

5/97

République Algérienne Démocratique et Populaire

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

En Vue de l'obtention du Diplôme

D'INGENIEUR D'ETAT EN GENIE mecanique

Thème :

**ETUDE AÉROÉLASTIQUE
D'UNE AILE D'AVION PAR
LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS**

Présenté par :

Tayeb T. Ghozlane
Belkacem B. Sid

Dirigé par :

Mr M. Boudjema

**PROMOTION
JUILLET 1997**

ملخص

في هذه الدراسة إستعملنا طريقة العناصر المنتهية للتأكد من المقاومة السكونية و الديناميكية لمقطع جناح طائرة مفرغ وباستعمال المعادن المركبة في الهياكل الجزئية. لقد قمنا بإنتاج برنامج معلوماتي لتقدير الاجهادات والانتقالات باستعمال عنصر مستطيل ذو ثمان عقد.

Abstract :

In this study, the finit element method was used to verify the static and dynamic resistance of wing airfoil. We have used the composite materials in substuctures.

Computer program was elaborated to evaluate stress and displacement by using isoparametric element of eight nodes.

Résumé :

Dans cette étude, nous avons utilisé la méthode des éléments finis pour vérifier la résistance en statique et dynamique d'un profil d'air évidé en utilisant des matériaux composites en sous-structures. Un code de calcul a été élaboré pour la détermination des contraintes et des déplacements en utilisant un élément à huit noeuds.

SOMMAIRE

Introduction générale.....	01
----------------------------	----

I. ETUDE AERODYNAMIQUE

1. Introduction.....	02
2. Aérodynamique des profils d'aile.....	03
2.1. Modèle du fluide incompressible.....	03
2.2. Répartition de pression sur un profil d'aile.....	05
3. Définition géométrique d'une aile.....	06
3.1. Profil théorique.....	06
3.2. Profils empiriques.....	07
4. Calcul des coefficients sans dimension de force et de moment.....	07
5. Ecoulement autour d'un cylindre de section circulaire.....	10
6. Transformation conforme.....	13
6.1. Propriétés de la transformation conforme.....	14
6.2. Transformation de JOUKOWSKI.....	15
6.3. Transformation générale cercle-profil.....	15

II LA METHODE DES SINGULARITES

1. Introduction.....	19
2. Principe de la méthode.....	19
3. Application à un profil isolé.....	20
expression du champ de vitesse.....	21
condition de glissement.....	21
condition de KUTTA-JOUKOWSKI.....	22

III UNE PRESENTATION DE LA M.E.F

1. Introduction.....	26
2. Détermination de la rigidité élémentaire.....	27
3. Détermination du vecteur force élémentaire.....	29
4. Assemblage.....	29
5. Conditions de convergence et de précision de la M.E.F.....	30
a- L'erreur dans la M.E.F.....	30
b- Précision.....	30
c- Convergence.....	30
6. Application à un profil d'aile.....	31
6.1. Construction des matrices élémentaires.....	32
6.2. Modélisation des charges.....	34

IV. LA M.E.F EN DYNAMIQUE

1. Introduction.....	37
2. Principe de la M.E.F en dynamique.....	37
3. Discrétisation spatiale.....	37
4. Formulation élémentaire.....	37
5. Formulation globale.....	38
6. Méthode d'analyse modale.....	39
6-1. Méthode de superposition modale.....	39
6.1-1. Méthodes de résolution des problèmes aux valeurs propres.....	39
6.1-2- Principe de la méthode de superposition modale.....	41

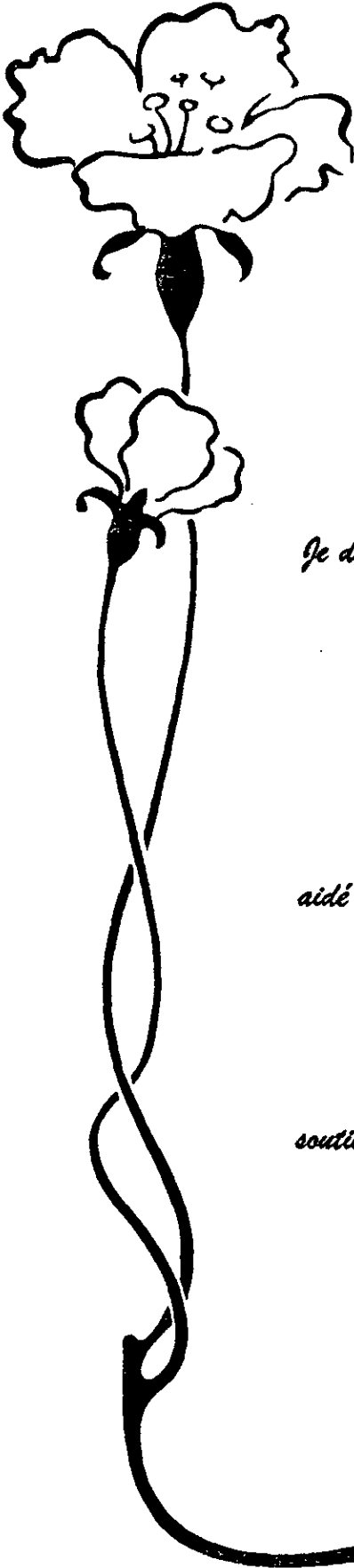
V. PRESENTATION DU PROGRAMME ET RESULTATS

- Introduction.....	47
- Les sous programmes.....	47
- Choix du nombre de points d'intégration.....	47
- Calcul des contraintes.....	48
- Organigrammes du logiciel.....	49
- Affichage des résultats.....	52
- Interprétation des résultats.....	61

VI CONCLUSION

ANNEXES

BIBLIOGRAPHIE



Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A la généreuse ma mère.

A la mémoire de mon père.

*A mes frères Bachir, et Mochtar qui m'ont
aidé durant mes études.*

A mes frères et soeurs.

*A mes amis Aïssa et Mouloud pour leur
soutient moral, et a tous ceux qui m'aiment..*

Belkacem

DEDICACE

*A mes cher parents ...
A mon frère KAMEL ...
A mes seours...
A tous mes amis ...*

Tayeb

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Introduction générale

INTRODUCTION

Le phénomène de couplage entre la déformation de la surface et les forces aérodynamiques instationnaires liées à ces déformations, et qui peut, dans certains cas, conduire à la désintégration de l'avion en quelques centaines de secondes, a poussé les spécialistes dans le domaine à faire des recherches afin d'améliorer les performances des grandeurs aérodynamiques en vol.

Le sujet qui nous a été confié rentre dans ce cadre, et a pour objectif la réduction du poids de l'aile d'avion et par conséquent l'augmentation de la poussée, ainsi que la réduction, au maximum possible, des déformations de sa structure.

L'outil utilisé pour effectuer ce travail, est la méthode des éléments finis basée sur la description de la structure à étudier en éléments simples et finis, faciles à traiter. Elle propose une solution non exacte mais qui satisfait les exigences pratiques, le traitement dans notre cas, est calcul, dans le cas statique et dynamique, des déformations de la structure d'une aile d'avion chargé.

Ces charges appliquées sur l'aile sont calculées par le biais d'une "méthode appelée méthode de singularité".

La démarche à suivre passe par la diminution de l'épaisseur de la structure et le choix d'un matériau rigide et léger (matériaux composites - largement utilisés dans le domaine aéronautique et aérospatial, est choisi dans notre cas).

On tient à préciser que le problème à été traité numériquement, par deux programmes : l'un pour la résolution statique en langage FORTRAN et d'autre pour la résolution dynamique en langage MATLAB.

Chapitre I

Etude aérodynamique

1. INTRODUCTION

Lorsqu'un corps est en mouvement par rapport à l'air, il est soumis à des forces élémentaires de pression et de frottement qui s'exercent sur chaque élément de surface en contact avec le milieu extérieur.

La réduction de ces forces élémentaires effectuée par rapport à un point de corps arbitrairement choisi, conduit à une force résultante et à un moment résultant, pour toute orientation du corps par rapport à la vitesse du mouvement.

La détermination des six composantes de ces deux grandeurs dans un trièdre approprié et celle des forces élémentaires font l'objet de l'aérodynamique.

L'aérodynamique s'appuie sur un support théorique qui ne cesse de s'accroître par suite du progrès scientifique et des puissants moyens de calcul dont dispose les théoriciens, mais il est souvent indispensable de considérer des formes géométriques simples et de recourir à des hypothèses simplificatrices, en considérant que les propriétés du fluide (air), sont assimilés à un milieu continue, dont le comportement thermodynamique et chimique est supposé obéir à certains modèles, plus ou moins complexes, selon les problèmes à traiter.

2. AERODYNAMIQUE DES PROFILS D'AILES

L'étude aérodynamique d'une aile doit être précédée de celle de l'écoulement bidimensionnel autour du profil.

La théorie du profil d'aile est faite pour différents domaines du nombre de Mach en écoulement permanent et irrotationnel de fluide parfait.

Elle trouve son application dans le calcul des ailes d'avions, des hélices, et des grilles d'aubes des compresseurs qui dérivent des profils d'ailes avec une loi de périodicité imposée par les conditions aux limites.

2.1. MODELE DU FLUIDE INCOMPRESSIBLE

L'écoulement est uniforme à l'infinie amont est irrotationnel; les composantes planes de la vitesse locale V en un point quelconque $M(x,y)$ de l'écoulement, sont les dérivées partielles du potentiel des vitesses $\phi(x,y)$:

$$u = \partial\phi/\partial x \quad , \quad v = \partial\phi/\partial y$$

Etant donné un profil aérodynamique il s'agit de déterminer le potentiel des vitesses satisfaisant aux conditions aux limites, l'écoulement est uniforme à l'infinie, le profil est une ligne de courant (vitesse tangente en chaque point du profil).

La connaissance du potentiel des vitesses permet d'obtenir la vitesse locale $V(u,v)$ en tout point, et de la pression P liées aux conditions à l'infinie V_0 , ρ_0 par l'équation de BERNOULLI:

$$P + \rho_0 V^2/2 = P_0 + \rho_0 V_0^2/2$$

Parmi les méthodes mathématiques permettant de déterminer le potentiel des vitesses autour d'un profil, une des plus simples consiste à déduire l'écoulement autour de profil de l'écoulement autour d'un cercle.

On sait calculer exactement ce dernier, en superposant deux potentiels de vitesses, le premier donne un écoulement symétrique (fig-I-1-a), le second donne des lignes de courant circulaires centrés sur le cercle de rayon (a), correspond à un tourbillon d'intensité Γ (fig-I-1-b).

La figure(I-1-c) donne les lignes de courant de l'écoulement due à la superposition des deux potentiels, on obtient ainsi sur le cercle deux points A et B de vitesse nulle si : $\Gamma < 4.\pi.a.V_0$.

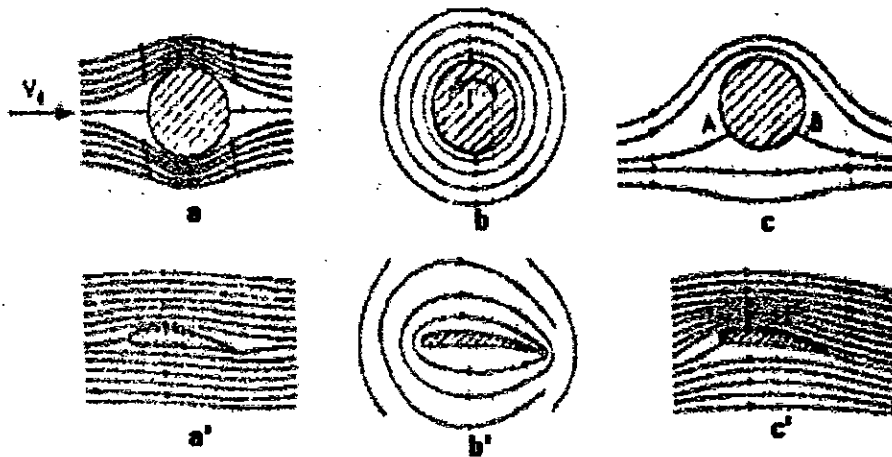


Figure (I.1)

Le théorème de KUTTA-JOUKOWSKI permet d'énoncer le résultat fondamental suivant:

La résultante des forces élémentaires (de pression) sur le profil est une force normale à la vitesse à l'infinie amont V_0 , son sens est obtenu en faisant tourner V_0 de 90° dans le sens opposé à celui de circulation, son module est $\rho_0 V_0 \Gamma dy$ sur une tranche de profil de largeur dy , le coefficient C_x de cette résultante est :

$$C_x = \frac{\rho_0 V_0 \Gamma dy}{1/2 \rho_0 V_0^2 l dy}$$

La condition de JOUKOWSKI introduit la circulation : $\Gamma = 4.\pi.a.V_0 \sin\alpha$

où α est l'angle d'incidence du profil compté à partir de l'incidence de portance nulle. par suite : $C_x = 2 K \sin\alpha$

K : est un coefficient voisin de π qui dépend légèrement de la forme du profil. D'après cette théorie C_x maximal pour $\alpha = 90^\circ$

Au petite incidences il vient : $C_x = 2. K \alpha$

2.2. REPARTITION DES PRESSIONS SUR UN PROFIL D'AILE

La répartition des pressions sur un profil d'aile met en évidence des régions de surpressions ($K_p > 0$), où K_p est le coefficient de pression définie par :

$$K_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho_0 V_0^2}$$

ou des régions de dépressions ($K_p < 0$) par rapport à la pression p_0 qui règne à l'infinie; leur évolution est très instructive, faisant comprendre le mécanisme de sustentation et l'apparition du décollement. De plus, elle permet de préciser la contribution de l'intrados et de l'extrados assurent les 2/3 ou les 3/4 de la portance.

Du point de vue théorique une circulation ne peut s'établir autour du profil à partir du fluide parfait au repos.

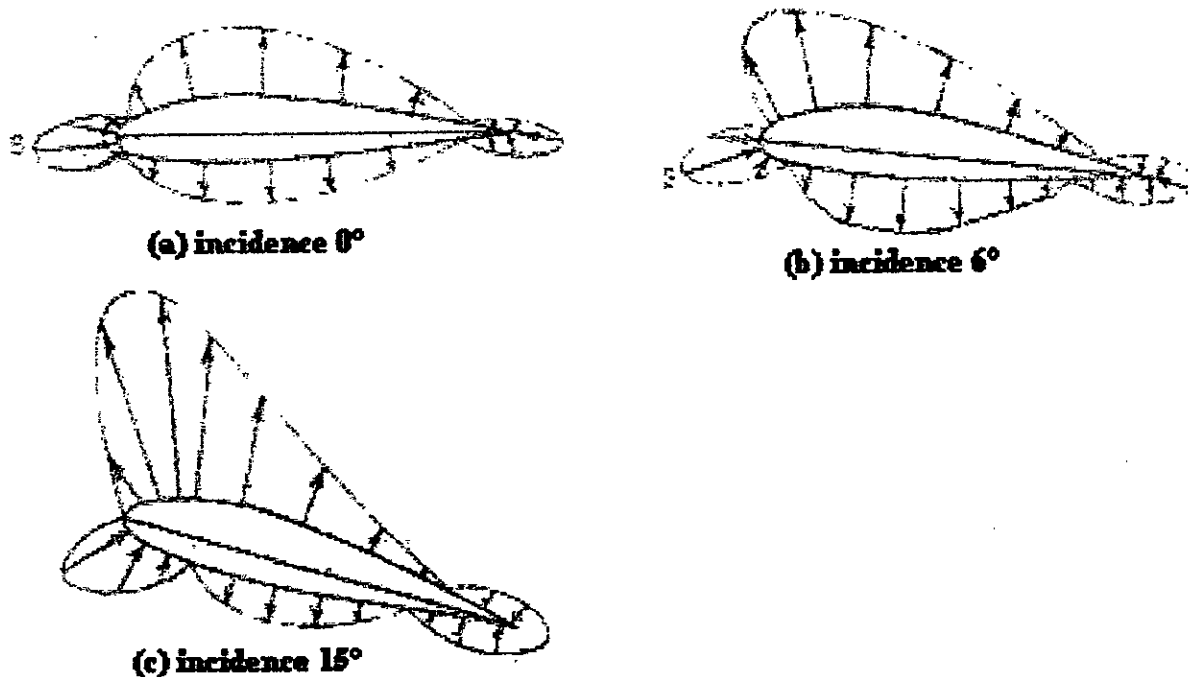


Figure (1.2) Répartition de pression sur un profil d'aile en écoulement subsonique (pour différentes incidences)

3. DEFINITION GEOMETRIQUE D'UNE AILE

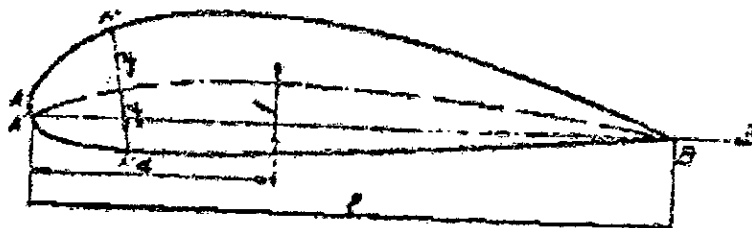


Figure (I.3) Profil d'aile

Un profil d'aile définie par:

Bord d'attaque: A

Bord de fuite : B

La corde du profil : AB, désignée par (l)

L'extrados: AMB, et l'intrados: ANB

La ligne moyenne ou squelette $M'N'$, avec $(M'N') \perp (AB)$

La flèche maximum : f, sa position définie par d/l

La courbure relative: f/l

L'épaisseur $e = M'N'$, où sa position est définie en % de la corde l; e/l est l'épaisseur relative.

Le rayon de bord d'attaque: r, rayon du cercle osculateur au bord d'attaque .

Le rayon réduit définie par :
$$\rho = \frac{r/l}{(e/l)^2}$$

3.1. PROFIL THEORIQUE

Les profils théorique sont obtenus par le procédé de la transformation conforme qui permet d'engendrer , à partir d'un cercle, un profil de forme appropriée. L'intérêt du profil théorique est le suivant:

Connaissant l'écoulement théorique en fluide parfait autour d'un cercle, on le déduit soit par des constructions géométriques, soit par calcul de l'écoulement autour du profil, on calcul ainsi en particulier, le champ de vitesse en fluide parfait (écoulement potentiel) autour du profil.

3-2- PROFILS EMPIRIQUES

De nombreux profils ont été obtenus par des méthodes empiriques par le N.A.C.A (National Advisory Commity for Aéronotics) depuis 1932.

Les profils classiques sont obtenus par une génération empirique que nous résumons, à partir d'une ligne moyenne linéaire, prise pour axe des X avec origine au bord d'attaque on porte de part et d'autre de cette ligne, une ordonnée $Y = f(X)$; la loi $Y = f(X)$ choisi correspond à la distribution moyenne de l'épaisseur sur des bons profils connus, l'épaisseur maximum est située à 30 % de la profondeur.

- on passe de la ligne moyenne linéaire à une ligne moyenne dont on se donne l'équation
- on multiplie toutes les ordonnées Y par un facteur constant pour faire varier l'épaisseur relative.

Les profils N.A.C.A sont désignés par quatre ou cinq chiffres dont la composition permet de déduire les principales caractéristiques.

