

7/97

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE.

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

MECANIQUE

Ecole Nationale Polytechnique

*En vue d'obtention du diplôme
d'ingénieur d'état en génie mécanique*

SUJET

**Etude d'un écoulement
supersonique autour d'un profil
aérodynamique par la méthode
des éléments finis/volumes finis**

Proposé et dirigé par :
Mr : M. BOUDJEMAA
Mr : F. MEZAOUR

Etudié par :
B. HAMDADOU
K. GAIRAA



Promotion 1997
E.N.P 10, Avenue Hassen Badi, 16200 El-Harrech, Alger

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE.

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE.

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

المكتبة
BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

*En vue d'obtention du diplôme
d'ingénieur d'état en génie mécanique*

SUJET

Etude d'un écoulement
supersonique autour d'un profil
aérodynamique par la méthode
des éléments finis/volumes finis

Proposé et dirigé par :
Mr : M. BOUDJEMAA
Mr : F. MEZAOUR

Etudié par :
B. HAMDADOU
K. GAIRAA



Promotion 1997

E.N.P 10, Avenue Hassen Badi, 16200 El-Harrech, Alger

إهداء

إلى أمي و أبي العزيزين

إلى إخوتي الأعزاء

إلى كل الأقارب والأصدقاء

إلى كل من يربط الإستخلاف في الأرض بمبدأ « الذين إن مكناهم في الأرض أقاموا الصلاة و أتوا الزكاة وأمروا بالمعروف ونهوا عن المنكر »

! حملاو

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A Mes parents

A Mes frères et sours

A HADJ ; KACEM ; FARES

A La mémoire de mes grands parents

A La mémoire de ma grande mère

A toute la famille GAIRAA

A tous mes amis

K. GAIRAA

Remerciement

Arrivé au terme de notre travail nous tenons à exprimer vivement notre profonde gratitude à notre promoteur M.M.BOUDJEMA et à notre copromoteur M.F.MEZAOUR pour l'aide et l'intérêt qu'ils nous apportent.

Nous remercions également tous les enseignants qui ont contribué de près ou de loin à notre formation et à cette thèse, en particulier Mr.AMMICHE et Mr.BENKOUSSAS.

Nous tenons également à remercier l'ensemble de membres de jury qui nous ont fait l'honneur de juger notre travail.

Nous voudrions associer nos remerciements à toute l'équipe de la bibliothèque ainsi qu'à tous le personnel pour leur entière disponibilité.

ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة الإنسياب فوق صوتي حول جناح ديناميكي هوائي باستعمال طريقة العناصر المنتهية/ الأحجام المنتهية وبفضل هذه الطريقة توصلنا إلى تحديد موقع موجة الإصطدام، وكذا توزيع الضغط وعدد ماخ لهذا الإنسياب .

Abstract :

This work aims to study a supersonic flow around of aerodynamic profile by using the finit element / finit volum method. There, we have localised the position of shock wave and also the distribution of pression and Mach number of this flow.

Résumé :

Ce travail consiste à faire une étude d'un écoulement supersonique d'un profil aérodynamique par la méthode des éléments finis / volumes finis. Ensuite, grace à cette méthode nous avons localisé la position de l'onde de choc et par suite, on a obtenu une distribution de la pression et le nombre de mach.

TABLE DES MATIERES

Liste des notations.....	1
Intoduction générale.....	4

CHAPITRE I:

CONCEPTS SUR LES ECOULEMENTS DES FLUIDES PARFAIT AVITESSE SUPERSONIQUE

I.1. Célérité du son.....	7
I.2. Vitesse critique et limite.....	8
I.3. Ondes de Mach.....	9
I.4. Corps plangé dans un veine fluide	10
I.4.1 Fluide au repos et point d'arrêt à l'avant du corps.....	11
I.5. Ecoulement a vitesse supersonique	12
I.5.1. Formation des ondes de choc	12
I.5.2. Ondes de choc oblique	13
I.5.2.1. Equations de conservation.....	13
I.5.2.2. Relations d'Hygoniot	14
I.5.2.3. Relations de Prandlt.....	15
I.5.2.4. Relations entre variables amont et aval	15
I.5.2.5. Variation d'entropie et de pression génératrice	16
I.6. Ondes de choc courbes	17
I.6.3. Méthodes numerique de calcul des ondes de choc détachés	18

CHAPITRE II:

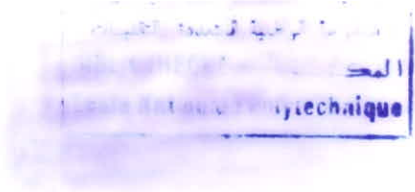
MODELISATION D'UN ECOULEMENT DE FLUIDE PARFAIT COMPRESSIBLE

Introduction	20
II.1. Equations d'EULER	20
II.2. Adimensionnement des variables	21
II.3. Ecriture matricielle	23
II.4. Propriétés du système	24

CHAPITRE III:

APPROXIMATION DU PROBLEME HYPERBOLIQUE PAR LA METHODE EF/VF

Introduction	27
III.1. Espace d'approximation	27
III.2. Formulation variationnelle du problème discrétisé.....	29
III.3. Schéma décentré pour l'approximation du flux	32
III.4. Calcul des matrices Jacobiennes	38
III.4.1. Calcul des valeurs propres	40
III.4.2. Matrice des vecteurs propres	41
III.5. Etude des conditions aux limites.....	42
III.5.1 Conditions de glissement	42
× III.5.1 Conditions de glissement	42
III.7. Pas de temps	44
III.8. Viscosité résiduelle.....	45



CHPITRE IV :

Des **PROGRAMATION ET ORGANIGRAMES** *MC*

IV.1. programmation.....48

IV.2. Subroutine Mail..... 48

IV.3. Subroutine CALGEO48

IV.4. Autres Subroutines48

IV.5. Oganigramme de programme principal49

CHPITRE V:

EXPERIENCES NUMERIQUES

V.1. Resultats numerique et commentaires55

V.2. Application sur hémisphere56

V.3. Application sur un corps arrondi65

V.3. Application sur un profil d'aube70

CONCLUSION GENERALE72

ANNEXES.....74

Bibliographie.....79

Liste des notation

A:	Matrice du vecteur flux.
$C[m/c]$:	Vitesse du son.
$C^* [m/s]$:	Vitesse du son à l'état critique.
$C_p [J/K.Kg]$:	Chaleur spécifique à pression constante.
$C_v [J/K.Kg]$:	Chaleur spécifique à pression constante.
$e [J/Kg]$:	Energie totale de fluide par unité de volume.
F:	Vecteur Flux numérique suivant x.
\tilde{F} :	Flux numérique.
G:	Flux numérique suivant y.
g:	Barycentre du triangle.
$h [J/Kg]$:	Enthalpie spécifique.
H:	Matrice caractéristique.
M:	Nombre de Mach.
M^* :	Vitesse non dimensionnelle à l'état critique.
M_{ij} :	Flux numérique.
m_{ij} :	Milieu de liaison.
$P [Pa]$:	Pression.
P_{ij} :	Matrice de flux.
Q:	Viscosité résiduelle.
R:	Constante d'état du gaz.
S:	L'entropie.
\hat{S}_{ij} :	Support de noeud.
S_i :	Noeud (sommet du triangle).

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

Souvent, les phénomènes physiques rencontrés en MDF s'expriment sous forme d'équations différentielles aux dérivées partielles. Notre étude fait de cette classe de problèmes, qui consiste à résoudre des équations différentielles aux dérivées partielles (E.A.D.P) à partir des conditions aux limites qui sont imposées par la nature de la configuration physique.

La solution analytique de tel problème reste toujours limitée par des cas simples bien déterminés, vu la complexité des équations différentielles. Il est alors nécessaire d'avoir recours à des méthodes de résolution numériques.

L'étude de l'écoulement d'un fluide compressible autour d'un corps de forme quelconque est un problème, même si en ignorant les effets visqueux qui reste difficile à résoudre. En effet, aux grandes vitesses de vol, l'écoulement est régi par un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires dont le type change avec le niveau des vitesses locales (équations elliptiques dans les zones subsoniques et hyperboliques dans les régions supersoniques).

Parmi les axes de recherches, un des plus exposés récemment, concernant les écoulements compressibles rotationnels -l'axe Euler- et peut être un des plus difficiles, étant donné le caractère hyperbolique et non linéaire des équations. Devant face à des applications industrielles de plus en plus complexes, une résolution satisfaisante des équations d'Euler semble maintenant liée à un bon contrôle de la variation d'entropie [4] dans des configurations complexes avec ou sans chocs.

Depuis quelques années, les équations d'Euler pour des fluides parfaits compressibles ont motivé un grand nombre d'articles, livres et congrès. On cite entre autres les chercheurs ayant abordés ce thème Harten, Osher, Roe, Van Leer, concernant les aspects théoriques, et Al, Jameson, Morice pour les aspects numériques. Les approximations sont aussi bien de type différences finis ou volumes finis, et plus récemment de type éléments finis.

Les approches utilisant, pour résoudre les équations d'Euler, une régularité de maillage suffisante, permettent un contrôle de façon satisfaisante la viscosité liée aux différents schémas (viscosité artificielle ajoutée, décentrage, modification locale des fonctions de base projection de type -Petrove-Galerkin), mais elles sont restées limiter à une classe de géométries dite « structurée » [6].

La simulation numérique d'écoulement à un nombre de Mach élevé, sur des profils aérodynamiques, doit pouvoir restituée des chocs forts -éventuellement détachées- et également positionné des lignes d'arrêt, a fortement motivé l'introduction d'une approximation par éléments finis qui permet de raffiner localement les zones à fort gradient de pressions (ZienKiewicz et Al).

Dans ce travail, on se propose d'apporter des éléments de réponses sur la résolution d'équation d'Euler à l'aide du schéma utilisé qui met en évidence le comportement d'un fluide parfait compressible à vitesses supersoniques autour d'un obstacle.

Dans le premier chapitre, on rappelle des notions et concepts nécessaires aux écoulements supersoniques des fluides compressibles parfaits.

Le modèle mathématique d'Euler régissant les écoulements des fluides compressibles est établi au chapitre II, en insistant sur leur caractère hyperbolique.

Le chapitre III est consacré à la construction d'un schéma explicite, décentré, du premier ordre. On décrit l'approximation variationnelle du problème discret, ensuite une présentation de Q-schéma utilisé.

Dans le chapitre IV, on présente la structure du programme élaboré et les organigrammes correspondants.

En fin, nous présenterons des expériences et leurs résultats numériques en utilisant l'approximation introduite au chapitre III, effectuées sur des profils aérodynamiques (corps arrondi, sphère et un profil d'aube), simulant l'écoulement à divers régimes.

CHAPITRE I

Concepts sur les
écoulements des fluides
compressibles à
vitesses supersoniques

Le terme « fluide compressible » implique des variations de la densité dans le champ fluide, ces variations sont le résultat principal de la pression changée d'un point à un autre. Le taux de variation de la densité respectant la pression est un paramètre important, dans l'analyse des fluides compressibles.

I. 1. CELERITE DU SON

La célérité du son, par définition, est la vitesse de propagation par rapport au fluide de perturbations infinitésimales (ondes de pressions).

Moyennant les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement, on obtient:

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho}$$

Pour une évolution isentropique ($dS=0$), on a : $\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cte.}$

$$\text{d'où : } c^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{\gamma \cdot P}{\rho}$$

Pour un gaz parfait: $P = \rho \cdot R \cdot T$

$$c^2 = \gamma \cdot R \cdot T \quad \text{.....(1.1)}$$

c: célérité du son.

p: pression.

ρ : masse volumique.

T: température locale pour un fluide en mouvement.

R: constante massique d'un gaz.

S: l'entropie

I. 2. VITESSE CRITIQUE ET LIMITE (EQUATION DE SAINT-VENANT)

Moyennant l'équation de la conservation de quantité de mouvement, sans tenir compte de la viscosité, on obtient (régime permanent) :

$$\frac{du^2}{2} + \frac{1}{\rho} dP = 0 \quad \text{.....(1.2)}$$

u : vitesse de la particule fluide.

C'est la forme différentielle de l'équation de Saint-Venant.

Pour une évolution isentropique le long d'une ligne de courant pour un gaz parfait ; on obtient:

$$\frac{du^2}{2} + \frac{1}{\rho} dP = 0 \quad \text{.....(1.3)}$$

$$\frac{dM}{M} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) \frac{du}{u} \quad \text{.....(1.4)}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{du}{u} \quad \text{.....(1.5)}$$

M est le nombre de Mach.

En intégrant (1.2) avec l'hypothèse isentropique et gaz parfait, on obtient :

$$C_p T_0 = \frac{u^2}{2} + C_p T = \frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = C \quad \text{.....(1.6)}$$

C : constante

C'est la relation de Saint-venant.

On atteint un point sonique ou « critique » de l'écoulement lorsque par définition :

$$u = c = c^*$$

La constante $C = C_p T_0$ de l'équation (1.6) s'écrit :

$$C_p T_0 = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \cdot c^{*2} \quad \text{.....(1.7)}$$

On définit la vitesse non dimensionnelle M^* telle que :

$$M^* = \frac{u}{c^*} \quad \text{.....(1.8)}$$

Elle est reliée par M par :

$$M^{*2} = \frac{M^2}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}M^2 + \frac{2}{\gamma+1}} \quad \text{.....(1.9)}$$

On définit la vitesse limite V_1 comme étant la vitesse que prendrait le gaz en se détendant isentropiquement dans le vide. La relation entre V_1 et c^* est :

$$V_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot c^* \quad \text{.....(1.10)}$$

I. 3. ONDES DE MACH

Toute perturbation, de *source ponctuelle*, émise à l'instant t , par raison de symétrie, elle se propage à la vitesse du son c par onde sphérique de rayon ct (onde sonore). La pression se propage radialement et intéresse tout l'espace avec la même intensité (voir fig. 1.1).

Si la source est animé d'une vitesse u dans le fluide au repos, la perturbation se propage, *par rapport à la source*, avec la vitesse $c-u$ dans le sens du mouvement de la source et, dans le sens opposé avec la vitesse $c+u$. On remarque que la perturbation aura des effet différents selon que u est inférieur ou supérieur à c .

Dans le cas d'une source, à vitesse d'écoulement uniforme supersonique ($u > a$), les points des cercles ayant une même direction de propagation, sont représentées par des droites rayonnées autour du point source, comprises à l'intérieur du cône. Les perturbations viennent en quelque sorte se sommer sur l'enveloppe; il en résulte que les grandeurs P , ρ , T , qui caractérisent localement le fluide, éprouvent sur l'enveloppe des variations plus grandes qu'ailleurs. Ce sont des variations de la masse volumique ρ qui ont permis de voir ces phénomènes. L'enveloppe s'appelle *onde de Mach*, ses traces sur le plan de figure sont les *lignes de Mach*, appelés encore *lignes caractéristiques*.

Dans le triangle SAB (Fig. 1.1) nous avons:

$$\sin \alpha = \frac{ct}{ut} = \frac{1}{M}$$

où le rapport $M = u / c$ est le nombre de Mach et α est l'angle de Mach.

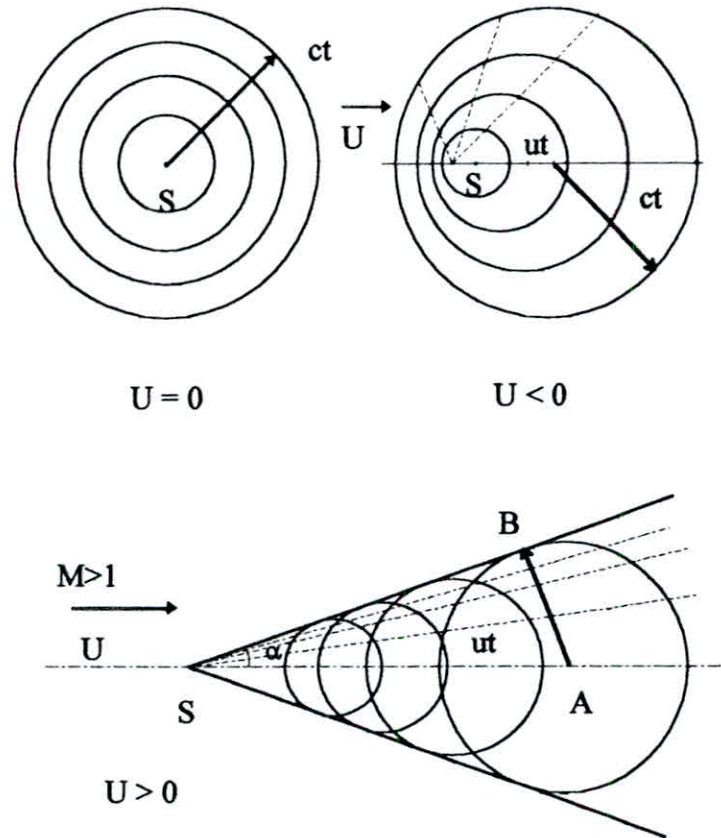


Fig. 1.1 Ondes sonores.

Si la source de l'ébranlement n'est pas ponctuelle, mais a des dimensions finies, c'est le cas du bord d'attaque d'une aile ou d'une partie antérieure d'un projectile qui provoquent, en déplacement relatif, des variations de pressions finies, dans ce cas, la vitesse de propagation n'est plus égale à celle du son, le domaine perturbé a une forme complexe.

Il est donc apparu que, contrairement au cas des vitesses subsoniques, les perturbations n'atteignent que certaines zones de l'écoulement supersonique. Ces « zones d'influence » sont intérieures aux surfaces des enveloppes issues des sources de perturbations.

I. 4. CORPS PLONGE DANS UN VEINE FLUIDE

Les phénomènes engendrés par le déplacement, d'un corps dans un fluide au repos sont souvent ramenés, par un changement de système de référence, à l'étude de l'écoulement du fluide autour du corps immobile.

La présence du corps engendre des perturbations qui modifient la répartition des vitesses et des pressions dans la veine. Les perturbations, s'étendent jusqu'à l'infini du corps.

Physiquement, on peut définir une région de l'espace où la perturbation reste inférieure à une valeur aussi faible que l'on désire et où l'écoulement reste permanent, on dira que l'on est à l'infini [2].

En écoulement à vitesse supersonique, la perturbation causée par le corps se trouve localisée dans une partie de l'espace. Il existe un domaine amont non perturbé (voir fig. 1.2). Il est limité par une onde de choc qui prend naissance sur le corps (onde attachée, voir fig. 1.2, bord d'attaque effilé) ou en avant des corps (onde détachée, voir fig. 1.2, relative à une aile dont le bord d'attaque est arrondi). Il existe aussi un domaine aval, non perturbé, dans l'hypothèse où le fluide est parfait. L'écoulement peut demeurer entièrement supersonique ou présenter une onde de choc détachée.

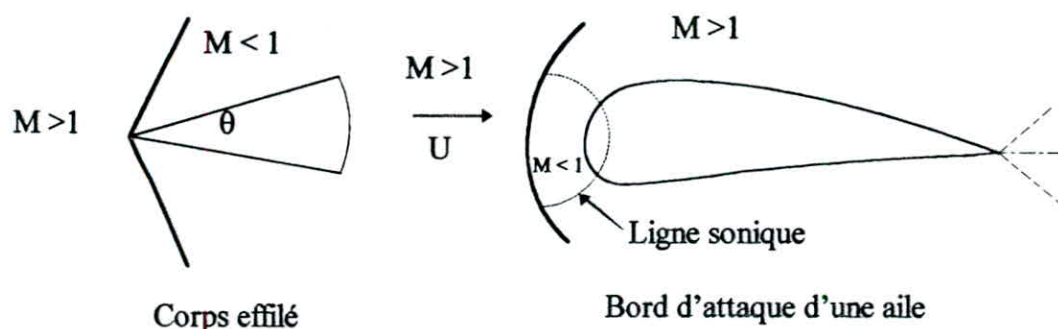


Fig. 1.2 Corps plongé dans un veine fluide ($M > 1$).

