

12/97

République Algérienne Démocratique et Populaire

الدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Ecole Nationale Polytechnique  
Département de Génie Mécanique

## Projet de fin d'études

*pour l'obtention du Diplôme d'Ingeniorat d'Etat  
en Mécanique*

### SUJET

# ÉTUDE DE LA MODIFICATION DES DENTURES DES ENGRENAGES CYLINDRIQUES

Dirigé par :

*Mr M. Bouaziz*

*Mr H. Belhannèche*

Etudié par :

*RACHEDI Mahmoud*

*ZEBDI Oussama*

Promotion  
Octobre 1997

République Algérienne Démocratique et Populaire

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Ecole Nationale Polytechnique  
Département de Génie Mécanique

## Projet de fin d'études

*pour l'obtention du Diplôme d'Ingeniorat d'Etat  
en Mécanique*

### SUJET

# ÉTUDE DE LA MODIFICATION DES DENTURES DES ENGRENAGES CYLINDRIQUES

Dirigé par :

*Mr M. Bouaziz*

*Mr H. Belhanneche*

Etudié par :

*RACHEDI Mahmoud*

*ZEBDI Oussama*

Promotion  
Octobre 1997

## *Dédicaces*

*Je dédie ce mémoire :*

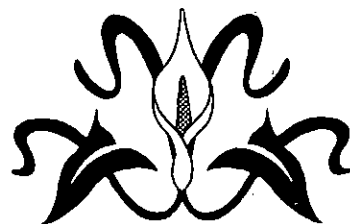
- à ma mère
- à mon père
- à mes frères et soeurs
- à mes amis.

*Oussama*

*Je dédie ce mémoire :*

- à mes parents
- à mes frères et soeurs
- à mes amis.

*Mahmoud*



## REMERCIEMENTS

*Nous exprimons notre profonde gratitude à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce projet.*

*Nous tenons à remercier Mr Med Bouaziz, et Mr H.belhaneche, qui nous ont aidé et nous ont orienté vers le bon chemin pour arriver à la fin du projet.*

*Nous remercions aussi les fonctionnaires de la S.N.V.I - C.V.I, et surtout ceux du département Contrôle, pour leur aide et leur conseils.*

*Enfin, nous n'oublions pas la société Amel- Informatique, là ou nous avons saisi et tiré ce mémoire.*

# SOMMAIRE

<b>Introduction générale</b>	2
<b>Chapitre I : La géométrie d'une denture à développante de cercle</b>	4
I-1 Définition	5
I-2 Coordonnées et normale d'un point de la développante de cercle	6
I-3 Déport	8
I-3-1 Entraxe normal	9
I-3-2 Denture déporté sans variation d'entraxe	10
I-3-3 Denture déporté avec variation d'entraxe	10
I-4 Génération de la surface de la denture cylindrique	11
I-4-1 Equation paramétriques de la surface de denture	11
<b>Chapitre II : Etude de la géométrie d'une denture modifiée</b>	16
II-1 Etude de la géométrie d'une denture avec bombé de profil	17
II-1-1 Définition	17
II-1-2 Principe de l'étude	18
II-2 Equation paramétrique du profil de denture avec bombé	19
II-3 Etude de la géométrie d'une denture avec bombé d'hélice	29
II-3-1 Définition	29
II-3-2 Principe de l'étude	30
<b>Chapitre III : Le choix du bombement des dentures d'engrenages droits</b>	36
III-1 Généralité	37
III-2 Déplacement de portée causée par une déflexion	38
III-3 Cas du contact linéaire	39
III-4 Cas du contact ponctuel	40
III-5 Calcul des axes de l'ellipse de portage	42
III-6 Passage du contact ponctuel au contact linéaire	45

III-7 Calcul de la surcharge provoqué au centre de la zone de portage par le bombement lorsque celui-ci est suffisant pour que les extrémités de la largeur de denture soient complètement déchargées	48
III-8 Cas où les extrémités de la largeur de denture ne sont pas entièrement déchargées	49
III-9 Choix du bombement	55
III-10 Exemples d'application	58
<b>Chapitre IV: Mode d'obtention</b>	<b>61</b>
IV-1 Rectification des roues cylindriques	62
IV-1-1 Rectification par génération	62
IV-1-2 Rectification par meule de forme	65
IV-2 Le rasage (shaving) des engrenages	67
IV-2-1 Définition, principe de rasage (shaving)	67
IV-2-2 Angle de croisement des axes ( $\Sigma$ )	67
IV-2-3 Vitesse de glissement	68
IV-2-4 Avances	68
IV-2-5 Nombre de course	69
IV-2-6 Matière pour le rasage	69
IV-2-7 Temps de rasage	69
IV-2-8 Le contact entre l'outil et la roue	70
IV-2-9 Les différentes méthodes de rasage	71
IV-2-10 Les machines de rasage (shaving)	73
IV-2-11 Outil de rasage	74
<b>Chapitre V: Contrôle</b>	<b>76</b>
V-1 Détermination des coordonnées réelles	78
V-2 Optimisation du profil bombé par la méthode de moindre carré	80
<b>Conclusion générale</b>	<b>85</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>86</b>
<b>Annexe</b>	<b>88</b>

## INTRODUCTION GENERALE

Les transmissions de puissance par engrenage ont depuis longtemps été largement utilisées du fait de leur rendement élevé et de leur grande précision, et aussi pour leur faible encombrement et leur faible rapport Poids/Puissance transmis. Depuis quelque dizaines d'années, ces mécanismes ont subi des perfectionnements techniques et technologiques afin d'améliorer leur fonctionnalité tant en durée de vie, résistance et capacité de charge qu'en rapport spécifique Poids/Puissance.

Depuis peu, une nouvelle pression technologique s'applique à ces mécanismes avec une réduction du niveau sonore ou vibratoire transmis. Ce mécanisme est alors considéré comme une source d'excitation principale dans les architectures mécaniques modernes (Transport, machine-outil ...).

Il est généralement admis par les spécialistes que le bruit d'engrènement est fortement lié à l'erreur de transmission. Cette erreur angulaire peut être reliée à une définition normalisée dans le monde de l'engrenage qui est l'erreur composée tangentielle, dans le cas où la mesure s'effectue à vide. Elle intègre l'effet couplé des différents défauts de denture.

Cette grandeur globale devient d'ailleurs la mesure qui permet de déterminer la qualité des engrenages.

La recherche d'un fonctionnement fiable et silencieux de ces engrenages conduit en plus de la réalisation des roues dentées de bonne qualité géométrique et technologique, à des modifications des flancs.

Ces modifications ont été envisagées comme un moyen de compenser les diverses erreurs d'usinages et de montages ainsi que les déformations qui peuvent se produire lors du fonctionnement (usure normale, très lente «CETIM»), en même temps une manière de remédier à la détérioration des dentures qui est un phénomène très complexe.

En effet, de nombreuses recherches ont été consacrées au sujet de la modification des dentures qui malheureusement reste toujours un résultat confidentielle des bureaux d'études spécialisés..

Pour traiter donc ce sujet relativement complexe, nous sommes inspirés des hypothèses faites par J. CAPELLE et G. CHABERT et des normes de ISO 1328.

Le plan de travail se résume comme suit :

- Chapitre I: Présentation de la géométrie d'une denture à développante de cercle.
- Chapitre II: Une étude géométrique d'une denture modifier.
- Chapitre III: Une étude sur le choix du bombement des dentures d'engrenages droits.
- Chapitre IV: Le mode d'obtention d'une telle denture, à savoir la rectification et le shaving (le rasage).
- Chapitre V: Une optimisation du profil au cours du contrôle des dentures d'engrenage cylindriques.



## CHAPITRE I

# La géométrie d'une denture à développante de cercle

On rencontre différents types de profils des dentures d'engrenages : en épicycloïde, à arc de cercle, à développante de cercle ...etc. Actuellement la denture presque exclusivement utilisée est celle dont le profil en développante de cercle, pour ces avantages pratique tel que la simplicité de génération, l'insensibilité aux erreurs d'entre-axe, ...etc.

**I-1 Définition**

Le profil à développante de cercle découle de la deuxième application de roulette [HEN1], la fig. I-1 illustre la définition de ce profil : La développante (P) est obtenue en faisant rouler sans glisser la droite ( $\Delta$ ) sur le cercle ( $C_b$ ) appelé cercle de base.

Par définition, Arc TQ = TM, Q étant le point de rebroussement du profil (P) et T le centre instantané de rotation de la droite ( $\Delta$ ). Le point M se déplace du point Q (cercle de base) jusqu'à un point  $M_a$  appartient au cercle de tête, où le segment de droite TM prend sa valeur maximale  $TM_a$  (fig. I-1).

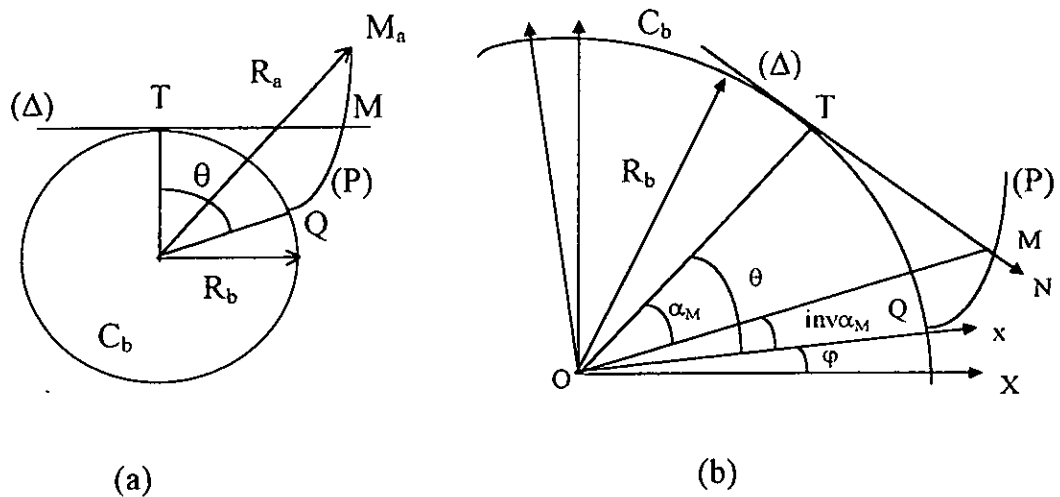


Fig. I-1 : profil en développante de cercle

## I-2 Coordonnées et normale d'un point de la développante de cercle

Puisque arc TQ = TM, on peut alors écrire (Fig. I-1):

$$R_b \theta = R_b \operatorname{tg} \alpha_M$$

d'où :  $\theta = \operatorname{tg} \alpha_M$  ( $\theta$  en radians)

Comme  $\theta = \alpha_M + \operatorname{inv} \alpha_M$ , il vient :

$$\operatorname{inv} \alpha_M = \operatorname{tg} \alpha_M - \alpha_M \quad (\alpha_M \text{ en radians})$$

Les coordonnées du point M peuvent être facilement calculées. On a :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = OM \cos[\operatorname{inv}(\alpha_M)] \\ y = OM \sin[\operatorname{inv}(\alpha_M)] \end{cases} \quad (I-1)$$

Remarquons que le rayon polaire OM peut être donné par :

$$OM = \frac{R_b}{\cos(\alpha_M)}$$

En remplaçant  $\operatorname{inv} \alpha_M$  par  $\theta - \alpha_M$  et en tenant compte des formules de transformation trigonométriques de cosinus et sinus de la différence de deux angles, on obtient :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = \frac{R_b}{\cos \alpha_M} (\cos \theta \cos \alpha_M + \sin \theta \sin \alpha_M) \\ y = \frac{R_b}{\cos \alpha_M} (\sin \theta \cos \alpha_M - \cos \theta \sin \alpha_M) \end{cases}$$

d'où finalement :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = R_b (\cos \theta + \theta \sin \theta) \\ y = R_b (\sin \theta - \theta \cos \theta) \end{cases} \quad (I-2)$$

Le vecteur tangent à la développante peut être obtenu en dérivant le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  par rapport à  $\theta$ . En le désignant par  $\vec{t}$  et en le prenant unitaire, il a pour composantes:

$$\vec{t} \begin{cases} t_x = \cos \theta \\ t_y = \sin \theta \end{cases}$$

La normale unitaire  $\bar{n}$  est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs  $\bar{t}$  et  $\bar{k}$  ( $\bar{k}$  étant le vecteur unité porté par l'axe OZ). D'où  $\bar{n} = \bar{t} \wedge \bar{k}$ . Tous calculs faits, on obtient :

$$\bar{n} \begin{cases} n_x = \sin \theta \\ n_y = -\cos \theta \end{cases}$$

Ceci montre que la normale  $\bar{n}$  est portée par l'axe instantané de rotation ( $\Delta$ ). Le centre de courbure du profil au point M est le centre instantané de rotation.

Le point de rebroussement Q est choisi quelconque sur le cercle de base. En le décalant au point  $Q_1$  (fig I-2), on obtient une développante parallèle à la précédente. En effet, on a :

$$TM = R_b \theta$$

$$MM_1 = R_b \theta_1$$

Il vient :  $MM_1 = TM_1 - TM = R_b (\theta_1 - \theta)$

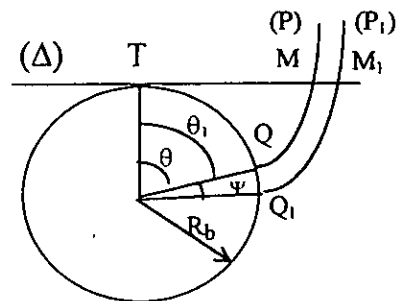


Fig. I-2

En vertu de la définition de la développante de cercle, cette relation peut s'écrire :  $MM_1 = R_b \psi$

Donc, pour toute position de la droite ( $\Delta$ ), le segment  $MM_1$  est constant, alors les profils (P) et ( $P_1$ ) sont parallèles. En outre, si l'angle  $\psi$  est très faible, on peut confondre les profils (P) et ( $P_1$ ). On en déduit qu'une petite rotation de la développante autour de l'axe de la pièce provoque une erreur constante suivant la normale et n'influe que très peu sur cette normale.

Le profil de la denture est pratiquement défini si l'on se fixe le cercle de base. En pratique, on calcule le rayon de ce dernier à partir des éléments caractéristiques de l'outil de génération: le module réel  $M_n$ , l'angle de pression réel  $\alpha_n$ , l'angle  $\beta$  de l'inclinaison primitive de taillage par rapport à l'axe du pignon et le nombre de dents  $Z$  du pignon.

### I-3 Déport

Le déport est un mécanisme géométrique des corrections de denture, qui est défini par le déplacement  $V$  de la ligne primitive de taillage (tangente au cercle primitif de denture sur laquelle elle roule sans glisser durant la génératrice), par rapport à la ligne de référence (Fig. I-3).

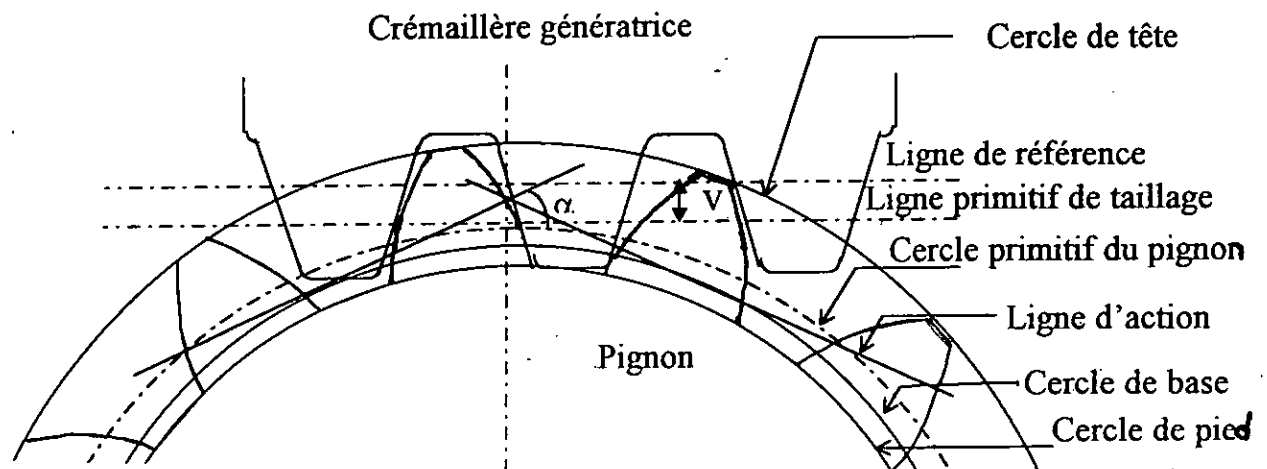


Fig. I-3 Déport des dentures

Pour une denture non déportée, on a:

$$\text{épaisseur} = \text{intervalle} = \frac{\text{Pas}}{2} = \frac{\pi m_0}{2}$$

$m_0$  : Module de la crémaillère génératrice.

$\alpha_0$  : angle de pression (Pour une denture normalisée,  $\alpha = 20^\circ$ )

Sailli =  $m_0$ .

Creux =  $1.25 m_0$ .

Hauteur  $h = 2.25 m_0$ .

$$\text{Rayon primitif } R = \frac{Z}{2} m_0$$

Pour une denture déportée, nous avons:

épaisseur  $\neq$  intervalle

Sailli  $\neq m_0$ .

Creux  $\neq 1.25 m_0$ .

Sailli + Creux = Hauteur =  $2.25 m_0$ .

Le déport est compté positif lorsque la ligne de référence est à l'extérieur du cercle primitif et négatif dans le cas contraire. Le coefficient de déport est défini par la relation :

$$D = \frac{V}{m_0}$$

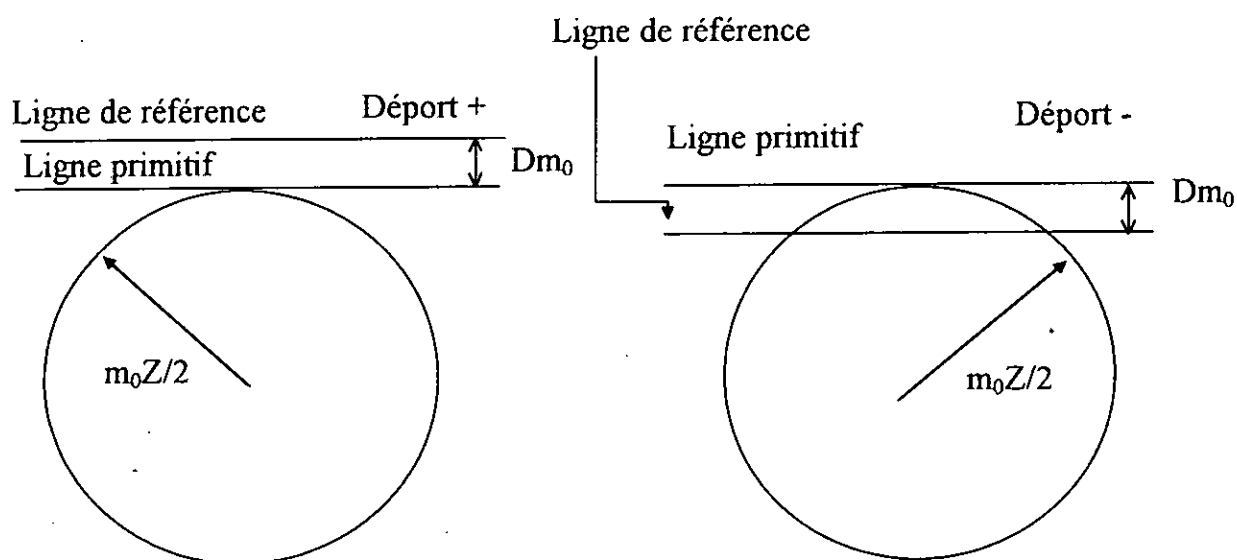


Fig. I-4 : Signes du déport

**I-3-1 Entraxe normal :** L'entraxe normal  $a$  est la somme des rayons primitifs de taillage des deux organes d'un engrenage, soit :

$$a = m_0 \left( \frac{Z_1 + Z_2}{2} \right)$$

**I-3-2 Denture déportée sans variation d'entraxe**

Tel que la somme des déports des deux organes (pignon et roue) est nulle

$$D_2 = -D_1 \quad D_1 + D_2 = 0$$

Le tableau suivant résume les caractéristiques des dentures déportées sans variations d'entraxe comparativement avec celles de denture normale.

Denture normale	Dentures déportées	
	Pignon	Roue
Pignon et roue		
Sailli $h_a = m_0$	$h_{a1} = m_0 + V$	$h_{a2} = m_0 - V$
Creux $h_f = 1.25 m_0$	$h_{f1} = 1.25 m_0 - V$	$h_{f2} = 1.25 m_0 + V$
Hauteur $h = 2.25 m_0$	$h_1 = 2.25 m_0$	$h_2 = 2.25 m_0$
	V déplacement de profil	
Entraxe $a = m_0 \left( \frac{Z_1 + Z_2}{2} \right)$	$a = m_0 \left( \frac{Z_1 + Z_2}{2} \right)$	
Angle de pression $\alpha_0$	$\alpha_0$	
$s_1 + s_2 = \pi m_0$	$s_1 + s_2 = \pi m_0$	

**I-3-3 Dentures déportées avec variation d'entraxe**

Dans ce cas  $D_1 + D_2 \neq 0$ , on cite deux cas :

$$D_1 + D_2 > 0 \Rightarrow s_1 + s_2 > 0$$

$$D_1 + D_2 < 0 \Rightarrow s_1 + s_2 < 0$$

Pour plus de détails voir la référence [HEN1].

### I-4 génération de la surface de la denture cylindrique

La génération d'une denture cylindrique est obtenue en faisant rouler sans glisser sur le cylindre de base de rayon  $R_b$  un plan ( $P_b$ ) auquel est lié un plan ( $N$ ) qui lui est normal et incliné d'un angle  $\beta_b$  par rapport à l'axe instantané de rotation  $TT'$  (Fig.I-5). Le plan ( $N$ ) enveloppe une surface qui peut être considérée comme engendrée par la droite ( $L$ ) lorsque le plan ( $P_b$ ) roule sans glisser sur le cylindre ( $C_b$ ). La normale  $N$  à la surface de denture (normale au plan de génération ( $N$ )) est contenue dans le plan ( $P_b$ ) et perpendiculaire à la génératrice ( $L$ ). Elle est donc portée par la droite  $TA$ .

La droite ( $L$ ) intersection des plans ( $P_b$ ) et ( $N$ ) peut être considérée comme le développement sur le plan ( $P_b$ ) d'une hélice du cylindre ( $C_b$ ). La surface de denture est donc une surface engendrée par une succession de tangentes à l'hélice tracée sur le cylindre de base. C'est une hélicoïdale développable.

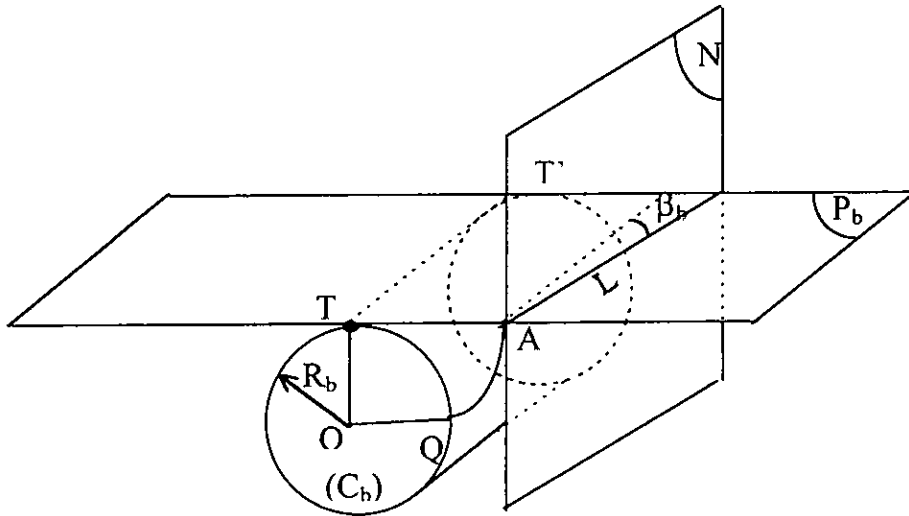


Fig. I-5

#### I-4-1 Equation paramétriques de la surface de denture

Dans la référence [Bou], on trouve un calcul sur l'hélicoïdale développable. Sur la Fig. I-6a est représentée une hélice tracée sur le cylindre de rayon  $R_b$ . La fig. I-6b représente son développement, la droite ( $L$ ), dans le plan ( $P_b$ ) tangent au cylindre. Le point  $A$  appartient au plan ( $Ox, Oy$ ).



Par définition, on peut écrire :

$$TA = \text{arc } QT = R_b \theta$$

Un point N de tangence entre le plan ( $P_b$ ) et le cylindre et appartenant à la droite (L) est défini par :

$$Z = TN = \frac{TA}{\text{tg}\beta_b} = \frac{P_z}{2\pi} \theta \quad (\text{I-3})$$

$P_z$  étant le pas de l'hélice circulaire ou encore le pas hélicoïdal.