Exemple : N.A.C.A 2412 et N.A.C.A 23012

- le 1^{er} chiffre représente la courbure relative $c = f/e = 0.02 = 2 \%$.
- le 2^{ème} chiffre (4) - si 4 chiffres - représente le nombre de dizaine de l'abscisse d e la corde $d/e = 40 \%$.
- le 3^{ème} et le 4^{ème} chiffres - si 5 chiffres - représentent le double de l'abscisse d de la flèche maximum $d/l = 15 \%$.
- Le dernier chiffre représente l'épaisseur relative $e = h/l = 12 \%$.

4. CALCUL DES COEFFICIENTS SANS DIMENSION DE FORCES ET DE MOMENT

La figure(I-4) représente une section d'une aile faisant une angle d'incidence soumise à une vitesse d'écoulement du fluide.

Le calcul sera fait suivant les deux axes OX et OY parallèle et perpendiculaire à la ligne du corde respectivement.

La corde de l'aile désignée par l et les ordonnées des points les plus haut et les plus bas sont désignés par z_1 et z_2 respectivement.

Considérons la surface de l'aile comme une mince plaque parfaitement rigide, la pression à l'intérieur est uniforme et égal à P_0 .

Calculons la force normale exercée sur un élément de longueur δs , dont les composantes suivant les axes OX, OZ sont δ_x et δ_z respectivement.

alors: $\delta_z = -(p - p_0) \delta_s \cos(\epsilon)$ (I-1)
 on a : $\delta Z \cos(\epsilon) = \delta_x$ pour la géométrie de l'élément.
 d'où : $\delta Z = -(p - p_0) \delta x$ par unité d'envergure.

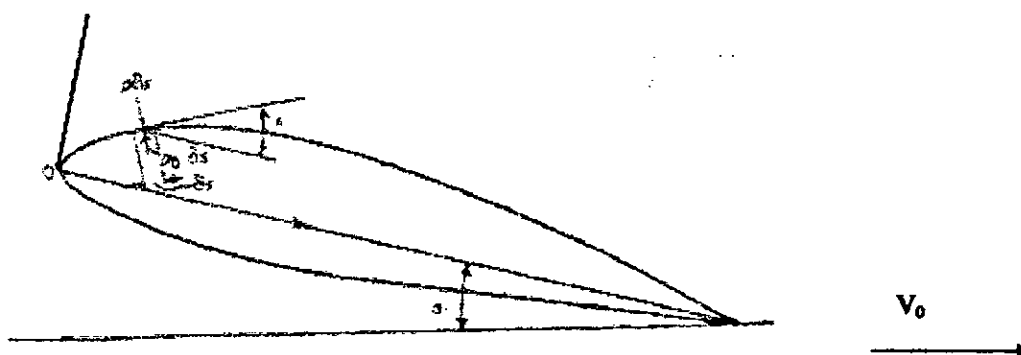


Figure (I-4)

Pour un élément de l'intrados on à :

$$\delta Z = -(p - p_0) \delta x \text{ par unité d'envergure.}$$

d'où la force totale:

$$Z = \underbrace{\int_0^l -(p - p_0) dx}_{\text{extrados}} + \underbrace{\int_0^l (p - p_0) dx}_{\text{intrados}} \quad (I-2)$$

Utilisons les indices ex et in, pour l'extrados et l'intrados respectivement, on peut écrire :

$$Z = - \int_0^l [(p - p_0)_{\text{ex}} - (p - p_0)_{\text{in}}] dx \quad (I-3)$$

La connaissance de la variation de pression le long de la corde, nous permet de calculer le coefficient de portance C_z définie par :

$$C_z = \frac{Z}{1/2 \rho V_0^2 S}$$

Pour une envergure unitaire, la surface S est égale à la corde (l), d'où le coefficient de portance devient, après remplacement de la portance par sa valeur calculer en (I-3):

$$C_z = -\frac{1}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 l} \int_0^l [(P - P_0)_{ex} - (P - P_0)_{in}] dx$$

Posons $(1/l)dx = d(x/l)$ et devisons la somme entre parenthèse par $\frac{1}{2} \rho V_0 l$, le coefficient de portance prend l'expression finale:

$$C_z = - \int_0^1 (K p_{ex} - K p_{in}) d\left(\frac{x}{c}\right) \quad (I-4)$$

avec :

$$Kp = \frac{P - P_0}{1/2 \rho V^2} \quad \text{par définition}$$

de même pour la force suivant OX:

$$\delta x = -(P - P_0) \delta s \sin(\epsilon)$$

avec : $\delta s \sin(\epsilon) = \delta z$

Le calcul nous conduit à l'expression finale du coefficient de traîné suivante:

$$C_x = \int_{z_2/l}^{z_1/l} Kp d\left(\frac{z}{l}\right) \quad (I-5)$$

Le moment de tangage du à la force Z calculé comme suite:

$$\delta M = [(p - p_0)_{ex} - (p - p_0)_{in}] x \delta x$$

d'où le coefficient des moments de tangage du à Z:

$$C_{Mz} = \int_0^1 (K p_{ex} - K p_{in}) \left(\frac{x}{c}\right) d\left(\frac{x}{c}\right) \quad (I-6)$$

Puisque:

$$C_M = \frac{M}{1/2 \rho V^2 S l}$$

Un calcul similaire au calcul de C_{Mz} , pour calculer C_{Mx} (coefficient de moment de tangage par rapport à la force X), nous conduit au résultat suivant:

$$C_{Mx} = - \int_{z_1/l}^{z_2/l} (K p_{ex} - K p_{in}) \left(\frac{z}{l}\right) d\left(\frac{z}{l}\right) \quad (I-7)$$

d'après la figure (I-5) on peut tirer les coefficient suivants :

$$C_l = C_z \cos(\alpha) - C_m \sin(\alpha) \quad (I-8)$$

$$C_r \cos(\gamma) = C_z \quad \text{et} \quad C_r \sin(\gamma) = C_m \quad (\text{I-9})$$

$$C_d = C_z \sin(\alpha) + C_m \cos(\alpha) \quad (\text{I-10})$$

avec : γ l'angle entre la résultante et la force Z.

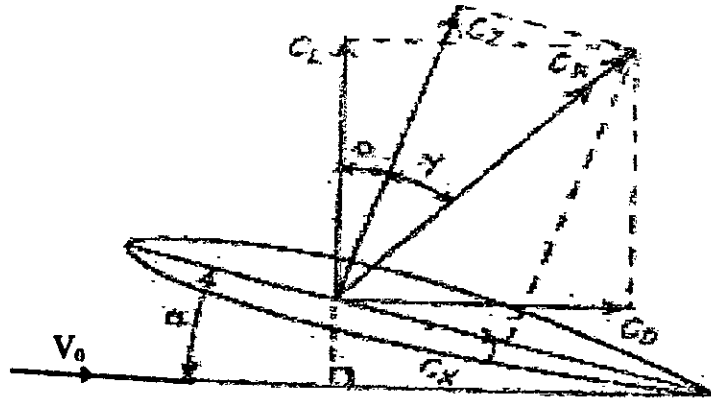


Figure (I.5)

5. ECOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE DE SECTION CIRCULAIRE

Les transformations les plus courantes permettant, à partir de l'écoulement avec circulation autour d'un cylindre, de reconstituer l'écoulement autour d'un profil aérodynamique.

La fonction de courant est obtenue par superposition de l'écoulement autour d'un cylindre

avec un écoulement à circulation de vitesse centrée en O :

$$F(z_1) = V_0 \left(z_1 + \frac{a^2}{z_1} \right) + \frac{i}{2\pi} \Gamma \ln \left(\frac{z_1}{a} \right) \quad (\text{I-11})$$

La constante (a) représente le rayon du cercle, V_0 représente la vitesse de l'écoulement à l'infinie amont et Γ la circulation de vitesse.

Si l'on souhaite étudier le même écoulement sous l'angle d'incidence α , l'affixe z_1 sera transformé en $z_1 \exp(-i\alpha)$ correspondant à une rotation de α , dans le sens trigonométrique, d'où le potentiel complexe :

$$F(z_1) = V_0 \left[z_1 \exp(-i\alpha) + \frac{a^2}{z_1} \exp(i\alpha) \right] + \frac{i}{2\pi} \Gamma \ln \left[\frac{z_1}{a} \exp(-i\alpha) \right]$$

En posant $z_1 = r_1 \exp(i\theta_1)$, la fonction potentiel $F(z_1)$ s'écrira :

$$F(z_1) = V_0 \left[r_1 \exp(i(\theta_1 - \alpha)) + \frac{a^2}{r_1} \exp(-i(\theta_1 - \alpha)) \right] + \frac{i}{2\pi} \Gamma \ln \left[\frac{r_1}{a} \exp(i(\theta_1 - \alpha)) \right] \quad (I-12)$$

d'où on tire par identification avec : $F(z_1) = \phi_1 + i\psi_1$

$$\begin{cases} \phi_1 = V_0 \left(r_1 + \frac{a^2}{r_1} \right) \cos(\theta_1 - \alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta_1 - \alpha) \\ \psi_1 = V_0 \left(r_1 - \frac{a^2}{r_1} \right) \sin(\theta_1 - \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{r_1}{a} \right) \end{cases} \quad (I-13)$$

La ligne de courant $\psi_1 = 0$ est composée du cercle de rayon a ($r_1 = a$), et de la courbe définie par :

$$\sin(\theta_1 - \alpha) = -\frac{\Gamma}{2\pi V_0 r_1} \times \frac{\ln \frac{r_1}{a}}{1 - \frac{a^2}{r_1^2}} \quad (I-14)$$

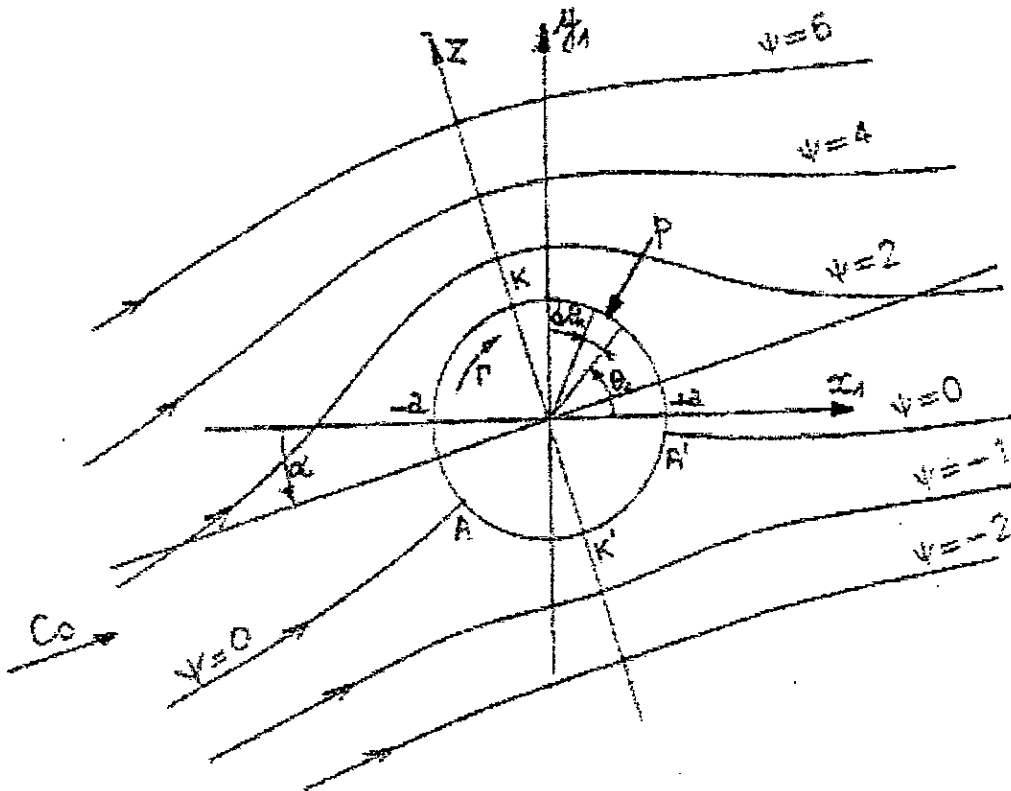


Figure (I.6) Ecoulement avec circulation autour d'un cylindre de rayon a .

Le champ de vitesse est défini à partir des relations classiques :

$$\begin{cases} V_{r1} = \frac{\partial \phi_1}{\partial r_1} = \frac{\partial \psi_1}{r_1 \partial \theta_1} = V_0 \left(1 - \frac{a^2}{r_1^2}\right) \cos(\theta_1 - \alpha) \\ V_{\theta 1} = \frac{\partial \phi_1}{r_1 \partial \theta_1} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial r_1} = -V_0 \left(1 + \frac{a^2}{r_1^2}\right) \sin(\theta_1 - \alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi r_1} \end{cases} \quad (I-15)$$

A la surface de l'obstacle on aura ($r_1 = a$)

$$\begin{cases} V_{r1} = 0 \\ V_{\theta 1} = -2V_0 \sin(\theta_1 - \alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi a} \end{cases} \quad (I-16)$$

Les points d'arrêt A et A', sont obtenus pour : $V_1 = V_{\theta 1} = 0$

$$\text{soit pour :} \quad \sin(\theta_1 - \alpha) = -\frac{\Gamma}{4\pi V_0 a} \quad (I-17)$$

D'où, les valeurs de θ_A et $\theta_{A'}$ correspondant aux points d'arrêt :

$$\begin{cases} \theta_A = \pi + \alpha + \arcsin\left(\frac{\Gamma}{4\pi a V_0}\right) \\ \theta_{A'} = \alpha - \arcsin\left(\frac{\Gamma}{4\pi a V_0}\right) \end{cases} \quad (I-18)$$

La vitesse maximale est obtenue pour $\theta_1 = \alpha + \frac{\pi}{2}$ (point K); et la vitesse minimale pour

$\theta_1 = \alpha - \frac{\pi}{2}$ (point K') . :

$$\begin{cases} V_{\max} = |V_{\theta 1 \max}| = 2V_0 + \frac{\Gamma}{2\pi a} \\ V_{\min} = |V_{\theta 1 \min}| = 2V_0 - \frac{\Gamma}{2\pi a} \end{cases} \quad (I-19)$$

Cette valeur minimale est positive, si : $V_0 > \frac{\Gamma}{4\pi a}$, c'est la limite de l'écoulement réel pouvant être engendrée par l'obstacle cylindrique.

5.1. Portance

La relation de BERNOULLI entre l'infini amont et un point M quelconque appartenant au cercle, permet d'écrire :

$$P_{\infty} + \rho \frac{V_0^2}{2} = P + \rho \frac{V^2}{2} \quad (I-20)$$

La partie supérieure du cercle contenant les points A, K et A' est en dépression (grande vitesse). Tandis que, l'arc AK'A' est en surpression .

L'écoulement, étant symétrique par rapport à l'axe OZ, la résultante globale aérodynamique ou hydrodynamique Fz sera de même direction et de même sens que OZ

On la calculera par projection de l'effort élémentaire associé à la pression P sur la surface (a.dθ₁)

$$F_z = \int_0^{2\pi} P \sin(\theta_1 - \alpha) a d\theta_1$$

Soit d'après la relation de BERNOULLI :

$$F_z = \int_0^{2\pi} [P_{\infty} - \frac{1}{2} \rho (V_0^2 - V^2)] \sin(\theta_1 - \alpha) a d\theta_1$$

En remplaçant V² par sa valeur issue du système (I-16) et en remarquant que les termes en exposant impaire de sin(θ₁-α) s'annulent sur le domaine d'intégration.

La portance Fz s'écrira:

$$F_z = \rho \frac{V_0 \Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta_1 - \alpha) d\theta_1 \quad \Rightarrow \quad F_z = \rho V_0 \frac{\Gamma}{\pi} \left[\frac{1}{2}(\theta - \alpha) - \frac{1}{4} \sin 2(\theta_1 - \alpha) \right]_0^{2\pi}$$

donc, finalement:

$$F_z = \rho V_0 \Gamma \quad (I-21)$$

Cette dernière relation est la loi de JOUKOWSKI exprimant la portance exercée sur un obstacle par unité de longueur, on peut noter que Fz est dirigée perpendiculairement à la direction de l'écoulement.

6. TRANSFORMATION CONFORME

La transformation conforme permet de résoudre l'écoulement autour d'une forme quelconque à partir de l'écoulement autour d'une forme simple.

Au plan d'étude complexe (x₁, y₁) dans lequel est décrit l'écoulement connu, on va faire correspondre le plan complexe (x₂, y₂) ou (ξ, η) dans lequel sera décrit l'écoulement inconnu.

Cette transformation s'effectuera suivant les principes et les règles de la transformation conforme qui transformera à la fois la géométrie de l'obstacle et la géométrie des lignes de courant et des équipotentielles.

Cette transformation (T) s'effectuera à partir de la fonction f qui reste à définir à chaque application:

$$z = f(z_1)$$

On utilisera également la transformation inverse T^{-1} définie par la fonction $f^{-1} : z = f^{-1}(z_2)$

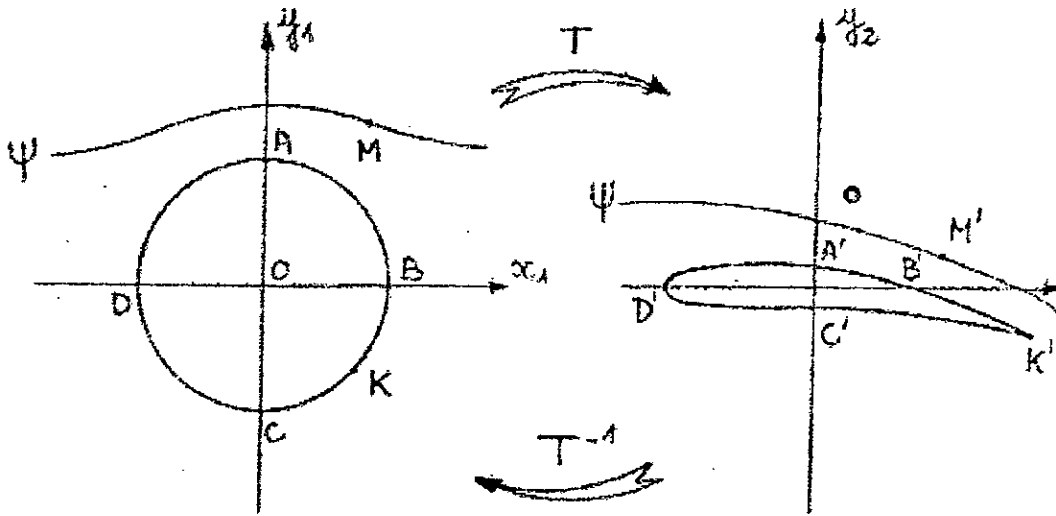


Figure (I.7) Transformation conforme (T).

La figure ci-dessus traduit cette propriété, elle montre la correspondance entre les points A,B,C,D,K et A',B',C',D',K' appartenant respectivement à l'obstacle étudié ainsi que la correspondance entre le point M appartenant à la ligne de courant ψ et le point M' appartenant à la ligne de courant homologue.

