

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

19/96

وزارة التربية الوطنية

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT Génie mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

MODELE DYNAMIQUE INVERSE

D'UN ROBOT MANIPULATEUR

Proposé par :

Mr M. MADANI

Etudié par :

Melle CHEMLI FATIHA

Dirigé par :

Mr M. MADANI

PROMOTION

Septembre 1996

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT Génie mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

MODELE DYNAMIQUE INVERSE

D'UN ROBOT MANIPULATEUR

Proposé par :

Mr M. MADANI

Étudié par :

Melle CHEMLI FATIHA

Dirigé par :

Mr M. MADANI

PROMOTION

Septembre 1996

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

DÉDICACES

A mes parents.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Mr.M.MADANI maître assistant à l'E.N.P.A, pour m'avoir proposé un sujet passionnant et pour l'intérêt constant avec lequel il a suivi la progression de ce modeste travail.

Je remercie Mr.A.YOUSNADJ chef du département de Génie Mécanique de l'E.N.I.T.A, pour son aide précieuse dont il a fait preuve à mon égard.

A tout le personnel de la bibliothèque de l'E.N.I.T.A, qu'ils trouvent ici ma profonde gratitude.

A tous les membres du C.I.A.R.A.

Que tous ceux qui de près ou de loin m'a soutenu moralement et contribué à l'élaboration de ce travail, reçoivent mes remerciements les plus sincères.

إن هذه الدراسة أدت إلى إنجاز برنامج معلوماتي يتيح لنا إستخراج العزوم المنتجة من طرف المحركات بدلالة الوقت لعمل معطى (مسافة، نوع الحركة، الوقت المتاح، الحمولة، الروبو المحدد) وهذا ما يسمى بالنموذج العكسي الديناميكي لروبو متحرك أو بكل بساطة النموذج الديناميكي.

Résumé

Le travail de cette étude a conduit à l'établissement d'un code de calcul permettant de déterminer les couples à fournir par les moteurs en fonction du temps, pour une tâche donnée (parcours, type de mouvement, temps disponible, charge, robot déterminé). C'est ce que l'on appelle le modèle dynamique inverse d'un robot manipulateur ou parfois plus simplement le modèle dynamique.

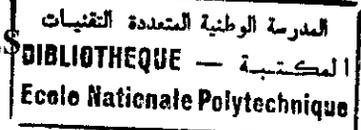
Abstract

The work of these study has led to develop a program permitted the evaluation of the couple to provide by the motors in function of time for a given task (course, type of motion, available time, load, determined robot). It is this that we call the reverse dynamic model for robotic manipulators or sometimes more simply the dynamic model.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

LISTE DES TERMES UTILISES

LISTE DES TERMES UTILISES



- n :** nombre de corps mobiles et nombre de liaisons.
- C_i, L_i :** corps d'ordre i ($i=1, \dots, n$) et sa liaison amont.
- $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$:** $i^{\text{ème}}$ coordonnée généralisée du système et de ses dérivées.
- C.I.G :** configuration initiale géométrique; c'est la configuration géométriquement la plus simple du système par rapport à laquelle sont référencés les variables aux liaisons, elle est souvent implicitement définie dans les systèmes réels, et elle sert à la caractérisation complète du système.
- R_{i0} :** Référentiels intermédiaires utilisés pour faciliter l'introduction des données structurelles du système dans la C.I.G, ils dérivent tous par simple translation du référentiel galiléen lié au bâti C_0 et qui a son axe Z orienté suivant la verticale ascendante. Leurs origines O_i sont prises sur la liaison L_i .
- R_i :** référentiels de calcul de même origine O_i que les référentiels R_{i0} . Le passage de R_{i0} dans R_i se fait à l'aide de trois matrices de rotation orthogonales et utilisant les angles d'EULER (ϕ_i, ψ_i, θ_i).
- σ_i :** coefficient qui caractérise le type de mouvement sur la liaison L_i ;
 rotation: $\sigma_i = 1$; translation: $\bar{\sigma}_i = 1$ ($\bar{\sigma}_i = 1 - \sigma_i$).
- \vec{d}_i :** vecteur translation entre les origines O_i et O_{i+1} respectivement sur les liaisons L_i et L_{i+1} . \vec{d}_{i0} : même vecteur dans 'C.I.G'.

- λ_i : coefficient qui indique si la translation $\sigma_i \cdot q_i \cdot \vec{k}_i$ influe sur la distance \vec{d}_i ; ou sur la distance \vec{d}_{i-1} : $\bar{\lambda}_i = 1$ ($\bar{\lambda}_i = 1 - \lambda_i$).
- m_i : masse du corps C_i .
- $\vec{P}g_i$: vecteur position du centre de masse du corps C_i dans R_i ; $\vec{P}g_{i0}$ dans la C.I.G.
- $M_{i,(i+1)}$: matrice de passage de R_i dans R_{i+1} décomposable en deux matrices $M(\phi_i, \psi_i, \phi_{i+1}, \psi_{i+1})$ et $M(\theta_{i+1})$ avec $M(\theta_{i+1})$ variable.
- $M_{(i+1)0,(i+1)}^0$: matrice de passage de $R_{(i+1)0}$ dans $R_{(i+1)}$ en C.I.G.
- $M_{i0,i}^{0T}$: matrice qui permet de revenir de R_i dans R_{i0} en C.I.G.
- Mi_i : matrice d'inertie du corps C_i dans R_i et en son origine O_i ;
- Mi_{i0} : matrice du même corps C_i en C.I.G.
- Mi_{iG} : matrice du même corps C_i dans R_i ramenée en son centre de masse.
- $\vec{\Omega}_i$: vitesse de rotation absolue du référentiel R_i exprimée dans R_i .
- $\vec{E}_i, \vec{U}_i, \vec{G}l_i, \vec{G}_i$: termes d'accélération exprimés dans R_i .
- $\vec{\tau}D_i (\vec{R}D_i, \vec{M}D_i)$: torseur des actions différentielles dû au seul corps C_i sur la liaison portante (en amont) L_i calculé dans le référentiel R_i .

$\vec{H}_i (\vec{R}E_i, \vec{M}E_i)$: torseur des actions extérieures pures sur le corps C_i , exprimé
(introduit) dans R_i et réduit en son origine O_i .

$\vec{H}_i (\vec{R}L_i, \vec{M}L_i)$: torseur complet de liaison exprimé dans R_i .

$[A]$: matrice de pré-produit vectoriel à gauche par \vec{A} .

SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	1
Chapitre I: LES MÉCANISMES ARTICULES ET LEUR MISE EN ÉQUATION	
I.1-Généralités sur les systèmes articulés.....	3
I.1.1-Définition.....	3
I.1.2-Classification des systèmes articulés en chaîne.....	3
I.2-Etude comparative des différentes méthodes de mise en équation.....	6
I.2.1-Introduction.....	6
I.2.2-Formalisme de Newton-Euler.....	7
I.2.3-Formalisme de d'Alembert.....	9
I.2.4-Formalisme de Gibbs.....	9
I.2.5-Formalisme de Lagrange.....	10
Chapitre II: METHODE RECURRENTE DE CALCUL DES ACTIONS AUX LIAISONS ET DE MISE EN EQUATION	
II.1-Introduction.....	13
II.2-Modélisation du système.....	14
II.2.1-Définition du système théorique type.....	14
II.2.2-Définition du corps C_i	15
II.2.3-Définition des référentiels partiels aux liaisons.....	16
II.2.4-Matrice de passage de R_{i0} dans R_i	16
II.2.5-Matrice de passage entre les référentiels de calcul.....	18
II.3-Caractérisation géométrique et mécanique du système.....	18
II.3.1-Choix d'une configuration initiale géométrique.....	18
II.3.2-Caractérisation des mouvements du système.....	19
II.3.3-Définition des coordonnées générales du système.....	19
II.3.4-Caractérisation géométrique du système.....	20
II.3.5-Caractérisation des influences des mouvements de translations.....	21
II.3.6-Données mécaniques du système.....	21
II.3.7-Expression des données géométriques et mécaniques du système dans R_i	22
II.4-Valeurs instantanées des composantes des vecteurs P_{g_i} et d_i et m_i	22

a-valeurs instantanées des composantes du vecteur $\vec{P}g_i$	22
b-valeurs instantanées des composantes du vecteur \vec{d}_i	23
c-valeurs instantanées des termes des matrices d'inertie des corps C_i	23
II.5-Développement de la méthode de calcul des torseurs des actions aux liaisons	24
II.5.1-Cinématique d'un point P quelconque du système: position, vitesse et accélération dans le référentiel inertiel	24
a-position du point P dans R_0	24
b-vitesse du point P dans R_0	26
c-accélération du point P dans R_0	28
II.5.2-Torseur des actions différentielles sur la liaison L_i	31
II.5.3-Calcul des torseurs complets de liaison	34
II.6-Equations du mouvement du système	35
II.6.1-Formulation des équations	35
II.6.2-Algorithmes de calcul des torseurs de liaison et des équations de mouvement du système	36
II.6.2.1-Structure générale du programme	37
II.6.2.2-Organigramme général de calcul	39
Chapitre III: MISE AU POINT DU PROGRAMME	
III.1-Introduction	44
III.2-Application du programme	44
III.3-Simulation des mouvements	45
III.4-Organigramme donnant les positions moyennant les vitesses	46
III.5-Vérifications	50
III.5.1-Vérification manuelle des résultats	50
III.5.2-Vérification expérimentale	52
CONCLUSION	53
BIBLIOGRAPHIE	
ANNEXES	

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans la période contemporaine, la robotique accapare l'attention des chercheurs et des industriels, et devient d'une importance cruciale pour les grands pays industrialisés. Ainsi les diverses réalisations fortes ingénieuses dans ce domaine et le souci constant de remplacer l'homme par la machine ont en quelque sorte favorisé l'utilisation des robots manipulateurs dans divers secteurs industriels où de multiples tâches fastidieuses et pénibles sont désormais prises en charge par des robots; tâches entraînant une pénibilité physique ou sensorielle comme la manutention des pièces lourdes, le tri des pièces de petites dimensions, la fabrication et le contrôle en micromécanique et micro-électronique; tâches effectuées en milieu hostile ou dangereux ...

Actuellement, et grâce à l'évolution continue des différentes disciplines scientifiques et technologiques, on assiste à l'apparition d'une multitude d'engins commandés automatiquement, pouvant être programmés pour l'exécution de différentes tâches.

Ces mêmes engins étant complétés par des détecteurs et gérés par des calculateurs, sont devenus des moyens d'usage et de production pratiquement universel appelés: **ROBOTS**. Dont on distingue trois grandes classes qui sont:

- les bras articulés (ou manipulateurs)
- les télémanipulateurs
- les robots mobiles

Industriellement, le bras articulé ou manipulateur est le plus répandu.

La topologie d'un robot étant en général définie à partir d'un volume de travail et les divers types d'application auxquelles il est destiné, en étant toutefois assujetti à trois types de performances:

- performances géométriques.
- performances cinématiques.
- performances dynamiques.