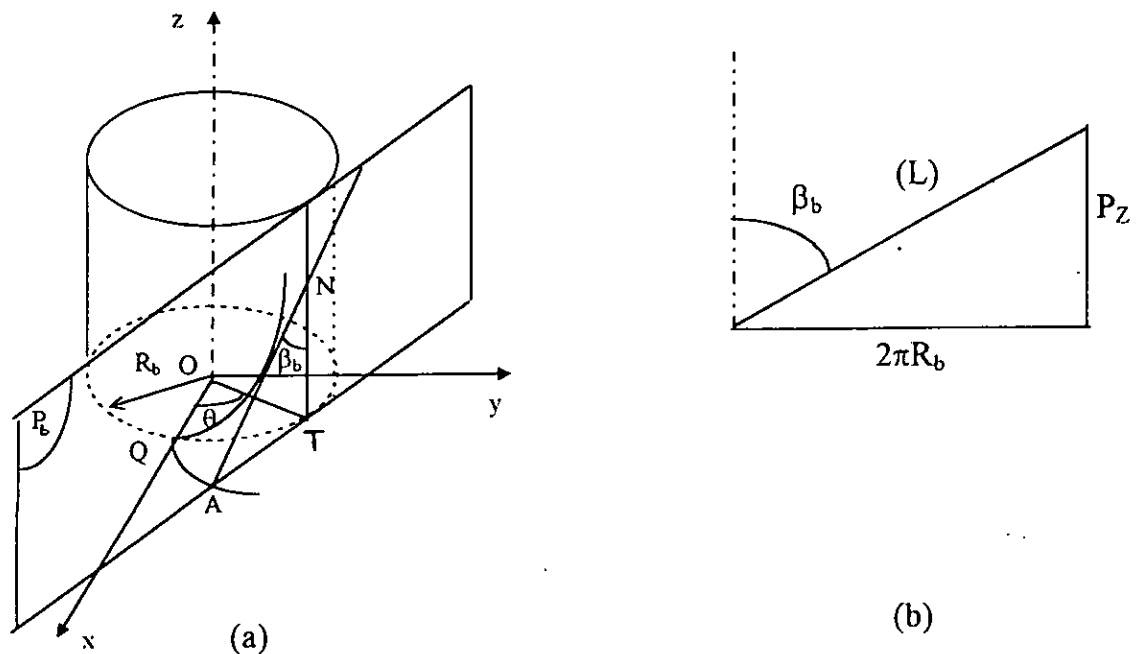


Fig. I-6 : Hélice circulaire

En désignant par  $h = P_z/2\pi$  (pas réduit), les coordonnées du point N et les composantes de la tangente à l'hélice s'écrivent :

$$\overrightarrow{ON} \begin{cases} R_b \cos \theta \\ R_b \sin \theta \\ h\theta \end{cases} \quad \frac{d\overrightarrow{ON}}{d\theta} \begin{cases} -R_b \sin \theta \\ R_b \cos \theta \\ h \end{cases}$$

Soit  $M(x, y, z)$  un point de cette tangente. Il satisfait la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{NM} = \lambda \frac{d\overrightarrow{ON}}{d\theta}$$

d'où le système d'équations :

$$\begin{cases} x = R_b(\cos\theta - \lambda \sin\theta) \\ y = R_b(\sin\theta + \lambda \cos\theta) \\ z = h(\theta + \lambda) \end{cases} \quad (I-4)$$

En considérant la section passant par le plan xoy, on aura  $\lambda = -\theta$ , d'où :

$$x = R_b(\cos\theta + \theta \sin\theta)$$

$$y = R_b(\sin\theta - \theta \cos\theta)$$

On voit donc que le profil de denture dans le plan xoy est une développante de cercle de rayon  $R_b$ .

Le plan xoy normal à Oz (axe du cylindre) est choisi quelconque. Les sections de l'hélicoïde développable dans les plans perpendiculaires à l'axe Oz sont donc des développantes de cercle identiques décalées les unes des autres par déplacement hélicoïdal autour de l'axe du cylindre. Les sections cylindriques d'axe Oz sont donc des hélices de même pas hélicoïdal (Fig. I-7).

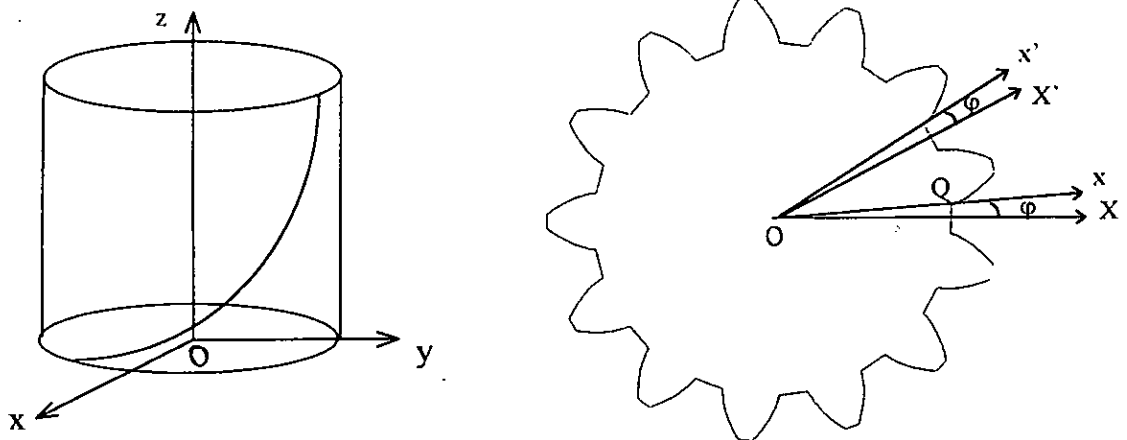


Fig. I-7

Dans un repère fixe (O, X, Y, Z) tel que OZ soit confondu avec l'axe du pignon et OX l'axe passant par le milieu de l'entre-dent et défini dans le même plan contenant l'axe Ox, les coordonnées d'un point M s'écrivent:

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = R_b [\cos(\theta + \varphi) + \theta \sin(\theta + \varphi)] \\ y = R_b [\sin(\theta + \varphi) - \theta \cos(\theta + \varphi)] \\ z = 0 \end{cases} \quad (I-5)$$

$\varphi$  est l'angle entre les axes Ox et OX. Il est donné par la relation suivante :

$$\varphi = \left( \frac{P_{cbt} - S_{bt}}{2R_b} \right) \quad (\varphi \text{ en radiants}) \quad (I-6)$$

$P_{sbt}$  et  $S_{bt}$  sont le pas circonférentiel apparent et l'épaisseur curviligne apparente de la dent définie sur le cercle de base on a :

$$P_{sbt} = \pi M_t \cos\alpha_t .$$

$$S_{bt} = S_{pt} \cos\alpha_t .$$

En prenant :

$\varepsilon = +1$  pour le flanc droit.

$\varepsilon = -1$  pour le flanc gauche.

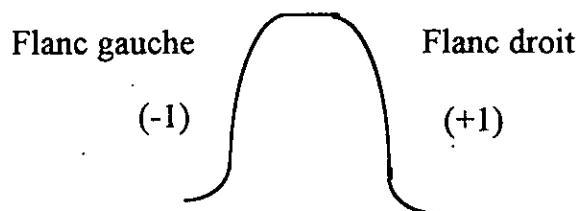


Fig. I-8

Avec cette conventions, un point M appartenant à l'un de ces deux flancs à pour composante :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = R_b (\cos(\theta + \varphi) + \theta \sin(\theta + \varphi)) \\ y = \varepsilon R_b (\sin(\theta + \varphi) - \theta \cos(\theta + \varphi)) \\ z = 0 \end{cases} \quad (I-7)$$

considérant un plan normal à l'axe Oz et situé à une côte  $Z_0$  et un repère  $(O', x', y', z')$  tel que  $(OO') = Z_0$ , l'axe  $O'Z'$  est l'axe du pignon, et l'axe  $O'X'$  passe par le milieu de l'entre-dent défini dans ce plan. Le vecteur  $\overrightarrow{O'M'}$  ( $M'$  étant un point de la surface de denture et appartenant au plan  $O'X'Y'$ ) s'exprime de la même façon que le vecteur  $\overrightarrow{OM}$ . En désignant par  $\theta_0$  l'angle de rotation de l'axe  $O'X'$  par rapport Ox, le vecteur  $\overrightarrow{OM'}$  exprimé dans le repère  $(O, X, Y, Z)$  a pour composantes :

$$\overrightarrow{OM'} = \begin{cases} X = X' \cos \theta_0 - Y' \sin \theta_0 \\ Y = X' \sin \theta_0 + Y' \cos \theta_0 \\ Z = h\theta_0 \end{cases} \quad (I-8)$$

Avec :  $\theta_0 = \frac{Z_0}{h}$

En effectuant les calculs, on obtient :

$$\overrightarrow{OM'} = \begin{cases} x = R_b (\cos(\theta + \varepsilon\theta_0 + \varphi) + \theta \sin(\theta + \varepsilon\theta_0 + \varphi)) \\ y = \varepsilon R_b (\sin(\theta + \varepsilon\theta_0 + \varphi) - \theta \cos(\theta + \varepsilon\theta_0 + \varphi)) \\ z = h\theta_0 \end{cases} \quad (I-9)$$

La surface de denture est définie par les paramètres  $\theta$  et  $\theta_0$  (ou  $Z_0$  si l'angle d'hélice  $\beta$  est nul):  $\theta$  décrit le profil dans un plan donné normal à l'axe du pignon et  $\theta_0$  l'hélice sur le cylindre dont le rayon est donné par la relation:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Ou encore :  $R = R_b \sqrt{1 + \theta^2} \quad (I-10)$

$\theta$ , exprimé en radians, est maintenu fixe pour le tracé de l'hélice.

## CHAPITRE II

# Etude de la géométrie d'une denture modifiée

## II-1 Etude de la géométrie d'une denture avec bombé de profil

### II-1-1 Définition

Pour certaines applications, une correction appropriée du profil comporte une dépouille de tête et de pied qui normalement s'étendent depuis le point à mi-hauteur du segment d'évaluation ( $L_\alpha$ ) jusqu'au sommet de dent, et jusqu'au pied de dent.

(Fig. II-1).

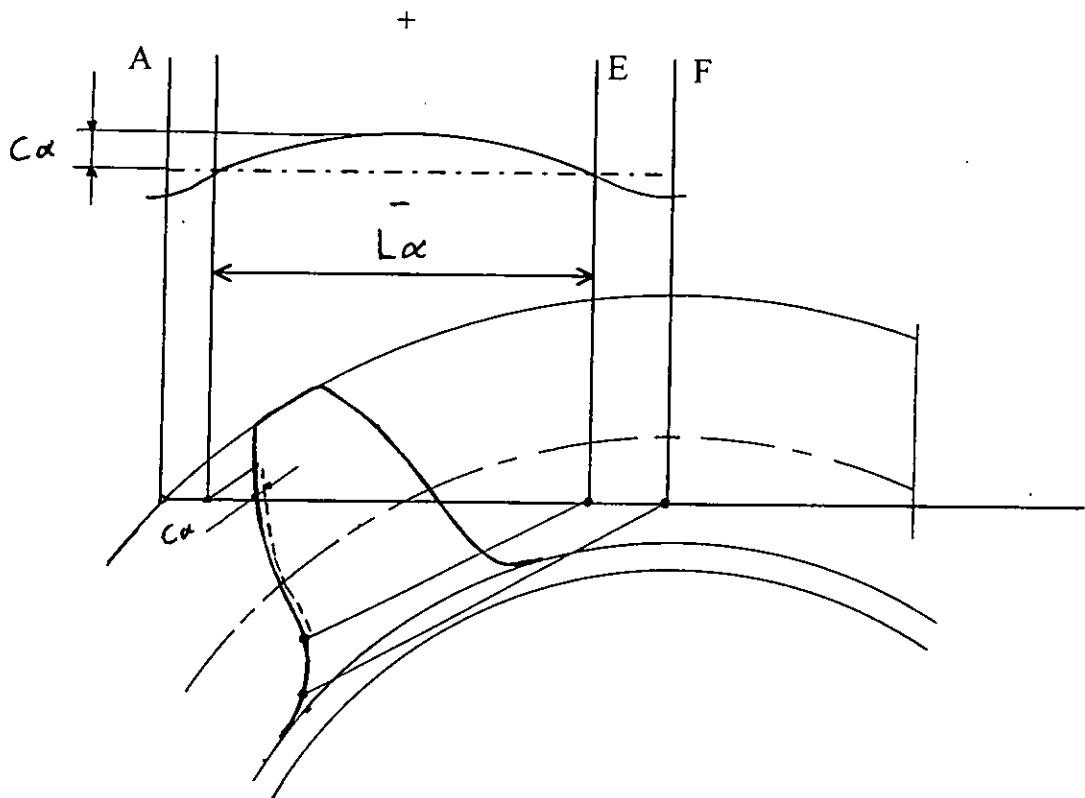


Fig. II-1: Bombé de profil  $C_\alpha$

Dans la référence [HEN1], le professeur G.Henriot donne une formule empirique pour calculer la valeur de bombé  $C_\alpha$ .

$$C_\alpha = 1.5 (F_{\beta x} + 0.5 T_\beta)$$

$$F_{\beta x} = | 0.7 f_{ma} + f_{sh-c} |$$

$$f_{ma} = 1. T_{\beta} = T_{\beta}$$

$$f_{sh-c} = f_{sh-0} (F_m / b)$$

$$f_{sh-0} = (23v + 5)10^{-2} \quad \mu\text{m}/(\text{daN}/\text{mm}) \quad \text{pour les dentures droites}$$

$$f_{sh-0} = (27v + 13)10^{-2} \quad \mu\text{m}/(\text{daN}/\text{mm}) \quad \text{pour les dentures hélicoïdales}$$

$$v = (1 + KL \cdot S / d_1^2)(b / d_1)^2$$

$f_{sh-c}$  : L'erreur de distorsion provenant de la flexion et de la torsion du corps du pignon.

$f_{sh-0}$  : Déformation effective pour 1 daN/mm.

$v$  : Facteur de proportion du pignon.

$T_{\beta}$  : La tolérance de distorsion d'une denture (Voir annexe).

$f_{ma}$  : Erreur de distorsion effective d'un couple dent conjuguées -en contact sans charge-.

$F_{\beta x}$  : Erreur de distorsion initiale.

$F_m$  : La force moyenne.

$L$  : La longueur de l'arbre qui porte le pignon.

$S$  : La position du pignon dans la boîte vitesse.

$K$  : Coefficient (Voir annexe)

### II-1-2 principe de l'étude

L'instrument de contrôle des profils de denture d'engrenage, est conçu de façon à ce que le palpeur touche le profil point par point pour afficher sa développante en résultat, qui est dans le cas théorique un segment de droite de longueur égale à la longueur de profil lui même.

Par conséquent si le profil n'est pas à développante de cercle, c'est à dire, qu'il est modifié, et si en prenant l'hypothèse de Mr J.CAPELLE qui permet de remplacer la développante de profil bombé (modifié) par une courbe parabolique, on aura par palpation dans le cas théorique une courbe parabolique dont le maximum est la valeur de l'erreur de bombé.

De la même façon que le principe de développante de cercle, on peut déduire la géométrie d'une denture de profil bombé, en considérant le roulement sans glissement d'une courbe parabolique sur le cercle de base.

## II-2 Equation paramétrique du profil de denture avec bombé :

Avant de commencer l'analyse géométrique du profil bombé, et au risque de compliquer la présentation, on procède à une configuration plus simple, permettant d'exprimer facilement tous les paramètres qu'on utilisera par la suite. C'est le cas réciproque à la développante, c'est à dire, en faisant rouler sans glisser un cercle " $C_b$ " sur une parabole " $C$ " (Fig. II-2).

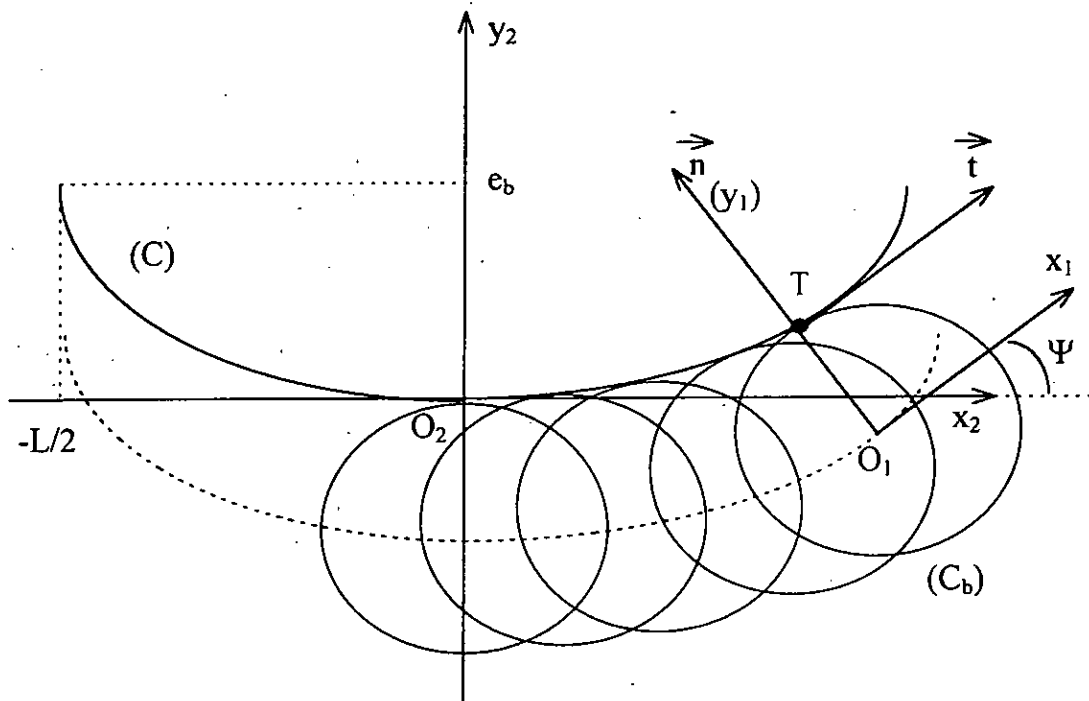


Fig. II-2

On constate que le point  $O_1$  centre de cercle " $C_b$ " suit la même courbe " $C$ ", sauf qu'elle y est décalée de  $R_b$ .

$e_b$  : Valeur maximale de l'erreur de bombé.

$L = TM_a$  : La longueur de segment de droite qui roule sans glisser sur le cercle de base pour obtenir le profil à développante de cercle (voir §I-1).

$T$  : Point de tangence commun au cercle et à la courbe.

$\psi$  : Angle de rotation du repère  $(O_1, x_1, y_1)$  par rapport au repère  $(O_2, x_2, y_2)$ .



Exprimons en premier lieu, la base du repère  $(O_1, x_1, y_1)$  par celle du  $(O_2, x_2, y_2)$ , c'est à dire :

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \cos \psi + \bar{y}_2 \sin \psi \\ \bar{y}_1 = -\bar{x}_2 \sin \psi + \bar{y}_2 \cos \psi \end{cases} \quad (\text{Si les deux repères ont même origine})$$

Sous forme matricielle, on écrit :

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}$$

Ou encore :  $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \end{pmatrix} = [P] \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}$  Avec  $[P]$  matrice de passage, diagonale.

Donc  $[P]^{-1} = [P]^t$

$$\text{D'ou } \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} = [P]^t \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \end{pmatrix}$$

Revenant à l'originale, c'est à dire qu'en faisant rouler sans glisser une parabole d'équation  $y=ax^2$  sur un cercle de base  $C_b$ .

De la même façon que précédemment on trouve

$$\bar{x}_1 \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}_{(O_2, x_2, y_2)}, \quad \bar{y}_1 \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix}_{(O_2, x_2, y_2)}$$

D'ou

$$[P] = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

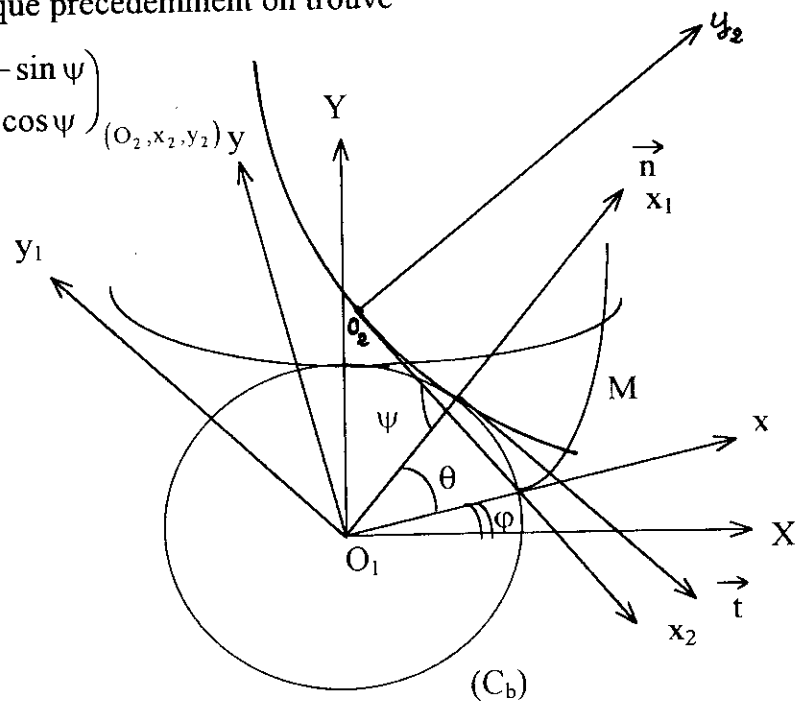


Fig. II-3

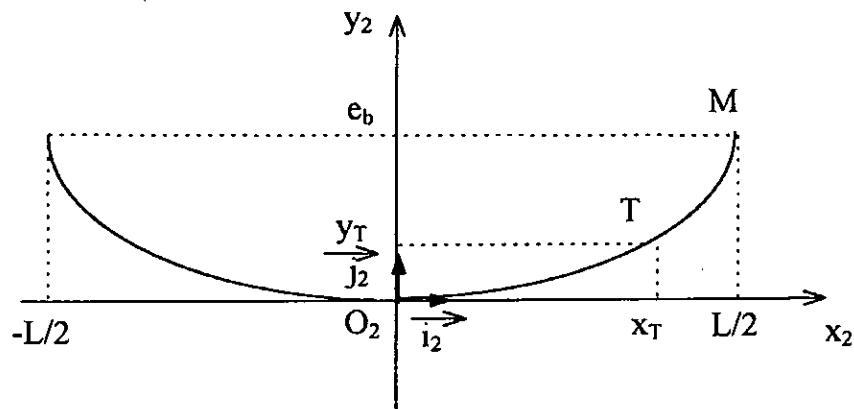


Fig. II-4

$$\vec{O_1T} = R_b \vec{n} = R_b \vec{x}_1$$

$$\vec{O_1T} \begin{pmatrix} R_b \\ 0 \end{pmatrix}_{(O_1, x_1, y_1)}$$

$$\vec{O_1O_2} = \vec{O_1T} + \vec{TO_2}$$

$$\vec{O_2T} = x_T \vec{i}_2 + y_T \vec{j}_2$$

$$\vec{O_2T} \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix}_{(O_2, x_2, y_2)}$$

Sachant que T point tangent à la courbe (C).

$$\text{donc } y' = 2ax \Rightarrow \left( \frac{dy}{dx} \Big|_{x_T} \right) = 2ax_T$$

L'équation de la droite tangente à la courbe (C) en T est donnée par :

$$y = \left( \frac{dy}{dx} \Big|_{x_T} \right) \cdot x + \text{cste} \tag{II-1}$$

D'après l'expression (II-1) on déduit le vecteur tangent au point T :

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2ax_T \end{pmatrix} \text{ avec } \|\vec{t}\| = \sqrt{(2ax_T)^2 + 1}$$

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{(2ax_T)^2 + 1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2ax_T \end{pmatrix}$$

La normale à  $\vec{t}$  qui est  $\vec{n}$  est définie comme suit :

$$\vec{t} \cdot \vec{n} = \vec{0} \Rightarrow \vec{n} \equiv \frac{1}{\sqrt{(2ax_T)^2 + 1}} \begin{pmatrix} -2ax_T \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prenant

$$\vec{i}_1 \equiv \vec{n} \equiv \frac{1}{\sqrt{(2ax_T)^2 + 1}} \begin{pmatrix} -2ax_T \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{j}_1 \equiv -\vec{t} \equiv \frac{1}{\sqrt{(2ax_T)^2 + 1}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2ax_T \end{pmatrix}$$

comme vecteurs de base du repère  $(O_1, x_1, y_1)$ .