6.1. Propriétés de la transformation conforme

- La transformation conforme conserve les angles: si deux vecteurs forment dans le plan (1) un angle α donné, cet angle sera conservé pour les deux vecteurs homologues du plans d'écoulement (2).
- Les lignes de courant et les équipotentielles étant orthogonales en un point du plan d'étude, elles conservent cette propriété dans le plan (2) (en dehors des points singuliers de la transformation).
- Les côtes des équipotentielles et des lignes de courant se conservent respectivement au cours de la transformation. La forme du profil réel correspond à la ligne de courant $\psi=0$ de l'écoulement de référence.
- La circulation de vitesse entre deux points du plan (1) sera conservée entre les deux points homologues du plan (2).

- Partant dans le plan d'étude d'un cercle, à chaque fonction de transformation (f) correspondra une forme, et une seule, de l'obstacle dans le plan réel, inversement pour définir à partir de la transformation conforme un profil déterminé, il faudra procéder à diverses retouches successives de la fonction (f). c'est la difficulté majeure rencontrée au cours de cette application.
- Pour reconstituer l'écoulement réel, il est possible d'utiliser plusieurs transformations conformes successives.

6.2. Transformation de JOUKOWSKI

La transformation de JOUKOWSKI est définie de la façon suivante:

A tout point d'affixe z_1 du plan d'étude (1) est associé le point d'affixe z_2 du plan réel (2) par la transformation définie par la fonction:

$$z_2 = f(z_1) = z_1 + \frac{b^2}{z_1} \quad (I-23)$$

6.3. Transformation générale cercle-profil

Dans cette transformation, le cercle étudié est centré au point O d'affixe z_0 , du potentiel complexe (11) exprimé dans le repère (x_1, y_1) devient alors:

$$F(z_1) = V_0 \left[(z_1 - z_0) \exp(-i\alpha) + \frac{a^2}{z_1 - z_0} \exp(i\alpha) \right] + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left[\frac{z_1 - z_0}{a} \exp(-i\alpha) \right] \quad (I-24)$$

La figure I-4- permet de définir l'affixe z_0 égale à: $z_0 = x_0 + i y_0$

En introduisant " b ", l'abscisse du point d'arrêt A' ainsi que " β " l'angle formé entre l'axe OX et le segment OA' (β est négative), on aura respectivement :

$$\begin{cases} x_0 = b - \cos \beta \\ y_0 = -a \sin \beta \end{cases} \quad (I-25)$$

soit : $z_0 = b - a \exp(i\beta) \quad (I-26)$

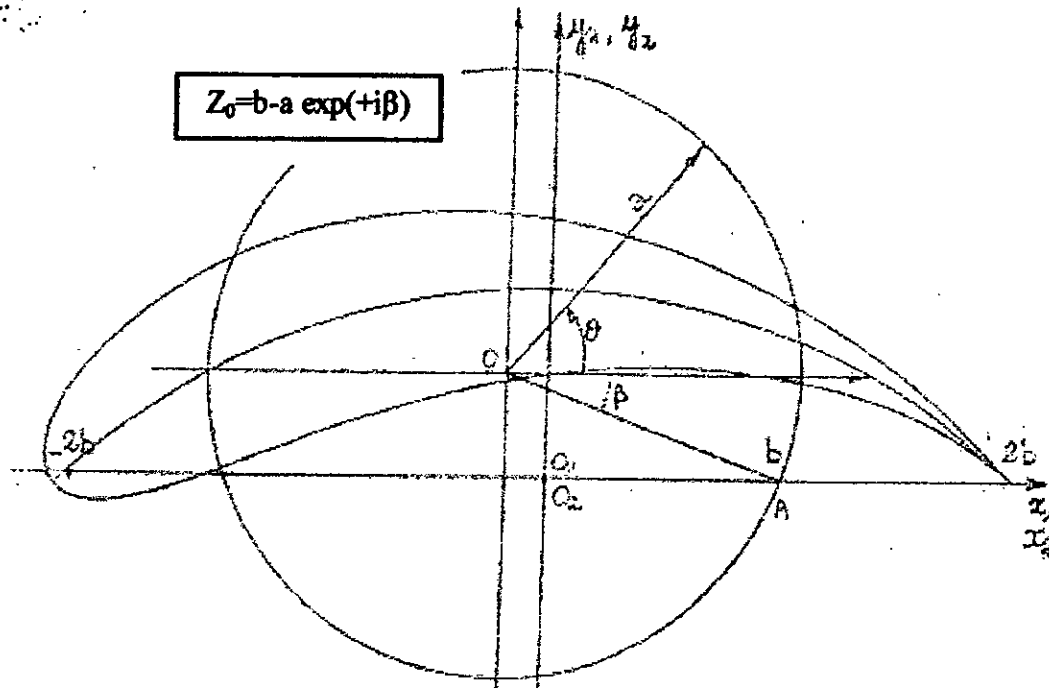


Figure (I.8) Transformation de JOUKOWSKI

Les points situés sur le cercle ont pour coordonnées:

$$\begin{cases} x_1 = a \cos \theta + x_0 \\ y_1 = a \sin \theta + y_0 \end{cases} \quad (\text{I-27})$$

Utilisant la transformation de JOUKOWSKI définie en (I-23) :

$$z_2 = z_1 + b^2 / z_1 = x_2 + iy_2 \quad \text{avec : } z_1 = x_1 + iy_1$$

les points transformés auront pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{b^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2} \\ y_2 = y_1 - \frac{b^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \end{cases} \quad (\text{I-28})$$

Les équations (I-25), (I-26), (I-27), donnent l'équation du profil de JOUKOWSKI à deux paramètres libres:

- l'angle β fixant la cambrure du profil,
- le rapport $b/(a \cdot \cos \beta)$ fixant l'épaisseur relatif.

La ligne moyenne est pratiquement circulaire, figure (I-3), et on démontre que le bord de fuite est un point de remboursement .

cas particulier

Lorsque l'angle $\beta = 0$ la cambrure est nulle et on obtient un profil symétrique figure(I-10-a), lorsque $b = a \cdot \cos\beta$, l'épaisseur du profil est nulle , l'intrados et l'extrados sont confondus avec la ligne moyenne (figure I-10-b).

La corde est alors égale à (4b) et la cambrure géométrique égale à :

$$\frac{|f_{\max}|}{L} = \frac{2|y_0|}{4b} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}|\beta|$$

Chapitre III

La méthode des singularités

1- INTRODUCTION

Dans l'étude des écoulements à potentiel, la méthode de singularité se révèle particulièrement féconde et efficace pour résoudre une grande variété de problème aux limites.

La méthode consiste à remplacer le contour des profils par répartition décritisée de singularités permettant de reproduire le champ perturbé. La densité de ces répartitions est déterminée par des conditions aux limites, en des points de contrôle correctement répartis sur le contour des profils. La non unicité des singularités utilisables confère à la méthode, une souplesse remarquable pour résoudre une grande variété de problèmes aux limites.

2- PRINCIPE DE LA METHODE

La méthode consiste à :

1. décrire le profil en k segments qu'on appellera « panneaux ». Les points de contrôle où s'applique la condition de glissement sont pris au milieu de chaque panneau constituant le profil et se calculent ainsi de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i = \frac{x_{j+1} + x_j}{2} \\ y_i = \frac{y_{j+1} + y_j}{2} \\ \text{tg} \delta_i = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} \end{array} \right.$$

2. charger les panneaux par des singularités d'une manière dépendant du profil que l'on veut analyser (profil portant ou non) ;
3. en chaque point de contrôle, calculer le potentiel de vitesse globale qui s'obtient par superposition du potentiel de vitesse ϕ induit par tous les panneaux et du potentiel de vitesse de l'écoulement uniforme.

On aura :

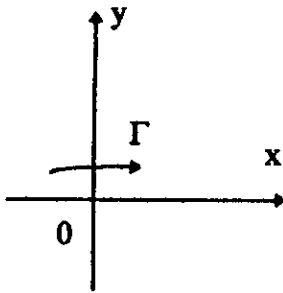
$$\phi = \sum \Delta\phi + \phi_{\text{éct unif}} \quad (\text{II-1})$$

4. imposer à partir de la condition (II-1) que la vitesse normale au point de contrôle soit nulle, cette condition provient du fait que les particules ne pénètrent pas dans le profil, et qu'à ses frontières la vitesse de ces particules est tangentielle, ce qui permet d'obtenir autant de conditions que de charges de singularités, donc un système d'équations linéaires.
5. appliquer une méthode numérique pour résoudre le système linéaire et trouver les singularités.

6. calculer les différents paramètres de l'écoulement ; le potentiel de vitesse, la pression, la portance,...

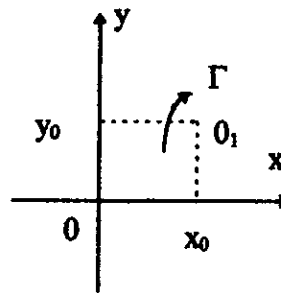
4- APPLICATION A UN PROFIL ISOLE

Si l'on dispose au centre du repère un vortex d'intensité Γ , le potentiel complexe $F(Z)$ et la vitesse complexe conjuguée V' sont accessibles par les relation classiques :



$$F(Z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln Z$$

$$V' = \frac{dF}{dt} = U - iV = \frac{i\Gamma}{2\pi Z}$$

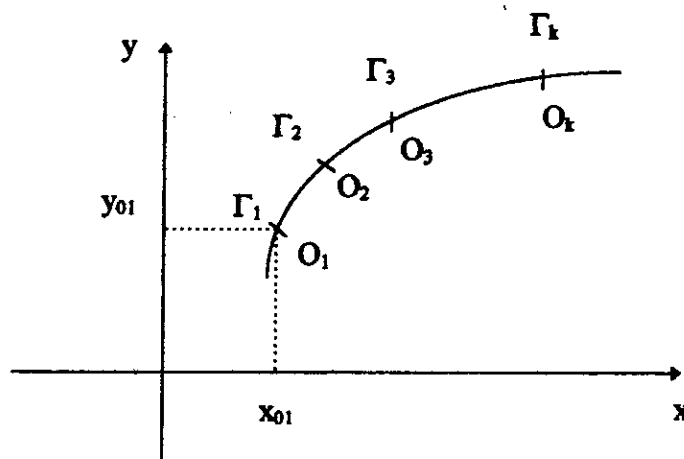


$$F(Z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(Z - Z_0)$$

$$V' = \frac{dF}{dt} = U - iV = \frac{i\Gamma}{2\pi[(x - x_0) + i(y - y_0)]}$$

En écoulement plan, on peut créer une nappe tourbillonnaire en distribuant de manière discrète une succession de vortex sur une courbe quelconque (C). Ces vortex d'intensités différentes a priori, sont ici en nombre fini et sont centrés aux points O_1, O_2, O_3, \dots d'affixe Z_1, Z_2, Z_3, \dots

La courbe (C) est supposée connue par son équation $y = h(x)$, ces vortex sont appliquée aux points de contrôle de chaque panneau.



(Fig II-2) Création d'une nappe tourbillonnaire.

Pour ces vortex, le potentiel complexe est obtenu par superposition :

$$F(z) = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^k \Gamma_j \ln(z - z_{0j}) \quad (\text{II-2})$$

On accède à la vitesse complexe conjuguée V par les relations classiques :

$$V' = \frac{dF}{dz} = U - iV = F'(z) = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^k \frac{\Gamma_j}{(z - z_{0j})} \pm \frac{\Gamma_m}{2 \cdot \Delta S} \exp(-i \cdot \delta) \quad (\text{II-3})$$

avec :

- $\frac{\Gamma_m}{2 \cdot \Delta S} \exp(-i \cdot \delta)$: représente l'influence du tourbillon sur lui même ;

- $\Gamma_m = \frac{\Gamma_j + \Gamma_{j+1}}{2}$

(II-4)

- $\Delta S = \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}$

* Expression du champ de vitesse

Le champ de vitesse autour du profil peut être modélisé par la superposition de l'ensemble des singularités et d'un écoulement plan uniforme de direction α_0 et du module V_0 à l'infini amont. La vitesse V en tout point du plan sera définie par le système suivant :

$$V = \begin{cases} u = V_0 \cos \alpha_0 + \text{Re}(V') = V_0 \cos \alpha_0 + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^k \frac{\Gamma_j (y - y_{0j})}{(x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2} \pm \frac{\Gamma_m}{2 \Delta S} \cos \delta \\ v = V_0 \sin \alpha_0 - \text{Im}(V') = V_0 \sin \alpha_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^k \frac{\Gamma_j (x - x_{0j})}{(x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2} \pm \frac{\Gamma_m}{2 \Delta S} \sin \delta \end{cases} \quad (\text{II-5})$$

Condition de glissement

La distribution des vortex doit répondre aux conditions limite traduisant le glissement du fluide à la surface du profil d'équation $y = h(x)$:

$$\frac{dh}{dx} = \text{tg} \delta(x, y) = \frac{v(x, h(x))}{u(x, h(x))} \quad (\text{II-6})$$

remplaçant u et v par leurs valeurs dans (II-5) on trouve :

$$\operatorname{tg}\delta(x, y) = \frac{V_0 \sin \alpha_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^k \frac{\Gamma_j (x - x_{0j})}{(x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2} \pm \frac{\Gamma_m}{2\Delta S} \sin \delta}{V_0 \cos \alpha_0 + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^k \frac{\Gamma_j (y - y_{0j})}{(x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2} \pm \frac{\Gamma_m}{2\Delta S} \cos \delta} \quad (\text{II-7})$$

En développant cette dernière équation et en posant :

$$\begin{cases} f_x(i, j) = \frac{y - y_{0j}}{(x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2} \\ f_y(i, j) = \frac{x - x_{0j}}{(x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2} \end{cases} \quad (\text{II-8})$$

on trouve :

$$\left[\operatorname{tg}\delta_i F_x(i, j) + F_y(i, j) \right] \Gamma_j = 2\pi V_0 \left[\sin \alpha_0 - \operatorname{tg}\delta_i \cos \alpha_0 \right] \quad (\text{II-9-a})$$

ou bien :

$$A_{ij} \Gamma_j = B_i \quad (\text{II-9-b})$$

$$\begin{cases} A_{ij} = \operatorname{tg}\delta_i F_x(i, j) + F_y(i, j), & 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k \\ B_i = 2\pi V_0 \left[\sin \alpha_0 - \operatorname{tg}\delta_i \cos \alpha_0 \right] \end{cases}$$

Les fonctions $F_x(i, j)$ et $F_y(i, j)$ sont appelées fonction d'influence du segment porteur du tourbillon Γ_j .

* Condition de KUTTA-JOUKOWSKI

La condition de Kutta Joukowski se traduit par l'identité du module de la vitesse au bord de fuite. Soient V_{ex} et V_{in} les modules des vitesses respectivement côté extrados et intrados. La condition de Kutta Joukowski s'écrit alors :

$$V_{ex} = V_{in} \quad (\text{II-10})$$

d'autre part, on a :

$$\begin{cases} U_{ex} = V_{ex} \cos \delta_{ex} \\ U_{in} = V_{in} \cos \delta_{in} \end{cases} \quad (\text{II-11})$$

donc on aura :

$$U_{ex} \cos \delta_{in} = U_{in} \cos \delta_{ex} \quad (\text{II-12})$$

En remplaçant U_{ex} et U_{in} par leur valeur, on obtient :

$$\cos \delta_{in} \left[V_0 \cos(\alpha_0) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^k f_{x_{in,j}} \cdot \Gamma_j + \frac{\Gamma_m}{2\Delta S_{ex}} \cos \delta_{ex} \right] = \cos \delta_{ex} \left[V_0 \cos(\alpha_0) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^k f_{x_{ex,j}} \cdot \Gamma_j - \frac{\Gamma_m}{2\Delta S_{in}} \cos \delta_{in} \right]$$

avec :

$$\Gamma_{\text{ex}} = \frac{\Gamma_n + \Gamma_{n-1}}{2}, \quad \Gamma_{\text{in}} = \frac{\Gamma_n + \Gamma_k}{2}$$

$$\Delta S_{\text{ex}} = \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2}, \quad \Delta S_{\text{in}} = \sqrt{(x_n - x_k)^2 + (y_n - y_k)^2}$$

$$f_{x_{\text{ex}},j} = \frac{y_n - y_j}{(x_n - x_j)^2 + (y_n - y_j)^2}, \quad f_{x_{\text{in}},j} = \frac{y_k - y_j}{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}$$

soit après développement :

$$\begin{cases} A_{k+1,j} = \cos \delta_m f_{x_{\text{ex}},j} - \cos \delta_{\alpha} f_{x_{\text{in}},j}, & 1 \leq j \leq k \\ A_{k+1,n-1} = A_{k,n-1} + \frac{\pi}{2\Delta S_{\text{ex}}} \cos \delta_{\alpha} \cos \delta_m \\ A_{k+1,n} = A_{k,n} + \left(\frac{1}{2\Delta S_{\text{ex}}} + \frac{1}{2\Delta S_{\text{in}}} \right) \pi \cos \delta_{\alpha} \cos \delta_m \\ A_{k+1,k} = A_{k,k} + \frac{\pi}{2\Delta S_{\text{in}}} \cos \delta_{\alpha} - \cos \delta_m \\ B_{k+1} = 2\pi V_0 \cos \alpha_0 [\cos \delta_{\alpha} - \cos \delta_m] \end{cases}$$

En appliquant la condition de KUTTA-JOUKOWSKI en (k) point, on accédera à un système de (k+1) équations à (k) inconnues Γ_k donc un système surdéterminé dont la résolution se fait par la méthode des moindres carrés.

Une fois l'ensemble des tourbillons déterminés, on calcule le champ des vitesses en utilisant les équations (II-5).