I. 4. 1. FLUIDE AU REPOS ET POINT D'ARRÊT A L'AVANT D'UN CORPS

L'état d'un fluide (U, P, ρ, T) dit générateur d'écoulement considéré comme obtenu par un processus isentropique, à partir du *fluide au repos*. Les grandeurs génératrices P_0, ρ_0, T_0 , sont donc définies par un filet fluide où en faisant $U=0$.

Le filet fluide caractérisé par U, P, ρ et T dans une section S s'arrête en aval de cette section, sur un corps, si l'écoulement est isentropique entre S et le *point d'arrêt*, l'état de fluide est donc, au point d'arrêt, le même que l'état générateur.

Dans le cas d'un arrêt réel^(*) n'est pas isentropique, les grandeurs au point d'arrêt ne sont plus égales aux grandeurs génératrices locales. C'est le cas de l'arrêt d'un écoulement supersonique qui effectue au travers d'une onde de chocs (relations de Saint-Venant).

I. 5. ECOULEMENT A VITESSE SUPERSONIQUE

En écoulement supersonique, le mouvement relatif d'un corps donne lieu, au phénomène des ondes de choc. Ce sont des surfaces de discontinuité de vitesse, de pression, de masse volumique et de température. L'étude mathématique de ces ondes de choc, ondes de compression, avait été faite entièrement par RIEMAN (1860), HUGONIOT (1885). La théorie est établie en fluide parfait. Selon les conditions théoriques, l'onde de choc peut être normale, oblique ou courbe.

I. 5. 1. FORMATION DES ONDES DE CHOC

Un gaz mis en mouvement par le déplacement d'un piston plan infini, chaque déplacement infinitésimal du piston dans un sens ou dans l'autre (dans la direction du $dx > 0$ ou $dx < 0$) crée une onde sonore plane ($dp > 0$ ou $dp < 0$) qui se propage avec la célérité du son. Le fluide est comprimé au passage ($dx > 0$) de l'onde sonore, supposant isentropiquement, la température croît, ce qui fait que l'onde suivante se propage plus vite. Il en résulte que les ondes successives finiront par se rattraper et forment une onde de compression d'intensité finie (*onde de choc*).

Les perturbations créent aussi des ondes de choc dans le gaz par des modifications infinitésimales successives $d\theta$ de la direction d'une paroi longée dans un écoulement supersonique, voir figure 1.3.

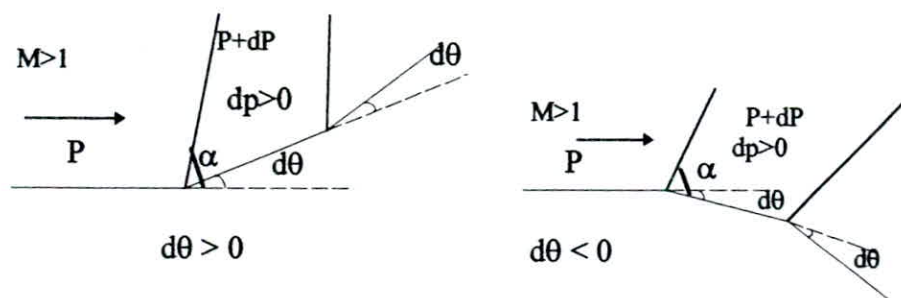


Fig. 1.3 Influence des déviations sur le corps.

^(*) On peut considérer un arrêt isentropique virtuel, dans le cas où on peut relier les grandeurs locales aux condition génératrices locales, sans faire aucune hypothèse sur la manière dont l'état fluide a été engendré.

Les enveloppes des perturbations sont les lignes de Mach issues des arrêtes de la paroi A la traversée d'une onde quelconque, la pression varie de dp positive ou négative suivant le signe de l'angle de déviation $d\theta$. Si $d\theta > 0$ ($dp > 0$), les ondes successives se raidissent par rapport à l'infini amont de l'écoulement. Elles convergent pour former une enveloppe à une distance suffisante de la paroi (onde de choc). Si inversement $d\theta < 0$, les ondes de Mach de détente ($dp < 0$) divergent et ne peuvent pas former de discontinuité. On a affaire à une onde de détente.

I. 5. 2. ONDES DE CHOC OBLIQUE

I. 5. 2. 1. EQUATIONS DE CONSERVATION

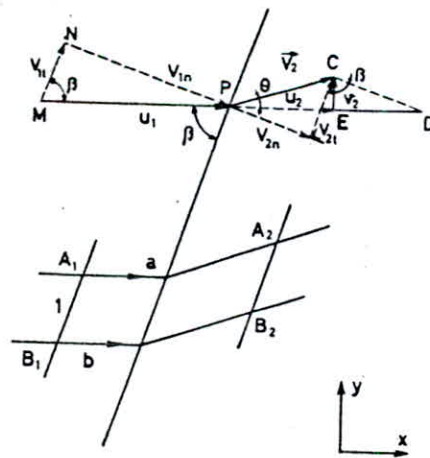


Fig. 1.4 Choc oblique plan.

β :inclinaison du choc Σ .

θ :déviation de la vitesse en aval du choc Σ .

Nous avons les relations suivantes de la figure (1.4) entre les composantes :

$$\begin{aligned}
 V_{1n} &= u_1 \sin\beta \\
 V_{1t} &= u_1 \cos\beta \\
 V_{2n} &= u_2 \sin\beta - v_2 \cos\beta = V_2 \sin(\beta - \theta) \\
 V_{2t} &= u_2 \cos\beta + v_2 \sin\beta = V_2 \cos(\beta - \theta)
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

En appliquant les principes fondamentales de la mécanique et de la thermodynamique (conservation) dans l'hypothèse d'un écoulement permanent et adiabatique d'un gaz parfait. On obtient :

- Conservation de la masse :

$$m = \rho_1 V_{1n} = \rho_2 V_{2n} \quad \dots\dots(1.12)$$

- Conservation de la quantité de mouvement :

Sur l'axe (n); normal au choc Σ :

$$P_1 + \rho_1 V_{1n}^2 = P_2 + \rho_2 V_{2n}^2 \quad \dots\dots(1.13)$$

$$V_{1t} = V_{2t} \quad \dots\dots(1.14)$$

- Conservation de l'énergie :

En tenant compte de (1.12)

$$C_p T_1 + \frac{V_1^2}{2} = C_p T_{01} = C_p T_2 + \frac{V_2^2}{2} = C_p T_{02} \quad \dots\dots(1.15)$$

ou :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \cdot c^{*2} \quad \dots\dots(1.16)$$

En introduisant les composantes de vitesses suivant n et t (voir Fig. 1.4) tenant compte de (1.14), il vient :

$$\frac{V_{1n}^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{V_{2n}^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_2}{\rho_2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \cdot c_n^{*2} \quad \dots\dots(1.17)$$

où :

$$c_n^{*2} = c^{*2} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \cdot V_{1t}^2 \quad \dots\dots(1.18)$$

II. 5. 2. 2. RELATIONS D'HYGONIOT

Moyennant les équations (1.12), (1.13), (1.15) il vient :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{P_2}{P_1}}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{P_2}{P_1}} \quad \dots\dots(1.19)$$

C'est la relation d'Hygoniot qui montre qu'à travers l'onde de choc l'évolution est inversible.

Au moyen de l'équation (1.19) et selon le second principe de la thermodynamique, on peut montrer que nécessairement :

$$\frac{P_2}{P_1} > 1 \quad \text{et} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} > 1$$

et avec (1.12) :

$$\frac{V_{1n}}{V_{2n}} = \frac{\rho_2}{\rho_1} > 1$$

Donc une onde est nécessairement une onde de compression et le fluide est ralenti en traversant la discontinuité.

I. 5. 2. 3. RELATIONS DE PRANDLT

En éliminant les pressions et masses volumiques entre les équations de conservation, nous obtenons :

$$V_{1n} \cdot V_{2n} = c_n^{*2} \quad \text{.....(1.20)}$$

Avec (1.18), on obtient :

$$V_{1n} \cdot V_{2n} = c^* - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot V_{1t}^2 \quad \text{.....(1.21)}$$

C'est la relation de Prandlt.

Moyennant la relation intégrale de Saint-Venant (1.6), on a :

$$V_{1n}(V_{1n} - V_{2n}) = \frac{2}{\gamma + 1}(V_{1n}^2 - c_1^2) \quad \text{.....(1.22)}$$

qui est une forme de la relation de Prandlt.

I. 5. 2. 4. RELATIONS ENTRE VARIABLES AMONT ET AVAL

Les relations suivantes s'obtiennent à partir des équations du mouvement de (1.12) à (1.17) et les relations (1.11) existant entre les composants des vitesses :

Calcul de $\frac{P_2}{P_1}$, $\frac{T_2}{T_1}$, $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, et M_2 en fonction de M_1 et β .

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left\{ M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right\} \quad \text{.....(1.23)}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left\{ \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta} + \frac{\gamma - 1}{2} \right\} \quad \text{.....(1.23)}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{4\gamma}{(\gamma-1)^2} \left\{ M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right\} \left\{ \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta} + \frac{\gamma-1}{2} \right\} \quad \text{.....(1.24)}$$

$$M_1^2 = \frac{2 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\gamma-1}{2\gamma}} + \frac{M_1^2 \cos^2 \beta}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \sin^2 \beta} \quad \text{.....(1.25)}$$

Il existe aussi une relation entre M_1 , θ , et β :

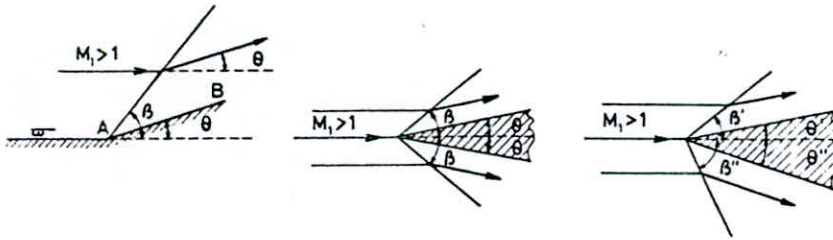


Fig. 1.5

$$M_1 = \left[\sin^2 \beta - \frac{\gamma+1}{2} \cdot \frac{\sin \beta \sin \theta}{\cos(\beta-\theta)} \right]^{-1/2} \quad \text{.....(1.26)}$$

I. 5. 2. 5. VARIATION D'ENTROPIE ET DE LA PRESSION GENERATRICE

On établit en tenant compte de l'adiabaticité de l'écoulement :

$$\Delta S = C_v \ln \left[\frac{P_{01}}{P_{02}} \right]^{\gamma-1} \quad \text{.....(1.27)}$$

avec :

$$\frac{P_{01}}{P_{02}} = \left[\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \left[\frac{(\gamma-1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{(\gamma+1)M_1^2 \sin^2 \beta} \right] \quad \text{.....(1.28)}$$

REMARQUE :

On obtient dans le choc normal les mêmes relations en faisant l'angle d'inclinaison du choc $\beta = \pi/2$.

I. 6. ONDES DE CHOC COURBES

Lorsque le corps est arrondi, le choc détaché dès que le nombre de Mach est supérieur ou égale à 1. Le choc présente une courbure, due à la densité de l'écoulement le long de la surface convexe, à laquelle est liée une variation d'entropie donnant lieu à un gradient transversal d'entropie associé à un écoulement rotationnel.

La distance de détachement du choc dépend de la géométrie du corps. Diverses théories donnent en particulier la position du point sonique sur l'obstacle.

La distance de détachement du choc Δ est plus grande en écoulement bidimensionnel qu'en écoulement de révolution, à égalité de nombre de Mach amont, décroît d'autre part quand le nombre de Mach croît. La figure 1.6, donne la position du choc en fonction du Mach infini.

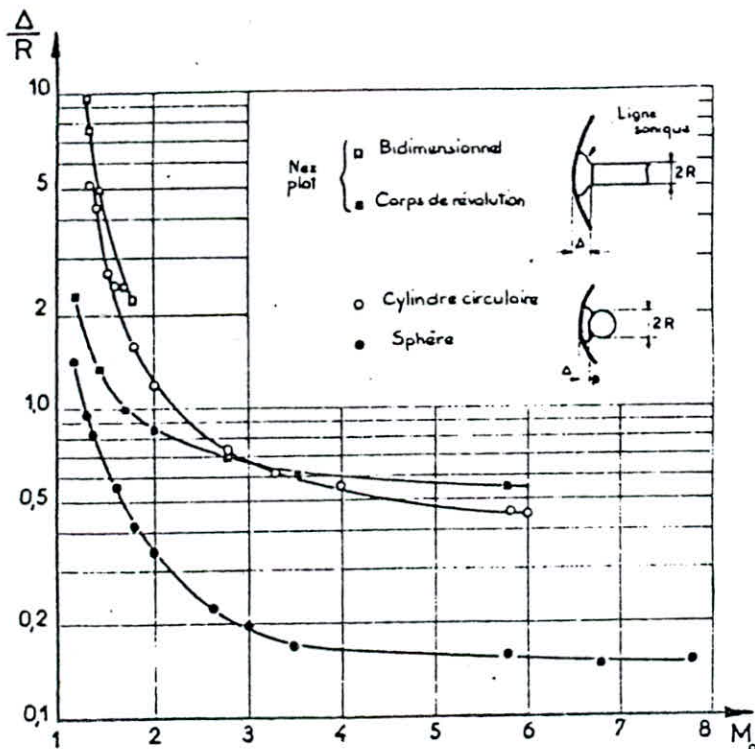


Fig. 1.6. Distance de détachement du choc.

Pour un cylindre circulaire de rayon R , le détachement Δ/R est un peu inférieur à 0.5 et pour une sphère $\Delta/R = 1/6$. Ceci dès que le nombre de Mach infini est supérieur à 3.

I. 6. 1. METHODES NUMERIQUES DE CALCUL DES ONDES DE CHOC DETACHES

Les méthodes directes, dans lesquelles les données sont la forme géométrique de l'obstacle, et les conditions en amont, ce problème est particulièrement difficile car les conditions aux limites complémentaires sont les conditions d'Hygoniot à la traversé du choc, dont la forme est inconnue à priori.

Les méthodes inverses, au contraire, procèdent à partir d'une forme donnée de choc ; ainsi toutes les conditions aux limites sont connues au départ sous la forme classique de Cauchy.

Les méthodes instationnaires : qui s'apparentent aux méthodes de relaxations (Southwell), Elles consistent à partir d'une situation initiale défini plus ou moins arbitrairement dans tout le domaine d'intégration et à lui appliquer les équations de l'écoulement instationnaire, pour en suivre l'évolution dans le temps. L'obstacle et la vitesse à l'infini V_∞ restants fixes, la solution tend vers un état asymptotique où toutes les dérivées temporelles sont nulles, c'est à dire vers la solution stationnaires.

Dans ces dernieres méthodes (instationnaires), les résidus sont identifiés aux dérivées temporelles des fonctions inconnues, ce qui donne une base plus rationnelle à la marche des itérations effectués en fonction du temps.

Un autre avantage de ces méthodes est de rendre hyperbolique les équations même dans les régions subsoniques de l'écoulement.

CHAPITRE II

Modélisation d'un
écoulement de fluide
parfait compressible

INTRODUCTION

La modélisation potentielle (isentropique) développée par Hols, Al, Jameson d'écoulements irrotationnels s'avère insuffisante, car ne prenant pas en compte l'importante production d'entropie derrière les chocs à forte intensité.

Le modèle d'Euler, obtenu en négligeant les termes visqueux et les termes liés au transfert thermique du modèle de Navier-Stokes, traduit la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Il fournit une représentation physiquement plus exacte d'un écoulement en ignorant les effets visqueux.

II. 1. EQUATIONS D'EULER:

La description mathématique de l'état d'un fluide parfait compressible en mouvement se fait au moyen des fonctions déterminant la distribution de vitesse du fluide $u = u(x, y, t)$ et de deux quelconques de ses grandeurs thermodynamiques, $P = p(x, y, t)$ et $\rho = \rho(x, y, t)$, par exemple. Les autres quantités sont déterminées par l'équation d'état.

Les écoulements de fluides parfaits compressibles sont régis par les équations suivant:

○ Loi d'état des gaz parfaits:

$$P = \rho \cdot R \cdot T \quad \text{.....(2.1)}$$

○ Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{U}) = 0 \quad \text{.....(2.2)}$$

○ Quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + (\bar{U} \cdot \nabla) \cdot \bar{U} = -\frac{1}{\rho} \bar{\nabla} P \quad \text{.....(2.3)}$$

○ Conservation d'énergie :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + (\bar{U} \cdot \nabla)(e + P) = 0 \quad \text{.....(2.4)}$$

où P est fonction de e :

$$P = (\gamma - 1) \left(e - \frac{\rho}{2} \bar{U}^2 \right) \quad \text{.....(2.5)}$$

Pour l'établissement des équations (2.2), (2.3) et (2.4) voir annexe.

avec:

$\rho \bar{U}$: la densité de flux de masse.

ρ : la masse volumique du fluide, P sa pression, T sa température et R la constante des gaz parfaits.

\bar{U} : le vecteur vitesse, $\bar{U} = (u, v)$.

e : l'énergie totale du fluide par unité de volume.

$\gamma = c_p / c_v$ est la proportion des chaleurs spécifiques ($\gamma=1.4$ pour l'air)

Le système d'équations (2.2), (2.3), (2.4) et (2.5) complété par les conditions aux limites qui seront précisés ultérieurement, permet de déterminer \bar{U} , ρ et P et donc de déterminer l'état de fluide à chaque instant t et en tout point (x, y) de l'espace.

II. 2. ADIMENSIONNEMENT DES VARIABLES:

On désigne par l_0 , u_0 et ρ_0 les quantités caractéristiques pour la longueur, la vitesse et la densité respectivement, on a:

$$\begin{cases} \bar{X} = l_0 \bar{\bar{X}}, \text{ où } \bar{\bar{X}} = (x, y) \\ \bar{U} = u_0 \bar{\bar{U}} \\ \rho = \rho_0 \bar{\bar{\rho}} \end{cases} \quad \dots\dots(2.6)$$

où les variables adimensionnées sont surlignés.

On va adimensionner aussi les variables t , P et e en fonction des quantités caractéristiques l_0 , ρ_0 et u_0 , on pose :

$$\begin{cases} t = t_0 \bar{\bar{t}} \\ P = p_0 \bar{\bar{P}} \\ e = e_0 \bar{\bar{e}} \end{cases} \quad \dots\dots(2.7)$$

Les relations (2.2), (2.3), (2.4) avec les variables adimensionnées deviennent:

$$\begin{cases} \frac{l_0}{t_0 u_0} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \nabla(\bar{\rho} \bar{\mathbf{U}}) = 0 \\ \frac{\rho_0 u_0^2}{P_0} \left(\frac{l_0}{t_0 u_0} \frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial \bar{t}} + (\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{U}} \right) = -\frac{1}{\bar{\rho}} \bar{\nabla} \bar{P} \\ \frac{l_0}{t_0 u_0} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \bar{t}} + (\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla)(\bar{\epsilon} + \bar{P}) = 0 \end{cases} \dots\dots(2.8)$$

On prend donc:

$$\begin{cases} t_0 = \frac{l_0}{u_0} \\ P_0 = e_0 = \rho_0 u_0^2 \end{cases} \dots\dots(2.9)$$

Les équations dont les variables adimensionnées se réduisent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \nabla \cdot \bar{\rho} \bar{\mathbf{U}} = 0 \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial \bar{t}} + (\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{U}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \bar{\nabla} \bar{P} \\ \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \bar{t}} + (\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla)(\bar{\epsilon} + \bar{P}) = 0 \end{cases} \dots\dots(2.10)$$

On choisit en pratique l_0 , u_0 et ρ_0 tels que \bar{u} et $\bar{\rho}$ soient égaux à 1 à l'infini, on aura:

$$\begin{aligned} \bar{t}_0 &= \frac{1}{u_0} \\ P_0 &= e_0 = \rho_0 u_0^2 \end{aligned}$$

On notera que (u_0, ρ_0, P_0) ne correspond pas à un état physique.