Ces dernières étant très intéressantes sont les capacités limites de charge de ses différentes liaisons. Leurs évaluations manuelles étant quasiment impossibles dès que le nombre de degrés de liberté atteint trois, de ce fait le recours aux moyens de calcul automatique sur la base d'un modèle théorique ajusté s'impose. Ce recours est justifié par la lourdeur des équations que par l'aspect répétitif des calculs.

L'objectif de cette étude est de mettre au point un programme de calcul automatique, en régime dynamique, des actions de liaisons dans les mécanismes en chaînes ouvertes.

La connaissance des actions de liaison est indispensable pour:

- dimensionner la structure du mécanisme projeté en fonction des performances dynamiques maximales envisagées tout en tenant compte des autres impératifs (vibrations, fréquences propres).
- évaluer son état de charge au cours d'une application donnée afin d'assurer un meilleur entretien préventif.
- optimiser son fonctionnement en lui assurant une meilleure commande, la commande dynamique qui nécessite le calcul des résistances instantanées aux mouvements.

Notre travail est présenté en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous avons commencés par un bref rappel sur les mécanismes articulés puis nous avons fait une comparaison entre les différentes méthodes d'obtention des modèles dynamiques.

Le deuxième chapitre, quant à lui a porté sur l'utilisation d'une méthode récurrente pour l'élaboration de notre programme. Cette même méthode étant autonome, son système de notation clairement défini, et l'ensemble des formules utilisées sont démontrées en ne faisant appel qu'aux équations de base de la statique et de la dynamique des solides et à l'analyse vectorielle.

Dans le troisième chapitre, on a appliqué notre programme à un type particulier de robot: RENAULT-ACMA H80 en démontrant ses caractéristiques cinématiques et dynamiques.

CHAPITRE I

**LES MECANISMES ARTICULES
ET
LEUR MISE EN EQUATION**

LES MÉCANISMES ARTICULES ET LEUR MISE EN ÉQUATION

I.1-GENERALITES SUR LES SYSTÈMES ARTICULES:

Les mécanismes ou systèmes articulés sont des opérateurs mécaniques ou générateurs de fonctions assurant des relations entre des informations de sortie correspondant aux besoins de la tâche à exécuter. | TOUNSI 95 |

I.1.1-Définition:

Un système mécanique est formé par une succession d'éléments rigides et d'assemblages à contacts solides directs, pouvant constituer une chaîne si toute pièce de l'ensemble est concernée au moins par une liaison.

I.1.2-Classification des systèmes articulés en chaîne:

Les mécanismes en chaîne sont nombreux et différents mais peuvent néanmoins être classifiés en trois grandes catégories:

- Les chaînes continues ouvertes:

Ce sont elles qui imposent un minimum d'assemblages, si L est le nombre de liaisons et N le nombre d'éléments (bâti non compris) on a alors: $L=N$. (fig 1.a)

- Les chaînes continues fermées:

Elles se bouclent sur le bâti, étant largement utilisées dans les mécanismes, elles imposent: $L=N+1$. (fig 1.b)

- Les chaînes complexes:

Elles regroupent tous les systèmes mécaniques où un élément au moins est concerné par plus de deux liaisons, elles imposent: $L>N+1$ et se présentent sous diverses formes à savoir:

-avec chaîne principale ouverte (fig 1.c.1)

-avec chaîne principale fermée (fig 1.c.2)

-avec une structure en arborescence (fig 1.c.3)

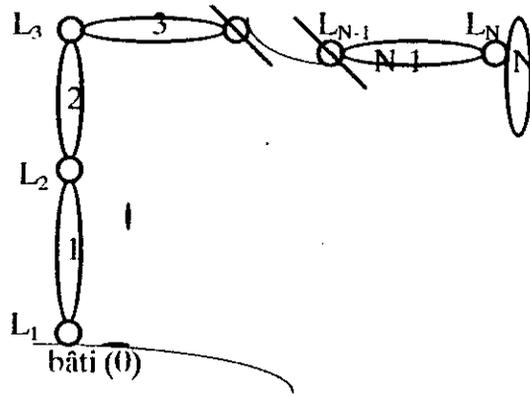


fig 1.a

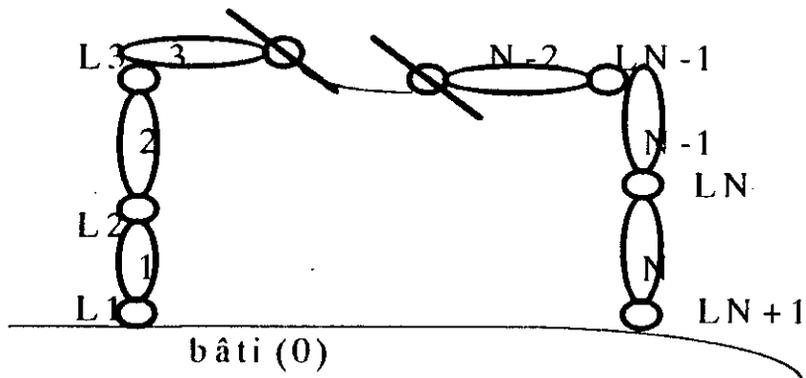
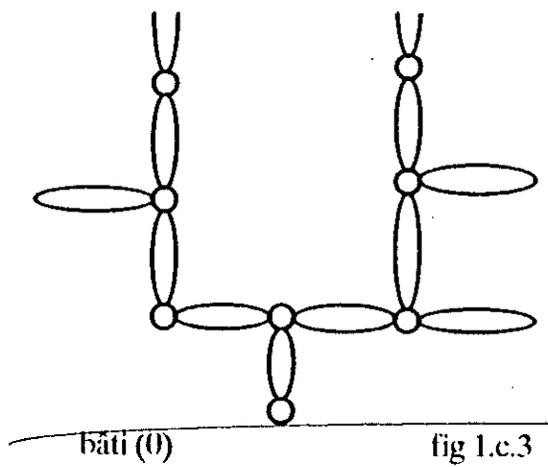
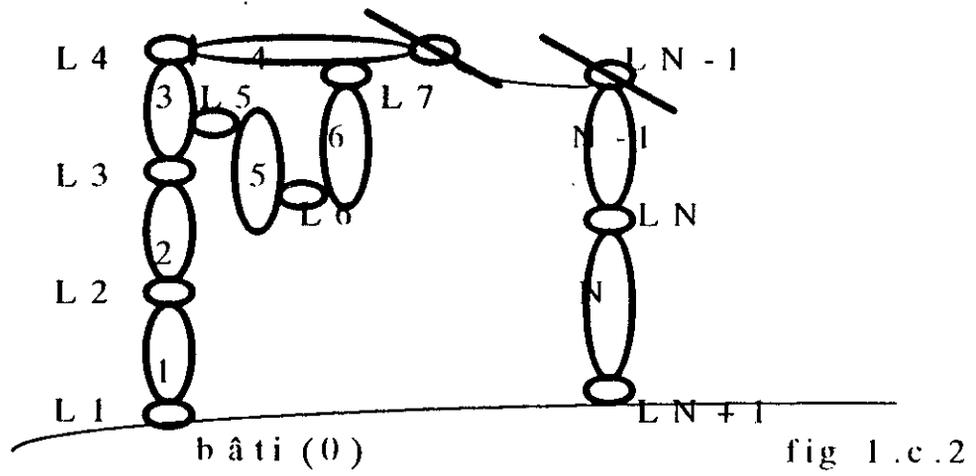
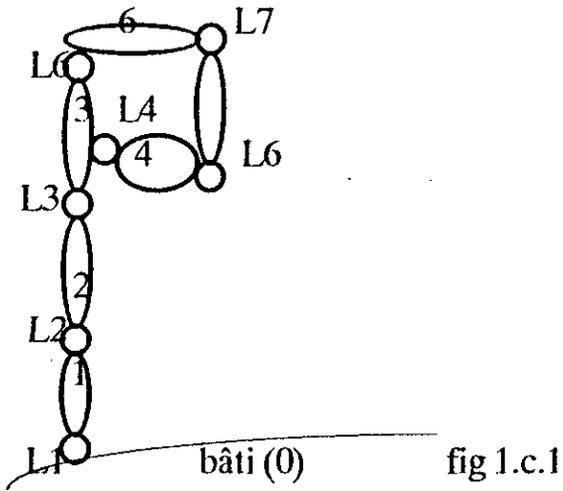


fig 1.b



I.2-ETUDE COMPARATIVE DES DIFFÉRENTES MÉTHODES DE MISE EN ÉQUATION:

I.2.1-Introduction:

Au cours de ces dernières années, et grâce au développement des diverses générations de manipulateurs et de robots industriels, ainsi que l'apparition des méthodes nouvelles d'obtention des modèles mathématiques, la dynamique des mécanismes a fait l'objet de grands projets.

La première question qui traverse l'esprit est: Qu'est ce qu'un modèle mathématique d'un robot et à quoi peut-il servir?

Un modèle est une image, le plus souvent idéalisée, d'un objet, d'une entité naturelle ou artificielle. A partir de cette définition le modèle mathématique d'un robot est une forme d'abstraction dans laquelle les relations entre les éléments réels, sont remplacées par des relations convenables appelées relations de fonctionnement du modèle. Il y'a deux principales applications en ce qui concerne la modélisation.

L'une est la commande du robot, quant à l'autre, elle concerne le développement des procédures de calcul pour l'optimisation de la conception des robots. En fait, lorsque la vitesse et l'accélération imposées à l'organe terminal du robot sont importantes, les efforts dynamiques induits par ce mouvement le seront aussi; d'où l'importance de la dynamique des manipulateurs.

Le temps d'exécution des calculs est une caractéristique essentielle de tout modèle mathématique pour la commande dynamique, cependant, ceci est moins important quand on cherche les efforts en temps différés dans un but de conception comme dans notre cas.

Remarque: Une commande optimisée nécessite non seulement des asservissements en position et en vitesse mais aussi en forces et/ou en couple qui constituent les composantes motrices du torseur dynamique au niveau de chaque liaison. Elles doivent être calculées avec une vitesse dont la fréquence est plus grande que la fréquence de résonance de l'axe correspondant.

Il existe un certain nombre de voies de formulations théoriques des équations de mouvement des systèmes mécaniques articulés.

Au fur et à mesure que l'intérêt porté aux mécanismes articulés a augmenté, des méthodes de modélisation, en régime dynamique toujours plus performantes, plus générales, plus rapides ou mieux adaptées au calcul automatique ont été publiées. Les unes plus générales, abordent toutes sortes de mécanismes, les autres, spécifiques à certains mécanismes, fournissent les équations sous des formes plus explicites. La plupart de ces méthodes de mise en équation sont destinées à répondre aux exigences posées par la commande dynamique, en particulier le temps de calcul. Du point de vue formulation théorique, ces méthodes peuvent être classées en quatre groupes principaux suivant qu'elles utilisent:

1. Les équations de LAGRANGE,
2. Les équations de NEWTON-EULER,
3. Le principe des travaux virtuels de d'ALEMBERT,
4. La notion d'énergie d'accélération ou fonction de GIBBS.