Le champ de pression sera déterminé par application de la relation de BERNOULLI entre l'infini amont et un point du profil.

$$P_0 + 0.5 \rho V_0^2 = P + 0.5 \rho V^2$$

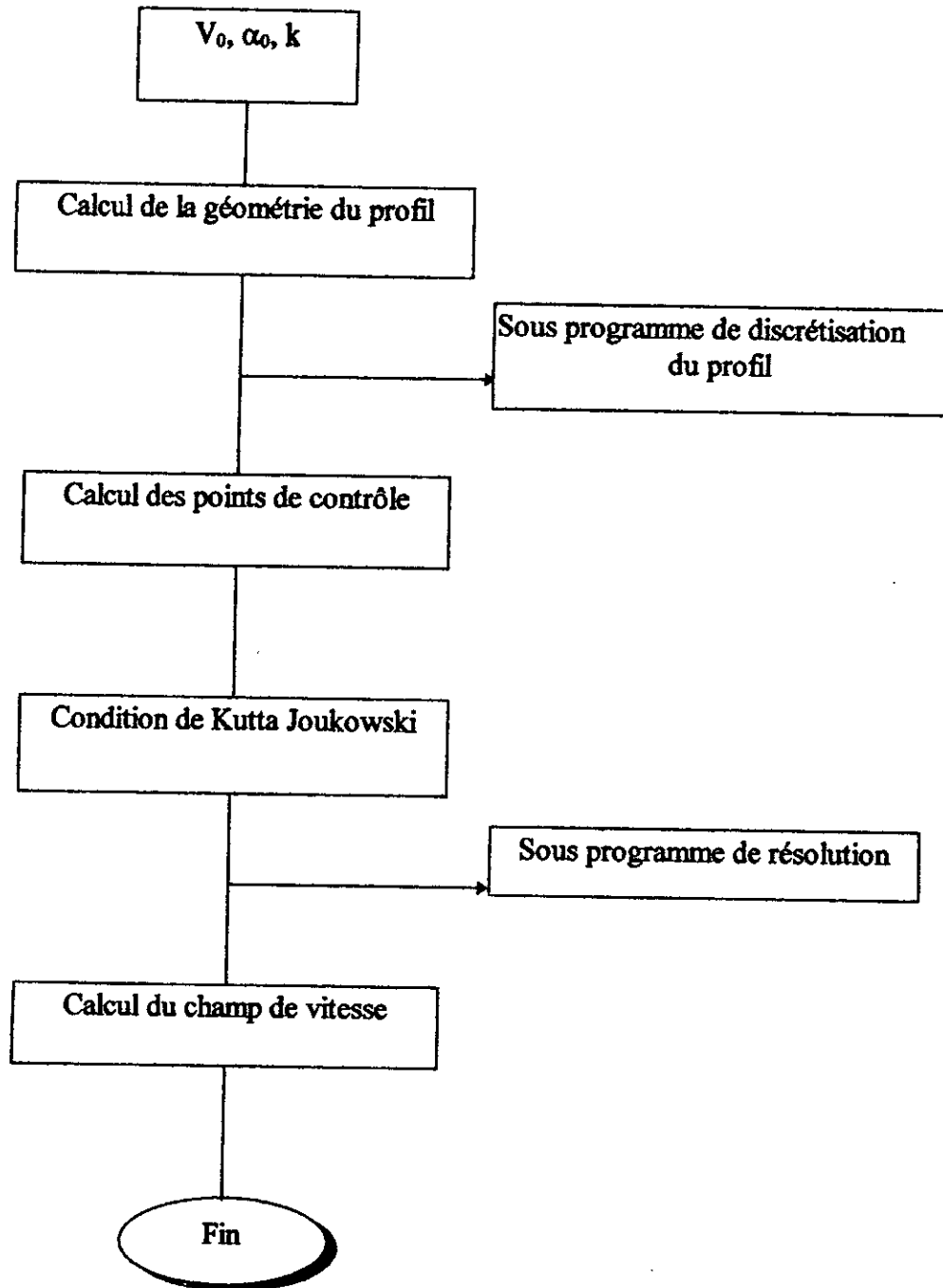
d'où :

$$P = P_0 + 0.5 \rho (V_0^2 - V^2)$$

d'où le coefficient de pression :

$$C_p = \frac{P - P_0}{\frac{1}{2} \rho V_0^2}$$

ORGANIGRAMME DU CALCUL



Chapitre III

Une présentation de la M.E.f

1. INTRODUCTION

La méthode des éléments finis MEF est très utilisée vu les avantages qu'elle présente: précision, formulation simple, domaine d'utilisation très vaste et l'existence des logiciels adéquats.

La MEF est connue comme un outil de résolution d'équation aux dérivées partielles, son domaine d'utilisation est assez vaste et concerne pratiquement tous les problèmes physiques régis par des équations aux dérivées partielles.

On cite à titre d'exemple:

- L'aéronautique et l'aérospatial: satellites et avions,...
- Mécanique: dimensionnement précis des pièces, transfert de chaleur, ...
- Hydraulique: problème d'écoulement, barrages, ...
- Électricité: problème de champs électrique et magnétique,...

En mécanique des structures, il y a plusieurs sortes de formulation d'éléments finis:

a. Version déplacement (la plus utilisée)

Elle a pour principe la stationnarité de l'énergie potentielle Π de la structure (elle atteint un minimum).

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}' \{\sigma\} dv - \int_V \{u\}' \{f_r\} dv - \int_S \{u_s\}' \{f_s\} ds \quad (\text{III-1})$$

La discrétisation en éléments finis du domaine $[V]$ et de son contour $[S]$ ramène l'équation de stationnarité de Π à un système classique qui peut se mettre sous la forme:

$$[K]\{U\} = \{F\}$$

où $[K]$ est la matrice de rigidité.

B. Version contrainte

On utilise la stationnarité de l'énergie complémentaire Π^* (elle atteint un maximum):

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}' \{\epsilon\} dv - \int_V \{f_v\}' \{u\} dv - \int_S \{f_s\}' \{u_s\} ds \quad (\text{III-2})$$

c. Version mixte

Dans laquelle on définit la solution en termes d'approximation du champ indépendant généralement du champ du déplacement et celui des contraintes. Dans ce cas on utilise la formulation par l'énergie augmentée Π_1 .

$$\Pi_1 = \Pi + \int_V \{\lambda_\sigma\}' [\{\epsilon\} - [B]\{u\}] dv - \int_S \{\lambda_u\}' [\{u_s\} - \{u_{2mp}\}] ds \quad (\text{III-3})$$

$\{\lambda_\sigma\}$: multiplicateur représentant $\{\epsilon\}$.

$\{\lambda_u\}$: multiplicateur représentant $\{u_s\}$.

2. DETERMINATION DE LA RIGIDITE ELEMENTAIRE

Pour calculer la matrice de rigidité d'un élément donné, on suit les étapes suivantes (version déplacement):

a/Construction des fonction d'interpolations N

Dans la version déplacement, la matrice de construction des fonctions d'interpolations (qui sont au fait une solution essai, particulière de l'EDP) suit la procédure suivante :

- Choix de la base polynomiale (interpolation non nodale du type polynomiale).

$$U = \langle P(x,y,z) \rangle \{a\} \quad (\text{III-4})$$

où $P(x,y,z)$ base polynomiale.

- Relation entre variable modale (u_i) et variables généralisées (α)

$$\{u_i\} = [A] \{a\} \text{ où } [A] = [P(x_i, y_i, z_i)] \quad (\text{III-5})$$

Si l'élément n'est pas généré (volume nul) alors:

$\{a\} = [A]^{-1} \{u_i\}$ numériquement on évite l'inversion de $[A]$.

L'approximation modale sera alors :

$$\{u\} = \langle P(x,y,z) \rangle [A]^{-1} \{u_i\} \quad (\text{III-6})$$

donc:

$$\{u\} = [N(x,y,z)] \{u_i\} \quad (\text{III-7})$$

$$[N] = \langle P \rangle [A]^{-1}$$

Cette fonction d'interpolation doit vérifier les conditions:

$$1- N_j(x_i, y_i, z_i) = \delta_{ij}$$

$$2- \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) = 1 \quad (\text{III-8})$$

$$3- \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) L(x_i, y_i, z_i) = L(x, y, z), L: \text{polynôme quelconque.}$$

b/Relation déplacement -déformation

La déformation dans le cas tridimensionnel linéaire s'écrit sous la forme:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad \text{(III-9)}$$

$\{\varepsilon\} = [L]\{u\}$ où $[L]$ opérateur de dérivation.
or avec III-6 on peut écrire:

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{u_i\} \quad \text{(III-10)}$$

$$\{\varepsilon\} = [B(x,y,z)]\{u_i\} \quad \text{(III-11)}$$

c/ Relation contrainte-déformation

Pour un matériau isotrope homogène, on applique la loi de HOOKE généralisée (cas bidimensionnel)

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad \text{(III-12)}$$

où $[D]$ est fonction du matériau seulement.

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\alpha\nu)}{(1+\alpha)(1-\nu-\alpha\nu)} & \frac{\nu E(1-\alpha\nu)}{(1+\nu)(1-\nu-\alpha\nu)} & 0 \\ \frac{\nu E(1-\alpha\nu)}{(1+\alpha)(1-\alpha-\alpha\nu)} & \frac{E(1+\alpha\nu)}{(1+\nu)(1-\nu-\alpha\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad \text{(III-13-a)}$$

E: Module de YOUNG.

ν : Coefficient de Poisson.

α : $\begin{cases} = 1 \text{ dé formation plane} \\ = 0 \text{ contrainte plane} \end{cases}$

Pour un matériau composite (matériau anisotrope) la matrice $[D]$ est donnée par:

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E_t}{1-\nu_h\nu_d} & \frac{\nu_d E_t}{1-\nu_h\nu_d} & 0 \\ \frac{\nu_h E_t}{1-\nu_h\nu_d} & \frac{E_t}{1-\nu_h\nu_d} & 0 \\ 0 & 0 & G_x \end{bmatrix} \quad \text{(III-13-b)}$$

E_l : Module de YOUNG dans le sens long.
 E_t : Module de YOUNG dans le sens travers.
 ν_{lt} et ν_{tl} : Les coefficients de Poisson.
 G_{lt} : Module de glissement dans le plan (l, t).

avec:

$$\nu_{lt}/E_l = \nu_{tl}/E_t$$

Ainsi à partir des relations (III-11), (III-13) on peut écrire:

$$[K_e] = \int_V [B]^T [D] [B] dv \quad (\text{III-14})$$

- La matrice $[K]$ est symétrique à cause du théorème de réciprocité qui est une conséquence de l'invariance de l'énergie de déformation par rapport au chemin suivi.

- Néanmoins le calcul de cette intégrale peut s'avérer fastidieux, on utilise généralement l'intégration numérique de GAUSS.

3- DETERMINATION DU VECTEUR FORCE ELEMENTAIRE

Le vecteur force élémentaire se trouvant dans le second membre de l'EDP à pour expression :

$$\{f_e\} = \int_V [N]^T \{f_v\} dv + \int_S [N]^T \{f_s\} ds \quad \text{III-15}$$

force de volume + force de surface

4- ASSEMBLAGE

L'opération d'assemblage consiste à construire à partir des matrices élémentaires de rigidité $[K_e]$ et de forces $\{f_e\}$, les matrices globales $[K]$ et $[F]$.

Si nous reprenons l'expression de l'énergie (III-1) avec l'expression intégrale de $[K_e]$ et $\{f_e\}$ (III-14) et (III-15), on peut écrire:

$$\Pi_e = 1/2(u)^T [K_e](u) - (u)^T (f_e) \quad (\text{III-16})$$

L'énergie totale de la structure étant égale à la somme des énergies élémentaires:

$$\Pi = \sum_{e=1}^{nel} \Pi_e = \sum_{e=1}^{nel} \frac{1}{2}(u)^T [K_e](u) - (u)^T (f_e) = \frac{1}{2}(u)^T [K](u) - (u)^T (F) \quad (\text{III-17})$$

$$\{u\} = \sum_{e=1}^{nel} \{u\} \quad \text{Vecteur déplacement total (global).}$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{nel} \{f_e\} \quad \text{Vecteur force global.}$$

$$[K] = \sum_{e=1}^{nel} [K_e] \quad \text{matrice de rigidité global.}$$

Ainsi l'équation exprimant la structure la statique de la structure sera:

$$[K] \{U\} = (F) \quad (III-18)$$

5- CONDITION DE CONVERGENCE ET PRECISION DE LA MEF

a/ L'erreurs dans la MEF

Pratiquement l'erreur est donnée par le corollaire suivant:

$$\|e\| \leq ch^{k+1-m} \|u_{ex}\| \quad (III-19)$$

où :

c : coefficient indépendant de l'élément.

h : taille de l'élément.

k : degré du polynôme d'interpolation.

m: ordre des dérivées apparaissant dans l'expression des variables modales (déplacement, rotation, gauchissement, ...etc.).

si m =1 problème de classe c^0 , où les variables nodales sont indépendantes .

Exemple : problème d'élasticité, conduction...

si m =2 problème de classe c^1 , où certaines variables nodales sont fonctions d'autres.

Exemple : flexion des plaques, coques, ...

b/ Précision

Pour améliorer la précision de la méthode nous pouvons soit:

- Diminuer la taille de l'élément (h plus petit), ce qui a pour conséquence l'augmentation du nombre d'élément pour décrire la structure.

- Augmenter le degré du polynôme d'interpolation par:

* augmentation du nombre de noeuds de l'élément (interpolation de LAGRANGE).

* augmentation du nombre de variables modales pour chaque noeuds en conservant le nombre de noeuds de l'élément (interpolation d'HERMITE).

c/Convergence

Problème de classe $c^0/(c^1)$ m=1 (/m = 2)

C1: Continuité du champ de déplacement et de sa première (ou sa seconde) dérivée à l'intérieur de l'élément.

C2: Continuité du champ de déplacement et de sa première dérivée à la frontière entre éléments.

C3: Le champ de déplacement doit pouvoir présenter un état de déformation constant, de plus ce champ doit donner lieu à des déformations lorsque ce dernier ne correspond pas à un mouvement du corps rigide .

- C1 et C2 représentent le critère de compatibilité ou de conformité mais elles ne sont pas nécessaires.
- C3 reste nécessaire (du point de vue numérique). Elle exprime le fait qu'une déformation de l'élément, sous un chargement, ne peut substituer sans application de conditions aux limites, et la représentativité du mouvement de corps rigide avec une déformation nulle à l'intérieure de l'élément.
- Par sa formulation, l'élément doit présenter une translation ou une rotation pure c'est le critère de complétude.

6. APPLICATION A UN PROFIL D'AILE

Au début de cette étude, nous avons opté pour la décritisation du profil de l'aile en élément plan, cette décritisation convient très bien à la géométrie du profil. Cet élément est utilisé souvent sous sa forme isoparamétrique, et comporte huit noeuds (figure-III.1).

Les coordonnées des noeuds sont données dans le tableau (III.1), et les fonctions de forme, ainsi que leurs dérivées $\partial N_i / \partial \xi$ et $\partial N_i / \partial \eta$ sont données dans le tableau -III.2.

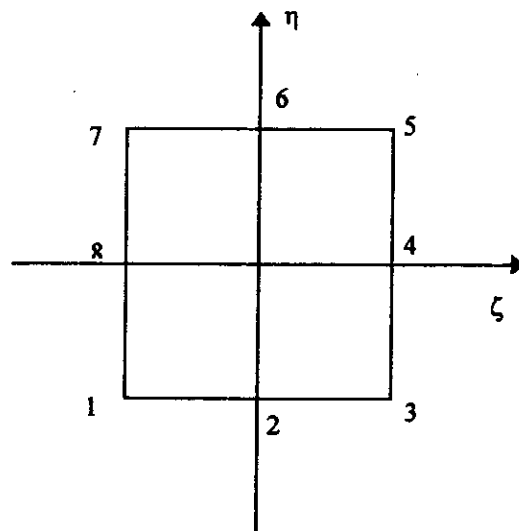


figure-III.1 : Élément de référence.

tableau-III.1

Noeud i	1	2	3	4	5	6	7	8
ξ	-1	0	1	1	1	0	-1	-1
η	-1	-1	-1	0	1	1	1	0

tableau-III.2

Noeud i	{N}	{∂N/∂ξ}	{∂N/∂η}
1	$-1/4(1-\xi)(1-\eta)(1+\eta+\xi)$	$1/4(1-\eta)(2\xi+\eta)$	$1/4(1-\xi)(\xi+2\eta)$
2	$1/2(1-\xi^2)(1-\eta)$	$-(1-\eta)\xi$	$-1/2(1-\xi^2)$
3	$-1/4(1+\xi)(1-\eta)(1+\eta-\xi)$	$1/4(1-\eta)(2\xi-\eta)$	$-1/4(1+\eta)(\xi-2\eta)$
4	$1/2(1+\xi)(1-\eta^2)$	$1/2(1-\eta^2)$	$-(1+\xi)\eta$
5	$-1/4(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta-\xi)$	$1/4(1+\eta)(2\xi+\eta)$	$1/4(1+\xi)(\xi+2\eta)$
6	$1/2(1-\xi^2)(1+\eta)$	$-(1+\eta)\xi$	$1/2(1-\xi^2)$
7	$-1/4(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta+\xi)$	$1/4(1+\eta)(2\xi-\eta)$	$-1/4(1-\xi)(\xi-2\eta)$
8	$1/2(1-\xi)(1-\eta^2)$	$-1/2(1-\eta^2)$	$-(1-\xi)\eta$

6.1 Construction des matrices élémentaires

La construction des matrices élémentaires nécessite l'intégration des fonctions complexes sur des domaines géométriquement complexes.

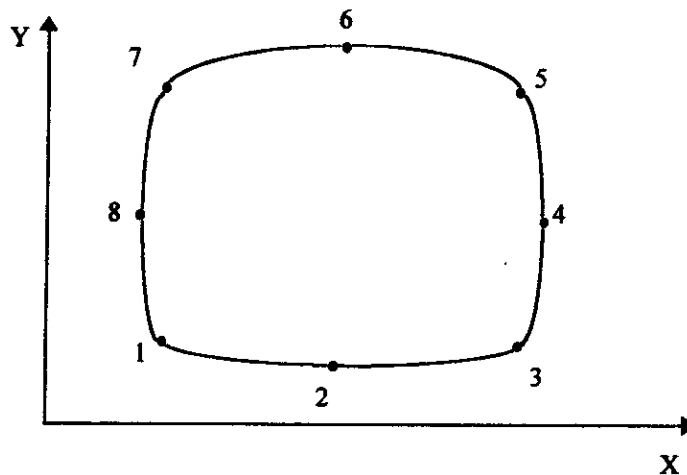


figure-III.2: Élément réel

Dans la majorité des applications ces intégrales sont calculées numériquement, de plus les fonction d'interpolation [N] ainsi que leurs dérivées intervenant dans ce calcul sont définies sur l'élément de référence. Ceci nous oblige à définir une transformation bijective entre l'élément réel et l'élément référence.

Matrice JACCOBIENNE

Pour une fonction f quelconque on sait que :

$$\frac{df}{d\xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{III.20}$$

Les dérivées par rapport à ξ et η s'écrivent donc en fonction des dérivées par rapport à X et Y comme suit :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

On pose :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

La matrice $[J]$ est appelée matrice JACCOBIENNE.

Mais en pratique on n'utilise que l'inverse de $[J]$ noté $[J]^{-1}$ car on cherche à exprimer les dérivées en X et Y (élément réel) à partir de ceux par rapport à ξ et η (élément de référence).

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

Le changement de variables précédent permet le passage de l'intégration d'une fonction f sur l'élément réel à une intégration plus simple sur l'élément de référence.

$$\int_{ve} f(x) dx dy = \int_{vr} f(x(\xi)) \det J d\xi d\eta \quad (\text{III.24})$$

det J : étant le déterminant de la matrice JACCOBIENNE $[J]$

Intégration des matrices élémentaires

L'expressions de la matrice élémentaire de l'élément quadrilatéral à huit noeuds d'après l'équation III.14 devient :

$$[K] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^t [D] [B] \det J d\xi d\eta \quad (\text{III.25})$$

De même pour la matrice $[M]$ (matrice masse)

$$[M] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^t \rho [N] \det J d\xi d\eta \quad (\text{III.26})$$

Ces intégrales sont difficiles à calculer explicitement, alors on utilise une intégration numérique (méthode de GAUSS) qui dans le cas général s'écrit :

$$\int_{-1}^1 f(r) dr = \sum_{i=1}^k w_i f(r_i) \quad (III.27)$$

k : nombre des points de GAUSS .
 w_i : poids des points de GAUSS.