Avec:  $\vec{i}_1 \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}_{/(O,x,y)}$        $\vec{j}_1 \equiv \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}_{/(O,x,y)}$

Récrivons les vecteurs  $i_1, j_1$  comme suit :

$$\vec{i}_1 = \frac{1}{\sqrt{(2ax_T)^2 + 1}} (-2ax_T \vec{i}_2 + \vec{j}_2)$$

$$\vec{j}_1 = \frac{1}{\sqrt{(2ax_T)^2 + 1}} (-\vec{i}_2 - 2ax_T \vec{j}_2)$$

Ou encore:  $\vec{i}_1 = \vec{i}_2 \cos \psi + \vec{j}_2 \sin \psi$

$$\vec{j}_1 = -\vec{i}_2 \sin \psi + \vec{j}_2 \cos \psi$$

En comparant les deux expressions, on déduit :

$$\begin{cases} \cos \psi = -\frac{2ax_T}{\sqrt{(2ax_T)^2 + 1}} \\ \sin \psi = \frac{1}{\sqrt{(2ax_T)^2 + 1}} \end{cases}$$

donc:  $\begin{cases} \vec{i}_2 = \vec{i}_1 \cos \psi - \vec{j}_1 \sin \psi \\ \vec{j}_2 = \vec{i}_1 \sin \psi + \vec{j}_1 \cos \psi \end{cases}$       ou encore  $\begin{cases} \vec{i}_2 = \frac{1}{\sqrt{(2ax_T)^2 + 1}} (-2ax_T \vec{i}_1 - \vec{j}_1) \\ \vec{j}_2 = \frac{1}{\sqrt{(2ax_T)^2 + 1}} (\vec{i}_1 - 2ax_T \vec{j}_1) \end{cases}$

Ecrivons sous forme matricielle ces expressions :

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_2 \\ \vec{j}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(2ax_T)^2 + 1}} \begin{pmatrix} -2ax_T & -1 \\ 1 & -2ax_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

Après calcul on trouve :

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_2 \\ \vec{j}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(2ax_T)^2 + 1}} \begin{pmatrix} \sin\theta - 2ax_T \cos\theta & -\cos\theta - 2ax_T \sin\theta \\ \cos\theta + 2ax_T \sin\theta & \sin\theta - 2ax_T \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

Après avoir traité les changements de repères nécessaires, on peut facilement déterminer l'expression des coordonnées du point M; allure du profil cherché :

$$\vec{O_2M} = \frac{L}{2} \vec{i}_2 + e_b \vec{j}_2, \quad \vec{O_2T} = x_T \vec{i}_2 + y_T \vec{j}_2$$

$$\text{donc: } \vec{TM} = \left( \left( \frac{L}{2} - x_T \right) (e_b - y_T) \right) \begin{pmatrix} \vec{i}_2 \\ \vec{j}_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \vec{OT} = R_b (\cos\theta, \sin\theta) \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

En effectuant les calculs, on obtient l'expression des coordonnées du point M dans le repère (O,x,y) :

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} R_b \cos\theta + \frac{1}{\sqrt{(2ax_T)^2 + 1}} \left( \left( \frac{L}{2} - x_T \right) (\sin\theta - 2ax_T \cos\theta) + (e_b - y_T) (\cos\theta + 2ax_T \sin\theta) \right) \\ R_b \sin\theta + \frac{1}{\sqrt{(2ax_T)^2 + 1}} \left( - \left( \frac{L}{2} - x_T \right) (\cos\theta + 2ax_T \sin\theta) + (e_b - y_T) (\sin\theta - 2ax_T \cos\theta) \right) \end{pmatrix}$$

Ou encore :

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} R_b \cos\theta + \left( \frac{L}{2} - x_T \right) \cos(\theta - \psi) - (e_b - y_T) \sin(\theta - \psi) \\ R_b \sin\theta + \left( \frac{L}{2} - x_T \right) \sin(\theta - \psi) + (e_b - y_T) \cos(\theta - \psi) \end{pmatrix} \quad (\text{II-2})$$

Moyennant ce résultat, on conclut que pour déterminer les coordonnées du point M, il faut connaître les paramètres  $(x_T, y_T, \Psi, e_b, R_b, L, \theta)$ , or  $(y_T, \Psi)$ , dépendent de  $x_T$ , qu'on cherche d'abord à évaluer en introduisant la propriété de la développante de cercle :

$$\overbrace{TM} = \overbrace{TQ}$$

Posant  $TM = S_T$

où  $S_T$  est la longueur curviligne limitée par les points T et M respectivement.

avec  $\widehat{TQ} = R_b \theta$ , (sur le cercle de base).

Donc, il nous reste à déterminer  $S_T$ , et l'égaliser à  $R_b \theta$ .

Afin d'obtenir une équation à la variable  $x_T$ .

Autrement dit, nous sommes conduits à évaluer l'intégrale :

$$S_T = \int_{x_T}^{x_M} dS_T = R_b \cdot \theta$$

Pour cela, prenant l'élément infinitésimal :

$$dS_T = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (\text{sur la courbe (C)}).$$

D'où

$$S_T = \int_{x_T}^{x_M} \sqrt{1 + (2ax_T)^2} dx = R_b \cdot \theta$$

avec :  $y = ax^2 \Rightarrow dy = 2ax dx$

On remarque que cette intégrale est de la forme :

$$\int \sqrt{1+z^2} dz = \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} + \int \frac{z^2}{\sqrt{1+z^2}} dz$$

Or

$$\int \sqrt{1+z^2} dz = \frac{1}{2} \left( \text{Arcsh}(z) + z\sqrt{1+z^2} \right)$$

Ou encore

$$\int \sqrt{1+z^2} dz = \frac{1}{2} \left( \ln|z + \sqrt{1+z^2}| + z\sqrt{1+z^2} \right)$$

Revenant à l'origine, avec le changement de variable  $z = 2ax \Rightarrow 2a dx = dz$ ,

on obtient :

$$\frac{1}{2a} \int \sqrt{1+z^2} dz = \int \sqrt{1+(2ax)^2} dx = \frac{1}{4a} \left( \text{Arcsh}(2ax) + 2ax\sqrt{1+(2ax)^2} \right)$$

Finalemnt :

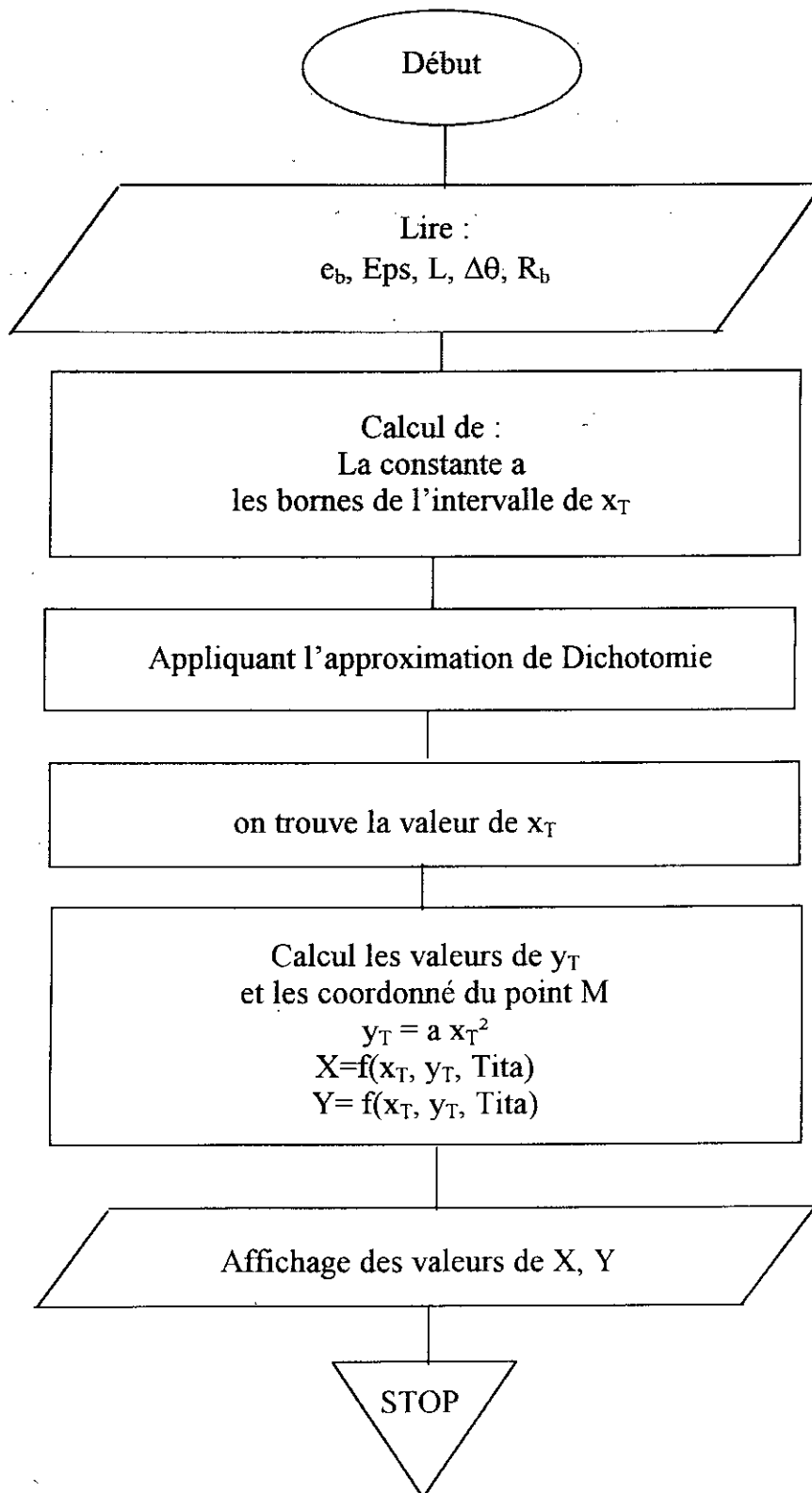
$$S_T = \frac{1}{4a} \left( \text{Arcsh}(aL) + aL\sqrt{1+(aL)^2} - \text{Arcsh}(2ax_T) - 2ax_T\sqrt{1+(2ax_T)^2} \right) = R_b \theta$$

Après simplification on aura l'équation suivante :

$$\text{Arcsh}(2ax_T) + 2ax_T\sqrt{1+(2ax_T)^2} + C = 0 \quad (\text{II-3})$$

Avec :  $C = 4aR_b\theta - \text{Arcsh}(aL) + aL\sqrt{1+(aL)^2}$

La résolution de l'équation (II-3) en  $x_T$  ne peut pas se faire analytiquement, donc on procède aux méthode approximatives. En choisissant la méthode de Dichotomie, on propose l'organigramme de calcul suivant :



Organigramme pour le calcul des coordonnées du profil modifié

Après avoir exécuter le programme du calcul, on trouve les valeurs de  $x_T$ , donc les paramètres  $(y_T, \Psi)$ , on les injecte dans (II-2) on aura les coordonnées de point M d'où l'allure du profil bombé.

Le graphe suivant illustre une comparaison du profil modifié avec celui de la développante de cercle, pour les données suivantes :

Reference de la pièce : CVI-1141336

L'angle de pression  $\alpha = 20,0000^\circ$

Module réel = 3,7500 mm

Angle d'hélice primitive = 17,9167°

La largeur de denture  $b = 25,0000$  mm

Nombre de dent  $Z = 28$

La valeur du bombé  $e_b$  est calculé par les formules données par la référence [HEN1]

pour :

$S/L < 0.3$  ( $S=0.1m$ ,  $L = 0.5m$ ),  $K = 1.2$

Puissance  $P = 110$  ch, Couple  $C = 33$  m.daN

Qualité = 7,  $T_p = 13$   $\mu m$

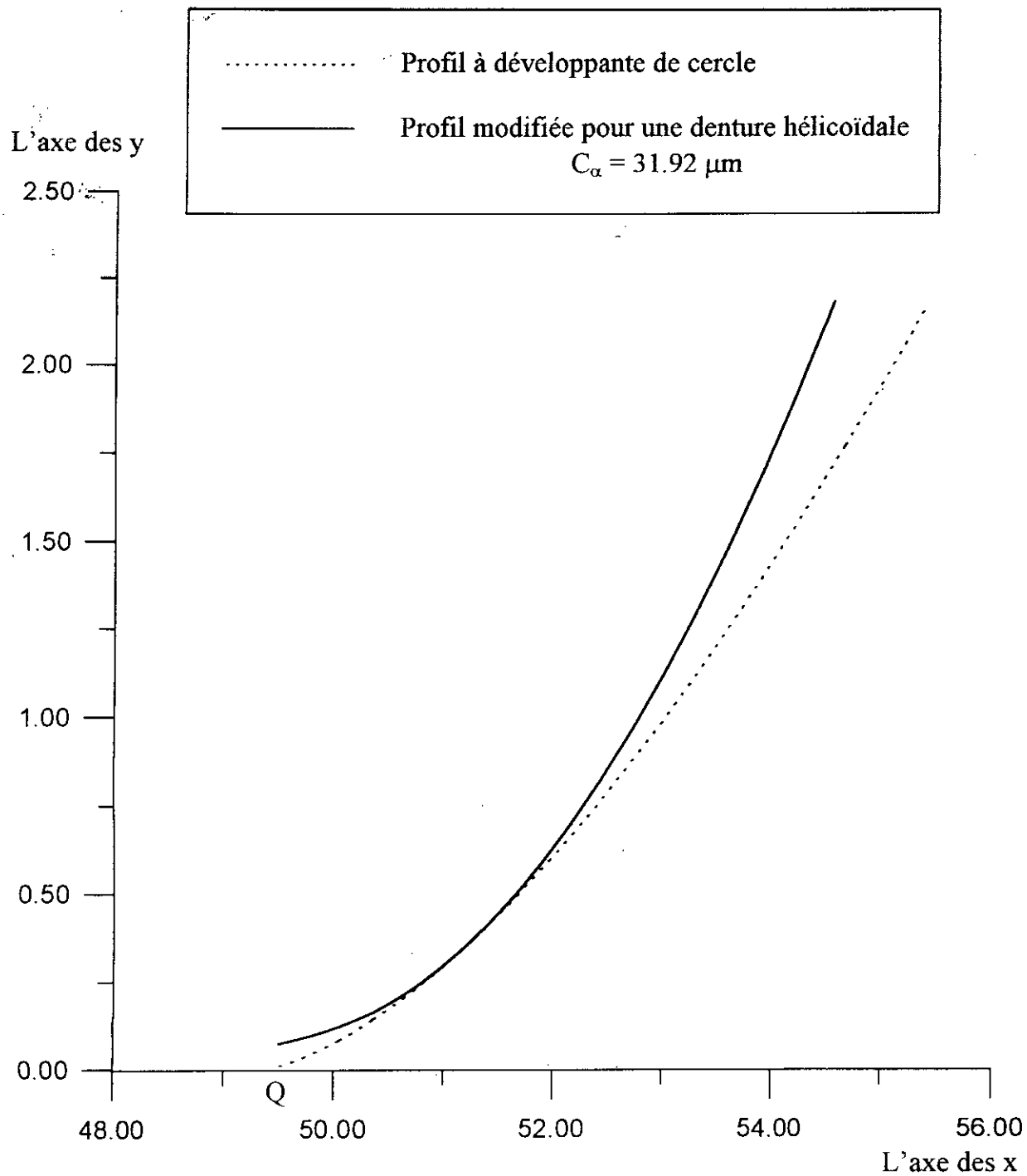
$\nu = 0.3600$

$f_{sh-0} = 5.7120$   $\mu m/(daN/mm)$

$F_{\beta x} = 14.8000$   $\mu m$

$C_\alpha = 31.9687$   $\mu m$





Graphes : comparaison entre profil modifié et profil non modifié

## II-3 Etude de la géométrie d'une denture avec bombé d'hélice

### II-3-1 Définition

Le bombé d'hélice est une forme particulière de correction d'hélice. Dans un diagramme, une hélice non modifiée est représentée par une ligne droite, tandis qu'une hélice avec bombé est représentée par une ligne courbe. Généralement, dans les cas pratique de bombé, la trace d'hélice de référence et l'hélice moyenne ont une forme de parabole, voir Fig II-5 [ISO92].

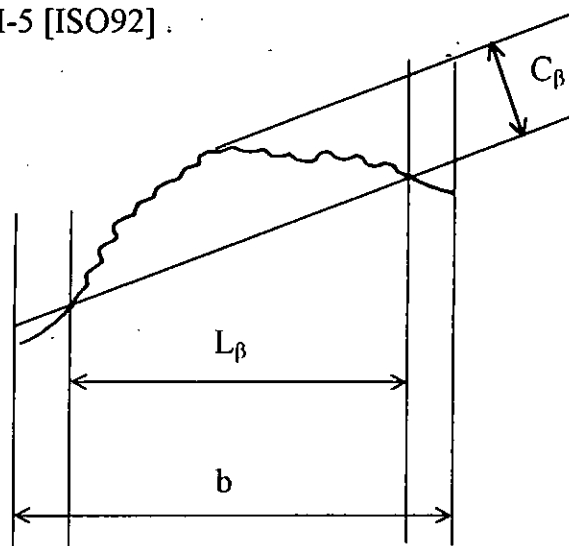


Fig. II-5 : Bombé d'hélice

La procédure d'évaluation du bombé d'hélice  $C_\beta$  est similaire à celle décrite à propos du bombé de profil  $C_\alpha$ , la valeur du  $C_\beta$  est compris entre 10 et 40  $\mu\text{m}$ .

$$C_\beta = 0.5 (1.5 T_\beta + f_{sh}) \quad (\text{II-4})$$

$$f_{sh} = f_{sh-0} (F_m / b)$$

$$f_{sh-0} = (15.5v + 5)10^{-2} \quad \mu\text{m}/(\text{daN}/\text{mm}) \quad \text{pour une denture droite.}$$

$$f_{sh-0} = (18v + 13)10^{-2} \quad \mu\text{m}/(\text{daN}/\text{mm}) \quad \text{pour une denture hélicoïdale.}$$

$$v = (1 + KL \cdot S / d_1^2) (b / d_1)^2$$

II-3-2 Principe de l'étude

On fait rouler sans glisser un plan (P) lié à un plan parabolique (N) sur un cylindre de rayon ( $R_b$ ) (voir fig.II-6). On projète le plan (N) sur (P) on obtient la courbe parabolique ( $C'$ ) (fig. II-7) :

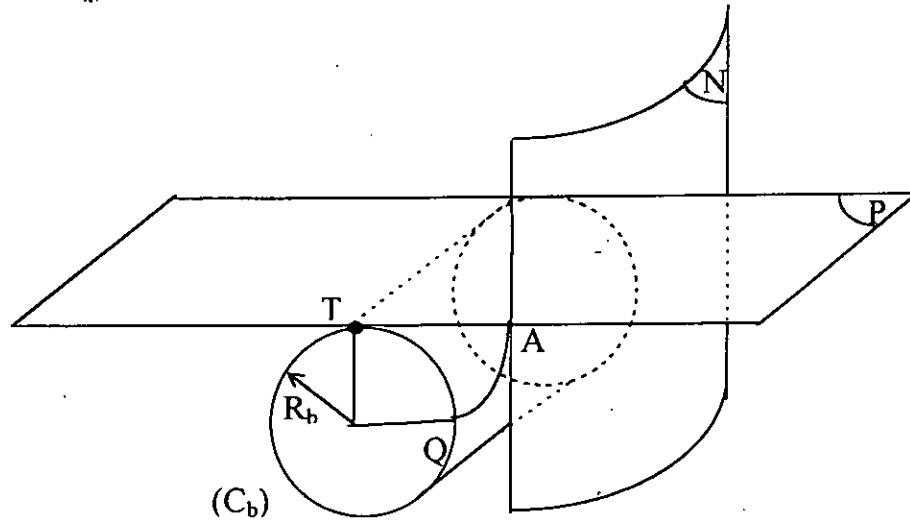


Fig. II-6

Déterminons d'abord le déplacement d'un point ( $N_1$ ) de l'hélice obtenue par la droite ( $\Delta$ ) (hélicoïdale développable) et un point (N) de l'hélice bombé pour le même angle de rotation  $\theta$ .

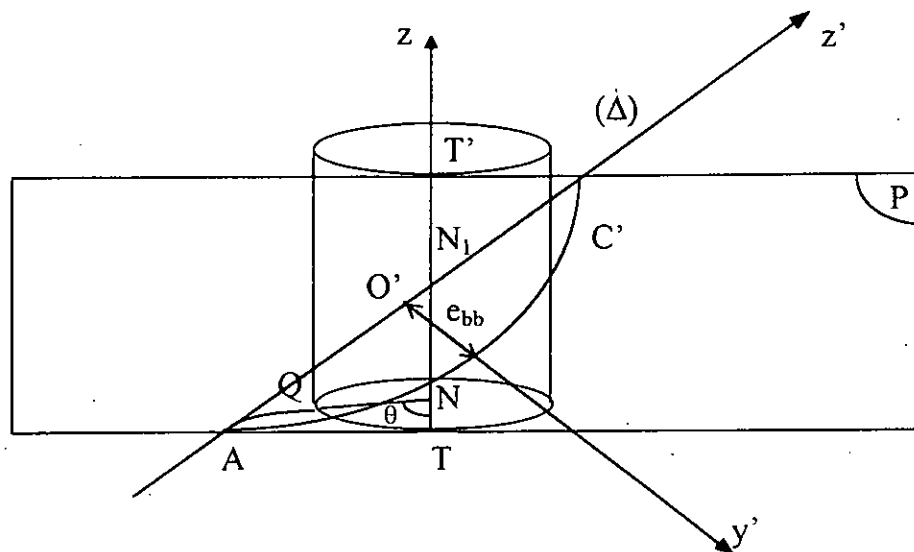


Fig. II-7 : génération d'hélice bombé

Dans le repère  $(O', x', y', z')$  la courbe  $(C')$  est exprimé sous la forme :

$$y' = az'^2 + e_{bb}$$

$$\text{Avec : } a = \frac{-4 \cos^2 \beta \cdot e_{bb}}{b^2}$$

et  $e_{bb}$  la valeur de bombé d'hélice

l'équation de la droite  $(TN_1)$  est la suivante :

$$(TN_1) : y' = -\text{tg}\beta \cdot z' + \left( AN_1 - \frac{b}{2 \cos \beta} \right) \text{tg}\beta$$

$$\text{Avec : } AN_1 = \frac{TN_1}{\cos \beta} = \frac{h\theta}{\cos \beta}$$

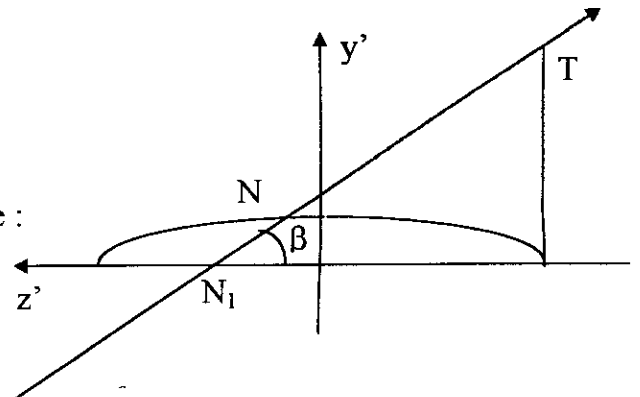


Fig. II-8

Sachant que le point N est l'intersection entre la droite  $TN_1$  et la parabole, donc :

d'une part :

$$y'_N = -\text{tg}\beta \cdot z'_N + \text{tg}\beta \left( h\theta - \frac{b}{2} \right) / \cos \beta$$

et d'autre part :

$$y'_N = az_N'^2 + e_{bb}$$

En comparant ces deux expressions, on obtient :

$$az_N'^2 + \text{tg}\beta \cdot z'_N + e_{bb} - \text{tg}\beta \left( h\theta - \frac{b}{2} \right) / \cos \beta = 0$$

En résolvant l'équation en  $z'_N$ , on aura :

$$\Delta = \text{tg}^2 \beta - 4a \left( e_{bb} - \text{tg}\beta \left( h\theta - \frac{b}{2} \right) / \cos \beta \right)$$

D'après la figure II-8, il existe au moins un point d'intersection entre la droite  $TN_1$  et la parabole, alors  $\Delta \geq 0$  d'où :

$$\left. \begin{aligned} z'_N &= \frac{-\text{tg}\beta - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ z'_N &= \frac{-\text{tg}\beta + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned} \right\} e_{bb}(N) = y'_N = az_N'^2 + e_{bb}$$

$$\text{Or : } TN = T_2 N_2 = \frac{T_2 A}{\text{tg}\beta} = \frac{TA - TT_2}{\text{tg}\beta} \quad (\text{Fig II-9})$$

