mesure de mouillage  $\cos \theta$  étant positive, il en sera de même pour la différence de pression  $\Delta P$ . On appellera dans la suite cette différence de pression, par pression capillaire  $P_c$  :

$$P_c = \frac{2 \sigma \cos \theta}{r} \tag{1.2-8}$$

Pour satisfaire la condition d'équilibre sachant que la pression du gaz  $P_a$  au voisinage de l'interface eau liquide-air humide est forcément supérieure à celle de l'eau liquide  $P_e$ , nous aurons :

$$P_c = P_a - P_e > 0 \tag{1.2-9}$$

Examinons une paroi poreuse de bâtiment en contact avec l'eau en masse qui provient, soit de la condensation superficielle ou d'un phénomène de mouillage (pluie...). L'eau s'étale sur la face exposée et en couvre les pores tandis qu'à l'intérieur de la paroi, elle forme des interfaces concaves (fig.4).

La pression de l'eau liquide à l'extérieur est supérieure à celle au voisinage des interfaces concaves. Sous l'effet de cette différence de pression égale à la pression capillaire, un écoulement  $\vec{J}_e$  de l'eau liquide s'établit et conduit au remplissage des pores (fig. 8).

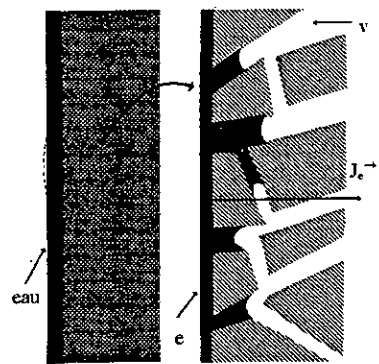


Figure 8

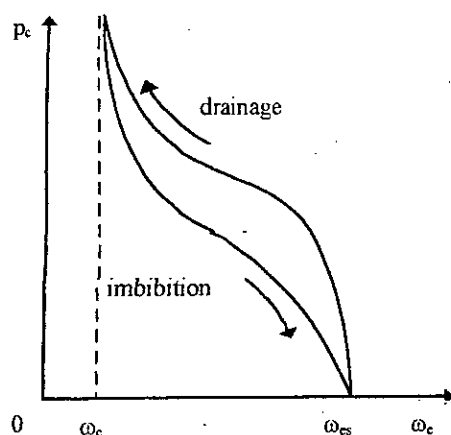


Figure 9

Les courbes  $P_c(\omega)$  présentent des effets d'hystérésis qui différencient entre drainage et imbibition [3, 4 et 15].

### 1.3 INFLUENCE DES PROPRIETES DU MATERIAU SUR LA QUANTITE D'EAU FIXEE.

A l'équilibre, la quantité d'humidité fixée au sein d'un milieu poreux par adsorption, condensation ou capillarité dépend évidemment de certaines caractéristiques géométriques globales de ce dernier.

La principale propriété structurale du milieu poreux, dans le cas de l'adsorption est la surface spécifique  $A_s$ , alors que celle de la condensation et de la capillarité est la porosité  $\varepsilon$  caractérisant le volume des pores.

L'aspect dynamique des processus fait intervenir d'autres phénomènes de fixation avec leurs propres caractéristiques géométriques :

- le diamètre des pores  $d$  qui joue un rôle de premier rang dans la condensation capillaire et dans la capillarité,
- la tortuosité  $\tau$  qui affecte la perméabilité et la diffusion moléculaire de la vapeur.

En se basant sur les variations des seuls paramètres qui sont commodément accessibles ( $A_s$ ,  $\varepsilon$  et  $d$ ), on distingue plusieurs grandes familles de matériaux poreux. Mais si on imposait à ces dernières de satisfaire la relation de *KELVIN* (1.2-3) pour déterminer le diamètre maximum au-delà duquel les phénomènes de condensation capillaire ne peuvent plus se manifester pour l'eau à 10°C, deux comportements se distingueraient:

1. Les matériaux dits hygroscopiques dans lesquels la masse fixée par adsorption représente une quantité non négligeable de la masse totale fixée. Leur principale caractéristique est la grande surface spécifique d'où des rayons de pores inférieurs à  $10^{-7}$  m (domaine A de la fig. 1-10).

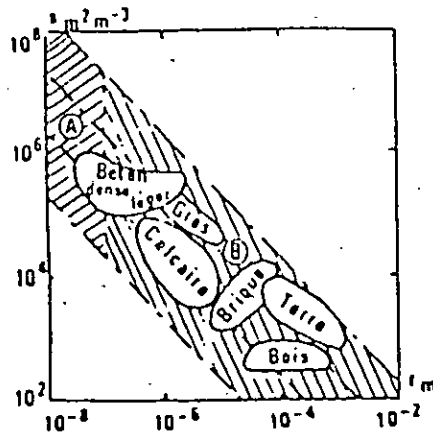


Figure 10

2. Les matériaux non-hygroscopiques pour lesquels la quantité d'humidité fixée par adsorption est négligeable (domaine B de la fig. 1-10) où  $r$  est supérieur à  $10^{-7}$  m.

Remarquons, toutefois, que la masse d'humidité absorbée par adsorption par les matériaux dits hygroscopiques reste très faible par rapport à la quantité d'humidité correspondant au remplissage de tous les pores autrement dit à la saturation complète [4].

## CHAPITRE DEUX

### MODELISATION MATHEMATIQUE DES TRANSFERTS DE MASSE ET DE CHALEUR EN MILIEUX POREUX

#### HYPOTHESES

#### EQUATIONS DE CONSERVATION

Conservation de la masse.

Mouvement de l'humidité en phase liquide

Mouvement de l'humidité en phase vapeur

Equation de conservation de la masse globale

Conservation d'énergie.

Système résultant.

Modèle complet de *PHILIP* et *DE VRIES*

Modèle de *PHILIP* et *DE VRIES* simplifié

#### APPLICATION DU MODELE MATHEMATIQUE AU MODELE PHYSIQUE

Modèle physique.

Conditions initiales et aux limites.

Conditions initiales

Conditions aux limites

Modèle mathématique appliqué.

Modèle de *PHILIP* et *DE VRIES*

Modèle de *PHILIP* et *DE VRIES* simplifié

Modèle de *PHILIP* et *DE VRIES* généré



## 2 MODELISATION MATHEMATIQUE DES TRANSFERTS DE CHALEUR ET DE MASSE EN MILIEUX POREUX.

La modélisation mathématiques des phénomènes de transferts en milieux poreux s'inspire des méthodes classiques de la mécanique des milieux continus pour exprimer localement les lois de conservation, généralement décrites par des équations aux dérivées partielles.

Cependant, à cause de la géométrie complexe des pores, les milieux poreux ne peuvent se satisfaire de l'échelle microscopique utilisée dans la mécanique des milieux continus. Un volume élémentaire de référence (V.E.R), à l'échelle macroscopique, permettra d'établir une équivalence entre ces deux milieux dispersé réel et continu fictif.

Les lois régissant les phénomènes physiques à l'échelle macroscopiques sont obtenues par une prise de moyenne de ces mêmes lois à l'échelle microscopique. Cette prise de moyenne génère des relations entre les dérivées des grandeurs macroscopiques et celles des grandeurs microscopiques correspondantes.

Le passage des lois de conservation, de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique est largement commenté dans les références [3, 5 et 17].

Toute modélisation doit d'abord établir des hypothèses sans lesquelles elle ne saurait être valable.

### 2.1 HYPOTHESES.

- la phase solide constituant le milieu poreux est homogène, indéformable et isotrope,
- les enthalpies des différentes phases sont indépendantes de la pression,
- la conductivité thermique des phases est constante,
- la phase liquide ne contient qu'un seul constituant,
- les différentes phases sont en équilibre thermique,
- il n'y a pas de réaction chimique,
- la pression totale de la phase gazeuse est uniforme et constante,
- le travail des forces extérieures de diffusion et l'énergie cinétique sont négligeables,
- le travail des forces de compression est négligeable,
- la masse volumique de la phase liquide est constante,

- la phase gazeuse obéit à la loi des gaz parfaits,
- les différentes phases sont continues,
- les interactions entre phases sont négligeables,
- le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.

## 2.2 EQUATIONS DE CONSERVATION.

Soit un volume de contrôle délimité de part et d'autre par les surfaces de contrôle  $A_1$  et  $A_2$ . Si une quantité de substance (masse, énergie, entropie...) entre à travers la surface de contrôle  $A_1$  et la quitte à travers  $A_2$  alors la différence entre les flux entrant  $\vec{J}_e$  et sortant  $\vec{J}_s$  par unité de volume, quand ce volume tend vers zéro, est égale à la divergence du flux  $\vec{J}$  (substance transférée : masse, énergie, entropie...) notée  $\text{div } \vec{J}$ .

a - Dans le cas d'un régime permanent, la divergence du flux d'une substance est égale à la somme des termes sources (ou puits) de cette substance. Si les termes sources sont absents, alors  $\text{div } \vec{J} = 0$ .

b - Dans le cas d'un régime non stationnaire, la divergence du flux de substance  $\vec{J}$  est égale à la somme des termes sources moins la quantité de substance accumulée ; la quantité de substance accumulée étant égale à la dérivée partielle, par rapport au temps, de la concentration volumique de cette substance [16].

Il en découle [4, 15] :

$$\nabla \vec{J}_e = I_e - \frac{\partial}{\partial t}(\rho_e \theta_e) \quad \text{pour la phase liquide,} \quad (2.2-1)$$

$$\nabla \vec{J}_v = I_v - \frac{\partial}{\partial t}(\rho_v \theta_v) \quad \text{pour la phase vapeur.} \quad (2.2-2)$$

où

les termes  $I_e$  et  $I_v$  représentent respectivement les puits ou sources (création-dissipation) des phases liquide et vapeur relatives aux éventuels changements de phase du constituant considéré.

Pour la conservation de la masse totale du seul constituant considéré on obtient :

$$\nabla \left( \vec{J}_e + \vec{J}_v \right) = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e \theta_e + \rho_v \theta_v) \quad (2.2-3)$$

avec 
$$I_e + I_v = 0 \quad (2.2-4)$$

Comme les flux de masse, pour chaque phase, peuvent être convectifs ou diffusifs, nous aurons :

**Conservation de la masse.**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i \theta_i) = -\nabla \cdot (\vec{J}_{ic} + \vec{J}_{id}) + I_i \quad (2.2-5)$$

où :

$i$  : indice de phase liquide ( $e$ ) ou vapeur ( $v$ ),

$\rho_i, \theta_i$  : masse volumique et teneur volumique de la phase  $i$ ,

$\vec{J}_{ic}, \vec{J}_{id}$  : densités de flux transportées par convection et par diffusion,

$I_i$  : terme source traduisant les phénomènes d'évaporation ou de condensation.

**Conservation de l'énergie.**

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_o h_o + \sum_i \rho_i \theta_i h_i \right) = -\nabla \cdot \left( \vec{J}_q + \sum_i h_i (\vec{J}_{ic} + \vec{J}_{id}) \right) \quad (2.2-6)$$

où :

$\rho_o$  : masse volumique apparente du solide (1.1-17) donnée par  $\rho_o = \rho_s(1 - \varepsilon)$

$h_o, h_i$  : enthalpies massiques respectives du solide et de la phase  $i$ ,

$\vec{J}_q$  : densité de flux de chaleur apportée par conduction au milieu poreux.

### 2.2.1 CONSERVATION DE LA MASSE.

Pour chaque phase  $i$  du constituant considéré, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i \theta_i) = -\nabla \cdot (\vec{J}_{ic} + \vec{J}_{id}) + I_i \quad (2.2-5)$$

Il nous faut donc définir les équations relatives à chaque phase afin d'en déduire l'équation de conservation de la masse globale.

**Mouvement de l'humidité en phase liquide.** L'eau liquide s'écoule principalement par filtration. L'équation de conservation de la masse de l'humidité en phase liquide (2.2-5) se réduit donc à :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_e \theta_e) = -\nabla \cdot \vec{J}_{ec} + I_e \quad (2.2-7)$$

Il s'agit alors d'établir la loi qui régit cet écoulement ou, plus exactement, ce flux de masse. Cette loi a été établie par *DARCY* et vérifiée par *BENNET* dans le cadre des transferts de chaleur et de masse dans les milieux poreux [9,14].

Elle est exprimée par :

$$\vec{J}_i = -\frac{k_i}{\nu_i} \nabla \tilde{P}_i \quad (2.2-8)$$

$\tilde{P}_i$  : pression totale dans la phase  $i$  ou potentiel total  $\psi_i$ , si on exprime  $\tilde{P}_i$  en mètre,

$k_i$  : perméabilité du milieu à la phase  $i$  qui ne dépend que du milieu poreux considéré,

$\nu_i$  : viscosité cinématique.

Les influences du champ magnétique, de l'énergie chimique et de l'énergie cinétique étant, par hypothèses, négligées, il ne restera au potentiel total que les potentiels matriciel, gravitationnel et de pression.

$$\psi_i = \psi_m + \psi_g + \psi_p \quad (2.2-9)$$

- Le potentiel de pression qui est dû à la variation de la pression extérieure des gaz est négligé car le transfert de masse s'effectue à pression atmosphérique constante.
- Le potentiel matriciel est composé du potentiel d'adsorption (dû aux forces d'adhésion liquide-solide), du potentiel capillaire (dû à la courbure du ménisque) et du potentiel osmotique qu'on néglige car on ne prend pas en considération les substances diluées dans l'eau [15]. Il est alors appelé *succion* qu'on notera désormais  $\psi$ .

Son expression est :

$$\psi = -\frac{P_c}{\rho_e g} \quad (2.2-10)$$

Le potentiel total devient

$$\psi_i = \psi + \psi_g \quad (2.2-11)$$

et la pression totale s'écrit :

$$\tilde{P}_e = \rho_e g (\psi + z) \quad (2.2-12)$$

avec :

$g$  : accélération de la pesanteur,

$z$  : hauteur de pression due à la gravité.

D'où la nouvelle forme du flux de masse en phase liquide :

$$\vec{J}_{ec} = -\rho_e g \frac{k_e}{\nu_e} \nabla (\psi + z) \quad (2.2-13)$$

Posons

$$K = g \frac{k_e}{v_e} \quad (2.2-14)$$

que nous reconnâtrons aisément comme étant la conductivité hydraulique qui correspond à l'habilité du matériau à transférer, dans notre cas, de l'eau à travers tout son volume sous l'influence d'un gradient hydraulique. Elle est donc une propriété combinée du milieu poreux et du fluide le traversant.

L'équation (2.2-13) devient alors :

$$\vec{J}_{ec} = -\rho_e K \nabla(\psi + z) \quad (2.2-15)$$

où

$$\nabla = \text{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (2.2-16)$$

avec le vecteur unitaire  $\vec{k}$  dirigé vers le bas.

Puisque seule la projection verticale du potentiel gravitationnel n'est pas nulle :

$$\vec{J}_{ec} = -\rho_e K (\nabla\psi - \vec{k}) \quad (2.2-17)$$

Mais, comme  $\psi = \psi(\theta_e, T)$ ,

$$\nabla\psi = \left( \frac{\partial\psi}{\partial\theta_e} \right)_T \nabla\theta_e + \left( \frac{\partial\psi}{\partial T} \right)_T \nabla T \quad (2.2-18)$$

injectons (2.2-17) dans (2.2-18). Nous aurons alors :

$$\vec{J}_e = -\rho_e K \left[ \left( \frac{\partial\psi}{\partial\theta_e} \right)_T \nabla\theta_e + \left( \frac{\partial\psi}{\partial T} \right)_{\theta_e} \nabla T - \vec{k} \right] \quad (2.2-19)$$

ou encore, en posant

$$D_{\theta_e} = K \left( \frac{\partial\psi}{\partial\theta_e} \right)_T \quad (2.2-20)$$

et

$$D_{T_e} = K \left( \frac{\partial\psi}{\partial T} \right)_{\theta_e} \quad (2.2-21)$$

où  $D_{\theta_e}$  et  $D_{T_e}$  représentent respectivement les coefficients de diffusion massique à température constante et à teneur volumique constante,

L'expression (2.2-19) du flux de masse en phase liquide devient

$$\vec{J}_e = -\rho_e \left( D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_{T_e} \nabla T - K \vec{k} \right) \quad (2.2-22)$$

En injectant (2.2-22) dans (2.2-7), on obtient l'équation de conservation de la masse d'humidité en phase liquide :

$$\frac{\partial(\rho_e \theta_e)}{\partial t} = \nabla \left[ \rho_e \left( D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_{T_e} \nabla T - K \vec{k} \right) \right] + I_e \quad (2.2-23)$$

**Mouvement de l'humidité en phase vapeur.** Le transfert de masse en phase vapeur est essentiellement diffusionnel [3, 4 et 15] vu que, par hypothèse, la pression totale de la vapeur est supposée constante.

L'équation de conservation de la masse pour l'humidité en phase vapeur s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_v \theta_v) = -\nabla \cdot \vec{J}_{vd} + I_v \quad (2.2-24)$$

La loi de *FICK* permet de décrire le flux de masse en phase vapeur transféré par diffusion moléculaire. Considérons pour cela le système air-vapeur d'eau comme un mélange binaire idéal de gaz.

$$\vec{J}_v = -f_\pi(\theta_e) \cdot D \frac{P}{P - P_v} \frac{M}{RT} \nabla P_v \quad (2.2-25)$$

où

$f_\pi(\theta_e)$  : une fonction de pondération du coefficient  $D$  traduisant l'influence du squelette poreux et de la teneur en eau liquide sur le mécanisme de diffusion moléculaire,

$D$  : coefficient de diffusion moléculaire de la vapeur d'eau dans l'air sec,

$P_v$  : pression partielle de la vapeur d'eau dans la phase gazeuse,

$P$  : pression totale du gaz,

$M$  : masse molaire de l'eau,

$R$  : constante des gaz parfaits.

La pression de la vapeur à l'équilibre peut être exprimée, comme nous l'avons déjà vu (1.2-1), en fonction de la pression de vapeur saturante et de l'humidité relative :

$$P_v = P_{vs}(T) \cdot \phi(T, \theta_e) \quad (2.2-26)$$

avec

$$\phi = e^{\frac{M_v \cdot g \cdot \psi}{RT}} \quad (1.2-3)$$

où  $\phi$  est l'humidité relative et  $P_{vs}$  la pression de la vapeur saturante.

par conséquent, le gradient de pression de la vapeur à l'équilibre est :

$$\nabla P_v = \left( \frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_e} \nabla T + \left( \frac{\partial P_v}{\partial \theta_e} \right)_T \nabla \theta_e \quad (2.2-27)$$

et en injectant (2.2-27) dans (2.2-25), on obtient le flux de masse de la phase vapeur :

$$\vec{J}_v = -f \cdot D \frac{P}{P - P_v} \frac{M_v}{RT} \left[ \left( \frac{\partial P_v}{\partial \theta_e} \right)_T \nabla \theta_e + \left( \frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_e} \nabla T \right] \quad (2.2-28)$$

Dans le souci de pouvoir faire l'analogie avec l'expression du flux de masse en phase liquide, on écrira :

$$\vec{J}_v = -\rho_e (D_{\theta_v} \nabla \theta_v + D_{T_v} \nabla T) \quad (2.2-29)$$

avec

$$D_{\theta_v} = \frac{1}{\rho_e} f \cdot D \frac{P}{P - P_v} \frac{M_v}{RT} \left( \frac{\partial P_v}{\partial \theta_e} \right)_T \quad (2.2-30)$$

et

$$D_{T_v} = \frac{1}{\rho_e} f \cdot D \frac{P}{P - P_v} \frac{M_v}{RT} \left( \frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_e} \quad (2.2-31)$$

qui sont respectivement les coefficients de diffusion massique de la vapeur à température constante et à teneur massique constante. Or, ces dernières, pour le cas de la phase liquide, sont exprimés en fonction de la succion.

Pour poursuivre l'analogie, nous allons donc développer les expressions des coefficients de diffusion massique de la vapeur afin de pouvoir les exprimer en fonction de cette même succion.

Etant donné que, d'après (2.2-26) et (1.2-3),

$$P_v = P_{vs}(T) \cdot \phi(T, \theta_e)$$

et

$$\phi = e^{\frac{M_v \cdot g \cdot \psi}{RT}}$$

nous déduisons :

$$\left( \frac{\partial P_v}{\partial \theta_e} \right)_T = P_{vs} \frac{M_v}{RT} g \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta_e} \right)_T \phi \quad (2.2-32)$$

$$\left( \frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_e} = \frac{dP_{vs}}{dT} \phi + P_{vs} \frac{M_v}{R} g \left[ \frac{1}{T} \left( \frac{\partial \psi}{\partial T} \right)_{\theta_e} - \frac{\psi}{T^2} \right] \phi \quad (2.2-33)$$

en injectant (2.2-33) dans (2.2-30), on peut déjà définir le coefficient de diffusion massique de la phase vapeur à température constante :

$$D_{\theta_v} = \frac{1}{\rho_c} f \cdot D \frac{P}{P - P_v} \left( \frac{M_v}{RT} \right)^2 P_{vs} \cdot \phi \cdot g \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta_c} \right)_T \quad (2.2-34)$$

Reprenons l'équation (2.2-33) :

$$\left( \frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_c} = \frac{dP_{vs}}{dT} \phi + P_{vs} \frac{M_v}{RT} g \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial T} \right)_{\theta_c} - \frac{\psi}{T} \right] \cdot \phi$$

en tenant compte de l'équation de *CLAPEYRON* :

$$\frac{1}{P_{vs}} \frac{dP_{vs}}{dT} = \frac{M_v \cdot L}{RT^2}$$

on obtient :

$$\frac{dP_{vs}}{dT} = P_{vs} \frac{M_v \cdot L}{RT^2} \quad (2.2-35)$$

Injectons (2.2-35) dans (2.2-33) :

$$\left( \frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_c} = P_{vs} \phi \frac{M_v \cdot L}{RT^2} + P_{vs} \phi \frac{M_v}{RT} g \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial T} \right)_{\theta_c} - \frac{\psi}{T} \right] \quad (2.2-36)$$

En remplaçant (2.2-36) dans (2.2-31), on obtient le coefficient de diffusion massique, à teneur volumique constante, de la phase vapeur :

$$D_{T_v} = \frac{1}{\rho_c} f \cdot D \frac{P}{P - P_v} \left( \frac{M_v}{RT} \right)^2 P_{vs} \phi \frac{L}{T} + \frac{1}{\rho_c} f \cdot D \frac{P}{P - P_v} \left( \frac{M_v}{RT} \right)^2 P_{vs} \phi g \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial T} \right)_{\theta_c} - \frac{\psi}{T} \right] \quad (2.2-37)$$

mais, en pratique, la gamme d'humidité rencontrée fait que le second terme est négligeable devant le premier. D'où

$$D_{T_v} = \frac{1}{\rho_c} f \cdot D \frac{P}{P - P_v} \left( \frac{M_v}{RT} \right)^2 P_{vs} \phi \frac{L}{T} \quad (2.2-38)$$

Revenons à l'équation (2.2-24) en y injectant la relation (2.1-29) :

$$\frac{\partial(\rho_v \theta_v)}{\partial t} = \nabla \left[ \rho_c (D_{\theta_v} \nabla \theta_c + D_{T_v} \nabla T) \right] + I_v \quad (2.2-39)$$

et essayons de l'expliciter, non pas en fonction de la teneur volumique en vapeur  $\theta_v$ , mais en équivalent liquide condensé  $\theta_v^*$ .



puisque

$$\rho_v \theta_v = \rho_e \theta_v^* \quad (2.2-40)$$

et

$$\theta_v^* = \frac{\rho_v}{\rho_e} \theta_v = \frac{\rho_v}{\rho_e} (\varepsilon - \theta_e) \quad (2.2-41)$$

L'équation (2.2-39) se met alors sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_e \theta_v^*) = \nabla \left[ \rho_e (D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_v} \cdot \nabla T) \right] + I_v \quad (2.2-42)$$

**Equation de conservation de la masse globale.** Elle résulte du système formé par les équations de conservation (2.2-23) et (2.2-42) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_e \theta_e) = \nabla \left[ \rho_e (D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_e} \cdot \nabla T - K \vec{k}) \right] + I_e$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_e \theta_v^*) = \nabla \left[ \rho_e (D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_v} \cdot \nabla T) \right] + I_v$$

En exploitant l'hypothèse que le liquide est peu compressible [9], le système devient :

$$\frac{\partial \theta_e}{\partial t} = \nabla \left( D_{\theta_e} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_e} \cdot \nabla T - K \vec{k} \right) + \frac{I_e}{\rho_e} \quad (2.2-43)$$

$$\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = \nabla (D_{\theta_v} \cdot \nabla \theta_e + D_{T_v} \cdot \nabla T) + \frac{I_v}{\rho_e} \quad (2.2-44)$$

Explicitons la dérivée par rapport au temps de  $\theta_v^* = \frac{\rho_v}{\rho_e} (\varepsilon - \theta_e)$

$$\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = - \frac{\rho_v}{\rho_e} \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \frac{(\varepsilon - \theta_e)}{\rho_e} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (2.2-45)$$

Or, d'après les hypothèses, la vapeur d'eau est considérée comme gaz parfait et, de ce fait elle satisfait la loi

$$P_v = \rho_v \frac{RT}{M_v}$$

ou

$$\rho_v = P_v \frac{M_v}{RT} \quad (2.2-46)$$

En dérivant (2.2-46) par rapport au temps :

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P_v}{T} \right) \frac{M_v}{R} \quad (2.2-47)$$

et en l'injectant dans (2.2-45), on obtient :

$$\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = - \frac{\rho_v}{\rho_e} \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \frac{(\varepsilon - \theta)}{\rho_e} \frac{M_v}{R} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P_v}{T} \right) \quad (2.2-48)$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P_v}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta_e} \left( \frac{P_v}{T} \right)_T \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{P_v}{T} \right)_{\theta_e} \frac{\partial T}{\partial t}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P_v}{T} \right) = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial P_v}{\partial \theta_e} \right)_T \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \frac{1}{T} \left( \frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_e} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{P_v}{T^2} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2-49)$$

En remplaçant (2.2-49) dans (2.2-48) :

$$\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = - \frac{\rho_v}{\rho_e} \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \frac{(\varepsilon - \theta)}{\rho_e} \frac{M_v}{R} \left[ \frac{1}{T} \left( \frac{\partial P_v}{\partial \theta_e} \right)_T \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \frac{1}{T} \left( \frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_e} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{P_v}{T^2} \frac{\partial T}{\partial t} \right] \quad (2.2-50)$$