On pose :

$$F(\xi, \eta) = [B]^t [D] [B] \det J \quad (III.28)$$

alors [K] devient :

$$[K] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (III.29)$$

Si on intègre tous d'abord par rapport à ξ , en suite par rapport à η , et en utilisant la relation III.26 on obtient alors:

$$[K] = \int_{-1}^1 \left[\sum_i w_i F(\xi, \eta) \right] = \sum_j w_j \sum_i w_i F(\xi_i, \eta_i)$$

d'où :

$$[K] = \sum_i \sum_j w_i w_j F(\xi_i, \eta_i) \quad (III.30)$$

6.2 Modélisation des charges

Dans l'application de la M.E.F. et dans le cas des structures élastiques, les charges appliquées à la structure sont données par:

$$\{q\} = \iiint [N]^t f_v dV + \iint [N]^t f_s dS \quad (III.31)$$

f_v : charge par unité de volume.

f_s : charge par unité de surface.

[N]: fonction de forme.

Ces intégrales sont calculées sur l'élément réel, il faut donc les transformer en intégrale sur l'élément de référence. L'équation (III.30) comprend deux charges :

- **Charge volumétrique:**

En passant de l'intégration sur l'élément réel à l'intégration sur l'élément de référence, les charges s'écrivent:

$$\{q\} = \iiint [N]^t f_v \det J \quad (III.32)$$

On voit donc que le calcul de {q_v} est presque identique à celui de [M] pour le cas du profil d'aile étudié, la force volumétrique qui entre en jeu et le poids : f_v = -ρ.

Donc:

$$\{q\} = \int_V [N]^t \rho dV \quad (III.33)$$

- Charge surfacique

Pour les charges surfaciques, on a choisi à prendre les résultats de distributions de pression le long du profil déterminé par la méthode de singularité.

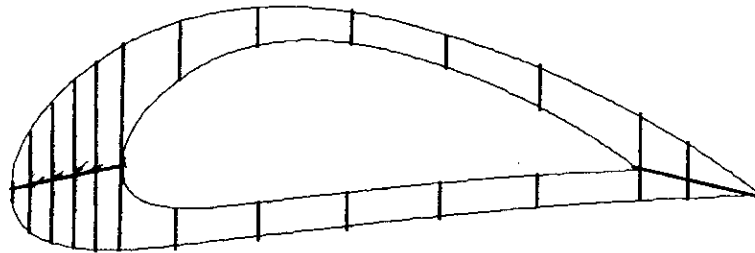
Pour notre application on n'a considéré un vol à Mach 0.3, et à une altitude de 10000 mètres, ceci donne :

$$\rho_{\infty} = 0.4127 \text{ Kg /m}^3 ; V_{\infty} = 90\text{m/s.}$$

La répartition des charges pour trois angles d'incidences ($2^{\circ}, 8^{\circ}, 16^{\circ}$) pour un profil N.A.C.A.4412 est tirée de la référence [4].

6.3 Maillage de l'aube

Les problèmes d'espace mémoire, de temps d'exécution ainsi que l'indisponibilité de calculateurs ont limité notre choix du maillage. Pour notre cas nous avons opté pour le maillage suivant:



*26 Eléments ,
119 noeuds ,
238 degrés de liberté.*

Chapitre IV

La méthode des éléments finis en dynamique

1- INTRODUCTION

De nombreux problèmes d'analyse des structures peuvent être traités par les méthodes d'analyse statique. Cependant, il existe également de nombreux cas où on ne peut négliger les forces d'inertie et d'amortissement résultant de la variation des forces appliquées; citons à titre d'exemple, la réponse d'un avion à une rafale .

On utilisera alors la méthode d'analyse dynamique qui est l'objet du chapitre suivant.

2- PRINCIPE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS EN DYNAMIQUE

On va exposer ici la méthode la plus utilisée en dynamique des structures. Cette méthode, basée sur une description spatiale par éléments finis de type déplacement, permet l'étude du comportement dynamique d'une structure par la connaissance des déplacements aux noeuds en fonction du temps.

Nous allons considérer successivement :

- La discrétisation spatiale du domaine en éléments finis.
- La formulation au niveau de l'élément .
- La formulation globale après assemblage .

3- DESCRITISATION SPATIALE

Cette phase consiste à découper la structure (domaine V) en éléments finis sous domaine (V_e) de formes géométriques simples.

Les formes d'approximation des déplacements, définies dans chaque élément en dynamique sont tout à fait analogues à celle de le M-E-F en statique; soit :

$$\{U(x,y,z,t)\}^e = [P(x,y,z)]^e \{a(t)\}^e \quad \forall M \in V^e \text{ (élément } e)$$

En statique, on ramène le problème continu à la résolution d'un système d'équations linéaires à N inconnues, alors qu'en dynamique on aboutit à la résolution d'un système d'équations différentielles du second ordre à N fonctions inconnues du temps .

4- FORMULATION ELEMENTAIRE

On rappelle l'expression de l'énergie potentielle totale en fonction des déplacements aux noeuds de l'écoulement , soit:

$$\Pi^e = 1/2 \{U^e(t)\}^t [K^e] \{U^e(t)\} - \{U^e(t)\}^t \{F^e\}$$

avec :

$$[K^e] = \int_{V_e} [B]^t [D] [B] dV$$

$$\{F^e\} = \int_{V_e} [N]^t \{f_v\} dV + \int_{S_e} [N]^t \{f_s\} dS$$

En ce qui concerne l'énergie cinétique de l'élément, on a :

$$E_c^e = \int_{V_e} \rho \{\dot{U}^e(t)\}' \{\dot{U}^e(t)\} dV$$

avec : $[M] = \int_{V_e} \rho [N^e]' [N] dV$ Matrice de masse cohérente de l'élément (e)

5. FORMULATION GLOBALE

La formulation globale du problème consiste à obtenir des équations du mouvement à partir de l'expression des énergies cinétique et potentielle en fonction des vitesses et de déplacement aux noeuds de la structure .

L'énergie potentielle totale étant égale à la somme des énergies élémentaires:

$$\Pi = \sum_{e=1}^{ne} \Pi_e = \sum_{e=1}^{ne} (1/2 \{U(t)\}' [K^e] \{U(t)\} - \{U(t)\} \{F^e(t)\}) = 1/2 \{U(t)\}' [K] \{U(t)\} - \{U(t)\} \{F\}$$

$$\{u(t)\} = \sum_{e=1}^{ne} \{U^e(t)\} \quad \text{vecteur déplacement global}$$

$$\{f(t)\} = \sum_{e=1}^{ne} \{F^e(t)\} \quad \text{vecteur force global}$$

$$[k] = \sum_{e=1}^{ne} [K^e] \quad \text{matrice rigidité globale}$$

L'énergie cinétique de la structure peut s'exprimer comme suite:

$$E_c = \sum_{e=1}^{ne} E_c^e = 1/2 \sum_{e=1}^{ne} \{\dot{U}(t)\}' [M^e] \{\dot{U}(t)\}$$

soit : $E_c = 1/2 \{\dot{U}(t)\}' [M] \{\dot{U}(t)\}$

avec : $[m] = \sum_{e=1}^{ne} [M^e]$ matrice cohérente de la structure .

On voit d'après l'expression matricielle ci-dessous que le schéma d'assemblage des matrices de masse est tout a fait identique à celui des matrices de rigidité élémentaires.

On effet :

$$U = 1/2 \{u(t)\}' [K] \{U(t)\}$$

Les équations de LAGRANGE permettant d'obtenir les équations discrètes du mouvement, soit pour une structure sans amortissement:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{U}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial U_i} + \frac{\partial U}{\partial U_i} = f_i$$

d'où l'écriture matricielle suivante:

$$[M] \{\ddot{U}(t)\} + [K] \{U(t)\} = \{F(t)\} \quad (IV-1)$$

6. METHODE D'ANALYSE MODALE

L'analyse dynamique d'une structure peut se ramener à la résolution d'un système d'équations différentielles du second ordre.

Deux approches fondamentales sont envisageables pour cette résolution :

L'une d'entre elles consiste à résoudre ce système différentiel par intégration directe, l'autre consiste à définir la solution dans la base des modes propres de vibration de la structure.

Cette méthode qui est appelée méthode de superposition modale est largement utilisée en analyse dynamique linéaire.

6.1. Méthode de superposition modale

Dans le cas de structure faiblement amortie, le plus fréquent pour de nombreux domaines d'applications, et en particulier des structures aérospatiales la méthode de superposition modale utilise les modes propres réels de la structure non amortie. On se ramène donc, dans ce cas, à l'étude des petites oscillations libres (analyse modale) de la structure non dissipatrice associée, c'est à dire à la résolution du problème aux valeurs propres générales :

$$[k]\{x\} = \omega^2 [m]\{x\} \quad (\text{IV-2})$$

avec: $[k]$:matrice de rigidité de structure
 $[m]$:matrice de masse de la structure.

Le système (IV-2), de dimension N, a N solutions propres x_i permettant de définir les déformées modales de la structure et N valeurs propres associées

$$\lambda_i = \omega_i^2$$

La difficulté principale de résolution du problème (IV -2) réside dans son ordre élevé.

6-1-1. Méthodes de résolution des problèmes aux valeurs propres

Deux stratégies de base peuvent être utilisées pour la résolution des problèmes aux valeurs propres de grande taille résultant de la modélisation par éléments finis .

La première classe de méthodes, dite méthode de Condensation, consiste à réduire la taille du problème initial tout en n'altérant pas son spectre basse fréquence.

La première méthode de condensation utilisée à été celle de la condensation statique des rigidités associée à l'utilisation de masses concentrées; au contraire, la méthode de condensation de GUYANE procède par condensation parallèle et cohérente de rigidité et de masse; c'est la méthode la plus utilisé.

La matrice de masse résultante d'une condensation de GUYANE étant pleine, on a souvent recours a certaines méthodes permettant de ramener le problème aux valeurs propres condensé à une forme standard.

On procède à la résolution de ce problème aux valeurs propres en mémoire centrale en utilisant des méthodes classiques.

Parmi les méthodes de transformation usuelles citons celle de JACCOBIE de GIVENS ou de HOUSHOLDER .

La deuxième stratégie envisageable pour la résolution du problème aux valeurs propres initiales de grande taille, correspondant a une organisation dominante hors mémoire centrale .

Si l'on dispose pas de possibilité de résolution de grands systèmes linéaires hors mémoire centrale ,la seule méthode envisageable est celle de la minimisation du quotient de RAYLEIGH définie par:

$$R(Y) = \frac{U(y)}{E_c(y)} = \frac{y'ky}{y'my} \quad (\text{Quotient de RAYLEIGH du mode de déplacement } Y)$$

Cette méthode est simple pour la mise en oeuvre, mais très peu performante comparée aux méthodes suivantes .

La plupart des méthodes sont basées sur l'utilisation répétée d'un module de résolution de systèmes linéaires à organisation hors mémoire centrale et avec possibilité de cas de charge multiples.

L'une de ces méthodes est basée sur la propriété des suites de STRUM, elle consiste à évaluer directement les racines de l'équation : $\det(k-\omega m) = 0$ dans une bande de fréquence prescrite.

La deuxième méthode, dite d'itération inverse peut être considérée comme une variante hors mémoire centrale de la méthode classique d'itération. Dans cette méthode, la valeur propre la plus basse et le vecteur propre associé sont obtenues en itérant sur un vecteur de départ en résolvant un système linéaire à chaque itération.

La méthode d'itération inverse sur sous-espace ou sa variante, la méthode d'itération simultanée est basée sur des itérations inverses effectuées en parallèle sur un groupe de vecteurs de départ. Ceci permet la définition d'un problème aux valeurs propres d'itération qui permet la séparation des solutions propres et dont la résolution peut se faire en mémoire centrale en utilisant une des méthodes classiques de transformation .

La dernière méthode dite de LANCZO-GRANDELL est basée sur la transformation du problème aux valeurs propres initiales en un problème de dimension réduite sous forme standard avec une matrice tridiagonale .

Les différentes stratégies envisageables pour la résolution des problèmes d'analyse modale sont récapitulées dans le synoptique de la figure (IV -1)

6-1-2 Principe de la méthode de superposition modale

Nous allons présenter le principe de la méthode de Superposition modale dans le cas des structures faiblement amorties dont l'amortissement est présenté par amortissement visqueux équivalent.

Le système d'équations du mouvement correspondant au modèle initial, s'écrit:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} \quad (IV-3)$$

avec: [C] matrice d'amortissement visqueux correspondant aux D.D.L physique {u} .

Exprimons le mouvement de la structure dans la base des modes propres réels par la résolution du problème homogène : $\omega^2[m]\{x\} = [k]\{x\}$

Soit les valeurs et les vecteurs propres associés :

$$\lambda_1 = \omega_1^2, \quad \lambda_2 = \omega_2^2, \dots, \quad \lambda_n = \omega_n^2$$

$$\{X^{(1)}\}, \quad \{X^{(2)}\}, \dots, \quad \{X^{(n)}\}$$

En utilisant la base modale tronquée ($m < n$), on a l'expression fondamentale suivante:

$$\{u\} = \sum_{i=1}^m \{X^{(i)}\} \eta_i(t) = [\Phi]\{\eta\} \quad (IV-4)$$

$$\text{avec: } \{\eta\} = \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \vdots \\ \eta_m(t) \end{Bmatrix} \quad \text{vecteur des coordonnées modales .}$$

$$[\Phi] = [X^{(1)}, \dots, X^{(m)}] \quad \text{matrice modale tronquée .}$$

En outre, on rappelle que la transformation (IV-4) diagonalise les matrices de masse et de rigidité, on a en effet, les propriétés d'orthogonalité des modes :

$$[\Phi]^t [M] [\Phi] = [m] \quad \text{matrice diagonale (m x m) des masses généralisées .}$$

$$[\Phi]^t [K] [\Phi] = [k] \quad \text{matrice diagonale (m x m) des rigidités généralisées .}$$

On rappelle que pour le mode i on a la relation :

$$k_i = m_i \omega_i^2$$

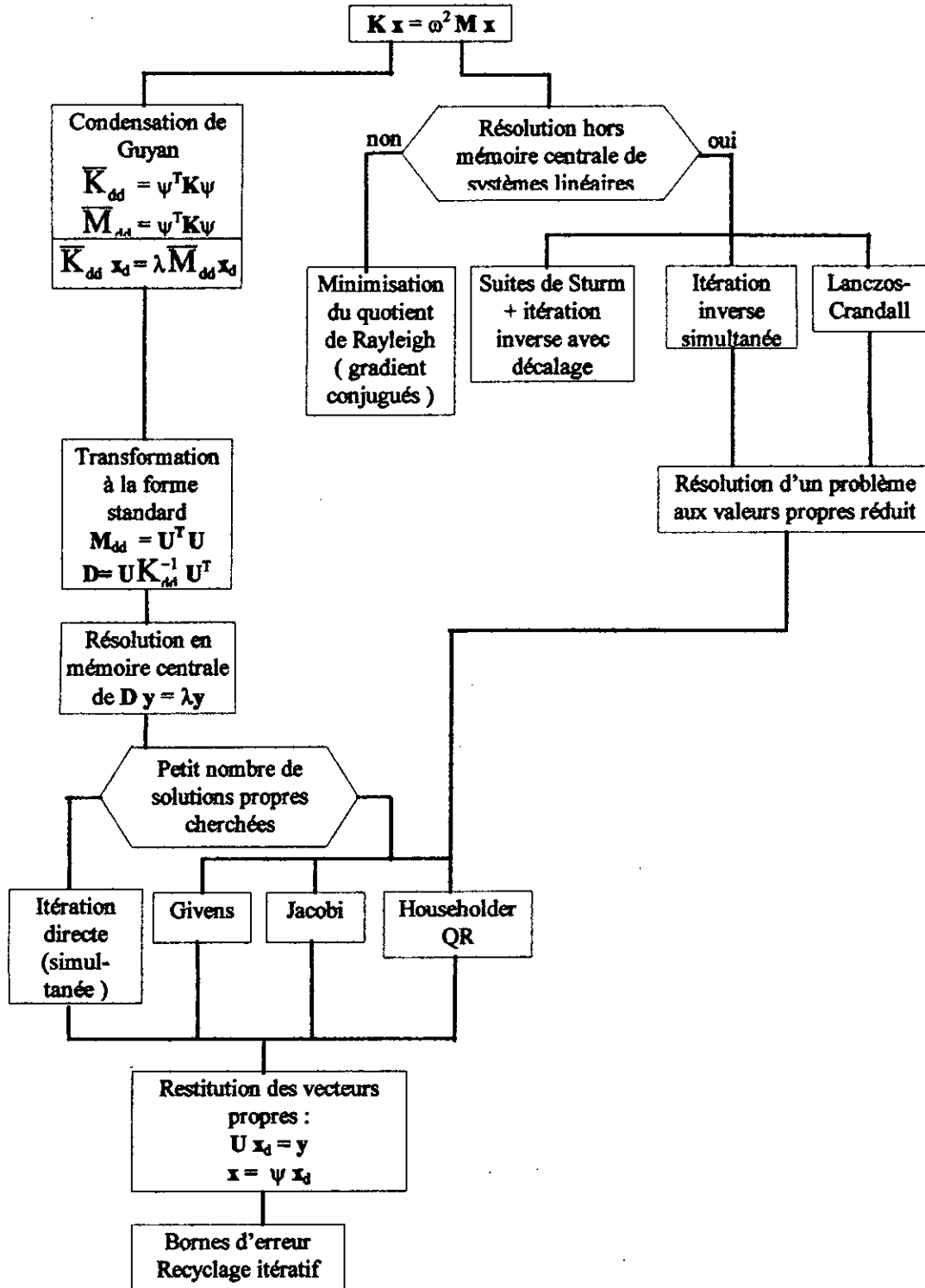


Figure IV-1 : Synoptique des méthodes de résolution en analyse modale

Cependant, en générale, la transformation (IV-4) ne diagonalise pas la matrice d'amortissement modale $[C]$. La matrice d'amortissement $[c]$ est pleine .

$$[\Phi][C][\Phi]=[c]$$

Après avoir utiliser la transformation (VI-4) dans le système (IV-3) et le près-multiplier par ϕ' , on obtient le système des équations modales du mouvement, soit :

$$[m]\{\ddot{\eta}\} + [c]\{\dot{\eta}\} + [k]\{\eta\} = [\Phi]'\{F(t)\} = \{f(t)\} \quad (IV-5)$$

avec : $\{f(t)\}$ vecteur des forces modales

Ainsi, dans le cas général, les équations modales du mouvement sont couplées par l'amortissement .

Il existe certaines conditions sur l'amortissement qui permettent d'assurer un caractère diagonal à la matrice d'amortissement modale, c'est à dire :

$$[\Phi]'\{C\}[\Phi] = [c_{ii}] = [2m_i u_i \xi_i]$$

Amortissement proportionnel

La condition d'amortissement proportionnel introduite par RAYLEIGH s'exprime sous forme:

$$[c]=a_0[m]+a_1[k]$$

a_0 et a_1 sont deux constantes spécifiées

Dans ce cas on a :

$$[\Phi]'\{C\}[\Phi] = a_0[m] + a_1[k]$$

d'où le facteur d'amortissement du $i^{\text{ème}}$ mode :

$$\xi_i = \frac{c_{ii}}{2m_i \omega_i} = \frac{a_0}{2\omega_i} + \frac{a_1 \omega_i}{2}$$

Cette loi définie par les valeurs d'amortissement de deux modes a l'avantage de simplicité, mais elle n'est pas satisfaisante pour l'étude de structures complexes .