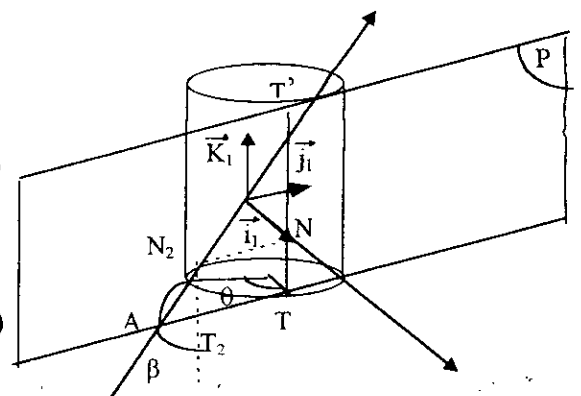


Fig. II-9

$$TN = \frac{R_b \theta - e_{bb}(N) / \cos \beta}{\operatorname{tg} \beta} = h\theta - \frac{e_{bb}(N)}{\sin \beta}$$

$$TN_1 - TN = \frac{e_{bb}(N)}{\sin \beta} \quad (\text{décalage suivant OZ})$$

$$\text{et } NN' = \frac{e_{bb}(N)}{\cos \beta} \quad (\text{décalage suivant } Oy_1)$$

Pour trouver les coordonnées d'un point M situé sur la courbe parabolique (C'), on fait deux changements de repère suivant :

On note les repères :

$$(O', \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}') \equiv (O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$$

$$(O', \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \equiv (O', \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$$

$$(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \equiv (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

Avec :  $i' = i_1$  sortant du plan (P)

$k = k_1$  suivant l'axe de la pièce.

$$\begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} \quad (\text{voir Fig. II-10})$$

Alors :

$$\begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix}$$

On a OT se dirige suivant  $i_1$  : (Fig. II-11)

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

En fin :

$$\begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\cos \beta \sin \theta & \cos \beta \cos \theta & -\sin \beta \\ -\sin \beta \sin \theta & \sin \beta \cos \theta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

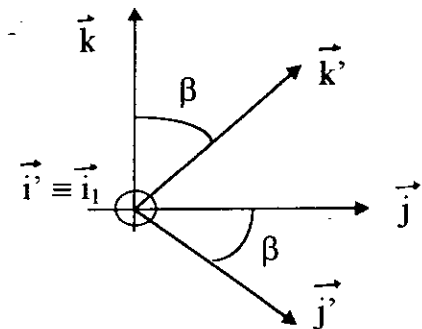


Fig. II-10

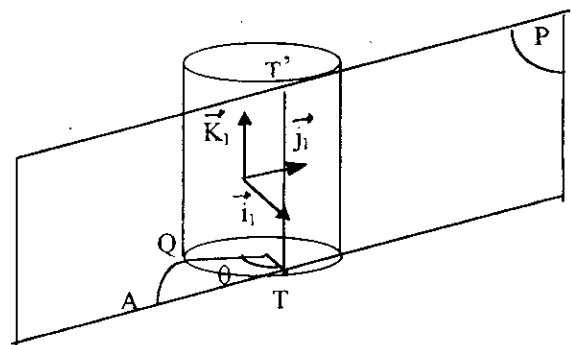


Fig. II-11

Le point M vérifie la relation :  $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$

En posant M(0, y', z') dans le repère lié à la parabole (C')

$$\vec{O'M} = (0 \quad y' \quad z') \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

$$\vec{O'M} = (0 \quad y' \quad z') \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\cos\beta \sin\theta & \cos\beta \cos\theta & -\sin\beta \\ -\sin\beta \sin\theta & \sin\beta \cos\theta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\vec{O'M} = \begin{pmatrix} -y' \cos\beta \sin\theta - z' \sin\beta \sin\theta \\ y' \cos\beta \cos\theta + z' \sin\beta \cos\theta \\ -y' \sin\beta + z' \cos\beta \end{pmatrix}_{/(i,j,k)}$$

$$\vec{OO'} = \vec{ON}_1 + \vec{N}_1O'$$

$$\vec{ON}_1 = \begin{pmatrix} R_b \cos\theta \\ R_b \sin\theta \\ h\theta \end{pmatrix}_{/(i,j,k)}$$

$$\vec{N}_1O' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\left(h\theta - \frac{b}{2}\right) / \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\left(h\theta - \frac{b}{2}\right) / \cos\beta\right] \sin\beta \sin\theta \\ -\left[\left(h\theta - \frac{b}{2}\right) / \cos\beta\right] \sin\beta \cos\theta \\ -\left(h\theta - \frac{b}{2}\right) \end{pmatrix}_{/(i,j,k)}$$

d'où :

$$\vec{N}_1O' = \begin{pmatrix} \left(h\theta - \frac{b}{2}\right) \text{tg}\beta \sin\theta \\ -\left(h\theta - \frac{b}{2}\right) \text{tg}\beta \cos\theta \\ -\left(h\theta - \frac{b}{2}\right) \end{pmatrix}_{/(i,j,k)}$$

$$\vec{OO'} \begin{pmatrix} R_b \cos \theta + \left( h\theta - \frac{b}{2} \right) \text{tg} \beta \sin \theta \\ R_b \sin \theta - \left( h\theta - \frac{b}{2} \right) \text{tg} \beta \cos \theta \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix}_{(i,j,k)}$$

$$\vec{OM} \begin{pmatrix} R_b \cos \theta + \left( h\theta - \frac{b}{2} \right) \text{tg} \beta \sin \theta - y' \cos \beta \sin \theta - z' \sin \beta \sin \theta \\ R_b \sin \theta - \left( h\theta - \frac{b}{2} \right) \text{tg} \beta \cos \theta + y' \cos \beta \cos \theta + z' \cos \theta \sin \beta \\ \frac{b}{2} - y' \sin \beta + z' \cos \beta \end{pmatrix}_{(i,j,k)}$$

Vérification : Si  $M \equiv A$  alors  $y' = 0$ ,  $z' = -\frac{b}{2 \cos \beta}$

sachant que  $h = \frac{R_b}{\text{tg} \beta}$

$$\vec{OA} \begin{pmatrix} R_b \cos \theta + \theta \sin \theta \\ R_b \sin \theta - \theta \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{(i,j,k)}$$

On voit que le profil de la denture dans le plan  $xOy$  est une développante de cercle de rayon  $R_b$ .

Les sections de l'hélicoïde modifié dans les plans perpendiculaires à l'axe ( $Oz$ ), (l'axe de la pièce) sont donc des développantes de cercles décalées les unes des autres par un déplacement hélicoïdal autour de l'axe ( $Oz$ ) et un déplacement dû à la courbe parabolique ( $C'$ ).

Alors : chaque point  $M$  peut être exprimé dans son niveau  $Z$  comme suit :

$$\vec{O_M M} \begin{cases} x = R_b (\cos \theta + \theta \sin \theta) \\ y = R_b (\sin \theta - \theta \cos \theta) \\ z = 0 \end{cases} \quad (II-5)$$

$$\text{Avec } \|\vec{OO_M}\| = \left( h\theta_0 - \frac{e_{bb}(M)}{\sin \theta_0} \right) = z_0$$

Pour un repère ( $O, x, y, z$ ) fixe, tel que  $Oz$  l'axe du pignon et  $Ox$  l'axe passant par le milieu de l'entre-dent dans le même plan contenant l'axe  $Ox$ .

$$\vec{OM} = \begin{cases} x = R_b(\cos(\theta + \varphi) + \theta \sin(\theta + \varphi)) \\ y = R_b(\sin(\theta + \varphi) - \theta \cos(\theta + \varphi)) \\ z = 0 \end{cases} \quad (II-6)$$

$\varphi$  est l'angle entre les axes Ox et OX, Il est donné par la formule (I-6).

Le point M appartenant à l'un de ces deux flancs à pour composante :

$$\vec{OM} = \begin{cases} x = R_b(\cos(\theta + \varphi) + \theta \sin(\theta + \varphi)) \\ y = \varepsilon R_b(\sin(\theta + \varphi) - \theta \cos(\theta + \varphi)) \\ z = 0 \end{cases} \quad (II-7)$$

considérant un plan normal à l'axe Oz et situé à une côte  $Z_0$  et un repère  $(O_M, x_M, y_M, z_M)$  tel que  $(OO_M) \equiv Z_0$ , l'axe  $O_M z_M$  est l'axe du pignon, et l'axe  $O_M x_M$  passe par le milieu de l'entre-dent défini dans ce plan.

Le vecteur  $\vec{OM}$  s'exprime dans le repère  $(O, X, Y, Z)$  à pour composantes :

Avec :

$$\vec{OM} = \begin{cases} X = X' \cos \theta_0 - Y' \sin \theta_0 \\ Y = X' \sin \theta_0 + Y' \cos \theta_0 \\ Z = h\theta_0 - \frac{e_{bb}(M)}{\sin \beta} \end{cases}$$

$$\text{Avec : } \theta_0 = \left( Z_0 + \frac{e_{bb}(M)}{\sin \beta} \right) / h$$

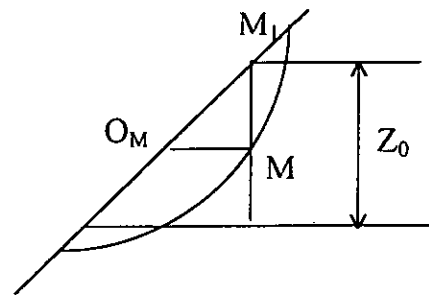


Fig. II-13

En effectuant les calculs, on obtient :

$$\vec{OM} = \begin{cases} x = R_b(\cos(\theta + \varepsilon\theta_0 + \varphi) + \theta \sin(\theta + \varepsilon\theta_0 + \varphi)) \\ y = \varepsilon R_b(\sin(\theta + \varepsilon\theta_0 + \varphi) - \theta \cos(\theta + \varepsilon\theta_0 + \varphi)) \\ z = h\theta_0 - \frac{e_{bb}(M)}{\sin \beta} \end{cases} \quad (II-8)$$



## CHAPITRE III

# Le choix du bombement des dentures d'engrenages droits

### III-1 Généralité

La détermination du bombement longitudinal des dentures d'engrenages est un des problèmes qui embarrassent bien souvent le bureau d'études, par ce qu'il n'y a pas de règle positive qui impose une décision. Dans la littérature technique, on trouve peu d'indication à ce sujet. une opinion assez communément nourrie consiste à envisager le bombement comme un moyen de compenser les divers erreurs d'usinage et de montage. Connaissant la classe de précision d'une roue dentée selon telle ou telle norme, il suffit d'additionner les excès de matières correspond aux tolérances données par la norme pour les diverses erreurs, et d'effectuer un bombement égal à cet excès de matière total. Nous trouvons là l'idée [CHA], communément répandue et d'ailleurs souvent assez vraie qu'on minimise les imperfections d'usinage et de montage en retirant de la matière à un certains endroit dangereux de la pièce.

Certes, on définit généralement le bombement par la valeur de la côte  $\epsilon$  de la fig.III-1 .

$$\epsilon = \frac{L^2}{8R} \quad (\text{III-1})$$

Avec :

R : Rayon de courbure des lignes  
de flanc au primitif.

on note L: La largeur de denture .

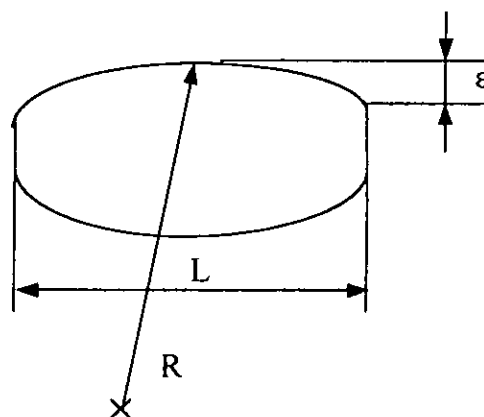


Fig. III-1

#### Remarque

Ce qui est intéressant est le bombement relatif c'est à dire la courbure relative

$\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$  des ligne de flanc des deux organes  $\left( \frac{1}{R_1} \right)$  et la courbure de la ligne flanc

de l'organe n° 1 et  $\frac{1}{R_2}$  et la courbure de la ligne flanc de l'organe n° 2).

### III-2 Déplacement de portée causée par une déflexion

Le premier facteur du choix du bombement est le phénomène de déflexion des arbres sous l'effet des charges transmises. Il en résulte un faux parallélisme qui tend à faire déplacer la portée de long de la largeur de denture d'engrenage.

Selon la figure III-2 nous pouvons décomposer le faux parallélisme des axes en deux composantes : - La déviation  $\beta$ .

- L'inclinaison  $\delta$ .

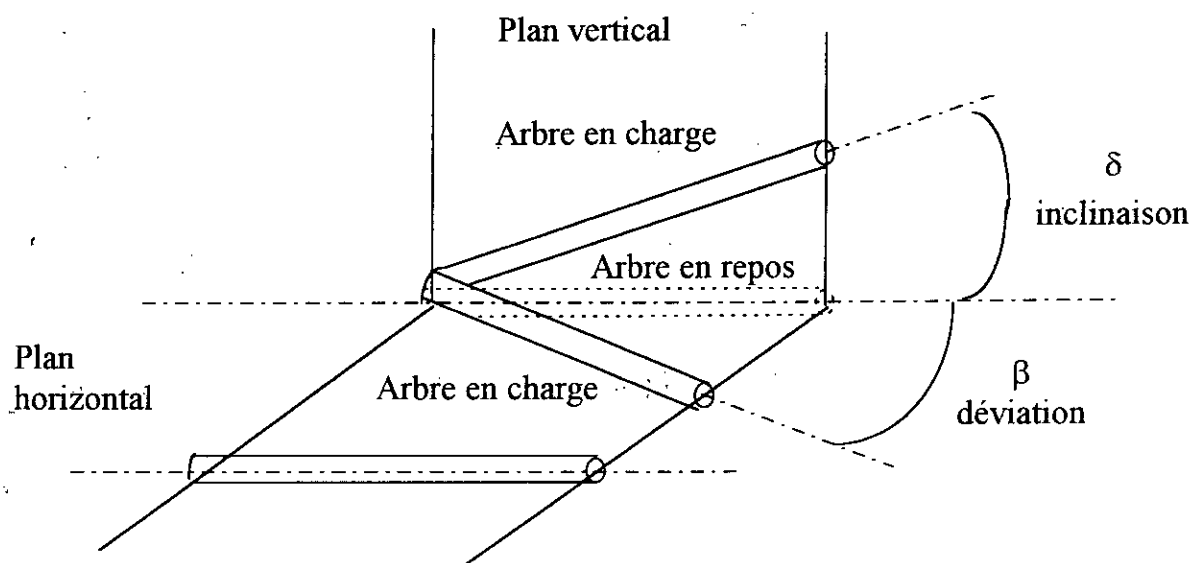


Fig. III-2

Une déviation  $\beta$  radians déplace la portée de :

$$d = \frac{\beta \cos \alpha}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (\text{III-2})$$

Une inclinaison de  $\delta$  radians déplace la portée de :

$$d = \frac{\delta \cos \alpha}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (\text{III-2}')$$

Une première règle qui s'impose est de donner à l'engrenage un bombement suffisant pour que sous l'effet des déflexions des arbres en fonctionnement le centre de portage ne s'éloigne pas trop du milieu de la largeur de denture.

### III-2 Déplacement de portée causée par une déflexion

Le premier facteur du choix du bombement est le phénomène de déflexion des arbres sous l'effet des charges transmises. Il en résulte un faux parallélisme qui tend à faire déplacer la portée de long de la largeur de denture d'engrenage.

Selon la figure III-2 nous pouvons décomposer le faux parallélisme des axes en deux composantes : - La déviation  $\beta$ .

- L'inclinaison  $\delta$ .

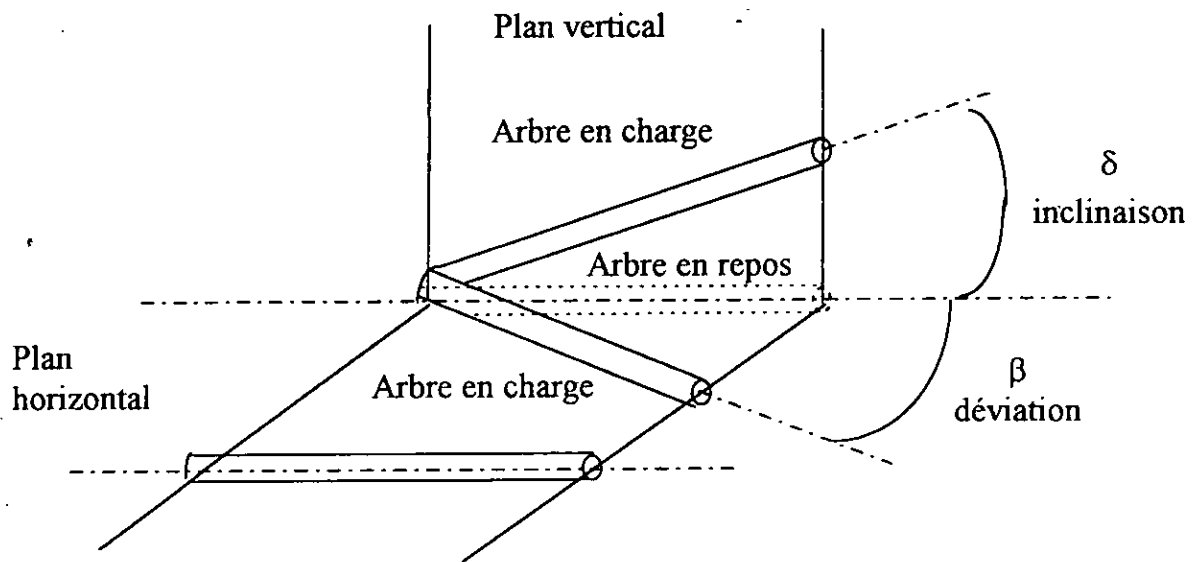


Fig. III-2

Une déviation  $\beta$  radians déplace la portée de :

$$d = \frac{\beta \cos \alpha}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (\text{III-2})$$

Une inclinaison de  $\delta$  radians déplace la portée de :

$$d = \frac{\delta \cos \alpha}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (\text{III-2}')$$

Une première règle qui s'impose est de donner à l'engrenage un bombement suffisant pour que sous l'effet des déflexions des arbres en fonctionnement le centre de portage ne s'éloigne pas trop du milieu de la largeur de denture.

D'autre part, la pression de contact des deux cylindres est variable du centre aux extrémités de la zone de portage (Fig III-4).

Au centre, elle prend sa plus grande valeur

$q_0'$  donnée par la formule :

$$q_0' = C' P'^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (III-6)$$

Où  $C' = \frac{1}{\pi \sqrt{k_1 + k_2}}$

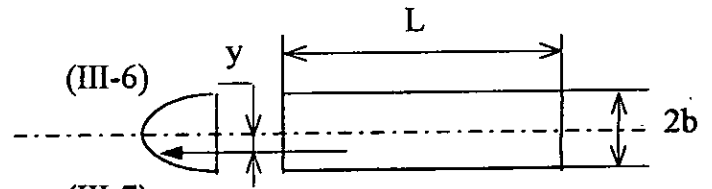


Fig. III-4

de sorte que :

$$q_0' = \frac{4 P}{\pi 2b} \quad (III-8)$$

A la distance  $y$  de l'axe de portage, la pression superficielle prend la valeur :

$$q' = q_0' \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \quad (III-9)$$

### III-4 Cas du contact ponctuel

Dans le cas où l'engrenage est bombé, nous noterons  $R_1$  et  $R_2$  les rayons de courbure des lignes de flancs et comme ci-dessus  $R_1'$  et  $R_2'$  les rayons de courbures des profils. Le bombement relatif est caractérisé par le coefficient :

$$A = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Tandis que l'expression :

$$A' = \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'}$$

Caractérise la courbure relatif des profils de dentures en contact.

Cette fois la zone de portage est une ellipse, dont nous appelons  $a$  le demi-grand axe et  $b$  le demi-petit axe et  $e$  l'excentricité. Sachant que  $e$  est donnée par :

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Les demi-axes  $a$  et  $b$  sont donnés par le système suivant d'équations transcendantes :

$$\begin{cases} A = 3(k_1 + k_2)P \frac{E_L - E_L}{a(a^2 - b^2)} & \text{(III - 10)} \\ A' = 3(k_1 + k_2)P \frac{a^2 E_L - b^2 F_L}{ab^2(a^2 - b^2)} & \text{(III - 11)} \end{cases}$$

Où  $E_L$  et  $F_L$  sont les intégrales elliptique de Legendre.

$$E_L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

$$F_L = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \, d\varphi$$

Dans le contact ponctuel, la pression superficielle  $q$  en un point quelconque dans la zone de portage (Fig. III-5) est définie par :

$$q = q_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad \text{(III-12)}$$

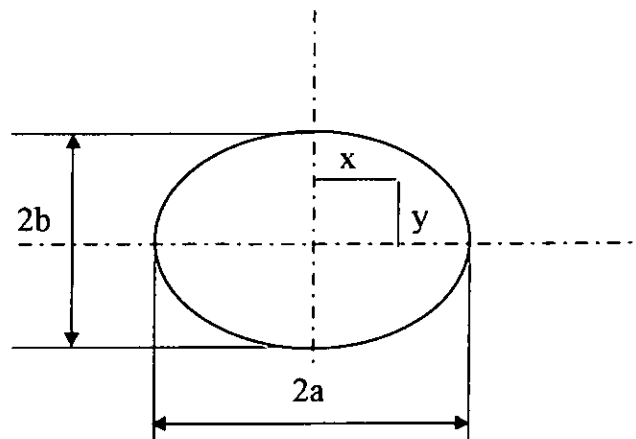


Fig. III-5

Où  $q_0$  représente le maximum atteint par la pression au centre de la zone de portage.

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} \quad \text{(III-13)}$$

On voit donc que la pression, au centre de la portée, atteint une fois et demie la pression moyenne  $\frac{P}{\pi ab}$ , alors que dans le cas du contact linéaire, elle n'atteint que  $\frac{4}{\pi}$  fois la pression moyenne  $\frac{P}{2b}$ .

### III-5 Calcul des axes de l'ellipse de portage

La pression maximale  $q_0$  sera connue lorsqu'on aura déterminé les axes  $a$  et  $b$  de l'ellipse de contact.

Il s'agit donc de porter notre attention sur le système des deux équations (III-10) et (III-11) afin d'en déduire les deux inconnues  $a$  et  $b$ .

En posant  $e = \sin \theta$  où encore  $\frac{b}{a} = \cos \theta$ , et en divisant les équations (III-10) et (III-11) membre à membre, nous obtenons :

$$\frac{A}{A'} = \frac{(F_L - E_L) \cos^2 \theta}{E_L - F_L \cos^2 \theta} \quad (\text{III-14})$$

Si maintenant nous ajoutons membre à membre les équations (III-10) et (III-11), nous obtenons :

$$A + A' = 3(k_1 + k_2)P \frac{E_L}{a^3 \cos^2 \theta}$$

$$\text{D'où } 2a = \frac{1}{k} P^{1/3} (A + A')^{-1/3} \quad (\text{III-15})$$

$$\text{Avec } k = \frac{1}{2} \left[ \frac{3(k_1 + k_2)E_L}{\cos^2 \theta} \right]^{-1/3} \quad (\text{III-16})$$

Pour chaque valeur de  $\theta$  les intégrales de Legendre  $E_L$  et  $F_L$  ont des valeurs bien déterminées que l'on peut trouver dans les tables numériques [CHA].

Il est alors possible de calculer en fonction de  $\theta$  la valeur de  $\lambda = \frac{A}{A'}$ , qui est directement conditionné par le bombement que l'on donne à l'engrenage et le coefficient  $k$  qui permet le calcul du demi-axe 'a' de l'ellipse de portage, se trouve exprimés en fonction d'un même paramètre, ceci permet de tracer un graphique

donnant le coefficient  $k$  en fonction du paramètre  $\lambda$  que l'on peut appeler « bombement réduit ».

Le graphique est effectué en posant  $\nu = 0.3$ ,  $E = 21.000 \text{ kg/mm}^2$ , valeurs les plus communément admises pour l'acier.

Pour toutes les applications numériques, nous exprimerons dans la formule (15) la force  $P$  en kilog-force et le demi-axe  $a$  en mm, les unités étant ainsi fixées.

Le graphique N°1 (Annexe) permet d'obtenir  $k$  pour les valeurs de  $\lambda$  supérieures à  $10^{-3}$  environ. Pour les valeurs de  $\lambda$  inférieures à  $10^{-3}$  il vaut mieux utiliser le graphique N°2 (Annexe). L'ensemble des deux graphiques permet de traiter tous les cas qui se présente effectivement à l'engrenagiste.

Une fois déterminé le grand axe  $2a$ , on n'a pas de difficulté à connaître la pression maximale  $q_0$  puisque :

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a^2 \cos \theta}$$

Ce qu'on peut écrire :

$$q_0 = CP^{1/3}(A + A')^{2/3} \quad (\text{III-17})$$

$$\text{Avec } C = \frac{6k^2}{\pi \cos \theta} \quad (\text{III-18})$$

Le graphique N°3 nous donne en fonction de  $\lambda$  la valeur de  $C$  pour l'acier étant entendu que la pression  $q_0$  dans la formule (III-17) est exprimée en  $\text{kgf/mm}^2$ .