Regroupons les coefficients en  $\frac{\partial \theta_e}{\partial t}$  et  $\frac{\partial T}{\partial t}$  :

$$\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = \left[ \frac{(\varepsilon - \theta_e)}{\rho_e} \frac{M_v}{R} \frac{1}{T} \left( \frac{\partial P_v}{\partial \theta_e} \right)_T - \frac{\rho_v}{\rho_e} \right] \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \frac{(\varepsilon - \theta_e)}{\rho_e} \frac{M_v}{R} \left[ \frac{1}{T} \left( \frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_e} - \frac{P_v}{T^2} \right] \frac{\partial T}{\partial t}$$

ou

$$\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = \left[ \frac{(\varepsilon - \theta_e)}{\rho_e} \frac{M_v}{RT} \left( \frac{\partial P_v}{\partial \theta_e} \right)_T - \frac{\rho_v}{\rho_e} \right] \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \frac{(\varepsilon - \theta_e)}{\rho_e} \frac{M_v}{RT} \left[ \left( \frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_e} - \frac{P_v}{T} \right] \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2-51)$$

soit :

$$\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = \alpha \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \chi \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2-52)$$

où

$$\alpha = (\varepsilon - \theta_e) \frac{1}{\rho_e} \frac{M_v}{RT} \left( \frac{\partial P_v}{\partial \theta_e} \right)_T - \frac{\rho_v}{\rho_e} \quad (2.2-53)$$

et

$$\chi = (\varepsilon - \theta_c) \frac{1}{\rho_c} \frac{M_v}{RT} \left( \frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_c} - (\varepsilon - \theta_c) \frac{1}{\rho_c} \frac{M_v P_v}{RT T} \quad (2.2-54)$$

A partir des coefficients de diffusion massique  $D_{\theta_c}$  et  $D_{T_v}$  qui, rappelons-le, sont

$$D_{\theta_c} = \frac{1}{\rho_c} f \cdot D \frac{P}{P - P_v} \frac{M_v}{RT} \left( \frac{\partial P_v}{\partial \theta_c} \right)_T$$

et

$$D_{T_v} = \frac{1}{\rho_c} f \cdot D \frac{P}{P - P_v} \frac{M_v}{RT} \left( \frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_c}$$

nous pouvons exprimer les dérivées partielles de la pression de vapeur à l'équilibre :

$$\left( \frac{\partial P_v}{\partial \theta_c} \right)_T = \frac{D_{\theta_c}}{\frac{f \cdot D}{\rho_c} \frac{P}{P - P_v} \frac{M_v}{RT}} \quad (2.2-55)$$

et

$$\left( \frac{\partial P_v}{\partial T} \right)_{\theta_c} = \frac{D_{T_v}}{\frac{f \cdot D}{\rho_c} \frac{P}{P - P_v} \frac{M_v}{RT}} \quad (2.2-56)$$

et, par la-même, les coefficients  $\alpha$  et  $\chi$  qu'on écrira désormais :

$$\alpha = \frac{(\varepsilon - \theta_c)}{f \cdot D \frac{P_v}{P - P_v}} D_{\theta_c} - \frac{\rho_v}{\rho_c} \quad (2.2-57)$$

et

$$\chi = \frac{(\varepsilon - \theta_c)}{f \cdot D \frac{P_v}{P - P_v}} D_{T_v} - \frac{(\varepsilon - \theta_c)}{T} \frac{\rho_v}{\rho_c} \quad (2.2-58)$$

finalement, l'équation de conservation de la vapeur en équivalent liquide condensé s'écrit :

$$\frac{\partial \theta_v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial \theta_c}{\partial t} + \chi \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (D_{\theta_c} \nabla \theta_c + D_{T_v} \nabla T) + \frac{I_v}{\rho_c} \quad (2.2-59)$$

Le système d'équations régissant la loi de conservation de la masse devient :

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial t} = \nabla \cdot (D_{\theta_c} \nabla \theta_c + D_{T_v} \nabla T - K \vec{k}) + \frac{I_c}{\rho_c} \quad (2.2-43)$$

$$\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = \alpha \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \chi \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (D_{\theta_v} \nabla \theta_e + D_{T_v} \nabla T) + \frac{I_v}{\rho_e} \quad (2.2-59)$$

ce qui permet d'écrire la loi de conservation de la masse totale (liquide + vapeur) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta_e + \theta_v^*) = \nabla \cdot \left[ (D_{\theta_e} + D_{\theta_v}) \nabla \theta_e + (D_{T_e} + D_{T_v}) \nabla T - K \vec{k} \right] + \frac{I_e + I_v}{\rho_e}$$

avec la condition de conservation de la masse globale

$$I_e + I_v = 0 \quad (2.2-4)$$

et en notant

$$D_{\theta} = D_{\theta_e} + D_{\theta_v} \quad (2.2-60)$$

et

$$D_T = D_{T_e} + D_{T_v}, \quad (2.2-61)$$

nous pouvons l'exprimer sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta_e + \theta_v^*) = \nabla \cdot \left[ D_{\theta} \nabla \theta_e + D_T \nabla T - K \vec{k} \right]$$

en introduisant l'expression (2.2-52)

$$\frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \left( \alpha \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \chi \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \left[ D_{\theta} \nabla \theta_e + D_T \nabla T - K \vec{k} \right]$$

et, après arrangement, nous aboutissons à la forme finale de l'équation de conservation de la masse globale :

$$(1+\alpha) \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \chi \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \left( D_{\theta} \nabla \theta_e + D_T \nabla T - K \vec{k} \right) \quad (2.2-62)$$

### 2.2.2 CONSERVATION D'ENERGIE.

Rappelons l'expression de l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_o h_o + \sum_i \rho_i \theta_i h_i \right) = -\nabla \cdot \left[ \vec{J}_q + \sum_i h_i \left( \vec{J}_{ic} + \vec{J}_{id} \right) \right] \quad (2.2-6)$$

Développons-la

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o h_o) + \sum_i \left[ \rho_i \theta_i \frac{\partial h_i}{\partial t} + h_i \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \theta_i) \right] &= -\nabla \cdot \vec{J}_q - \nabla \cdot \sum_i h_i \left( \vec{J}_{ic} + \vec{J}_{id} \right) \\ &= -\nabla \cdot \vec{J}_q - \sum_i \left[ h_i \nabla \cdot \left( \vec{J}_{ic} + \vec{J}_{id} \right) + \left( \vec{J}_{ic} + \vec{J}_{id} \right) \cdot \nabla h_i \right] \end{aligned}$$

et poussons le développement avec (i) correspondant à (v) pour la vapeur d'eau ou à (e) pour l'eau liquide. On obtiendra alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o h_o) + \rho_e \theta_e \frac{\partial h_e}{\partial t} + h_e \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e \theta_e) + \rho_e \theta_v^* \frac{\partial h_v}{\partial t} + h_v \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e \theta_v^*) &= \\ -\nabla \cdot \vec{J}_q - h_e \nabla \cdot \vec{J}_{ec} - \vec{J}_{ec} \cdot \nabla h_e - h_v \nabla \cdot \vec{J}_{vd} - \vec{J}_{vd} \cdot \nabla h_v & \quad (2.2-63) \end{aligned}$$

Or, rappelons que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \theta_i) = -\nabla \cdot \left( \vec{J}_{ic} + \vec{J}_{id} \right) + I_i \quad (2.2-5)$$

avec

$$I_e + I_v = 0 \quad (2.2-4)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_e \theta_e) = -\nabla \cdot \vec{J}_{ec} + I_e = -\nabla \cdot \vec{J}_{ec} - I_v \quad (2.2-7)$$

alors qu'en injectant (2.2-40) dans (2.2-38), on aura

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_e \theta_v^*) = -\nabla \cdot \vec{J}_{vd} + I_v \quad (2.2-38)$$

introduisons ces deux dernières relations dans le premier membre de l'équation d'énergie (2.2-63) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o h_o) + \rho_e \theta_e \frac{\partial h_e}{\partial t} + \rho_e \theta_v^* \frac{\partial h_v}{\partial t} - h_v \left( \nabla \cdot \vec{J}_{vd} - I_v \right) - h_e \left( \nabla \cdot \vec{J}_{ec} + I_v \right) &= \\ -\nabla \cdot \vec{J}_q - h_e \nabla \cdot \vec{J}_{ec} - \vec{J}_{ec} \cdot \nabla h_e - h_v \nabla \cdot \vec{J}_{vd} - \vec{J}_{vd} \cdot \nabla h_v & \quad (2.2-64) \end{aligned}$$

Après arrangement,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_o h_o) + \rho_e \theta_e \frac{\partial h_e}{\partial t} + \rho_e \theta_v^* \frac{\partial h_v}{\partial t} + I_v (h_v - h_e) = -\nabla \cdot \vec{J}_q - \vec{J}_{ec} \cdot \nabla h_e - \vec{J}_{vd} \cdot \nabla h_v \quad (2.2-65)$$

Posons

$$h_v - h_e = L \quad (2.2-66)$$

où  $L$  est la *chaleur latente de vaporisation* ou chaleur due au changement de phase, l'équation (2.2-65) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_o h_o + \rho_e \theta_e \frac{\partial h_e}{\partial t} + \rho_e \theta_v^* \frac{\partial h_v}{\partial t} = -\nabla \vec{J}_q - \vec{J}_{ec} \nabla h_e - \vec{J}_{vd} \nabla h_v - L I_v \quad (2.2-67)$$

Sachant que la chaleur massique à pression constante est

$$c_i = \left( \frac{\partial h_i}{\partial T} \right)_p \quad (2.2-68)$$

on peut alors écrire

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = c_i \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2-69)$$

et

$$\nabla h_i = c_i \nabla T \quad (2.2-70)$$

Injectons les relations (2.2-69) et (2.2-70) dans l'équation (2.2-67) :

$$(\rho_o c_o) \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho_e \theta_e c_e) \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho_e \theta_v^* c_v) \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \vec{J}_q - c_e \vec{J}_{ec} \nabla T - c_v \vec{J}_{vd} \nabla T - L I_v \quad (2.2-71)$$

En posant

$$(\rho c)^* = \rho_o c_o + \rho_e c_e \theta_e + \rho_e c_v \theta_v^* \quad (2.2-72)$$

qui correspond à la chaleur volumique équivalente du milieu poreux, l'expression de l'équation de conservation de l'énergie devient finalement :

$$(\rho c)^* \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \vec{J}_q - c_e \vec{J}_{ec} \nabla T - c_v \vec{J}_{vd} \nabla T - L I_v \quad (2.2-73)$$

où :

- $(\rho c)^*$  est la chaleur volumique équivalente du milieu poreux,
- $\vec{J}_{ec} \nabla h_e$  et  $\vec{J}_{vd} \nabla h_v$  représentent le transfert d'énergie dû aux transferts de masse,
- $\vec{J}_q$  est la densité de flux de chaleur apportée par conduction au milieu poreux et donnée par la loi de *FOURIER* [8] :

$$\vec{J}_q = -\lambda^* \nabla T \quad (2.2-74)$$

- $I_v$  est le terme source dont l'expression est tirée de l'équation (2.2-59) :

$$I_v = \rho_e \left[ \alpha \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \chi \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_T \nabla T) \right] \quad (2.2-75)$$

- $\vec{J}_e$  et  $\vec{J}_v$  sont les densités de flux de masse dont nous rappelons les expressions :

$$\vec{J}_e = -\rho_e \left( D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_T \nabla T - K \vec{k} \right) \quad (2.2-22)$$

$$\vec{J}_v = -\rho_e \left( D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_T \nabla T \right) \quad (2.2-29)$$

Remplaçons, par leurs expressions, les différentes densités de flux  $\vec{J}_q$ ,  $\vec{J}_e$  et  $\vec{J}_v$  ainsi que le terme source  $I_v$  dans l'équation (2.2-73). On obtient alors l'équation de conservation d'énergie :

$$\begin{aligned} (\rho c) \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \\ &+ \rho_e c_e \left( D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_T \nabla T - K \vec{k} \right) \nabla T \\ &+ \rho_e c_v \left( D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_T \nabla T \right) \nabla T \\ &+ L \rho_e \left[ \nabla \cdot (D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_T \nabla T) - \alpha \frac{\partial \theta_e}{\partial t} - \chi \frac{\partial T}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (2.2-76)$$

### 2.2.3 SYSTEME RESULTANT.

**Modèle complet de PHILIP et DE VRIES.** Les équations (2.2-62) et (2.2-76) sont les équations de conservation de la masse et de l'énergie qui décrivent les phénomènes de transfert de masse et de chaleur dans les milieux poreux. Le système d'équations résultant, dû à PHILIP et DE VRIES et justifié par WHITAKER et BENNET s'écrit donc :

$$\begin{aligned} (1 + \alpha) \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \chi \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla \cdot (D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_T \nabla T - K \vec{k}) \\ (\rho c) \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \\ &+ \rho_e c_e \left( D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_T \nabla T - K \vec{k} \right) \nabla T \\ &+ \rho_e c_v \left( D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_T \nabla T \right) \nabla T \\ &+ L \rho_e \left[ \nabla \cdot (D_{\theta_e} \nabla \theta_e + D_T \nabla T) - \alpha \frac{\partial \theta_e}{\partial t} - \chi \frac{\partial T}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (2.2-77)$$

On pourrait exprimer ce système en fonction de la teneur en humidité pondérale  $\omega$  sachant que  $\theta_e = \frac{\rho_e}{\rho_o} \omega$  et en considérant constant le rapport  $\rho_o/\rho_e$  puisque, par hypothèses, le liquide est

peu compressible et la masse apparente du matériau est invariable,

on obtiendrait alors :

$$\begin{aligned} (1+\alpha) \frac{\partial}{\partial t} \omega + \frac{\rho_e}{\rho_o} \chi \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla \left[ D_o \nabla \omega + \frac{\rho_e}{\rho_o} D_T \nabla T - \frac{\rho_e}{\rho_o} K \vec{k} \right] \\ (\rho c)^* \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla (\lambda \nabla T) \\ &+ \rho_o c_e \left[ D_{\theta_e} \nabla \omega + \frac{\rho_e}{\rho_o} D_{T_e} \nabla T - \frac{\rho_e}{\rho_o} K \vec{k} \right] \nabla T \\ &+ \rho_o c_v \left[ D_{\theta_v} \nabla \omega + \frac{\rho_e}{\rho_o} D_{T_v} \nabla T \right] \nabla T \\ &+ L \rho_o \left[ \nabla \left( D_{\theta_v} \nabla \omega + \frac{\rho_e}{\rho_o} D_{T_v} \nabla T \right) - \alpha \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\rho_e}{\rho_o} \chi \frac{\partial T}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (2.2-78)$$

En introduisant les notations suivantes :

$$a_m = D_{\theta}, \quad a_d = \frac{\rho_e}{\rho_o} D_T, \quad a_{m_e} = D_{\theta_e}, \quad a_{m_v} = D_{\theta_v}, \quad a_{d_e} = \frac{\rho_e}{\rho_o} D_{T_e}, \quad a_{d_v} = \frac{\rho_e}{\rho_o} D_{T_v}$$

et  $\beta = \frac{\rho_e}{\rho_o} \chi$

le système (2.2-78) deviendra :

$$\begin{aligned} (1+\alpha) \frac{\partial \omega}{\partial t} + \beta \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla \left[ a_m \nabla \omega + a_d \nabla T - \frac{\rho_e}{\rho_o} K \vec{k} \right] \\ (\rho c)^* \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla (\lambda \nabla T) \\ &+ \rho_o c_e \left( a_{m_e} \nabla \omega + a_{d_e} \nabla T - \frac{\rho_e}{\rho_o} K \vec{k} \right) \nabla T \\ &+ \rho_o c_v \left( a_{m_v} \nabla \omega + a_{d_v} \nabla T \right) \nabla T \\ &+ L \rho_o \left[ \nabla \left( a_{m_v} \nabla \omega + a_{d_v} \nabla T \right) - \alpha \frac{\partial \omega}{\partial t} - \beta \frac{\partial T}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (2.2-79)$$



En utilisant les coefficients de diffusion  $a_i$  et de thermomigration  $\delta_i$  [16 et 17] :

$$a_e = a_{m_e}, a_v = a_{m_v}, a = a_e + a_v = a_m,$$

$$a_e \delta_e = a_{d_e}, a_v \delta_v = a_{d_v}, a \delta = a_e \delta_e + a_v \delta_v = a_d.$$

on pourrait écrire le système (2.2-79) sous la forme :

$$(1+\alpha) \frac{\partial \omega}{\partial t} + \beta \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \left[ a \nabla \omega + a \delta \nabla T - \frac{\rho_e}{\rho_0} K \vec{k} \right]$$

$$(\rho c)^* \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla (\lambda^* \nabla T)$$

$$+ \rho_o c_e \left[ a_e \nabla \omega + a_e \delta_e \nabla T - \frac{\rho_e}{\rho_0} K \vec{k} \right] \nabla T$$

$$+ \rho_o c_v [a_v \nabla \omega + a_v \delta_v \nabla T] \nabla T$$

$$+ L \rho_o \left[ \nabla (a_v \nabla \omega + a_v \delta_v \nabla T) - \alpha \frac{\partial \omega}{\partial t} - \beta \frac{\partial T}{\partial t} \right] \quad (2.2-80)$$

L'analyse du système (2.2-80), entre autres, nous permet de remarquer que les deux types de transfert (de masse et de chaleur) sont des phénomènes couplés.

- En plus de l'effet du gradient hydraulique ( $a \nabla \omega$ ) dans l'équation de conservation de la masse, on retrouve la contribution du gradient thermique ( $a \delta \nabla T$ ) appelée effet *SORET*.
- La même remarque peut être faite à propos de l'équation de conservation de l'énergie dans laquelle l'apport de chaleur dû au transfert de masse ( $a_i \nabla \omega$  avec  $i = e$  ou  $v$ ), appelé effet *DUFFORT*, complète celui dû au gradient thermique ( $a_i \delta_i \nabla T$  avec  $i = e$  ou  $v$ ) [5].

Il serait intéressant de mettre en évidence le couplage des équations de masse et d'énergie auquel cas le système (2.2-79), par exemple, deviendrait :

$$(1+\alpha) \frac{\partial \omega}{\partial t} + \beta \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \left[ a_m \nabla \omega + a_d \nabla T - \frac{\rho_e}{\rho_0} K \vec{k} \right]$$

$$L \rho_o \alpha \frac{\partial \omega}{\partial t} + [(\rho c)^* + L \rho_o \beta] \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \left[ L \rho_o a_m \nabla \omega + (\lambda^* + L \rho_o a_d) \nabla T \right]$$

$$+ \rho_o c_e \left( a_m \nabla \omega + a_d \nabla T - \frac{\rho_e}{\rho_0} K \vec{k} \right) \nabla T$$

$$+ \rho_o c_v (a_m \nabla \omega + a_d \nabla T) \nabla T \quad (2.2-81)$$

Les termes convectifs

$$\rho_o c_e \left( a_{m_e} \nabla \omega + a_{d_e} \nabla T - \frac{\rho_e}{\rho_o} K \vec{k} \right) \nabla T \quad (2.2-82)$$

et

$$\rho_o c_v (a_{m_v} \nabla \omega + a_{d_v} \nabla T) \nabla T \quad (2.2-83)$$

traduisant le transfert d'énergie dû au transfert de masse étant négligeables [4] par rapport aux autres modes de transfert de masse,

le système (2.2-81) se réduit à :

$$(1 + \alpha) \frac{\partial \omega}{\partial t} + \beta \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \left( a_m \nabla \omega + a_d \nabla T - \frac{\rho_e}{\rho_o} K \vec{k} \right)$$

$$L \rho_o \alpha \frac{\partial \omega}{\partial t} + [(\rho c)^* + L \rho_o \beta] \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla [L \rho_o a_m \nabla \omega + (\lambda^* + L \rho_o a_d) \nabla T] \quad (2.2-84)$$

**Modèle de PHILIP et DE VRIES simplifié.** Une étude de sensibilité aux paramètres [4, 16 et 17] a abouti à la conclusion que la variation temporelle locale de la teneur en vapeur d'eau en équivalent liquide condensé est négligeable ; soit que :

$$\frac{\partial \theta_v^*}{\partial t} = \alpha \frac{\partial \theta_e}{\partial t} + \chi \frac{\partial T}{\partial t} \approx 0 \quad (2.2-85)$$

ou

$$\alpha \frac{\partial \omega}{\partial t} + \beta \frac{\partial T}{\partial t} \approx 0 \quad (2.2-86)$$

ce qui permet d'obtenir, à partir du système (2.2-84), le modèle de PHILIP-DE VRIES simplifié :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_e}{\partial t} = \nabla (D_\theta \nabla \theta_e + D_T \nabla T - K \vec{k}) \\ (\rho c)^* \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla (L \rho_e D_{\theta_v} \nabla \theta_e + (\lambda^* + L \rho_e D_{T_v}) \nabla T) \end{cases} \quad (2.2-87)$$

que l'on peut encore exprimer, en fonction de la teneur en humidité pondérale, par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \left( a_m \nabla \omega + a_d \nabla T - \frac{\rho_e}{\rho_o} K \vec{k} \right) \\ (\rho c)^* \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla (L \rho_o a_{m_v} \nabla \omega + (\lambda^* + L \rho_o a_{d_v}) \nabla T) \end{cases} \quad (2.2-88)$$

## 2.3 APPLICATION DU MODELE MATHÉMATIQUE AU MODELE PHYSIQUE.

### 2.3.1 MODELE PHYSIQUE.

Le modèle physique à étudier est un échantillon de milieu poreux (sable quartzéux) contenu dans une cellule cylindrique d'axe horizontal de longueur  $L$ . La paroi latérale est thermiquement isolée et l'une des deux faces de la cellule est fermée tandis que l'autre est le siège d'un échange simultané de chaleur et de masse.

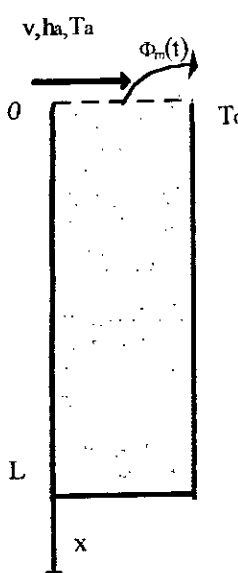
### 2.3.2 CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES.

Compte tenu des difficultés que présente la détermination des coefficients de transfert de masse et de chaleur dans la région de raccordement entre le milieu poreux et l'atmosphère, nous avons choisi une procédure semi-empirique consistant à imposer, sur l'interface concerné, les températures et densités de masse déduites de l'expérience.

#### Conditions initiales

$$t \leq 0 \quad \begin{array}{ll} \omega = \omega_0 & \text{uniforme} \\ T = T_0 & \text{uniforme} \end{array} \quad (2.3-1)$$

#### Conditions aux limites



$$t > 0, \quad \begin{array}{ll} x = 0 & \begin{array}{l} a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} = m(t) \\ T = T_1 \end{array} \\ x = L & \begin{array}{l} a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ T = T_n \end{array} \end{array} \quad (2.3-2)$$

avec :

$$m(t) = \Phi_m(t) = \frac{1}{\rho_0 S} \cdot \frac{dM(t)}{dt} \quad (2.3-3)$$

et où :

$M(t)$  : loi exprimant la masse d'eau condensée ou évaporée en fonction du temps,

$\rho_0$  : masse volumique de l'échantillon de milieu poreux,

$S$  : section de passage de la vapeur d'eau.

### 2.3.3 MODELE MATHÉMATIQUE APPLIQUE.

Compte tenu du caractère unidirectionnel des phénomènes de transfert, l'opérateur de dérivation se réduit à

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.3-4)$$

et ainsi l'effet de la gravité disparaît.

Nous allons exposer les différentes variantes du modèle mathématique propre à ce cas.

**Modèle de PHILIP et DE VRIES.** Le système (2.2-84) exprimant le modèle mathématique de PHILIP et DE VRIES devient :

$$\begin{aligned} (1 + \alpha) \frac{\partial \omega}{\partial t} + \beta \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ L\rho_o \alpha \frac{\partial \omega}{\partial t} + [(\rho c)^* + L\rho_o \beta] \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ L\rho_o a_{m_v} \frac{\partial \omega}{\partial x} + (\lambda^* + L\rho_o a_{d_v}) \frac{\partial T}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (2.3-5)$$

**Modèle de PHILIP et DE VRIES simplifié.** A partir du système (2.2-87), le modèle mathématique simplifié sera :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ (\rho c)^* \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ L\rho_o a_{m_v} \frac{\partial \omega}{\partial x} + (\lambda^* + L\rho_o a_{d_v}) \frac{\partial T}{\partial x} \right] \end{cases} \quad (2.3-6)$$

**Modèle de PHILIP et DE VRIES généré.** Si nous ajoutons l'hypothèse que la chaleur due au changement de phase est négligeable (on étudiera cette hypothèse en détails au chapitre 4), le modèle simplifié deviendra :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ (\rho c)^* \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda^* \frac{\partial T}{\partial x} \right] \end{cases} \quad (2.3-7)$$

qu'on appellera modèle généré.

# CHAPITRE TROIS

## RESOLUTION NUMERIQUE

### METHODE DES ELEMENTS FINIS

#### APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS AU CAS GENERAL.

- Formulation intégrale.
  - Résidus.
  - Méthode des résidus pondérés.
- Transformation des formes intégrales.
  - Forme intégrale faible.
- Approximation des inconnues.
- Discrétisation des formes intégrales.
  - Choix des fonctions de pondération.
  - Méthode de *GALERKIN*.
  - Méthode des éléments finis.

#### APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS AU CAS TRAITE.

### METHODE DES DIFFERENCES FINIES

- consistance
- stabilité
- convergence
- théorème de *LAX*

#### APPLICATION DE LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES AU CAS GENERAL.

- Méthode progressive
- Méthode régressive
- Méthode de *CRANK-NICOLSON*
- Synthèse des méthodes

#### APPLICATION DE LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES AU CAS TRAITE.

- Discrétisation des équations.
- Discrétisation de l'équation thermique.
- Discrétisation de l'équation hydrique.
- Résolution des systèmes résultant.

### 3 RESOLUTION NUMERIQUE

La formulation mathématique du modèle de PHILIP et DE VRIES est exprimée par un système de deux équations aux dérivées partielles (E.D.P.), couplées, de type parabolique, non linéaires (2.3-5).

Afin de pouvoir résoudre numériquement les équations du modèle mathématique cité, appliqué au modèle physique choisi (§ 2.3), il est évident que nous devons d'abord les discrétiser ; étape que nous nous proposons d'aborder par :

- 1 - la méthode des éléments finis,
- 2 - la méthode des différences finies.

Ces deux méthodes appartiennent à deux grandes familles radicalement différentes de par leurs principes de résolution. La première famille est dite *d'approximation de solutions*. Elle aborde, d'emblée, le problème par des modèles de solutions approchées. La seconde est dite *d'approximation d'équations*. Elle est basée sur la discrétisation directe des équations physiques continues.