Il n'est pas de notre intention d'exposer en détail toutes ces méthodes pour deux raisons:

- Chacune d'elle est tributaire de son système de notations et il est techniquement impossible de tous les présenter;
- La méthode que nous exposons au deuxième chapitre est autonome: son système de notation est clairement défini et toutes les formules sont démontrées en ne faisant appel qu'aux équations de base de la statique et de la dynamique des solides et à l'analyse vectorielle.

I.2.2-Formalisme de NEWTON-EULER:(BOU 95)

.Équation de Newton-Euler:

L'équation de translation du mouvement est écrite pour chaque corps (i).(fig 1.2.2)

$$F_i = -FL_i + \sum_j FL_j + F_i^c$$

L'équation d'Euler est alors:

$$M_i = \sum_j C_{ij} \wedge FL_j + C_{ii} \wedge FL_b + M_i^c + \sum_j CL_j - CL_b$$

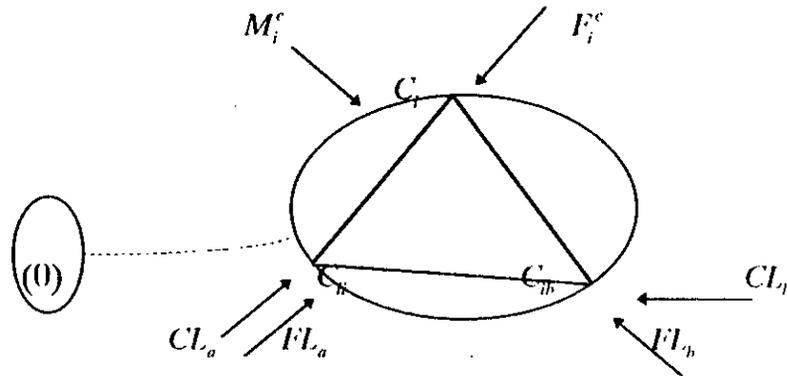


FIG I.2.2: efforts appliqués au corps isolé (i).

l : étant l'ensemble de toutes les liaisons sur le corps (i) (sauf celle qui relie le corps (i) au corps (0)). Si l'indice de cette liaison (a) est le même que l'indice du corps (i) on dira que la numérotation est régulière, en général (a=i).

- FL_a : force exercée par le corps en aval de la liaison (a) sur le corps en amont;
- CL_a : couple exercé par le corps en aval de la liaison (a) sur le corps en amont;
- C_{ii} : vecteur position du centre de masse C_i ;
- F_i^c : force extérieure appliquée au corps (i);
- M_i^c : couple extérieur appliqué au corps (i).

Bien que les équations de Newton-Euler permettent d'écrire l'équilibre d'un corps en translation et en rotation dans un espace euclidien (3 degrés de rotation et 3 degrés de translation), leur inconvénient réside dans le fait:

- Qu'elles ne permettent pas l'élimination directe des contraintes de liaisons;
- Qu'elles donnent un nombre d'équations supérieur au nombre de degrés de liberté du système.

Cependant, ces méthodes sont devenues très compétitives vis-à-vis des autres méthodes et ceci grâce au développement des méthodes de modélisation des systèmes

mécaniques articulés. Elles permettent aussi une meilleure visualisation des incréments dans les champs d'accélération et de vitesses quand on parcourt le robot dans le sens amont-aval, et le cumul des sollicitations dans le sens inverse.

I.2.3-Formalisme de d'ALEMBERT:(voir Annexe A)

Ce principe permet d'étudier le comportement dynamique des systèmes articulés en forme d'arbre topologique dont les articulations possèdent un degrés de liberté (translation ou rotation), il stipule qu'au cours d'un déplacement, le travail effectué par les forces et couples extérieurs et de gravité ainsi que les forces et couples intérieurs est nul.

Malgré sa puissance cette méthode ne fournit pas de procédure explicite pour l'obtention des équations sous forme matricielle.

I.2.4-Formalisme de GIBBS:

Cette notion d'énergie d'accélération permet d'établir simplement les équations de mouvement d'un système articulé dont les articulations possèdent un degrés de liberté (translation ou rotation), la fonction de GIBBS s'écrit:

$$G = 1/2 \iint_{\text{sys}} \|d(OM)/dt\|^2 dm \quad \text{par rapport à un repère R d'origine (o)}$$

dm : masse de la particule M.

Si C_0 est le corps fixe, la fonction de GIBBS s'écrit alors:

$$G = \sum G_i \quad (i=1, \dots, n)$$

$$G = \sum_{i=1}^n G_i$$

G_i : Fonction de GIBBS du corps C_i .

Le principal inconvénient de cette méthode est que la fonction de GIBBS (G) est plus difficile à obtenir que l'énergie cinétique dans le formalisme de LAGRANGE.

I.2.5-Formalisme de LAGRANGE:(BOU 95) ,(DAOUDI 94)

L'avantage de cette formulation est qu'elle permet l'écriture directe des équations de mouvement du système en fonction de ses grandeurs de commande et des actions extérieures sans faire intervenir les actions internes.

Son lourd inconvénient est qu'elle nécessite le calcul des dérivées partielles, ce qui explique son utilisation par beaucoup d'auteurs pour l'obtention des équations sous forme analytique.

• **Méthode proposée par M.RENAUD:**

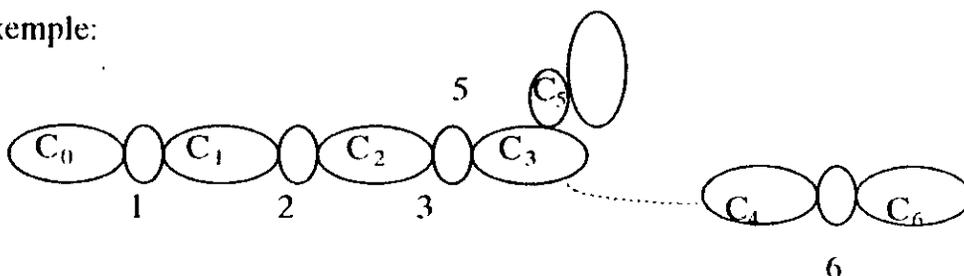
Cette méthode utilise le calcul tensoriel. La description de la structure est établie à l'aide de la matrice des successeurs $[e]$ dont les éléments sont:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1: & \text{si le corps } C_j \text{ est directement articulé sur le corps } C_i \text{ (pour } i < j) \\ 0: & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

A partir de $[e]$ on peut identifier le corps antécédent a(i) au corps (i), de ce fait est définie $[\varepsilon]$ la matrice des successeurs au sens large comme étant:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1: & \text{si le corps } i \text{ est sur la chaîne qui relie le corps (0) au corps (j)} \\ 0: & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

Exemple:



$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Chaque corps C_i est animé d'un mouvement relatif, à un degrés de liberté, soit une translation ou une rotation par rapport à son antécédent (a_i).
- Chaque corps est lié a un repère orthonormé, dont l'axe Z est par convention parallèle au vecteur qui définit le mouvement de rotation ou de translation.

L'identification de tout repère par rapport à son antécédent se fait à l'aide de trois paramètres $(\alpha, \beta, \gamma_i)$ appelés Angles d'Euler.

La matrice qui permet le passage du corps $a(i)$ au corps (i) est $[G_i]$ définie comme suit: $e^{(i)} = [G_i] e^{a(i)}$

Avec:

$$[G_i] = \begin{bmatrix} \cos\beta_i \cos\gamma_i - \sin\beta_i \cos\alpha_i \sin\gamma_i & \sin\beta_i \cos\gamma_i + \cos\beta_i \cos\alpha_i \sin\gamma_i & \sin\alpha_i \sin\gamma_i \\ -\cos\beta_i \sin\gamma_i - \sin\beta_i \cos\alpha_i \cos\gamma_i & -\sin\beta_i \sin\gamma_i + \cos\beta_i \cos\alpha_i \cos\gamma_i & \cos\alpha_i \sin\gamma_i \\ \sin\beta_i \sin\alpha_i & -\sin\alpha_i \cos\beta_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}$$

Dans cette méthode l'énergie cinétique (T) et l'énergie potentielle (U) sont calculées sous forme matricielles, après application des équations de LAGRANGE sous la forme habituelle;

$$\Gamma = \left(\frac{d(\mathcal{A} / \dot{\alpha}_j)}{dt} \right) - \mathcal{A} / \dot{\alpha}_j$$

ou L désigne le lagrangien ($L=T-U$).

A partir de cette relation RENAUD établit les équations explicites du mouvement qui sont:

$$\Gamma = [A] \ddot{j} + [B] \dot{j} \dot{q} + [C] j - G$$

dans laquelle $[A]$ représente la matrice d'énergie cinématique et G les forces de pesanteur données par: $G = \partial U / \partial q$.

Les éléments des matrices $[B]$ et $[C]$ sont calculables à partir des dérivées partielles de la matrice $[A]$.

M.RENAUD a développé une autre méthode lagrangienne pour les mécanismes en arborescence en tenant compte de:

- la définition topologique des mécanismes de LIKINS : un seul mouvement par liaison;
- des coefficients σ_i de POPOV qui permettent de traiter simultanément les rotations et les translations.

Il a, par ailleurs, proposé une meilleure organisation des calculs pour tenter de réduire les temps d'exécution. Mais, il y'a toujours cet inconvénient essentiel des méthodes lagrangiennes qui réside dans la lourdeur des équations malgré les différents travaux dont elles ont fait l'objet. Le nombre d'opérations augmente avec n^4 si n est le nombre de liaisons du système. [LEU 86], [CHANG 89]

CHAPITRE II

METHODE RECURRENTE DE CALCUL DES ACTIONS AUX LIAISONS ET DE MISE EN EQUATION

MÉTHODE RÉCURRENTÉ DE CALCUL DES ACTIONS AUX LIAISONS ET DE MISE EN ÉQUATION

II.1-INTRODUCTION:

Soit à considérer l'ensemble des $(n+1)$ corps rigides C_i de la figure (II.1) formant une chaîne continue ouverte, et dans laquelle chaque liaison L_i n'admet qu'un seul mouvement de rotation ou de translation. Cette hypothèse ne restreint pas la généralité de la méthode, que nous allons proposer, pour deux raisons:

1. Il est théoriquement toujours possible de transformer une liaison L_i à N degrés de libertés en N liaisons à mobilité unique, ceci par adjonction de $(N-1)$ corps fictifs (sans masse, voire sans géométrie) connectés simplement par des liaisons rotoïdes ou prismatiques.
2. Cette décomposition non nécessairement unique est, en général, naturellement réalisée dans les systèmes réels, surtout lorsqu'on désire commander séparément ses divers degrés de libertés.

Le modèle utilisé dans notre travail s'appuie sur le formalisme de d'Alembert pour exprimer les torseurs complets de liaisons, en régime dynamique, en fonction:

- de la résultante cinématique instantanée des liaisons,
- des données géométriques et mécaniques instantanées du système.

Le calcul de chaque torseur se fait dans le référentiel partiel propre à la liaison considérée. Les résistances aux mouvements s'en déduisent simplement du fait qu'elles coïncident nécessairement avec:

- Une composante de la résultante du torseur pour un mouvement de translation.
- Une composante de son moment pour un mouvement de rotation.