#### Remarque :

Dans l'expression  $A+A'$  qui intervient au second membres des formules (III-15) et (III-17), il est bien évident que le bombement  $A$  est toujours négligeable devant  $A'$ , on peut donc sans erreurs appréciables écrire les formules (III-15) et (III-17) sous la

$$\text{forme : } 2a = \frac{1}{k} P^{1/3} A'^{-1/3} \quad (\text{III-15'})$$

$$q_0 = CP^{1/3} A'^{2/3} \quad (\text{III-17'})$$



### III-6 Passage du contact ponctuel au contact linéaire

Supposons que l'on dispose d'une largeur de denture illimitée, autrement dit :  $L \rightarrow \infty$ . Lorsque le bombement de l'engrenage devient faible, autrement dit  $\lambda \rightarrow 0$ , il est facile de voir que  $\theta \rightarrow \pi/2$ . Dans ces conditions, l'intégrale  $E_L \rightarrow 1$ ,  $F_L \rightarrow \infty$  et à partir de la formule (III-16),  $k \rightarrow 0$ . D'où on en déduit que le grand axe  $2a \rightarrow \infty$ , résultat vérifiant bien que la théorie de Hertz reste applicable puisque la largeur de denture  $L$  dont nous disposons est par hypothèse infinie.

Quant au demi-petit axe  $b = a \cos\theta$ , il est a priori indéterminé, ainsi que le coefficient  $C$  qui nous permet de calculer la contrainte de compression au centre de la zone de portage. Pour lever cette indétermination, il faut faire une hypothèse supplémentaire.

Par analogie, nous réécrivons les formules (III-15) et (III-17) en faisant intervenir non plus la charge totale  $P$ , mais la charge linéaire au centre de la zone de portage. Nous devons nous attendre alors à retomber sur les formules (III-4) et (III-6) du contact linéaire lorsque cette charge linéaire  $p$  tend vers une limite déterminée  $p'$ .

Nous sommes donc conduit à évaluer la charge linéaire  $\frac{dP}{dx}$  dans une tranche d'abscisse  $x$  (Fig. III-6).  $-y$  et  $+y$  les ordonnées des points où cette tranche coupe l'ellipse de portage, nous avons :

$$dP = dx \int_{-y}^{+y} q dy$$

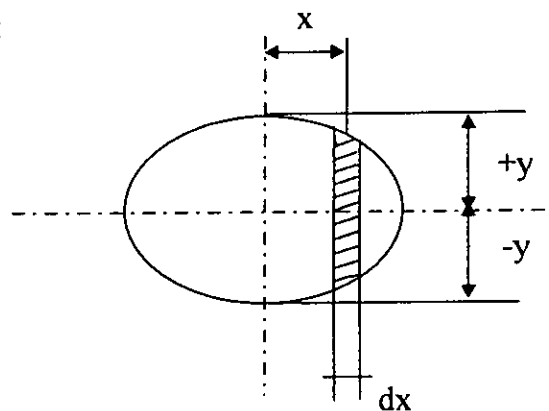


Fig. III-6

C'est à dire, en remplaçant  $q$  par sa valeur d'après la formule (III-12) :

$$dP = dx \int_{-y}^{+y} q_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy$$

Ce qui s'écrit encore en posant  $x = a \cos\varphi$

$$dP = q_0 dx \int_{-b \sin \varphi}^{+b \sin \varphi} \sqrt{\sin^2 \varphi - \frac{y^2}{b^2}} dy$$

On calcule facilement cette intégrale en prenant comme nouvelle variable l'angle  $\theta$  donné par la relation  $y = b \sin \varphi \sin \theta$  :

$$dP = q_0 b \sin^2 \varphi dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} q_0 b \sin^2 \varphi dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

D'où

$$dP = \frac{\pi}{2} q_0 b \sin^2 \varphi dx$$

Ce qu'on peut écrire aussi :

$$dP = \frac{\pi}{2} q_0 b \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx \quad (\text{III-19})$$

En intégrant cette valeur de  $dP$  entre les  $x = -a$  et  $x = +a$  qui correspondent aux deux tranches extrêmes de l'ellipse de portage nous devons obtenir la charge totale  $P$ , autrement dit :

$$P = \int \frac{\pi}{2} q_0 b \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx$$

Ce qui nous donne :

$$P = \frac{\pi}{2} q_0 b \left[ x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_{-a}^{+a} = \frac{2\pi}{3} q_0 ab$$

et démontre aussi la formule :

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} \quad (\text{III-13})$$

que nous avons indiquée ci-dessus au § III-4.

La formule (III-19) lorsqu'on y fait  $x = 0$ , nous donne la charge linéaire  $p$  au milieu de la zone de portage.

$$p = \left( \frac{dP}{dx} \right)_{x=0} = \frac{\pi}{2} q_0 b$$

Ou encore :

$$p = \frac{3 P}{4 a} \quad (\text{III-20})$$

Nous pouvons alors, dans la formule (III-15') qui donne  $2a$ , remplacer  $P$  par  $\frac{4}{3} ap$ , ce qui nous donne :

$$a = \frac{1}{2k} \left( \frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} p^{\frac{1}{3}} A'^{\frac{-1}{3}}$$

d'où l'on déduit :

$$a^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2k} \left( \frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{3}} p^{\frac{1}{3}} A'^{\frac{-1}{3}}$$

c'est à dire :

$$a = 6^{-\frac{1}{2}} k^{-\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} A'^{\frac{-1}{2}} \quad (\text{III-21})$$

Cette expression permet d'évaluer en fonction de  $p$  la pression maximale  $q_0$  au centre de la zone de portage. En effet nous venons de vérifier que :

$$q_0 = \frac{3 P}{2 \pi ab}$$

Or

$$b = a \cos \theta$$

Donc on obtient :

$$q_0 = \frac{3 P}{2 \pi a^2 \cos \theta} = \frac{2p}{\pi a \cos \theta} \quad (\text{III-22})$$

En remplaçant  $a$  par sa valeur selon l'équation (III-21), on obtient :

$$q_0 = 2^{\frac{3}{2}} 3^{\frac{1}{2}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\pi \cos \theta} p^{\frac{1}{2}} A'^{\frac{1}{2}}$$

Comme le coefficient  $k$  est donné par la formule (III-16), on obtient finalement :

$$q_0 = \frac{1}{\pi} (k_1 + k_2)^{-\frac{1}{2}} E_L^{-\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} A'^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III-23})$$

Supposons alors que le bombement réduit tend vers zéro, donc l'angle  $\theta$  tend vers  $\pi/2$ , et faisant l'hypothèse supplémentaire que la charge linéaire  $p$  au centre de la

zone de portage tende vers une limite déterminée  $p'$ . Nous avons vu plus haut que l'intégrale  $E_L$  tend vers 1.

Dans ces conditions la pression maximale  $q_0$  au centre de la zone de portage tend vers :

$$\frac{1}{\pi} (k_1 + k_2)^{-1/2} p'^{1/2} A'^{1/2}$$

qui n'est autre que la pression  $q_0$  correspondant au contact linéaire. Nous pouvons aussi calculer, sous les mêmes hypothèses, la valeur limite du demi-petit axe  $b$  de l'ellipse de portage :

$$b = a \cos \theta = \frac{2}{\pi} \frac{p}{q_0}$$

En remplaçant  $q_0$  par sa valeur dans l'équation (III-23), nous obtenons :

$$b = 2(k_1 + k_2)^{1/2} E^{\frac{1}{2}} p'^{\frac{1}{2}} A'^{-1/2}$$

On voit que, lorsque le bombement réduit  $\lambda$  tend vers zéro et que la charge linéaire  $p$  au centre de la zone de portage tend vers  $p'$ , le demi-petit axe  $b$  tend vers la valeur donnée par la formule (III-4) ci-dessus.

**III-7 Calcul de la surcharge provoqué au centre de la zone de portage par le bombement lorsque celui-ci est suffisant pour que les extrémités de la largeur de denture soient complètement déchargées.**

Reprenons la formule (III-23)

$$q_0 = \frac{1}{\pi} (k_1 + k_2)^{-1/2} E_L^{-1/2} p'^{\frac{1}{2}} A'^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III-23})$$

Or : 
$$p = \frac{3}{4} \frac{P}{a}$$

et 
$$P = L p'$$

D'ou 
$$p = \frac{3}{2} \frac{L}{2a} p'$$

En remplaçant  $p$  dans la formule (III-23) nous obtenons :

$$q_0 = \left( \frac{3}{2} \frac{L}{2a} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi} (k_1 + k_2)^{-\frac{1}{2}} E_L^{-\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}$$

Alors que dans le cas linéaire, nous avons obtenu les formules (III-6) et (III-8).

$$q'_0 = \frac{1}{\pi} (k_1 + k_2)^{-\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}$$

D'où, on en déduit la surcharge  $\sigma_0$ :

$$\sigma_0 = \frac{3}{2} \frac{L}{2a} \frac{1}{E_L}$$

En pratique, on peut remplacer  $E_L$  par 1, étant donnée la valeur toujours faible du bombement réduit  $\lambda$  on obtient

$$\sigma_0 = \frac{3}{2} \frac{L}{2a} \quad \text{(III-24)}$$

**Remarques :**

- \* L'erreur commise en remplaçant  $E_L$  par 1 est tout à fait négligeable.
- \* Lorsque toute la largeur est utilisée, c'est à dire lorsque  $L = 2a$ .

Nous voyons que la surcharge introduite par le bombement est précisément égale à  $3/2$ , ce qui est considérable.

### III-8 Cas où les deux extrémités de la largeur de denture ne sont pas entièrement déchargées

Lorsque les deux extrémités de la largeur de denture ne sont pas déchargées à 100%, les résultats de la théorie rappelée au § III-4 ci-dessus sont encore applicables à ceci près que, dans les équations qui donne le grand axe  $2a$  de l'ellipse de portage et dans celles qui donnent les contraintes telle que  $q_0$ , il faut remplacer  $P$  par le produit  $KP$ ,  $K$  étant un coefficient. Autrement dit, tout se passe comme si la charge totale  $P$  était multipliée par un coefficient de surcharge :

Cette fois la zone de portage est un morceau d'ellipse (Fig III-7) dont l'excentricité  $e = \sin\theta$  est toujours donné par la même relation en fonction de bombement réduit  $\lambda$  (voir § III-5). Mais le grand axe  $2a$  n'a pas la valeur :

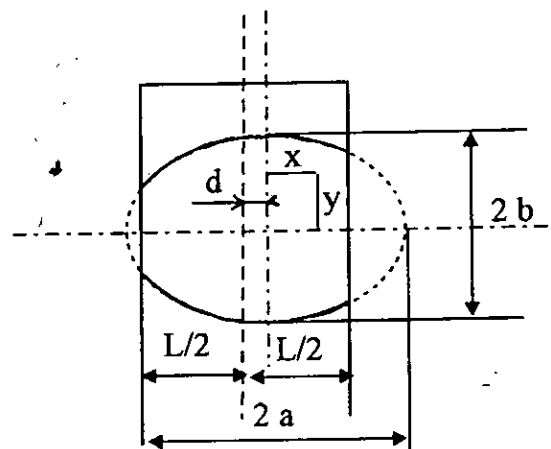


Fig. III-7

$$2\bar{a} = \frac{1}{k} p^{\frac{1}{3}} A'^{-\frac{1}{3}} \quad \text{(III-25)}$$

que donnerait l'équation (15'), sa valeur :

$$2a = \frac{1}{k} (KP)^{\frac{1}{3}} A'^{-\frac{1}{3}} \quad \text{(III-26)}$$

$k$  : est toujours donné par la même loi en fonction de  $\theta$ . On peut utiliser les graphiques N°1 et N°2 (Voir annexe) pour le calculer.

De même, la contrainte maximale de compression  $q_0$  au centre de l'ellipse (nous supposons que ce centre est compris à l'intérieur de la largeur de denture de l'engrenage) [CHA] n'est pas égale à la valeur :

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} \quad \text{(III-27)}$$

que donnerait l'équation (13), mais à la valeur :

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{KP}{\pi ab} \quad \text{(III-28)}$$

A l'intérieur de ce secteur de l'ellipse, la contrainte de compression est encore distribuée selon la même loi :

$$q = q_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (\text{III-12})$$

La loi (III-12) de distribution de la contrainte de compression  $q$  entraîne toujours comme conséquence que la charge linéaire  $dP/dx$  à la distance  $x$  du petit axe de l'ellipse est donné par la formule :

$$dP = \frac{\pi}{2} q_0 b \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx \quad (\text{III-19})$$

que nous avons établie au §III-6 ci-dessus. La charge totale  $P$  s'obtient en intégrant cette expression non plus entre  $-a$  et  $+a$  puisque le portage s'arrête maintenant aux deux extrémités de la largeur de denture, mais entre  $(-d-L/2)$  et  $(-d+L/2)$ ,  $d$  étant le déplacement du centre de la zone de portage sous l'effet des déflexions, que nous pouvons calculer par les formules (III-2) et (III-3) données au § III-2 ci-dessus (voir Fig III-7)

En effectuant cette intégrale, on obtient :

$$P = \frac{\pi}{2} q_0 b L \left( 1 - \frac{L^2}{12a^2} - \frac{d^2}{a^2} \right)$$

La comparaison entre cette équation et l'équation (III-23) nous donne la valeur du coefficient  $K$  :

$$K = \frac{4}{\frac{3L}{a} \left( 1 - \frac{L^2}{12a^2} - \frac{d^2}{a^2} \right)}$$

Nous allons alors pouvoir calculer la longueur du grand axe  $2a$  de l'ellipse. En effet, après avoir déterminé  $k$  au moyen des graphiques N°1 et 2, nous savons calculer la longueur  $2\bar{a}$  donnée par l'équation (III-25) ci-dessus. Or il résulte de l'équation (III-26) que :

$$2a = 2\bar{a} \cdot K^{\frac{1}{3}}$$

On en déduit :

$$\left(\frac{a}{\bar{a}}\right)^3 = K = \frac{4}{\frac{3L}{a} \left(1 - \frac{L^2}{12a^2} - \frac{d^2}{a^2}\right)}$$

De cette équation, on déduit facilement la valeur de :

$$\frac{a}{\bar{a}} = K^{1/3}$$

$$\left(\frac{a}{\bar{a}}\right)^2 = K^{2/3} = \frac{2}{3} \frac{2\bar{a}}{L} + \frac{1}{3} \frac{L^2}{4\bar{a}^2} + \frac{d^2}{\bar{a}^2} \quad (\text{III-29})$$

Ainsi se trouve déterminé le coefficient K et le demi-grand axe de l'ellipse de portage,  $\bar{a}$  étant calculé par la formule (III-25) et le déplacement de portée sous l'effet des déflexions par (III-2) et (III-3).

Pour qu'il n'y ait pas décollement à l'extrémité la plus chargée de la largeur de denture ce qui est l'hypothèse que nous avons faite plus haut, il faut que l'on ait :

$$a > \frac{L}{2} + d$$

C'est à dire :

$$\left(\frac{2a}{L}\right)^3 > 1 + \frac{6d}{L} \quad (\text{III-30})$$

que nous supposons réalisée [CHA].

On peut maintenant évaluer les contraintes dans la zone de portage : plutôt que de les exprimer en valeur absolue, nous les caractériserons par les coefficients de surcharge ou de décharge (plus simplement «coefficient de portage») correspondant, c'est à dire par le carré de leur rapport à la valeur qu'elles prendraient en l'absence de déflexion si le bombement était nul. C'est déjà ainsi que nous avons procédé pour évaluer la « surcharge » au centre de la zone de portage :

$$\sigma_0 = \left(\frac{q_0}{q'_0}\right)^2$$

dans le cas d'abord étudié où les deux extrémités de la largeur de denture étaient complètement déchargées.



Cherchons maintenant la valeur de ce coefficient dans le cas actuel où, au contraire, les deux extrémités portent : si la contrainte de compression avait la valeur  $\bar{q}_0$  donnée par l'équation (III-13), c'est à dire :

$$\bar{q}_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a b} \quad (\text{III-27})$$

la formule (III-24) établie au paragraphe 9 ci-dessus nous montre que la surcharge au centre de la zone de portage prendrait la valeur :

$$\bar{\sigma}_0 = \left( \bar{q}_0 / q'_0 \right)^2 = \frac{3}{2} \frac{L}{2a} \quad (\text{III-31})$$

En fait, il y a lieu de remplacer  $\bar{a}$  par

$$a = K^{1/3} \bar{a}, \quad b = K^{1/3} \bar{b} \quad \text{et} \quad P \text{ par } KP$$

de sorte que la contrainte effective de compression au centre de l'ellipse est donnée par

$$q_0 = K^{1/3} \bar{q}_0$$

et que le coefficient de surcharge prend la valeur effective :

$$\sigma_0 = (q_0 / q'_0)^2 = \left( q_0 / \bar{q}_0 \right)^2 \left( \bar{q}_0 / q'_0 \right)^2 = K^{2/3} \bar{\sigma}_0 \quad (\text{III-32})$$

c'est à dire

$$\sigma_0 = K^{2/3} \frac{3}{2} \frac{L}{2a}$$

En remplaçant  $K^{2/3}$  par sa valeur tirée de l'équation (III-29) nous obtenons alors :

$$\sigma_0 = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{L}{2a} \right)^3 + \frac{3}{2} \frac{L}{2a} \left( \frac{d}{a} \right)^2 \quad (\text{III-33})$$

A titre de vérification, on voit bien que lorsque la portée vient mourir exactement aux deux extrémités de la largeur de denture ( $d = 0$ ,  $2\bar{a} = L$ ), la surcharge égale à  $\frac{3}{2}$  comme nous l'avons trouvé précédemment au § 9. On vérifie aussi que, dans le cas du contact linéaire ( $d = 0$ ,  $2\bar{a} = \infty$ ), le coefficient  $\sigma_0$  est égale à l'unité, autrement dit la contrainte  $q_0$  prend la valeur  $q'_0$  donnée par la théorie classique de Hertz rappelé au § III-3 ci dessus.

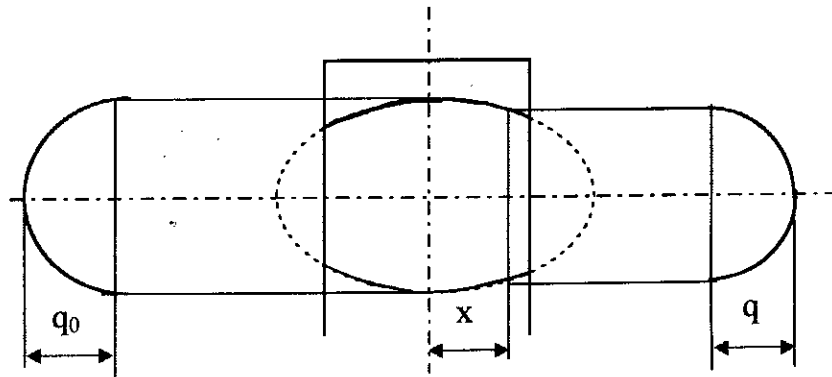


Fig. III-8

Cherchons maintenant le coefficient de portage  $\sigma_+$  à l'extrémité la plus chargée de la largeur de denture, et  $\sigma_-$  à l'autre extrémité. D'une façon générale, au centre d'une tranche de portée d'abscisse  $x$  (fig. III-8), le coefficient de portage  $\sigma$  est égal au carré du quotient par  $q'$  de la contrainte de compression  $q$ . Or, du fait que  $y = 0$ , la loi de distribution (III-12) nous donne :

$$q = q_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

de sorte que le coefficient de portage vaut :

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

A l'extrémité la plus chargée, on a :

$$x = \frac{L}{2} - d$$

de sorte que

$$\sigma_+ = \sigma_0 \left[1 - \frac{(L - 2d)^2}{4a^2}\right] = \sigma_0 \left(\frac{\bar{a}}{a}\right)^2 \left[\left(\frac{a}{\bar{a}}\right)^2 - \frac{(L - 2d)^2}{4\bar{a}^2}\right]$$

compte tenu de la valeur de  $(a/\bar{a})^2$  donnée par l'équation (III-29) l'expression entre crochet est égale à :

$$\frac{2}{3} \frac{2\bar{a}}{L} - \frac{2}{3} \left(\frac{L}{2\bar{a}}\right)^2 + \frac{LD}{\bar{a}^2}$$

Quant au terme  $\sigma_0(\bar{a}/a)^2$ , ce n'est autre que  $\sigma_0 K^{2/3}$ , c'est à dire  $\bar{\sigma}_0$  d'après l'équation (III-32), on a donc :

$$\sigma_+ = \bar{\sigma}_0 \left[ \frac{2}{3} \frac{2\bar{a}}{L} - \frac{2}{3} \left( \frac{L}{2\bar{a}} \right)^2 + \frac{Ld}{\bar{a}^2} \right]$$

En remplaçant  $\bar{\sigma}_0$  par sa valeur tirée de l'équation (III-24), nous obtenons finalement :

$$\sigma_+ = 1 - \left( 1 - 6 \frac{d}{L} \right) \left( \frac{L}{2\bar{a}} \right)^3 \quad \text{(III-34)}$$

Un calcul analogue montrerait qu'à l'extrémité la moins chargée, le coefficient de décharge est donné par :

$$\sigma_- = 1 - \left( 1 + 6 \frac{d}{L} \right) \left( \frac{L}{2\bar{a}} \right)^3 \quad \text{(III-35)}$$

A titre de vérification, on voit que l'extrémité la moins chargée arrive à se décharger complètement ( $\sigma_- = 0$ ) lorsque :

$$\left( \frac{2\bar{a}}{L} \right)^3 = 1 + \frac{6d}{L}$$

On trouve bien la condition (III-30) pour qu'il n'y ait pas décollage à cette extrémité.

### III-9 choix du bombement

En l'absence de toute déflexion, on a :

$$\sigma_0 = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{L}{2\bar{a}} \right)^3$$

$$\sigma_+ = \sigma_- = 1 - \left( \frac{L}{2\bar{a}} \right)^3$$

On voit que, lorsque le grand axe  $2\bar{a}$  dépasse la largeur de denture  $L$ , très vite la surcharge au centre diminue, ainsi que la décharge aux deux extrémités. toutefois, si nous exprimons surcharge et décharge en %, c'est à dire si nous posons :

$$\sigma_0 = 1 + \frac{\text{pourcentage de surcharge}}{100}$$

$$\sigma_+ = \sigma_- = 1 - \frac{\text{pourcentage de dé charge}}{100}$$

nous voyons que le pourcentage de surcharge n'est que la moitié du pourcentage de décharge aux deux extrémités.

Comment en pratique choisir la valeur du bombement? Il est difficile d'établir des règles générale. Nous avons dit plus haut que, si l'engrenage est largement surdimensionné, on peut, pour obtenir les conditions les plus favorables au silence de fonctionnement, décharger à 100 % les deux extrémités. Cette décharge est payée par une surcharge de 50 % au centre de la largeur de denture.

Lorsque une telle surcharge n'est pas admissible, nous pouvons choisir le bombement de telle façon qu'en l'absence de toute déflexion, les deux extrémités de la largeur de denture soient déchargée a 50 %. On paie alors cette décharge par une surcharge de 25 % au centre. Cette condition est obtenu lorsque :

$$\left(\frac{L}{2\bar{a}}\right)^3 = \frac{1}{2}$$

c'est à dire :

$$2\bar{a} = \frac{5}{4}L \quad (\text{III-36})$$

Il y a lieu d'examiner alors se qui se passe en présence de déflexion. Nous considérons alors que la déflexion maximale admissible est celle qui fait décoller l'extrémité la moins chargée de l'engrenage. Ce décollement se produit lorsque la condition (III-28) cesse d'être vérifiée, c'est à dire, lorsque :

$$\left(\frac{2\bar{a}}{L}\right)^3 = 2 = 1 + \frac{6d}{L}$$

ou encore :

$$d = \frac{L}{6}$$

Lorsque cette circonstance est réalisée la formule (III-34) nous montre que :

$$\sigma_+ = 1$$

Autrement dit, à l'extrémité la plus chargée, les conditions sont les mêmes que s'il n'y avait pas de déflexion et si le bombement était nul. On peut traduire ceci en disant que l'extrémité la plus chargée porte à 100 %. La surcharge au centre de la zone de portage nous sera donnée par la formule (III-33) : elle vaut :

$$\sigma_0 = 1.29$$

Calculons encore le grand axe  $2a$  de l'ellipse effective de portage. Il suffit pour cela d'utiliser la formule (III-29), qui nous donne :

$$\left(\frac{\bar{a}}{a}\right)^2 = 1.12$$

Il en résulte que le grand axe  $2a$  vaut :

$$2a = \frac{4}{3} L \quad (\text{III-37})$$

Finalement, on conclue que lorsqu'on n'a pas de raison spéciale de faire autrement, un bombement tel qu'en l'absence de déflexions, les deux extrémités de largeur de denture de l'engrenage soient déchargées à 50 % ce qui correspond à une décharge de 25 % au centre, on déterminera ce bombement par l'équation :

$$2\bar{a} = \frac{5}{4} L$$

où  $2\bar{a}$  est donné par la formule (III-15') établie au § III-5. De la valeur de  $k$  qui résulte de l'équation (III-33), on déduira le bombement réduit  $\lambda$  par les graphique N° 1 et 2.