#### 3.1 METHODE DES ELEMENTS FINIS.

La méthode des éléments finis est une méthode particulière d'approximation par sous-domaines. Au lieu de rechercher, sur tout le domaine  $\Omega$ , une fonction approchée  $u(x)$  qui s'avérera d'autant plus difficile que ce dernier sera de forme compliquée ou que le nombre de noeuds y est élevé, elle procédera à la recherche de solutions approchées propres à chaque sous-domaine  $\Omega^e$  (ou élément fini) puis à la réunion de ces dernières pour obtenir la solution globale.

La méthode des éléments finis ne peut traiter directement les équations physiques continues, généralement décrites par des équations aux dérivées partielles, qu'après les avoir exprimées en une formulation intégrale, obtenue par la méthode des résidus pondérés, qu'elle discrétise ensuite en utilisant des approximations de solutions.

### 3.1.1 APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS AU CAS GENERAL.

#### Formulation intégrale.

**Résidu.** Soit un système physique régi par un système d'équations aux dérivées partielles de la forme :

$$L(u) - g = 0 \quad \text{sur le domaine } \Omega \quad (3.1-1)$$

associé aux conditions aux limites :

$$B(u) - h = 0 \quad \text{sur la frontière } \Gamma \quad (3.1-2)$$

On appelle *résidu* la quantité

$$R(u) = L(u) - g \quad (3.1-3)$$

avec la propriété que

$$R(u) = 0 \quad \text{quand } u \text{ est solution de (3.1-1) et (3.1-2).}$$

Les meilleures approximations de la solution  $u(x)$  sont donc obtenues lorsque ce résidu est le plus faible possible.

**Méthode des résidus pondérés.** La méthode des *résidus pondérés* consiste à rechercher des fonctions  $u$  qui annulent la *forme intégrale* :

$$W = \int_{\Omega} \psi \cdot R(u) \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \psi [L(u) - g] d\Omega = 0 \quad (3.1-4)$$

pour toute fonction de pondération  $\psi$  appartenant à l'ensemble des fonctions  $E_{\psi}$ .

La méthode des résidus pondérés conduit directement, à partir des équations aux dérivées partielles, aux formulations intégrales. La forme intégrale (3.1-4) est appelée *formulation normale* ou *forte*.

#### Transformation des formes intégrales.

**Forme intégrale faible.** Dans le souci d'obtenir la classe de continuité la plus faible possible des approximations  $U(x)$ , on essaie toujours d'abaisser l'ordre de dérivation qui apparaît dans la *formulation normale* ou *forte*. Cela nous est possible en utilisant la *formule de GREEN*

$$\int_{\Omega} \psi \frac{\partial G}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} G \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \psi G \eta_{x_i} d\Gamma \quad (3.1-5)$$

qui n'est en fait que la généralisation à l'espace de la formule d'intégration par parties et qui permet d'alléger les restrictions imposées à la solution approchée.

### Approximation des inconnues.

Soit la fonction  $U(x)$ , définie et continue sur un domaine  $\Omega$ , dont on ne connaît les valeurs exactes qu'en certains noeuds de coordonnées  $x_i$  :

$$U(x_i) = U_{ex}(x_i) = u_i \quad i = 1, n \quad (3.1-6)$$

L'approximation nodale de la fonction  $U(x)$  sera :

$$U(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + \dots + N_n(x)u_n = \sum_{i=1}^n N_i(x)u_i \quad (3.1-7)$$

où :

$x_i$  sont les coordonnées nodales,

$u_i$  sont les variables nodales,

$N_i$  sont les fonctions d'interpolation ou fonctions de forme.

On peut aussi écrire l'équation (3.1-7) sous forme de produit vectoriel :

$$U(x) = \langle N \rangle \{u\} \quad (3.1-8)$$

La relation (3.1-6) appliquée à (3.1-7) donne la propriété suivante aux fonctions de forme :

$$N_j(x_i) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, n \quad (3.1-9)$$

### Discrétisation des formes intégrales.

**Choix des fonctions de pondération.** Les fonctions de pondération  $\psi$  dans (3.1-4) sont au nombre des paramètres de l'approximation et, selon le choix de ces fonctions, différentes méthodes des résidus pondérés seront obtenues :

- méthode de collocation par points,
- méthode de collocation par sous-domaines,
- méthode de *GALERKIN*,
- méthode des moindres carrés.

#### Méthode de *GALERKIN*.

C'est la méthode la plus utilisée. Elle consiste à choisir comme fonctions de pondération des résidus :

$$\psi = \delta U$$

$$\text{ou } \psi = \langle N \rangle$$

$$\text{ou } \psi = \langle P \rangle.$$



où :

$\delta U$  : variations des fonctions  $U$ ,

$\langle N \rangle$  : fonctions de forme de l'approximation nodale,

$\langle P \rangle$  : fonctions de base de l'approximation non nodale.

Choisissons donc comme fonctions de pondération des résidus les variations des fonctions  $U$  :

$$\psi = \delta U \tag{3.1-10}$$

La forme intégrale forte (3.1-4) devient alors :

$$W = \int_{\Omega} \delta U . [L(u) - g] d\Omega = 0 \tag{3.1-11}$$

**Méthode des éléments finis.** La méthode des éléments finis est une méthode de discrétisation des formes intégrales de type GALERKIN.

Tout comme les approximations des fonctions  $U$  qui, rappelons-le, sont

$$U(x) = \langle N \rangle \{u\} \tag{3.1-8}$$

nous pouvons définir celles de leurs variations

$$\delta U = \langle N \rangle \{\delta u\} \tag{3.1-12}$$

L'intégrale (3.1-11) devient :

$$W = \int_{\Omega} \langle N \rangle \{\delta u\} . [L(\langle N \rangle \{u\}) - g] d\Omega = 0 \tag{3.1-13}$$

Le produit étant commutatif, nous pouvons écrire la relation (3.1-13) sous la forme :

$$W = \langle \delta u \rangle \int_{\Omega} \{N\} . [\langle L(N) \rangle \{u\} - g] d\Omega = 0 \tag{3.1-14}$$

Cette relation est équivalente aux  $n$  équations algébriques :

$$\begin{cases} W_1 = \int_{\Omega} N_1(x) . [\langle L(N) \rangle \{u\} - g] d\Omega = 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - \\ W_n = \int_{\Omega} N_n(x) . [\langle L(N) \rangle \{u\} - g] d\Omega = 0 \end{cases} \tag{3.1-15}$$

La méthode des éléments finis remplace la forme intégrale globale  $W$  par une somme de formes intégrales élémentaires  $W^e$  puis discrétise celles-ci en utilisant une approximation par éléments finis.

$$W = \sum_{e=1}^{n_e} W^e = 0 \tag{3.1-16}$$

### 3.1.5 APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS AU CAS TRAITE.

Le modèle physique ayant été décrit au chapitre précédent, nous allons donc discrétiser le modèle mathématique de PHILIP et DE VRIES (Syst. 2.3-5) que nous rappelons :

$$(1 + \alpha) \frac{\partial \omega}{\partial t} + \beta \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \right]$$

$$L\rho_o \alpha \frac{\partial \omega}{\partial t} + [(\rho c)^* + L\rho_o \beta] \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ L\rho_o a_{mv} \frac{\partial \omega}{\partial x} + (\lambda^* + L\rho_o a_{dv}) \frac{\partial T}{\partial x} \right]$$

En posant

$$A = 1 + \alpha ; \quad B = \beta ; \quad D = a_m ; \quad E = a_d$$

$$P = \rho_o L \alpha ; \quad Q = \rho_o L \beta + (\rho c)^* ; \quad R = \rho_o L a_{mv} ; \quad S = \lambda^* + \rho_o L a_{dv}$$

nous pouvons écrire le système d'équations (2.2-68) sous la forme :

$$\begin{cases} A \frac{\partial \omega}{\partial t} + B \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial \omega}{\partial x} + E \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ P \frac{\partial \omega}{\partial t} + Q \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( R \frac{\partial \omega}{\partial x} + S \frac{\partial T}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (3.1-17)$$

**Formulation intégrale.** En appliquant la méthode des résidus pondérés (éq. 3.1-4), on obtient la *formulation intégrale forte* suivante :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \psi \cdot \left[ A \frac{\partial \omega}{\partial t} + B \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial \omega}{\partial x} + E \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] dx = 0 \\ \int_{\Omega} \psi \cdot \left[ P \frac{\partial \omega}{\partial t} + Q \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( R \frac{\partial \omega}{\partial x} + S \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] dx = 0 \end{cases} \quad (3.1-18)$$

**Formulation intégrale faible.** La transformation du système (3.1-18), de la *forme intégrale forte* en une *forme intégrale faible* s'effectue par l'éq.3.1-5 :

$$\begin{cases} \int_0^L \psi \left( A \frac{\partial \omega}{\partial t} + B \frac{\partial T}{\partial t} \right) dx + \int_0^L \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( D \frac{\partial \omega}{\partial x} + E \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = \left[ \psi \left( D \frac{\partial \omega}{\partial x} + E \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right]_0^L \\ \int_0^L \psi \left( P \frac{\partial \omega}{\partial t} + Q \frac{\partial T}{\partial t} \right) dx + \int_0^L \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( R \frac{\partial \omega}{\partial x} + S \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = \left[ \psi \left( R \frac{\partial \omega}{\partial x} + S \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right]_0^L \end{cases} \quad (3.1-19)$$

**Méthode de GALERKIN.** Après application de l'éq.3.1-10, on aboutit à :

$$\int_0^L \{N\} \langle N \rangle \left( A \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial t} \right\} + B \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} \right) dx + \int_0^L \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle (D\{\omega\} + E\{T\}) dx =$$

$$\left[ \{N\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle (D\{\omega\} + E\{T\}) \right]_0^L$$

$$\int_0^L \{N\} \langle N \rangle \left( P \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial t} \right\} + Q \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} \right) dx + \int_0^L \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle (R\{\omega\} + S\{T\}) dx =$$

$$\left[ \{N\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle (R\{\omega\} + S\{T\}) \right]_0^L \quad (3.1-20)$$

où les seconds membres représentent réciproquement les flux de masse et de chaleur aux extrémités du domaine (§ 2.3).

Le système (3.1-20) est équivalent aux  $n$  systèmes suivants ( $i = 1, n$ ) :

$$\int_0^L N_i \langle N \rangle \left( A \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial t} \right\} + B \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} \right) dx + \int_0^L \frac{\partial N_i}{\partial x} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle (D\{\omega\} + E\{T\}) dx =$$

$$\left[ N_i \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle (D\{\omega\} + E\{T\}) \right]_0^L$$

$$\int_0^L N_i \langle N \rangle \left( P \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial t} \right\} + Q \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} \right) dx + \int_0^L \frac{\partial N_i}{\partial x} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle (R\{\omega\} + S\{T\}) dx =$$

$$\left[ N_i \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle (R\{\omega\} + S\{T\}) \right]_0^L \quad (3.1-21)$$

soit encore :

$$\int_0^L N_i \left( A \sum_j N_j \frac{\partial \omega_j}{\partial t} + B \sum_j N_j \frac{\partial T_j}{\partial t} \right) dx + \int_0^L \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( D \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} \omega_j + E \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j \right) dx =$$

$$\left[ N_i \left( D \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} \omega_j + E \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j \right) \right]_0^L$$

$$\int_0^L N_i \left( P \sum_j N_j \frac{\partial \omega_j}{\partial t} + Q \sum_j N_j \frac{\partial T_j}{\partial t} \right) dx + \int_0^L \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( R \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} \omega_j + S \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j \right) dx =$$

$$\left[ N_i \left( R \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} \omega_j + S \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j \right) \right]_0^L \quad i, j = 1, n \quad (3.1-22)$$

Nous remarquons que le système (3.1-22) comporte deux types d'intégrales  $I_1, I_2$  et le même type de conditions de flux  $CL$ . Nous pouvons donc l'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} I_{1,i}(A) + I_{1,i}(B) + I_{2,i}(D) + I_{2,i}(E) = CL(D,E) \\ I_{1,i}(P) + I_{1,i}(Q) + I_{2,i}(R) + I_{2,i}(S) = CL(R,S) \end{cases} \quad (3.1-23)$$

Si  $G_1$  représente les coefficients  $A, B, P$  ou  $Q$  et  $G_2$  les coefficients  $D, E, R$  ou  $S$ , nous pouvons généraliser le calcul des deux types d'intégrales en

$$I_{1,i} = \int_0^L N_i \left( G_1 \sum_j N_j \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) dx \quad i = 1, n \quad (3.1-24)$$

$$I_{2,i} = \int_0^L \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( G_2 \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j \right) dx \quad i = 1, n \quad (3.1-25)$$

et le type de conditions de flux en

$$CF = \left[ N_i \left( G_3 \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j \right) \right]_0^L \quad (3.1-26)$$

avec  $G_3$  représentant les coefficients  $D, E, R$  ou  $S$ .

**Méthode des éléments finis.** L'approximation par éléments finis consiste, comme nous l'avons vu, à diviser le domaine  $\Omega$  en des sous-domaines  $\Omega^e$  ou éléments. Pour notre étude, le problème étant unidirectionnel, on choisira des éléments linéaires sur lesquels on construira les fonctions élémentaires approchées :

$$U^e(x) = N_1^e(x)u_1^e + N_2^e(x)u_2^e \quad (3.1-27)$$

La fonction élémentaire approchée doit être continue sur l'élément  $i$  et aux frontières  $i$  et  $i+1$ , l'extension au domaine  $\Omega$  se fera par assemblage des éléments.

Chaque élément est caractérisé par :

- ses coordonnées locales  $\begin{cases} x_1^e = 0 \\ x_2^e = l^e \end{cases}$  et ses fonctions de forme  $\begin{cases} N_1 = 1 - x^e/l^e \\ N_2 = x^e/l^e \end{cases}$ ,
- ses coordonnées globales  $\begin{cases} x_1 = x_i \\ x_2 = x_{i+1} \end{cases}$  et ses fonctions de forme  $\begin{cases} N_1 = (x - x_{i+1}) / (x_{i+1} - x_i) \\ N_2 = (x_i - x) / (x_i - x_{i+1}) \end{cases}$ .

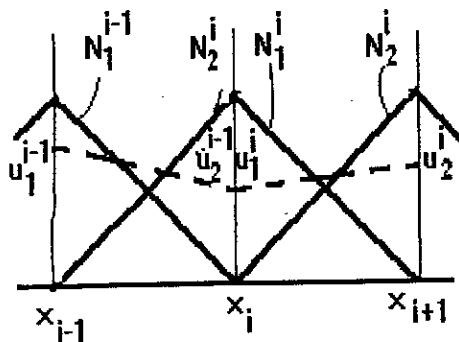
La discrétisation, par la méthode des éléments finis, des expressions (3.1-24) et (3.1-25) résultant de la formulation intégrale de GALERKIN, donnera  $n$  intégrales ; chaque intégrale étant la somme de  $n-1$  intégrales élémentaires :

$$I_{1,i} = \sum_{e=1}^{n-1} \int_0^{l^e} N_i \left( G_1^e \sum_{j=1}^2 N_j^e \frac{\partial u_j^e}{\partial t} \right) dx \quad (3.1-28)$$

$$I_{2,i} = \sum_{e=1}^{n-1} \int_0^{l^e} \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( G_2^e \sum_{j=1}^2 \frac{\partial N_j^e}{\partial x} u_j^e \right) dx \quad (3.1-29)$$

Mais, pour chaque intégrale  $i$ , la somme des  $n-1$  intégrales élémentaires se réduit à la somme des

deux intégrales élémentaires relatives aux éléments  $i-1$  et  $i$  car, d'après le schéma de discrétisation ci-contre les fonctions de forme  $N_i$  et leurs dérivées sont nulles en dehors des éléments  $i-1$  et  $i$ .



Les intégrales (3.1-28) et (3.1-29) deviendront donc :

$$I_{1,i} = \sum_{e=i-1}^i \int_0^{l^e} N_i \left( G_1^e \sum_{j=1}^2 N_j^e \frac{\partial u_j^e}{\partial t} \right) dx \quad (3.1-30)$$

$$I_{2,i} = \sum_{e=i-1}^i \int_0^{l^e} \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( G_2^e \sum_{j=1}^2 \frac{\partial N_j^e}{\partial x} u_j^e \right) dx \quad (3.1-31)$$

L'approximation nodale des fonctions de forme  $N_i$  étant valable pour toute autre fonction de  $x$ ,

$$G^i(x) = N_1^i(x)g_1^i + N_2^i(x)g_2^i \quad (3.1-32)$$

Les étapes relatives au calcul des intégrales élémentaires sont détaillées dans [17].

Nous disposons à présent de tous les outils nécessaires au développement des intégrales (3.1-30) et (3.1-31) après lesquels nous arrivons à la forme suivante:

$$[C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\} \quad (3.1-33)$$

où

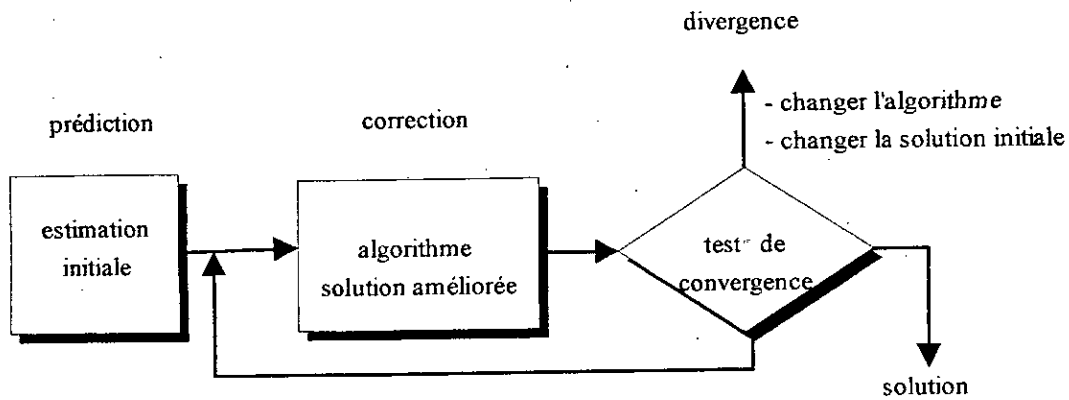
$$\{ \dot{U} \} = \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{\omega}_1 \\ - \\ - \\ \dot{T}_n \\ \dot{\omega}_n \end{Bmatrix} \text{ et } \{ U \} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ \omega_1 \\ - \\ - \\ T_n \\ \omega_n \end{Bmatrix} \quad (3.1-34)$$

Il faudra alors discrétiser le vecteur  $\{ \dot{U} \} = \begin{Bmatrix} \dot{T} \\ \dot{\omega} \end{Bmatrix}$  pour obtenir une expression en  $\{ U \} = \begin{Bmatrix} T \\ \omega \end{Bmatrix}$  du système (3.1-33) ; discrétisation de *CRANK NICOLSON* largement commentée dans le paragraphe suivant.

Le système (3.1-33) se met alors sous la forme

$$[A]\{U\} = \{B\} \quad (3.1-35)$$

et se résout par un processus itératif [9] de forme générale :



On initialise les itérations avec  $\hat{U}^{n+1}(1) = \varphi(U^n, U^{n-1})$  où 1 entre parenthèses correspond à la première itération et  $\varphi$  est une fonction ou relation d'extrapolation qui est susceptible d'être assez voisine de  $U^{n+1}$ . La résolution itérative n'est alors qu'un simple réajustement de  $U^{n+1}$  autour de  $\hat{U}^{n+1}(1)$  qui s'effectue en un nombre minimum d'itérations [14].

### 3.2 METHODE DES DIFFERENCES FINIES.

Soit un système physique régi par un système d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$L(u) - g = 0 \quad \text{sur le domaine } \Omega \quad (3.1-1)$$

associé aux conditions aux limites :

$$B(u) - h = 0 \quad \text{sur la frontière } \Gamma \quad (3.1-2)$$

La forme discrétisée du système formé par les relations (3.1-1) et (3.1-2) s'écrit :

$$\begin{cases} L_{\Delta}(U) = g & \text{dans } \Omega \\ B_{\Delta}(U) = h & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.2-1)$$

où

$\Delta$  représente le pas de discrétisation choisi et  $L_{\Delta}$  l'opérateur discret ou schéma de discrétisation.

Mais, pour que la solution approchée  $U_{\Delta}$  reflète bien la solution  $u$  recherchée, il lui faut satisfaire les conditions de consistance, de stabilité et de convergence.

**Consistance.** Elle est représentée par l'erreur de troncature ou erreur de discrétisation

$$R_{\Delta}(u) = L_{\Delta}(U) - L(u) \quad (3.2-2)$$

qui est faite systématiquement lorsqu'on approche un opérateur continu  $L$  par un opérateur discret aux différences  $L_{\Delta}$ . Cette approximation est dite *consistante* ou *cohérente* si l'erreur de troncature tend vers zéro lorsque tous les pas de discrétisation tendent eux-mêmes vers zéro ( $\Delta \rightarrow 0$ ) [14]. Dans ce cas, la forme discrétisée représentera correctement l'équation d'origine.

**Stabilité.** On dit qu'un processus de calcul séquentiel ou itératif est stable si les erreurs d'arrondis ne s'amplifient pas au fur et à mesure que les calculs progressent [14]. Cela signifie qu'à une étape de calcul où la solution comporte une erreur très petite (erreur d'arrondi du calculateur), il est indispensable que cette erreur minimale ne puisse s'amplifier aux étapes de calcul suivantes.

La méthode numérique adoptée pour résoudre le système (3.2-1) conduira alors à une solution  $U_{\Delta}$  qui le vérifie effectivement.

**Convergence.** On dit que le schéma aux différences finies est convergent si la quantité  $[u(x,t) - U_{\Delta}(x,t)]$  tend vers zéro quand les pas de discrétisation tendent vers zéro.

La solution  $U_{\Delta}$  sera alors une approximation convenable de la solution exacte  $u$ .

**Théorème de LAX.** «Pour un problème bien posé, satisfaisant la condition de *consistance*, *convergence* et *stabilité* sont deux notions équivalentes».

La démonstration de ce théorème ainsi que les démonstrations et développements pour obtenir des expressions numériques des différentes conditions précédentes sont largement commentés dans [14] et dont nous utiliserons les résultats.

### 3.2.1 APPLICATION DE LA METHODE AU CAS GENERAL.

Comme il s'agit de traiter deux équations à deux inconnues, toutes deux fonction de deux variables, nous pensons nécessaire de nous familiariser avec le cas général d'une équation parabolique aux dérivées partielles à une inconnue  $u = u(x, t)$  définie et continue sur le domaine spatial unidimensionnel  $\Omega$  de longueur  $L$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (3.2-3)$$

$$0 \leq x \leq L \text{ et } t > 0$$

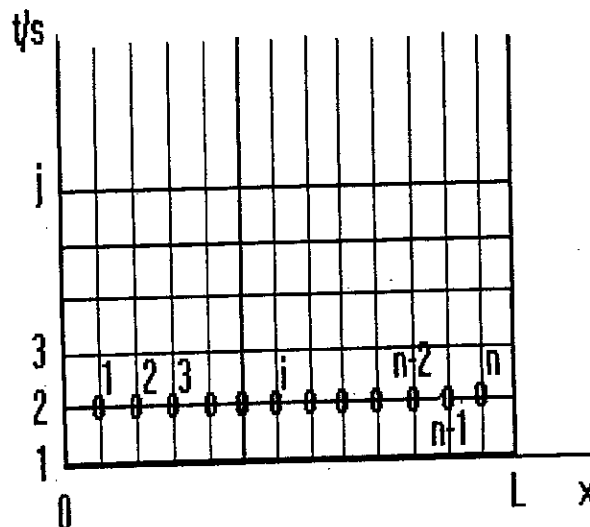
Choisissons un nombre de noeuds  $n$  de sorte que nous puissions discrétiser le domaine  $\Omega$  suivant le pas d'espace

$$h = \Delta x = L/(n+1) \quad (3.2-4)$$

et soit  $s$  le pas de temps tel que :

$$\begin{cases} x = ih \\ t = (j-1)s \end{cases} \quad (3.2-5)$$

$$i = 1, n+1 \text{ et } j = 1, 2, 3,$$



Le schéma à deux niveaux de discrétisation dans le plan  $(x, t)$ , propre à ce cas, est représenté sur la figure ci-dessus.



L'équation (3.2-3) soit satisfaire les conditions aux limites :

$$\begin{cases} u(0, t) = g_0(t) \\ u(L, t) = g_L(t) \end{cases} \quad t > 0 \quad (3.2-6)$$

et les conditions initiales :

$$\begin{aligned} u(x, 1) &= f(x) \\ 0 &\leq x \leq L \quad \text{et } t(1) = 0 \end{aligned} \quad (3.2-7)$$

La discrétisation, par différences finies, d'une fonction de deux variables  $u(x, t)$ , suffisamment dérivable, peut être tirée du développement limité de TAYLOR :

$$\begin{aligned} u(x+h, t+s) &= u(x, t) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + s \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \\ &+ \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + hs \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x, t) + \frac{s^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dots \\ &+ \frac{1}{(n-1)!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + s \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n-1)} u(x, t) + R_n \end{aligned} \quad (3.2-8)$$

où

$$R_n = \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + s \frac{\partial}{\partial t} \right)^n u(x + \xi h, t + \eta s) \quad (3.2-9)$$

Nous pouvons utiliser le développement de TAYLOR par la méthode *progressive*, la méthode *régressive* ou une combinaison des deux.

### Méthode progressive.

#### Discrétisation en t :

$$u(x_i, t_j + s) = u(x_i, t_j) + s \frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_j) + \frac{s^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_i, t_j) \quad (3.2-10)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) &= \frac{u(x_i, t_j + s) - u(x_i, t_j)}{s} - \frac{s}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_i, t_j + \vartheta_j s) \\ 0 &< \vartheta_j < 1 \end{aligned} \quad (3.2-11)$$

#### Discrétisation en x :

$$u(x_i + h, t_j) = u(x_i, t_j) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j) + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) + \dots \quad (3.2-12)$$

$$u(x_i - h, t_j) = u(x_i, t_j) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j) + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) + \dots \quad (3.2-13)$$

En faisant la somme des équations (3.2-12) et (3.2-13), on obtient :

$$u(x_i + h, t_j) + u(x_i - h, t_j) = 2u(x_i, t_j) + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i + \phi_i h, t_j) \quad (3.2-14)$$

d'où :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i + \phi_i h, t_j) \quad (3.2-15)$$

$$-1 < \phi_i < 1$$

En injectant les équations (3.2-11) et (3.2-15) dans (3.2-3), nous obtenons:

$$\frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j - s)}{s} - \alpha^2 \frac{u(x_i - h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i + h, t_j)}{h^2} = \frac{s}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j + \vartheta_j s) - \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i + \phi_j h, t_j) \quad (3.2-16)$$

Nous pouvons alors approximer l'équation (3.2-3) par :

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{s} - \alpha^2 \frac{v_{i-1}^j - 2v_i^j + v_{i+1}^j}{h^2} = 0 \quad (3.2-17)$$

avec une erreur d'approximation :

$$\tau_p = \frac{s}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j + \vartheta_j s) - \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i + \phi_j h, t_j) \quad (3.2-18)$$

$$-1 < \phi_i < 1 \text{ et } 0 < \vartheta_j < 1$$

soit une erreur de l'ordre de  $O(s+h^2)$ .