Dans ce qui suit, on travaillera avec les variables adimensionnées et on ne surlignera plus les variables pour la simplicité de l'écriture.

II. 3. ECRITURE MATRICIELLE

Soit W le vecteur des variables conservées: $W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}$ (2.11)

$W = (W_k)_{k=1,4}$

Le système (2.10) s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \bar{U} = 0 \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + (\bar{U} \cdot \nabla) \bar{U} = -\frac{1}{\rho} \bar{\nabla} P \\ \frac{\partial e}{\partial t} + (\bar{U} \cdot \bar{\nabla})(e + P) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} \\ \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial(e+P)}{\partial x} + v \frac{\partial(e+P)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Le système s'écrit sous la forme vectorielle comme suit:

$W_t + F(W)_x + G(W)_y = 0$ (2.12)

$P = (\gamma - 1)(e - \rho U^2/2)$

avec:

$W_t = \frac{\partial W}{\partial t}$, même notation pour les dérivées par rapport à x et y:

$\|\bar{U}\|^2 = u^2 + v^2$

et F, G sont des fonctions de W.

$F(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho v^2 \\ (e + P)u \end{pmatrix}$, $G(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ (e + P)v \end{pmatrix}$ (2.13)

Au système (2.12) doivent être ajoutées des conditions aux limites et des conditions initiales.

II. 4. PROPRIETES DU SYSTEME:

Fonctions homogènes :

On peut vérifier que F et G sont des fonctions homogènes en W, c'est-à-dire:

$$F(\lambda W) = \lambda F(W)$$

$$G(\lambda W) = \lambda G(W)$$

Ce qui se traduit par les relations suivantes:

$$F(W) = F'(W)W$$

$$G(W) = G'(W)W$$

où F' , G' sont des matrices des dérivées de F et G suivant les composantes du vecteur W.

Loi hyperbolique:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + A_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \quad \text{.....(2.14)}$$

où: $\xi = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}$, A_1 et A_2 sont des matrices 4x4

Le système (2.14) de 4 équations de premier ordre peut être classé différemment par rapport à la variable temps t, selon les propriétés de la matrice caractéristique H.

$$H = H(W, \eta_1, \eta_2) = \eta_1 \cdot A_1 + \eta_2 \cdot A_2 \quad \text{.....(2.15)}$$

où: η_1, η_2 sont des constantes réelles

Le système (2.14) par rapport à la variable de temps est dit:

Hyperbolique, si toutes les valeurs propres de H sont réelles et les vecteurs propres correspondants sont linéairement indépendants pour tous η_1 et η_2 .

Les équations d'Euler sont classées dans la catégorie des lois hyperboliques. Dans ce cas précis, la matrice H est diagonalisable. Il existe donc une matrice inversible $T(W) = T(W, \eta_1, \eta_2)$ et une matrice diagonale $\Lambda(W) = \Lambda(W, \eta_1, \eta_2)$ contenant les valeurs propres de H , telle que:

$$H = T \cdot \Lambda \cdot T^{-1} \quad \text{.....(2.16)}$$

Les solutions des équations d'Euler peuvent développer des discontinuités, par exemple une onde de choc, en un temps fini même si la donnée initiale est très régulière. On cherche à capturer des solutions physiquement acceptables comme limites, quand ε tend vers 0 des solutions visqueuses de :

$$W_t + F(W)_x + G(W)_y = \varepsilon \Delta W, \varepsilon > 0 \quad \text{.....(2.17)}$$

CHAPITRE III

*Approximation du
problème hyperbolique
par la méthode des
EF/VF*

INTRODUCTION

Le problème est approché, en utilisant un schéma explicite décentré dont la précision est d'ordre un. Tous les schémas décentrés donnent des solutions qui ne diffèrent sensiblement qu'au voisinage des discontinuités [4].

Le décentrage assure la stabilité du schéma qui comme tous les schémas décentrés ne nécessite pas l'adjonction d'un terme de viscosité artificielle. Dans le cas de choc fort, un schéma a comme principe de base, la décomposition du flux en ses parties positives et négatives, qui s'est révélé insuffisamment stable. La viscosité interne du schéma n'étant pas assez forte sur les discontinuités.

Une variante de ces schémas développée, équivalente à l'ordre deux, mais qui avec une régularisation à l'aide d'une viscosité résiduelle, a permis de calculer des écoulements avec des ondes de choc très forts détachée à l'avant de l'obstacle. C'est la famille Q-schéma qu'on va rappeler leurs principales conclusions et appliquer leurs résultats au schéma étudié dans ce travail.

III. 1. ESPACE D'APPROXIMATION

Le problème est approché en utilisant:

- ① Une discrétisation du domaine d'analyse par les éléments finis.

l'élément utilisé est l'élément triangle à 3 noeuds conforme de Lagrange de degré 1. Le maillage avec ce dernier présente une grande flexibilité pour discrétiser des géométries de forme arrondi, et pour raffiner les zones à forts gradients de pression. Cette souplesse autorise une même précision de l'approximation qu'en d'autres méthodes.

- ② Les éléments sont employés avec une approximation de type volume-finis (aires-finis), c'est-à-dire constante par volume (aire).

Pour cela on définit \mathfrak{T}_h une triangulation du domaine Ω comporte N_h noeuds et M_h éléments :

$$\mathfrak{T}_h = \left\{ T_i, i = 1, M_h / \bigcup_{i=1}^{M_h} T_i = \Omega \right\} \quad , h \text{ est un paramètre positif.} \quad \dots\dots(3.1)$$

En chaque noeud S_i du triangle T_i , on définit le support (cellule), soit \hat{S}_i , comme étant la surface délimitée par les segments (m_{ij}, g_k) , tels que :

- g_k est le barycentre du triangle numéro k ,
- m_{ij} est le milieu de la barre (S_i, S_j) ,
- S_i est le sommet du triangle T_i .

La figure (3.1) représente l'intersection du support \hat{S}_i avec un triangle dont le noeud S_i est sommet.

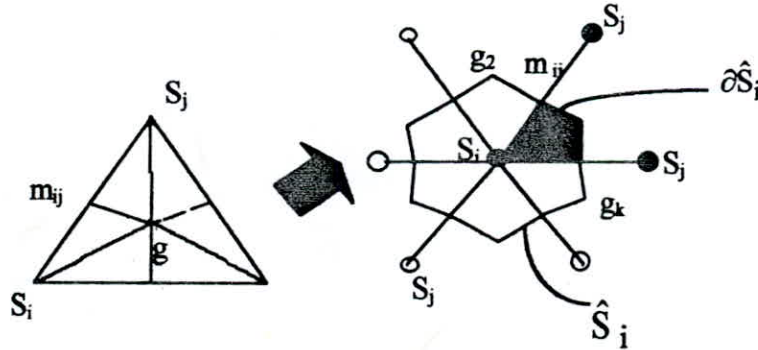


Fig.3.1 *Élément de contrôle*

L'espace de l'approximation est défini comme étant l'espace V_h des fonctions constantes par morceaux (sous-domaine) sur chaque support \hat{S}_i .

Plus précisément ;

$$V_h = \left\{ v_h / v_h|_{\hat{S}_i} = v_{hi} = \text{constante}, \quad \forall \hat{S}_i \right\} \quad \dots\dots(3.2)$$

En suite, on peut définir une base de V_h comme suit :

$$\chi_i(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \hat{S}_i \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad \dots\dots(3.3)$$

Alors , $\chi_i \in V_h$ et $\{\chi_i\}_{i=1, n_h}$ forme une base de V_h

III. 2. FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME DISCRETISE

On définit un vecteur solution approchée W_h tel que :

$$W_h \in V_h \text{ et } W|_{\hat{S}_i} = W_{hi}$$

Si W est la solution du problème (2.12) alors W_h est solution de :

$$\iint_{\Omega} v_h [(W_h)_t + F(W_h)_x + G(W_h)_y] dx dy = 0 \quad \dots\dots(3.4)$$

On peut écrire aussi :

$$\iint_{\Omega} (W_h)_t v_h dx dy + \iint_{\Omega} (F(W_h)_x + G(W_h)_y) v_h dx dy = 0 \quad \dots\dots(3.5)$$

On transforme la seconde intégration à une intégrale sur le contour $\partial\Omega$.

On applique la formule de Green, ce qui donne :

$$\iint_{\Omega} (W_h)_t v_h dx dy + \int_{\partial\Omega} [F(W_h)v_x + G(W_h)v_y] v_h d\ell = 0 \quad \dots\dots(3.6)$$

où $\vec{v} = (v_x, v_y)$ est la normale extérieure à $\partial\Omega$ (le contour ℓ).

La discrétisation intégrale de l'équation (3.6), se décompose sur chaque portion d'espace \hat{S}_i , en :

La discrétisation intégrale de l'équation (3.6), se décompose sur chaque portion d'espace \hat{S}_i , en :

$$\sum_{S_i} (W_{hi})_t v_{hi} \cdot \text{aire}(\hat{S}_i) + \sum_{S_i} \int_{\partial \hat{S}_i} [F(W_{hi})v_x + G(W_{hi})v_y] v_{hi} dl = 0 \quad \dots\dots(3.7)$$

On obtient en chaque noeud S_i dont le support \hat{S}_i , l'équation suivante :

$$(W_{hi})_t v_{hi} \cdot \text{aire}(\hat{S}_i) + \int_{\partial \hat{S}_i} [F(W_{hi})v_x + G(W_{hi})v_y] v_{hi} dl = 0 \quad \dots\dots(3.8)$$

Pour l'approche de la dérivée en temps, on utilise une approximation explicite de premier ordre, on écrit donc :

$$(W_{hi})_t = \frac{W_{hi}^{n+1} - W_{hi}^n}{\Delta t} + 0\Delta t \quad \dots\dots(3.9)$$

avec : $W_{hi}^n = W_{hi}(n.\Delta t)$, Δt étant le pas de temps.

Dans l'égalité (3.8), on ne peut pas définir l'intégrale sur le contour ($\int_{\partial \hat{S}_i}$) de manière exacte, car les vecteurs W_h et v_h sont seulement constants par morceaux et donc discontinues le long de $\partial \hat{S}_i$.

On approche cet intégrale en sommant tous les segments formant le contour du support \hat{S}_i .

Et, on prend pour fonction test v_h les fonctions de base χ_i de V_h définies en (3.3), on obtient alors l'équation suivante :

$$\frac{W_{hi}^{n+1} - W_{hi}^n}{\Delta t} \cdot \text{aire}(\hat{S}_i) + \sum_{(m_{ij}, g_k)} \int [F(W_{hi}^n)v_x + G(W_{hi}^n)v_y] dl = 0 \quad \dots\dots(3.10)$$

La somme étant prise sur tous les segments (m_{ij}, g_k) des triangles dans le noeud S_i est sommet.

Pour l'approximation de l'intégrale sur le contour on introduit les notions suivantes :

$$\eta_{xij} = \sum_{k=1}^m v_{xij} \cdot |m_{ij}, g_k| = \int_{(m_{ij}, g_k)} v_x dl$$

$$\eta_{yij} = \sum_{k=1}^m v_{yij} \cdot |m_{ij}, g_k| = \int_{(m_{ij}, g_k)} v_y dl$$

Ceci pour tout j voisin de i (voir figure 3.2).

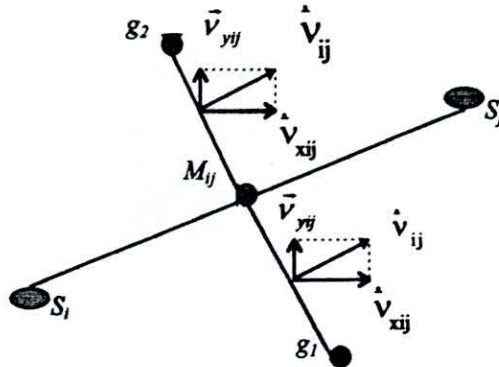


Fig. 3.2 Segment de contrôle pour une liaison [S_i, S_j]

En fin, on pose :

$$M_{ij}^n = (\eta_{xij}F + \eta_{yij}G)(W_{hi}^n, W_{hj}^n) \tag{3.11}$$

alors l'équation (3.10) s'écrit sous la forme :

$$\frac{W_{hi}^{n+1} - W_{hi}^n}{\Delta t} \cdot \text{aire}(\hat{S}_i) + \sum_j M_{ij}^n = 0 \tag{3.12}$$

où M_{ij} est le flux numérique, il doit être défini de manière consistante c'est-à-dire M_{ij}ⁿ(.,.) doit vérifier :

$$M_{ij}^n(w, w) = \phi(w) \tag{3.13}$$

où :

$$\phi(w) = \eta_x F(W) + \eta_y G(W)$$

On définit la matrice flux P_{ij} telle que :

$$\begin{cases} M_{ij}^n = (P_{ij}(\cdot))(W_i^n, W_j^n) \\ P_{ij}(\cdot) = (\eta_{xij}F' + \eta_{yij}G')(\cdot) \end{cases} \tag{3.14}$$

Le calcul de la matrice flux fait avec une approximation centrée, un choix naturel est :

$$P_{ij}^n(W_{hi}, W_{hj}) = (\eta_{xij}F' + \eta_{yij}G')\left(\frac{W_{hi}^n + W_{hj}^n}{2}\right) \quad \dots\dots(3.15)$$

III. 3. SCHEMA DECENTRE POUR L'APPROXIMATION DU FLUX

A fin de mieux comprendre d'où vient l'idée du décentrage, on va se ramener à un problème en modèle des équations d'Euler en dynamique des gaz monodimensionnel, On a :

$$W_t + F(W)_x = 0 \quad \dots\dots(3.16)$$

W et F(W) sont définis en (2.11), (2.13)

La loi de conservation est homogène, hyperbolique et non linéaire c'est-à-dire :

$$F(W) = F'(W)W$$

F'(W) diagonalisable

Donc il existe une matrice T(W) inversible et une autre diagonale Λ(W), tel que :

$$F'(W) = T(W) \Lambda(W) T^{-1}(W) \quad \dots\dots(3.17)$$

On peut écrire l'équation (3.16) sous la forme suivante :

- forme conservative :

$$W_t + (F'(W) W)_x = 0 \quad \dots\dots(3.18)$$

- forme non conservative :

$$W_t + F'(W) W_x = 0 \quad \dots\dots(3.19)$$

On prend l'équation (3.19), on remplace F'(W) par sa factorisation (3.17) et que l'on multiplie à gauche, l'équation par T⁻¹(W), on obtient :

$$T^{-1}(W) W_t + \Lambda(W) T^{-1}(W) W_x = 0 \quad \dots\dots(3.20)$$

C'est la forme caractéristique des équations d'Euler.

On écrit cette dernière équation composantes par composantes :

$$\sum_{k=1}^m T_{jk}^{-1}(W) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_j(W) \frac{\partial}{\partial x} \right) W_k = 0 \quad , j=1,3 \quad \dots\dots(3.21)$$

λ_j , les valeurs propres de $F'(W)$.

où $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u$ et $\lambda_3 = u + c$, avec $c^2 = \frac{\gamma P}{\rho}$

c est la vitesse du son.

Cette équation est non linéaire, si on fixe t , $T^{-1}(W)$ et λ_j , on remarque que chaque composante W_k , $k=1,3$ est dérivée le long de la $j^{i\text{ème}}$ direction caractéristique $(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_j(W) \frac{\partial}{\partial x})$.

Cela suggère de faire une approximation décentrée pour $\frac{\partial W}{\partial x}$ et centrée pour $\lambda_j(W)$ et $T_{jk}^{-1}(W)$.

Ce type de décentrage a été introduit par Courant-Isaacson-rees [4], dans le cas de système non conservatif.

Le calcul le vecteur flux, en chaque surface d'une cellule, est décomposé en une partie positive (forward) F^+ associé au mouvements positifs et une partie négative (backward) F^- , associé au mouvement négatifs (u par rapport à c). Les valeurs des variables conservées, utilisées dans le flux décomposé, doivent être consistantes avec F^+ et F^- , a-fin de respecter l'écoulement physique.

Une déduction d'une discrétisation conservative de (3.18) fait apparaître qu'on décentre localement la variable W_i suivant le signe des valeurs propres de la matrice caractéristique.

C'est-à-dire on prend :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} \cdot \Delta x + \phi_{i+1/2}^n - \phi_{i-1/2}^n = 0 \\ \phi_{i+1/2} = (F'(W)_{i+1/2} w)_x^n = (T\Lambda)_{i+1/2}^n \cdot (T^{-1}W)_{i+1/2}^n \\ \text{où la variable conservée prend:} \\ W_i = \begin{cases} W_i & \text{si } \lambda(W_{i+1/2}^n) > 0 \\ W_{i+1} & \text{si } \lambda(W_{i+1/2}^n) < 0 \end{cases} \\ \text{et} \\ \phi_{i+1/2}^n(W_{i+1/2}^n) = \phi^n\left(\frac{W_i + W_{i+1}}{2}\right) \end{array} \right. \quad \dots\dots(3.22)$$

Et, on écrit :

$$\begin{aligned}
 F^n(W) &= (P^+)_{i+1/2}^n W_i^n + (P^-)_{i+1/2}^n W_{i+1}^n \\
 P &= F' = T\Lambda T^{-1} \\
 P^\pm &= T\Lambda^\pm T^{-1} \\
 \Lambda^\pm &= \text{diag}(\lambda_k^\pm) \quad \dots\dots(3.23) \\
 \lambda^\pm &= \frac{\lambda \pm |\lambda|}{2} \\
 P_{i+1/2}^\pm &= P^\pm \left(\frac{W_i^n + W_{i+1}^n}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Un tel schéma basé sur ce principe d'approximation (décomposition de flux) est un schéma de Vijayasundram.

REMARQUE :

- ☞ On voit que si une des valeurs propres va être s'annule, on ne peut plus décentré dans sa direction.
- ☞ Ces méthodes de décentrage ont une viscosité numérique interne propre qui peut être interprétée comme l'adjonction à l'équation de départ d'une viscosité artificielle.
- ☞ Le décentrage explicite élimine l'entropie numérique générée due au discontinuité de l'écoulement.

Dans ce cas on sera obligé de faire une régularisation sur les valeurs propres.

III. 3. 2. Q-SCHEMA

Dans le cas de choc fort, la viscosité interne utilisant un schéma décentré n'étant pas assez fort sur les discontinuités. Une variante de ce type de schéma donc sera développé, équivalente à l'ordre deux , avec une régularisation sur les valeurs propres à permis de calculer l'écoulement aux présences des chocs forts. Le Q-schéma présenté dans ce paragraphe est une extension 3-D du Q-schéma développé par Harten et Van Leer [4].

On considère le problème scalaire monodimensionnel suivant :

$$u_t + au_x = 0 \quad \dots\dots(3.24)$$

où a est une constante réelle.

On approche le problème dans des intervalles $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, où les fonctions v_h sont constantes par morceaux, avec $x_{i-1/2}$ est le milieu de l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, $x_i = i\Delta x$.