Séries de CONGHEY

CONGHEY a représenté une condition générale sur les matrices d'amortissement de telle sorte qu'elles puissent être diagonalisées par la transformation des modes réels .

Cette condition s'exprime sous la forme des séries suivantes :

$$[C] = [M] \sum_{j=0}^{m-1} a_j ([M]^{-1} [K])^j$$

on montre que l'on a : $[\Phi]^t [C] [\Phi] = [2m_i u_i \xi_j]$

avec:

$$\xi_i = \frac{1}{2\omega_i} \sum a_j \omega_i^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{\omega_i} + a_1 \omega_i + a_2 \omega_i^2 + \dots + a_{m-1} \omega_i^{2m-3} \right) \quad i = 1, m$$

Cette loi générale d'amortissement est définie par les valeurs d'amortissement de (m) modes, cependant, cette condition sur l'amortissement n'a pas de fondement physique et présente surtout un intérêt académique :

Hypothèses de découplages dynamique

La pratique la plus couramment utilisée actuellement pour l'analyse dynamique par superposition modale consiste à ne retenir pour le calcul de la réponse dynamique que les termes diagonaux de la matrice d'amortissement modale .

Cette hypothèse, dite de BASILE, est formulée de la façon suivante:

Même en présence de découplage modale d'amortissement, les équations modales du mouvement sont dynamiquement découplées pour les structures faiblement amorties, si la séparation des modes en fréquence est satisfaisante.

Cette hypothèse a été justifiée par différents auteurs qui ont formulé des critères de découplage sous des formes voisines. Ces critères de découplage s'expriment sous les formes suivantes pour un mode (j) donné :

$$\sqrt{\frac{2\xi_j}{\Omega_{kj}} \left| \frac{C_{kj}}{C_{jj}} \right|} \ll 1 \quad (\text{HASSELMAN})$$

$$2\xi_j = \varepsilon \left| \frac{C_{jj}}{C_{kj}} \Omega_{kj} \right|_{\min k} \quad (\text{WARBURTAN})$$

avec: $\Omega_{kj} = \left(\frac{\omega_k}{\omega_j} \right)^2 - 1$: Facteur de séparation en fréquence pour deux modes k et j .

ε : Paramètre d'erreur de ce critère de découplage

Les équations sont découplées si :

- Les termes d'amortissement sont petits, ce qui est vérifié pour les structures faiblement amorties .
- Les fréquences propres sont correctement séparées .

Dans ce cas on ne peut retenir que les termes diagonaux d'amortissement pour le calcul de la réponse .

Le système des équations modales du mouvement (IV-5) se ramène à n équations différentielles découplées ,soit :

$$[m]\ddot{\eta} + [c]\dot{\eta} + [k]\eta = \Phi^T \{F\} = \{f(t)\}$$

soit pour le $i^{\text{ème}}$ mode :

$$\ddot{\eta} + 2\xi_i \omega_i \dot{\eta} + \omega_i^2 \eta = \frac{f_i(t)}{m_i}$$

avec : $\{f_i(t)\} = \{X^T F(t)\}$ forces généralisée du $i^{\text{ème}}$ mode .

Chapitre V

Organisation des programmes résultats

INTRODUCTION

La programmation de la méthode des éléments finis n'est pas un but en soi, car de nos jours il existe des logiciels très performants traitant divers types d'éléments. Néanmoins, l'ingénieur doit connaître les grandes lignes de celle-ci pour qu'en cas de besoin, il puisse élaborer son propre programme.

dans ce chapitre nous donnerons les grandes lignes du programme informatique élaborer en langage FORTRAN .

Les sous-programmes

En suivant l'organigramme (V-1), on remarque que chaque étape du calcul est faite séparément pour mieux organiser le programme

Les sous-programmes utilisés sont :

- *Subroutine géomet*

Ce sous-programme lit les coordonnées des noeuds et les connectivités (noeuds attachés à chaque élément) à partir d'un fichier de données.

- *Subroutine évader*

Il permet de calculer :

- Les fonctions de forme $[N]$ et leurs dérivées par rapport à ξ et η
- La matrice Jaccobienne, sont inverse, sont déterminant et ces dérivées par rapport à X et Y .
- La matrice $[B]$.

- *Subroutine stiffness*

ce sous-programme calcul les matrices élémentaires $[KE],[ME],[FE]$.

- *Subroutine resol*

ce sous-programme résoud le système en utilisant la méthode d'élimination de GAUSS, il nous donne les déplacements de chaque point.

- *Subroutine helement*

il permet de calculer les contraintes aux noeuds.

Choix de nombre de point d'intégration

Le choix du nombre de point d'intégration optimal pour un élément fini n'est pas explicite dans les ouvrages; ainsi pour les élément isoparamétrique, la référence [1] suggère un nombre de points d'intégration permettant d'avoir une approximation exacte de $(\det J)$, alors

que la référence [2] trouve que ce critère peut être insuffisant. Néanmoins, en règle générale, le nombre de points d'intégration doit être compris dans un intervalle bien déterminé.

La référence [5] suggère un nombre minimal de 2×2 et un nombre maximal de 3×3 , pour l'élément isoparamétrique à 8 noeuds.

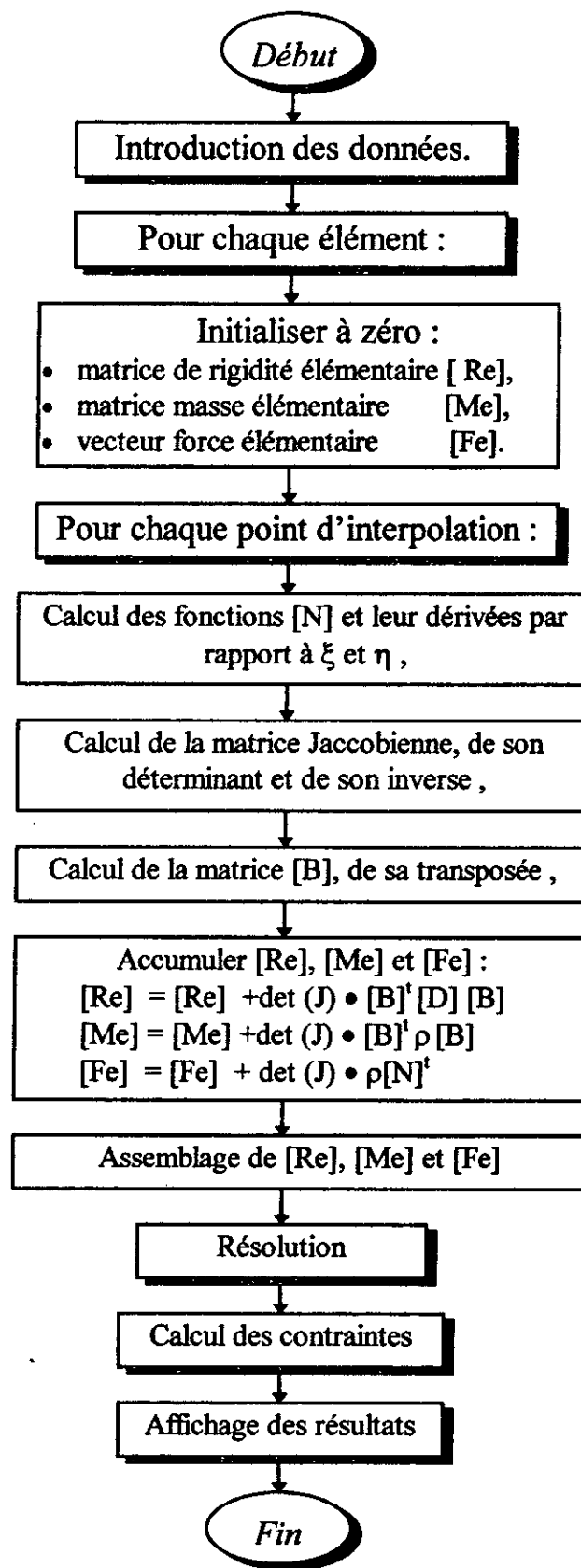
En ce qui concerne notre programme nous avons opté pour un choix de 2×2 points d'intégration (intégration réduite) ainsi que leurs poids correspond.

Calcul des contraintes

Le calcul des contraintes peut se faire en n'importe quel point de l'élément, il suffit pour cela de spécifier les coordonnées. Les étapes de calcul seront identiques à celle utilisées pour le calcul de la matrice [K] jusqu'à l'étape du produit $[D] \times [B]$, les contraintes seront déterminées par le produit :

$$[\Gamma] = [D] \times [B] \{U\}$$

Les références [5] et [6] suggèrent de calculer les contraintes aux points d'intégrations, car c'est en ces points qu'on connaît le mieux les déformations. Mais il est plus facile de les calculer aux noeuds (nous avons opté pour ce choix) vu que l'erreur n'est pas très importante par rapport à ceux calculer aux points d'intégration.



Organigramme (V-1)

L'étude dynamique

Pour l'étude dynamique, on a utilisé le langage *MATLAB* vu que l'effet des grandes valeurs propres est négligeable par rapport à celles qui sont petites. On a pris en considération que les 20 premières valeurs correspondant à la porte basse fréquence; on a résolu le système en absence des amortissements par la méthode de superposition modale.

Les données pour la résolution, de notre système est :

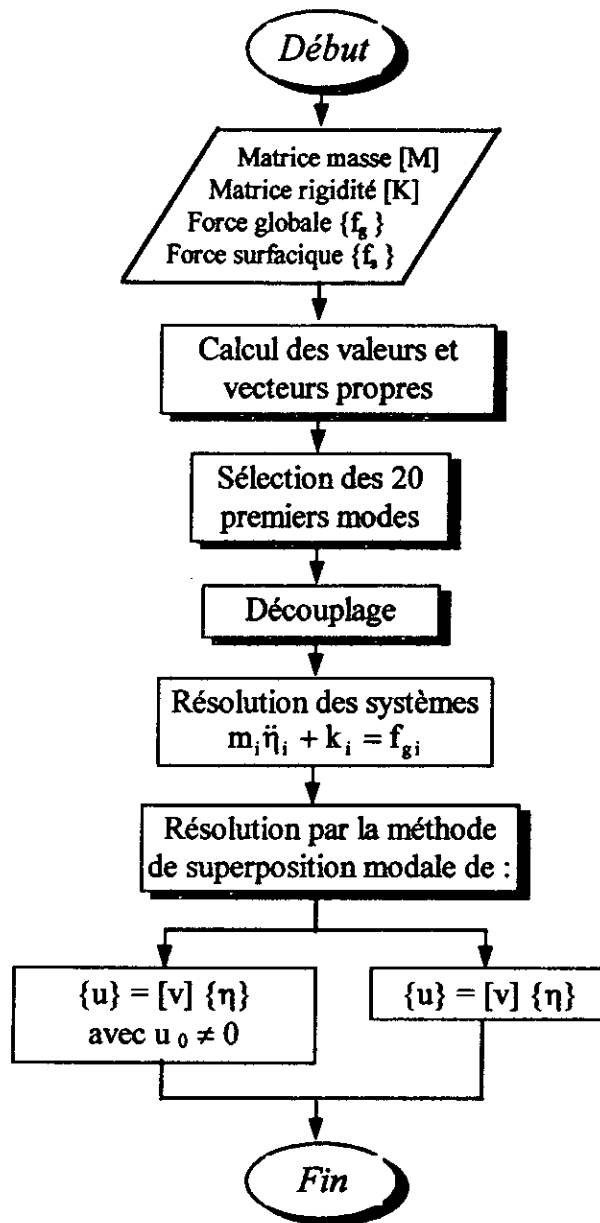
- les matrices de masse et de rigidité,
- le force, surfacique et volumique.

et les résultats obtenus sont :

- valeurs et vecteurs propres,
- les déplacements pour un pas de temps ($t = 20$ sec.),
- les déplacements après une déformation initiale, successivement pour un pas de temps ($t_0 = 4$ sec.)

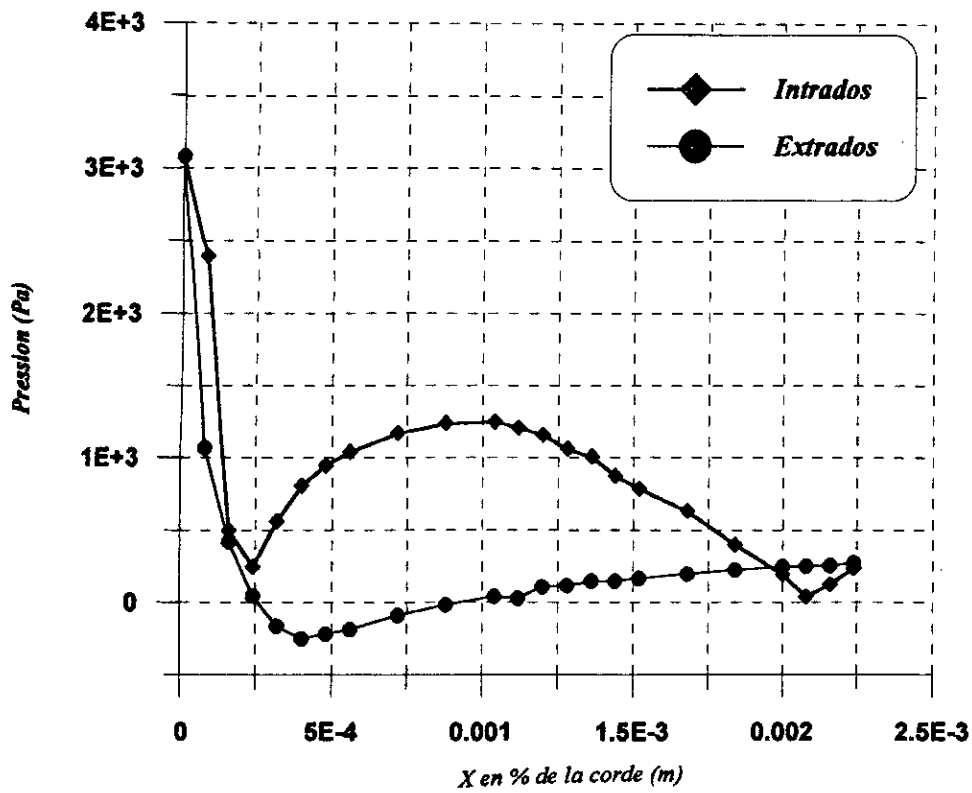
Les programmes en langage *MATLAB*, qu'on a utilisé pour l'étude dynamique, se présente sous forme d'un enchaînement logique, des blocs d'instructions et/ou des fonctions exécutables. Mais on a essayé de nous rapprocher d'une représentation sous forme d'organigramme.

C'est pour cela que l'organigramme (V- 2) a été élaboré.

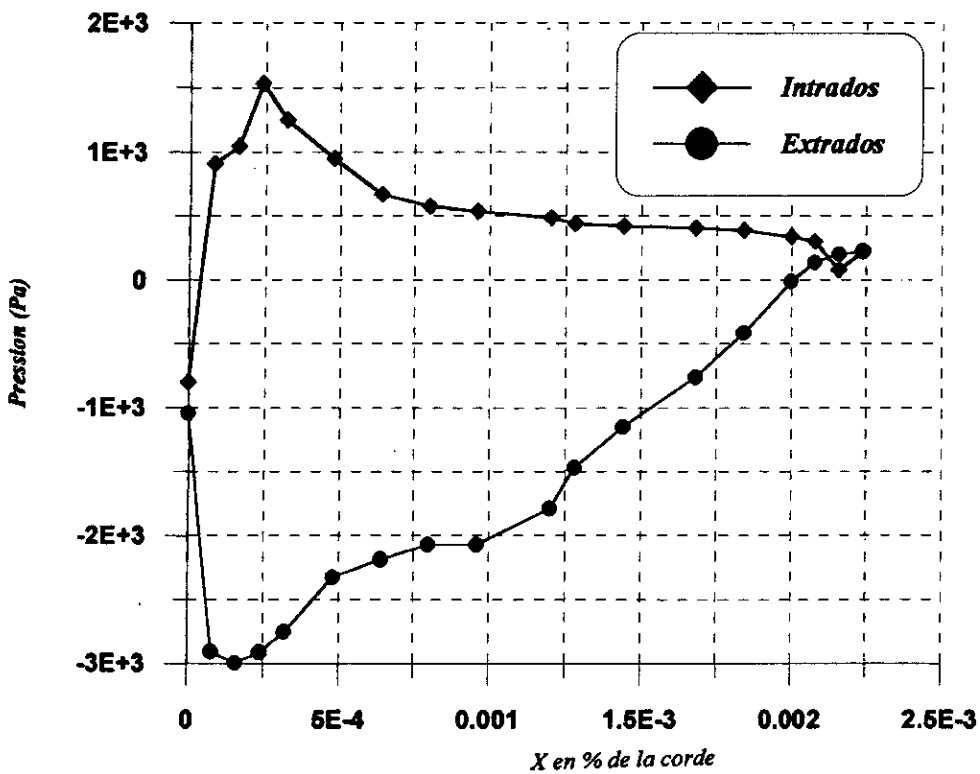


Organigramme (V-2)

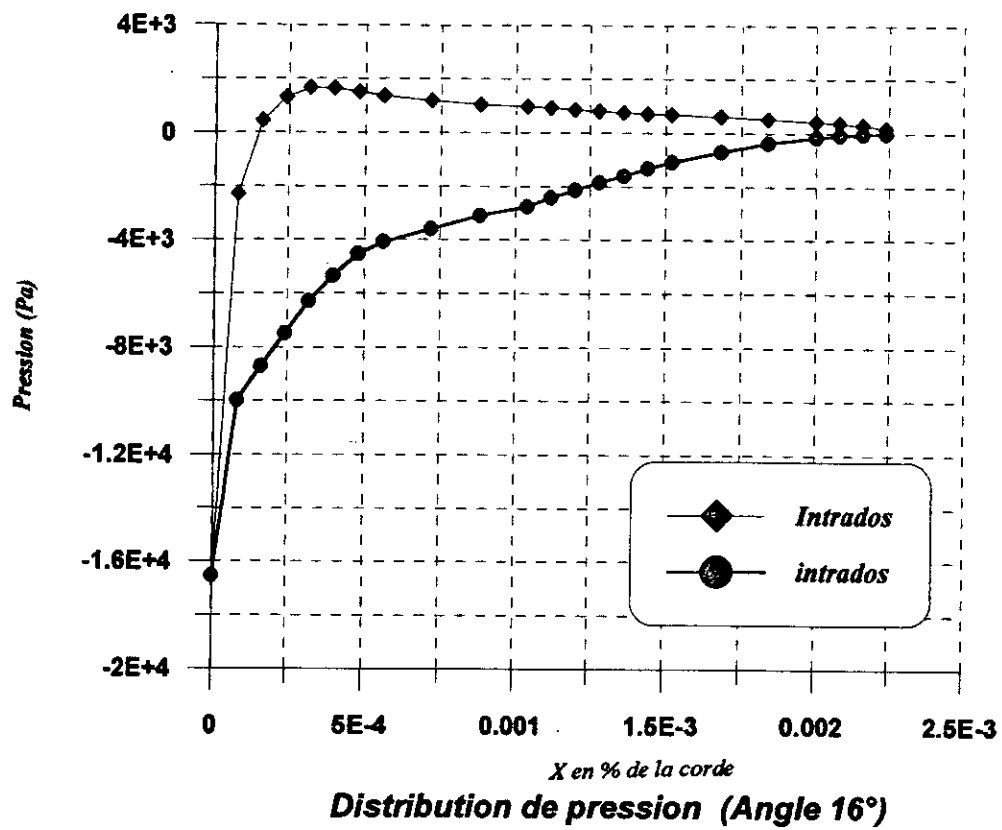
Présentation graphique des données (charge surfacique) :