Posons :

$$\gamma = \alpha^2 \frac{s}{h^2} \quad (3.2-19)$$

l'équation (3.2-17) devient alors :

$$v_i^{j+1} = \gamma \cdot v_{i-1}^j + (1-2\gamma)v_i^j + \gamma \cdot v_{i+1}^j \quad (3.2-20)$$

$$i = 2, n-1 \text{ et } j = 1, 2, 3, \dots$$

avec les conditions limites:

$$\begin{cases} v_0^{j+1} = g_0^{j+1} \\ v_{n+1}^{j+1} = g_L^{j+1} \end{cases} \quad (3.2-21)$$

et les conditions initiales

$$v_i^1 = f_i \quad (3.2-22)$$

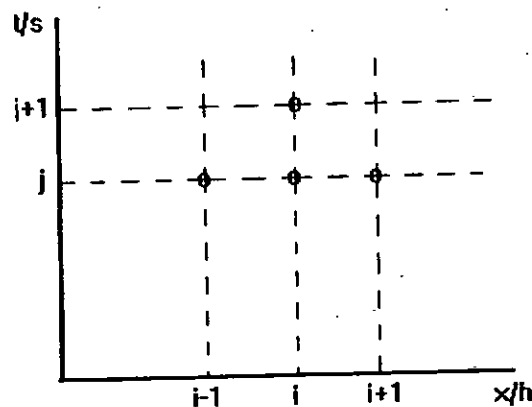
En écriture matricielle, elle se met sous la forme :

$$\{v\}^{j+1} = [A]\{v\}^j \quad (3.2-23)$$

$$\begin{Bmatrix} v_1^{j+1} \\ v_2^{j+1} \\ v_3^{j+1} \\ \vdots \\ v_{n-2}^{j+1} \\ v_{n-1}^{j+1} \\ v_n^{j+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2\gamma) & \gamma & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \gamma & (1-2\gamma) & \gamma & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & 0 \\ \vdots & & & & \gamma & (1-2\gamma) & \gamma \\ 0 & & & & 0 & \gamma & (1-2\gamma) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^j \\ v_2^j \\ v_3^j \\ \vdots \\ v_{n-2}^j \\ v_{n-1}^j \\ v_n^j \end{Bmatrix}$$

La méthode progressive est conditionnellement stable car la condition de stabilité [6] exige un choix judicieux des pas d'espace  $h$  et de temps  $s$  de sorte à avoir :

$$\gamma = \alpha^2 \frac{s}{h^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.2-24)$$



La méthode progressive suit donc le schéma explicite ci-contre :

### Méthode régressive.

#### Discretisation en $t$ :

$$u(x_i, t_j - s) = u(x_i, t_j) - s \frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_j) + \frac{s^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_i, t_j) + \dots \quad (3.2-25)$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j - s)}{s} + \frac{s}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_i, t_j + \vartheta_j s) \quad (3.2-26)$$

$$-1 < \vartheta_j < 0$$

**Discretisation en x.**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i + \phi_i h, t_j)$$

$$-1 < \phi_i < 1 \quad (3.2-27)$$

En injectant les équations (3.2-26) et (3.2-27) dans (3.2-3), on obtient :

$$\frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j - s)}{s} - \alpha^2 \frac{u(x_i - h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i + h, t_j)}{h^2} =$$

$$-\frac{s}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j + \theta_j s) - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i + \phi_j h, t_j)$$

$$-1 < \phi_i < 1 \quad \text{et} \quad -1 < \theta_j < 0 \quad (3.2-28)$$

nous pouvons donc approximer l'équation (3.2-3) par :

$$\frac{v_i^j - v_i^{j-1}}{s} - \alpha^2 \frac{v_{i-1}^j - 2v_i^j + v_{i+1}^j}{h^2} = 0 \quad (3.2-29)$$

avec une erreur d'approximation :

$$\tau_r = -\frac{s}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j + \theta_j s) - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i + \phi_j h, t_j)$$

$$-1 < \phi_i < 1 \quad \text{et} \quad -1 < \theta_j < 0 \quad (3.2-30)$$

c'est à dire une erreur de l'ordre de  $O(s+h^2)$

Avec

$$\gamma = \alpha^2 \frac{s}{h^2} \quad (3.2-19)$$

l'équation (3.2-29) devient alors :

$$-\gamma \cdot v_{i-1}^j + (1+2\gamma)v_i^j - \gamma \cdot v_{i+1}^j = v_i^{j-1}$$

$$i = 1, n \quad \text{et} \quad j = 2, 3, \dots \quad (3.2-31)$$

avec les conditions limites :

$$\begin{cases} v_0^j = g_0^j \\ v_{n+1}^j = g_L^j \end{cases} \quad j = 2, 3, \dots \quad (3.2-32)$$

et les conditions initiales

$$v_i^1 = f_i \quad (3.2-22)$$

En écriture matricielle, elle s'écrit :

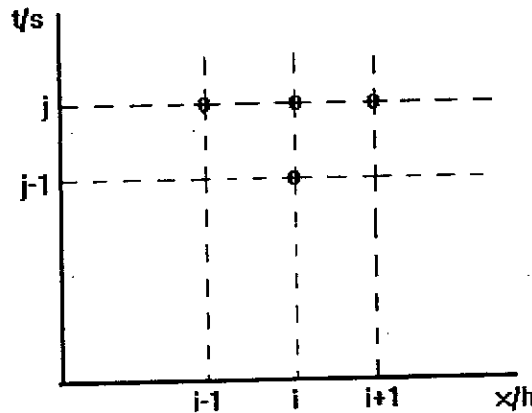
$$[A]\{v\}^j = \{v\}^{j-1} \quad j = 2, 3, \dots \quad (3.2-33)$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} (1+2\gamma) & -\gamma & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\gamma & (1+2\gamma) & -\gamma & & & & \\ 0 & & & & & & \\ \dots & & & & & & \\ \dots & & & & & & 0 \\ \dots & & & & -\gamma & (1+2\gamma) & -\gamma \\ 0 & & & 0 & -\gamma & (1+2\gamma) & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^j \\ v_2^j \\ v_3^j \\ \dots \\ v_{n-2}^j \\ v_{n-1}^j \\ v_n^j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1^{j-1} + \gamma \cdot v_0^{j-1} \\ v_2^{j-1} \\ v_3^{j-1} \\ \dots \\ v_{n-2}^{j-1} \\ v_{n-1}^{j-1} \\ v_n^{j-1} + \gamma \cdot v_{n+1}^{j-1} \end{Bmatrix}$$

où  $[A]$  est une matrice définie positive à diagonale dominante. Ce qui nous pousse à affirmer que la méthode est stable quelle que soit la valeur de  $\gamma$ .

Il demeure que la rapidité de la convergence exige que le pas de temps  $s$  soit beaucoup plus petit que le pas d'espace  $h$  puisque  $\gamma = \alpha^2 \frac{s}{h^2}$  et que l'erreur d'approximation de cette méthode est de l'ordre de  $O(s+h^2)$ . C'est pourquoi nous préférons travailler sur une méthode dont l'erreur d'approximation est d'ordre  $O(h^2 + s^2)$ .



La méthode régressive utilise donc le schéma implicite ci-contre :

### Méthode de CRANK NICOLSON.

Elle utilise la somme des méthodes explicite au pas de temps  $j$  et implicite au pas de temps  $j+1$ . Le développement de TAYLOR, pour la méthode régressive au pas de temps  $j+1$ , s'écrit :

$$u(x_i, t_j) = u(x_i, t_j + s) - s \frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_j + s) + \frac{s^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_i, t_j + s) + \dots \quad (3.2-34)$$

d'où :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j + s) = \frac{u(x_i, t_j + s) - u(x_i, t_j)}{s} + \frac{s}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_i, t_j + \tilde{\vartheta}_j s)$$

$$-1 < \tilde{\vartheta} < 0 \quad (3.2-35)$$

En ajoutant cette équation à l'équation (3.2-11) qui, rappelons-le est :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j + s) - u(x_i, t_j)}{s} - \frac{s}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_i, t_j + \vartheta_j s)$$

$$0 < \vartheta_j < 1$$

nous serons obligés d'aller jusqu'à l'ordre supérieur de dérivation pour déterminer l'erreur d'approximation qui deviendra de l'ordre de  $O(s^2)$ .

D'autre part, nous pensons qu'il serait raisonnable de poser que :

$$t_j + \tilde{\vartheta}_j s \approx t_j + \vartheta_j s$$

On pourra alors approximer l'équation (3.2-1) par :

$$2 \left[ \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{s} \right] - \alpha^2 \left[ \frac{v_{i-1}^{j+1} - 2v_i^{j+1} + v_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{v_{i-1}^j - 2v_i^j + v_{i+1}^j}{h^2} \right] = 0$$

soit

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{s} - \frac{\alpha^2}{2} \left[ \frac{v_{i-1}^{j+1} - 2v_i^{j+1} + v_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{v_{i-1}^j - 2v_i^j + v_{i+1}^j}{h^2} \right] = 0 \quad (3.2-36)$$

avec une erreur d'approximation d'ordre de  $O(s^2 + h^2)$ .

Toujours en posant

$$\gamma = \alpha^2 \frac{s}{h^2} \quad (3.2-19)$$

l'équation (3.2-36) prend la forme :

$$-\frac{\gamma}{2} v_{i-1}^{j+1} + (1+\gamma) v_i^{j+1} - \frac{\gamma}{2} v_{i+1}^{j+1} = \frac{\gamma}{2} v_{i-1}^j + (1-\gamma) v_i^j + \frac{\gamma}{2} v_{i+1}^j \quad (3.2-37)$$

$$i = 1, n \text{ et } j = 2, 3, \dots$$

avec les conditions limites (3.2-21) :

$$\begin{cases} v_0^{j+1} = g_0^{j+1} \\ v_{n+1}^{j+1} = g_L^{j+1} \end{cases}$$

et les conditions initiales (3.2-22) :

$$v_i^1 = f_i$$

En écriture matricielle :

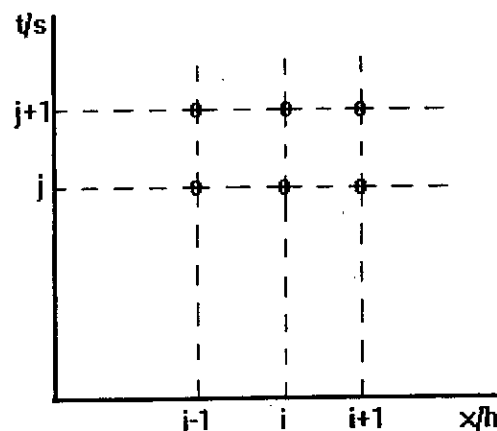
$$[A]\{v\}^{j+1} = [B]\{v\}^j \quad (3.2-38)$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} (1+\gamma) & -\frac{\gamma}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{\gamma}{2} & (1+\gamma) & -\frac{\gamma}{2} & & & \\ 0 & & & & & \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & 0 \\ \dots & & & -\frac{\gamma}{2} & (1+\gamma) & -\frac{\gamma}{2} \\ 0 & & & 0 & -\frac{\gamma}{2} & (1+\gamma) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^{j+1} \\ v_2^{j+1} \\ v_3^{j+1} \\ \dots \\ v_{n-2}^{j+1} \\ v_{n-1}^{j+1} \\ v_n^{j+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\gamma) & \frac{\gamma}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & (1-\gamma) & \frac{\gamma}{2} & & & \\ 0 & & & & & \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & 0 \\ \dots & & & \frac{\gamma}{2} & (1-\gamma) & \frac{\gamma}{2} \\ 0 & & & 0 & \frac{\gamma}{2} & (1-\gamma) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^j \\ v_2^j \\ v_3^j \\ \dots \\ v_{n-2}^j \\ v_{n-1}^j \\ v_n^j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\gamma}{2}(v_o^j + v_o^{j+1}) \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\gamma}{2}(v_{n+1}^j + v_{n+1}^{j+1}) \end{Bmatrix}$$

On voit bien que la matrice  $[A]$  est définie positive, symétrique, et à diagonale strictement dominante.

Outre que, de ce fait, la méthode de *CRANK NICOLSON* est inconditionnellement stable, elle présente l'avantage d'avoir la plus faible erreur de troncature. La méthode de *CRANK NICOLSON* suit donc le schéma figure ci-dessous.



L'algorithme de *CRANK NICOLSON* est en fait une combinaison des méthodes vues précédemment.

### Synthèse des méthodes.

Nous pouvons généraliser en une seule écriture les différents variantes étudiées :

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{s} = \theta \cdot \alpha^2 \frac{v_{i-1}^{j+1} - 2v_i^{j+1} + v_{i+1}^{j+1}}{h^2} + (1-\theta) \cdot \alpha^2 \frac{v_{i-1}^j - 2v_i^j + v_{i+1}^j}{h^2} \quad (3.2-39)$$

qu'on peut aussi écrire sous la forme :

$$v_i^{j+1} - v_i^j = \gamma \cdot \left[ \theta (\delta^2 v)_i^{j+1} + (1-\theta) (\delta^2 v)_i^j \right] \quad (3.2-40)$$

où

$$\gamma = \alpha^2 \frac{s}{h^2} \quad (3.2-19)$$

et

$$\begin{cases} (\delta^2 v)_i^j = v_{i+1}^j - 2 \cdot v_i^j + v_{i-1}^j \\ (\delta^2 v)_i^{j+1} = v_{i+1}^{j+1} - 2 \cdot v_i^{j+1} + v_{i-1}^{j+1} \end{cases} \quad (3.2-41)$$

Dans ce cas, on obtient :

- a - la méthode explicite si  $\theta = 0$ ,
- b - la méthode implicite si  $\theta = 1$ ,
- c - la méthode de *CRANK NICOLSON* si  $\theta = 1/2$ .

Une étude [14] a montré que la condition de stabilité est satisfaite pour :

- $0 \leq \theta < 1/2$  si  $\gamma \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$
- $\theta \geq 1/2$  quelle que soit la valeur de  $\gamma$ .

alors que la précision liée à la minimisation de l'erreur de troncature impose que le coefficient de pondération obéisse au critère :

$$\theta = 1/2 - \frac{1}{12\gamma}$$



### 3.2.2 APPLICATION DE LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES AU CAS TRAITE.

#### Discrétisation des équations.

On se propose de discrétiser les équations du modèle mathématique de PHILIP et DE VRIES généré lié au modèle physique décrit au deuxième chapitre (§ 2.3) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ (\rho c)^* \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda^* \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] \end{cases} \quad (2.3-7)$$

Nous allons reprendre la discrétisation géométrique du domaine, déjà établie (§ 3.2.1), en plaçant des noeuds aux frontières comme pour la méthode aux éléments finis.

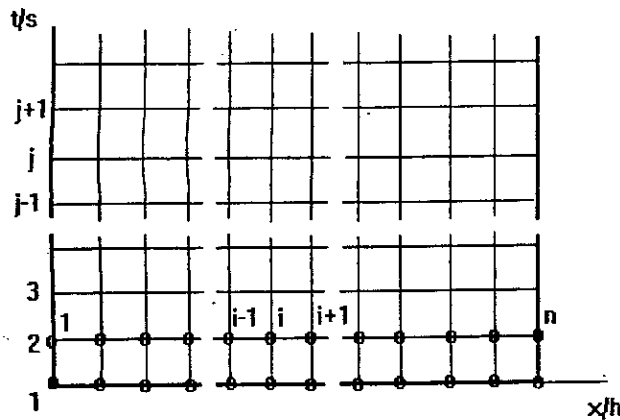


Figure 11 - Discretisation géométrique du domaine d'étude. Schéma général à deux niveaux de discrétisation dans le plan (x,t).

Nous utiliserons, pour la discrétisation du système (2.3-7), le schéma de CRANK-NICOLSON qui, comme nous l'avons vu, est inconditionnellement stable et sans relation contraignante entre les pas d'espace et de temps. En plus c'est le schéma dont l'erreur de troncature est la plus faible de tous les schémas étudiés précédemment. Nous commencerons par discrétiser l'équation de la chaleur à cause de son caractère linéaire et de son découplage par rapport à la deuxième variable  $\omega$ .

**Discrétisation de l'équation thermique.** Soit  $n$  le nombre de noeuds.

Pour  $i = 2$  à  $n-1$ , le schéma général de discrétisation (3.2-40), pondéré par  $\theta$ , de la deuxième équation du système (2.3-7) représentant l'équation thermique [2] s'écrit :

$$\begin{aligned} ((\rho c)^*)_i^{j+\theta} \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} &= \frac{\theta}{\Delta x} \left[ \left( \lambda^* \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+1/2}^{j+1} - \left( \lambda^* \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-1/2}^{j+1} \right] \\ &+ \frac{1-\theta}{\Delta x} \left[ \left( \lambda^* \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+1/2}^j - \left( \lambda^* \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-1/2}^j \right] \end{aligned} \quad i = 2 \text{ à } n-1 \quad (3.2-42)$$

Le développement des dérivées du second membre de l'équation (3.2-42) conduit à :

$$\begin{aligned} \left( (\rho c)^* \right)_i^{j+0} \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} &= \frac{\theta}{\Delta x} \left[ (\lambda^*)_{i+1/2}^{j+1} \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}}{\Delta x} - (\lambda^*)_{i-1/2}^{j+1} \frac{T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{\Delta x} \right] \\ &+ \frac{1-\theta}{\Delta x} \left[ (\lambda^*)_{i+1/2}^j \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{\Delta x} - (\lambda^*)_{i-1/2}^j \frac{T_i^j - T_{i-1}^j}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad (3.2-43)$$

soit en tenant compte du schéma de CRANK NICOLSON pour lequel  $\theta = 1/2$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} &= \frac{\theta}{\Delta x} \left[ d_1^* \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}}{\Delta x} - d_2^* \frac{T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{\Delta x} \right] \\ &+ \frac{1-\theta}{\Delta x} \left[ d_3^* \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{\Delta x} - d_4^* \frac{T_i^j - T_{i-1}^j}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad (3.2-44)$$

avec :

$$d_1^* = \frac{(\lambda^*)_{i+1/2}^{j+1}}{\left( (\rho c)^* \right)_i^{j+1/2}} ; d_2^* = \frac{(\lambda^*)_{i-1/2}^{j+1}}{\left( (\rho c)^* \right)_i^{j+1/2}} ; d_3^* = \frac{(\lambda^*)_{i+1/2}^j}{\left( (\rho c)^* \right)_i^{j+1/2}} ; d_4^* = \frac{(\lambda^*)_{i-1/2}^j}{\left( (\rho c)^* \right)_i^{j+1/2}} \quad (3.2-45)$$

Dans le cas où la chaleur volumique équivalente  $(\rho c)^*$  et  $\lambda^*$  la conductivité thermique apparente du matériau sont constantes, la diffusivité thermique sera constante ; d'où :

$$d = d_1^* = d_2^* = d_3^* = d_4^* \quad (3.2-46)$$

Cette hypothèse n'aura d'incidence que sur l'équation thermique.

Le système (2.3-7) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial t} = d \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \end{cases} \quad (3.2-47)$$

Après réarrangement, l'équation (3.2-44) s'écrit :

$$T_i^{j+1} - T_i^j = \frac{d}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \left( T_{i-1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i+1}^{j+1} + T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j \right) \quad (3.2-48)$$

$i = 2 \text{ à } n-1$

Notons :

- le pas de temps :  $s = \Delta t$
- le pas d'espace :  $h = \Delta x$
- le rapport du pas de temps au carré du pas d'espace :  $\gamma = s / h^2$

L'équation thermique prendra alors la forme suivante :

$$-d \frac{\gamma}{2} T_{i-1}^{j+1} + \left(1 + d \frac{\gamma}{2}\right) T_i^{j+1} - d \frac{\gamma}{2} T_{i+1}^{j+1} = d \frac{\gamma}{2} T_{i-1}^j + \left(1 - d \frac{\gamma}{2}\right) T_i^j + d \frac{\gamma}{2} T_{i+1}^j$$

$$i = 2 \text{ à } n-1 \quad (3.2-49)$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{2}d & (1+\gamma d) & -\frac{\gamma}{2}d & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2}d & (1+\gamma d) & -\frac{\gamma}{2}d & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^{j+1} \\ T_2^{j+1} \\ T_3^{j+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{n-2}^{j+1} \\ T_{n-1}^{j+1} \\ T_n^{j+1} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2}d & (1-\gamma d) & \frac{\gamma}{2}d & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{2}d & (1-\gamma d) & \frac{\gamma}{2}d & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^j \\ T_2^j \\ T_3^j \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{n-2}^j \\ T_{n-1}^j \\ T_n^j \end{Bmatrix} \quad (3.2-50)$$

Posons que :

$$\left. \begin{aligned} a_i &= -\frac{\gamma}{2}d \\ b_i &= (1 + \gamma \cdot d) \\ c_i &= -\frac{\gamma}{2}d \end{aligned} \right\} i = 1, n-2 \quad (3.2-51)$$

et

$$r_i = \frac{\gamma}{2}d \cdot (T_i^j + T_{i+2}^j) + (1 - \gamma \cdot d) T_{i+1}^j$$

$$i = 1, n-2 \quad (3.2-52)$$

nous pouvons alors écrire (3.2-50) plus simplement :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & & & & & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} & 0 & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^{j+1} \\ T_2^{j+1} \\ T_3^{j+1} \\ \cdot \\ T_{n-2}^{j+1} \\ T_{n-1}^{j+1} \\ T_n^{j+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_{t_1} \\ r_{t_2} \\ r_{t_3} \\ \cdot \\ r_{t_{n-4}} \\ r_{t_{n-3}} \\ r_{t_{n-2}} \end{Bmatrix} \quad (3.2-53)$$

Mais comme les noeuds 1 et  $n$  sont assujettis aux conditions aux limites aux frontières, où

$$\begin{cases} T(1,j) = T_1 \\ T(n,j) = T_n \end{cases} \quad j = 2, 3, \dots \quad (\text{pour tout } t > 0) \quad (3.2-54)$$

nous aboutissons à la transformation :

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & 0 \\ \cdot & & & & a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2^{j+1} \\ T_3^{j+1} \\ T_4^{j+1} \\ \cdot \\ T_{n-3}^{j+1} \\ T_{n-2}^{j+1} \\ T_{n-1}^{j+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_{t_1} \\ r_{t_2} \\ r_{t_3} \\ \cdot \\ r_{t_{n-4}} \\ r_{t_{n-3}} \\ r_{t_{n-2}} \end{Bmatrix} \quad (3.2-55)$$

avec, toutefois, les changements suivants au niveau de la première et de la dernière ligne du vecteur représentant le produit matriciel du membre de droite :

$$\begin{cases} r_{t_1} = r_{t_1} - a_1 T_1^{j+1} \\ r_{t_{n-2}} = r_{t_{n-2}} - c_{n-2} T_n^{j+1} \end{cases} \quad (3.2-56)$$

**Discrétisation de l'équation hydrique.** La discrétisation, à l'aide du schéma général (3.2-40) pondéré par  $\theta$ , de la première équation du système (2.3-7) représentant l'équation de l'humidité ou l'équation hydrique donne [2] :

$$\frac{\omega_i^{j+1} - \omega_i^j}{\Delta t} = \frac{\theta}{\Delta x} \left[ \left( a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+1/2}^{j+1} - \left( a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-1/2}^{j+1} \right] - \frac{1-\theta}{\Delta x} \left[ \left( a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+1/2}^j - \left( a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-1/2}^j \right] \quad i = 2 \text{ à } n-1 \quad (3.2-57)$$

Après développement, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_i^{j+1} - \omega_i^j}{\Delta t} = & \frac{\theta}{\Delta x} \left\{ \left[ (a_m)_{i+1/2}^{j+1} \frac{\omega_{i+1}^{j+1} - \omega_i^{j+1}}{\Delta x} + (a_d)_{i+1/2}^{j+1} \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}}{\Delta x} \right] \right. \\ & \left. - \left[ (a_m)_{i-1/2}^{j+1} \frac{\omega_i^{j+1} - \omega_{i-1}^{j+1}}{\Delta x} + (a_d)_{i-1/2}^{j+1} \frac{T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{\Delta x} \right] \right\} \\ & + \frac{1-\theta}{\Delta x} \left\{ \left[ (a_m)_{i+1/2}^j \frac{\omega_{i+1}^j - \omega_i^j}{\Delta x} + (a_d)_{i+1/2}^j \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{\Delta x} \right] \right. \\ & \left. - \left[ (a_m)_{i-1/2}^j \frac{\omega_i^j - \omega_{i-1}^j}{\Delta x} + (a_d)_{i-1/2}^j \frac{T_i^j - T_{i-1}^j}{\Delta x} \right] \right\} \end{aligned}$$

$i = 2, n-1$  (3.2-58)

Notons :

- le pas de temps :  $s = \Delta t$
- le pas d'espace :  $h = \Delta x$
- le rapport du pas de temps au carré du pas d'espace :  $\gamma = s / h^2$

et en utilisant le coefficient de pondération  $\theta = 1/2$ , l'équation (3.2-58) devient :

$$\begin{aligned} -\frac{\gamma}{2} (a_m)_{i-1/2}^{j+1} \omega_{i-1}^{j+1} + \left( 1 + \gamma \left[ \frac{1}{2} \left( (a_m)_{i-1/2}^{j+1} + (a_m)_{i+1/2}^{j+1} \right) \right] \right) \omega_i^{j+1} - \frac{\gamma}{2} (a_m)_{i+1/2}^{j+1} \omega_{i+1}^{j+1} = \\ \frac{\gamma}{2} (a_m)_{i-1/2}^j \omega_{i-1}^j + \left( 1 + \gamma \left[ \frac{1}{2} \left( (a_m)_{i-1/2}^j + (a_m)_{i+1/2}^j \right) \right] \right) \omega_i^j + \frac{\gamma}{2} (a_m)_{i+1/2}^j \omega_{i+1}^j \\ + \frac{\gamma}{2} (a_d)_{i-1/2}^{j+1} T_{i-1}^{j+1} - \frac{\gamma}{2} \left( (a_d)_{i-1/2}^{j+1} + (a_d)_{i+1/2}^{j+1} \right) T_i^{j+1} + \frac{\gamma}{2} (a_d)_{i+1/2}^{j+1} T_{i+1}^{j+1} \\ + \frac{\gamma}{2} (a_d)_{i-1/2}^j T_{i-1}^j - \gamma \left[ \frac{1}{2} \left( (a_d)_{i-1/2}^j + (a_d)_{i+1/2}^j \right) \right] T_i^j + \frac{\gamma}{2} (a_d)_{i+1/2}^j T_{i+1}^j \end{aligned}$$