L'approche de la dérivée temporelle est :

$$u_t = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \quad \text{.....(3.25)}$$

L'approximation spatiale est celle de Courant-Isaacson-Rees (schéma explicite, décentré, d'ordre 1) :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda a \begin{cases} u_{i+1}^n - u_i^n & \text{si } a < 0 \\ u_i^n - u_{i-1}^n & \text{si } a > 0 \end{cases} \quad \text{.....(3.26)}$$

où $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ et $u_i^n = u(i\Delta x, n\Delta t)$

En introduisant, les notations suivantes :

$$a^+ = \max(a, 0) = (a + |a|) / 2$$

$$a^- = \max(-a, 0) = (a - |a|) / 2$$

L'équation (3.26) peut alors se mettre sous la forme :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda [a^+ (u_i^n - u_{i-1}^n) + a^- (u_{i+1}^n - u_i^n)] \quad \text{.....(3.27)}$$

ou encore :

$$u_i^{n+1} = \lambda a^+ u_{i-1}^n + \lambda (1 - |a|) u_i^n - \lambda a^- u_{i+1}^n \quad \text{.....(3.28)}$$

ce schéma est stable sous la condition de Courant-Friedrichs-levy :

$$\lambda |a| < 1 \quad \text{.....(3.29)}$$

Système équivalent :

Si on écrit (3.27) sous la forme :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda}{2} a (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{\lambda}{2} |a| (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad \text{.....(3.30)}$$

On remarque que les solutions de (3.30) peuvent être donc considérées comme des solutions approchées, à l'ordre 2, du problème équivalent suivant :

$$v_t + av_x = \frac{\Delta x}{2} |a|(1 - |a|) v_{xx} \quad \dots\dots(3.31)$$

Plus précisément, cela reviendrait à ajouter à l'équation initiale un terme de viscosité artificielle. Si a est nul, ce terme de viscosité disparaît. Cette remarque justifie l'emploi d'une régularisation à l'aide d'une viscosité résiduelle.

On étend ces idées à la résolution d'un système de loi de conservation non linéaire.

$$u_t + [a(u)u]_x = 0 \quad \dots\dots(3.32)$$

le schéma analogue à (3.27) s'écrit :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda \phi_{i+1/2} - \lambda \phi_{i-1/2} \quad \dots\dots(3.33)$$

où $\phi_{i+1/2}^n = \phi(u_i^n, u_{i+1}^n)$, ϕ est le flux numérique.

Explicitons $\phi(u, v)$; on considère un vecteur de référence \tilde{u} suffisamment proche de u et de v de manière à avoir :

$$\phi(u, v) = A(\tilde{u})\tilde{u} + A^+(\tilde{u})(u - \tilde{u}) - A^-(\tilde{u})(v - \tilde{u}) \quad \dots\dots(3.34)$$

où $A^+ = (A + |A|) / 2$, $A^- = (A - |A|) / 2$ avec $A^+ - A^- = |A|$

Un choix de \tilde{u} qui permet de vérifier, la consistance de ce dernier avec le flux physique donnée par $\phi(u, u) = A(u)u$, est :

$$\tilde{u} = (u + v) / 2$$

Si on se place sur un segment $[x_i, x_j]$, la meilleure constante pour approcher la fonction sur ce segment est $\frac{f(x_i) + f(x_j)}{2}$ et non $f(\frac{x_i + x_j}{2})$.

Ceci peut expliquer la robustesse du Q-schéma au niveau du choc.

Posons $A(\tilde{u})\tilde{u} = \frac{A(u)u + A(v)v}{2}$, l'égalité (3.34) se réécrit sous la forme simplifiée :

$$\phi(u, v) = \frac{A(u)u + A(v)v}{2} - \frac{1}{2} \left| A\left(\frac{u+v}{2}\right) \right| (v - u) \quad \text{.....(3.35)}$$

Dans le cas où A est la matrice Jacobienne, $F(u)=A(u)u$, le flux se met alors sous la forme :

$$\phi(u, v) = \frac{F(u) + F(v)}{2} - \frac{1}{2} \left| A\left(\frac{u+v}{2}\right) \right| (v - u) \quad \text{.....(3.36)}$$

Ce schéma a été étudié par Harten, lax et Van Leer.

Extension au 2-D:

Les flux numériques de la famille des Q-schémas présentés par Van Leer dans le cas scalaire, ont une fonction de flux numérique ϕ définie par :

$$\phi^Q(u, v) = \frac{F(u) + F(v)}{2} + \frac{1}{2} Q(u, v)(v - u) \quad \text{.....(3.37)}$$

Et, défini par Harten comme suit :

$$\phi^H(u, v) = \frac{F(u) + F(v)}{2} - \frac{1}{2} |\tilde{A}(u, v)| \left(\frac{v - u}{2}\right) \quad \text{.....(3.38)}$$

où $\tilde{A}(u, v)$ est la matrice Jacobienne moyenne:

$$\tilde{A}(u, u) = A(u)$$

Suivant les idées des paragraphes précédentes, et à partir du flux numérique (3.38), on introduit le schéma suivant appelé « Q-schéma ».

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} \cdot \text{aire}(\tilde{S}_i) + \sum_j M_{ij}^n = 0 \\ M_{ij}^n = \frac{\tilde{F}(W_i^n) + v\tilde{F}(W_j^n)}{2} - \left| P_{ij} \left(\frac{W_i^n + W_j^n}{2}\right) \right| \left(\frac{W_j^n - W_i^n}{2}\right) \\ \tilde{F}(W_i^n) = \eta_x F(W_i^n) + \eta_y F(W_j^n) \\ P_{ij} \text{ est défini en (3.23)} \\ + \text{ les conditions aux limites.} \end{array} \right. \quad \text{.....(3.39)}$$

REMARQUE:

Le Q-shéma associé au flux numérique $\phi^H(u, v)$ est explicite, décentré, précis au premier ordre.

III. 4. CALCULS DES MATRICES JACOBIENNES

Nous avons vu qu'il fallait calculer les valeurs propres et les transformations qui diagonalisent la matrice du système (équations d'Euler).

Les équations s'écrivent :

$$W_t + F(W)_x + G(W)_y = 0 \tag{3.40}$$

où F et G sont définis en (2.13), le vecteur des variables conservées $W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}$.

$$\text{et } P = (\gamma - 1)\left(e - \frac{1}{2}\rho\|U\|^2\right). \tag{1.4}$$

$$\|U\|^2 = u^2 + v^2$$

On pose :

$$A_1 = F' \quad \text{et} \quad A_2 = G'$$

Alors :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{3-\gamma}{2}u^2 - \frac{\gamma-1}{2}v^2\right) & (3-\gamma)u & (1-\gamma)v & (\gamma-1) \\ -uv & v & u & 0 \\ -\left(\frac{\gamma u e}{\rho} - (\gamma-1)u\|U\|^2\right) & \left(\frac{\gamma e}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}(3u^2 + v^2)\right) & (1-\gamma)uv & \gamma u \end{pmatrix}$$

et

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ -\left(\frac{3-\gamma}{2}v^2 - \frac{\gamma-1}{2}u^2\right) & (1-\gamma)v & (3-\gamma)u & (\gamma-1) \\ -\left(\frac{\gamma v e}{\rho} - (\gamma-1)v\|U\|^2\right) & (1-\gamma)uv & \left(\frac{\gamma e}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + 3v^2)\right) & \gamma v \end{pmatrix}$$

La matrice caractéristique s'écrit :

$$P = \sum_{i=1}^2 \eta_i A_i$$

Pour la simplicité du calcul des valeurs propres de cette matrice, on considère les équations écrites dans le système des variables physiques :

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ P \end{pmatrix} \text{ tel que :}$$

$S(\tilde{W}) = W$, S application de $\mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$

l'équation (3.40) s'écrivent alors :

$$\tilde{W}_t + \tilde{A}_1 \tilde{W}_x + \tilde{A}_2 \tilde{W}_y = 0 \quad \dots\dots(3.41)$$

Les système des équations de (3.40) et (3.41) sont équivalent et on a :

$$\tilde{A}_1 = M^{-1} A_1 M \text{ où } M = S'$$

où

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & u \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 1/\rho \\ 0 & 0 & \rho c^2 & v \end{pmatrix}$$

S donnée par :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & (\rho u^2 / 2) & (\rho v^2 / 2) & \gamma / (\gamma - 1) \end{pmatrix}$$

et

$$M = S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 \\ (\|U\|^2 / 2) & \rho u & \rho v & 1/(\gamma - 1) \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 & 0 \\ -v/\rho & 0 & 1/\rho & 0 \\ ((\gamma - 1)\|U\|^2 / 2) & (1 - \gamma)u & (1 - \gamma)v & (\gamma - 1) \end{pmatrix}$$

La matrice $\tilde{P} = \sum_{i=1}^2 \eta_i \tilde{A}_i$ est reliée à P par :

$$P = M\tilde{P}M \tag{3.42}$$

Par conséquent les valeurs propres de P et \tilde{P} sont identiques, se sont des matrices semblables.

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} \eta U & \eta_1 \rho & \eta_2 \rho & 0 \\ 0 & \eta U & 0 & \eta_1 / \rho \\ 0 & 0 & \eta U & \eta_2 / \rho \\ 0 & \eta_1 \rho c^2 & \eta_2 \rho c^2 & \eta U \end{pmatrix}$$

où $\eta U = \eta_1 u + \eta_2 v$ avec: $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

II. 4. 1. CALCUL DES VALEURS PROPRES

On les obtiennent en faisant le déterminant nul :

$$\text{Det} (\tilde{P} - \lambda I) = (\eta U - \lambda)^2 [(\eta U - \lambda^2) - c(\eta_1^2 + \eta_2^2)] = 0.$$

d'où les valeurs propres de \tilde{P} (et de P) :

$$\begin{cases} \lambda_1(W) = \lambda_2(W) = \eta U. \\ \lambda_3(W) = \eta U + \alpha(\eta_1 \cdot \eta)^{1/2} \\ \lambda_4(W) = \eta U - \alpha(\eta_1 \cdot \eta)^{1/2} \end{cases} \tag{3.43}$$

Les valeurs propres du système sont toutes réelles.

D'après le caractère d'hyperbolicité des équations d'Euler où l'existence de la matrice \tilde{T} telle que :

$$\tilde{P} = \tilde{T} \tilde{\Lambda} \tilde{T}^{-1} \quad \dots\dots(3.44)$$

où $\tilde{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_k)$

III. 4. 2. MATRICE DES VECTEURS PROPRES

Soit \tilde{T} telle que :

$$T = M\tilde{T} \quad \text{et} \quad T^{-1} = M\tilde{T}^{-1}$$

D'où :

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \rho/c & \rho/c \\ (\eta_2\rho - u) & -\eta_2\rho & (\eta_1\rho + u\rho/c) & (-\eta_1\rho + u\rho/c) \\ (-\eta_1\rho - v) & \eta_1\rho & (\eta_2\rho + v\rho/c) & (-\eta_2\rho + v\rho/c) \\ (\rho(\eta_2u - \eta_1v) - \|U\|^2/2) & \rho(\eta_1v - \eta_2u) & (\rho(\eta_1u + \eta_2v) + \rho h/c) & (-\rho(\eta_1u + \eta_2v) + \rho h/c) \end{pmatrix}$$

où η_i ici prend : $\eta_i = \eta_i / (\sum_i \eta_i^2)^{1/2}$

L'inverse de T est :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} (\frac{\gamma-1}{2c^2}\|U\|^2 - 1) & (-\frac{\gamma-1}{c^2}u) & (-\frac{\gamma-1}{c^2}v) & (\frac{\gamma-1}{c^2}) \\ (\frac{\gamma-1}{2c^2}\|U\|^2 - 1 + \frac{\eta_2u - \eta_1v}{\rho}) & (-\frac{\gamma-1}{c^2}u - \frac{\eta_2}{\rho}) & (-\frac{\gamma-1}{c^2}u + \frac{\eta_1}{\rho}) & (\frac{\gamma-1}{c^2}) \\ (\frac{\gamma-1}{4\rho c}\|U\|^2 - \frac{\eta_1u + \eta_2v}{\rho}) & (-\frac{\gamma-1}{2\rho c} + \frac{\eta_2}{2\rho}) & (-\frac{\gamma-1}{2\rho c} + \frac{\eta_1}{2\rho}) & (\frac{\gamma-1}{2\rho c}) \\ (\frac{\gamma-1}{4\rho c}\|U\|^2 + \frac{\eta_1u + \eta_2v}{\rho}) & (-\frac{\gamma-1}{2\rho c} - \frac{\eta_1}{2\rho}) & (-\frac{\gamma-1}{2\rho c} - \frac{\eta_2}{2\rho}) & (\frac{\gamma-1}{2\rho c}) \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \eta U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta U + c(\eta \cdot \eta)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta U - c(\eta \cdot \eta)^{1/2} \end{pmatrix}$$

où : $h = \frac{e + P}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{\|U\|^2}{2}$: est l'enthalpie spécifique.

III. 5. ETUDE DES CONDITIONS AUX LIMITES

Dans la réalité on a trois types d'écoulements : interne (tuyères, par exemple), externe (profil dans un écoulement infini) et mixte (entrée d'air). Dans tous ces cas il faut donc prescrire les conditions sur les frontières du domaine.

Dans les écoulement externes, on rencontre les conditions de glissement (elle sont contenues dans la formulation du schéma, on verra pour la suite) et les conditions à l'infini où le domaine d'espace occupé par le fluide est borné.

III. 5. 1. CONDITIONS DE GLISSEMENT

Un fluide parfait doit vérifier la condition de nullité de la vitesse normale dans le calcul du flux le long de la paroi :

$$\vec{U} \cdot \vec{n} = 0$$

Soit $[S_i, S_j]$ le segment contenue dans la paroi du solide contournée par le fluide. Le flux passant à travers ce segment est donné par :

$$\phi_{ij} = \int_{[S_i, S_j]} (Fn_x + Gn_y) d\ell \tag{3.45}$$

où $\vec{n} = (n_x, n_y)$ est la normale extérieure à la face.

$$\vec{u} = (u, v)$$

On remplace F et G par leurs valeurs données en (2.13), on écrire le flux ϕ_{ij} sous la forme :

$$\phi_{ij} = \int_{[S_i, S_j]} (un_x + vn_y) W + P \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix} d\ell \tag{3.46}$$

ou :

$$\phi_{ij} = \int_{[s_i, s_j]} (\vec{u} \cdot \vec{n}) W + P \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix} dl \quad \dots\dots(3.47)$$

On applique la condition de glissement sur la paroi, le flux se réduit à un terme de pression :

$$\phi_{ij} = \int_{[s_i, s_j]} P \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix} dl \quad \dots\dots(3.48)$$

Sur un noeud de la paroi, on calcul donc W_i^{n+1} connaissant W_i^n par la formule :

$$\frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} \cdot \text{aire}(\hat{S}_i) + \sum_j M_{ij}^n + \int_S P_i^n \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix} dl = 0 \quad \dots\dots(3.49)$$

où la somme \sum_j prise sur les deux voisins S_j de S_i et où \int_S est prise sur les deux segments de la paroi délimités par les milieux M_{ij} des côtés adjacents.

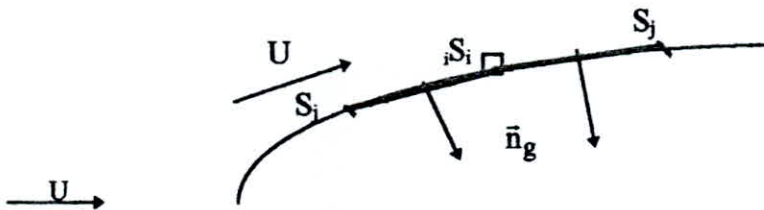


Fig. 3.3. Segment de contrôle pour le calcul des flux en un point frontière

III. 5. 2. CONDITIONS A L'INFINI

Dans l'étude de ce schéma, les grandeurs physiques étant constantes au loin du domaine de calcul.

D'après le principe de décentrage qu'on a exposé, si on force les conditions à l'infini aval du domaine ($x = b$), le schéma décentré va sélectionner de lui-même les conditions aux limites. En effet, seules les composantes correspondant aux valeurs propres négatives interviennent dans le calcul de la partie du flux $\phi_{i+1/2}$ sortant ($x = b$). de même seules les composantes correspondant aux valeurs propres positives interviennent dans le calcul de flux entrant en ($x=a$).

On procède de la même façon avec les valeurs propres ($u-c, u, u+c$; cas 1-D). On force W aux valeurs à l'infini et le schéma décentré sélectionne les conditions prises en compte. Le système étant non linéaire, les valeurs à l'infini interviennent aussi dans le calcul de la partie matricielle de $\phi_{i+1/2}$:

$$\phi_{i,i+1} = A^+ \left(\frac{W_i^n + W_i^{n+1}}{2} \right) W_i^n + A^- \left(\frac{W_i^n + W_i^{n+1}}{2} \right) W_i^n \quad \dots\dots(3. 50)$$

III. 6. STABILITE DU SCHEMA

Pour un système linéaire le schéma est stable pour :

$$\sup. \|W_i^n\| \leq \sup \|W_i^{n+1}\| \text{ ,sur chaque noeud } S_i . \quad \dots\dots(3.51)$$

sous la condition :

$$\Delta t \sup \frac{1}{\text{aire}(S_i)} \cdot |\lambda_{ij}| \leq \frac{1}{2n_i} \text{ ,ceci pour tout noeud } S_i \text{ et } S_j \text{ voisin.} \quad \dots\dots(3.52)$$

C'est la forme de la condition de C.F.L, où le schéma est stable est linéairement monotone.

III. 7. PAS DE TEMPS

Dans le cas de calculs instationnaires, au prix de la consistance en temps, on utilise un pas de temps uniforme (Δt global) dans tout le champs de calcul. Par contre l'exigence de la consistance en temps, dans un calcul stationnaire, n'est pas nécessaire, car seul l'état stationnaire ($t \rightarrow \infty$) est recherché. Le schéma en temps est alors, pour le dernier cas, considéré comme méthode itérative pour obtenir à la convergence la solution stationnaire, pour cela on utilise un pas de temps local qui consiste à utiliser un Δt variable d'une cellule à l'autre, de sorte que le nombre de Courant soit vérifié.

Le pas de *temps local* sera calculé de la manière suivante en chaque point de maillage:

$$\Delta t_i = K \min \frac{\text{aire}(\hat{S}_i)}{h_i + |U_i + c_i|} \quad , \text{sur tout noeud } S_i \text{ du triangle T.} \quad \dots\dots(3.54)$$

où: K est le nombre de C.F.L., choisi de manière à vérifier (3.46).

aire(T) est l'aire du triangle T.

h_i est la plus petite hauteur du triangle T, issue du sommet S_i .

U_i est la vitesse locale au noeud S_i .

c_i est la vitesse du son locale du noeud S_i .

Le pas de *temps global* sur tout le domaine, Δt , sera pris de manière suivante:

$$\Delta t = \min \Delta t_i \quad , \text{sur chaque noeud } S_i \quad \dots\dots(3.55)$$

III. 8. VISCOSITE RESIDUELLE

Dans des cas simples, l'unique solution faible physiquement acceptable de l'équation approchée est limite des solutions visqueuses lorsqu'on fait tendre la viscosité vers zéro.

De manière à rapprocher aux limites des solutions physiques et ainsi de mieux satisfaire l'inégalité sur l'entropie, une des idées fondamentales de *Tadmor*, de rajouter de viscosité au schéma contenant déjà une certaine viscosité numérique interne; le schéma reste entropique^(*).