Le choix d'une C.I.G simple est nécessaire pour le repérage des variables de liaisons. En même temps, il faut caractériser les mouvements du système en

distinguant les rotations des translations et en leur attribuant, à tous, les directions (Z_i) des référentiels partiels (R_i) respectifs, attachés aux liaisons ce qui permettra de:

1. rendre les calculs plus systématiques.
2. faciliter l'écriture des équations du système (les résistances aux mouvement, couples ou forces, sur les liaisons sont toutes de directions Z_i).

Cet apparent désordre peut produire des ambiguïtés chez l'utilisateur. Pour lever cette difficulté nous allons utiliser un autre ensemble de référentiels partiels (R_{i0}) dont:

- les axes sont parallèles, désignés et orientés pareillement,
- les directions Z_{i0} sont orientées suivant la verticale ascendante.

Ces conditions serviront à la seule étape de caractérisation géométrique et mécanique du système.

II.2-MODELISATION DU SYSTEME:

La modélisation du système consiste à transformer le système réel en un ensemble de corps rigides réels ou fictifs simplement connectés entre eux par des liaisons rotoïdes ou prismatiques. Donc, on peut identifier les mouvements réels du système à une combinaison de rotations et de translations de directions axiales, dans un ensemble de référentiels partiels définis en conséquence.

II.2.1-Définition du système théorique type:

Le système est formé d'un ensemble de corps C_i ($i=1,\dots,n$) dont le i ème étant l'organe terminal interchangeable, l'indice (0) est affecté au bâti.(voir fig II.1)

Les liaisons quant à elles seront désignées par la lettre L suivie d'un numéro d'ordre croissant quand on parcourt le système dans le sens amont-aval (L_i : liaison d'ordre i).

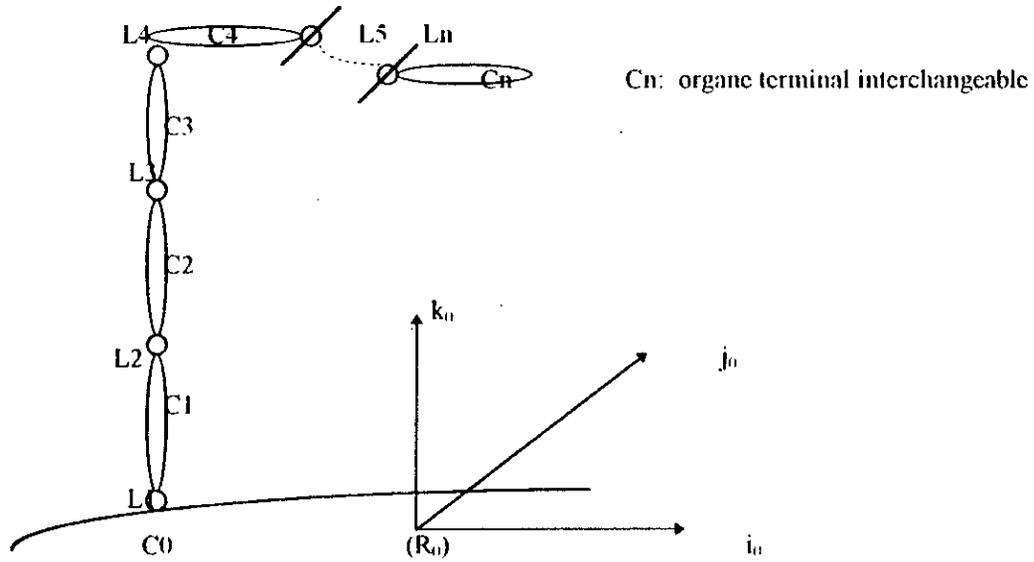


FIG II.1

II.2.2-Définition du corps C_i :

Tout corps C_i est composé de toutes les masses qui subissent le mouvement de la liaison L_i et qui sont fixes dans le mouvement de la liaison L_{i+1} . (Les deux mouvements sont pris dans le sens restreint des vitesses réelles aux niveau des liaisons).

La masse du corps C_i sera donc égale à la somme des masses de tous les éléments compris entre les deux liaisons, additionnée de la masse du groupe motoréducteur, actionneur du mouvement de:

- la liaison L_{i+1} si ce mouvement est une rotation ou une translation communiquée à sa partie mâle. (fig II.2.a)
- la liaison L_i si ce mouvement est une translation communiquée à sa partie femelle. (fig II.2.b)

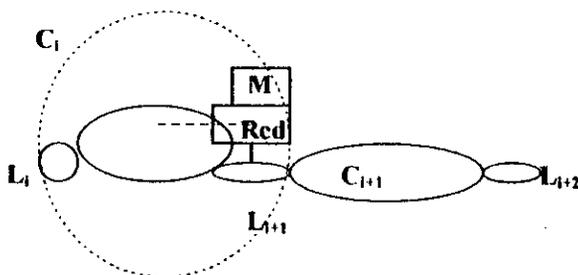


Fig II.2.a

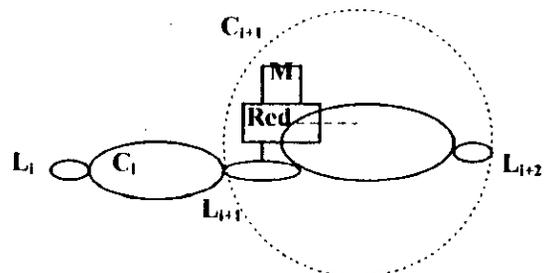


Fig II.2.b

II.2.3-Définition des référentiels partiels aux liaisons:

Ils sont au nombre de $2n$, tous orthonormés et directs. A chaque liaison L_i du système on attache deux référentiels partiels (R_{i0}) et (R_i) tous deux de même origine (O_i) située sur l'axe de liaison et en un point particulier:

- dans le plan d'un palier où
- à mi-distance de ses deux paliers.

Le passage de R_{i0} dans R_i est réalisé à tout instant par le produit de trois matrices de rotation utilisant les angles d'EULER $(\psi_i, \phi_i, \theta_i)$. Les angles ψ_i et ϕ_i sont constants et propres à la topologie du système ; ils peuvent être nuls.

Les n triplets $(\psi_i, \phi_i, \theta_i)$ donnent les orientations relatives des mouvements et permettent de passer d'un référentiel de calcul à un autre.

II.2.4-Matrice de passage de R_{i0} dans R_i :

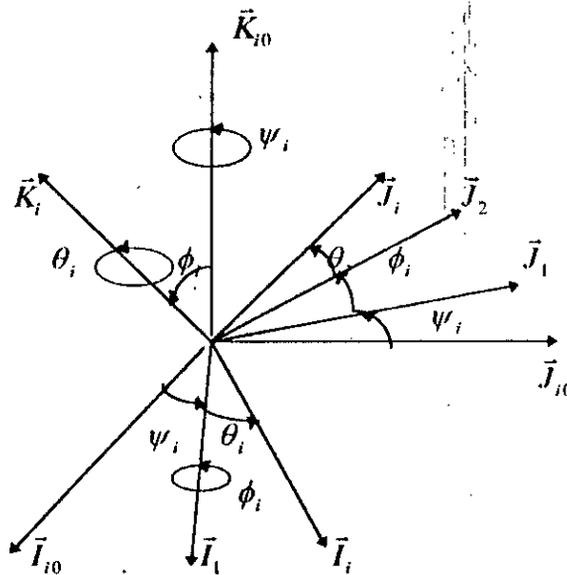


Fig II.3.1: Relations entre les référentiels R_{i0} et R_i

Conformément à la fig II.3.1, soit:

- $(\vec{I}_{i0}, \vec{J}_{i0}, \vec{K}_{i0})$ et $(\vec{I}_i, \vec{J}_i, \vec{K}_i)$ les vecteurs de base des référentiels R_{i0} et R_i ,
- $(\vec{I}_1, \vec{J}_1, \vec{K}_1)$ et $(\vec{I}_2, \vec{J}_2, \vec{K}_2)$ les vecteurs de base des deux référentiels intermédiaires R_1 et R_2 .
- ψ_i, ϕ_i, θ_i sont les trois angles d'EULER réalisant le passage de R_{i0} dans R_i et sont définis comme suit:

ψ_i : rotation d'axe \vec{Z}_{i0} , ψ_i est appelé angle de Précession,

ϕ_i : rotation d'axe \vec{X}_1 , ϕ_i est appelé angle de Nutation,

θ_i : rotation d'axe \vec{Z}_i , θ_i est appelé angle de Rotation propre.

D'ou les trois matrices suivantes:

$$M\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}, \quad M\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de passage du référentiel R_{i0} dans le référentiel R_i , qu'on notera $M_{i0,i}$ résultera du produit de ces trois matrices: $M_{i0,i} = M\theta \cdot M\phi \cdot M\psi$.

Posons $c=\cos$ et $s=\sin$, ainsi on aura:

$$M_{i0,i} = \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\psi - s\theta \cdot s\psi \cdot c\phi & c\theta \cdot s\psi + s\theta \cdot c\psi \cdot c\phi & s\theta \cdot s\phi \\ -s\theta \cdot c\psi - s\psi \cdot c\theta \cdot c\phi & -s\psi \cdot s\theta + c\psi \cdot c\theta \cdot c\phi & c\theta \cdot s\phi \\ s\phi \cdot s\psi & -s\phi \cdot c\psi & c\phi \end{bmatrix}$$

II.2.5-Matrice de passage entre les référentiels de calcul :

Les deux triplets $(\psi_i, \phi_i, \theta_i)$ et $(\psi_{i+1}, \phi_{i+1}, \theta_{i+1})$ permettent de passer à tout instant et respectivement de R_{i0} dans R_i et de $R_{(i+1)0}$ dans $R_{(i+1)}$. θ_i et θ_{i+1} sont les variables de rotation aux liaisons L_i et L_{i+1} .

En raison des conditions imposées aux référentiels partiels de calcul R_i (tous les mouvements sont de direction Z_i); les référentiels $R_{(i+1)0}$ et $R_{(i+1)}$ subissent le mouvement θ_{i+1} de la liaison L_{i+1} .

La matrice de passage $M_{i,(i+1)}$ de R_i dans $R_{(i+1)}$ sera donc le produit de deux matrices:

1. $M_{\theta_{i+1}}$: matrice de rotation d'axe Z_{i+1} et en fonction de la variable de rotation éventuelle θ_{i+1} sur la liaison L_{i+1} .
2. $M_{i,i+1}^0$: matrice de passage de R_i^0 dans R_{i+1}^0 avec $\theta_{i+1} = 0$; ses termes sont constants et dépendent uniquement de la topologie du système et du choix initial des référentiels partiels R_{i0} et R_i .

Les matrices de passage entre deux référentiels consécutifs R_i et R_{i+1} sont au nombre de n et toutes orthogonales. Ce qui leur confère les particularités suivantes:

- leurs matrices inverses sont égales à leur transposées;
- le résultat du produit de deux matrices d'entre-elles sera une matrice orthogonale.