$i = 2, n-1$  (3.2-59)

Soit :

$$[A]\{\omega^{j+1}\} = [B]\{\omega^j\} + [C]\{T^{j+1}\} + [D]\{T^j\} \quad (3.2-60)$$

ou

$$[A]\{\omega^{j+1}\} = \{r\omega\} \quad (3.2-61)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 r\omega_i = & \frac{\gamma}{2}(a_m)_{k-1/2}^j \omega_i^j + \left( 1 - \gamma \left( \frac{1}{2} \left( (a_m)_{k-1/2}^j + (a_m)_{k+1/2}^j \right) \right) \right) \omega_{i+1}^j + \frac{\gamma}{2}(a_m)_{k+1/2}^j \omega_{i+2}^j \\
 & + \frac{\gamma}{2}(a_d)_{k-1/2}^{j+1} T_i^{j+1} - \frac{\gamma}{2} \left( (a_d)_{k-1/2}^{j+1} + (a_d)_{k+1/2}^{j+1} \right) T_{i+1}^{j+1} + \frac{\gamma}{2}(a_d)_{k+1/2}^{j+1} T_{i+2}^{j+1} \\
 & + \frac{\gamma}{2}(a_d)_{k-1/2}^j T_i^j - \frac{\gamma}{2} \left( (a_d)_{k-1/2}^j + (a_d)_{k+1/2}^j \right) T_{i+1}^j + \frac{\gamma}{2}(a_d)_{k+1/2}^j T_{i+2}^j
 \end{aligned}$$

pour tout  $i = 1, n-2$  et  $k = i+1$  (3.2-62)

En posant, de même que précédemment,

$$\left. \begin{aligned}
 a_i &= -\frac{\gamma}{2}(a_m)_{k-1/2}^{j+1} \\
 b_i &= 1 + \gamma \left( \frac{1}{2} \left[ (a_m)_{k-1/2}^{j+1} + (a_m)_{k+1/2}^{j+1} \right] \right) \\
 c_i &= -\frac{\gamma}{2}(a_m)_{k+1/2}^{j+1}
 \end{aligned} \right\} \text{ pour tout } \begin{cases} i=1, n-2 \\ k=i+1 \end{cases} \quad (3.2-63)$$

et sachant, bien entendu, que les noeuds 1 et  $n$  sont, , assujettis aux conditions limites (§ 2.3.2) qui, rappelons-le, font que :

- à l'entrée :

$$a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_1 + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_1 = m(t)$$

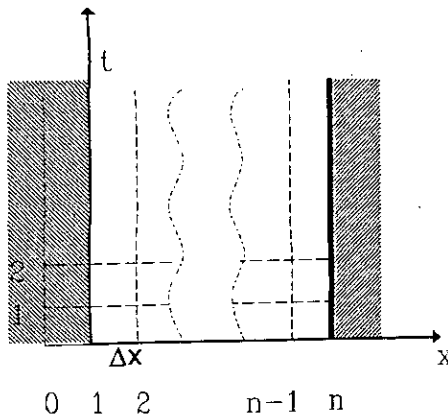
- à la sortie :

$$a_m \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_n + a_d \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_n = 0$$

le système (3.2-61) s'écrira :

$$\begin{bmatrix}
 a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
 0 & a_2 & b_2 & c_2 & & & & & \cdot \\
 \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\
 \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\
 \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\
 \cdot & & & & & & & & \cdot \\
 \cdot & & & & & & & & \cdot \\
 \cdot & & & & & & & & \cdot \\
 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} & 0 \\
 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \omega_1^{j+1} \\
 \omega_2^{j+1} \\
 \omega_3^{j+1} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \omega_{n-2}^{j+1} \\
 \omega_{n-1}^{j+1} \\
 \omega_n^{j+1}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 r\omega_1 \\
 r\omega_2 \\
 r\omega_3 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 r\omega_{n-4} \\
 r\omega_{n-3} \\
 r\omega_{n-2}
 \end{Bmatrix} \quad (3.2-64)$$

Les conditions aux limites précédentes relatives au transfert de masse sont des conditions de flux de type NEUMAN qui peuvent être discrétisées en utilisant soit un schéma centré introduisant une maille fictive 0, soit un schéma à trois points [1, 2, 10].



Le schéma centré, représenté ci-contre, discrétise la dérivée au noeud 1 sur la frontière du domaine par

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 = \frac{u_2 - u_0}{2 \Delta x} \quad (3.2-65)$$

alors qu'avec le deuxième schéma appelé schéma à trois points qui traduit une formule d'extrapolation pour la détermination de la dérivée première, la même dérivée précédente s'écrit :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 = \frac{1}{2 \Delta x} (3 u_1 - 4 u_2 + u_3) \quad (3.2-66)$$

Nous utiliserons le deuxième type de discrétisation pour les conditions aux limites de notre problème qui en approximant les expressions des conditions limites, nous obtiendrons :

- à l'entrée :

$$a_m \Big|_1 \left( \frac{3\omega_1^{j+1} - 4\omega_2^{j+1} + \omega_3^{j+1}}{2h} \right) + a_d \Big|_1 \left( \frac{3T_1^{j+1} - 4T_2^{j+1} + T_3^{j+1}}{2h} \right) = m(t_{j+1}) \quad (3.2-67)$$

- à la sortie :

$$a_m \Big|_n \left( \frac{3\omega_n^{j+1} - 4\omega_{n-1}^{j+1} + \omega_{n-2}^{j+1}}{2h} \right) + a_d \Big|_n \left( \frac{3T_n^{j+1} - 4T_{n-1}^{j+1} + T_{n-2}^{j+1}}{2h} \right) = 0 \quad (3.2-68)$$

D'où

$$\omega_1^{j+1} = \frac{4}{3} \omega_2^{j+1} - \frac{1}{3} \omega_3^{j+1} - \frac{a_d}{a_m} \Big|_1 \left( T_1^{j+1} - \frac{4}{3} T_2^{j+1} + \frac{1}{3} T_3^{j+1} \right) + \frac{1}{a_m} \Big|_1 \frac{2h}{3} m(t_{j+1}) \quad (3.2-69)$$

et

$$\omega_n^{j+1} = \frac{4}{3} \omega_{n-1}^{j+1} - \frac{1}{3} \omega_{n-2}^{j+1} - \frac{a_d}{a_m} \Big|_n \left( T_n^{j+1} - \frac{4}{3} T_{n-1}^{j+1} + \frac{1}{3} T_{n-2}^{j+1} \right) \quad (3.2-70)$$

A partir de ces considérations, nous pouvons réécrire le système discrétisant l'équation de l'humidité en retirant de la matrice [A] la première et la dernière colonne liées aux conditions aux limites. Nous les retrouverons, multipliées par le vecteur inconnu, respectivement dans la première

et la dernière ligne du vecteur de droite. La matrice  $[A]$  deviendra tridiagonale et évidemment plus malléable.

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_2^{j+1} \\ \omega_3^{j+1} \\ \omega_4^{j+1} \\ \cdot \\ \omega_{n-3}^{j+1} \\ \omega_{n-2}^{j+1} \\ \omega_{n-1}^{j+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r\omega_1 \\ r\omega_2 \\ r\omega_3 \\ \cdot \\ r\omega_{n-4} \\ r\omega_{n-3} \\ r\omega_{n-2} \end{Bmatrix} \quad (3.2-71)$$

Il va de soi, comme expliqué, que la première et la dernière ligne, concernées par les conditions aux limites, verront les coefficients de la matrice  $[A]$  ainsi que les termes du second membre changer de valeur.

Les coefficients de la première et de la dernière ligne de la matrice  $[A]$  deviendront :

$$\begin{cases} b(1) = b(1) + \frac{4}{3}a(1) \\ c(1) = c(1) - \frac{1}{3}a(1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b(n-2) = b(n-2) + \frac{4}{3}c(n-2) \\ a(n-2) = a(n-2) - \frac{1}{3}c(n-2) \end{cases} \quad (3.2-72)$$

tandis que les première et dernière valeurs du second membre changeront en :

$$\begin{cases} r\omega(1) = r\omega(1) - a(1)\omega(1) \\ r\omega(n-2) = r\omega(n-2) - c(n-2)\omega(n) \end{cases} \quad (3.2-73)$$

C'est à dire que,

$$r\omega(1) = r\omega(1) - a(1) \frac{a_d}{a_m} \left| \left( T_1^{j+1} - \frac{4}{3}T_2^{j+1} + \frac{1}{3}T_3^{j+1} \right) - a(1) \frac{2h}{3} m(t_{j+1}) \frac{1}{a_m} \right| \quad (3.2-74)$$

et

$$r\omega(n-2) = r\omega(n-2) - c(n-2) \frac{a_m}{a_d} \left| \left( T_n^{j+1} - \frac{4}{3}T_{n-1}^{j+1} + \frac{1}{3}T_{n-2}^{j+1} \right) \right| \quad (3.2-75)$$

### Résolution des systèmes résultant.

La discrétisation des deux équations du modèle mathématique de PHILIP et DE VRIES généré (3.2-47) nous a donc conduit à l'établissement de deux systèmes d'équations algébriques découplés dont les matrices sont tridiagonales, définies positives et à diagonales dominantes. Nous pouvons maintenant aborder la résolution numérique directe de l'équation thermique et par un processus itératif semblable à celui exposé au (§ 3.1.5) pour l'équation hydrique (voir annexe A).



# CHAPITRE QUATRE

## RESULTATS ET INTERPRETATIONS

### INTERPRETATION DES RESULTATS

Comparaison des modèles de *PHILIP-DE VRIES* complet et simplifié

Comparaison des discrétisations avec 21 et 42 noeuds

Influence de la chaleur due au changement de phase et de la conductivité thermique

Comparaison des modèles généré et complet

Comparaison des résultats obtenus par la MEF et ceux obtenus par la MDF pour l'étude du modèle généré

### CONCLUSION GENERALE

#### PRESENTATION DES RESULTATS

Influence des termes d'accumulation en phase vapeur

Comparaison des modèles complet et simplifié ( $\lambda^*$  variable)

Influence du nombre de noeuds de discrétisation

Discrétisation spatiale utilisant 21 et 42 noeuds

Influence du changement de phase

Modèle simplifié avec  $\lambda^*$  variable

Modèle simplifié avec  $\lambda^*$  constant

Influence de la conductivité thermique

Modèle simplifié avec  $\lambda^*$  variable

Modèle simplifié avec  $\lambda^*$  constant

Modèle simplifié avec  $\lambda^*$  variable et la chaleur due au changement de phase nulle

Modèle simplifié avec  $\lambda^*$  constant et la chaleur due au changement de phase nulle

Modèle généré

Comparaison des modèles complet et généré

Comparaison des méthodes d'éléments finis et des différences finies appliquées au modèle généré

## 4 RESULTATS ET INTERPRETATIONS

Le modèle mathématique proposé par *PHILIP* et *DE VRIES* constitue l'une des premières formulations mathématiques qui a pris en considération aussi bien le transfert de masse en phase vapeur que liquide ainsi que le couplage entre phénomènes de transfert de chaleur et de masse pour décrire les échanges d'énergie et de masse dans un corps poreux. Dans ce chapitre, on s'intéressera aux processus d'humidification d'une structure poreuse dû au phénomène de condensation.

Au début de l'humidification, l'humidité en phase vapeur envahie le milieu poreux sec par le processus de diffusion de la vapeur sous l'influence d'un gradient thermique. Cette vapeur d'eau est alors fixée sur les surfaces des pores par le mécanisme d'adsorption formant ainsi une première couche d'eau, le phénomène s'accroît en fixant une deuxième couche sur la première puis d'une troisième etc... jusqu'à ce que des ménisques se forment et s'épaississent (condensation capillaire), formant ainsi des îlots d'humidité liquide entourés de vapeur d'eau et d'air qui se développent à l'intérieur des pores. Cette région est appelée zone sèche.

Pour palier au déséquilibre thermodynamique avec la zone plus froide qu'elle rencontre, une partie de la vapeur s'écoulant vers la zone froide va se condenser en plus de la vapeur initialement en place dans cette zone. Elle conduit à l'apparition d'une phase liquide continue qui sous l'influence des forces capillaires s'écoule vers la face plus chaude c'est à dire en sens contraire de l'écoulement de la vapeur. Cette zone est appelée zone humide.

#### 4.1 INTERPRETATION DES RESULTATS :

##### 4.1.1 COMPARAISON DES MODELES DE PHILIP-DE VRIES COMPLET ET SIMPLIFIE :

Pour des faibles teneurs en humidité qui correspondent au domaine de l'adsorption les courbes représentant les profils d'humidité modèle complet et simplifié (fig.4-1) sont distincts. Cela est dû, on revenant à la comparaison des systèmes (2.3-5) et (2.3-6), au terme représentant la variation au cours du temps de l'humidité en phase vapeur qui est de l'ordre de grandeur de l'humidité fixée par adsorption. Mais dès que le changement de phase commence à apparaître la quantité précédente devient négligeable devant la teneur en humidité obtenue par condensation thermique et les profils hydriques sont alors confondus (fig.4-2).

Cette remarque confirme l'hypothèse qui consiste à négliger les variations locales instantanées de la masse en phase vapeur dans l'équation de transfert de masse du modèle complet de PHILIP et DE VRIES, néanmoins cette hypothèse comme l'a remarqué S.BORIES [4] nous nous permet pas de préciser quelles sont les quantités respectives de vapeur et de liquide se trouvant dans le matériau au terme du changement de phase. Pour ce qui est de l'équation de transfert de chaleur, les courbes des figures (4-3) et (4-4) représentant les profils thermiques des modèles simplifié et complet montrent clairement que le terme  $\alpha \frac{\partial \omega}{\partial t} + \beta \frac{\partial T}{\partial t}$  n'a aucune répercussion sur les résultats.

##### 4.1.2 COMPARAISON ENTRE DES DISCRETISATIONS AVEC 21 ET 42 NOEUDS :

Les ouvrages traitant de la méthode des éléments finis indiquent que l'amélioration de la précision d'approximation d'une solution passe par deux moyens [10], soit diminuer la dimension de chaque élément et par conséquent augmenter le nombre d'éléments nécessaires pour représenter le domaine entier  $\Omega$ , soit augmenter le nombre de variables nodales en chaque noeud tout en conservant le nombre de noeuds. Or pour les profils hydriques et thermiques représentés par les courbes des figures (4-5) à (4-8), on a utilisé le premier procédé qui consiste à augmenter le nombre de noeuds. Sans que cela apporte plus de précision à la solution finale, ce choix au contraire double les temps de calcul. Il serait plus intéressant d'utiliser, dans ce cas, une approximation quadratique ou cubique à la place de l'approximation linéaire.

Néanmoins, l'augmentation du nombre de noeuds de la discrétisation pourrait avoir une influence sur la localisation du front humide, notamment au niveau des flux de masse en phases vapeur et liquide.

#### 4.1.3 INFLUENCE DE LA CHALEUR DUE AU CHANGEMENT DE PHASE ET DE LA CONDUCTIVITE THERMIQUE :

On distingue deux étapes dans l'évolution des flux de chaleurs échangés par conduction pure et par changement de phase :

1. Aux faibles teneurs en humidité correspondant au domaine de l'adsorption, c'est à dire au début de la simulation  $t=2$  jours et 10 jours :
  - les courbes des chaleurs de changement de phase  $q_L$  pour les deux simulations (fig.4-10a) et (fig. 4-12a) ont la même allure et sont du même ordre de grandeur,
  - pour ce qui est des courbes représentant les chaleurs de conduction pure  $q_c$ , on remarque que malgré leur même allure, les valeurs atteintes lorsque  $\lambda^*$  est variable (fig 4-9a) sont neuf fois plus grande (pour  $t=10$  jours) que lorsque  $\lambda^*$  est constant (fig. 4-11a). Cette différence est due à la variation de la conductivité thermique avec la teneur en humidité [16 et 17].

L'observation des courbes (fig 4-13a et 4-14a), représentant les profils thermiques, montre l'aspect linéaire de la variation de la température en fonction de l'épaisseur de l'échantillon traduisant ainsi la prépondérance de la conduction thermique pure sur le changement de phase dans les deux modèles précédents.

2. Aux fortes teneurs en humidité (à partir de 1 mois)

- les chaleurs dues au changement de phase sont plus importantes pour le modèle où  $\lambda^*$  est constant (fig. 4-12b) que pour celui où  $\lambda^*$  est variable (fig. 4-10b). Par contre le contraire est vrai pour ce qui est des chaleurs de conduction pure (fig. 4-9b et 4-11b).
- lorsque  $\lambda^*$  est constant  $q_L$  représente presque 1/3 de  $q_c$ , cela a une influence sur les profils thermiques (fig. 4-14b) qui présentent une légère concavité dirigée vers l'axe des abscisses contrairement aux profils droits (de conduction pure) lorsque le flux de chaleur due au changement de phase est négligé  $L \vec{J}_v \approx 0$  (fig. 4-16b).
- Pour le cas où  $\lambda^*$  est variable, la comparaison des profils thermiques n'indique aucune distinction sur les modèles avec et sans changement de phase (fig.4-13a, 4-13b et fig.4-15a, 4-15b). Cette remarque est confirmée par les valeurs des flux de chaleur de conduction pure (fig. 4-9a et 4-9b) qui sont jusqu'à 1000 fois plus importantes que ceux dues au changement de phase (fig. 4-10a et 4-10b).

En conclusion, pour  $\lambda^*$  constant et sans termes sources, les profils thermiques sont représentés par des droites, avec les termes sources, les profils thermiques prennent une forme courbe de concavité dirigée vers l'axe des abscisses. Alors que dans le cas où  $\lambda^*$  est variable, la nature parabolique de l'équation de chaleur est conservée et l'influence de la chaleur due au changement de phase (termes sources) sur les profils thermiques est nulle.

#### **4.1.4 COMPARAISON DES MODELES GENERE ET COMPLET :**

Tant que l'influence de la chaleur dégagée par condensation thermique est négligeable devant celle de conduction pure, les figures 4-17 et 4-19 représentant les profils thermiques et hydriques sont confondus. Mais avec l'augmentation du phénomène de condensation de la vapeur d'eau, les valeurs des gradients thermiques deviennent de plus en plus faibles (fig.4-20), ce qui entraîne une diminution de l'effet *SORET* désignant le transfert de masse dû au gradient thermique (fig.4-18).

#### **4.1.5 COMPARAISON DES RESULTATS OBTENUS PAR LA MEF ET CEUX OBTENUS PAR LA MDF POUR L'ETUDE DU MODELE GENERE :**

La comparaison des résultats (fig. 4-21 jusqu'à 4-23) obtenus par *MEF* et *MDF* a permis de constater toute au long de la simulation, une similitude entre les allures des profils hydriques. Mais en valeurs numériques, les teneurs en humidité sont nettement plus grandes en utilisant la *MDF* que lorsqu'on utilise la *MEF*. Une autre remarque concerne les fronts de condensations qui se manifestent beaucoup plus près de la face ouverte avec le code de calcul en différences finies.

La différence des résultats obtenus par les deux méthodes pour les profils hydriques provient du fait que dans le code de calcul en éléments finis, les termes  $\lambda^*$  et  $(\rho c)^*$  sont pris variables lors de la discrétisation du problème par contre dans notre code en différences finies, ces termes sont pris constants par soucis de découplage des équations de transfert de masse et de chaleur.

Les températures calculées par les deux codes de calcul (fig. 4-24a et 4-24b) montrent une parfaite équivalence des résultats obtenus par les deux méthodes. Et en ce qui concerne la validation du code *mef*, ce travail a été déjà fait [16 et 17] et a montré une bonne concordance entre les résultats théoriques et expérimentaux.

## CONCLUSION GENERALE :

Nous avons essayé dans ce travail de simplifier la résolution du système d'équations couplées de transfert de chaleur et de masse en milieu poreux par :

1. une étude de sensibilité aux paramètres (mise en évidence des modes de transfert dominants aux niveaux thermique et massique),
2. le découplage des équations de transfert par l'élaboration d'un code de calcul en différences finies.

La comparaison des deux méthodes de calcul numérique nous a permis de mettre en évidence que :

- la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis n'est pas toujours simple et que cette difficulté vient autant de la composition du système d'équations que des calculs d'intégrales impliqués dans la détermination de ses coefficients.
- La méthode des différences finies est de mise en oeuvre simple surtout lorsque le domaine d'étude est de géométrie très simple. Seulement la prise en compte des conditions aux limites de type *NEWMAN* ou *MIXTE* dans des systèmes fortement couplés présente de grandes difficultés aussi bien du point de vue formulation que résolution numérique.

L'utilisation de la méthode des éléments finis est en général réservée aux équations qui sont définies dans des domaines de forme compliquée, et elle concerne donc essentiellement les problèmes à plusieurs dimensions d'espace. Mais lorsque les espaces géométriques sont simples, il serait plus raisonnable d'utiliser la méthode des différences finies.

La discrétisation de  $\lambda^*$  et  $(\rho c)^*$  dans le système d'équations couplées a été fait et on a constaté lors de l'exécution du programme *mdf* un problème de divergence. Nous recommandons pour la suite de ce travail de continuer dans cette voie afin de conclure la fiabilité de cette méthode.

4.2 PRESENTATION DES RESULTATS :

4.2.1 INFLUENCE DES TERMES D'ACCUMULATION EN PHASE VAPEUR :

Comparaison des modèles complet et simplifié ( $\lambda^*$  variable).

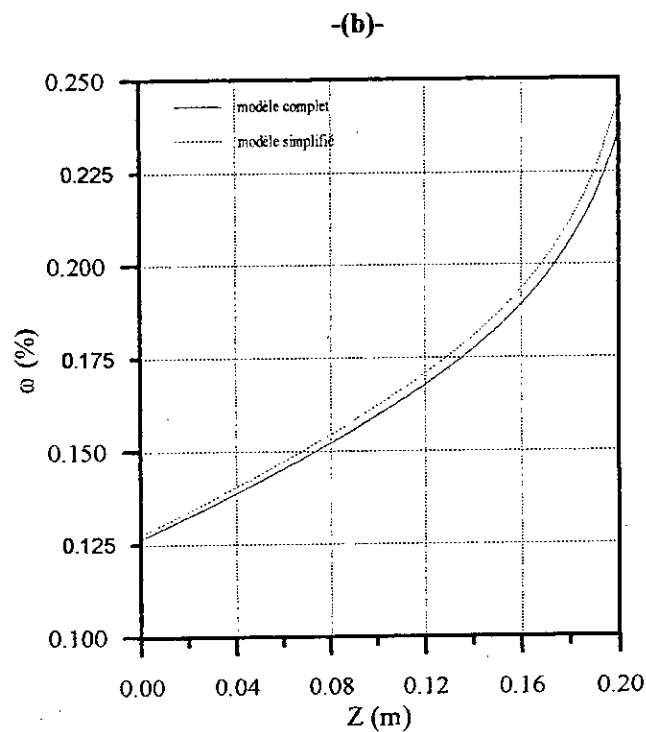
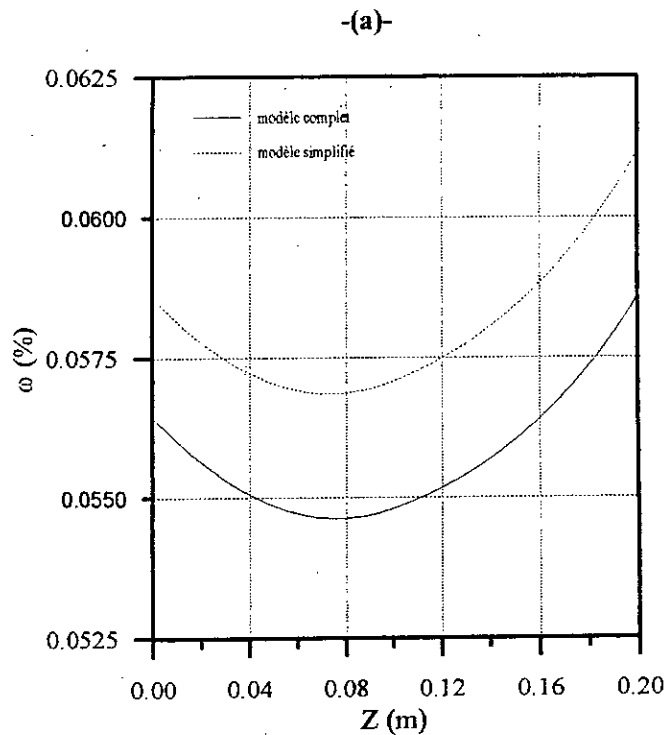


Fig.4-1 Profils hydriques  
(a) pour 2 jours et (b) pour 10 jours.