Une condition sur le coefficient de viscosité numérique $Q_{i+1/2}$ qui doit vérifier la variation totale de la solution calculée au temps, est proposé par *Tadmor*, dans le cas d'une approximation de la loi de conservation (3.18).

$$\lambda \left| \frac{\Delta F_{i+1/2}}{\Delta u_{i+1/2}} \right| \leq Q_{i+1/2} \leq 1 \quad \dots\dots(3.56)$$

où $\lambda = \Delta t / \Delta x$

^(*) Tout schéma satisfait à l'inégalité sur l'entropie.

$$\Delta u_{i+1/2} = u_{i+1} - u_i$$

$$\Delta F_{i+1/2} = F_{i+1} - F_i$$

$$Q_{i+1/2} = \lambda (F_{i+1} + F_i - 2h_{i+1/2}) / \Delta u_{i+1/2}$$

Dans le cas du Q-schéma on a :

$$Q_{i+1/2}^Q = Q(a_{i+1/2}) = |a_{i+1/2}| \tag{3.57}$$

$$a(u) = F'(u)$$

Pour satisfaire à la monotonie, la limite supérieure de (3.57) doit être plus stricte [4].

la viscosité $\tilde{Q}_{i+1/2}^Q$ appelée viscosité résiduelle, qui vérifiée:

$$Q_{i+1/2}^Q \leq \tilde{Q}_{i+1/2}^Q \leq 1/2 \leq 1 \tag{3.58}$$

avec:

$$\tilde{Q}^Q = \begin{cases} |z| & \text{si } |z| \geq \varepsilon \\ \frac{z^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} & \text{si } |z| < \varepsilon \end{cases} \tag{3.59}$$

où ε est une constante réelle strictement positive suffisamment petite de manière à satisfaire à la limitation (3.58) assurant la monotonie.

Extension au 2-D:

Dans ce cas cette viscosité se traduit par une régularisation sur les valeurs propres de la matrice P_{ij} définie en (3.23). En effet, la viscosité numérique du Q-schéma est proportionnelle à la valeur absolue des valeurs propres de la matrice P_{ij} . On a vu que dans les chocs forts, une des valeurs propres s'annule et donc la viscosité du Q-schéma risque de n'être plus suffisante (chocs forts) on définit une fonction analogue \tilde{Q}^Q :

$$\tilde{Q}^Q(\lambda) = \begin{cases} |\lambda| & \text{si } |\lambda| \geq \varepsilon \\ \frac{\lambda^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} & \text{si } |\lambda| < \varepsilon \end{cases} \tag{3.60}$$

ε est choisi suffisamment petit de manière à satisfaire à:

$$Q_{i+1/2}^Q \leq \tilde{Q}_{i+1/2}^Q \leq 1/n_i \leq 1 \tag{3.61}$$

où n_i est le nombre de voisins du noeud i .

CHAPITRE IV

Programmation et organigrammes

IV. 1. PROGRAMMATION :

Avec la formulation qui a été défini au chapitre précédent (III), nous avons mis en place un programme qui permet à partir d'une géométrie donnée bien déterminée et d'un nombre de Mach désiré à l'infini et d'avoir en tout point de l'écoulement supersonique, de l'environnement de la géométrie, toutes les valeurs caractérisant l'écoulement compressible, nombre de Mach, pression, la répartition de la vitesse et l'entropie.

Nous présenterons tout d'abord les sous-routines utilisées par le programme principal, ensuite nous donnerons l'organigramme du programme principale ainsi que ceux des quelques sous-routines.

IV. 2. Subroutine MIL:

La sous-routine de maillage est la partie de base; la détermination des coordonnées de l'environnement de l'obstacle fait à l'aide de la technique de transformation ponctuelles en respectant l'écoulement physique. le raffinement de zones voulues ne pose pas un problème au moyen de cette technique.

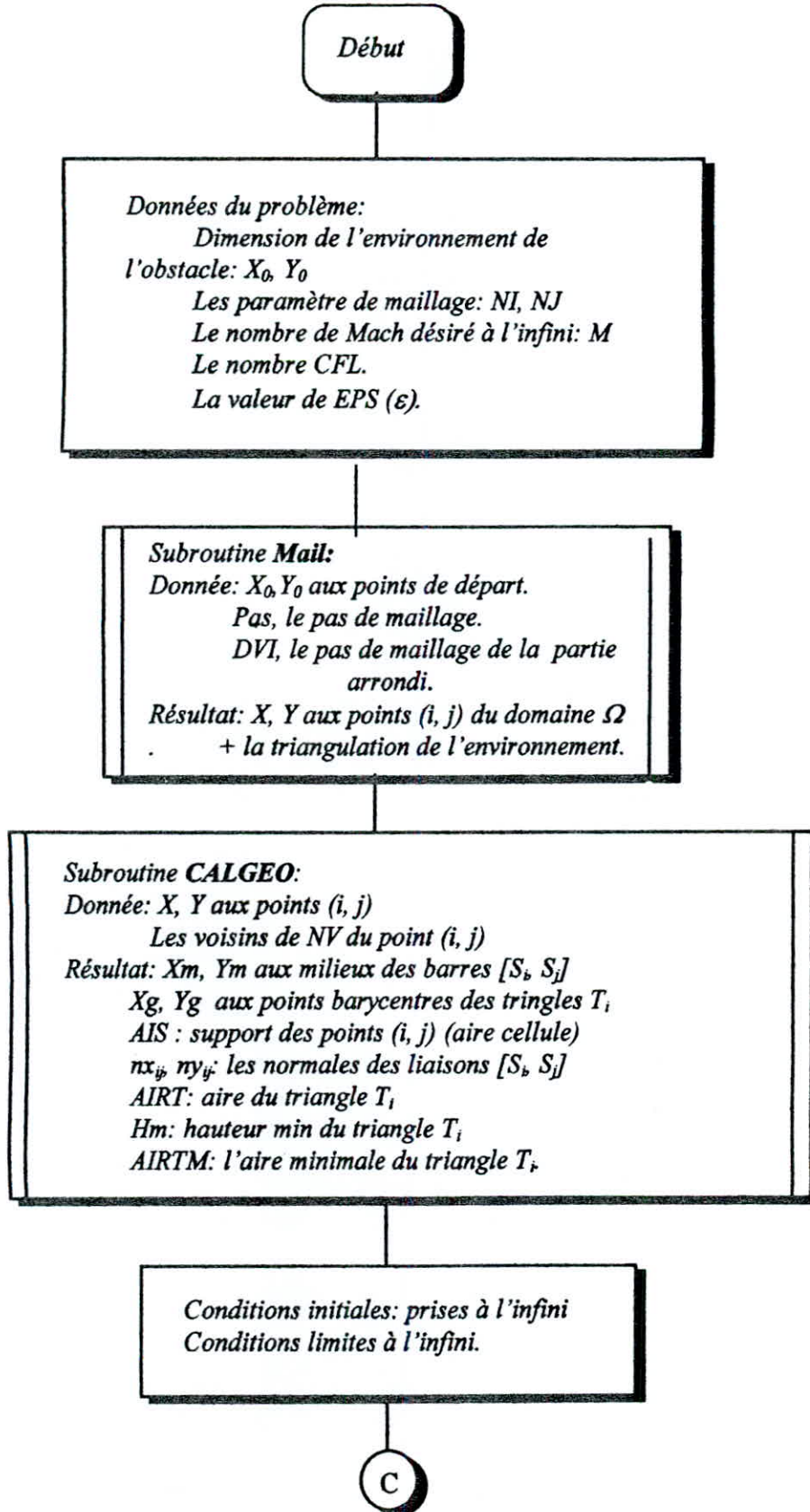
IV. 3. Subroutine CALGEO:

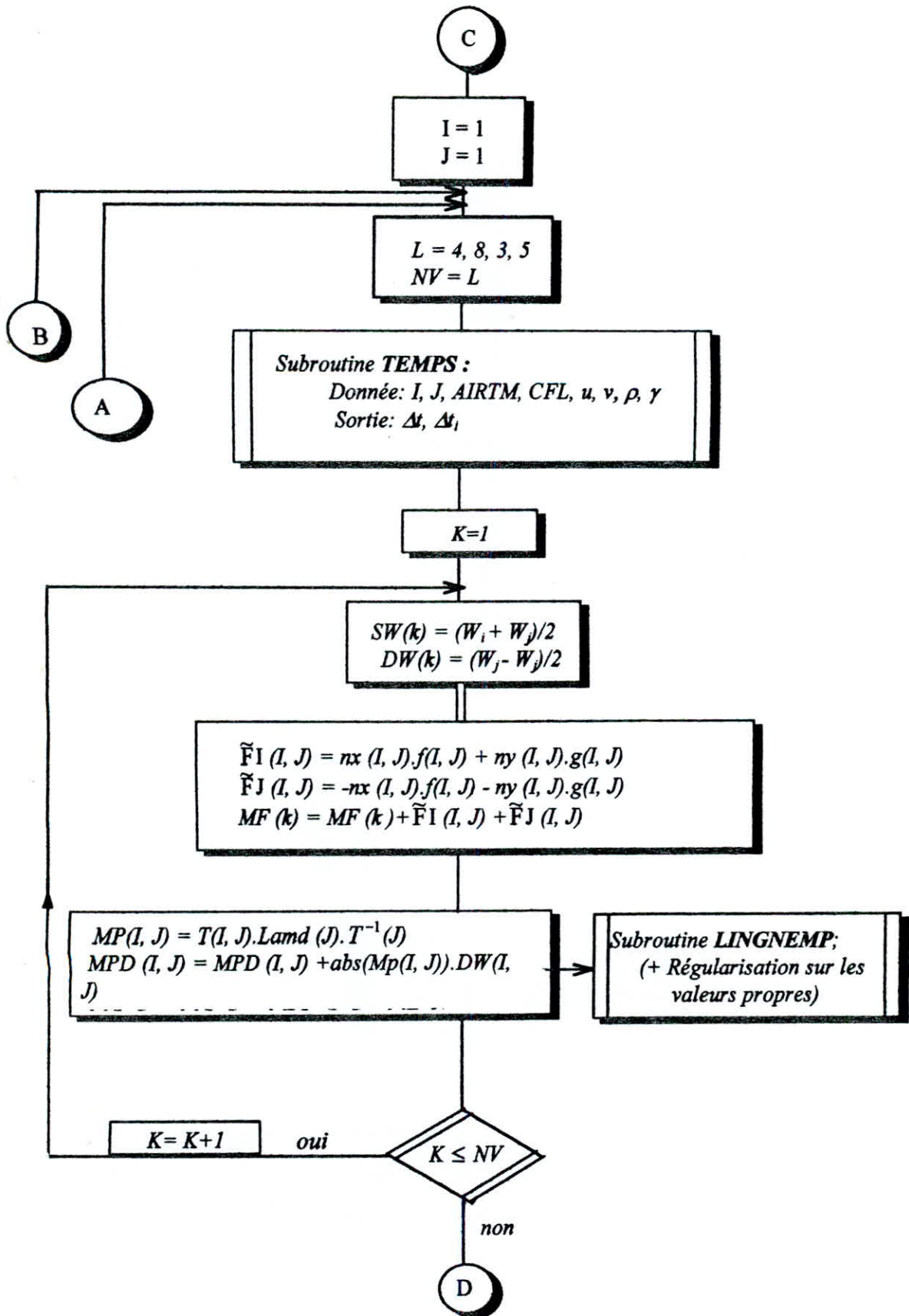
Subroutine de calcul géométrique : le schéma établi dans le chapitre II nécessite un calcul des éléments importants (h_m , aire(\hat{S}_i), n_x , n_y), ayant un effet majeur sur l'approximation (n_x , n_y par exemple intervient dans le calcul du flux). Pour cela, on donne la procédure de calcul de ces éléments dans l'organigramme de cette sous-routine.

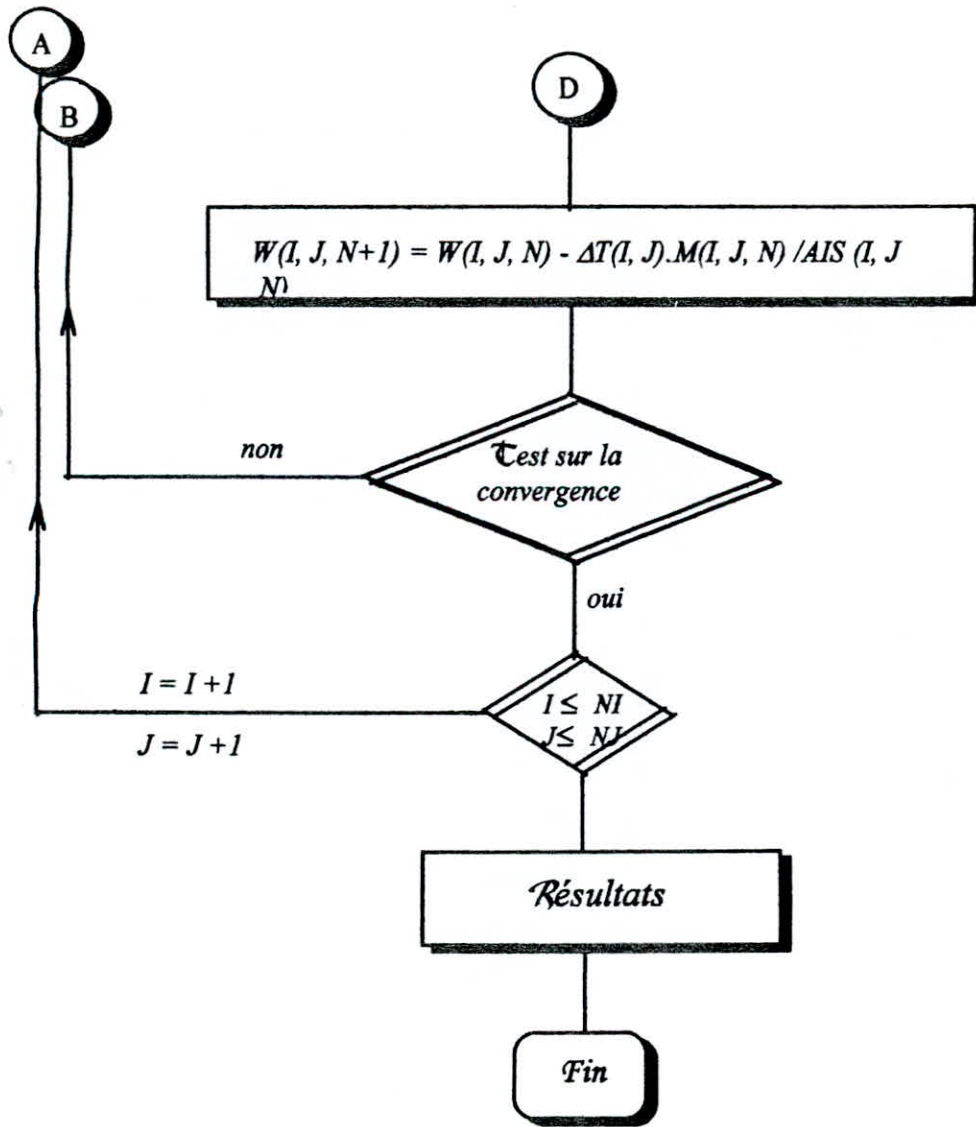
IV. 4. Autres sous-routines:

La sous-routine **Temps** (calcul du temps Δt), **FG** (remplissage des vecteurs F et G), **LIGNEMP** (donne la ligne résultant du produit $T.A.T^{-1}$) ne nécessite pas d'un algorithme particulier tant que la manière de calcul de ces derniers éléments est exposé dans les chapitres précédents, donc on ne détaille pas ses organigrammes.

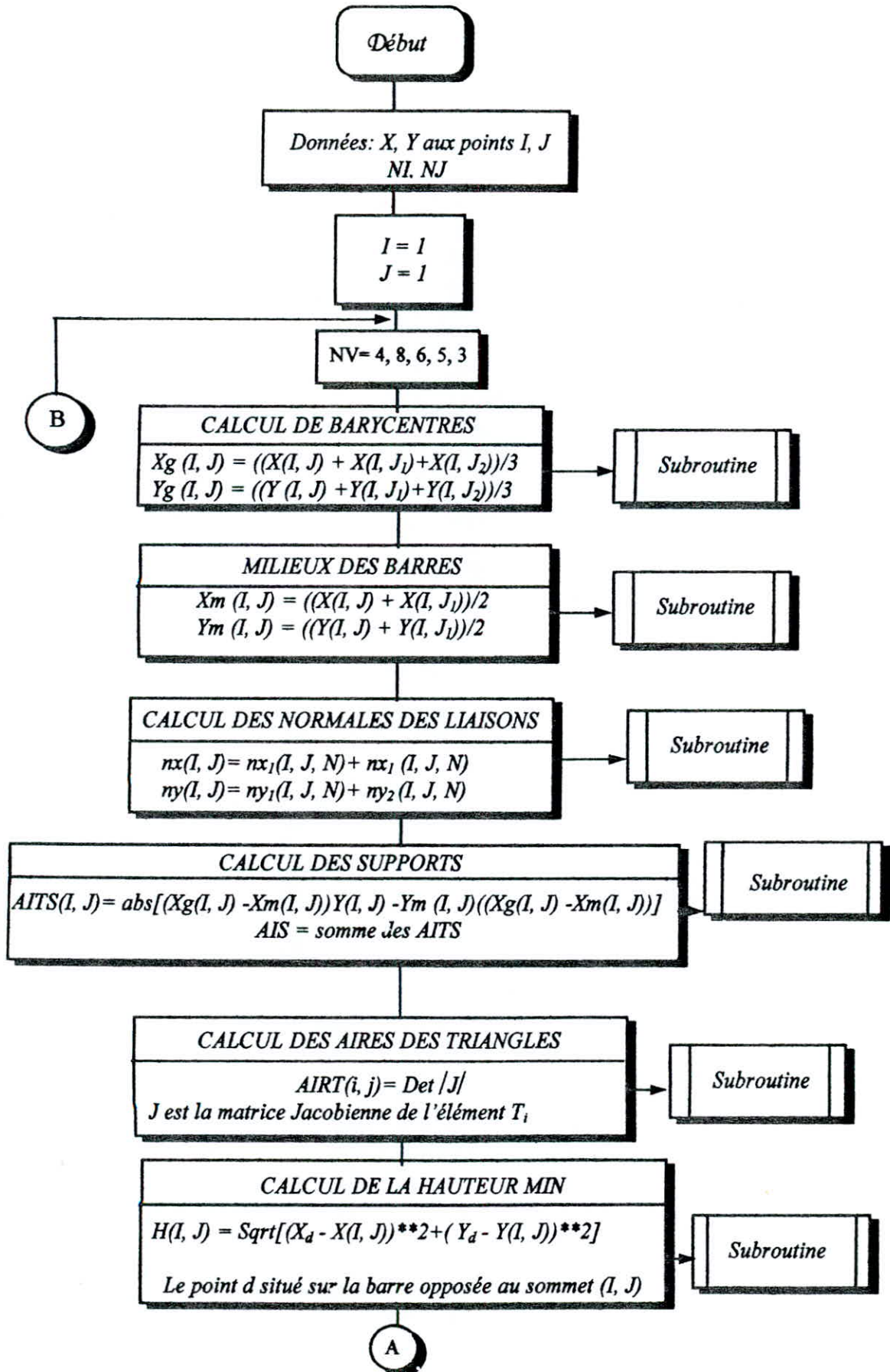
IV. 5. Organigramme du programme principal:

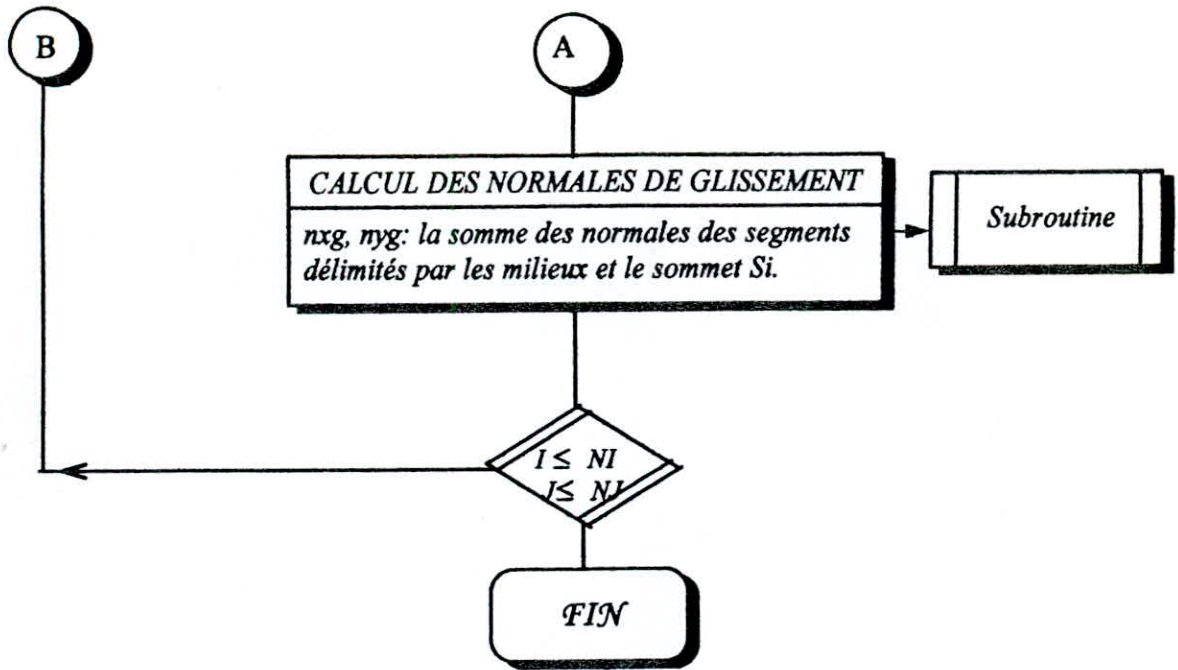






IV. 5. Subroutine CALGEO:





CHAPITRE V

*Expériences
numériques*

V. I. RESULTATS NUMERIQUES ET COMMENTAIRES

A fin de tester l'application du modèle, le programme numérique qui a été développé est expérimenté sur des profils aérodynamiques.