II.3-CARACTERISATIONS GÉOMÉTRIQUES ET MÉCANIQUE DU SYSTÈME:

II.3.1-Choix d'une configuration initiale géométrique (C.I.G):

Elle doit correspondre à la configuration géométriquement la plus simple choisie de telle sorte que:

- les distances interliaisons soient minimales (variables de translation aux liaisons nulles);
- les matrices de passage de R_{i0} dans R_i soient dans leurs formes les plus simples (variables de rotation (θ_i) aux liaisons nulles).

C'est dans cette configuration qu'on réalise la caractérisation complète du système géométrique et mécanique et où tous les termes du tenseur d'inertie ainsi que les composantes des vecteurs positions des centres de masse des corps C_i y prennent leurs valeurs minimales.

II.3.2-Caractérisation des mouvements du système:

Après la modélisation du système qui est réalisée de telle sorte qu'au niveau de toute liaison L_i , réelle ou fictive, le mouvement soit une rotation ou une translation axiale, et le choix d'une configuration initiale géométrique, ainsi que celle des référentiels de calcul R_i d'une façon à ce que tous les mouvements soient de direction Z_i , le problème qui se pose est: Comment distinguer les mouvements de rotation des mouvements de translation?

La solution consiste en l'utilisation des coefficients de EP.POPOV et ALIJ définis comme suit:

$$\sigma_i = \begin{cases} 0: & \text{si le mouvement de la liaison } L_i \text{ est une translation.} \\ 1: & \text{si le mouvement de la liaison } L_i \text{ est une rotation.} \end{cases}$$

II.3.3-Définition des coordonnées générales du système:

Soit $[\sigma]$ et $[\bar{\sigma}]$ les deux matrices diagonales d'ordre n , ayant respectivement pour éléments les quantités scalaires σ_i et $\bar{\sigma}_i = 1 - \sigma_i$ avec σ_i préalablement défini. (θ) et (Z) sont les deux matrices colonnes d'ordre n ayant respectivement pour éléments les variables θ_i et z_i de rotation ou de translation aux liaisons L_i .

La matrice colonne (q) d'ordre n ayant pour éléments les coordonnées générales, est donnée par l'expression suivante:

$$(q) = [\sigma] \cdot (\theta) + [\bar{\sigma}] \cdot (Z) \quad (3.3)$$

Si $\sigma_i = 1$ ($\bar{\sigma}_i = 0$); la quantité scalaire q_i s'identifie à la variable de rotation (en radians) sur la liaison L_i .

Si $\sigma_i = 0$ ($\bar{\sigma}_i = 1$); la quantité scalaire q_i s'identifie à la variable de translation (en m) sur la liaison L_i .

Les matrices (\dot{q}) et (\ddot{q}) d'ordre n regroupent sous forme scalaire les vitesses (w_i, v_i) et les accélérations (ζ_i, γ_i) .

II.3.4-Caractérisation géométrique du système:

La caractérisation des mouvements du système est donnée par:

:

- leurs orientations dans leurs référentiels partiels respectifs (tous de directions Z_i);
- leurs natures : rotations ou translations axiales (coefficients σ_i).

En complément de la nature des mouvements du système, la caractérisation géométrique de celui-ci est complétée par:

1. les $(n+1)$ vecteurs translations \vec{d}_i entre les origines O_i des référentiels partiels R_i ($i=0,n$), chacun d'eux étant exprimé dans le référentiel partiel dont il porte l'indice; les n vecteurs positions $\vec{P}g_i$ des centres de masse des corps C_i , chacun d'eux étant exprimé dans le référentiel partiel R_i dont il porte l'indice. (Voir figure II.3.4)

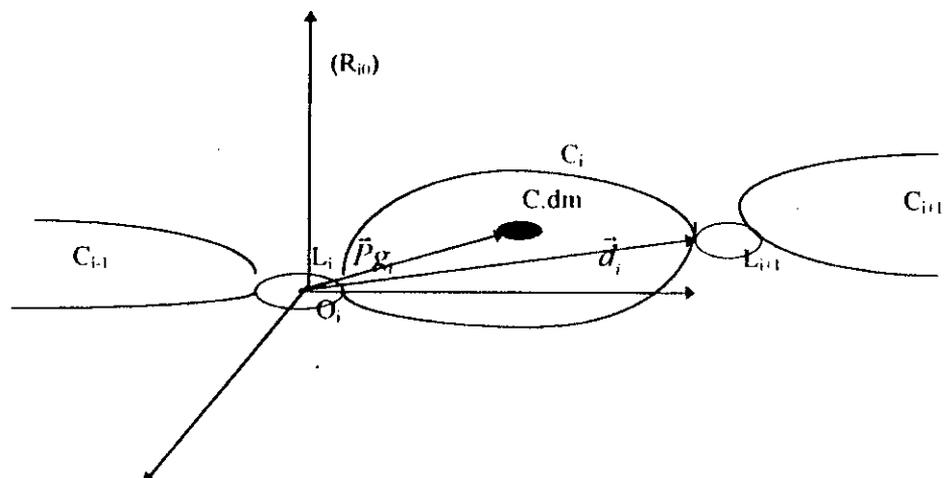


Fig II.3.4 : définition des vecteurs \vec{d}_i et $\vec{P}g_i$

Les vecteurs \vec{d}_i et $\vec{P}g_i$ sont susceptibles d'évoluer quand l'un et/ou l'autre des mouvements aux liaisons L_i et L_{i+1} est une translation, c'est pour cette raison et dans le but de réduire les risques d'erreurs lors de l'introduction des données que le système est caractérisé dans:

- la configuration initiale géométrique du système où les vecteurs $\vec{P}g_{i0}$ et \vec{d}_{i0} sont minimaux;
- les référentiels intermédiaires R_{i0} .

II.3.5-Caractérisation des influences des mouvements de translations:

Dans le but de caractériser les influences des mouvements de translations sur la géométrie du système, nous introduisons (n+1) couples de coefficients (λ_i, μ_i) définis comme suit:

$$\lambda_i: \begin{cases} 0: \text{ quand } \vec{d}_i \text{ et } \vec{P}g_i \text{ sont des vecteurs constants; mouvement de rotation} \\ \text{sur la liaison } L_i \text{ ou mouvement de translation communiqué à sa partie femelle.} \\ 1: \text{ quand } \vec{d}_i \text{ et } \vec{P}g_i \text{ varient avec le mouvement de translation sur la liaison } L_i. \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\mu_i: \begin{cases} 0: \text{ quand le mouvement sur la liaison } L_{i+1} \text{ n'influence pas la distance } \vec{d}_i \text{ entre les liaisons } L_i \text{ et } L_{i+1} \\ 1: \text{ quand le mouvement de la liaison } L_{i+1} \text{ influence la distance } \vec{d}_i. \end{cases}$$

NOTA: Les positions des centres de masse des corps C_i données par les vecteurs $\vec{P}g_i$, dans les référentiels R_i , sont indépendantes des mouvements de translation éventuels des liaisons qui sont en aval immédiat.

II.3.6-Données mécaniques du système:

Les données mécaniques du système comportent deux groupes:

- Les masses et les tenseurs d'inertie des corps.
- Les rapports de réduction, les inerties des chaînes cinématiques, les frottements secs et visqueux.

NOTA: Les tenseurs d'inertie à considérer sont ceux des corps C_i en C.I.G, calculés dans les référentiels intermédiaires R_{i0} et à leurs origines respectives O_i . Ils sont désignés par (MI_{i0}) .

II.3.7-Expression des données géométriques et mécaniques du système dans R_i :

L'ensemble des matrices permettant de ramener les données géométriques et mécaniques du système dans les référentiels de calculs R_i et en C.I.G sont notées par $M_{i0,i}^0$ ($\theta_i = 0$), définis comme suit:

$$M_{i0,i}^0 = \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi \cdot c\phi & c\psi \cdot c\phi & s\phi \\ s\psi \cdot s\phi & -s\phi \cdot c\psi & c\phi \end{bmatrix}$$

donc on aura:

$$\bar{P}g_{i0,i} = M_{i0,i}^0 \cdot \bar{P}g_{i0,0} \quad (3.7)$$

$$\bar{d}_{i0,i} = M_{i0,i}^0 \cdot \bar{d}_{i0,0} \quad (3.8)$$

$$MI_{i0,i} = (M_{i0,i}^0)^T \cdot MI_{i0,0} \cdot (M_{i0,i}^0) \quad (3.9)$$

II.4-VALEURS INSTANTANNEES DES COMPOSANTES DES VECTEURS

$\bar{P}g_i$ ET \bar{d}_i ET MI_i :

a-Valeurs instantannées des composantes du vecteur $\bar{P}g_i$:

La connaissance des valeurs instantannées du vecteur $\bar{P}g_i$, dans R_i est indispensable pour l'écriture des équations de mouvements sur la liaison portante de chaque corps C_i .

A partir des expressions (3.3), (3.5) et (3.7) on a:

$$\bar{P}g_i = \bar{P}g_{i0,i} + \lambda_i \cdot q_i \cdot \bar{k}_i \quad (4.1)$$

avec :

$\bar{P}g_{i0,i}$:vecteur position du centre de masse du corps C_i en C.I.G et exprimé en R_i ;

- λ_i : coefficient caractérisant l'influence des mouvements de translation;
- q_i : $i^{\text{ème}}$ coordonnée générale du système;
- \vec{k}_i : $3^{\text{ème}}$ vecteur de base du référentiel R_i .

b-Valeurs instantannées des composantes du vecteur \vec{d}_i :

Les composantes des vecteurs translation \vec{d}_i entre les origines des référentiels de calcul R_i et R_{i+1} sont, dans le cas général, fonction des variables d'éventuelles translations propres aux liaisons L_i et L_{i+1} .

Les vecteurs \vec{d}_i exprimés dans leurs référentiels respectifs, sont nécessaires pour l'étude cinématique du système: position, vitesse et accélération de chaque point du système dans le référentiel inertiel.

$$\vec{d}_i = \vec{d}_{i0,i} + \lambda_i \cdot q_i \cdot \vec{k}_i + \mu_i \cdot q_{i+1} \cdot M_{i,i+1}^T \cdot \vec{k}_{i+1} \quad (4.2)$$

avec :

$\vec{d}_{i0,i}$: vecteur translation entre les origines des référentiels R_i et R_{i+1} , exprimé dans R_i ;

\vec{k}_i et \vec{k}_{i+1} : $3^{\text{èmes}}$ vecteurs de base des référentiels R_i et R_{i+1} respectivement;

q_i et q_{i+1} : variables de translations éventuelles Z_i et Z_{i+1} aux liaisons L_i et L_{i+1} ;

$M_{i,i+1}$: matrice de passage de R_i dans R_{i+1} ;

λ_i, μ_i : coefficients caractérisant l'influence des mouvements de translation.

c-Valeurs instantannées des termes des matrices d'inertie des corps C_i :

Les moments d'inertie et les moments centrifuges sont fonction du mouvement de translation éventuelle sur sa liaison amont L_i ($\lambda_i = 1$). Il faut donc les recalculer à tout instant.