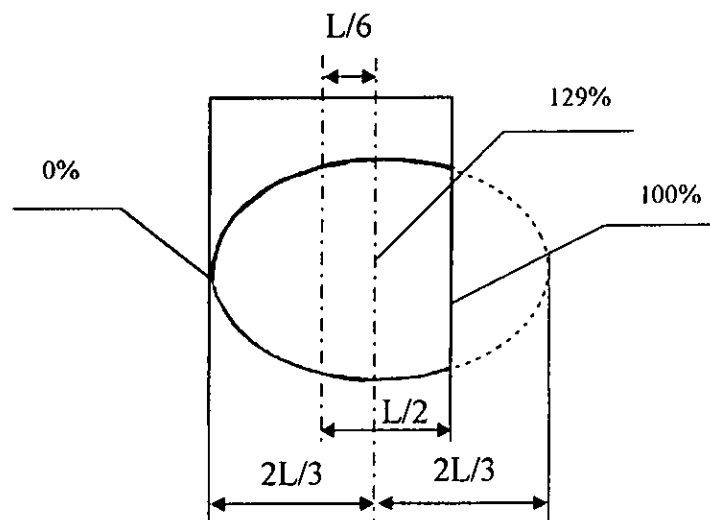


Fig. III-9

Le bombement était ainsi fixé, toute déflexion qui amènerait un décollement sur une partie de la largeur de denture est considéré comme inadmissible. En présence d'une telle déflexion, il faudrait recevoir les conditions même de montage, afin d'augmenter la rigidité, ainsi, la déflexion maximale admissible est celle qui fait mourir la portée exactement à une des deux extrémités. Cette déflexion est celle qui déplace le centre de la zone de portage d'une distance  $d$  égale au tiers de la demi-largeur de denture (Fig III-9) autrement dit elle correspond à :

$$d = \frac{L}{6}$$

Lorsqu'elle a lieu, l'extrémité la plus chargée de la largeur de denture porte à 100 % (coefficient de surcharge égal à 1), tandis que la surcharge maximale, au centre de l'ellipse de portage, atteint 29 %.

### III-10 Exemples d'application

Prenons un engrenage dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Nombres de dents  $Z_1 = 16$ ,  $Z_2 = 50$
- Angle de pression  $\alpha = 20^\circ$
- Denture droite
- Module  $m = 5$
- Largeur de denture  $L = 40$  mm
- Valeur de la charge tangentielle à pleine charge  $T = 5000$  kgf

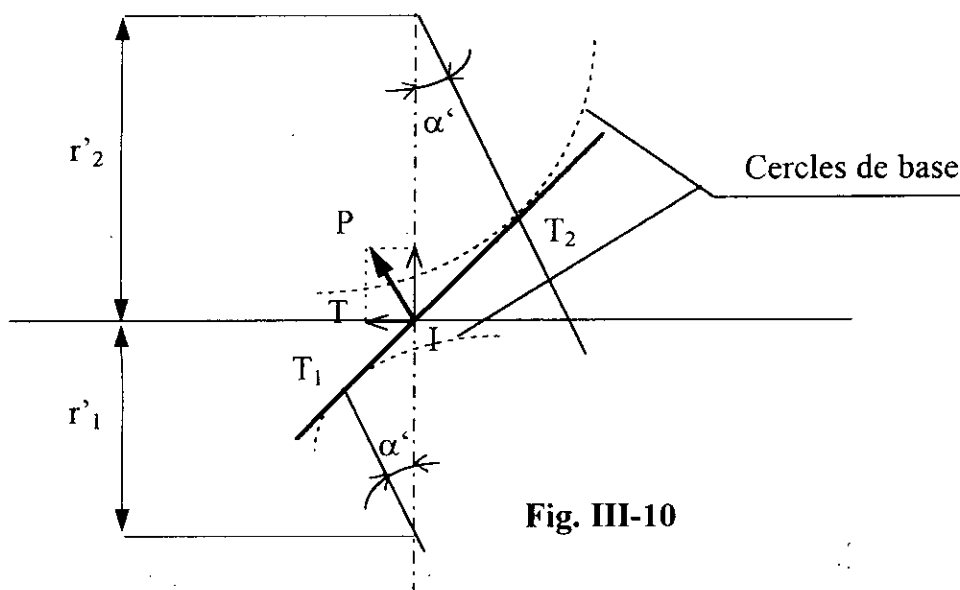


Fig. III-10

Premier problème :

On suppose que l'engrenage est monté de façon parfaitement rigide (pas de déflexion). Déterminer le bombement pour les deux extrémités de la largeur de denture soient déchargées à 50%.

Il faut :

$$2\bar{a} = \frac{5}{4} L$$

En nous reportant à la figure III-10 nous voyons que :

$$P = \frac{T}{\sin \alpha}$$

$$A' = \frac{1}{IT_1} + \frac{1}{IT_2} = \frac{1}{\sin \alpha} \left( \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2} \right)$$

( $r'_1$  et  $r'_2$  étant les rayons primitifs)

On a donc :

$$P = \frac{5000}{\sin \alpha} \quad \text{et} \quad A' = \frac{0.033}{\sin \alpha}$$

Appliquant la formule (III-15') :

$$\frac{5}{4} \cdot 40 = \frac{1}{k} \cdot (5000)^{\frac{1}{3}} \cdot (0.033)^{-\frac{1}{3}}$$

D'où l'on déduit :

$$k = 1.066$$

Le graphique N°1 nous donne alors :

$$\lambda = 0.00314$$

D'où l'on déduit le bombement :

$$A = \lambda A' = 0.00030$$

En supposant ce bombement également réparti entre les deux roues dentées de l'engrenage, calculons l'enlèvement de matière correspondant aux deux extrémités :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{L^2}{8} \frac{A}{2} = 0.03 \text{ mm}$$

**Deuxième problème :**

Le bombement étant ainsi fixé, on suppose qu'il y a à pleine charge une déviation  $\beta = 0.0005$  rad. Calculer le déplacement qui résulte pour le centre de la zone de portée, ainsi que les coefficients de portage aux deux extrémités et au centre.

Le déplacement de portée nous est donné par la formule (III-2) :

$$d = \frac{\beta \cos \alpha}{A} = \frac{0.0005 \cdot \cos 20^\circ}{0.0003} = 1.57 \text{ mm}$$

On en déduit  $d/L = 0.039$  et comme  $L/2\bar{a} = 4/5$ , les formules (III-33), (III-34) et (III-35) nous donnent :

$$\sigma_0 = 1.25$$

$$\sigma_+ = 0.62$$

$$\sigma_- = 0.38$$

On voit que la déflexion ne modifie pratiquement pas la surcharge au centre, qui reste égale à 25 %. Par contre, l'extrémité la plus chargée n'est plus déchargée qu'à 38% (au lieu de 50% en l'absence de déflexion). La décharge atteint 62% à l'autre extrémité.

**Troisième problème :**

Le bombement ayant toujours la valeur précédente, qu'elle est la déviation qui correspond au décollement à l'extrémité la moins déchargée ?

On doit avoir :

$$d = \frac{\beta \cos \alpha}{A} = \frac{L}{6}$$

$$\text{c'est à dire } \frac{\beta \cos 20^\circ}{0.0003} = \frac{40}{6}$$

ce qui correspond à :

$$\beta = 2.1 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

On comparera cette valeur à la valeur du maximum admissible pour  $\beta$  d'après la référence [CHA], c'est à dire 0.002 rad.



## CHAPITRE IV

# Mode d'obtention

## IV-1 Rectification des roues cylindriques

### IV-1-1- Rectification par génération

#### Procédés MAAG

La rectification s'effectue à partir d'une crémaillère génératrice matérialisée par les deux plans contenant l'arête active de deux meules. Selon la disposition de ces deux meules, nous distinguerons les deux méthodes de base suivantes :

- Méthode de rectification avec meules 15° (Fig IV-1a)
- Méthode de rectification avec meules Zéro (Fig IV-1b)

Pendant l'opération de rectification le cercle primitif de génération de la denture roule sans glisser sur la ligne primitive de génération de la crémaillère équivalente aux meules.

- Cas de la denture droite :

Le diamètre primitif de génération  $d_M$  de la roue rectifié et le diamètre de base de la développante  $d_b$  sont donnés par les formules :

$$d_M = \frac{d_b}{\cos\alpha_M}$$

$$d_b = Zm_0 \cos\alpha_0$$

Avec  $Z$  : nombre de dents.

$\alpha_M$  : angle de pression des meules.

$\alpha_0$  et  $m_0$  éléments nominaux de la denture.

Soit :

$$d_M = Zm_0 \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_M}$$

Avec la méthode à 15° :

$$d_M = Zm_0 \frac{\cos\alpha_0}{\cos 15^\circ}$$

Avec la méthode Zéro :

$$d_M = Z m_0 \cos\alpha_0$$

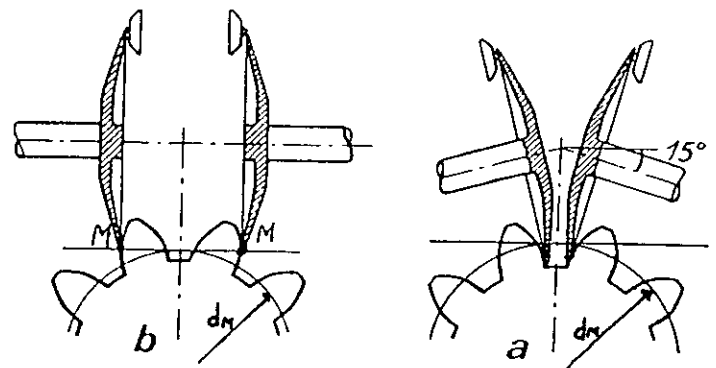


Fig. IV-1 [HEN2]

• Cas de la denture hélicoïdale :

Avec la méthode 15° :

$$d_M = Zm_0 \frac{1}{\left(\frac{\cos 15^\circ}{\cos \alpha_0}\right)^2 - \sin^2 \beta_0}$$

$$\sin \beta_M = \sin \beta_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos 15^\circ}$$

Avec la méthode Zéro :

$$d_M = d_b = \frac{Zm_0 \cos \alpha_0}{\cos \beta_0}$$

avec  $\operatorname{tg} \alpha_{10} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\cos \beta_0}$

$$\beta_M = \beta_0$$

avec  $\sin \beta_b = \sin \beta_0 \cos \alpha_0$

Sachant que :

$\alpha_M$  : Angle de pression des meules (réel).

$\beta_M$  : Angle d'inclinaison du porte meule.

$\alpha_0, \beta_0, \alpha_{10}$  et  $m_0$  : Eléments nominaux de la denture (réels).

Pour plus d'information voir [HEN2, Page 402].

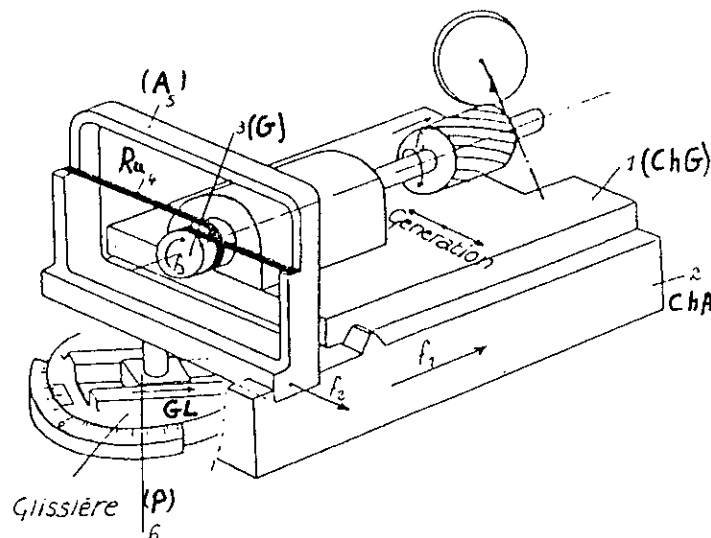


Fig. IV-2 [HEN2]

La figure IV-2 schématise le principe de fonctionnement d'une machine MAAG classique à galet de génération, en cours de rectification d'une denture hélicoïdale.

Le bâti portè-meules est incliné de l'angle  $\beta_M$  ou  $\beta_b$ . Le chariot de génération ChG est animé d'un mouvement transversal alternatif et le chariot d'avance ChA se déplace longitudinalement suivant  $f_1$ , il est communiqué à la roue rectifié une rotation suivant  $f_3$ .

Les rubans alternés Ru reliaent le galet de génération G au châssis. Celui-ci pouvant se déplacer, dans le cas d'une denture hélicoïdale, suivant  $f_2$ , grâce à l'interposition du patin P couissant dans une glissière orientable. L'inclinaison de cette glissière est  $\beta_M$  ou  $\beta_b$ . Le galet G a un diamètre égal à  $d_M$  ou  $d_b$ .

Ce type de machine nécessite la fabrication d'un galet ou secteur de génération pour chaque valeur de  $d_M$  ou  $d_b$ .

**Corrections sur le profil (Fig V-3a) :** Dépouille de tête, dépouille de pied, ou les deux à la fois. Ces corrections sont obtenues par la came  $C_1$  à ségments réglables, tournant à la fréquence du déplacement alternatif du chariot de génération : Elle communique de petites impulsions à des plongeurs de transmissions hydrauliques  $P_1$ .

**Corrections longitudinales (Fig IV-3b) :** Obtenues à partir de la came  $C_2$  tournant à la fréquence du chariot d'avance, comportant également des ségments réglables communiquant de petites impulsions à des plongeurs de transmissions hydrauliques  $P_2$ .

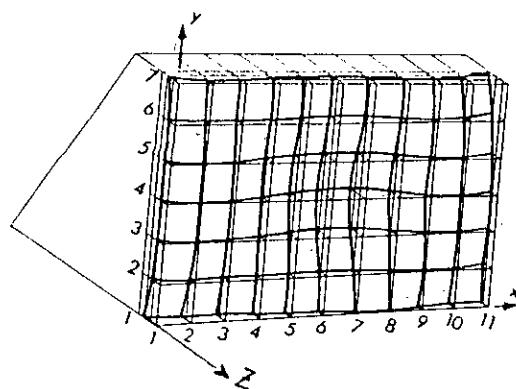


Fig. IV-4 [HEN2]

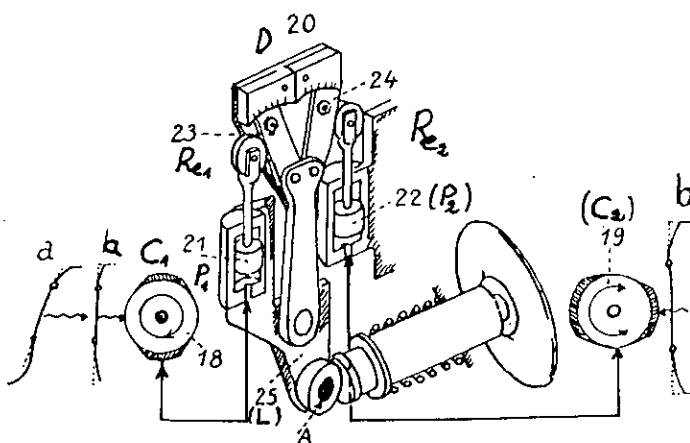


Fig. IV-3 [HEN2]

Les deux corrections sont ajoutées par l'intermédiaire du dispositif à levier (D,  $Re_1$ ,  $Re_2$ , L) : Les réglettes  $Re_1$  et  $Re_2$  d'inclinaison réglables permettant la réduction désirée des déplacements. Une came transmet, avec une démultiplication, le déplacement désiré du porte-meule.

Ce dispositif permet d'obtenir toute modifications sur le profil et sur l'hélice, mais cette modification se retrouve sur tous les profils et toutes les hélices de la largeur de denture.

Un nouveau type de correction à commande numérique permet de réaliser la correction dite « topologique », avec possibilité de réglage en chaque point, par coordonnées X, Y, Z. Pour chaque point de la grille, on peut régler la valeur de la correction Z (Fig IV-4), et pour cela nous avons proposé l'étude géométrique d'une denture bombé.

#### IV-1-2- Rectification par meule de forme

La rectification s'effectue avec une meule-disque dont le profil méridien correspond à l'entredents de la denture rectifiée :

Procédé Orcutt ( Fig IV-5 ). Il n'existe donc aucun mouvement de génération. Dans la machine Orcutt, La meule est montée sur un coulisseau à déplacement horizontal alternatif. La roue rectifiée est montée sur le chariot (Fig IV-6 ) avec son axe parallèle au déplacement du coulisseau . Après chaque aller et retour du coulisseau, le mécanisme diviseur fait tourner la pièce de 1 pas angulaire. Après un tour complet, le chariot porte-roue est légèrement levé.

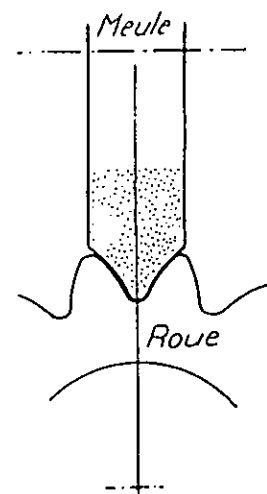


Fig. IV-5 [HEN2]

La figure IV-6 schématise le dispositif permettant d'obtenir, à partir d'un disque à cames 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18 ou 20 avances pour la rectification d'une roue.

Le dressage de la meule, représenté sur la figure IV-7, est assuré par trois diamants (un diamant périphérique  $D_p$  et deux diamants latéraux  $D_l$ ), à partir de gabarits  $G$  représentant à l'échelle 1/1 le profil méridien de la meule.

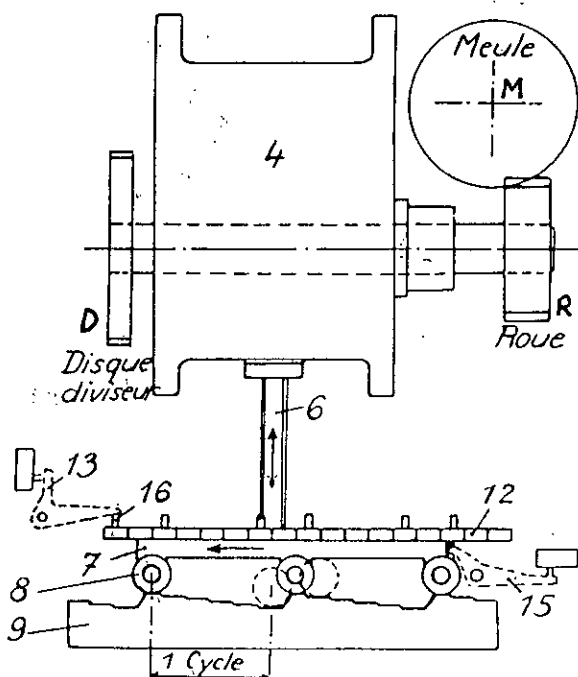


Fig. IV-6 [HEN2]

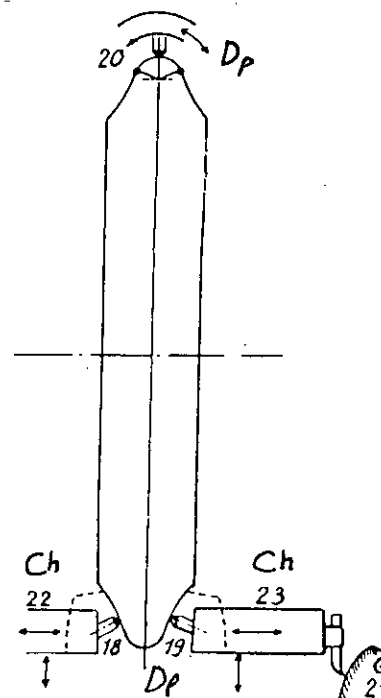


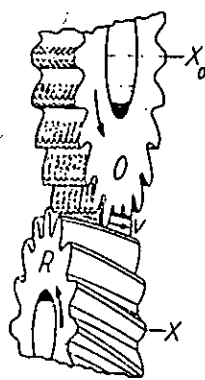
Fig. IV-7 [HEN2]

## IV-2 Le rasage (shaving) des engrenages

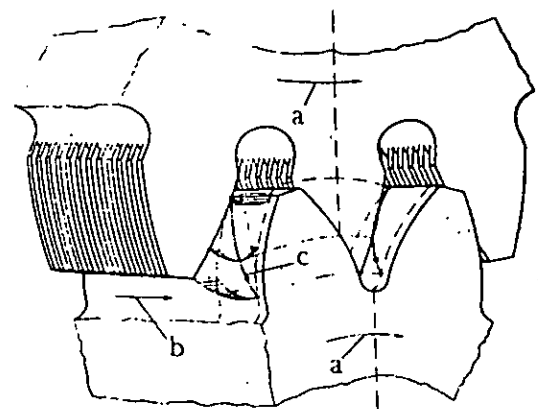
### IV-2-1 Définition, principe de rasage (shaving)

L'opération de rasage est une super finition consistant à enlever une faible surépaisseur laissée au taillage (quelque centièmes des millimètres), non par coupe franche ou par rectification, mais par un véritable raclage, (Fig IV-8a).

Le rasage des engrenages est effectué par une roue dentée cylindrique rectifiée, utilisée comme outil, s'engrenant sur la roue à tailler, leurs axes étant croisés, les deux organes formant un engrenage gauche hélicoïdale. Les flancs de l'outil comportent une série de gorges équidistantes dirigées dans le sens du profil formant les arrêtes de coupe (Fig IV-8b).



O outil  
R roue  
v vitesse de glissement



(a) [HEN2]

(b) [SNVI]

Fig. IV-8

En raison du croisement de leurs axes et sous une pression de contact, les flancs des dents glissent longitudinalement les uns sur les autres, avec enlèvement de fins copeaux.

Le rasage d'engrenages est donc une opération de finition pour pièces non trempées. Le traitement thermique constitue la dernière opération.

### IV-2-2 Angle de croisement des axes ( $\Sigma$ )

Pour le rasage des engrenages, il est préféré la disposition dite «à axe croisés», tel que plus l'angle de croisement des axes est élevé, plus l'aptitude de l'enlèvement de copeau est favorable. D'un autre côté, la conduite de l'engrènement des dents diminue à

mesure qu'augmente l'angle de croisement des axes. Les valeurs suivantes sont à recommander:

- Acier de qualité moyenne  $\Sigma = 10^\circ$  à  $15^\circ$
- Fonte, alliage léger, matière plastique  $\Sigma =$  jusqu'à  $20^\circ$
- Rasage intérieur  $\Sigma = 3^\circ$  à  $10^\circ$
- Rasage près d'un épaulement  $\Sigma \geq 3^\circ$

Où  $\beta_0$  : Inclinaison primitive de l'outil.

$\beta_1$  : Inclinaison primitive de l'organe rasé.

+ : sens d'inclinaison identique.

- : sens d'inclinaison opposé.

Il faut éviter un angle de croisement des axes trop petit, sinon l'effet de coupe ne serait plus bon, surtout pour le rasage des roues intérieures:

$$\Sigma = \beta_0 \pm \beta_1$$

#### IV-2-3 Vitesse de glissement

Comme pour l'engrenage gauche, il existe le glissement longitudinal, dont la vitesse  $V_t$  constante en tous les points de contact, est donnée par la relation suivante:

$$V_t = \frac{\omega_0 r_0}{1000} (\sin \beta_0 + \cos \beta_0 \operatorname{tg} \beta_1) \quad [\text{m/s}]$$

$$\omega_0 : \text{Vitesse angulaire de l'outil} = \frac{2\pi n_0}{60}, \quad n_0 [\text{tr/mn}]$$

$\beta_0$  et  $\beta_1$  sont déjà définies.

Dans le cas du rasage d'une denture droite :

$$\beta_1 = 0, \quad \Sigma = \beta_0.$$

$$V_t = \frac{\omega_0 r_0 \sin \beta_0}{1000} \quad [\text{m/s}]$$

#### IV-2-4 Avances

Les avances longitudinales courantes sont :

$$s = 0.05 \text{ à } 0.5 \text{ mm/tr de la pièce}$$



$s = 0.2$  mm/tr de la pièce (valeur utilisé)

Elles donnent d'excellents résultats.

La longueur de la course d'avance (course de la table) dépend du procédé de travail et de la largeur de la pièce. Les approches en profondeur, éprouvées en pratique, sont de l'ordre de :  $s' = 0.02$  à  $0.05$  mm.

Les petites valeurs correspondant à la finition, les valeurs élevées correspondent à l'ébauche.

#### **IV-2-5 Nombre de course**

Le nombre de courses de la table dépend de la surépaisseur de rasage globale. Le rasage des engrenages est lié à un effet de polissage sous pression, de sorte que l'usinabilité du matériau décroît en fonction de l'accroissement du nombre de passes. Un nombre de courses trop élevé diminuerait également la durée de coupe de l'outil.