Pour chaque calcul on fait tracer, pour pouvoir analysé l'écoulement, les quantités caractéristiques qui sont les nombres de Mach M , les coefficients de pression K_p et l'entropie qui s'écrivent sous la forme :

$$M = \frac{\|\vec{U}\|}{C} = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{\sqrt{\gamma \cdot P / \rho}}$$

$$K_p = P/P_\infty.$$

$$\Delta S = (P/P_\infty)/(\rho/\rho_\infty)^\gamma - 1$$

Il s'agit de résoudre le problème de l'écoulement mixte avec un domaine subsonique et un point d'arrêt à l'intérieur du domaine subsonique. Avec le schéma qu'on utilise (Q-schéma), le calcul présente une diminution totale de la pression et de la densité au début de calcul, mais avec l'utilisation d'une technique d'interpolation sur les variables, pour certains itérations, a permis d'étaler le calcul.

V. 1. APPLICATION SUR UN HEMISPHERE (2D):

Le maillage correspondant au sphère est adapté au donnée de l'hémisphère (2D). La grille éléments finis de l'hémisphère (2D) comporte 1326 noeuds et 2852 triangles (voir fig.(5.1)).

Les lignes isomachs:

Les lignes isomachs sont tracées sur la fig.(5.3), on peut vérifier la position (Δ/R) du choc par la condensation des lignes isomachs. La distance de détachement du choc à Mach 3 est d'environ 0.15 (même chose pour une incidence de -20°), et à un Mach de 2 on a la distance 0.333, on remarque qu'elle est légèrement supérieure à celle de Mach 3, ce qui est comparable avec la théorie, voir chapitre I en figure (1.6).

La courbe sonique ($M = 1$) est bien capté ($\theta = 32.23^\circ$). Le Mach au point d'arrêt est de l'ordre de 0.001, dans les deux cas.

Les lignes iso-Kp:

Les lignes iso-Kp sont représentées à tracer un écoulement à 2D (fig. 5.4, 5.5), les valeurs numériques correspondants au calcul sont approchées à la courbe de Newton avec la formule : ($K_p = K_{p_{\max}} \cdot \cos^2(\theta)$).

θ est l'angle mesuré à partir du point d'arrêt sur l'hémisphère.

La compression dans le cas de Mach 3 est $K_{p_{\max}} = 3.5$ et dans le cas de $M = 2$ est de

$$K_{p_{\max}} = 2.5.$$

Les lignes entropiques:

Les sauts d'entropie créée par le choc à $M = 3$ (2.2) et à $M = 2$ est de 1.1, voir figures (5.6, 5.7). Une forte production d'entropie derrière le choc, qui est physique (écoulement rotationnel) et se propage en dehors de la poche sonique, la variation d'entropie est négligeable loin en aval de la zone perturbée.

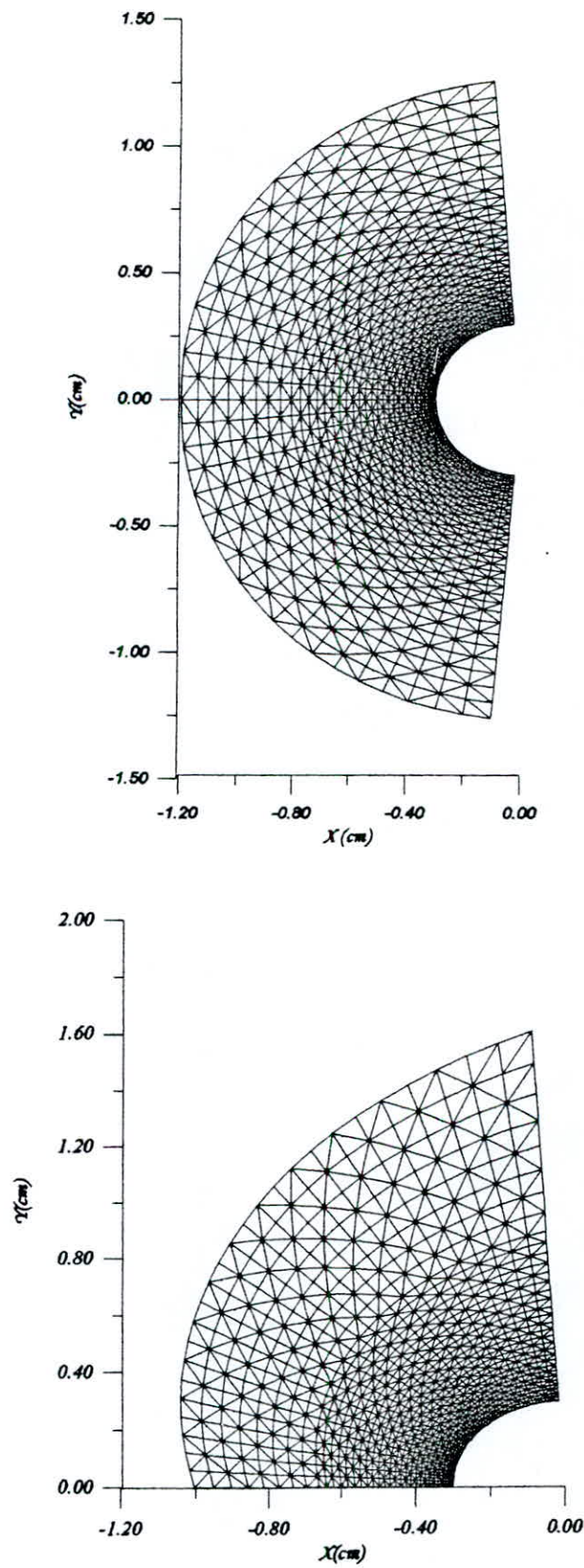
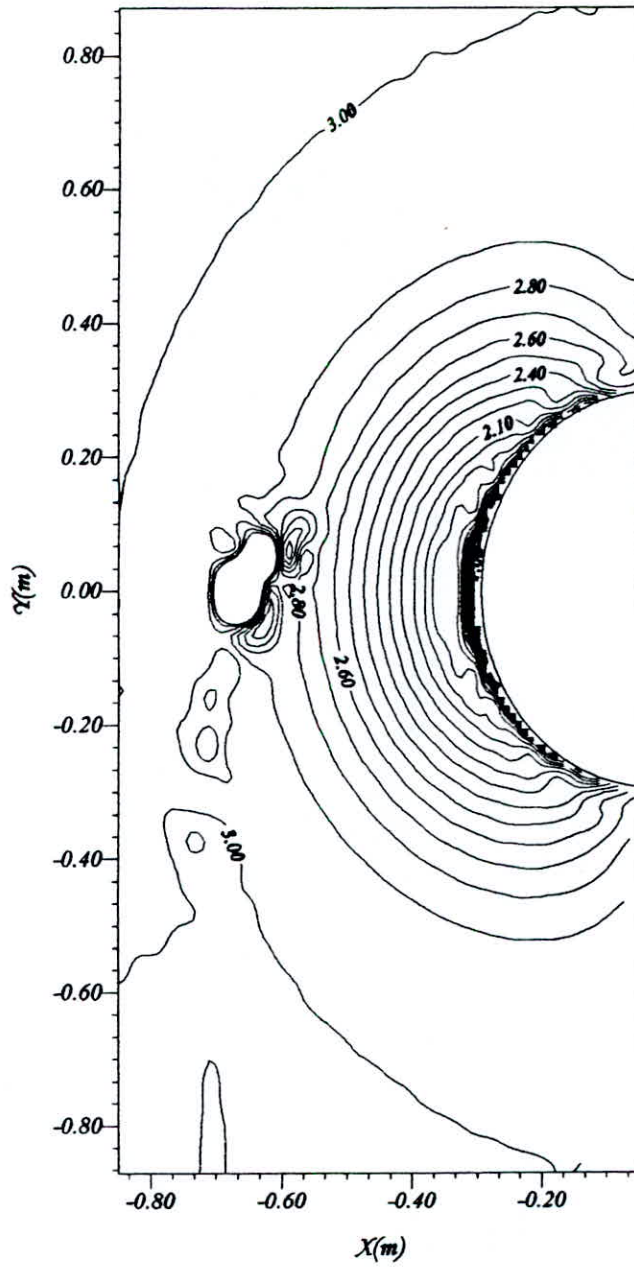
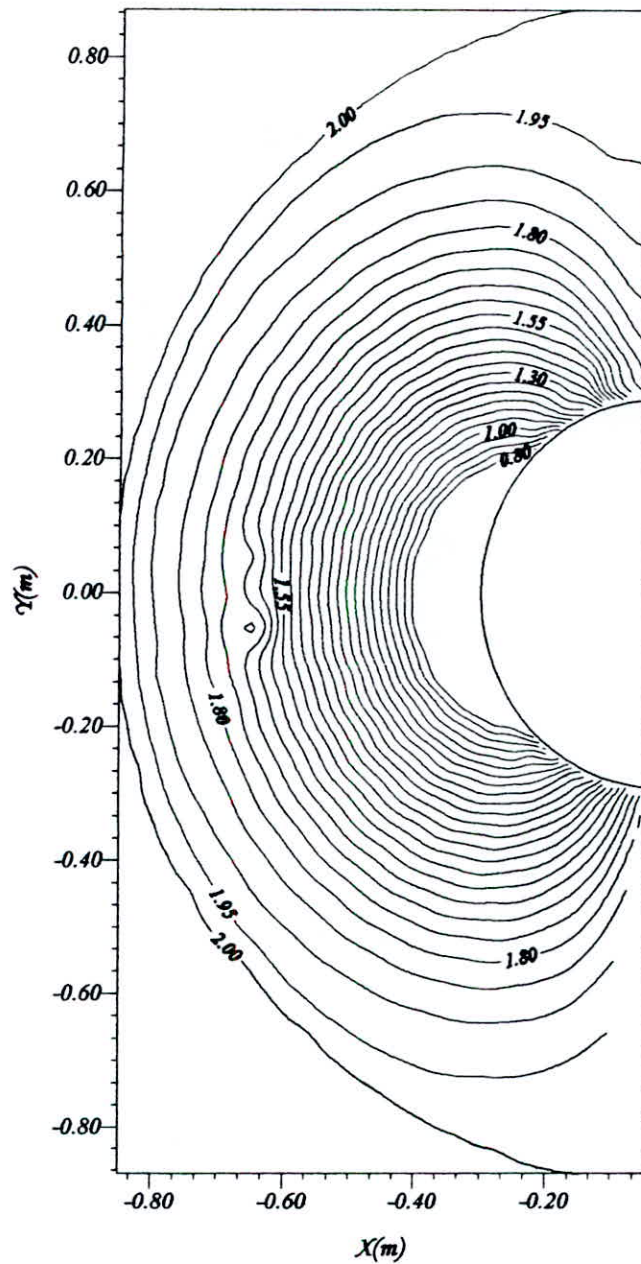


Fig. 5.1: Discretisation (Maillage) par élément triangle de l'environnement d'une sphère (2-D)