D'après les expressions (3.9), (4.1) et avec une double application du théorème de HUYGENS et en utilisant les matrices pré-produit vectoriel; on a:

$$\begin{aligned}
 MI_i &= MI_{i0,i} + m_i \left[[\vec{P}g_i] \cdot [-\vec{P}g_i] - [\vec{P}g_{i0}] \cdot [-\vec{P}g_{i0}] \right] \\
 &= (MI_i)_{G_i} + m_i [\vec{P}g_i] \cdot [-\vec{P}g_i]
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

$(MI_i)_{G_i}$: matrice d'inertie du corps C_i dans R_i et au centre de masse.

II.5-DEVELOPPEMENT DE LA METHODE DE CALCUL DES TORSEURS DES ACTIONS AUX LIAISONS:

II.5.1-Cinématique d'un point P quelconque du système: position, vitesse et accélération dans le référentiel inertiel R_0 :

Soit:

- P : un point fixe appartenant au corps C_i du système et de coordonnées X, Y, Z dans le référentiel R_i attaché à C_i ;
- $\vec{O}_i\vec{P}$: le vecteur position du point P dans R_i .

a-Position du point P dans R_0 :

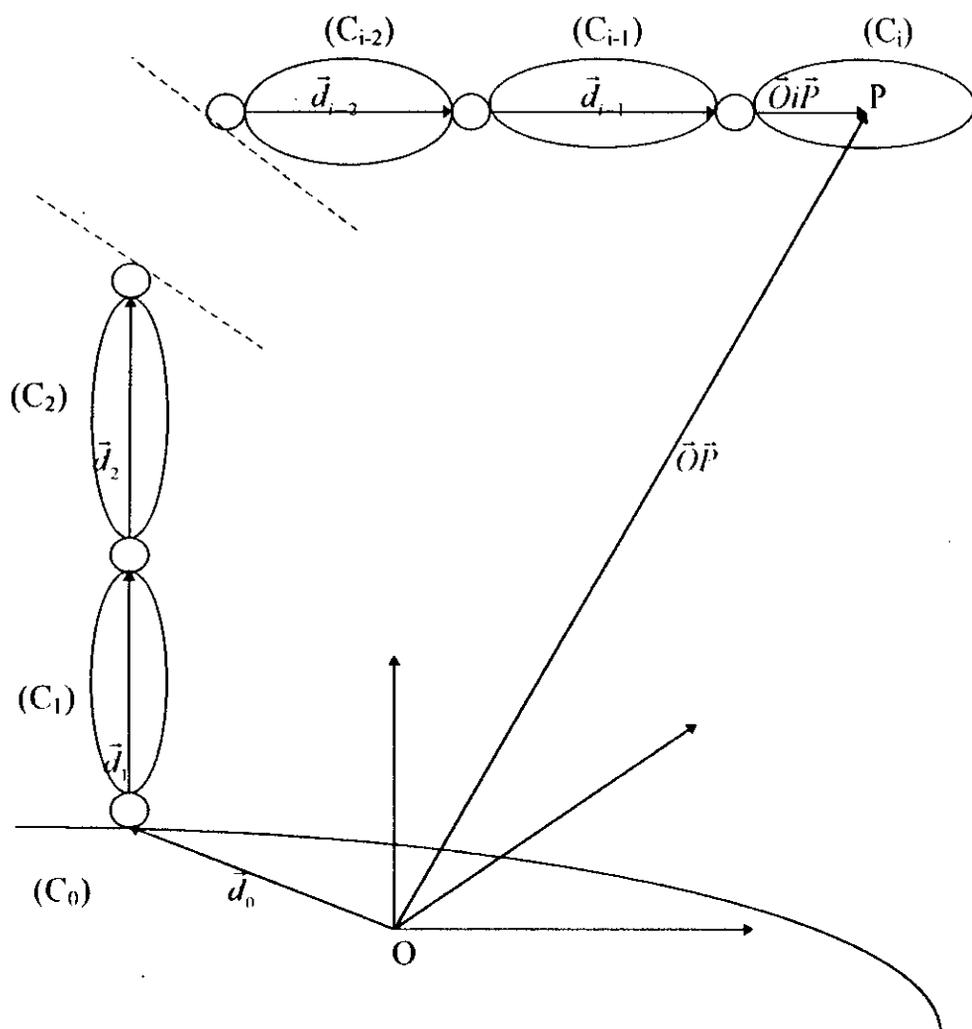
La position du point P est repérée, à tout instant, dans le référentiel inertiel R_0 , par le vecteur $\vec{O}\vec{P}$.

Le point P appartient au corps C_i d'où:

$$\vec{O}\vec{P} = \sum_{j=1}^i \vec{d}_j + \vec{O}_i\vec{P}
 \tag{5.1}$$

avec:

$$\vec{O}_i\vec{P} = (X, Y, Z)_{R_i} = (\vec{O}_i\vec{P})_0 + \lambda_i \cdot q_i \cdot \vec{k}_i$$



$$\vec{d}_j = \vec{d}_{j^0, j} + \lambda_i \cdot q_i \cdot \vec{k}_i + \mu_j \cdot q_{j+1} \cdot M_{j, j+1}^T \cdot \vec{k}_{j+1}$$

Les vecteurs \vec{d}_j et $\vec{O}_i\vec{P}$ sont respectivement calculés et connus dans les référentiels de calcul R_j ($j < i-1$) et R_i . Il faut donc utiliser les matrices de passage pour exprimer $\vec{O}_i\vec{P}$ dans R_0 .

$$(\vec{O}_i\vec{P})_{R_0} = \sum_{j=0}^{i-1} M_{j^0} \cdot \vec{d}_j + M_{i^0} \cdot \vec{O}_i\vec{P} \quad (5.2)$$

En ne faisant intervenir que les matrices de passage entre deux référentiels consécutifs dans le but d'obtenir une forme plus adaptée au calcul automatique, l'expression (5.2) devient alors:

$$(\vec{O}_i\vec{P})_{R_0} = \vec{d}_0 + M_{01}^T (\vec{d}_1 + M_{12}^T (\vec{d}_2 + \dots + M_{i-1, i}^T \cdot \vec{O}_i\vec{P}) \dots) \quad (5.3)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{O}\vec{P}) = \sum_{j=1}^l (\vec{\Omega}_j \wedge \vec{d}_j + \vec{\sigma}_j \cdot \dot{q}_j \cdot \vec{k}_j) + \vec{\Omega}_i \wedge \vec{O}i\vec{P} + \vec{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \vec{k}_i \quad (5.5)$$

avec:

$$\vec{\Omega}_j = \sum_{k=1}^j \omega_k \cdot \vec{k}_k$$

avec ω_k : vitesse de rotation sur la liaison L_j .

Écrit en fonction des dérivées des coordonnées générales du système, $\vec{\Omega}_j$ devient:

$$\vec{\Omega}_j = \sum_{k=1}^j \sigma_k \cdot \dot{q}_k \cdot \vec{k}_k \quad (5.6)$$

σ_k : coefficient de EP.POPOV et ALIJ déjà défini en (§ II.3.2) d'où:

$$\frac{d}{dt}(\vec{O}\vec{P}) = \sum_{j=1}^l M_{j0} (\vec{\Omega}_j \wedge \vec{d}_j + \vec{\sigma}_j \cdot \dot{q}_j \cdot \vec{k}_j) + M_{i0} (\vec{\Omega}_i \wedge \vec{O}i\vec{P} + \vec{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \vec{k}_i) \quad (5.7)$$

Les calculs seront faits par bloc dans les référentiels partiels R_j avant de ramener tous les résultats dans le référentiel inertiel R_0 , en utilisant les matrices de passages.

Ces résultats partiels sont cumulés pour déterminer les composantes de la vitesse absolue du point P.

Les vecteurs rotation $\vec{\Omega}_j$ des référentiels R_j peuvent être calculés par récurrence dans leur référentiels respectifs.

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_j &= \sum M_{kj} \cdot (\sigma_k \cdot \dot{q}_k \cdot \vec{k}_k) && \text{expression de } \vec{\Omega}_j \text{ dans } R_j \\ \vec{\Omega}_j &= M_{(j-1),j} \cdot \vec{\Omega}_{j-1} + \sigma_j \cdot \dot{q}_j \cdot \vec{k}_j \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ce qui nous permet de calculer la vitesse du point P par itérations successives dans une boucle comme suit:

$$\left[\frac{d}{dt}(\vec{O}\vec{P}) \right]_{R_0} = M_{01}^T (\vec{\Omega}_1 \wedge \vec{d}_1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \dot{q}_1 \cdot \vec{k}_1 + M_{12}^T (\vec{\Omega}_2 \wedge \vec{d}_2 + \vec{\sigma}_2 \cdot \dot{q}_2 \cdot \vec{k}_2 + \\ + M_{23}^T (\vec{\Omega}_3 \wedge \vec{d}_3 + \vec{\sigma}_3 \cdot \dot{q}_3 \cdot \vec{k}_3 + \dots + M_{l-1,l}^T (\vec{\Omega}_l \wedge \vec{O}i\vec{P} + \vec{\sigma}_l \cdot \dot{q}_l \cdot \vec{k}_l) \dots)) \quad (5.9)$$

c-Accélération du point P dans R₀:

Le vecteur accélération du point P s'obtient par dérivation vectorielle de son vecteur vitesse $\frac{d}{dt}(\vec{O}\vec{P})$.

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{O}\vec{P}) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \vec{\Omega}_j \wedge \vec{d}_j + \vec{\sigma}_j \cdot \dot{q}_j \cdot \vec{k}_j \right) + \frac{d}{dt} \left(\vec{\Omega}_i \wedge \vec{O}i\vec{P} + \vec{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \vec{k}_i \right) \quad (5.10)$$

Le calcul pour chaque terme étant fait séparément, on obtient:

- $\frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_j \wedge \vec{d}_j) = \left(\frac{d}{dt} \vec{\Omega}_j \right) \wedge \vec{d}_j + \vec{\Omega}_j \wedge \left(\frac{d}{dt} \vec{d}_j \right)$

avec:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_j) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^j \sigma_k \cdot \dot{q}_k \cdot \vec{k}_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^j \sigma_k \cdot \ddot{q}_k \cdot \vec{k}_k + \left(\sum_{k=1}^j \vec{\Omega}_k \wedge (\sigma_k \cdot \dot{q}_k \cdot \vec{k}_k) \right) \\ &= \vec{E}_j + \vec{U}_j \end{aligned}$$

$$\left[\frac{d}{dt}(\vec{d}_j) \right] = \vec{\Omega}_j \wedge \vec{d}_j + \vec{\sigma}_j \cdot \dot{q}_j \cdot \vec{k}_j$$

- $\left[\frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_j \cdot \dot{q}_j \cdot \vec{k}_j) \right] = \vec{\sigma}_j \cdot \ddot{q}_j \cdot \vec{k}_j + \vec{\Omega}_j \wedge (\vec{\sigma}_j \cdot \dot{q}_j \cdot \vec{k}_j)$