Une à trois courses à vide devraient faire suite au dernier enlèvement de copeau. La prudence est recommandée avec un nombre de courses à vide supérieur.

#### **IV-2-6 Matière pour le rasage**

On rase généralement des acier à résistance de  $60$  à  $70$  kg/mm<sup>2</sup>. Les résistances des matériaux supérieures à  $80$  kg/mm<sup>2</sup> sont défavorables à la tenue de coupe de l'outil, un traitement thermique approprié (recuit de normalisation et parfois recuit à gros grain, recuit d'adoucissement, suivant le matériau) permet de raser convenablement des matières ayant des résistances supérieurs à ce chiffre. Dans des conditions favorables, il est également possible de raser des roues en fonte et en matière plastique.

#### **IV-2-7 Temps de rasage**

Le temps de rasage est de  $30$  à  $60$ s pour des roues d'un ordre de grandeur correspondant au module  $3$ , le temps de serrage est environ de  $3$ s, pour un changement de réglage complet de la machine, le temps de préparation est environ  $30$  à  $45$  mn.

## IV-2-8 Le contact entre l'outil et la roue

Pendant le rasage, les points de contacts des deux dentures conjuguées forment une courbe passant la position I du point de tangence des deux cylindres primitifs - engendré par la combinaison des mouvement relative de l'outil et la roue- (Fig IV-9).

L'inclinaison  $\varepsilon$  de cette courbe est déterminé par la formule suivante :

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \sin \alpha_n \cot \beta_1.$$

Avec  $\alpha_n$  : Angle de pression réel.

$\beta_1$  : Inclinaison primitive de l'organe rasé.

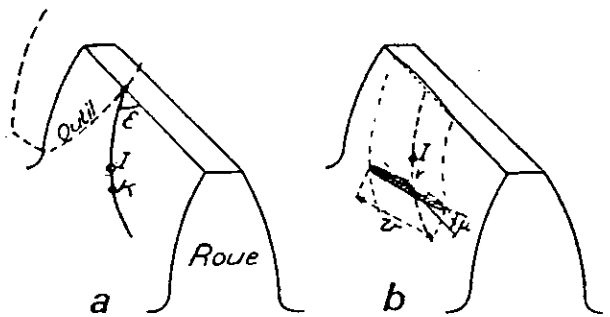


Fig. IV-9

Du fait de la pression de contact introduite entre l'outil et la roue, ce contact ne se produit pas seulement suivant un point géométrique K, mais suivant une surface d'écrasement, d'allure sensiblement elliptique (le maximum d'écrasement a lieu au point géométrique K).

La surface d'écrasement est inclinée suivant un certain angle  $\mu$  par rapport à la direction générale de la dent:

$$\operatorname{tg} \mu \approx \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta_1 - \beta_0) \sin \alpha_n$$

(dans le cas où les sens d'inclinaison de denture opposés.)

La valeur de la longueur ( $v$ ) de la surface d'écrasement correspondant à un aplatissement total au point de contact géométrique donné par le Dr Tuplin [HEN2]:

$$v \approx \frac{2\sqrt{2a(r_1/\cos^2 \beta_1 + r_0/\cos^2 \beta_0)}}{(\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_0)\sqrt{\sin \alpha_n}}$$

$r_0$  et  $r_1$  : Rayon primitifs.

$\beta_0$  et  $\beta_1$  : inclinaison primitifs.

$\alpha_n$  : Angle de pression réel.

"0" : Outil.

"1" : Roue à rasé.

## IV-2-9 Les différents méthodes de rasage

On distingue 4 méthodes de rasage se différencient par la nature du déplacement relatif des deux organes.

## IV-2-9-a Méthode longitudinal

La table supportant la roue rasée est déplacée suivant la direction même de l'axe de cette roue (Fig IV-10a). Dans la position 1, la zone active de rasage se trouve localisée sur la face droite de la roue. Pour que cette zone de rasage se déplace jusqu'à la face de gauche, il est nécessaire de communiquer une course égale au moins à la longueur de denture (Position 2).

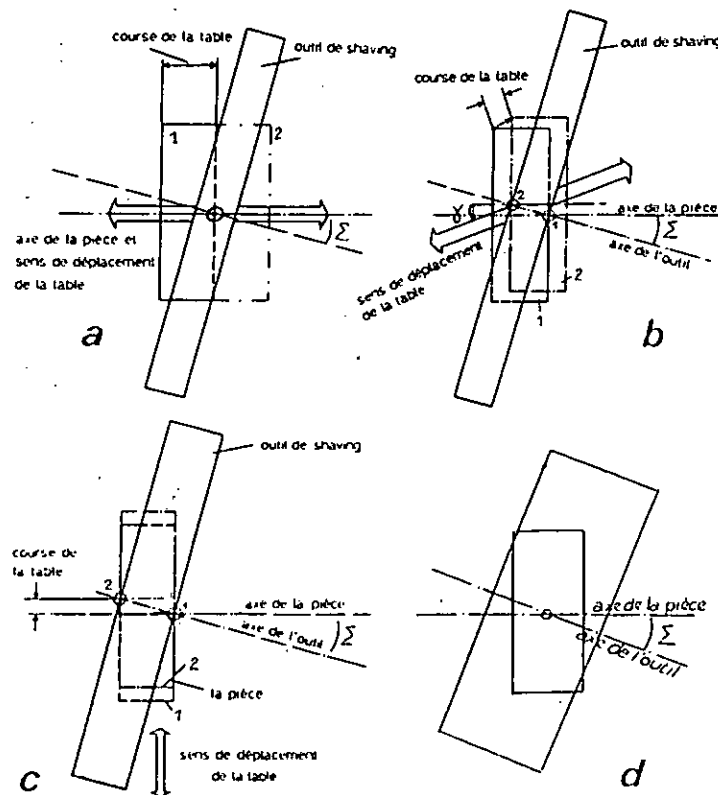


Fig. IV-10

Nous constatons que la zone active de rasage est invariable sur l'outil, ce qui a tendance évidemment à localiser l'usure (il est donc nécessaire de déplacer périodiquement l'outil suivant son axe pour changer l'emplacement de la zone de travail).

Dans la cas où la denture rasé est voisine d'un épaulement, il peut être nécessaire de réduire l'angle des axes, tout en déplaçant au maximum l'outil sur son

axe de manière à localiser la zone de rasage au voisinage de la face de l'outil approchant de l'épaulement.

Pour cette méthode, le temps de rasage est relativement long.

#### IV-2-9-b Méthode oblique (diagonale) (Fig IV-10b)

Dans cette méthode, la translation de la table s'effectue non plus suivant la direction de l'axe de la roue rasée, mais obliquement, suivant un certain angle  $v$ .

Après une course sensiblement plus faible qu'avec la méthode précédente, la roue rasée passe de la position (1) à la position (2), permettant à la zone active de rasage de traverser toute la largeur de denture.

Remarquons aussi qu'il est possible d'utiliser toute la largeur de l'outil, d'où meilleure répartition de l'usure.

Il existe les relations suivantes :

$$\operatorname{tg} v = \frac{b_0 \sin \Sigma}{b - b_0 \cos \Sigma}$$

$$l' = b \frac{\sin(180^\circ - v - \Sigma)}{\sin \Sigma}$$

Avec  $\Sigma$  : Angle des axes (de croisement).

$v$  : Angle de déplacement de la table.

$b$  : Largeur de roue rasée.

$b_0$  : Largeur utilisée d'outil.

$l'$  : Longueur d'avance.

L'emploi du rasage en diagonale est limité par le couteau de rasage dont le coût croît en proportion de la largeur. La limite supérieure d'un rasage en diagonale rentable correspond environ à une largeur de la pièce de 50 mm.

#### IV-2-9-c Méthode transversale (Underpass) Fig (IV-10c)

Cette méthode est le cas extrême de la méthode oblique: La translation de la table s'effectue normalement à la direction de l'axe de la roue rasée.

Nous constatons que toute la largeur de denture est rasée après une course encore plus faible, faisant passer la roue de la position (1) à la position (2).

axe de manière à localiser la zone de rasage au voisinage de la face de l'outil approchant de l'épaulement.

Pour cette méthode, le temps de rasage est relativement long.

#### IV-2-9-b Méthode oblique (diagonale) (Fig IV-10b)

Dans cette méthode, la translation de la table s'effectue non plus suivant la direction de l'axe de la roue rasée, mais obliquement, suivant un certain angle  $v$ .

Après une course sensiblement plus faible qu'avec la méthode précédente, la roue rasée passe de la position (1) à la position (2), permettant à la zone active de rasage de traverser toute la largeur de denture.

Remarquons aussi qu'il est possible d'utiliser toute la largeur de l'outil, d'où meilleure répartition de l'usure.

Il existe les relations suivantes :

$$\operatorname{tg} v = \frac{b_0 \sin \Sigma}{b - b_0 \cos \Sigma}$$

$$l' = b \frac{\sin(180^\circ - v - \Sigma)}{\sin \Sigma}$$

Avec  $\Sigma$  : Angle des axes (de croisement).

$v$  : Angle de déplacement de la table.

$b$  : Largeur de roue rasée.

$b_0$  : Largeur utilisée d'outil.

$l'$  : Longueur d'avance.

L'emploi du rasage en diagonale est limité par le couteau de rasage dont le coût croît en proportion de la largeur. La limite supérieure d'un rasage en diagonale rentable correspond environ à une largeur de la pièce de 50 mm.

#### IV-2-9-c Méthode transversale (Underpass) Fig (IV-10c)

Cette méthode est le cas extrême de la méthode oblique: La translation de la table s'effectue normalement à la direction de l'axe de la roue rasée.

Nous constatons que toute la largeur de denture est rasée après une course encore plus faible, faisant passer la roue de la position (1) à la position (2).

Signalons immédiatement que la largeur minimum  $b_0$  de l'outil doit être égale à  $b/\cos\Sigma$  ce qui limite évidemment cette méthode aux faibles largeurs de denture alors que les deux méthodes précédentes n'ont aucune limitation.

#### **IV-2-9-d Méthode de rasage en plongée (Fig IV-10d)**

Cette méthode est la plus rapide. C'est le seul mouvement d'approche radial qui est mis en oeuvre.

Il n'existe aucun mouvement d'avance. Pour que l'enlèvement de copeaux s'effectue correctement sur toute la largeur de la pièce rasée, il faut non seulement un outil de largeur suffisante, mais également une légère modification longitudinale en creux des flancs de cet outil.

#### **IV-2-10 Les machines de rasage (shaving)**

L'enlèvement de copeaux pendant le rasage d'engrenages cylindrique est essentiellement assuré par le glissement longitudinal basé sur le croisement des axes. Lorsque l'on utilise les couteaux de rasage courants, ceci ne suffit toutefois pas pour couvrir la distance d'une arête de coupe à la suivante. De ce fait -ainsi que pour le rasage de roues dentées plus larges que les couteaux de rasage (shaving)- il est imparti à la pièce ou à l'outil une avance longitudinale, dont le sens doit être celui indiquée au figure IV-10a et IV-10c.

Le mouvement de roulement est généralement communiqué par un élément -par exemple le couteau de rasage- à l'autre élément -par exemple l'engrenage à raser- par entraînement libre sous l'effet de l'engrènement.

La table porte-pièce peut habituellement être inclinée en fonction de l'avance longitudinale pour l'obtention d'engrenages à bombé dans le sens de largeur.

En outre, pour l'obtention du bombé dans le sens du profil on agit sur l'affûtage de couteaux.

### IV-2-11 Outil de rasage

On distingue deux types d'outils :

- 1°) Outil crémaillère, peu employé, remplacé de plus en plus par :
- 2°) L'outil circulaire, qui est utilisée actuellement à la SNVI-CVI.

#### - Rasage par outil circulaire

L'outil circulaire est semblable comme forme générale à une roue à denture hélicoïdale, dont les flancs des dents sont pourvus d'une multitude de goujures formant arêtes de coupe. Ces goujures sont orientées dans la plan de rotation, de la tête au pied de la dent, ce qui rend inopérant le glissement dans le sens de la hauteur de dent, tandis que seul le glissement longitudinal, basé sur le croisement des axes, est utilisable pour l'enlèvement de copeau. Le couteau de rasage a généralement des flancs de dents rectilignes dans le sens longitudinal (voir Fig IV-11).

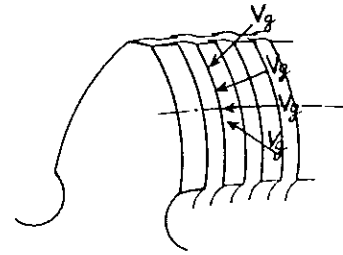


Fig. IV-11 outil de rasage [HEN2]

Le corps de roulement est un cylindre. Cette forme est suffisante pour le rasage longitudinal et diagonal. Pour le rasage transversal et en plongé, la largeurs de contact entre l'outil et la pièce peut toutefois être trop faible pour un enlèvement de copeau, dans ce cas, les couteaux de rasage ont une forme hyperbolique, autrement dit, les dents de couteau de rasage sont pratiquement rectifiés en creux dans le sens longitudinal.

Alors, on peut obtenir un bombé dans le sens de la largeur par l'inclinaison de la table porte-pièce ou par une forme de dent spécial avec un bombé concave.

Pour les modifications de profil de la dent de la pièce, telles que les rétrécissements de tête ou de pied, sont prévues sous forme négative dans la dent du couteau de rasage.

On note que sur les premiers outils Américains ces saignées sont parallèles au profil. En France (Renault) on se contente de saignées normalisées (Fig IV-12).

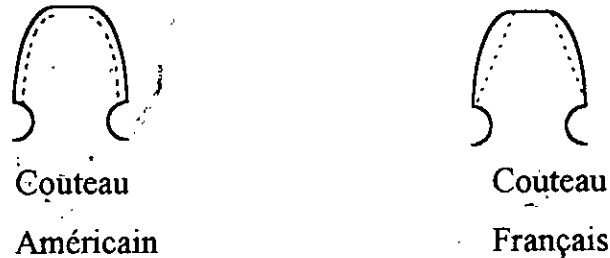


Fig. IV-12

Pour le rasage avec l'outil circulaire l'angle de pression et le pas diamétral doivent être les mêmes pour l'outil à finir. Et on anime à l'outil une forte vitesse de rotation.

#### - Rasage par l'outil crémaillère

L'outil crémaillère est formée de juxtaposition éléments dont le nombre est supérieur au nombre de dents du pignon à raser, le principe de coupe restant le même celle de taillage des dentures à développante de cercle [HEN2].

Comme précédemment l'outil et le pignon doivent former un engrenage gauche. L'outil est donc toujours à denture inclinée, même pour raser un pignon à denture droite.



CHAPITRE V

Contrôle

Le contrôle classique du profil de denture d'engrenage cylindrique comme nous avons indiqué ci-dessus repose sur le même principe que le principe de génération.

On considère un point  $M$  d'une droite  $P$  qui roule sans glisser sur un cercle  $C$  décrit, par rapport à  $C$ , une développante  $D$  de ce cercle.

Supposons la développante matérialisée Fig.V-1 est liée à un cylindre admettant  $C$  comme section droite.

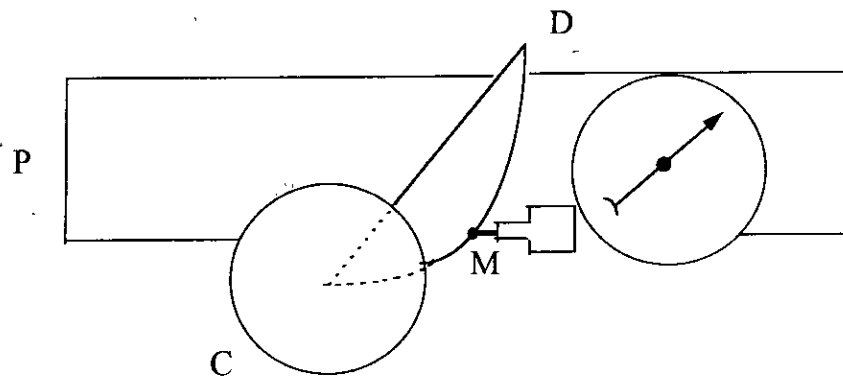


Fig. V-1

Supposons aussi que la droite  $P$  soit matérialisée par une règle, un comparateur est lié à la règle, l'extrémité de sa touche étant exactement dans le plan  $P$ .

Si la réalisation de la développante est parfaite, La touche du comparateur ne subit aucun déplacement par rapport à la règle lorsque l'on fait rouler sans glisser celle-ci sur le cylindre de base  $C$ , si par contre le profil a une erreur par rapport à la développante théorique, cette erreur sera mesurée en vraie grandeur par le comparateur.

La machine à mesurer tridimensionnelle permet de faire une comparaison du modèle réel avec le modèle théorique, il est possible de faire les mesures dans le plan  $(o,x,y)$  pour le contrôle du profil, ou sur l'hélice pour le contrôle de la distorsion. Par conséquent, la détermination des coordonnées  $(x_i, y_i, z_i)$ , ainsi que leurs normales en chaque point du profil  $(N_x, N_y, N_z)$ , permettant de quantifier les erreurs suivant la normale en chaque point.

Dans la représentation graphique-ci-dessous de la développante, l'axe des abscisses (Ot) "abscisses curvilignes" est représenté verticalement, par contre l'axe des ordonnées "erreurs" est représenté horizontalement.

Le contrôle des dentures d'engrenage se fait suivant la normale au profil, dont les erreurs sont prises, alors l'axe des abscisses où les erreurs sont nul est confondu avec la développante théorique.

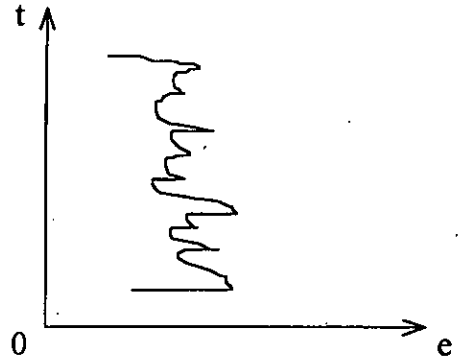


Fig. V-2

à partir de la formule calculant la longueur d'arc de la développante (t) compris entre le cercle de base et un point M quelconque sur le profil, on définit les abscisses curvilignes [HEN1].

$$t = \frac{R_b}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha_M$$

Avec :  $R_b = R_M \cos \alpha_M \Rightarrow \alpha_M = \operatorname{Arc} \cos \left( \frac{R_b}{R_M} \right)$

D'où :  $t_M = \frac{R \cos \alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \left( \operatorname{Arc} \cos \frac{R \cos \alpha}{R_M} \right)$

$R_b$  : Rayon de base.

$R$  : Rayon primitif.

$R_M$  : Rayon au point M quelconque.

$\alpha_M$  : Angle d'incidence en un point M quelconque.

$\alpha$  : Angle de pression.

### V-1 Détermination des coordonnées réelles

On détermine les coordonnées des points réels ( $x_r, y_r, z_r$ ) du profil par une expression vectorielle. En sommant les vecteurs positions théoriques ( $\overrightarrow{OM_{th}}$ ), et les erreurs normales au profil en ce point, on obtient ainsi.

$$\overrightarrow{OM_r} = \overrightarrow{OM_{th}} + \overline{E_n} \overrightarrow{N} \dots\dots (*)$$

avec  $\overrightarrow{OM_r}$  : Vecteur position réel "Rayon au point réel".

- OM<sub>th</sub>: Vecteur position théorique "Rayon au point théorique".
- E<sub>n</sub>: Erreur en valeur algébrique suivant la normale N.

Transformant l'expression vectorielle (\*) en coordonnées cartésiennes, on obtient :

$$\begin{cases} x_r = x_{th} + \bar{E}_n N_x \\ y_r = y_{th} + \bar{E}_n N_y \\ z_r = z_{th} + \bar{E}_n N_z \end{cases}$$

A partir de ces coordonnées on peut calculé les erreurs de pas, d'épaisseur et de K pas.

- On note E<sub>p</sub> : Erreur de pas.
- Es : Erreur d'épaisseur.
- E<sub>kp</sub> : Erreur de K pas.

E<sub>p</sub> = Pas réel - Pas théorique  $y_1(i+1)$

E<sub>s</sub> = épaisseur réelle - épaisseur théorique

E<sub>kp</sub> =  $\sum_{i=1}^k (E_p)_i$   $y_1(i)$

Pas réel = R Δθ<sub>p</sub> = R(θ<sub>i+1</sub> - θ<sub>i</sub>)

$$\Delta\theta_p = \text{Arctg}\left(\frac{y_{1/2}(i+1)}{x_{1/2}(i+1)}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{y_{1/2}(i)}{x_{1/2}(i)}\right)$$

Épaisseur réelle = R Δθ<sub>s</sub>

$$\Delta\theta_s = \text{Arctg}\left(\frac{y_2(i)}{x_2(i)}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{y_1(i)}{x_1(i)}\right)$$

- R : Rayon primitif.
- i : Désigne le numéro de la dent.
- 1,2 : Flanc droit et gauche respectivement.
- 1/2 : Flanc droite ou gauche.

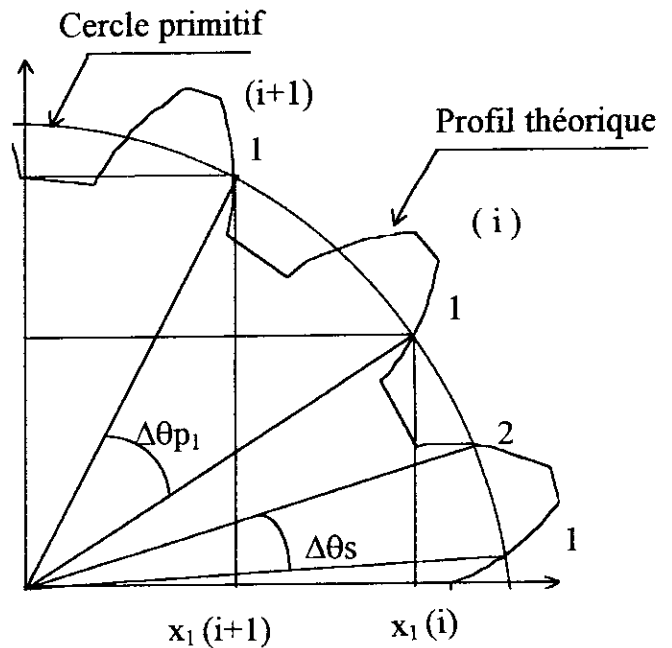


Fig. V-3

On note qu'il faut prendre  $\Delta\theta$  en radian, avec  $0 \leq \Delta\theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

## V-2 Optimisation du profil bombé par la méthode de moindre carré

On a vu que la développante théorique du profil théorique modifié est une parabole. Dans un repère où l'axe des ordonnées est un axe de symétrie, l'équation de cette parabole s'écrit  $e = a t^2$  (Courbe 1), ou encore  $e = a t^2 + e_b$  (Courbe 2).

Exprimant la courbe 2 dans le repère (O, t, e), fig (V-4) on aura l'expression suivante :

$$e = A t^2 + B t + C$$

Avec  $A = a$

$$B = -L a$$

$$C = a \frac{L^2}{4} + e_b$$

Où : L : Longueur de la développante de cercle.

$e_b$  : Erreur de bombé.

$$a = -\frac{4}{L^2} e_b.$$

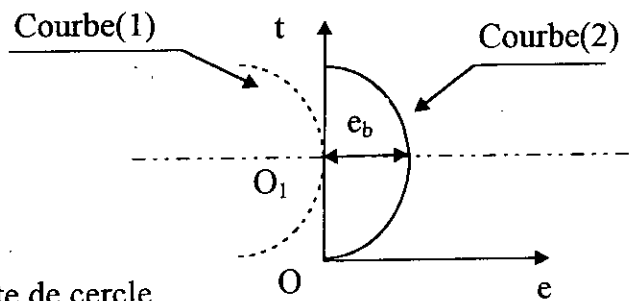


Fig. V-4

L'optimisation sert à déterminer les constantes A, B et C, connaissant les points de mesures. Afin d'évaluer la fonction erreur (e), on choisit la méthode de moindre carré.