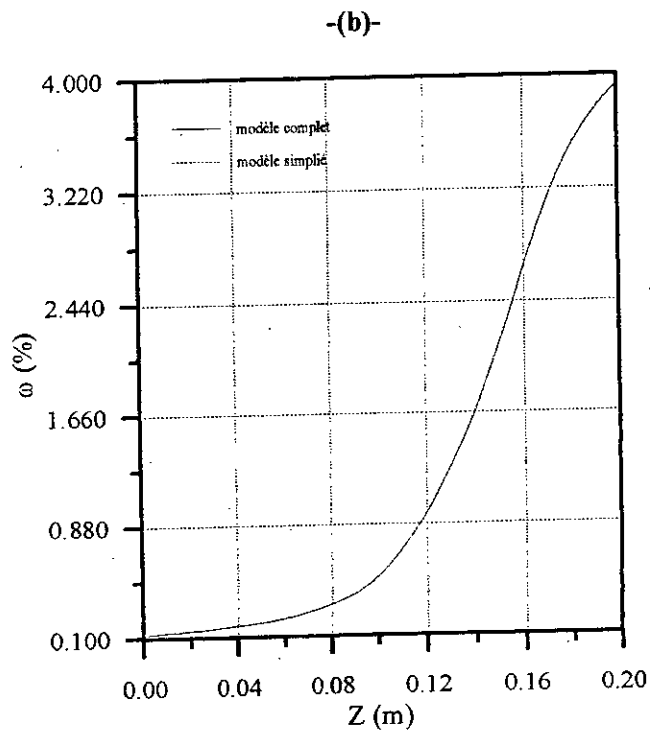
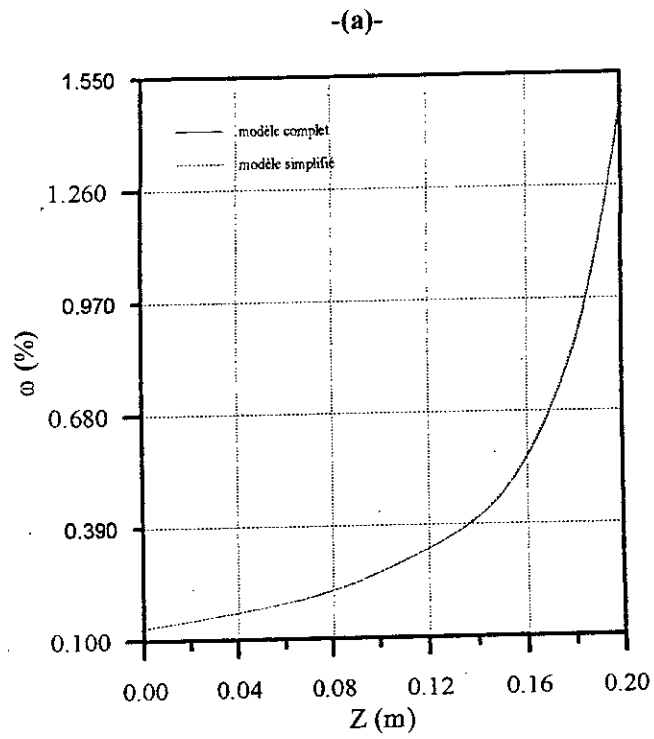
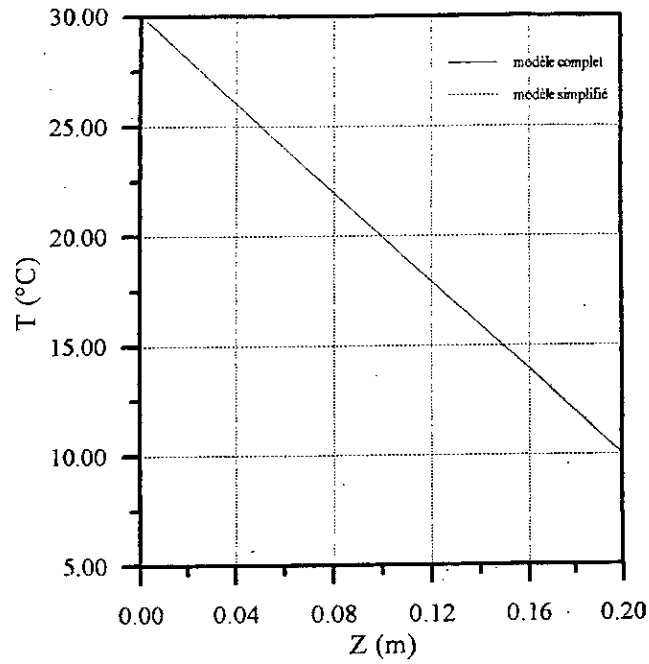


Fig.4-2 Profils hydriques  
(a) pour 1 mois et (b) pour 4 mois.



-(a)-



-(b)-

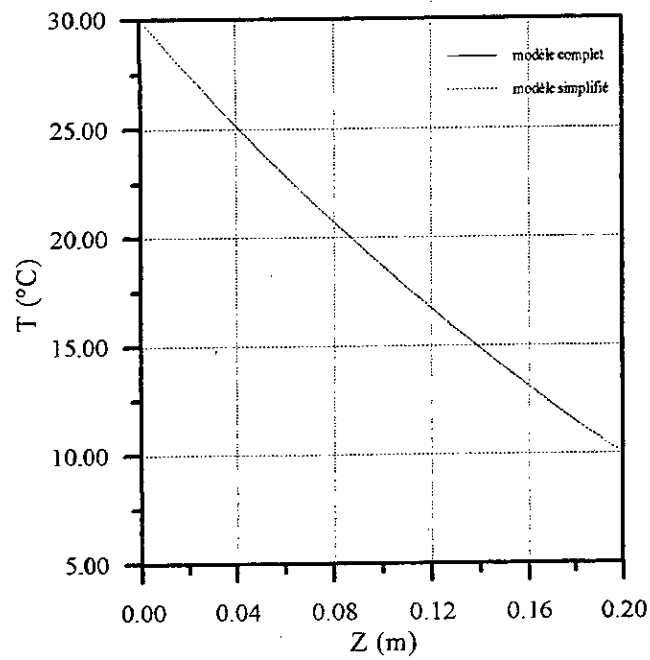
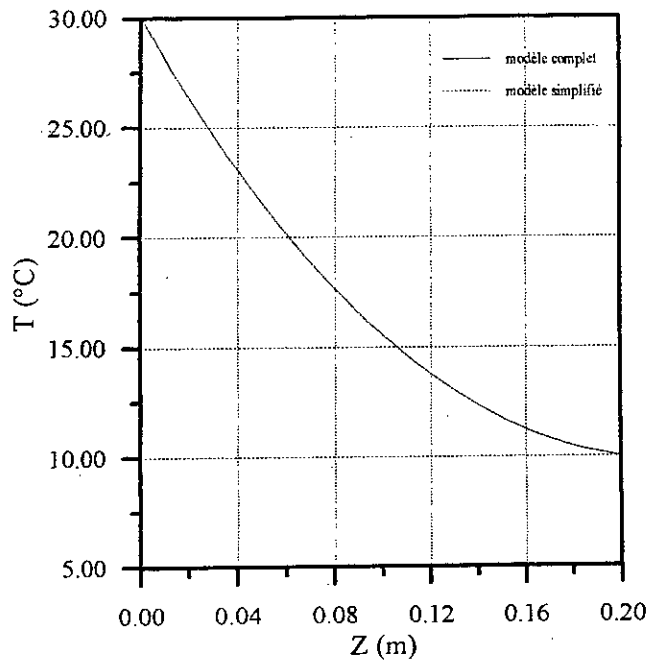


Fig.4-3. Profils thermiques  
(a) pour 2 jours et (b) pour 10 jours.

-(a)-



-(b)-

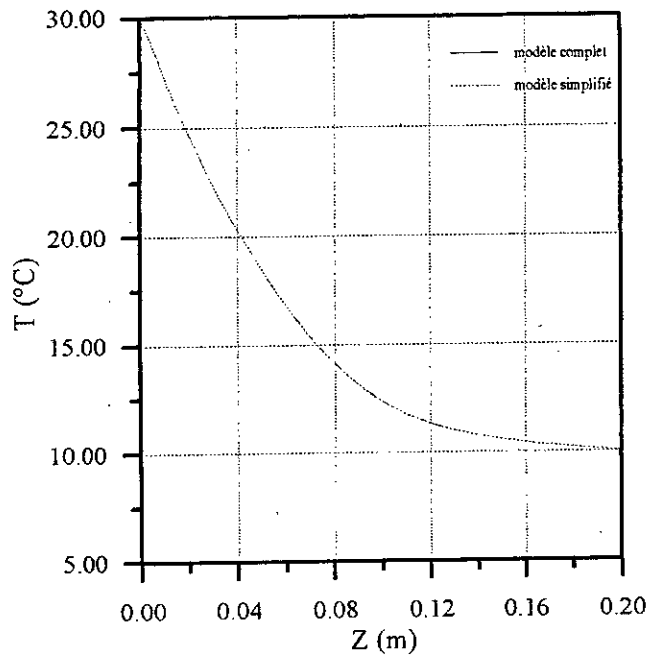
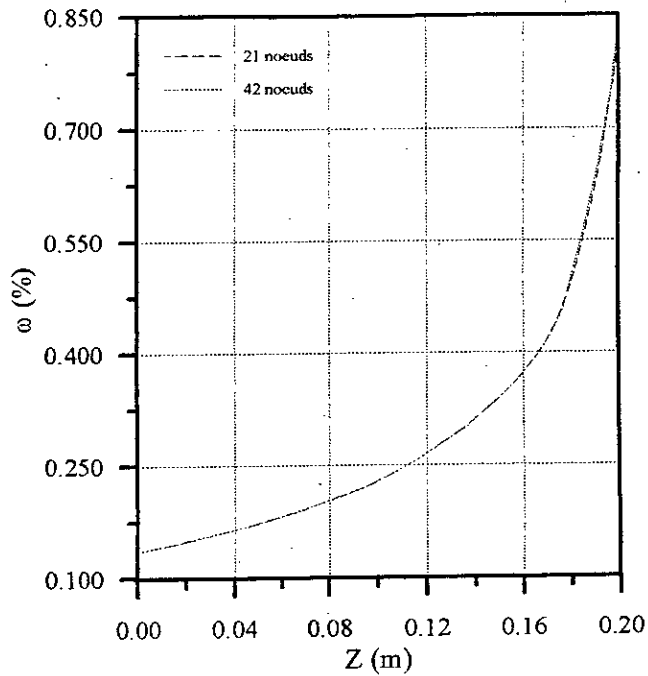


Fig.4-4. Profils thermiques  
(a) pour 1 mois et (b) pour 4 mois.

4.2.2 INFLUENCE DU NOMBRE DE NOEUDS DE DISCRETISATION :

Discrétisation spatiale utilisant 21 et 42 noeuds

-(a)-



-(b)-

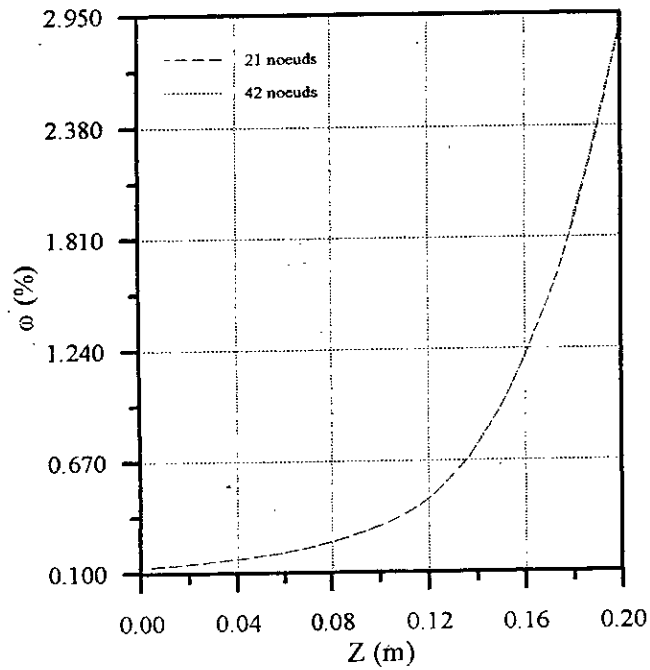


Fig.4-5 profils hydriques  
(a) pour 20 jours et (b) pour 2 mois.

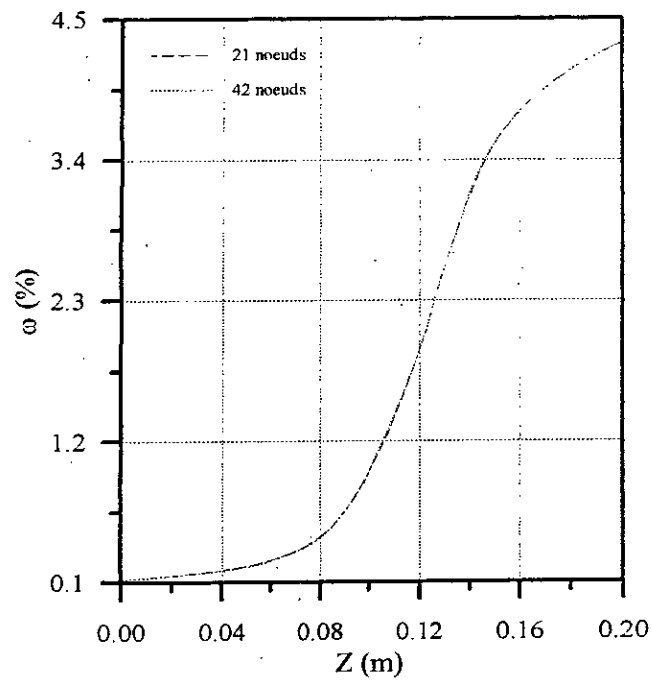


Fig.4-6 profils hydriques pour 6 mois.

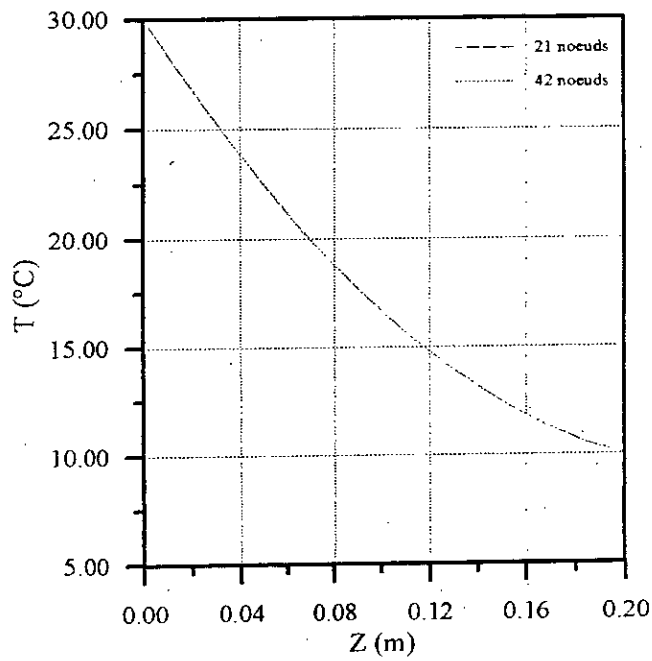


Fig.4-7 profils thermiques pour 20 jours.

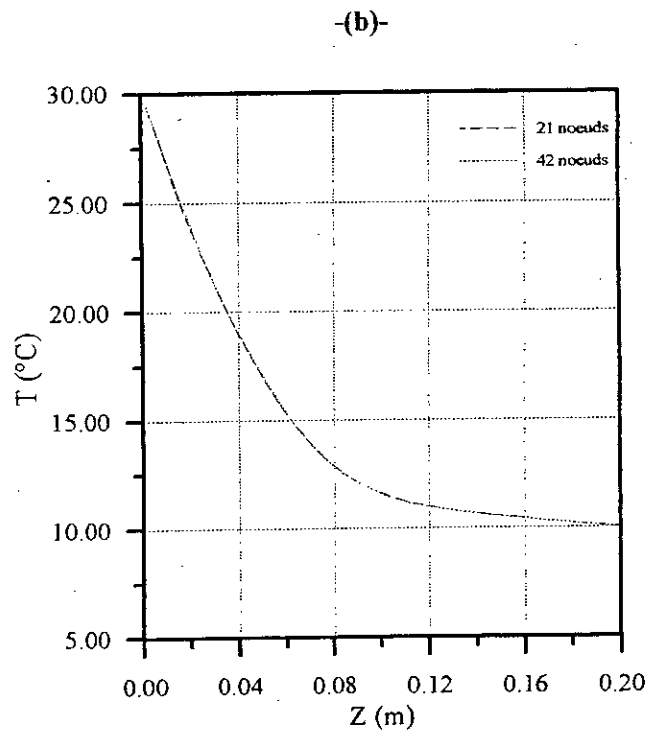
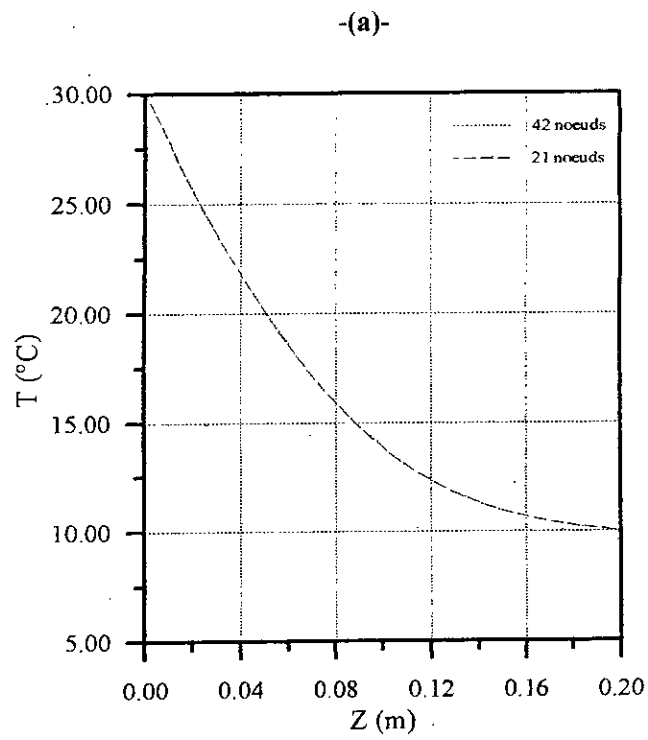
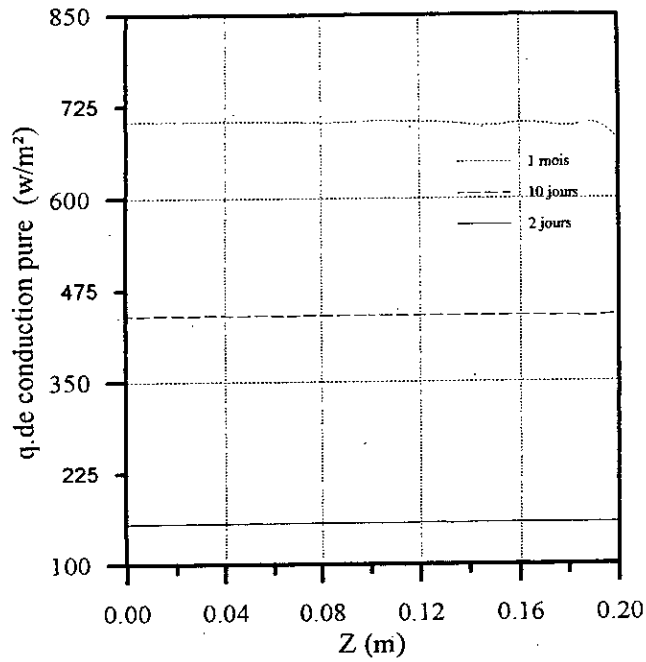


Fig.4-8 profils thermiques  
(a) pour 2 mois et (b) pour 6 mois.

4.2.3 INFLUENCE DU CHANGEMENT DE PHASE :

Modèle simplifié avec  $\lambda^*$  variable

-(a)-



-(b)-

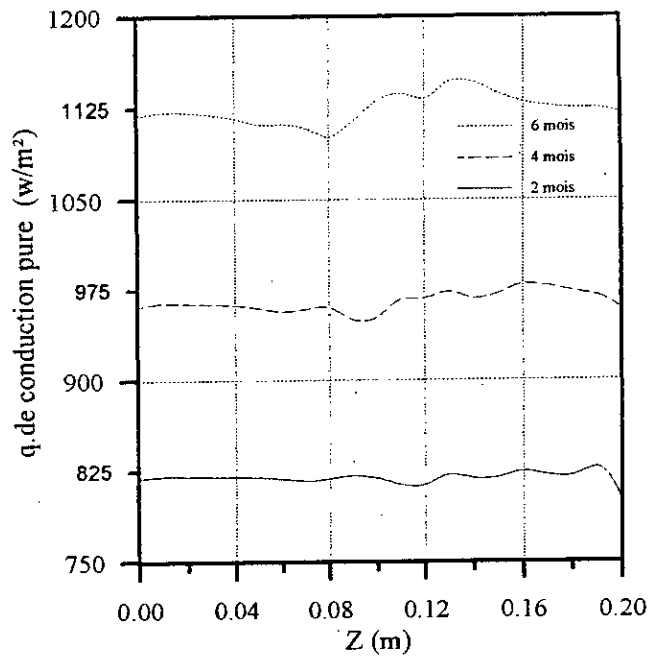


Fig.4-9 flux de chaleur de conduction pure.

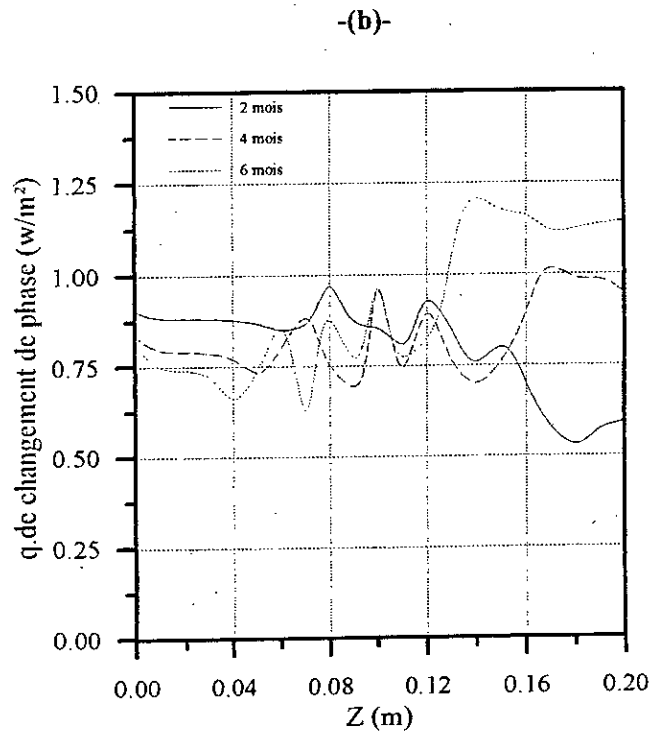
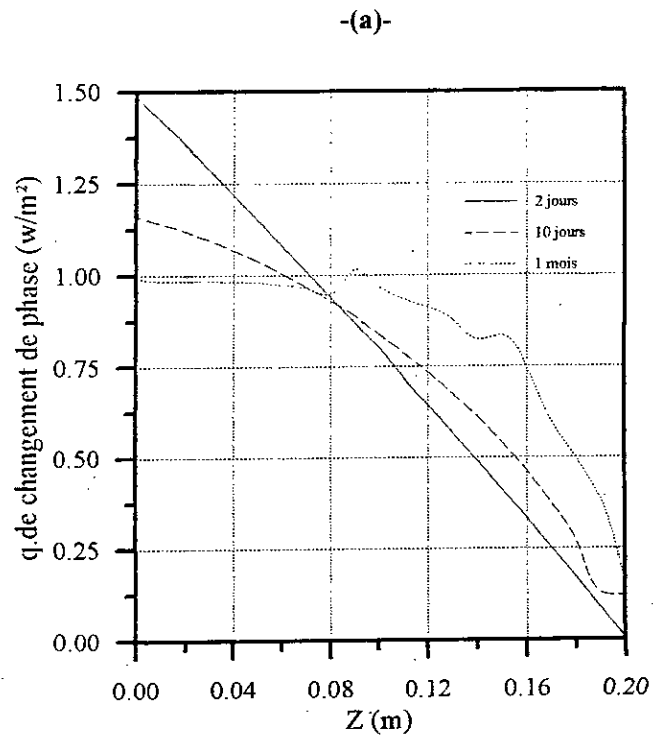
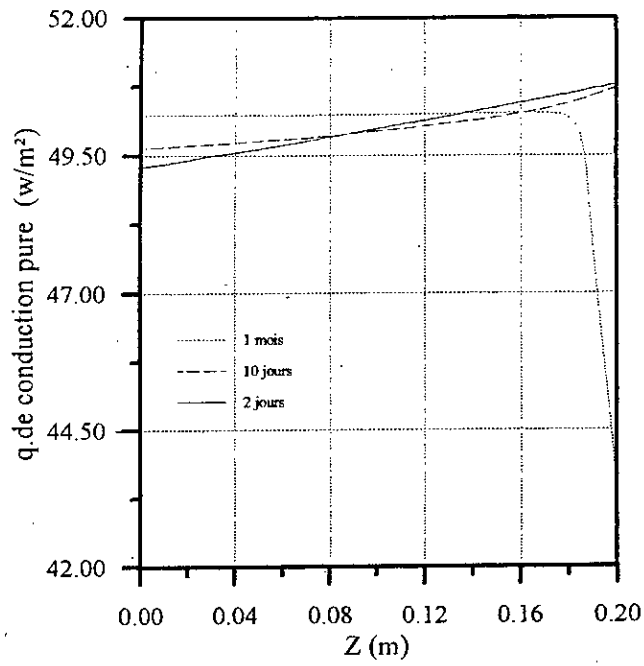


Fig.4-10 flux de chaleur dû au changement de phase.

Modèle simplifié avec  $\lambda^*$  constant.

-(a)-



-(b)-

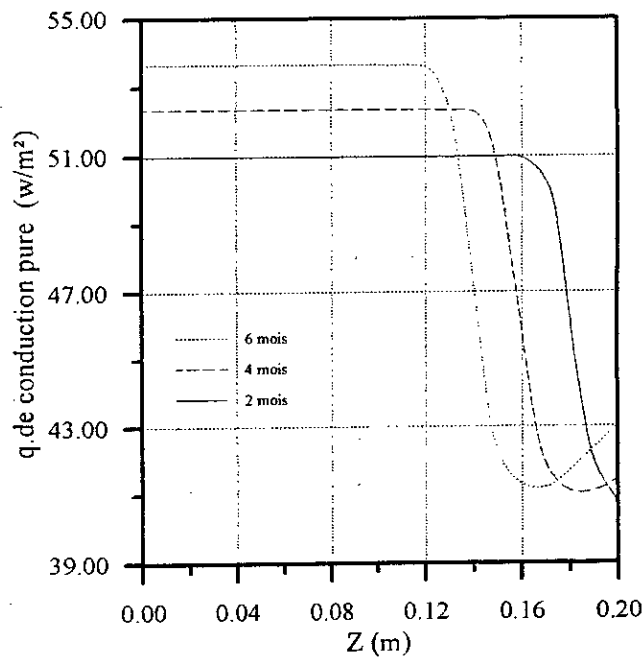


Fig.4-11 flux de chaleur de conduction pure.