Distribution de pression (Angle 2°)

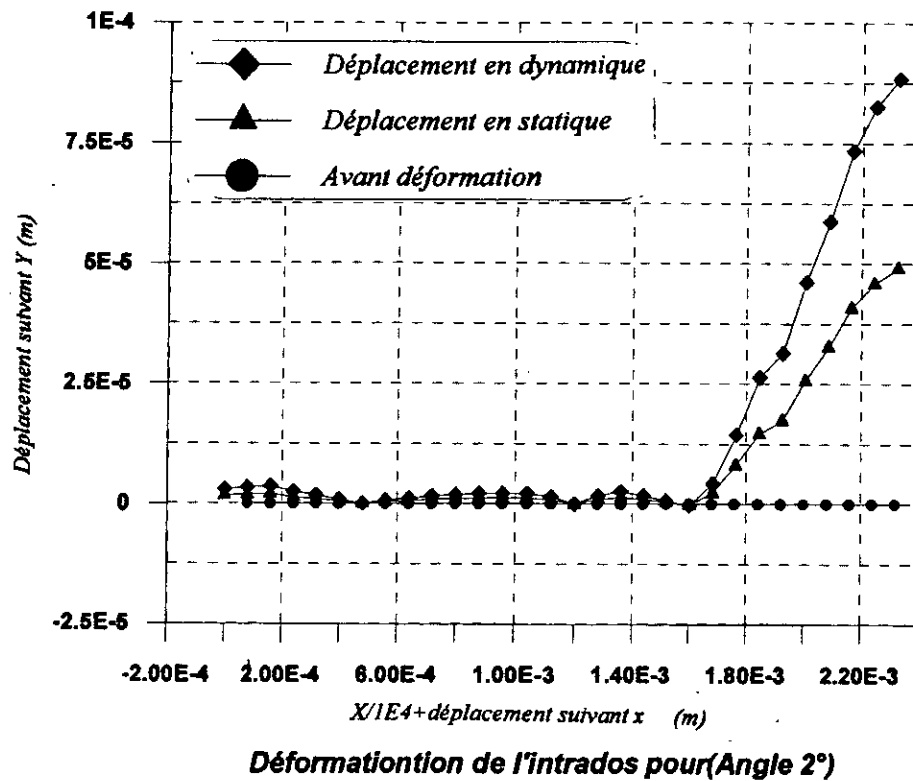
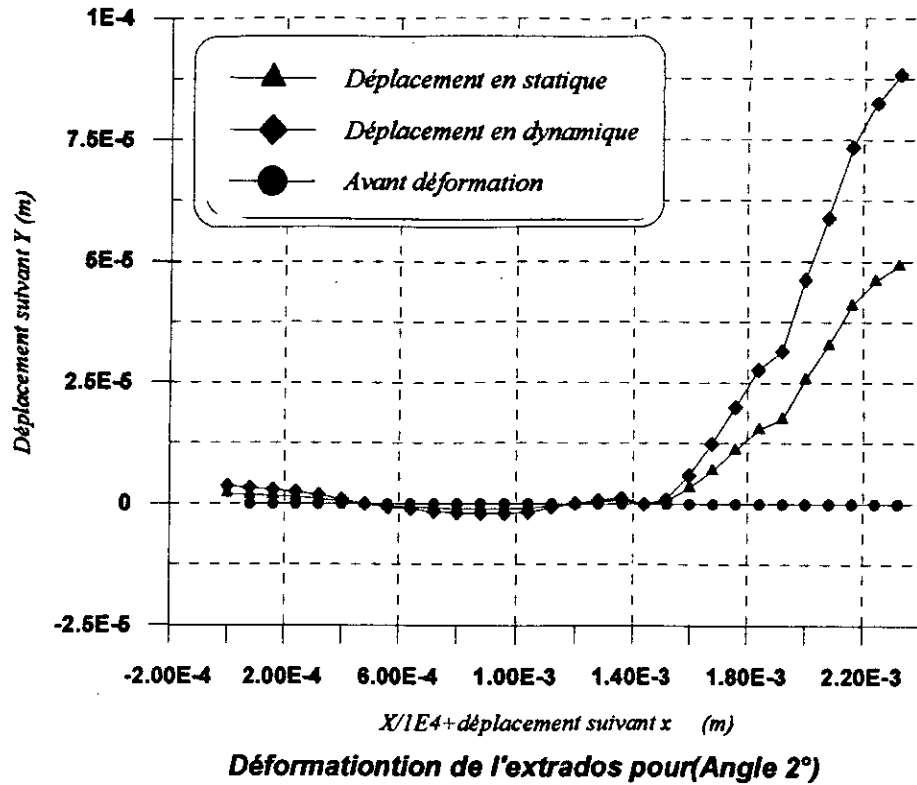


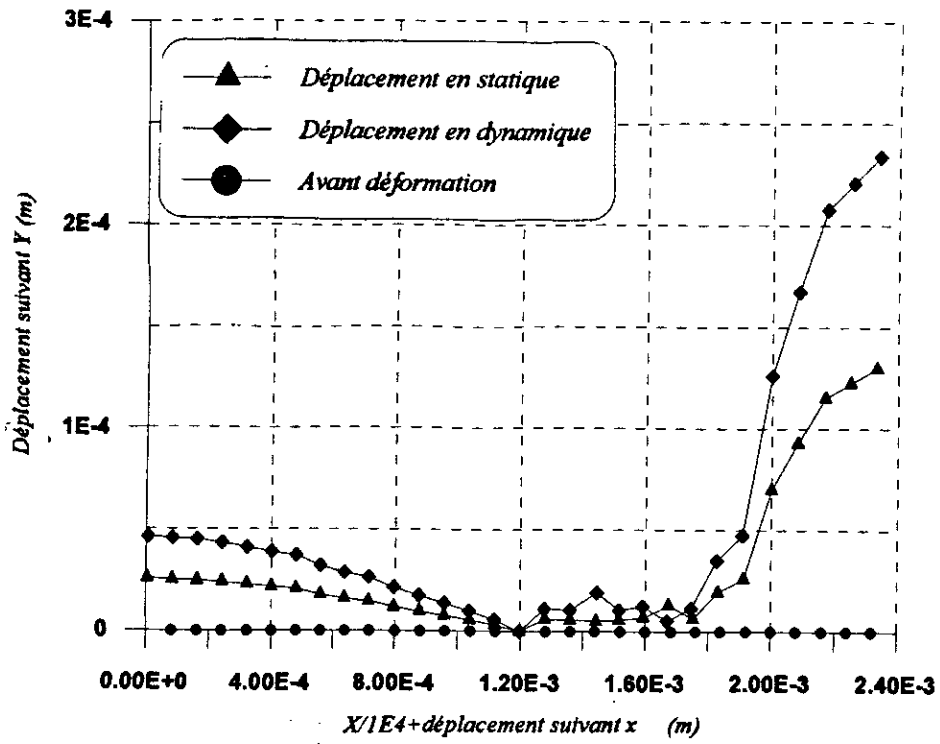
Distribution de pression (Angle 8°)



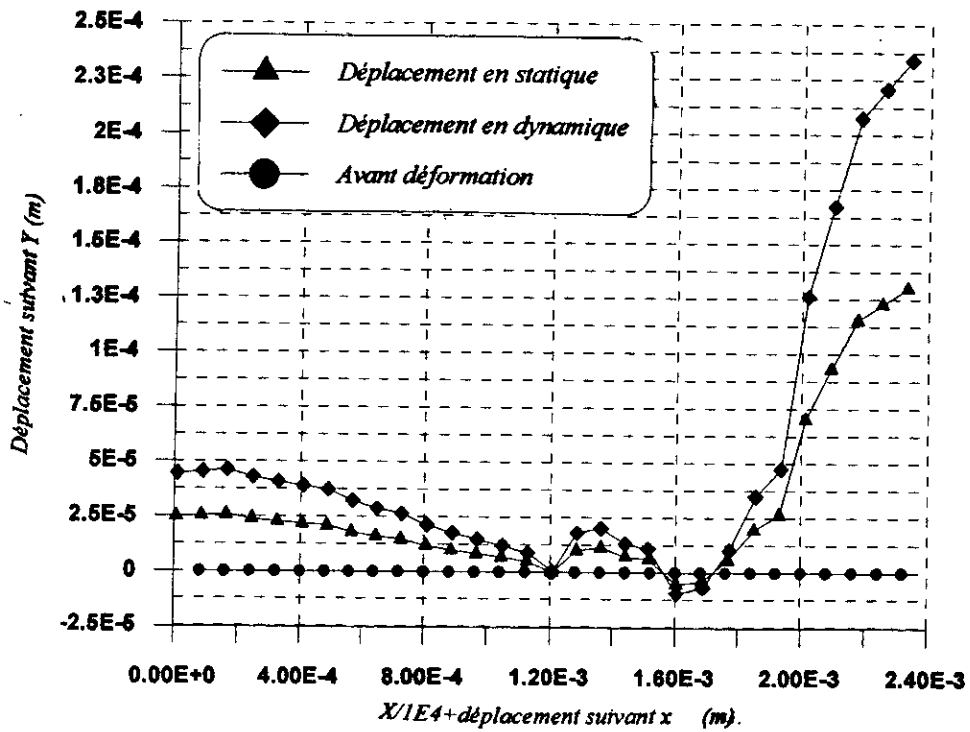
Remarque : ces charges sont calculées par la méthode des singularités

Les résultats des déformations pour la structure en acier

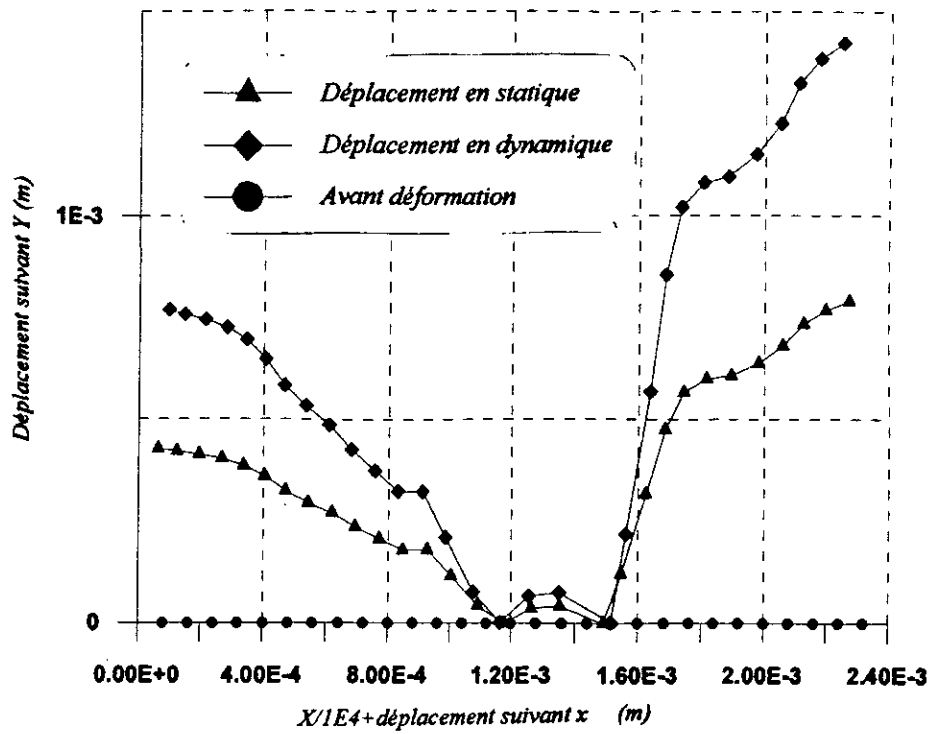




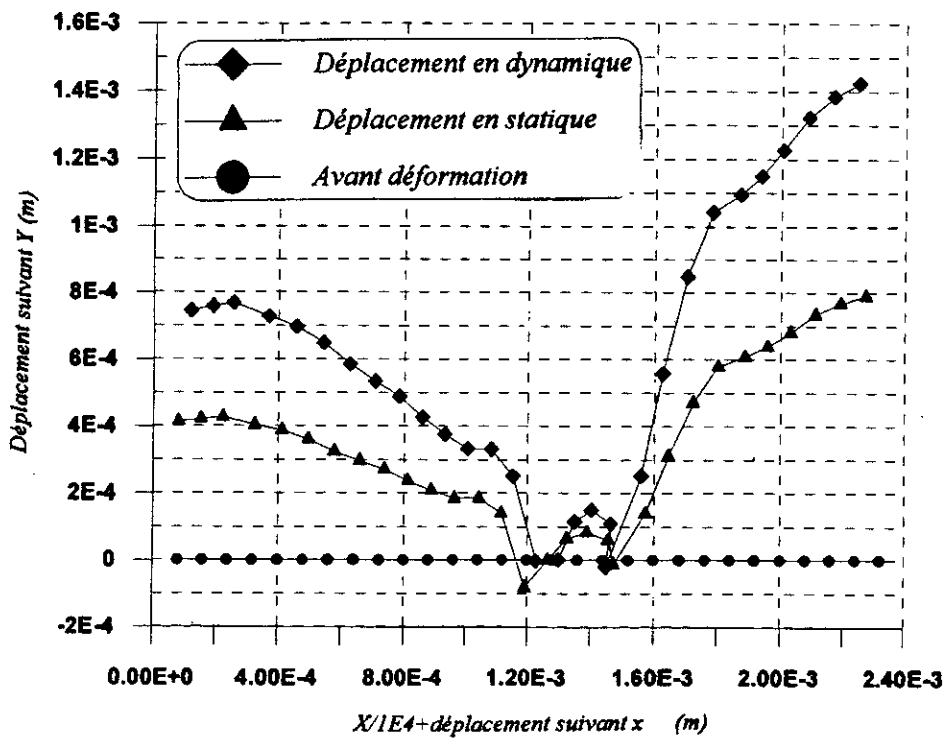
Déformation de l'extrados pour (Angle 8°)



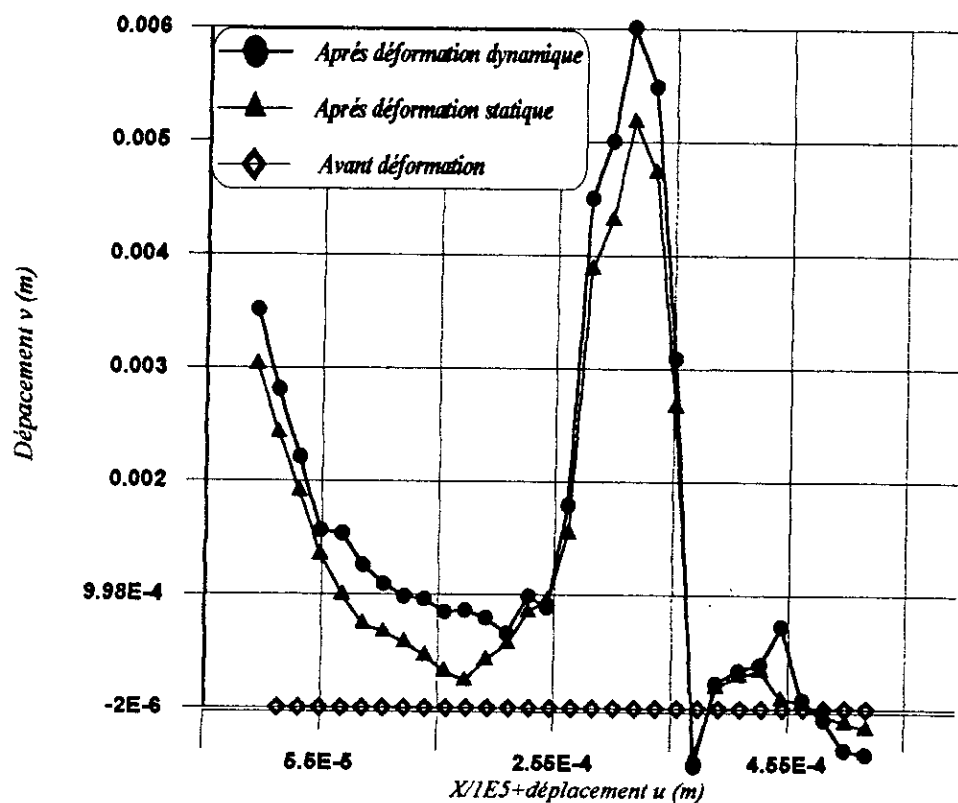
Déformation de l'intrados pour (Angle 8°)



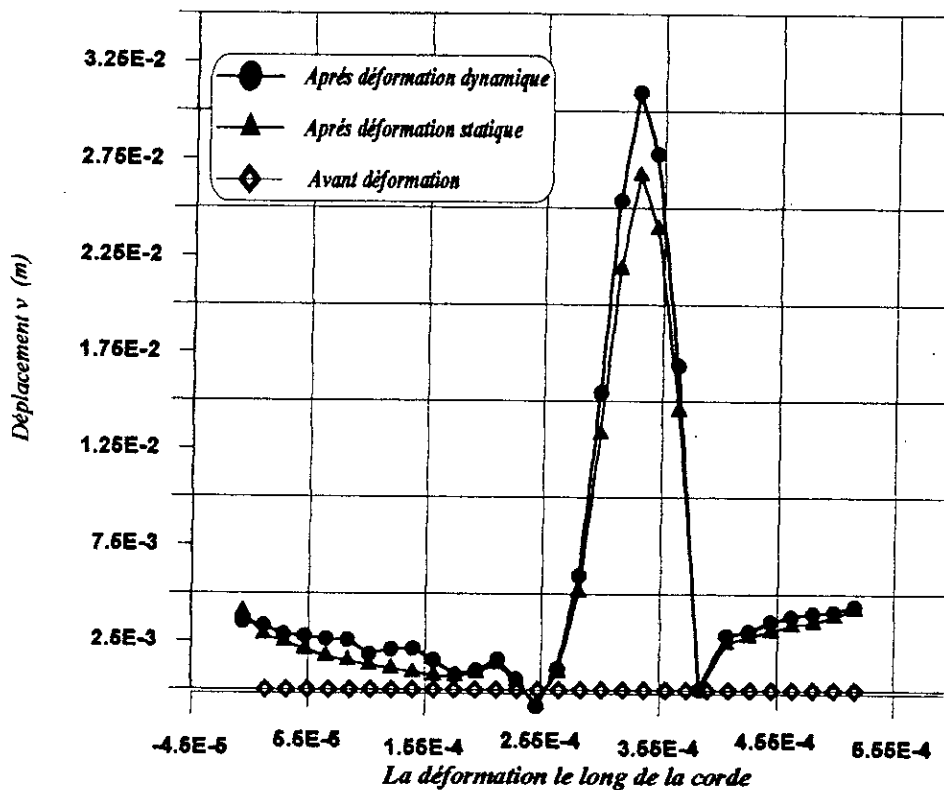
Déformation de l'extrados pour (Angle 16°)