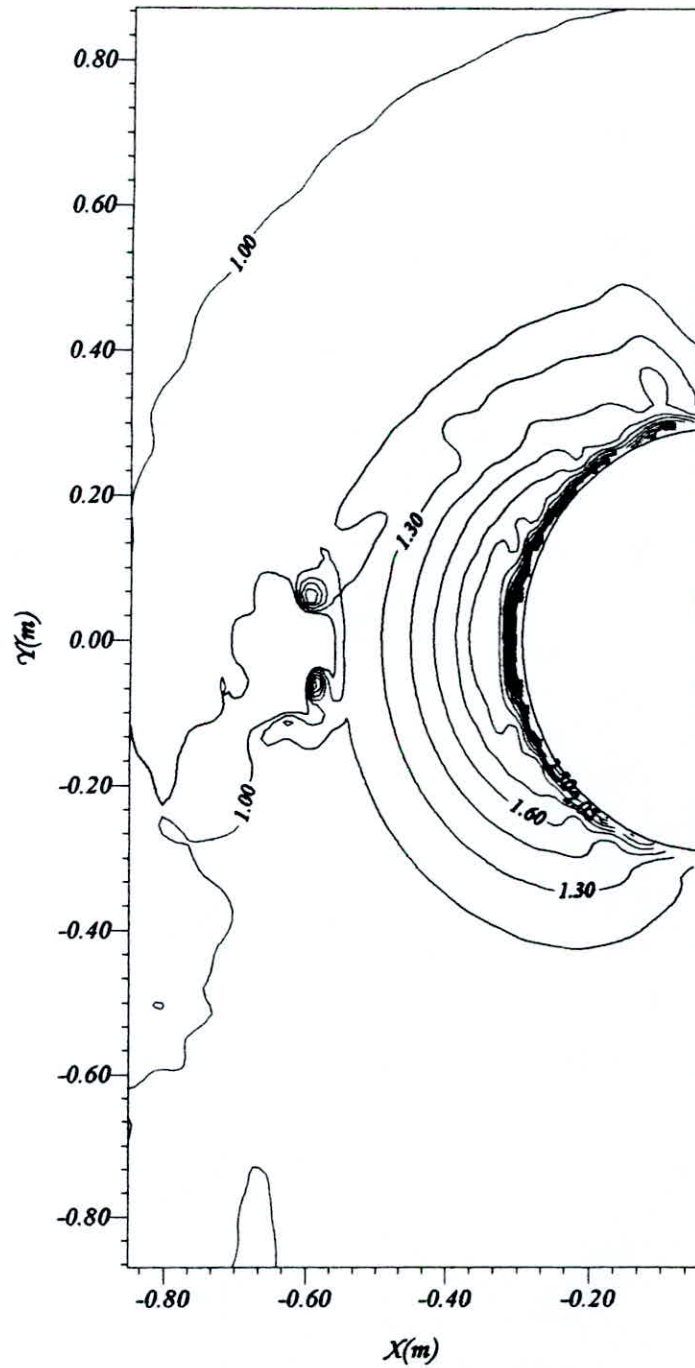
Les lignes Isomach
 $M_i=3$
 $R=.3$

Fig. 5.2



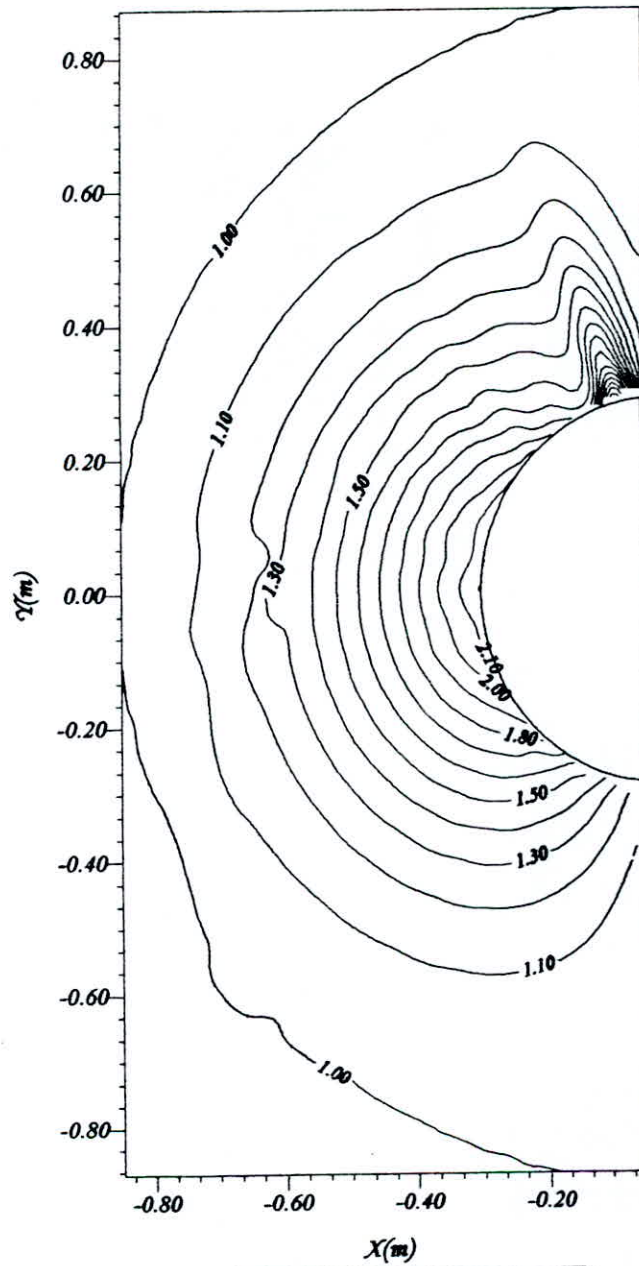
Les lignes Isomache
 $M_i=2$
 $R=.3$

Fig. 5.3



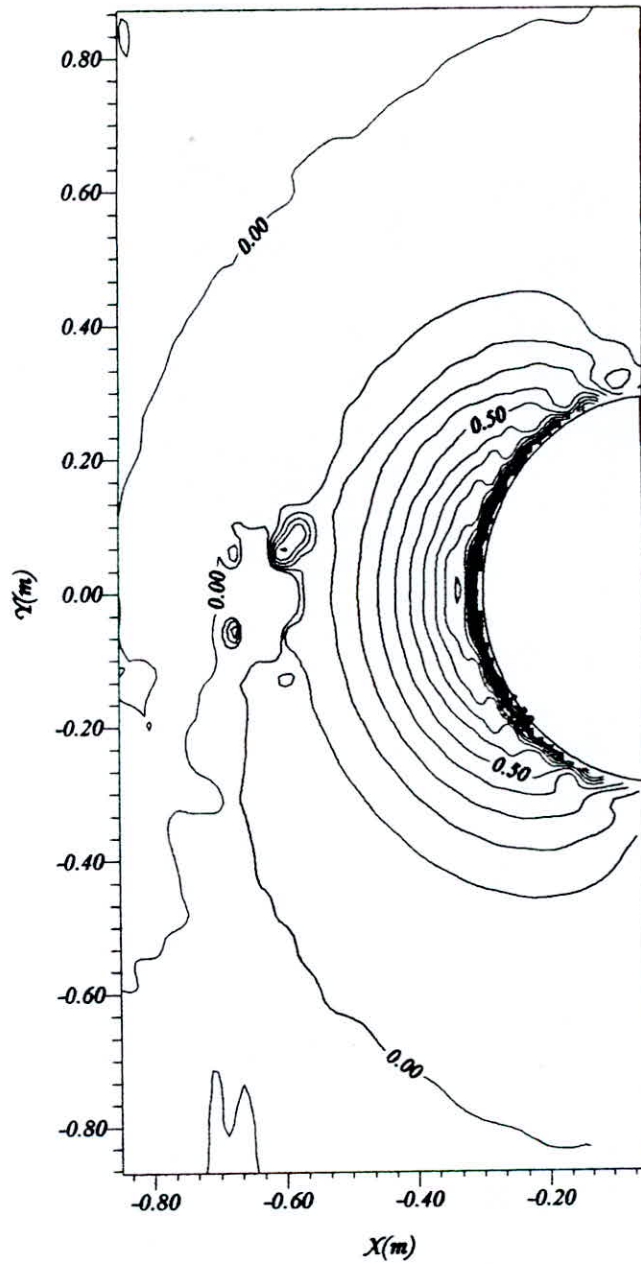
Les lignes Iso-Kp
 $M_i=3$
 $R=.3$

Fig. 5.4



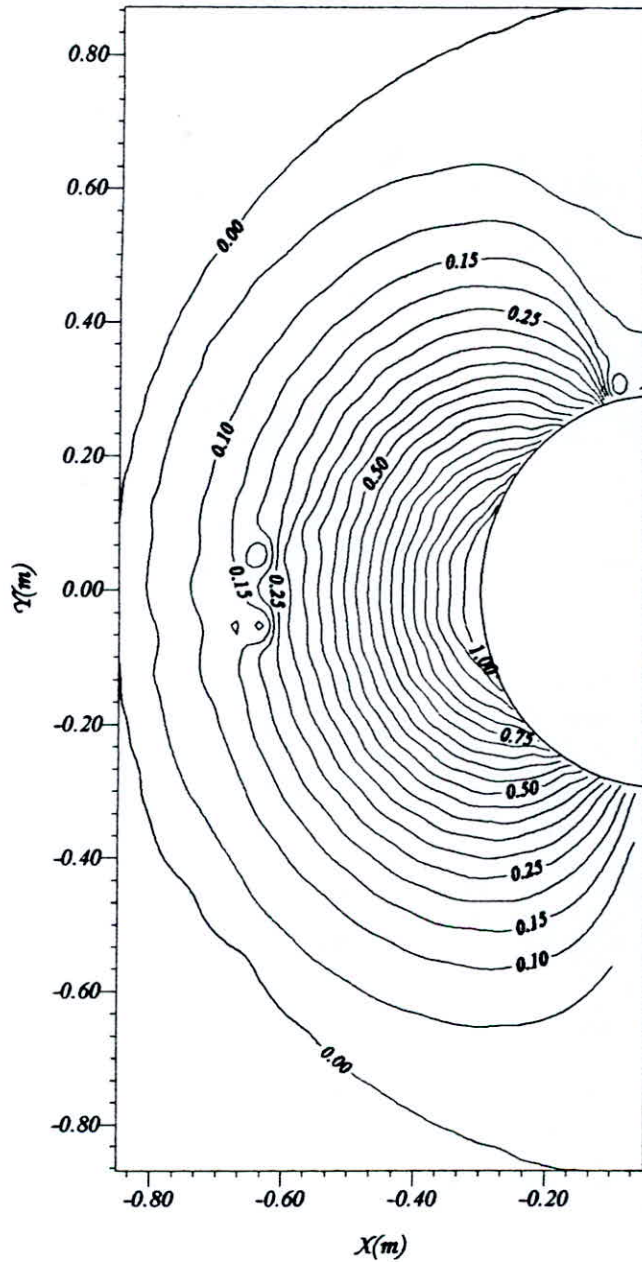
Les lignes Iso-Kp
 $M_i=2$
 $R=.3$

FIG. 5.5



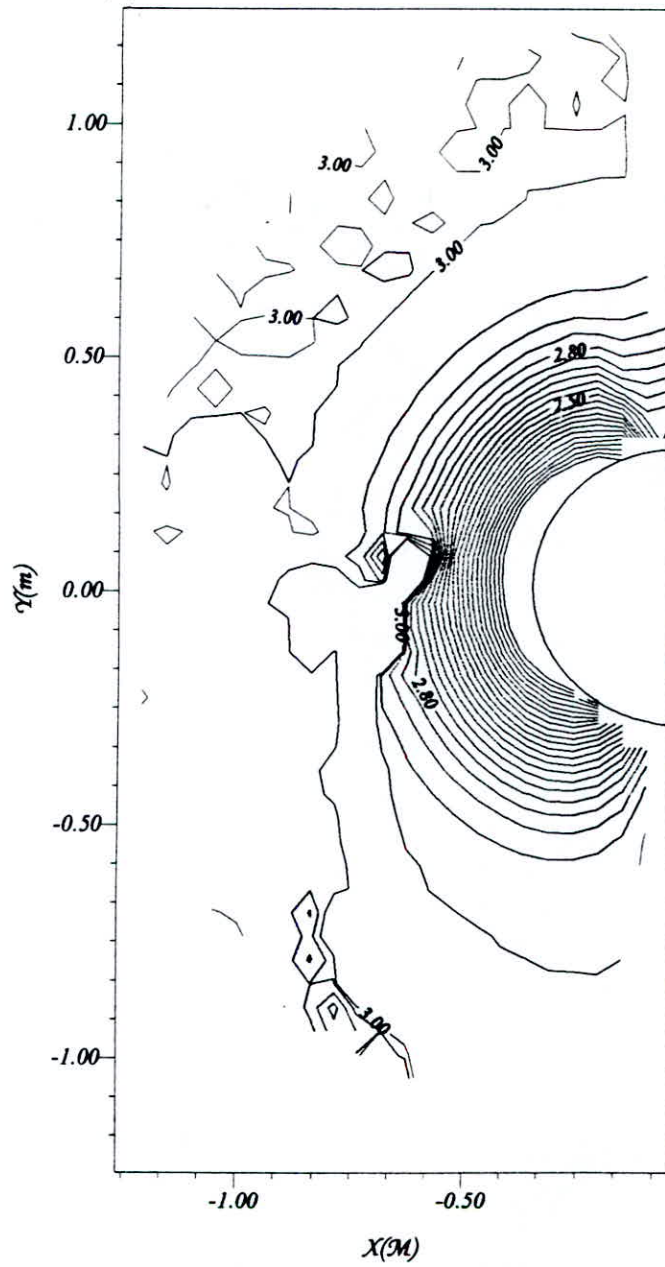
Les lignes d'entropie
 $M_i=3$
 $R=.3$

Fig. 5.6



Les lignes d'entropie
 $M_i=2$
 $R=.3$

Fig. 5.7



Les lignes isomachs
 $M_i=2$
 $R=.3$
Incidence = -20°

Fig. 5. 9

V. 2. APPLICATION SUR UN CORPS ARRONDI

Avec cette géométrie (hémisphérique prolongée vers l'aval par un cylindre de même section), le maillage (2D) est composé de 918 noeuds et 1836 triangles (voir figure 5.10), avec environ 900 itérations à divers nombres de Mach sur un PC (Pentium) (45 min), on aboutit à ces résultats.

Les lignes isomachs:

De la figure (5.14) les lignes isomachs sur le bord d'attaque sont condensées à une distance ($\Delta/R = .21$) où le choc est capturé. La ligne sonique est aussi positionnée sur le bord d'attaque (angle = 0.35). Au point d'arrêt la valeur de Mach atteint 10^{-3} .

Sur la partie prolongée de l'hémisphère les valeurs numériques ne connaissent pas une grande variation des variables caractéristiques, le Mach reste proche de la valeur à l'infini.

Les lignes iso-Kp:

Sur la figure (5.12) les valeurs numériques sont aussi bien proches du résultat de Newton. Au point d'arrêt on trouve $Kp_{\max} = 3.6$ pour un $M = 3$ et pour un $M = 2$, $Kp_{\max} = 2.3$.

Les lignes d'entropie:

Sur le bord d'attaque le saut d'entropie derrière le choc atteint une valeur de $2.4(M = 3)$ et demeure invariante à partir d'une certaine zone.

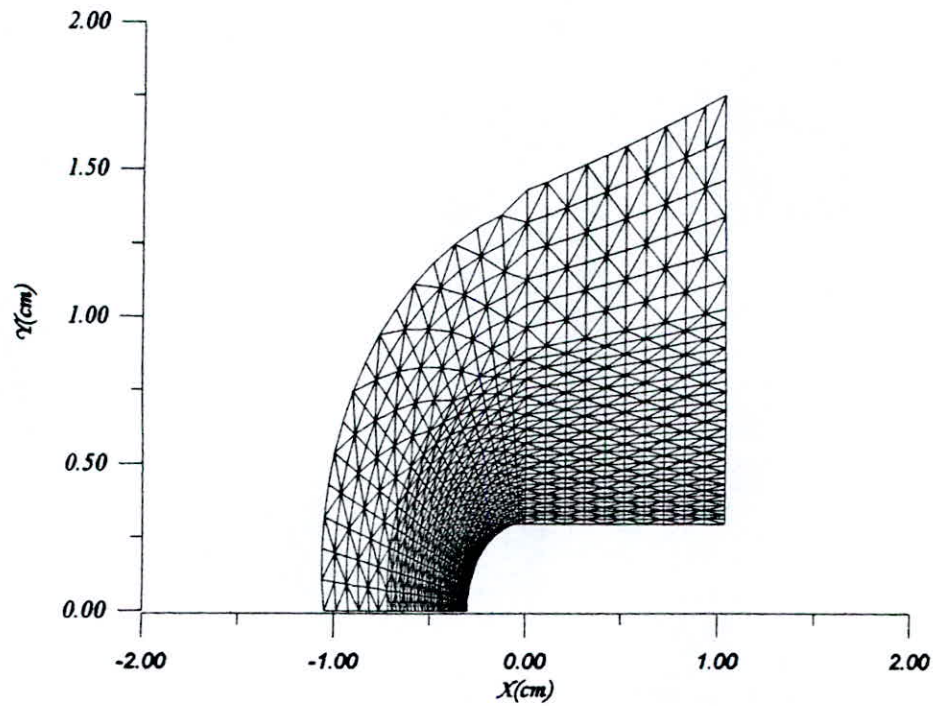
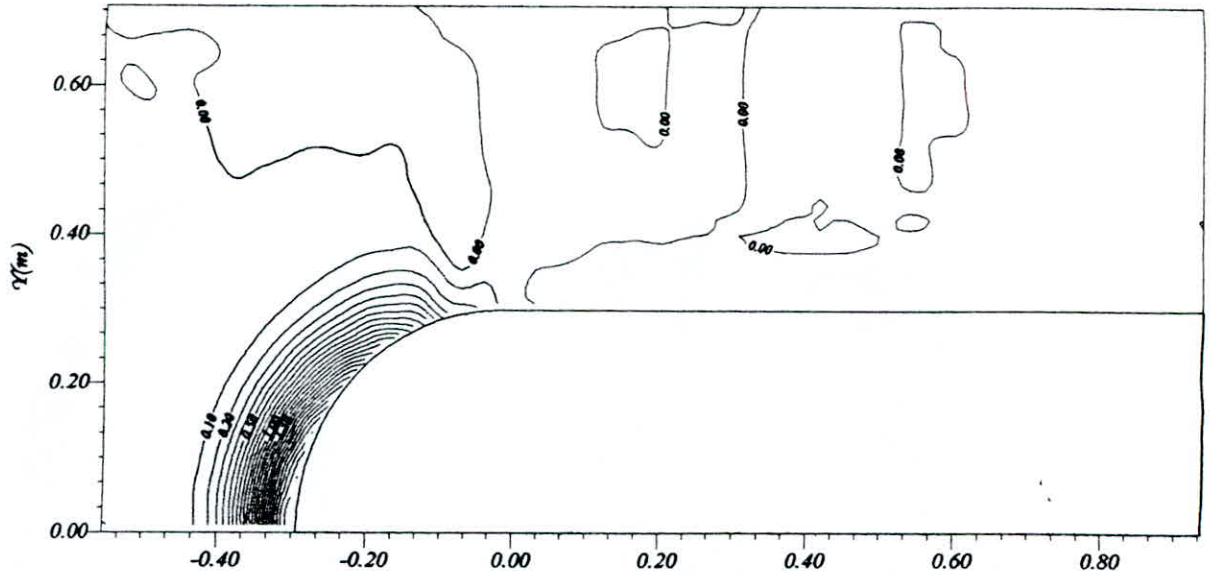
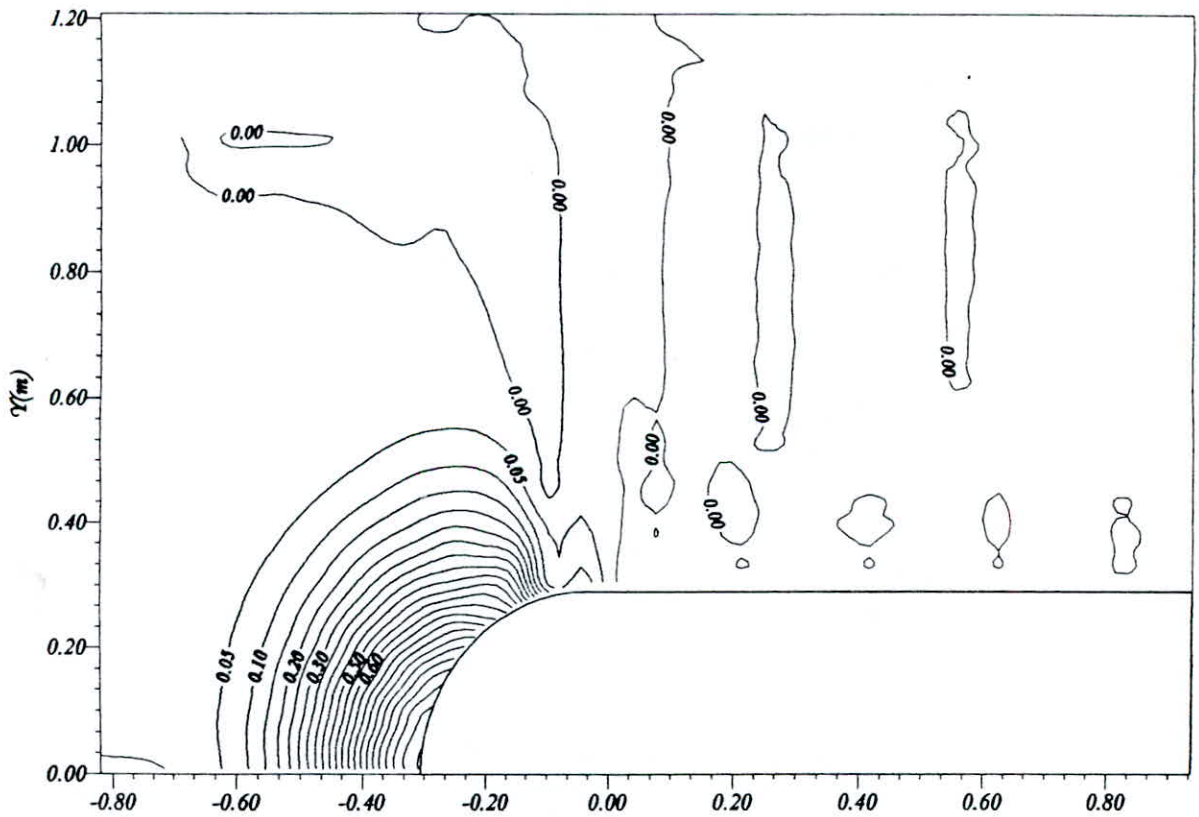


Fig. 5.10 : Discretisation (Maillage) par élément triangle du domaine d'analyse d'un corps arrondi