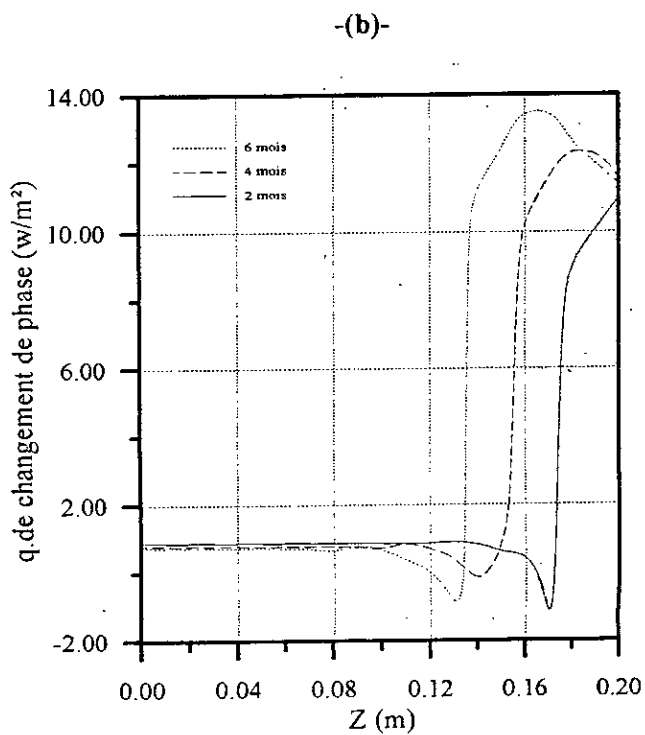
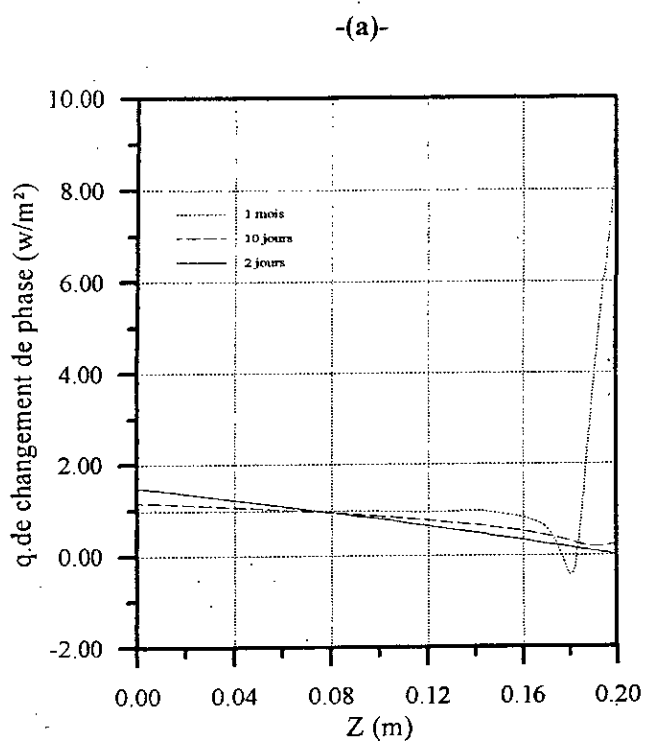
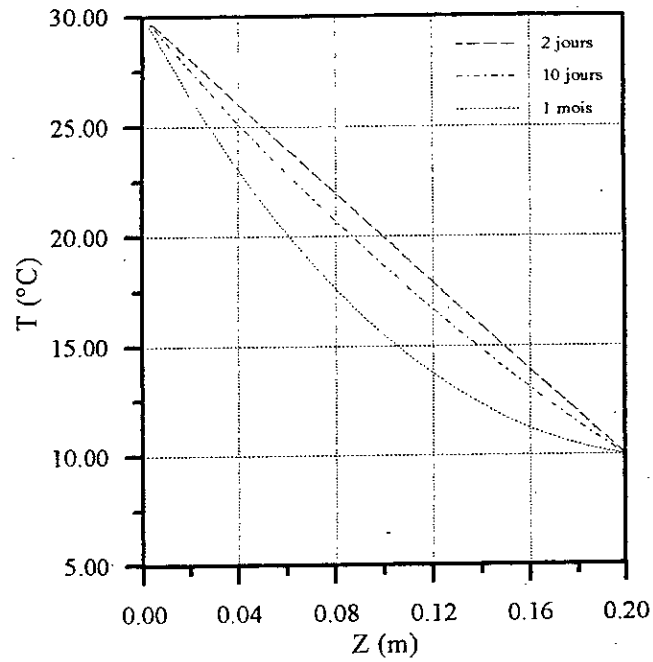


Fig.4-12 flux de chaleur dû au changement de phase.

**4.2.4 INFLUENCE DE LA CONDUCTIVITE THERMIQUE :**

Modèle simplifié avec  $\lambda^*$  variable.

-(a)-



-(b)-

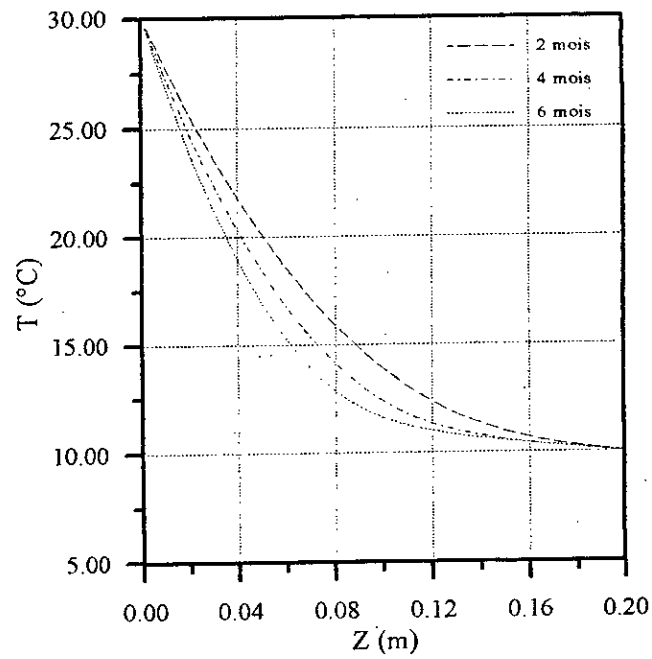
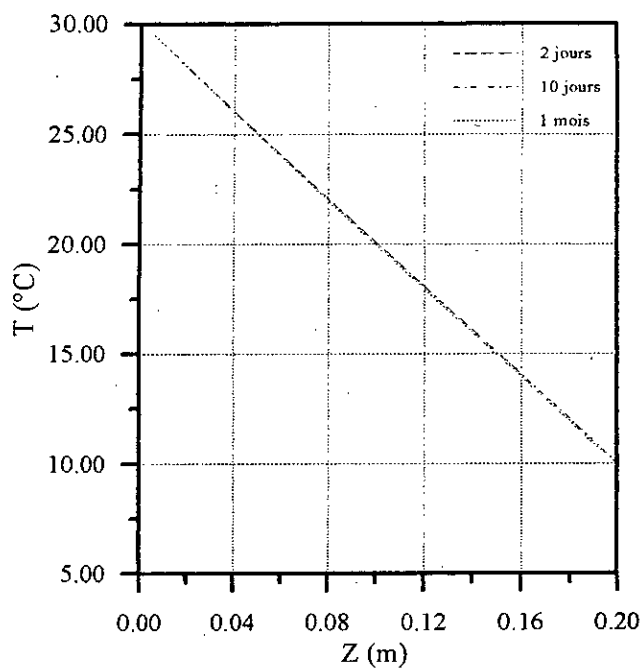


Fig.4-13 profils thermiques.

Modèle simplifié avec  $\lambda^*$  constant.

-(a)-



-(b)-

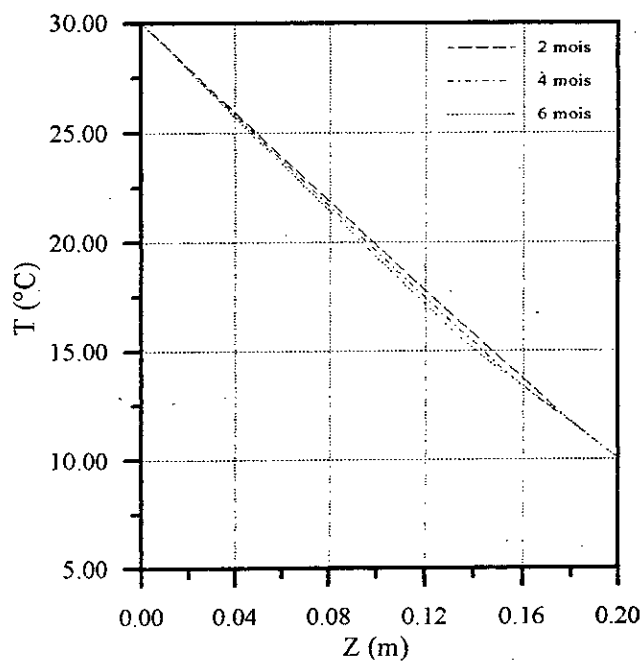


Fig.4-14 profils thermiques.

Modèle simplifié avec  $\lambda^*$  variable et la chaleur due au changement de phase nulle.

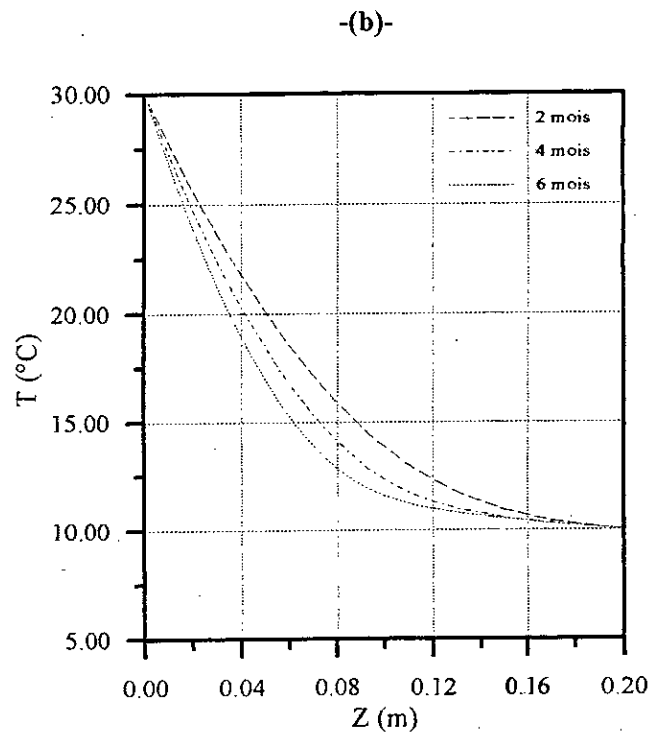
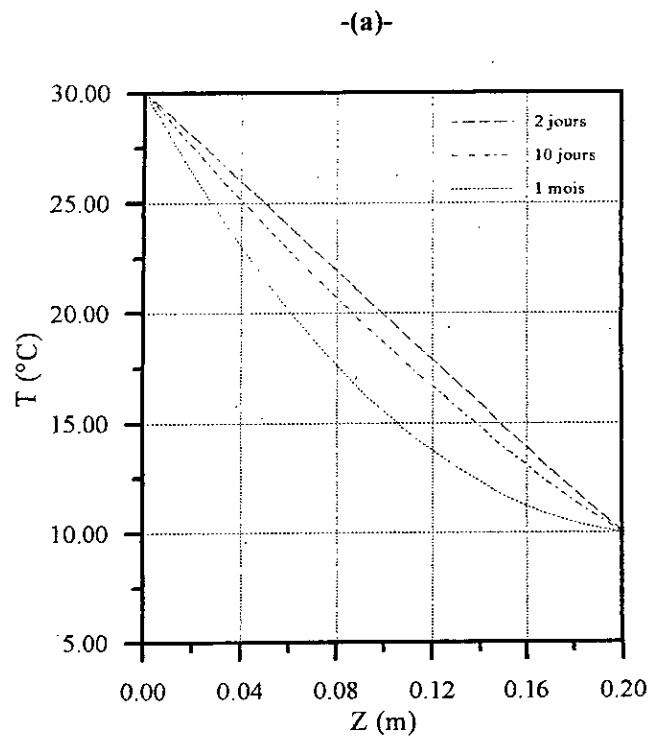
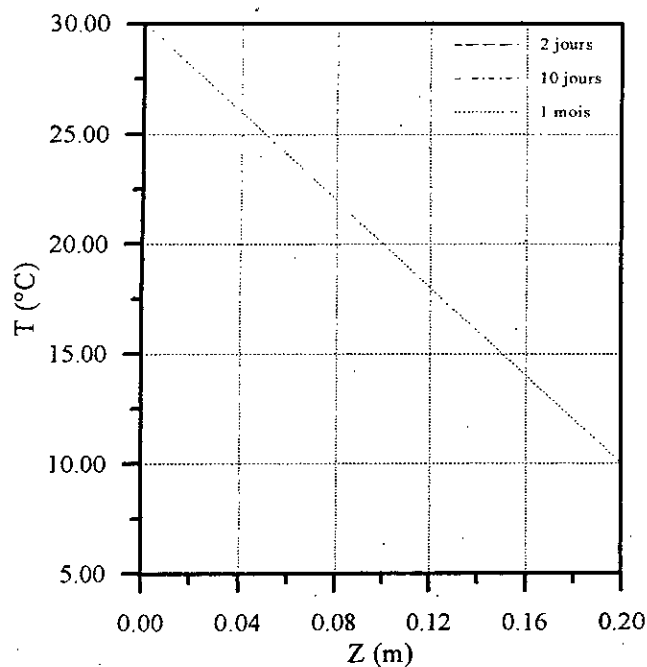


Fig.4-15 profils thermiques.

Modèle simplifié avec  $\lambda^*$  constant et la chaleur due au changement de phase nulle.

-(a)-



-(b)-

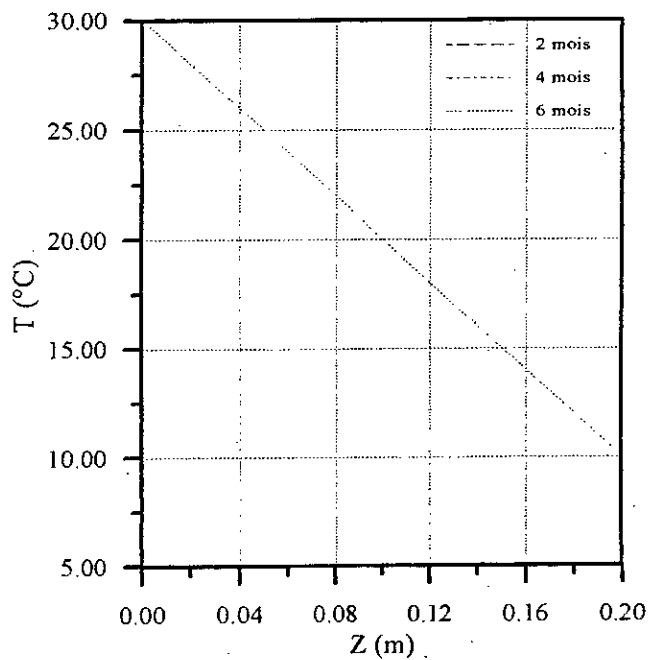


Fig.4-16 profils thermiques.

4.2.5 MODELE GENERALE :

Comparaison des modèles complet et généré.

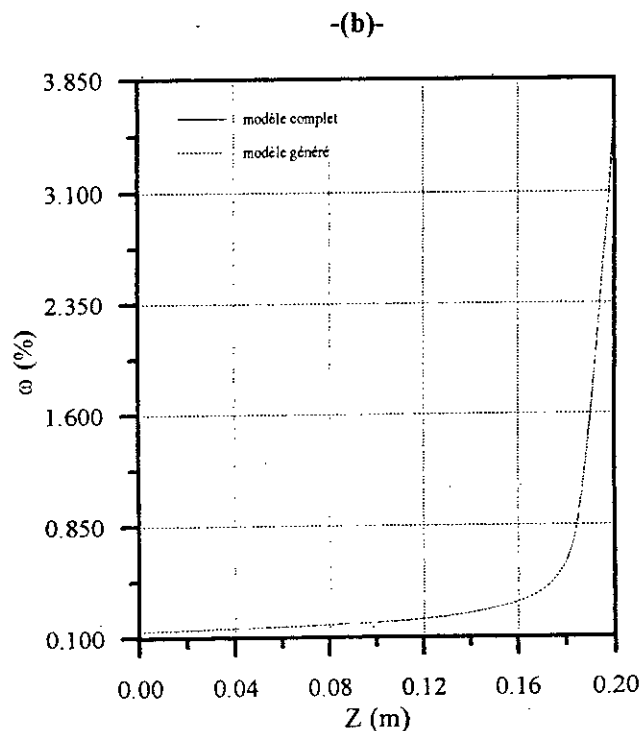
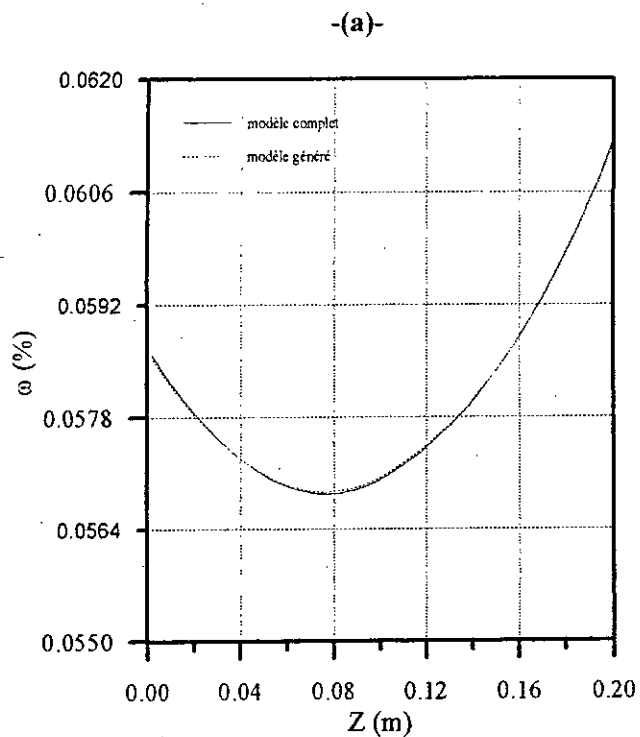
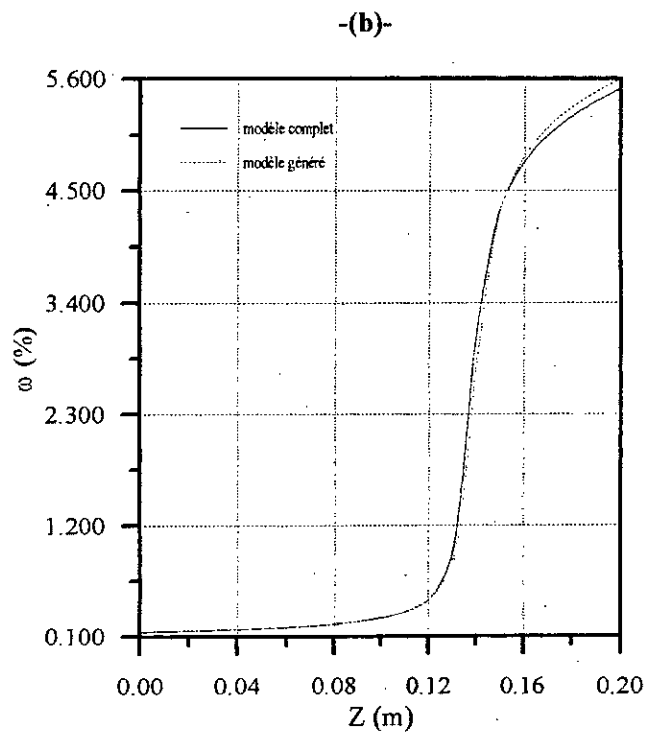
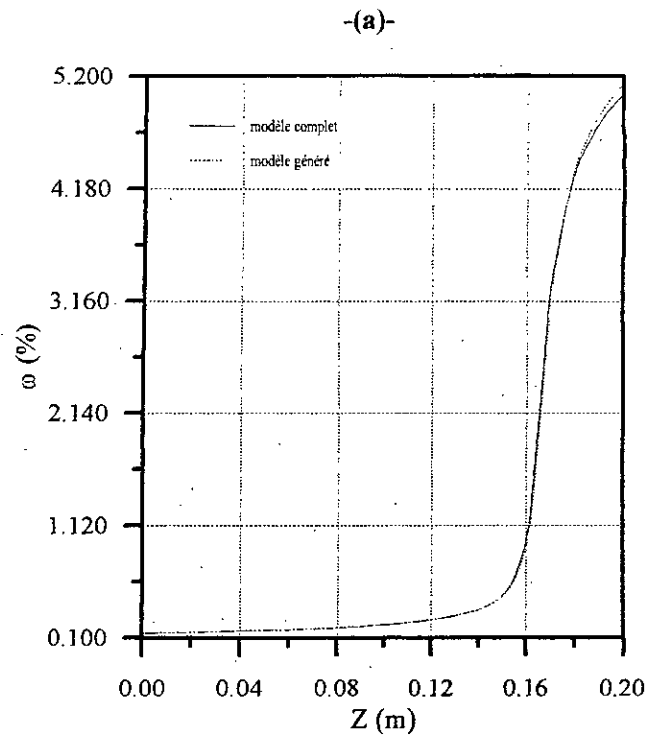
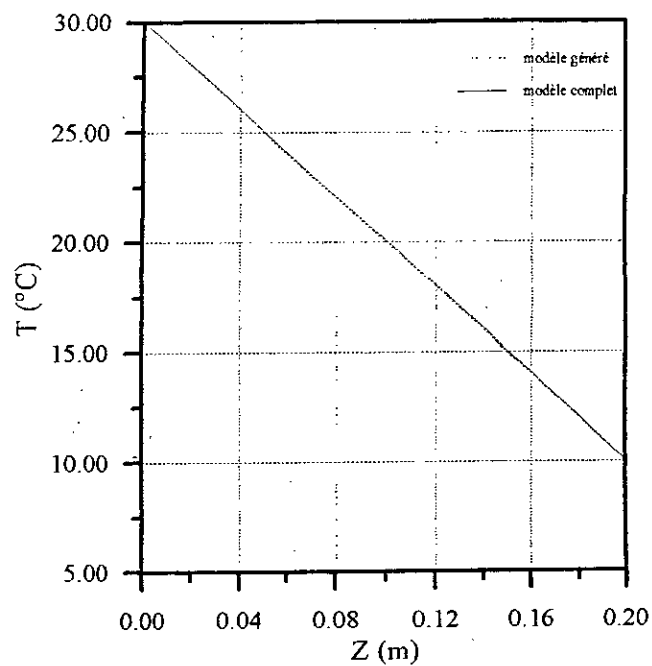


Fig.4-17 Profils hydriques  
(a) pour 2 jours et (b) pour 1 mois.



**Fig.4-18** Profils hydriques  
(a) pour 3 mois et (b) pour 6 mois.

-(a)-



-(b)-

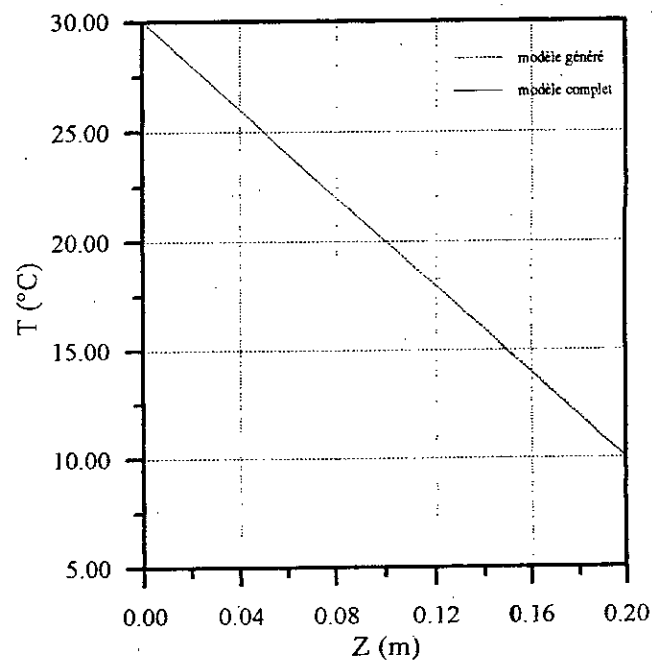
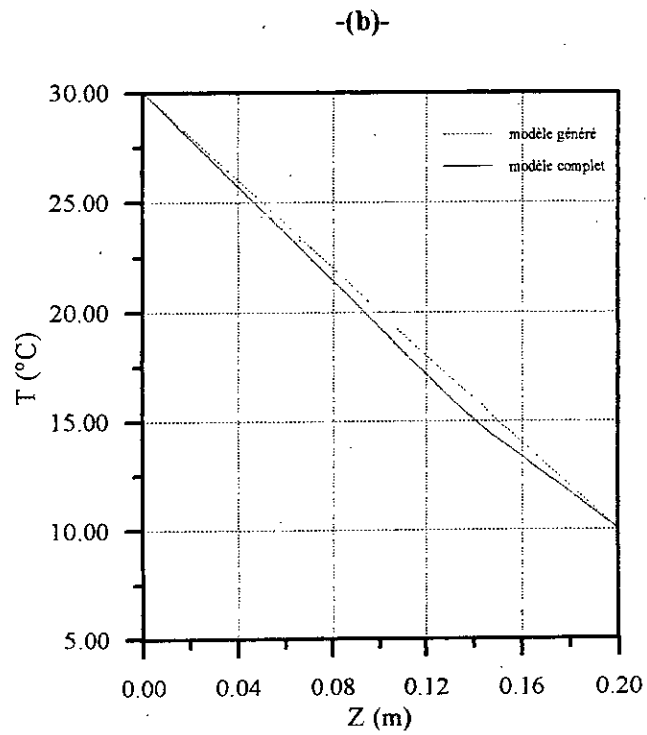
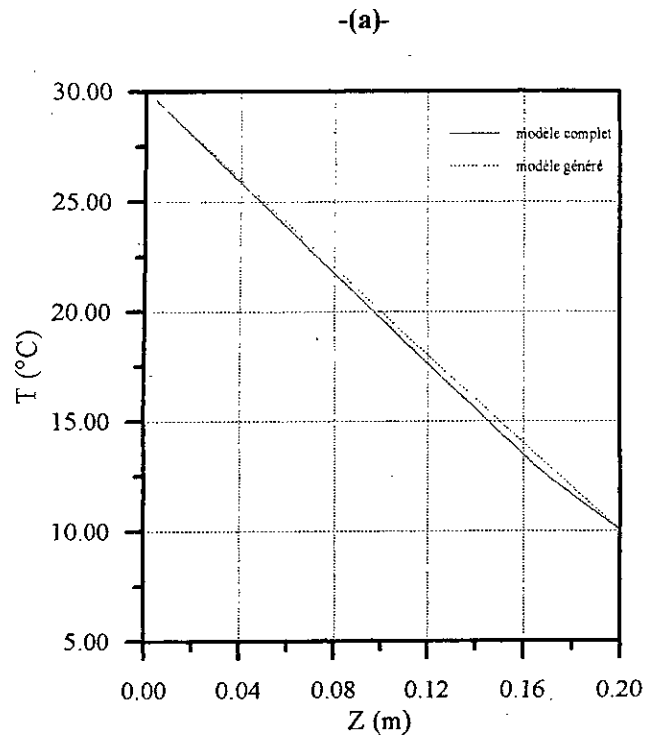


Fig.4-19 Profils thermiques  
(a) pour 2 jours et (b) pour 1 mois.