Déformation de l'intrados pour (Angle 16°)

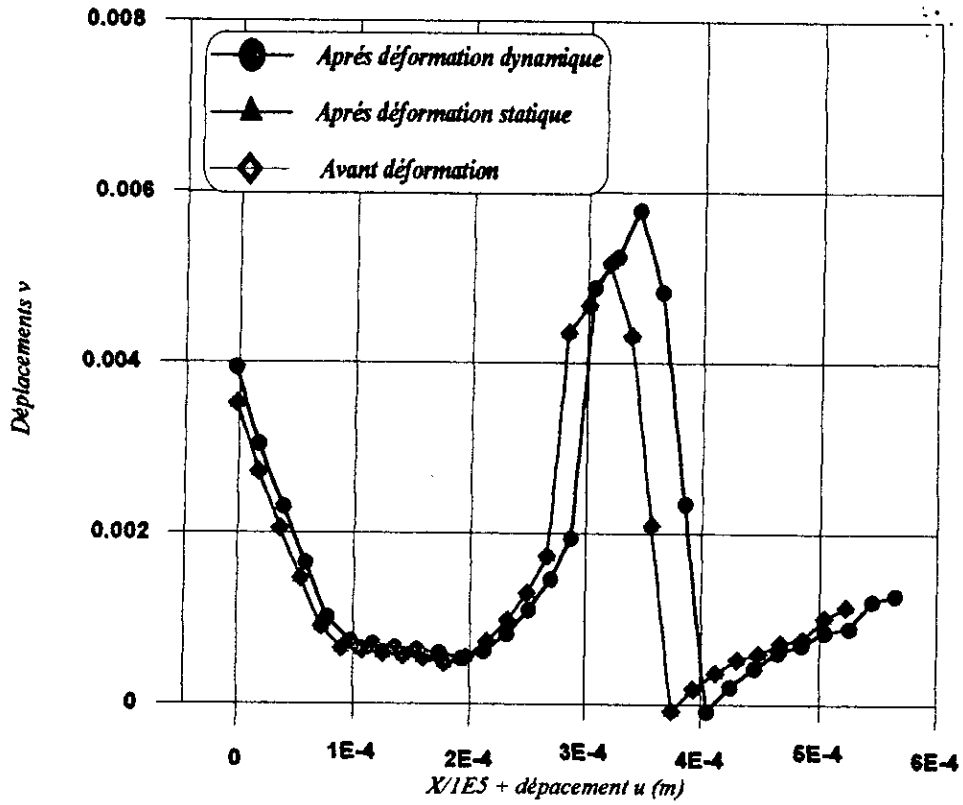


Les déplacements pour l'angle 2°(extrados)

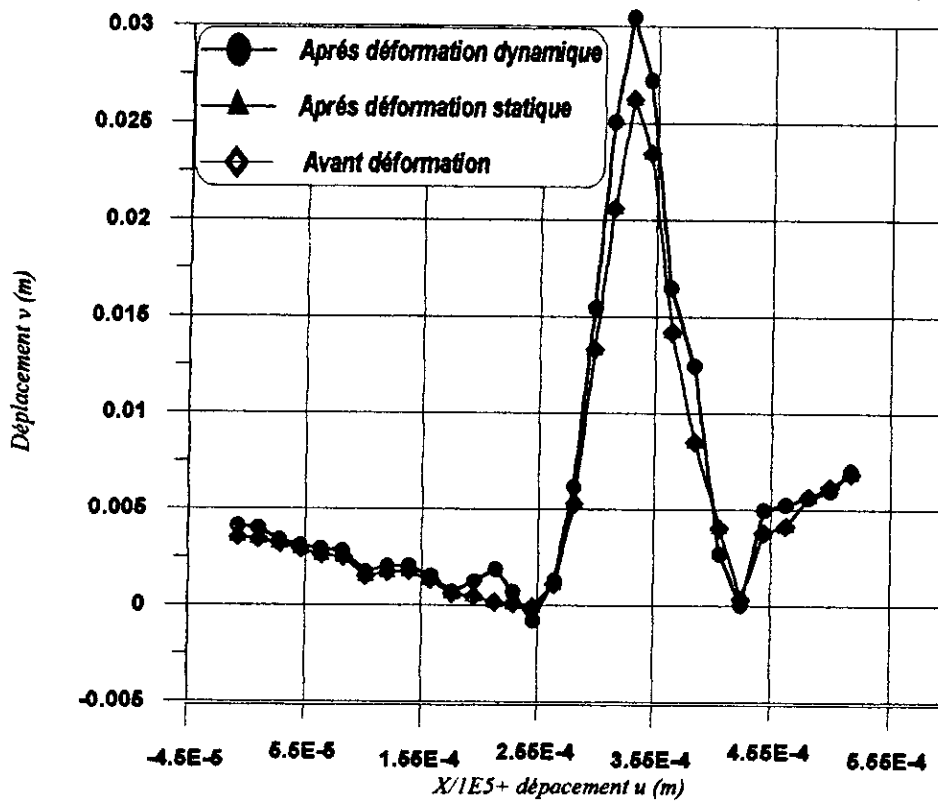


La déformation le long de la corde

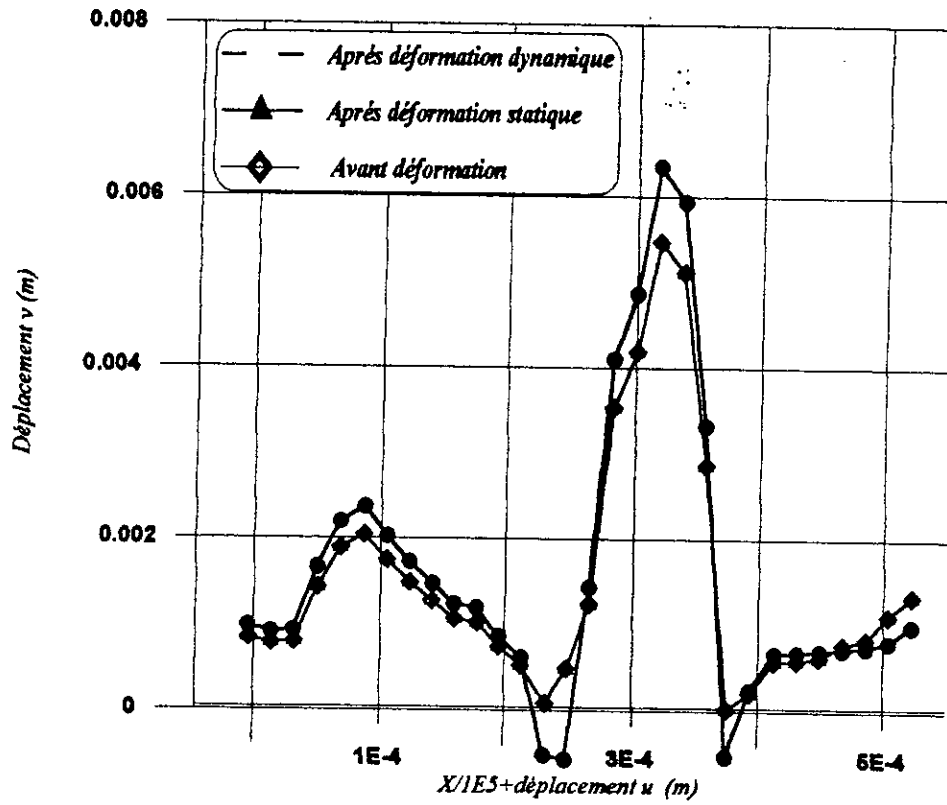
Les déplacements pour l'angle 2°(intrados)



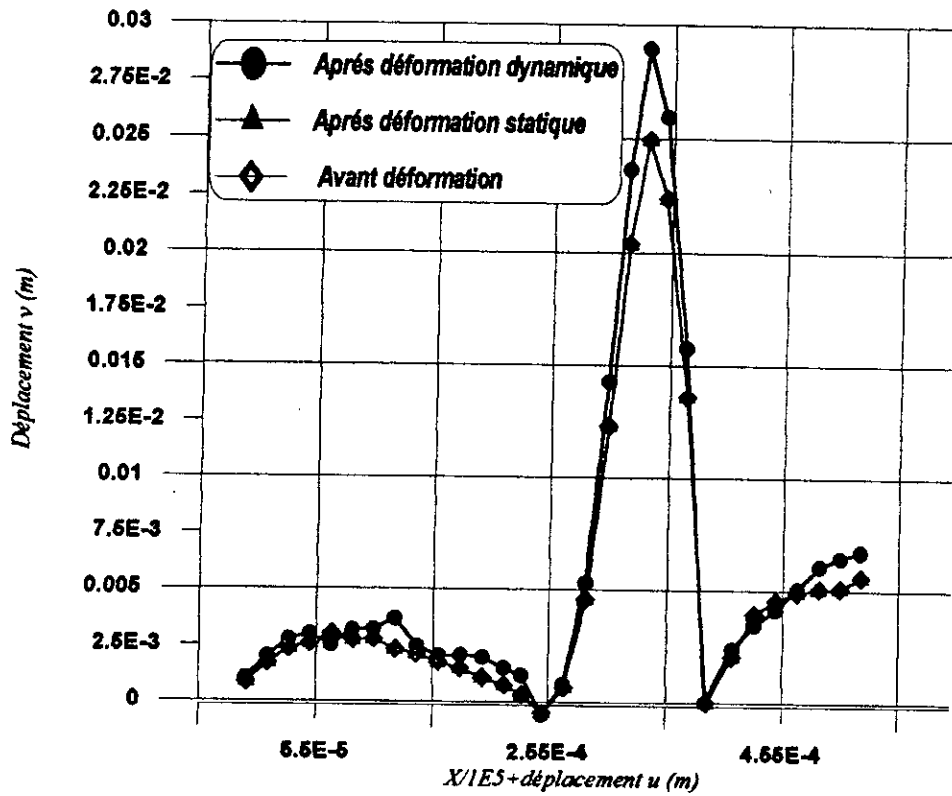
Les déplacements pour l'angle 8°(extrados)



Les déplacements pour l'angle 8°(intrados)



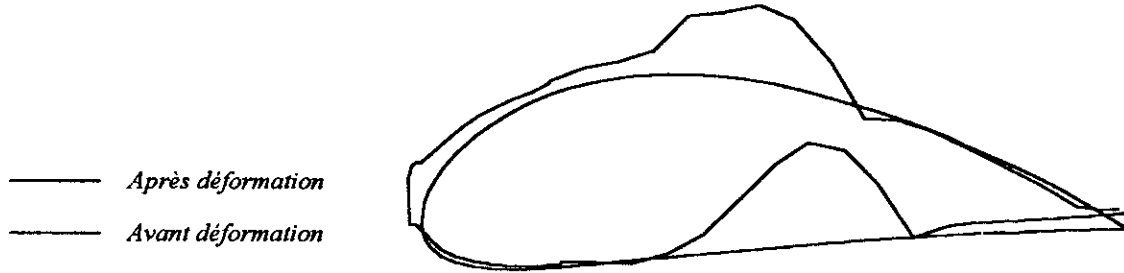
Les déplacements pour l'angle 16° (extrados)



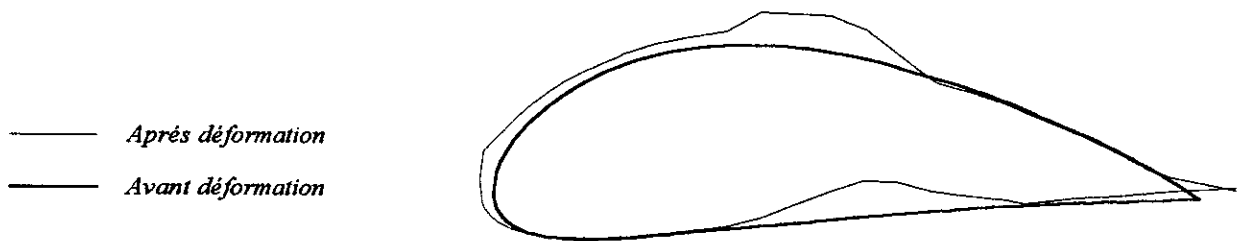
Les déplacements pour l'angle 16° (intrados)

Remarque: u déplacement suivant x
 v déplacement suivant y

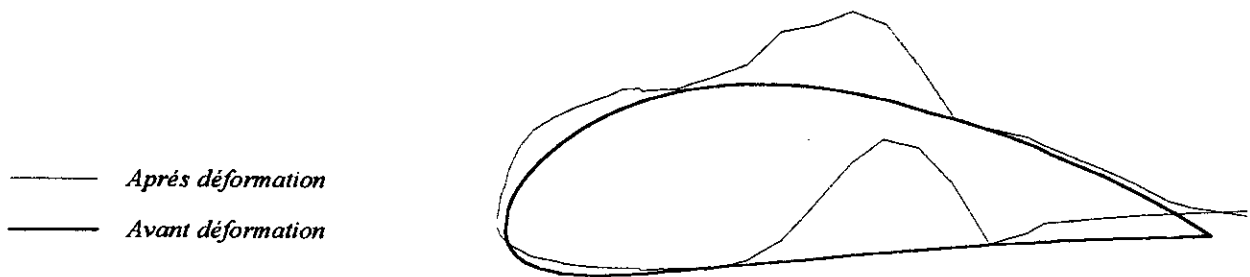
Présentation des ailes après déformation



Déformations amplifiées(Angle 2°)



Déformations amplifiées(Angle 8°)



Déformations amplifiées(Angle 16°)

INTERPRETATION DES RESULTATS**• statique**

- le changement du matériau et l'utilisation d'un matériau composite engendre des contraintes et des déformation plus importante qu'un acier dure .

- La déformation maximale est localisée au bord de fuite.

- La variation des déformations nous permet de choisir l'incidence ($\alpha=8^\circ$), la contrainte est par contre plus importante pour l'incidence ($\alpha=16^\circ$)

• dynamique

- En générale, les déformation dans le cas dynamique sont plus importantes que dans le cas statique.

- Comme en statique la réponse dynamique devient plus importante pour un matériau composite que pour un acier.

- les déformations sont concentrées dans l'extrados (l'extrados est soumis à une compression).

- Le déplacement est très apparent au bord d'attaque et de fuite.

- l'intensité des déplacements au bord d'attaque engendre une déformation importante.

- La déformation au bord de fuite présente une rotation dirigée vers le haut.

- Le choix des (20) plus petites valeurs propres est entièrement satisfaisant parce qu'il nous a permis d'avoir des réponses dynamiques adaptés.

- En faisant varier l'incidence, on remarque également que l'angle d'incidence ($\alpha=8$) est toujours bien adapté à l'écoulement autour du profil étudié, alors que l'angle d'incidence ($\alpha=16$) présente le cas le plus défavorable.

- Pour les matériaux composites (on a utilisé trois sous-structures de matériaux différents).

- Les déformations statiques et dynamiques sont presque égales vu que la masse est petite devant la rigidité

- On constate que la déformation est plus importante au suos-structure médiane et cela est due a l'utilisation d'un matériau léger et moins rigide donc il est préférable d'utiliser un matériau plus rigide que ce lui utilisé mais aussi plus léger et moins rigide que ceux utilisés au bord d'attaque et au bord de fuite.

I- DEFINITION

On désigne sous le nom de composite des corps constitués de plusieurs matériaux de nature différentes et ayant chacun une fonction bien déterminée.

Le type de composite employé dans l'industrie aéronautique et spatiale comprend une matrice dans laquelle sont enrobées des fibres . La contrainte appliquée est essentiellement supportée par les fibres, la matrice leur servant de support de protection et transmettant les contraintes d'une fibre à l'autre.

Cette technique permet l'utilisation de matériaux de faible masse volumique, offrant une très grande résistance dans les produits de dimensions courantes .

La liaison fibre-matrice doit être prévue pour transmettre les contraintes de cisaillement, néanmoins elle doit présenter une ductilité suffisante pour permettre une bonne tenue du composite aux chocs. Un mouillage satisfaisant entre fibres et matrice est donc indispensable.

II- TYPES DE MATERIAUX

Les matériaux pour fibres pour lesquels ont porté les expérimentations actuelles sont principalement:
le carbone, le bore , le verre et le kevlar .

Les matrices organiques sont en général :

- Les résines époxydes.
- Les résines polyimides.

Les fibres sont disposés parallèlement dans la matrice-support pour constituer des rubans ou des tissus.
Les pièces sont réalisées par empilage de couches de rubans (ou de tissus) et polymérisation .

II-1 Composite a base de fibres de verre

Ce type de matériau est, en général, utilisé pour des pièces assez peu sollicitées, cependant, des applications telles que pales d'hélicoptère ou corps de propulseur bobinés d'engins, correspondant à des conditions sévères d'utilisation.

II-2 Composite a base de fibres en carbone

ils donnent à la fois une résistance élevée et un bon module d'élasticité. Les applications étudiées correspond à des pièces de structure d'avion, des carters de réacteur, ...

II-3 Composite a base de fibres en bore

Les applications sont aussi des pièces de structure, des frittage de pièces tournant à grandes vitesses, ...

Conclusion générale

CONCLUSION

On sait que l'une des plus importantes étapes de la conception d'une aile d'avion est l'étude aéroélastique (effet aérodynamique sur l'élasticité).

Pour cela, on a fait une approche qui nous a permis de simuler (faire un code de calcul) les interactions, en vue d'obtenir des grandeurs fidèles des contraintes et des déformations.

Notre choix s'est porté sur les matériaux composites à la place des matériaux métalliques pour les considérations suivantes :

- une possibilité d'obtenir -à performances presque égales - , des gains en masse d'environ 40% . Ce qui engendre une augmentation de la poussée et une diminution de consommation en carburant.
- des pièces composites soumises à des déformations sont réparables, ce qui n'est pas le cas des pièces métalliques.

Pour notre cas, nous avons pris en considération les charges de pression et de masse; une éventuelle force extérieure peut être prise pour exprimer des perturbations agissant sur l'aile (tels que : les effets trous d'air, ou dysfonctionnement des moteurs), et de les étalonner selon les phénomènes physiques simulés.

On peut calculer la déformation après une déformation initiale, en calculant la nouvelle répartition des pressions (sur le profil déformé). On peut également étendre cette étude sur un ensemble de profils aérodynamiques, et d'en voir l'effet des sollicitations externes, en développant une méthode de simulation.

- 1-Aérodynamique for Engineering Students**
E L Houghton
Third Edition
- 2- Aérodynamique Expérimentale**
P REBUFFET
Dunode ;1969
- 3-Analyse des structures par Eléments Finis**
J F IMBERT
Edition cepadues ; 1984
- 4-Dimensionnement des Turbomachines**
R RAY
Ecole Nationale Supérieur D'Arts
- 5-Dynamics of Structures**
W C CLOUTH & G PENZIN
Mac Graw-Hill ; 1975
- 6- Les matériaux Composites**
G GAY
3^{ème} Edition
- 7-The Finite element Method**
C ZIENKIWICZ
The 4th Edition Mac grow hill ; 1989
- 8- Une représentation de la Méthode des Eléments finis**
G DATT & G TOUZOT
Maoine S A Editeur ; 1984