Les lignes d'entropie
 $M=3$
 $R=.3$



Les lignes d'entropie
 $M=2$
 $R=.3$

Fig. 5.11

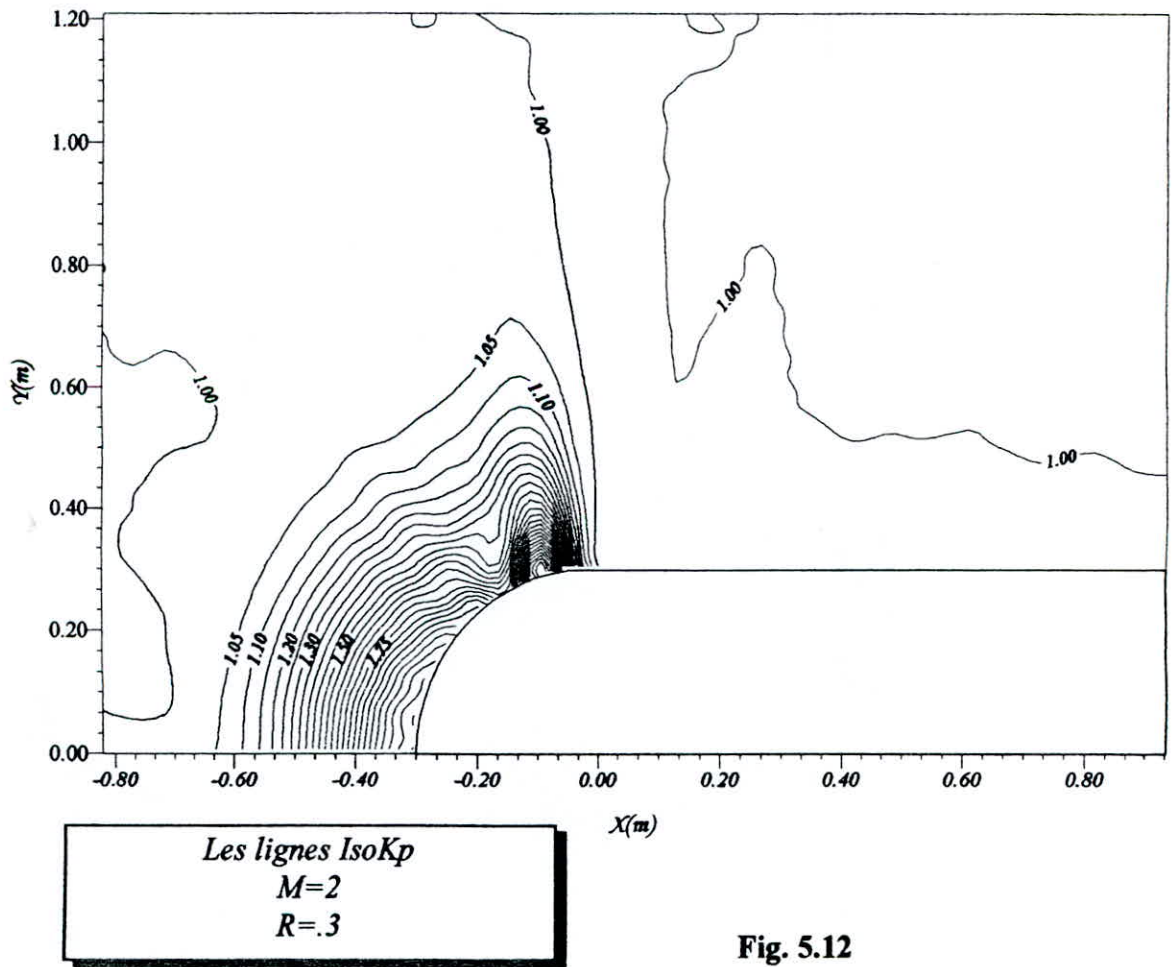
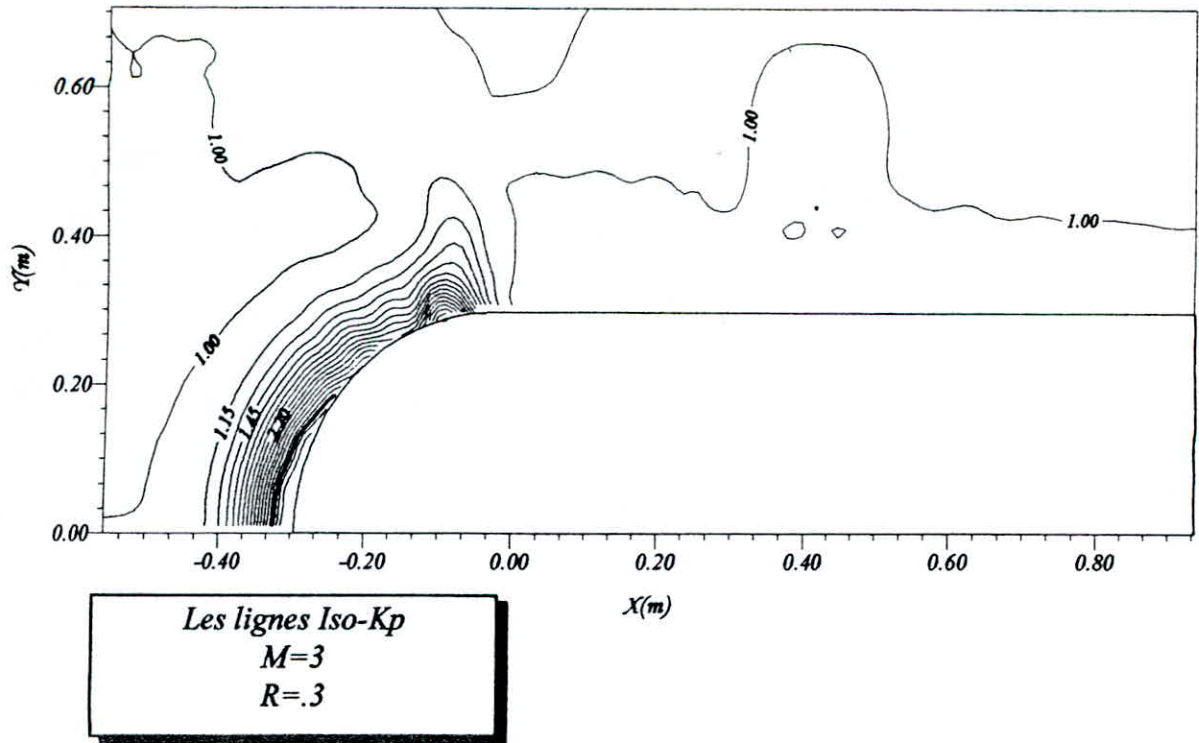
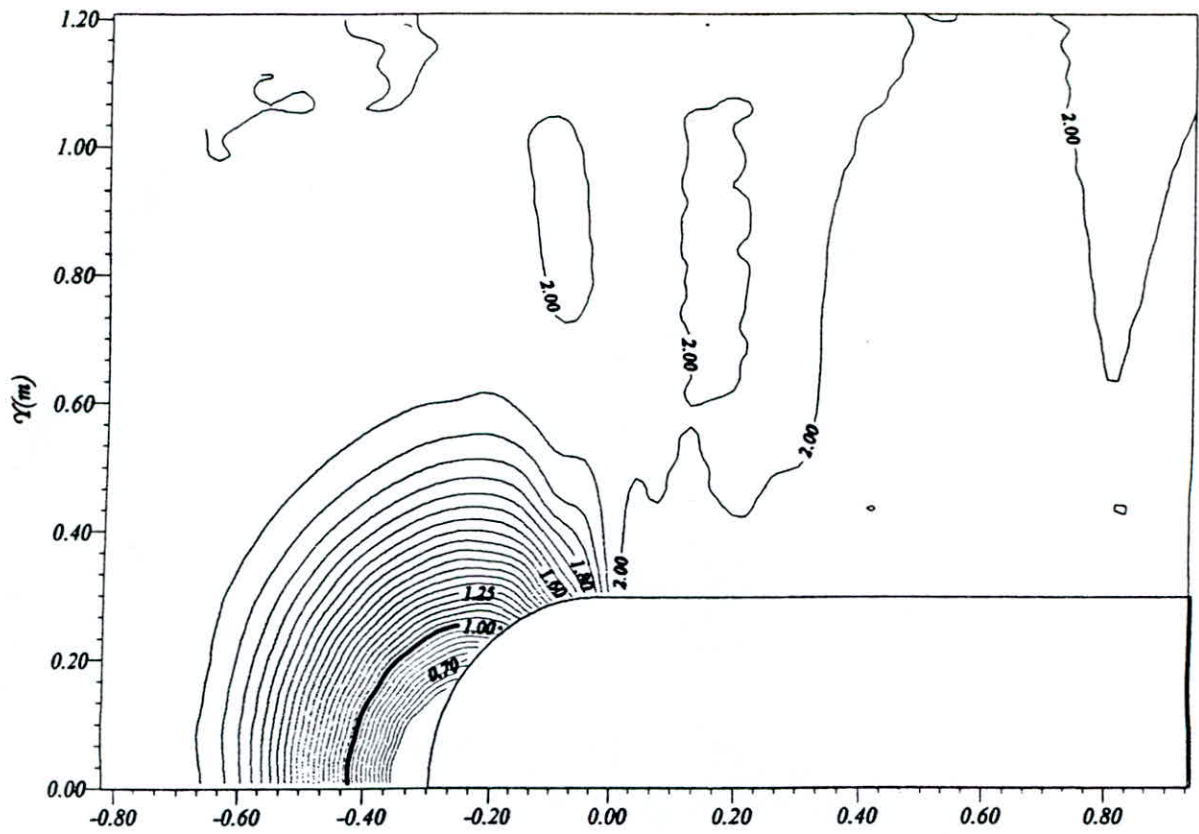
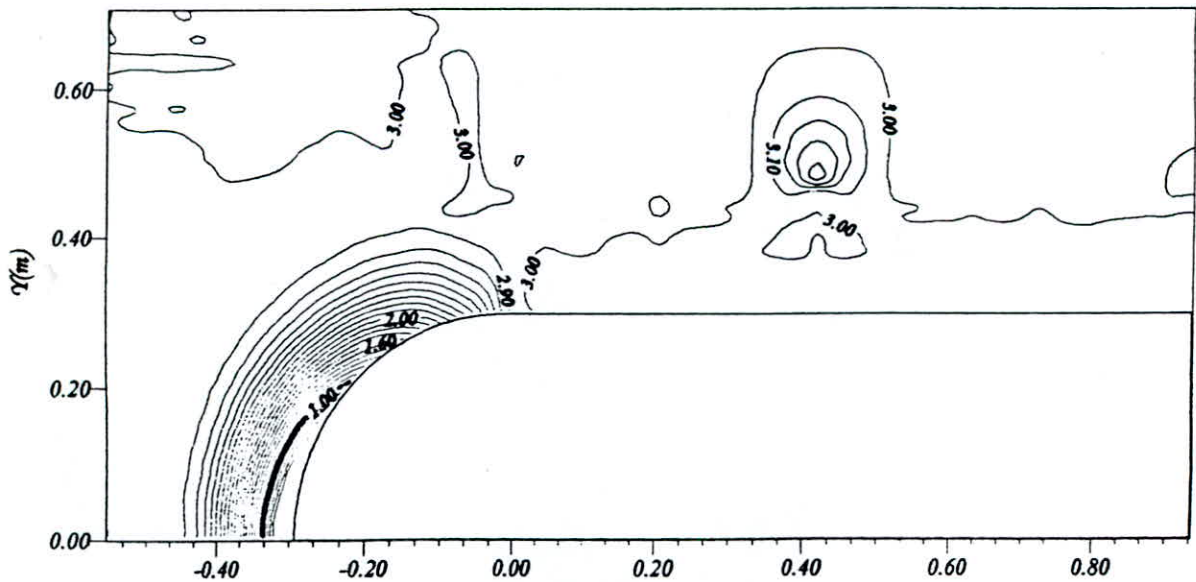


Fig. 5.12



Les lignes Isomachs
 $M=2$
 $R=.3$



Lignes Isomachs
 $M=3$
 $R=.3$

Fig. 5.13

V. 3. APPLICATION SUR UN PROFIL D'AUBE

Avec cette géométrie, le maillage (2D)(profil d'aube NACA 4412), est composé de 1012 noeuds et 2024 triangles.

Dans cette partie on a essayé d'appliquer le même programme élaboré (on introduit les données géométriques et les valeurs initiales), mais celui-ci n'a pas donné des résultats satisfaisants, à cause de la forme d'aube qui n'est pas adaptée au schéma utilisé .

Ceci peut être du, d'une part que le schéma appliqué est trop visqueux dans la partie qui présente une inclinaison (détente), ou le changement de l'évolution d'écoulement du fluide de la compression (bord d'attaque) à la détente.

Pour cela, on se propose de faire les recommandations suivantes :

- Un schéma d'ordre deux, avec une viscosité artificielle (comme le schéma de Richtmyer).
- L'utilisation de deux schémas, l'un appliqué sur la partie amont (compression) du profil (on favorise Q-schéma) et l'autre appliquée à la partie aval (détente) du port d'attaque

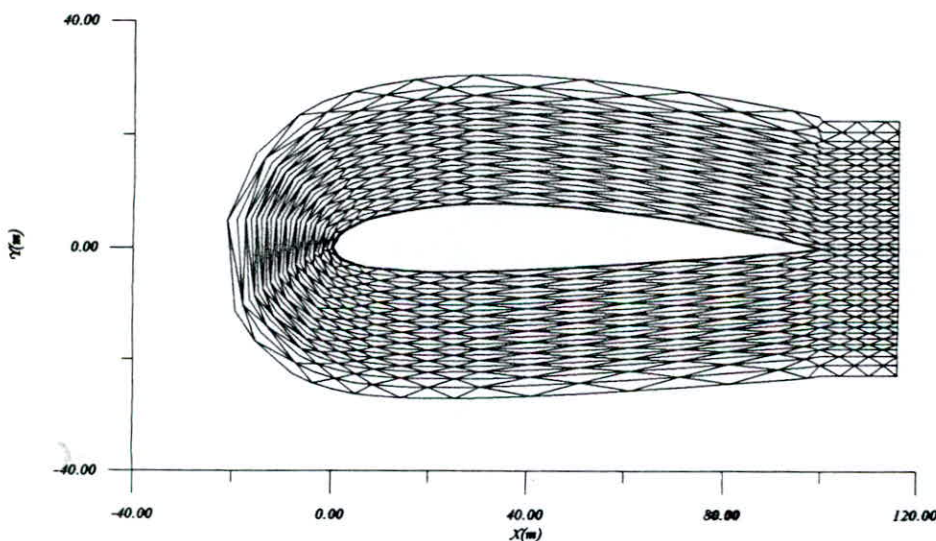


Fig. 5.14: Discretisation (Maillage) de l'environnement d'une aube

Conclusión

CONCLUSION

Dans cette présente étude, nous avons exposé l'élaboration d'un calcul, d'un écoulement parfait compressible mixte (subsonique et supersonique) d'un fluide compressible à vitesse supersonique, on utilise un schéma décentré d'ordre un avec une viscosité résiduelle lors de son passage à travers un profil aérodynamique.

Nous avons mis au point un programme en éléments finis avec une approximation de type volume finie, qui permet la détermination des caractéristiques d'écoulement autour du profil. L'utilisation de Q-schema avec viscosité résiduelle a permis de résoudre le problème de la discontinuité des caractéristiques du fluide (choc fort) en présence d'un obstacle. Ce type d'approximation donne des bons résultats dans les zones de bord d'attaque, les résultats numériques présentés aux différents régimes ($M=2$ et $M=3$), acceptables sur des tests simples, deviennent insuffisants dès que la géométrie présente une variation de courbure importante ce qui donne à l'écoulement un changement brusque, de la compression à la détente, c'est le cas d'application sur l'aube. Cette insuffisance est due à la perte de précision dans cette zone de changement d'évolution.

Dans la partie application, nous avons abouti à des résultats, qui seront être utilisés pour dimensionner le profil soumise à forte compression au bord d'attaque, ce qui nous permet d'ouvrir un autre axe de recherche portant sur l'étude sur la résistance du corps devant le choc fort.

De nombreuses questions n'ont pas été abordées et qui seraient encore à considérer pour une étude complète du problème, tel que:

- Le profil à une géométrie non symétrique.
- Engraisissement de l'aubage (calcul interne couche limite).
- Une extension du programme de calcul en 3-D.

Annexe

1. CONSERVATION DE LA MASSE

Considérons un volume V_0 de l'espace. La variation de masse dans V_0 doit être égale à la quantité de fluide entrant ou sortant en l'unité de temps du volume V_0 .

La diminution de la quantité de fluide dans V_0 peut s'écrire sous la forme :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV \quad \text{.....(A.1)}$$

Si $d\vec{\sigma}$ égal en grandeur absolue à l'aire de l'élément de surface et d'érigé suivant la normale extérieure, l'élément de surface $d\sigma$ délimitant le volume V est traversé dans l'unité de temps par la quantité $\rho \vec{U} d\sigma$ de fluide.

La quantité totale de fluide sortant par unité de temps du volume est:

$$\int_{\partial V_0} \rho \vec{U} d\sigma \quad \text{.....(A.2)}$$

Le principe de la conservation de la masse se traduit par l'égalité suivante:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV = \int_{\partial V_0} \rho \vec{U} d\sigma \quad \text{.....(A.3)}$$

L'intégrales de surface est transformée en intégrale de volume en appliquant la forme d'Ostrogradsky:

$$\int_{\partial V_0} \rho \vec{U} d\sigma = \int_{V_0} \nabla \cdot (\rho \vec{U}) dV \quad \text{.....(A.4)}$$

L'équation (A.4) s'écrit sous la forme :

$$\int_{V_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) \right) dV = 0 \quad \text{.....(A.5)}$$

Cette égalité devant être vérifiée pour n'importe quel volume, on obtient:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad \text{.....(A.6)}$$

II. CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

Le fluide est parfait, la seule force exercée est due à la pression. La force totale s'exerce sur le volume V_0 est égale à l'intégrale sur la pression prise sur la surface de volume $d\sigma$:

$$-\int_{\partial V_0} P d\sigma \quad \dots\dots(A.7)$$

La transformation en intégrale de volume donne :

$$-\int_{\partial V_0} P d\sigma = -\int_{V_0} \vec{\nabla} P dV \quad \dots\dots(A.8)$$

On peut maintenant écrire le principe de la conservation de quantité de mouvement: la force $-\vec{\nabla}P$ exercées par le fluide ambiant sur chaque élément de volume dV est égale au produit de la masse ρ de l'unité de volume de fluide par son accélération $\frac{d\vec{U}}{dt}$ ce qui traduit par

l'équation:

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} = -\vec{\nabla}P \quad \dots\dots(A.9)$$

Où : $\frac{d\vec{U}}{dt}$ représente la variation de la vitesse d'une particule déterminée se déplaçant

dans l'espace, c'est-à-dire :

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} \quad \dots\dots(A.10)$$

On substituons (A.10) dans (A.9) on obtient l'égalité:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}P} \quad \dots\dots(A.11)$$

Cette équation du mouvement du fluide a été déduite par L.EULER (1755).

III. CONSERVATION DE L'ENERGIE

La troisième loi de conservation de la mécanique des milieux continus traduit la conservation de l'énergie. La dérivée $\frac{dE}{dt}$ de l'énergie E d'un système est la somme de la puissance des efforts extérieurs $P_{(e)}$ exercés sur le système et du taux de chaleur Q reçue par le système.

$$\frac{dE}{dt} = P_{(e)} + Q \quad \text{.....(A.13)}$$

L'énergie E et la somme de l'énergie cinétique et l'énergie interne.

D'où:

$$E(V_0) = \int_{V_0} \rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \|\tilde{U}\|^2 \right) dV \quad \text{.....(A.14)}$$

où ε est l'énergie spécifique.

$$\|\tilde{U}\|^2 = u^2 + v^2$$

Le mouvement d'un fluide parfait est considéré comme adiabatique. Il n'y a pas d'échange de chaleur donc on a:

$$Q = 0 \quad \text{.....(A.15)}$$

Les équations précédent permet donc d'obtenir:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \|\tilde{U}\|^2 \right) dV = P_{(e)} \quad \text{.....(A.16)}$$

Le théorème d'énergie cinétique permet de calculer le terme $\frac{d}{dt} \int_{V_0} \frac{1}{2} \|\tilde{U}\|^2 dV$.

La dérivée en temps de l'énergie cinétique égale la somme des puissances des efforts extérieurs $P_{(e)}$ et intérieurs $P_{(i)}$.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \frac{1}{2} \|\tilde{U}\|^2 dV = P_{(e)} + P_{(i)} \quad \text{.....(A.17)}$$

où dans le cas d'un fluide parfait :

$$\begin{cases} P_{(e)} = \int_{\partial V_0} -P\vec{n} \cdot \vec{U} d\sigma \\ P_{(i)} = \int_{V_0} P\vec{\nabla} \cdot \vec{U} dV \end{cases} \dots\dots(A.18)$$

Des égalités (A.16), (A.17) et (A.18) on déduit :

$$\int_{V_0} \frac{d}{dt}(\rho\varepsilon) dV = - \int_{V_0} P\vec{\nabla} \cdot \vec{U} dV \dots\dots(A.19)$$

ceci pour tout volume V_0 .

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho\varepsilon) + P\vec{\nabla} \cdot \vec{U} &= 0 \dots\dots(A.20) \\ \frac{\partial e}{\partial t} + ((P + e)\vec{\nabla} \cdot) \vec{U} &= 0 \end{aligned}$$

En appliquant la définition de la dérivée particulière (A.10) on obtient :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + ((P + e)\vec{\nabla} \cdot) \vec{U} = 0$$

Soit $e = \rho\varepsilon$, l'énergie totale du fluide par unité de masse, l'équation de l'énergie s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + ((P + e)\vec{\nabla} \cdot) \vec{U} = 0 \dots\dots(A.21)$$

où P est fonction de e :

$$P = (\gamma - 1)\left(e - \frac{1}{2}\rho\|\vec{U}\|^2\right) \dots\dots(A.22)$$

et où $\gamma = C_p / C_v$ est la proportion des chaleurs spécifique ($\gamma = 1.4$ pour l'air).

Bibliographie

Avec ANNEXE B2

- [1]: Jaumotte.A.L,Choc et onde de choc, Tome I et II,Masson et cie ,paris.
- [2]: Rebuffet.P,Aérodynamique expérimentale, Tome I et II ,Dunod.
- [3]: Chapiro.A.H, The dynamics and thermodynamics of compressible fluide flow, Volume I, the Roland press company,New-York 1953.
- [4]: Véronique BILLEY,Résolution des Equations D'Euler par la Methodes D'Eléments Finis.Thèse de 3^{ème} cycle,Uni.Pierre et Marie curie, Paris VI.
- [5]:Leipmann, H.W and Roshko.A,Elements of gasdynamics, John Willey and ons,Ins,New-York,1957.
- [6]: Peyet. R,Taylor. T.D,Computational methods for fluid flow,Springer-Verlag, New-York,1983.
- [7]: Ferziger.J.H.Numerical methods for engineering application.J Willey and sons ,New-York,1981.
- [8]: O.C.Zienkiewicz, The finite element method ,Volume I,II.
- [9]: P.I ROE,Approximat riemann solvers,parameter vectors and difference . schemse,Journal of comp.Physics,n°43,pp.357-371,1981.
- [10]: B. Van Leer, Flux splitting for the euler equation, Icase report n°82-30, september 28,1982.

[11]: A.Herten, On ustream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, ICASE report n° 82-5, March 17, 1982.

[12]: Ouziaux.R, Perrier.J, Mecanique des fluide appliquées, 3^{ème} édition , Dunod

[13]: The aeronautical Journal , Janury 1997.p.9-16.