- $\left[\frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_i \wedge \vec{O}i\vec{P}) \right] = \left(\frac{d}{dt} \vec{\Omega}_i \right) \wedge \vec{O}i\vec{P} + \vec{\Omega}_i \wedge \left(\frac{d}{dt} \vec{O}i\vec{P} \right)$
 $= \left[\sum_{k=1}^j \sigma_k \cdot \ddot{q}_k \cdot \vec{k}_k + \left(\sum_{k=1}^j \vec{\Omega}_k \wedge (\sigma_k \cdot \dot{q}_k \cdot \vec{k}_k) \right) \right] \wedge \vec{O}i\vec{P} + \vec{\Omega}_i \wedge (\vec{\Omega}_i \wedge \vec{O}i\vec{P} + \vec{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \vec{k}_i)$

- $\frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \vec{k}_i) = \vec{\sigma}_i \cdot \ddot{q}_i \cdot \vec{k}_i + \vec{\Omega}_i \wedge (\vec{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \vec{k}_i)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\vec{O}\vec{P}) &= \sum_{j=1}^{i-1} (\vec{E}_j + \vec{U}_j) \wedge \vec{d}_j + \vec{\Omega}_j \wedge (\vec{\Omega}_j \wedge \vec{d}_j + \vec{\sigma}_j \cdot \dot{q}_j \cdot \vec{k}_j) + \vec{\sigma}_j \cdot \ddot{q}_j \cdot \vec{k}_j + \vec{\Omega}_j \wedge (\vec{\sigma}_j \cdot \dot{q}_j \cdot \vec{k}_j) + \\ &\quad + (\vec{E}_i + \vec{U}_i) \wedge \vec{O}i\vec{P} + \vec{\Omega}_i \wedge (\vec{\Omega}_i \wedge \vec{O}i\vec{P} + \vec{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \vec{k}_i) + \vec{\sigma}_i \cdot \ddot{q}_i \cdot \vec{k}_i + \vec{\Omega}_i \wedge (\vec{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \vec{k}_i) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{O}\vec{P}) = \sum_{j=1}^{i-1} \left[\left(\vec{E}_j + \vec{U}_j \right) \wedge \vec{d}_j + \vec{\Omega}_j \wedge \left(\vec{\Omega}_j \wedge \vec{d}_j \right) + 2\vec{\Omega}_j \wedge \left(\vec{\sigma}_j \cdot \dot{q}_j \cdot \vec{k}_j \right) + \vec{\sigma}_j \cdot \dot{q}_j \cdot \vec{k}_j \right] + \left(\vec{E}_i + \vec{U}_i \right) \wedge \vec{O}i\vec{P} + \vec{\Omega}_i \wedge \left(\vec{\Omega}_i \wedge \vec{O}i\vec{P} \right) + 2\vec{\Omega}_i \wedge \left(\vec{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \vec{k}_i \right) + \vec{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \vec{k}_i \quad (5.11)$$

Significations des différents termes:

1. $\vec{E}_j = \sum_{k=1}^j \sigma_k \cdot \ddot{q}_k \cdot \vec{k}_k$: vecteur accélération angulaire du référentiel R_j .

$$\sigma_k \cdot \ddot{q}_k = \begin{cases} \varepsilon_k & \text{si } \sigma_k = 1 : \text{accélération angulaire sur la liaison } L_k, \text{ de direction } Z_k \text{ dans } R_k. \\ 0 & \text{si } \sigma_k = 0 \end{cases}$$

$\vec{E}_j = M_{j-1,j} \cdot \vec{E}_{j-1} + \sigma_j \cdot \ddot{q}_j \cdot \vec{k}_j$ (5.12) : forme récurrente de calcul des vecteurs \vec{E}_j dans leurs référentiels respectifs R_j .

2. $\sum_{j=1}^{i-1} \vec{E}_j \wedge \vec{d}_j$: accélération tangentielle de la liaison L_j due aux accélérations angulaires ε_k des (i-1) premières liaisons du système.

$$3. \vec{U}_j = \sum_{k=1}^j \vec{\Omega}_k \wedge \left(\sigma_k \cdot \dot{q}_k \cdot \vec{k}_k \right)$$

$\sigma_k \cdot \dot{q}_k \cdot \vec{k}_k$: correspond à la vitesse de rotation $\vec{\omega}_k$ sur la liaison L_k .

\vec{U}_j : termes de couplage entre les mouvements de rotation.

$\vec{U}_j = M_{j-1,j} \cdot \vec{U}_{j-1} + \vec{\Omega}_j \wedge \left(\sigma_j \cdot \dot{q}_j \cdot \vec{k}_j \right)$ (5.13) : forme récurrente des vecteurs \vec{U}_j dans leurs référentiels respectifs R_j .

4. $\sum_{j=1}^{i-1} \vec{U}_j \wedge \vec{d}_j$: première part des accélérations de CORIOLIS de la liaison L_j due aux couplages entre les vitesses de rotation des (j-1) liaisons du système.

5. $\sum_{j=1}^{i-1} \vec{\Omega}_j \wedge \left(\vec{\Omega}_j \wedge \vec{d}_j \right)$: deuxième part des accélérations de CORIOLIS et accélérations centripètes de la liaison L_j .

6. $\sum_{j=1}^{i-1} \vec{\sigma}_j \cdot \ddot{q}_j \cdot \vec{k}_j$: vecteur accélération linéaire de la liaison L_j , dû aux mouvements de translation sur les (j-1) premières liaisons.

7. $2 \sum_{j=1}^{i-1} \bar{\Omega}_j \wedge (\bar{\sigma}_j \cdot \dot{q}_j \cdot \bar{k}_j)$: accélérations de CORIOLIS de la liaison L_j combinant les rotations et les translations des (j-1) liaisons en amont.

Les quatre derniers termes de l'équation des accélérations sont équivalents à ceux qui viennent d'être cités et prennent en compte:

- la position du point $P \in C_i$ dans R_i ;
- la vitesse et l'accélération propres au mouvement de la liaison L_i ;
- les couplages entre le mouvement de la liaison L_i et ceux des (i-1) liaisons en amont.

On pose dans R_j :

$$\bar{G}_j = (\bar{E}_j + \bar{U}_j) \wedge \bar{d}_j + \bar{\Omega}_j \wedge (\bar{\Omega}_j \wedge \bar{d}_j) + 2\bar{\Omega}_j \wedge (\bar{\sigma}_j \cdot \dot{q}_j \cdot \bar{k}_j) + \bar{\sigma}_j \cdot \ddot{q}_j \cdot \bar{k}_j \quad (5.14)$$

avec:

$$\bar{E}_j = M_{j-1,j} \cdot \bar{E}_{j-1} + \sigma_j \cdot \ddot{q}_j \cdot \bar{k}_j$$

$$\bar{\Omega}_j = M_{j-1,j} \cdot \bar{\Omega}_{j-1} + \sigma_j \cdot \dot{q}_j \cdot \bar{k}_j$$

$$\bar{U}_j = M_{j-1,j} \cdot \bar{U}_{j-1} + \bar{\Omega}_j \wedge (\sigma_j \cdot \dot{q}_j \cdot \bar{k}_j)$$

En regroupant tous les termes et les expressions présentées, l'accélération du point P sera donnée par:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\bar{O}\bar{P}) = \sum_{j=1}^{i-1} \bar{G}_j + (\bar{E}_i + \bar{U}_i) \wedge \bar{O}i\bar{P} + \bar{\Omega}_i \wedge (\bar{\Omega}_i \wedge \bar{O}i\bar{P}) + 2\bar{\Omega}_i \wedge (\bar{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \bar{k}_i) + \bar{\sigma}_i \cdot \ddot{q}_i \cdot \bar{k}_i \quad (5.15)$$

Les termes de l'expression (5.15) seront calculés dans les référentiels partiels dont ils portent les indices.

$$\frac{d^2}{dt^2}(\bar{O}\bar{P})_{R_n} = \sum_{j=1}^{i-1} M_{j0} \cdot \bar{G}_j + M_{i0} \cdot \left[(\bar{E}_i + \bar{U}_i) \wedge \bar{O}i\bar{P} + \bar{\Omega}_i \wedge (\bar{\Omega}_i \wedge \bar{O}i\bar{P}) + 2\bar{\Omega}_i \wedge (\bar{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \bar{k}_i) + \bar{\sigma}_i \cdot \ddot{q}_i \cdot \bar{k}_i \right]$$

Cette dernière expression est notée par (5.15.1)

II.5.2-Torseur des actions différentielles sur la liaison L_i :

Le torseur des actions différentielles sur la liaison L_i , désignera l'ensemble des sollicitations statiques et dynamiques dues au seul corps C_i en aval immédiat, qui subit les i premiers mouvements du système et est soumis à l'effet de la pesanteur.

Soit P un point courant de C_i , de coordonnées (X, Y, Z) et dont le vecteur position est $\vec{O}_i\vec{P}$ exprimé dans le référentiel partiel R_i (lié au corps C_i), le vecteur accélération de ce point est donné par l'expression suivante:

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}(\vec{O}_i\vec{P}) \right] = \sum_{j=1}^{i-1} \vec{G}_j + \left[(\vec{E}_i + \vec{U}_i) \wedge \vec{O}_i\vec{P} + \vec{\Omega}_i \wedge (\vec{\Omega}_i \wedge \vec{O}_i\vec{P}) + 2\vec{\Omega}_i \wedge (\vec{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \vec{k}_i) + (\vec{\sigma}_i \cdot \ddot{q}_i \cdot \vec{k}_i) \right]$$

Elle est notée par: (5.15.2)

On remarque dans ce qui précède, que le vecteur est indépendant des composantes X, Y, Z (coordonnées du point P).

On pose: $\vec{G}_i = \sum_{j=1}^{i-1} \vec{G}_j$

D'où: $\vec{G}_i = M_{i-1,i}(\vec{G}_{i-1} + M_{i-2,i-1}(\vec{G}_{i-2} + \dots + (M_{2,3}\vec{G}_2 + M_{1,2}\vec{G}_1) \dots))$ (5.15.3)

Pour prendre en compte les effets de la pesanteur, l'introduction du vecteur \vec{G}_0 , orienté suivant la verticale ascendante dans le référentiel R_0 s'avère indispensable.

$$\vec{G}_0 = g \cdot \vec{k}_0 \quad (g=9.81 \text{ m/s}^2 : \text{accélération terrestre})$$

L'expression (5.15.3) devient:

$$\vec{G}_i = \sum_{j=0}^{i-1} M_{j,i} \cdot \vec{G}_j = M_{i-1,i}(\vec{G}_{i-1} + M_{i-2,i-1}(\vec{G}_{i-2} + \dots + M_{1,2}(\vec{G}_1 + M_{0,1}\vec{G}_0) \dots))$$
 (5.16)

(5.16.bis) $(\vec{G}_i)_{R_i} = M_{i-1,i}(\vec{G}_{i-1} + \vec{G}_0)_{R_{i-1}}$: forme récurrente de calcul du vecteur (\vec{G}_i) .

Soit dm une masse élémentaire affectée au corps C_i , $dm = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$.

Les éléments de réduction du torseur des actions différentielles (sollicitations statiques et dynamiques) sont alors données par les expressions (5.17) et (5.18), écrites dans le formalisme de d'ALEMBERT.