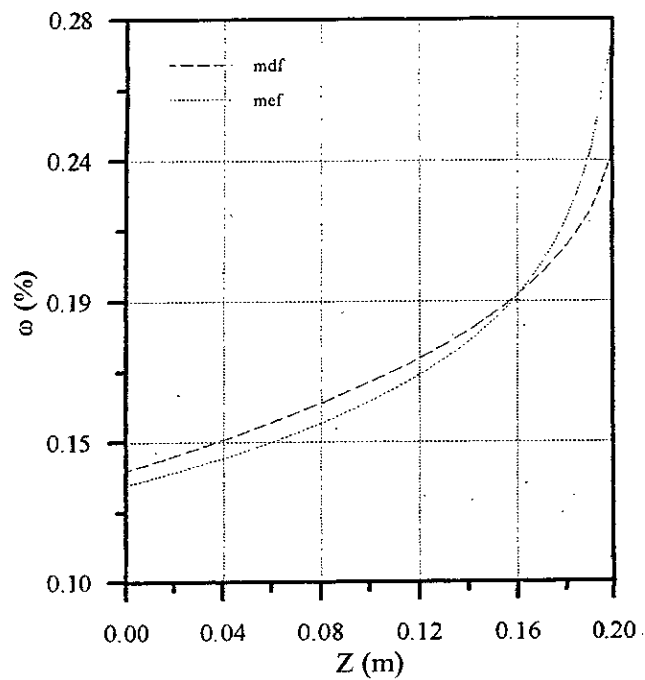




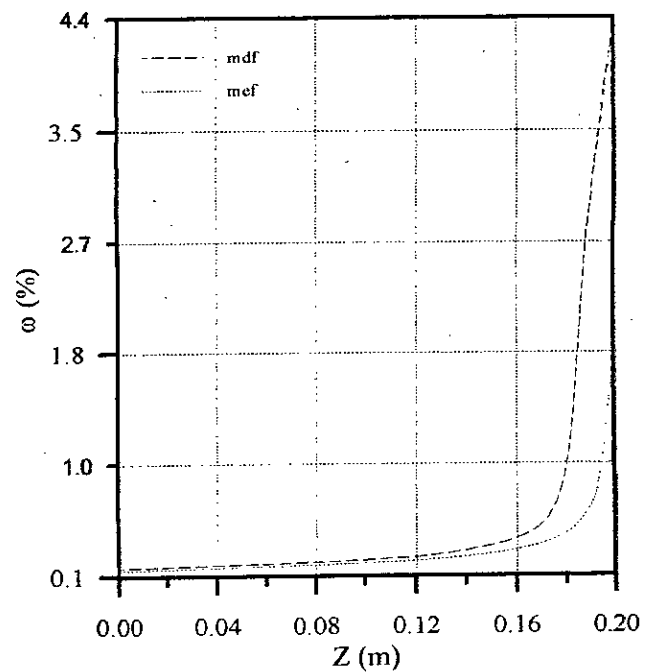
**Fig.4-20** Profils thermiques  
(a) pour 3 mois et (b) pour 6 mois.

**4.2.6 COMPARAISON DES METHODES D'ELEMENTS FINIS ET DES DIFFERENCES FINIES APPLIQUEES AU MODELE GENERE :**

-(a)-



-(b)-



**Fig.4-21** Profils hydriques  
(a) pour 10 jours et (b) pour 20 jours.

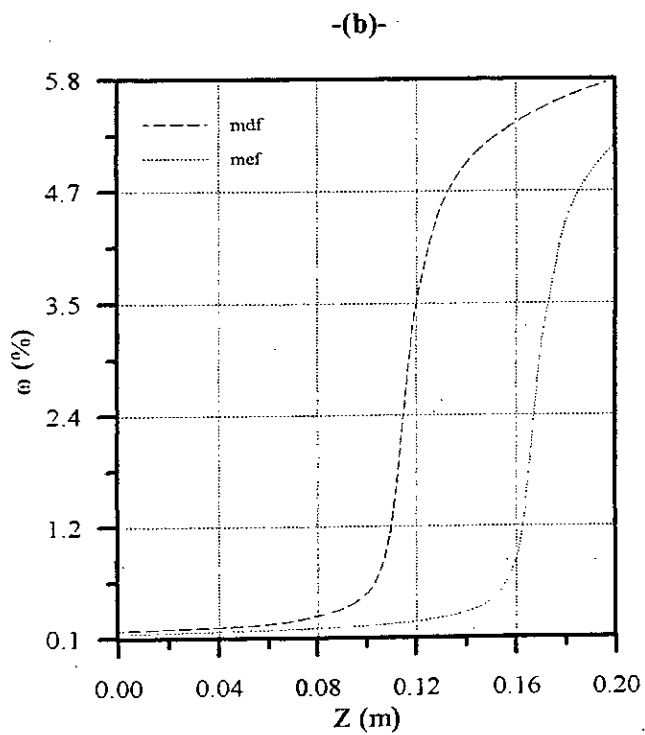
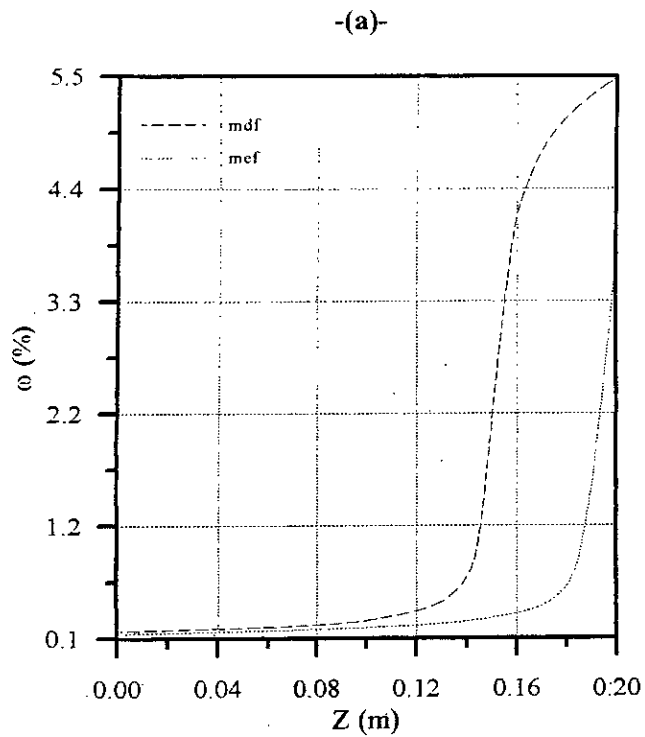


Fig.4-22 Profils hydriques  
(a) pour 1 mois et (b) pour 3 mois.

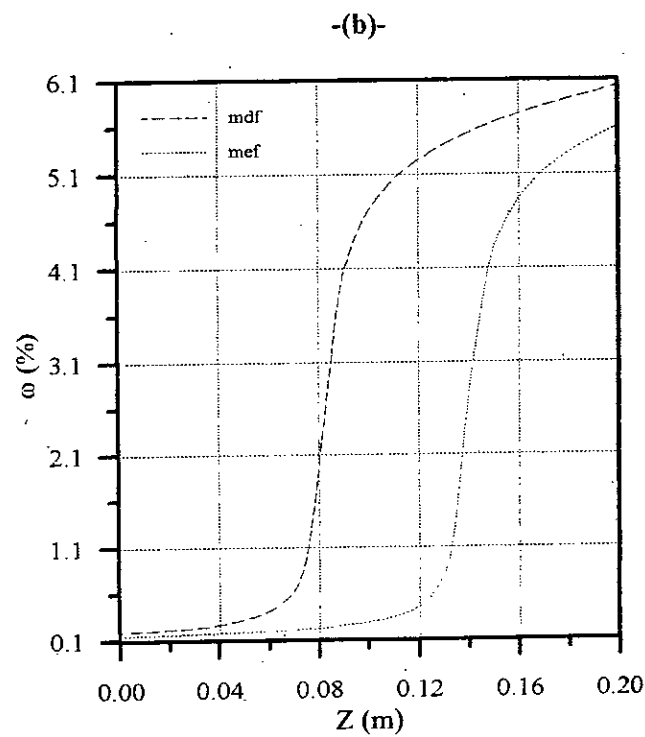
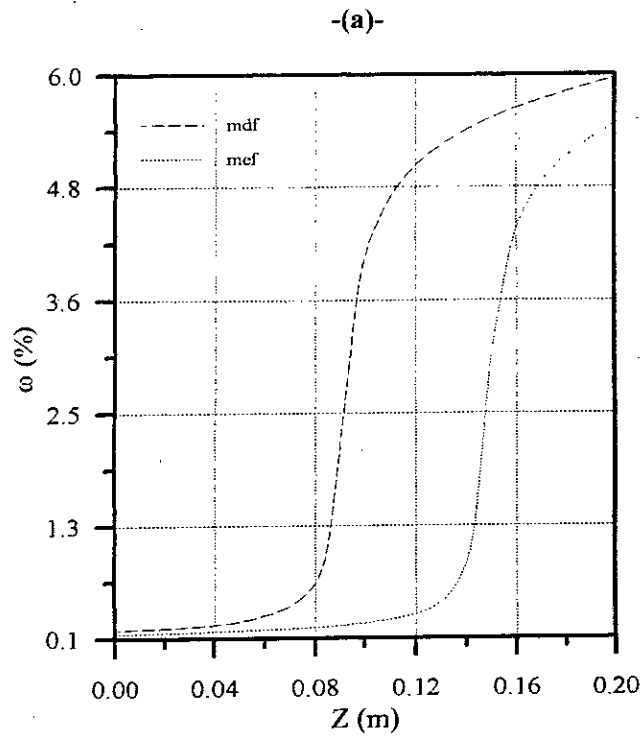
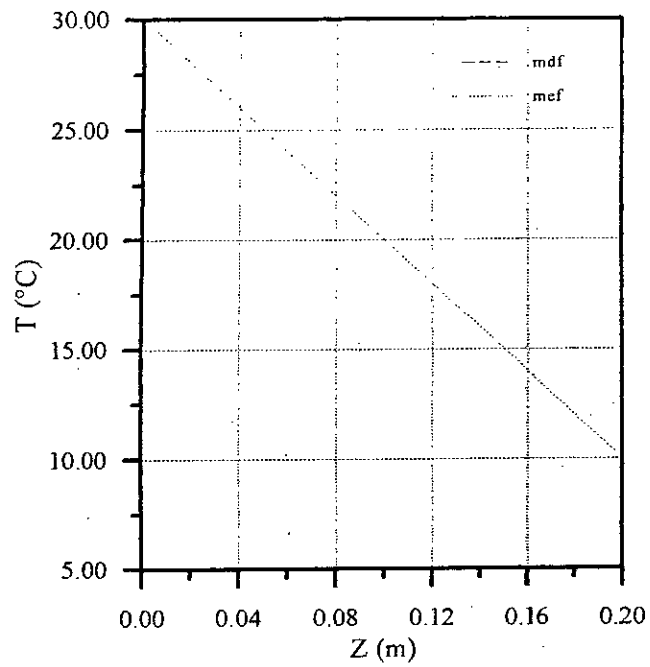


Fig.4-23 Profils hydriques  
(a) pour 5 mois et (b) pour 6 mois.

-(a)-



-(b)-

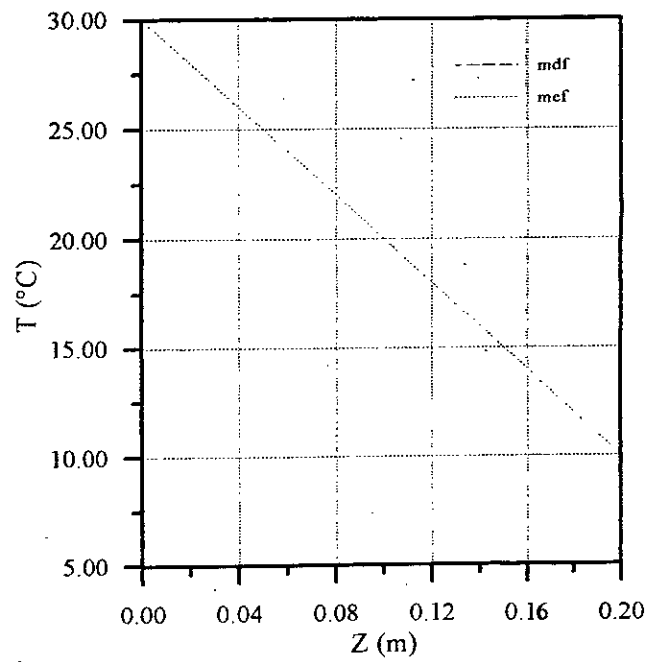


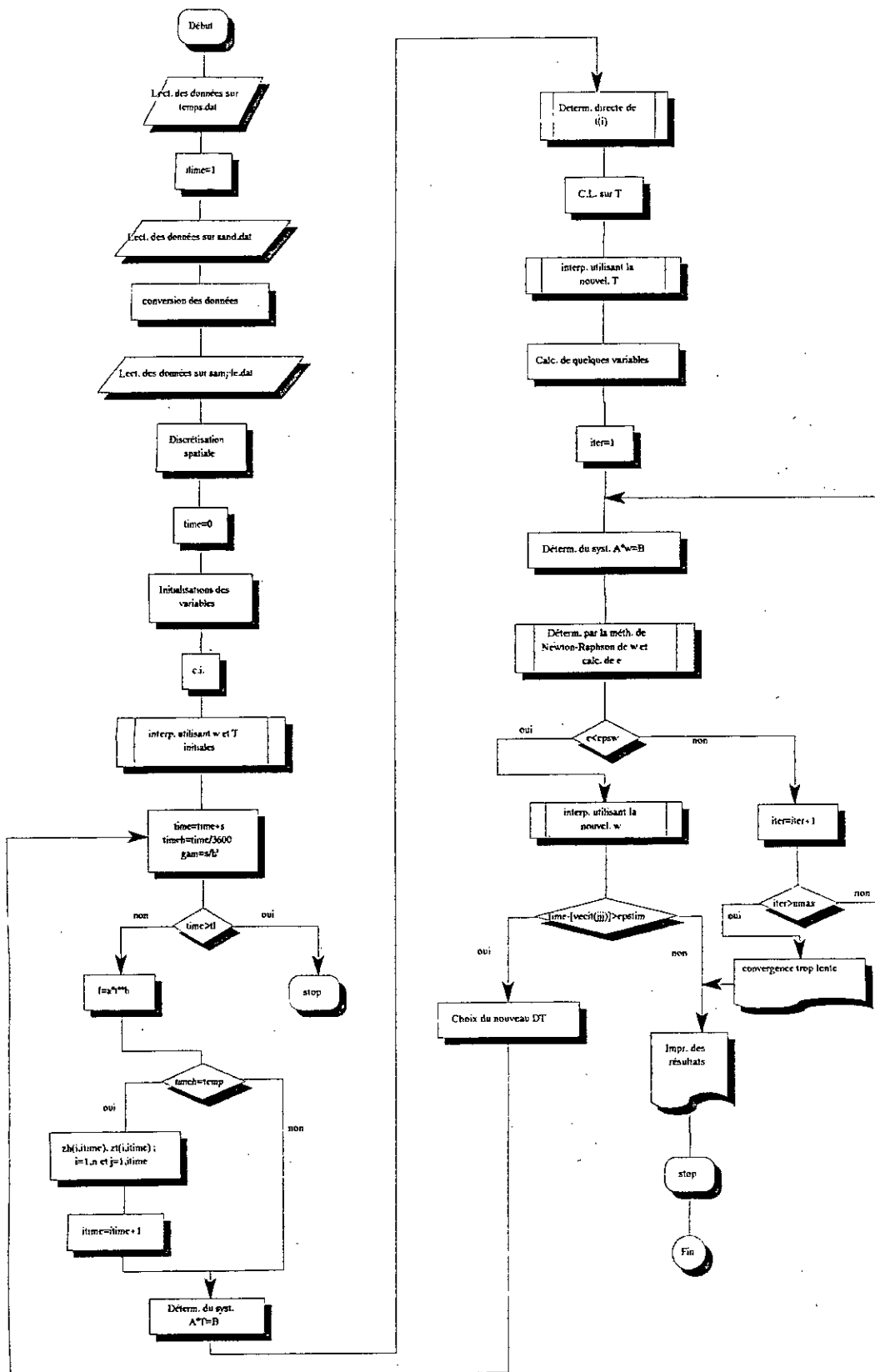
Fig.4-24 Profils thermiques  
(a) pour 10 jours et (b) pour 6 mois.

# ANNEXE A

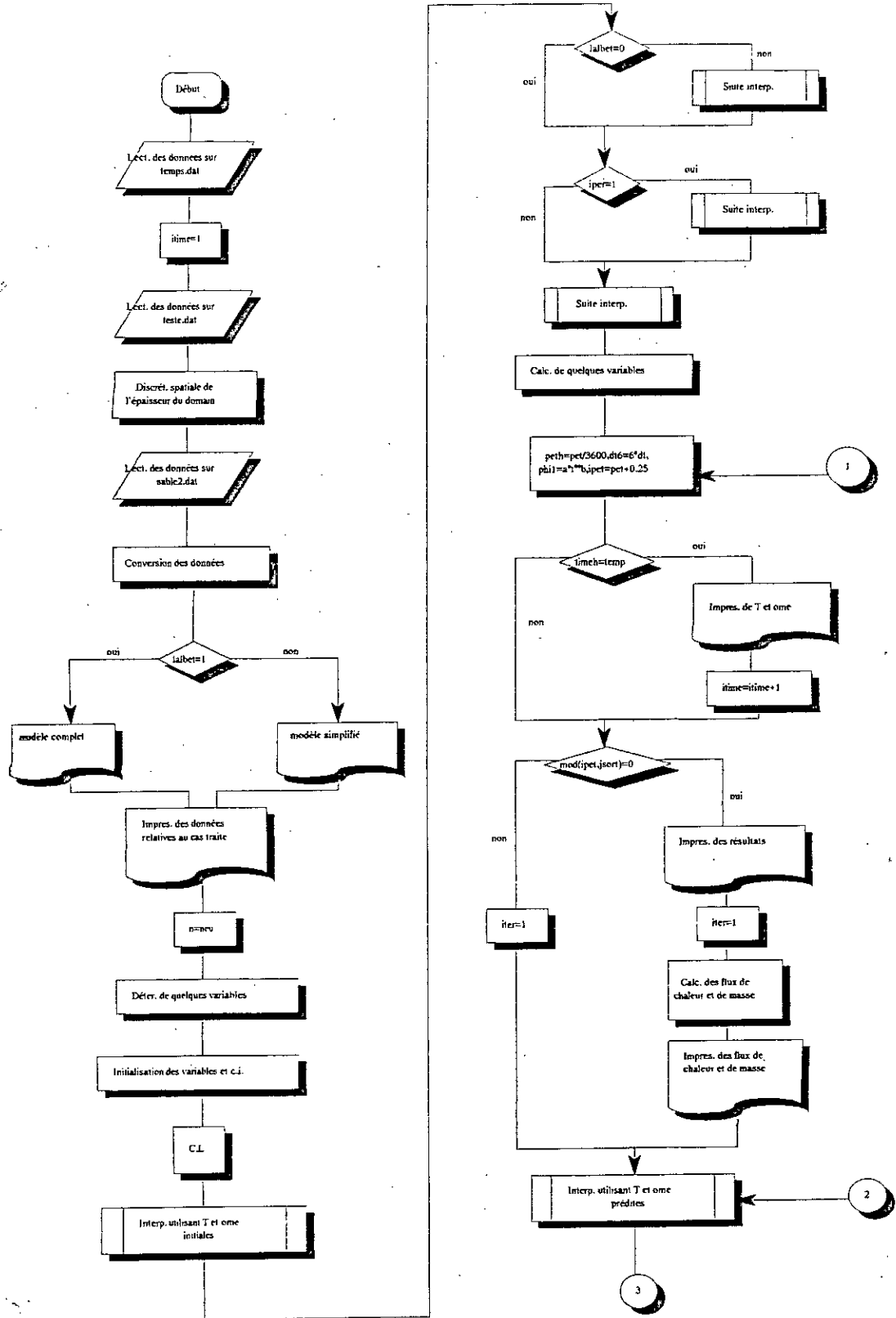
## ORGANIGRAMMES

**Méthodes des différences finies**  
**Méthode des éléments finis**

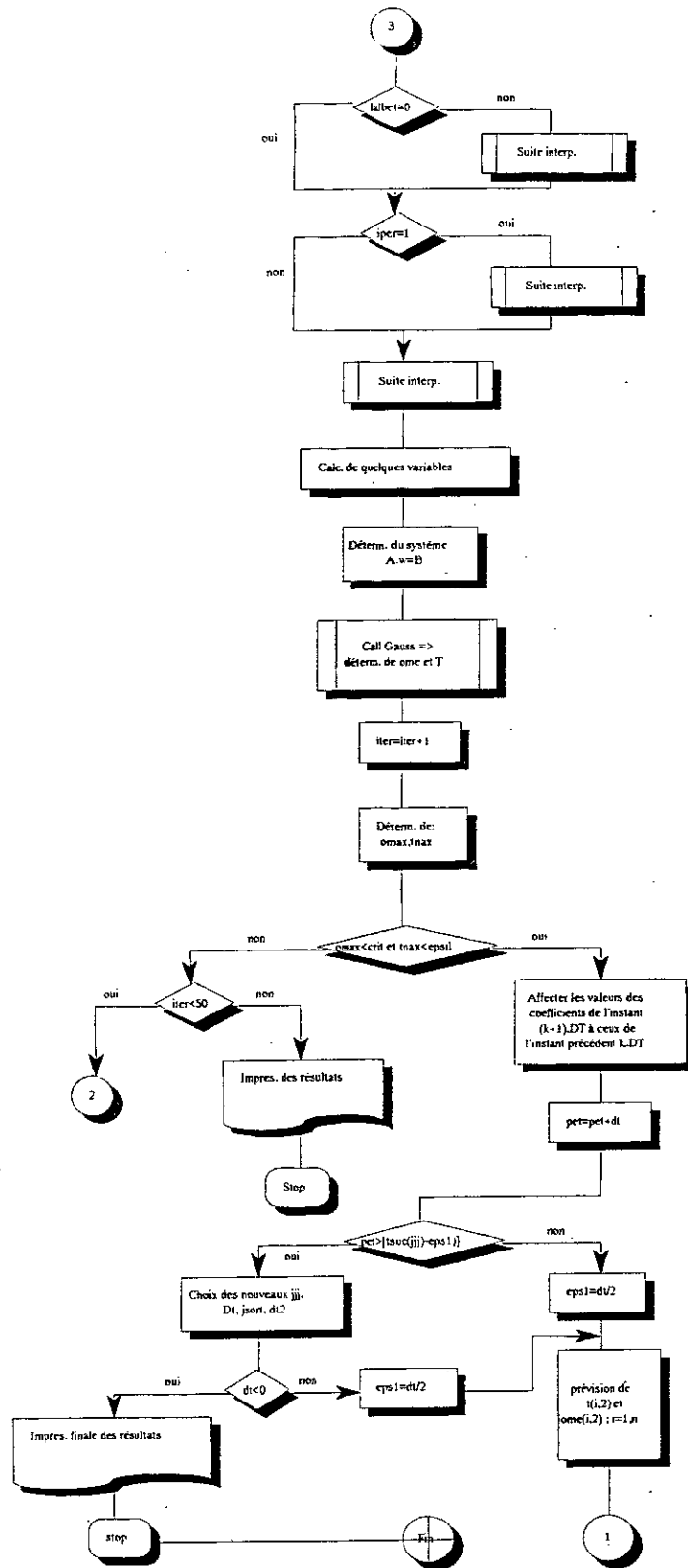
METHODE DES DIFFERENCES FINIES :



METHODE DES ELEMENTS FINIS :







## BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMES, W.F. (1965). Non linear partial differential equations in engineering, Academic Press.
- [2] BACON, G. (1982). Simulation numérique des transferts de chaleur et de masse dans les milieux poreux saturés, Colloque sur les transferts de chaleur et de masse dans un milieu poreux non saturé, LAUSANNE.
- [3] BORIES, S. (1987-1988). Transferts en milieux poreux, notes de cours. Institut de Génie-Mécanique de Toulouse.
- [4] BORIES, S. (1984). Transfert de chaleur et de masse dans les matériaux, Analyse critique des différents modèles mathématiques utilisés, Humidité dans le bâtiment. Collège International des Sciences de la Construction, pp.13-31.
- [5] BEAR, J. (1972). Dynamics of fluids in porous media, American Elsevier Publishing Company.
- [6] CHITOUR, C.E. (1992). Physico-chimie des surfaces, volume 1 : LES INTERFACES LIQUIDE-LIQUIDE ET GAZ-LIQUIDE, volume 2 : LES INTERFACES GAZ-SOLIDE ET LIQUIDE-SOLIDE, Office des Publications Universitaires.
- [7] COUSY, O. (1991). Mécanique des milieux poreux, Edition Technip.
- [8] DE VRIES, D.A. (1987). The theorie of heat and moisture transfert in porous media revisited, Int.J.Heat and Mass Transfert. Vol.30,No.7,pp:1343-1350.
- [9] DHATT, G. et TOUZOUT, G. (1984). Une présentation de la méthode des éléments finis, deuxième édition. Collection Université de Compiègne, Editions Maloine.
- [10] FORSYTHE, G.E. et WASOW, W.R. (1960). Finite difference methods for partial differential equations, John Wiley.
- [11] GLINKA, N. (1981). Chimie générale, tome I. première édition 1981, traduit du russe par MEDVEDEV, S. réimpression 1987, Editions Mir Moscou.

- [12] KIRILLIN, V.-SYTCHEV, V.-SHEINDLIN, A. (1981). Thermodynamique technique, deuxième édition, traduit du russe par KOLIMEEV V., traduction française (1981), Editions Mir Moscou.
- [13] KOOL, J.V.D. (1971). Moisture transport in cellular concretes roofs, Thèse de Ph.D., Eindhoven University Of Technologie, Walman, Delft.
- [14] LE POURHIET, A. (1988). Résolution numérique des équations aux dérivées partielles, Editions Cepadues.
- [15] LUIKOV, A.V. (1966). Heat and mass transfert in capillary-porous bodies, first edition, Pergamon Press.
- [16] MADJOU DJ, N. (1995). Analyse mathématique des processus de diffusion d'air humide dans les milieux poreux: Application à la thermique du bâtiment, Projet de fin d'études, E.N.P. d'Alger.
- [17] SLIMANI, B. (1995). Modélisation mathématique des mécanismes de transfert en milieu poreux. Application au processus de condensation, Projet de fin d'études, E.N.P. d'Alger.
- [18] SIBONY, M. et MARDON, J.CL. (1984). Volume 1 : SYSTEMES LINEAIRES ET NON LINEAIRES, volume 2 : APPROXIMATIONS ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES, Editions Hermann.
- [19] VASILESCU, D. et BROCH, H. (1977). Mécanique statique et dynamique des fluides, Collection PCEM, Bréal Edition.