La méthode de moindre carré consiste à minimiser la quantité W telle que :

$$W = \sum (e_i - e)^2$$

Avec  $e = A t_i^2 + B t_i + C$   $i = 1, n$

La détermination des constantes A, B et C au sens de moindre carré est donnée respectivement par :

$$\frac{dW}{dA} = 0, \quad \frac{dW}{dB} = 0, \quad \frac{dW}{dC} = 0$$

Après calcul et simplification, on obtient le système d'équation sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sum t_i^4 & \sum t_i^3 & \sum t_i^2 \\ \sum t_i^3 & \sum t_i^2 & \sum t_i \\ \sum t_i^2 & \sum t_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum e_i t_i^2 \\ \sum e_i t_i \\ \sum e_i \end{pmatrix}$$

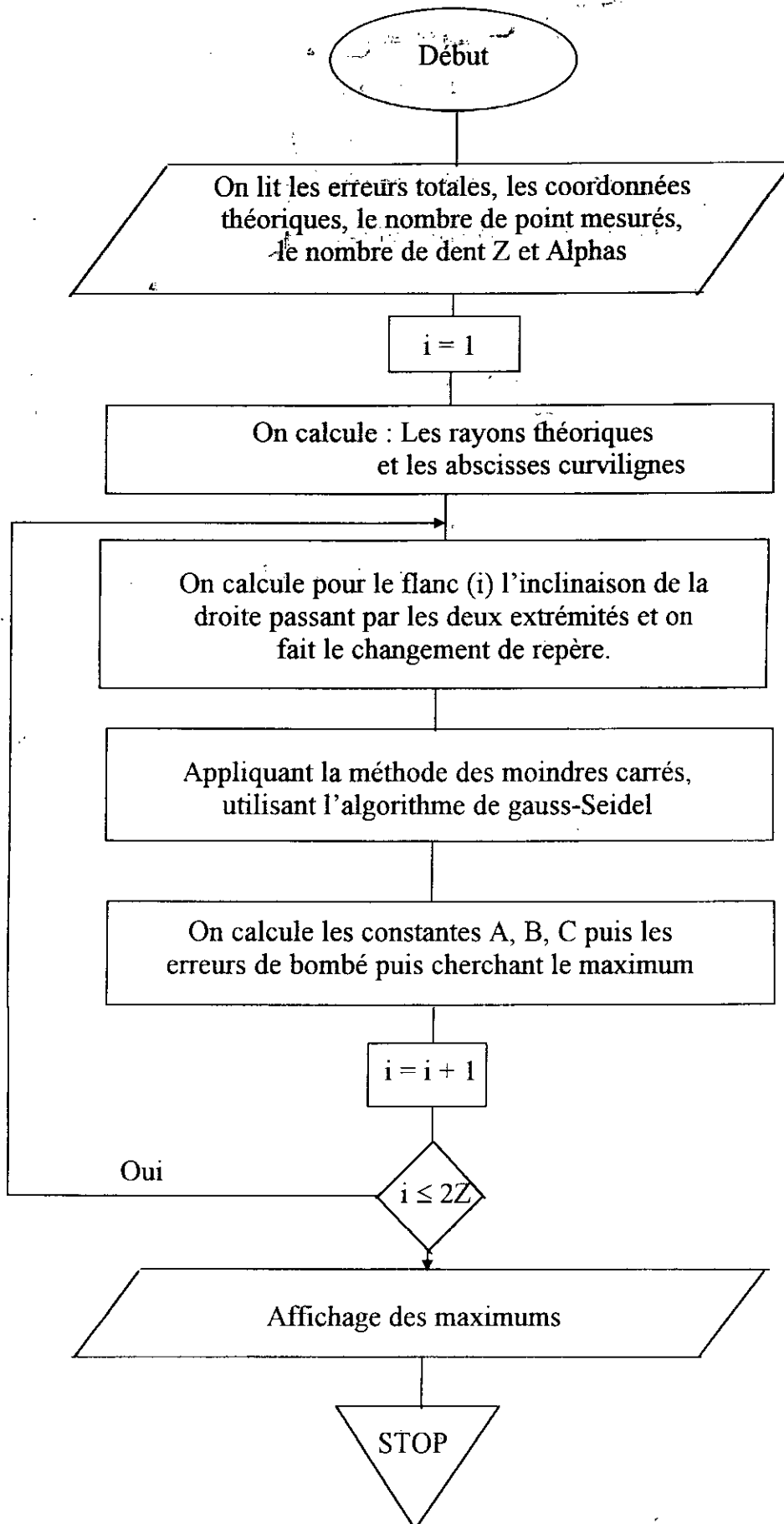
Avec  $e_i$  : Erreur locale "au point  $i$  »

$t_i$  : Abscisse curviligne locale.

$n$  : Nombre de point de mesure.

Pour la résolution de ce système on procède à la méthode de résolution de Gauss-Seidel.

On propose l'organigramme de calcul suivant :



Organigramme pour le calcul des erreurs de bombé du profil

Lors du contrôle, il pourrait y avoir des erreurs supplémentaires (erreur de position). Ces erreurs sont influencées par la contribution du référentiel de mesure dans lequel s'effectue le relevé des points palpés sur la pièce. Une méthode d'optimisation détaillée dans la référence [Bou] permet de les minimiser.

Finalement, nous allons aboutir à des résultats sans optimisation des erreurs de positions et d'autres avec.

Après avoir exécuter le programme de calcul, on aura l'erreur de bombé en chaque point de profil.

Le tableau suivant récapitule les résultats de calcul en prenant la même roue de l'exemple qui a été donné dans le chapitre II avec :

l'angle de pression  $\alpha = 20^\circ$

le nombre de dents  $Z = 28$

Module réel  $m = 3.75$

Largeur de denture  $b = 25$  mm

À La figure ci-dessous illustre les quatre dents contrôlées.

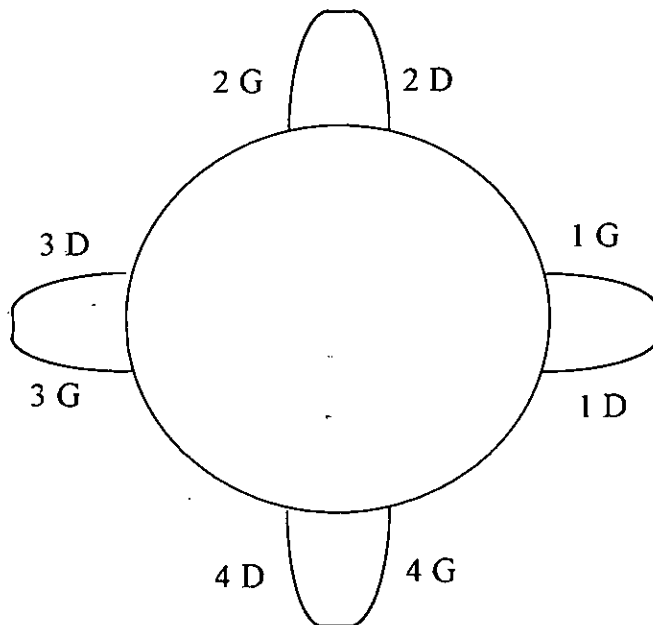


Fig. V-5



Les erreurs de bombé de profil sans optimisation des erreurs de positions sont :

4.5616400110336929D-05 3.9786715244960524D-05 9.5912115570008504D-08  
1.2860323000941051D-07 5.1955729540334627D-05 2.6538416151695820D-05  
1.0016008187730285D-06 6.4025895349891015D-07

Les erreurs de bombé avec optimisation des erreurs de positions sont :

4.7928587886314549D-05 4.3548947935319948D-05 2.4528942754644539D-07  
2.0085440097065979D-07 5.1915044852339542D-05 2.0504849284773332D-05  
1.0794158646713339D-06 7.8351029120156279D-07

Réécrivons les résultat sous forme de tableau :

N° de la dent	Les erreurs de bombé sans optimisation des erreurs de positions (mm)	Les erreurs de bombé avec optimisation des erreurs de positions (mm)
1 flanc G	0.010251	0.010830
2 flanc D	0.008510	0.009064
2 flanc G	0	-0.000414
3 flanc D	0	-0.000447
3 flanc G	0.012612	0.012033
4 flanc D	0.005144	0.004590
4 flanc G	0.007979	0.008393
1 flanc D	0.004772	0.005219

Les valeurs négatives présentent des profils de formes concaves.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Cette étude nous a permis d'éclaircir certains points relatifs aux modifications des dentures d'engrenages cylindriques, à savoir :

\* La génération de la denture modifiée (bombé) peut être obtenue sur la même machine que celle pour l'obtention de la denture à développante de cercle. Elle est supposée générée par un outil crémaillère avec arête de forme parabolique ou hyperbolique.

\* L'étude du bombement longitudinal montre qu'un choix judicieux de la valeur de bombé réduit l'effet de la déflexion des arbres sur la position du portée.

Cette étude montre également que les déformations qui se produisent au contact des flancs conditionnent l'étendue de la portée et les contraintes de contact.

\* Le contrôle du profil modifié nous a permis de développer un calcul et de quantifier les erreurs de bombé. En soustrayant donc celle-ci des erreurs globales, on aboutira aux erreurs propres au profil.

Ce calcul permet d'envisager un module de la machine de contrôle équipé d'une commande numérique. Il serait donc possible d'afficher directement les erreurs propres du profil modifié.

Nous souhaitons une continuation de ce travail en vue d'établir une corrélation entre les réglages des machines d'usinage (rasage, rectification) et la valeur de bombement préconisée.

## BIBLIOGRAPHIE

- [BOU] : M. BOUAZIZ. « Contribution au contrôle des engrenages sur machine à mesurer tridimensionnelle ». Doctorat 1995.
- [CHA] : G. CHABERT. « Répercussion du bombé ». Bulletin N°48 de l'Institut de l'Engrenage et des Transmission I.E.T (anciennement S.E.I.E). p 11-33.
- [FAU] : « Aspect des dentures d'engrenage après fonctionnement »
  - 1- Considérations généralés sur l'interpretation de l'aspect des dentures d'engrenage.
  - 2- Principaux aspets des dentures d'engrenages en service.L. FAURE. CETIM 1990.
- [HEN1] : G. HENRIOT. « Traité théorique et pratique des engrenages », Tome 1 : Théorie et technologie. Paris ed : Bordas 1979.
- [HEN2] : G. HENRIOT. « Traité théorique et pratique des engrenages », Tome 2 : Etude complète du matériel . Paris ed : Bordas 1983.
- ISO92] : « Engrenages cylindriques - code pratique de réception, partie : Contrôle relatif aux flancs homologues de la denture ». ISO/TR 10064-1 1992.
- [ISO95] : « Engrenages cylindriques - système ISO de précision, partie 1: Définitions et valeurs admissible des écarts pour les flancs homologues de la denture ». ISO 1328-1 1995.
- [NIE] : G. NIEMAN, BERLAN « Machine elements : design and calculation in mechanical engineering's ». Vol 2 , GEARS. p 348.

- [PIS] : N. PISKONOV « Calcul différentiel et intégrale ». 11<sup>ème</sup> ed -  
Moscou (URSS); Mir 1980
  
- [POU] : « Taillage rasage et rectification des engrenages ».  
M. HENRY et H. POURET
  
- [ROL] : « Contrôle des engrenages à axe parallèle ». Organisme : ROLLET  
productique. INT. Bulletin de l'Institut de l'Engrenage et des  
Transmission; ISSN 0981. 3667; SRA; DA; Vol 108. p51-69.
  
- [SIM89] : V. SIMON. « Journal of mechanisms, transmissions and automation in  
design: partie : Optimal Tooth modifications for spur and helical gears ».   
Décembre 1989 Vol. 111/611.
  
- [SIM91] : V. SIMON. « Calculation of optimal Tooth modifications »  
I.S.M.E 1991.
  
- [SNVI] : « Shaving des engrenages ». SNVI-CVI; Département: Contrôle. Rouiba.
  
- [THU] : P. THUILLIER. « Cours de mathématiques à l'usage des candidats au  
brevets de techniciens supérieurs ». Vol 4 : Géométrie analytique, calcul  
numérique.

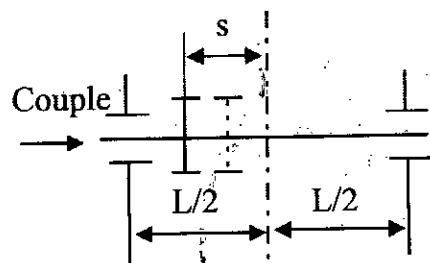
ANNEXE

**La détermination de  $T_\beta$  :**

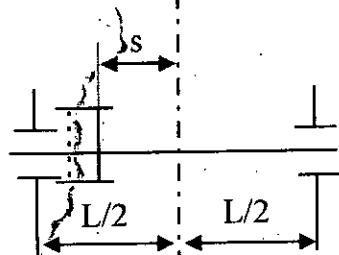
Nous prendrons pour  $T_\beta$  la même tolérance sur l'erreur de distorsion  $f_{h\beta}$ , dont les valeurs sont données par le tableau suivant :

Tolérance sur $f_{h\beta}$ ( $\mu\text{m}$ )					
	Qualité	5	6	7	8
Largeur de denture	Jusqu'à 20 mm	6	8	11	16
	20 à 40	6.5	9	13	18
	40 à 100	7	10	14	20
	100 à 160	8	11	16	22
	Au dessus de 160	8	11	16	22

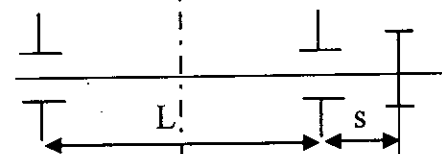
Détermination de K :



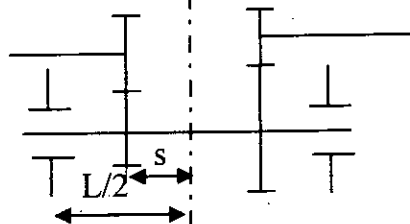
Avec  $s/L < 0.3 ; K = 1.2$



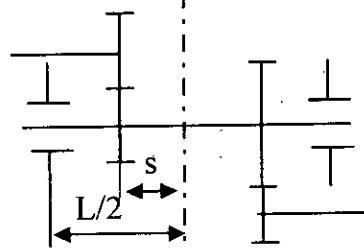
$s/L < 0.3 ; K = -1.2$



$s/L < 0.5 ; K = 3.2$

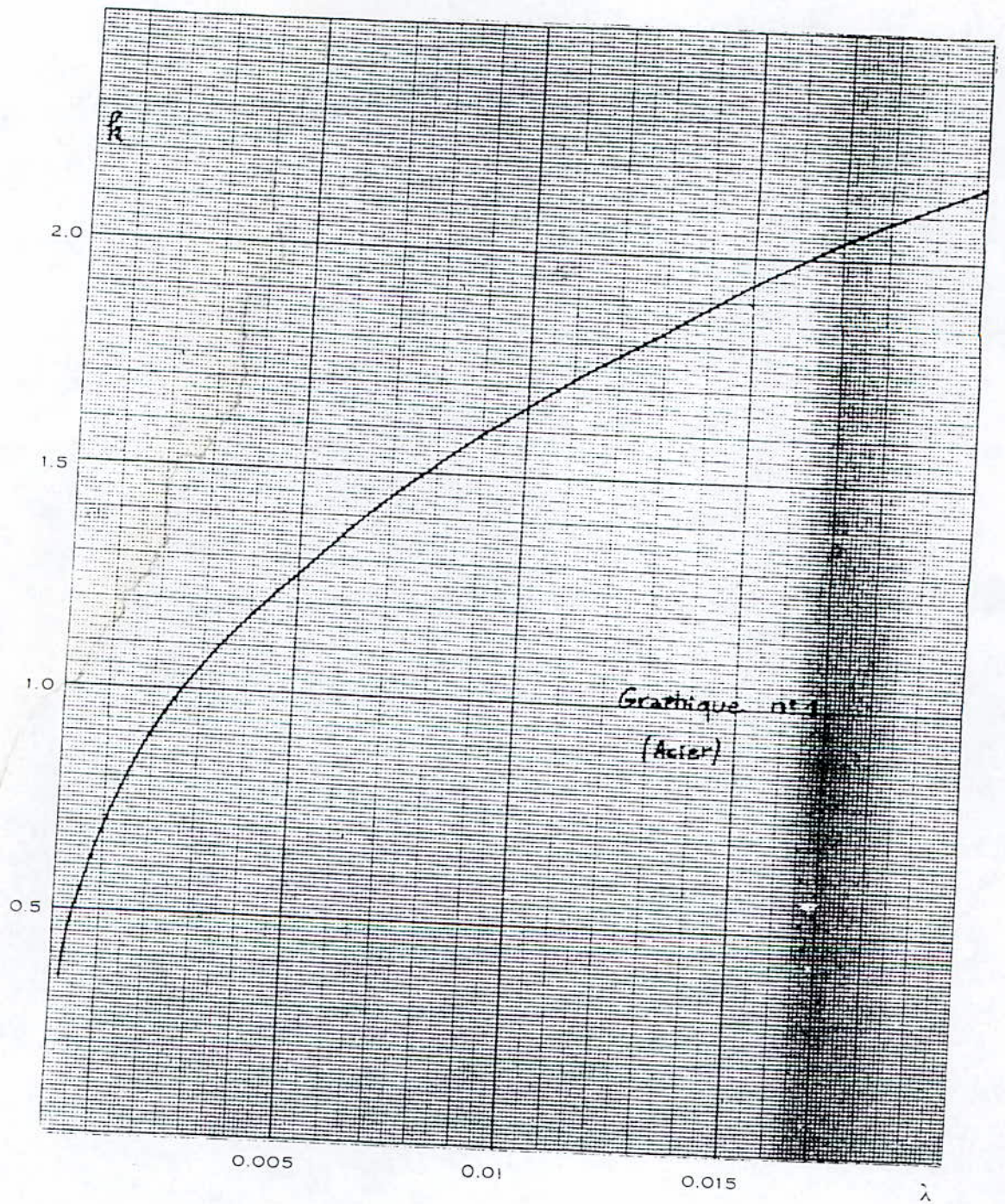


$s/L < 0.3 ; K = -0.9$

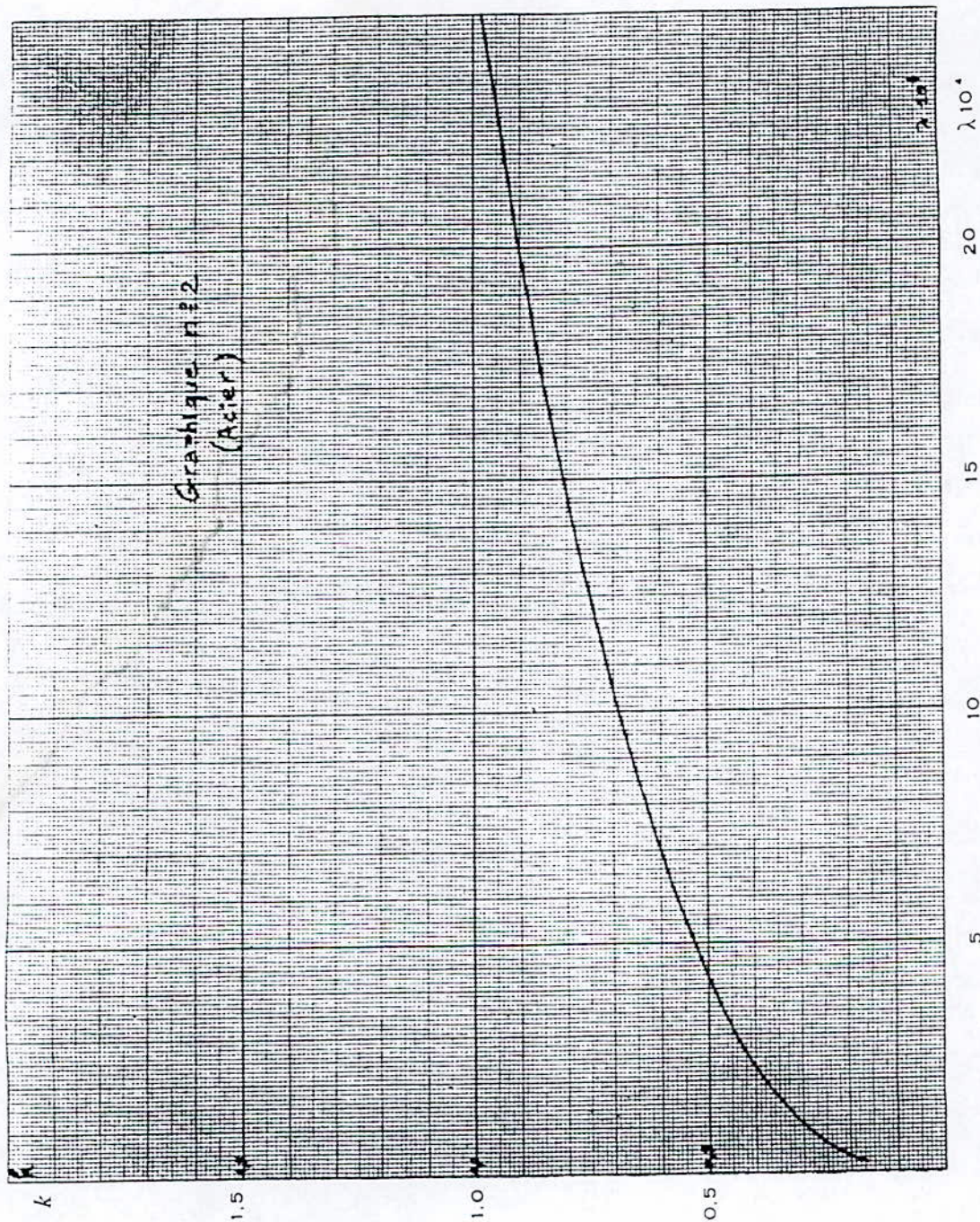


$s/L < 0.3 ; K = -1.5$



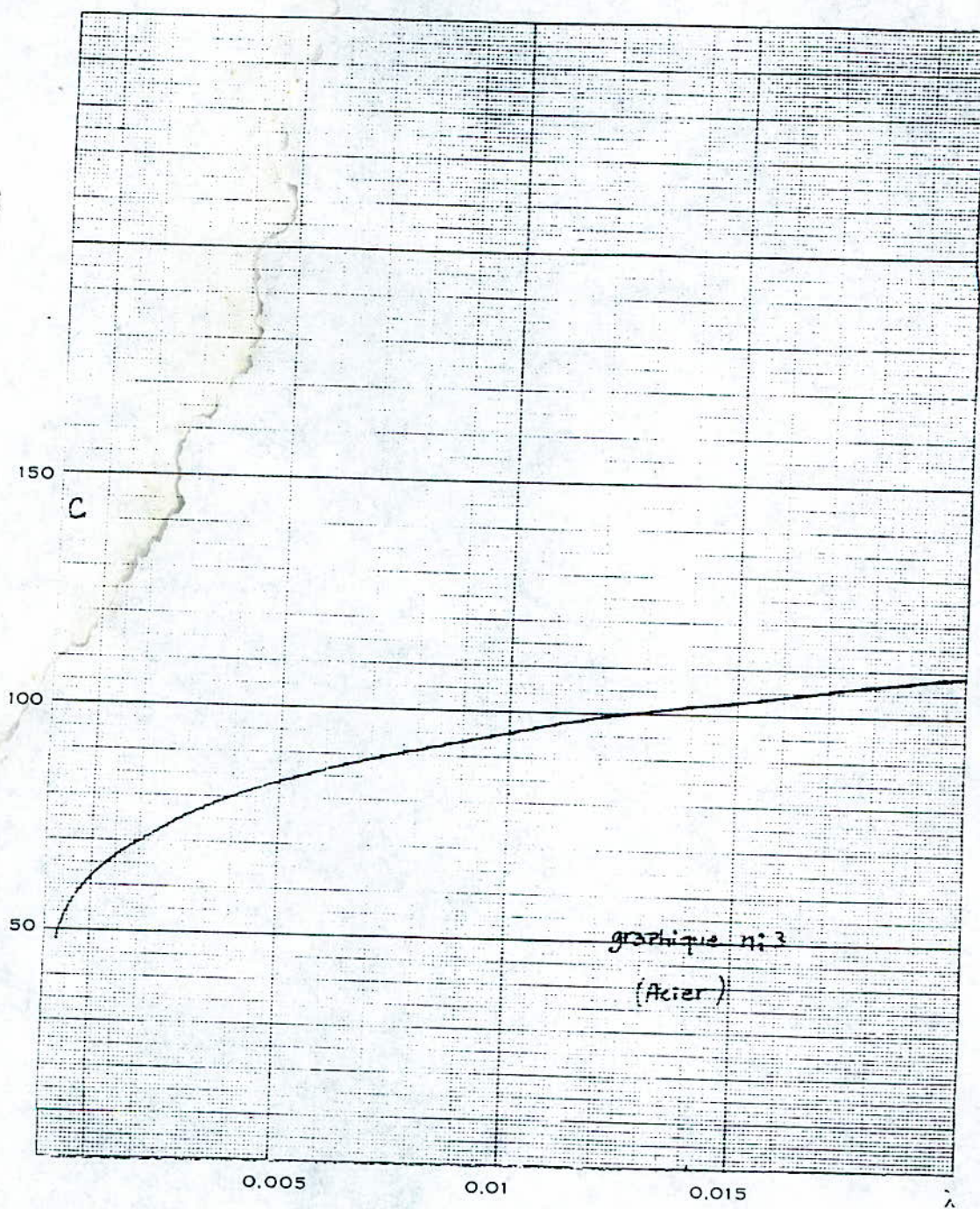
Graphique N°1 :  $k = f(\lambda)$  pour  $\lambda > 10^{-3}$





Graphique N°2 :  $k = f(\lambda)$  pour  $\lambda < 10^{-3}$



Graphique N°3 :  $C = f(\lambda)$