- Résultante du torseur élémentaire des actions statiques et dynamiques:

$$d(\vec{R}D_i) = -dm \left(\left(\frac{d^2}{dt^2} (\vec{O}\vec{P}) \right) \right)_{R_i} \quad (5.17)$$

$$d(\vec{R}D_i) = -dm \left(\vec{G}_{li} + (\vec{E}_i + \vec{U}_i) \wedge \vec{O}i\vec{P} + (\vec{\Omega}_i \wedge \vec{O}i\vec{P}) + 2\vec{\Omega}_i \wedge (\vec{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \vec{k}_i) + \vec{\sigma}_i \cdot \ddot{q}_i \cdot \vec{k}_i \right)$$

- Moment du torseur élémentaire des actions statiques et dynamiques: (5.18)

$$d(\vec{M}D_i)_{R_i} = \vec{O}i\vec{P} \wedge \left(-(\vec{G}_{li} + (\vec{E}_i + \vec{U}_i) \wedge \vec{O}i\vec{P} + \vec{\Omega}_i \wedge (\vec{\Omega}_i \wedge \vec{O}i\vec{P}) + 2\vec{\Omega}_i \wedge (\vec{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \vec{k}_i) + \vec{\sigma}_i \cdot \ddot{q}_i \cdot \vec{k}_i) dm \right)$$

Les éléments de réduction des torseurs des actions différentielles sont exprimés dans leurs référentiels liés R_i .

Leurs intégrations sur le volume du corps C_i donnent:

- la résultante du torseur des actions différentielles sur la liaison L_i :

$$\vec{R}D_i = -\rho \int_{V_i} \left(\vec{G}_{li} + (\vec{E}_i + \vec{U}_i) \wedge \vec{O}i\vec{P} + \vec{\Omega}_i \wedge (\vec{\Omega}_i \wedge \vec{O}i\vec{P}) + 2\vec{\Omega}_i \wedge (\vec{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \vec{k}_i) + \vec{\sigma}_i \cdot \ddot{q}_i \cdot \vec{k}_i \right) dV \quad (5.19)$$

V_i : désigne le volume du corps C_i .

ρ : sa masse spécifique.

Les vecteurs \vec{G}_{li} , \vec{E}_i et \vec{U}_i ainsi que \vec{k}_i sont indépendants du point P. l'expression (5.19) devient alors:

$$\begin{aligned} \vec{R}D_i = & \left(\vec{G}_{li} + 2\vec{\Omega}_i \wedge (\vec{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \vec{k}_i) + \vec{\sigma}_i \cdot \ddot{q}_i \cdot \vec{k}_i \right) \cdot \left(-\rho \int_{V_i} dV \right) + \\ & + (\vec{E}_i + \vec{U}_i) \wedge \left(-\rho \int_{V_i} \vec{O}i\vec{P} \cdot dV \right) + \left(\vec{\Omega}_i \wedge \left(\vec{\Omega}_i \wedge \left(-\rho \int_{V_i} \vec{O}i\vec{P} \cdot dV \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Après intégration on obtient:

$$(5.20) \quad \vec{R}D_i = -m_i \left(\vec{G}_{li} + 2\vec{\Omega}_i \wedge (\vec{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \vec{k}_i) + (\vec{\sigma}_i \cdot \ddot{q}_i \cdot \vec{k}_i) + (\vec{E}_i + \vec{U}_i) \wedge \vec{P}g_i + \vec{\Omega}_i \wedge (\vec{\Omega}_i \wedge \vec{P}g_i) \right)$$

En intégrant par groupe les termes de l'expression (5.18), les composantes du moment MD_i des actions différentielles sur la liaison L_i , et dans le référentiel partiel R_i , seront égales à la somme de trois intégrales:

$$1. \quad \vec{I}_1 = -\int_{V_i} \rho \cdot \vec{O}i\vec{P} \wedge \left(\vec{G}_{li} + 2\vec{\Omega}_i \wedge (\vec{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \vec{k}_i) + (\vec{\sigma}_i \cdot \ddot{q}_i \cdot \vec{k}_i) \right) \cdot dV$$

$$\vec{I}_1 = -m_i \cdot \vec{P}g_i \wedge \left(\vec{G}_{li} + 2\vec{\Omega}_i \wedge (\vec{\sigma}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \vec{k}_i) + (\vec{\sigma}_i \cdot \ddot{q}_i \cdot \vec{k}_i) \right) \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}
 2. \bar{I}_2 &= -\int_{V_i} \rho \cdot \bar{O}i\bar{P} \wedge \left((\bar{E}_i + \bar{U}_i) \wedge \bar{O}i\bar{P} \right) \cdot dV \\
 &= -\int_{V_i} \rho \cdot \bar{O}i\bar{P} \wedge \left(-\bar{O}i\bar{P} \wedge (\bar{E}_i + \bar{U}_i) \right)
 \end{aligned}$$

En introduisant les composantes X, Y, Z de $\bar{O}i\bar{P}$, le vecteur $\bar{O}i\bar{P} \wedge (\bar{O}i\bar{P} \wedge (\bar{E}_i + \bar{U}_i))$ peut se mettre sous la forme matricielle par l'utilisation des matrices pré-produit vectoriel.

$$\bar{O}i\bar{P} \wedge (\bar{O}i\bar{P} \wedge (\bar{E}_i + \bar{U}_i)) = \begin{bmatrix} 0 & -Z & Y \\ Z & 0 & -X \\ -Y & X & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & Z & -Y \\ -Z & 0 & X \\ Y & -X & 0 \end{bmatrix} \cdot (\bar{E}_i + \bar{U}_i)$$

d'où:

$$\bar{I}_2 = \int_{V_i} \rho \cdot \begin{bmatrix} Y^2 + Z^2 & -XY & -XZ \\ -XY & X^2 + Z^2 & -YZ \\ -XZ & -YZ & X^2 + Y^2 \end{bmatrix} \cdot (\bar{E}_i + \bar{U}_i) \cdot dV$$

$$\bar{I}_2 = (\bar{E}_i + \bar{U}_i) \cdot \left[\int_{V_i} \rho \cdot \begin{bmatrix} Y^2 + Z^2 & -XY & -XZ \\ -XY & X^2 + Z^2 & -YZ \\ -XZ & -YZ & X^2 + Y^2 \end{bmatrix} \cdot dV \right]$$

$$\bar{I}_2 = M I_i \cdot (\bar{E}_i + \bar{U}_i) \tag{5.22}$$

$M I_i$: matrice d'inertie instantanée du corps C_i .

$$3. \bar{I}_3 = -\int_{V_i} \rho \cdot \bar{O}i\bar{P} \wedge \left(\bar{\Omega}_i \wedge (\bar{\Omega}_i \wedge \bar{O}i\bar{P}) \right) \cdot dV$$

$$\begin{aligned}
 \bar{O}i\bar{P} \wedge \left(\bar{\Omega}_i \wedge (\bar{\Omega}_i \wedge \bar{O}i\bar{P}) \right) &= \bar{O}i\bar{P} \wedge \left((\bar{\Omega}_i \cdot \bar{O}i\bar{P}) \cdot \bar{\Omega}_i - (\bar{\Omega}_i \cdot \bar{\Omega}_i) \cdot \bar{O}i\bar{P} \right) \\
 &= \bar{O}i\bar{P} \wedge \left(\bar{\Omega}_i \cdot \bar{O}i\bar{P} \right) \cdot \bar{\Omega}_i
 \end{aligned}$$

car $\bar{O}i\bar{P} \wedge \left(-(\bar{\Omega}_i \cdot \bar{\Omega}_i) \cdot \bar{O}i\bar{P} \right) = 0$ et de même $\bar{\Omega}_i \wedge \left(\bar{O}i\bar{P} \cdot \bar{O}i\bar{P} \right) \cdot \bar{\Omega}_i = 0$. On peut donc

écrire:

$$\begin{aligned}
 \bar{O}i\bar{P} \wedge \left(\bar{\Omega}_i \cdot \bar{O}i\bar{P} \right) \cdot \bar{\Omega}_i &= \bar{\Omega}_i \wedge \left[(\bar{O}i\bar{P} \cdot \bar{O}i\bar{P}) \cdot \bar{\Omega}_i - (\bar{O}i\bar{P} \cdot \bar{\Omega}_i) \cdot \bar{O}i\bar{P} \right] \\
 &= \bar{\Omega}_i \wedge \left(\bar{O}i\bar{P} \wedge (\bar{\Omega}_i \wedge \bar{O}i\bar{P}) \right)
 \end{aligned}$$

d'où:

$$\vec{I}_3 = \vec{\Omega}_i \wedge \left(- \int_{V_i} \rho \cdot \vec{O}i\vec{P} \wedge (\vec{\Omega}_i \wedge \vec{O}i\vec{P}) \cdot dV \right)$$

par analogie à l'intégrale \vec{I}_2 , l'expression \vec{I}_3 peut se mettre sous la forme matricielle:

$$\vec{I}_3 = -\vec{\Omega}_i \wedge (MI_i \cdot \vec{\Omega}_i) \quad (5.23)$$

En regroupant les trois expressions (5.21), (5.22) et (5.23) on obtient $\vec{M}\vec{D}_i$ par (5.24)

$$\vec{M}D_i = -\left(m_i \cdot \vec{P}g_i \wedge (\vec{G}_i + 2\vec{\Omega}_i \wedge (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{q}_i \cdot \vec{k}_i) + \vec{\sigma}_i \cdot \vec{q}_i \cdot \vec{k}_i) + MI_i (\vec{E}_i + \vec{U}_i) + \vec{\Omega}_i \wedge (MI_i \cdot \vec{\Omega}_i) \right)$$

II.5.3-Calcul des torseurs complets de liaison:

Dans le cas le plus général, le torseur sur toute liaison \vec{t}_i résulte de la combinaison de trois torseurs $\vec{t}E_i$, $\vec{t}D_i$ et \vec{t}_{i+1} définis comme suit:

- $\vec{t}E_i$: torseur des actions extérieures (couples et forces qui commandent le mouvement de L_i non compris), appliquées directement sur le corps C_i et dont les éléments de réduction sont $\vec{R}E_i$ et $\vec{M}E_i$ supposés calculés au préalable dans R_i et réduits en son origine O_i .
- $\vec{t}D_i$: torseur des actions différentielles dû au seul corps C_i sur sa liaison portante L_i , ses éléments de réduction $\vec{R}D_i$ et $\vec{M}D_i$ sont calculés et réduits en son origine O_i .
- \vec{t}_{i+1} : torseur complet des actions sur la liaison L_{i+1} et dont les éléments de réduction sont $\vec{R}L_{i+1}$ et $\vec{M}L_{i+1}$ et réduit en son origine O_i .

On peut donc écrire:

$$\vec{R}L_i = \vec{R}D_i + \vec{R}E_i + M_{i,i+1}^T \cdot \vec{R}L_{i+1} \quad (5.25)$$

$$\vec{M}L_i = \vec{M}D_i + \vec{M}E_i + M_{i,i+1}^T \cdot \vec{M}L_{i+1} + \vec{d}_i \wedge (M_{i,i+1}^T \cdot \vec{R}L_{i+1}) \quad (5.26)$$

La principale remarque à faire à partir des deux expressions précédentes est la propriété de récurrence qui existe entre les éléments de réduction des torseurs complets des actions sur deux actions consécutives L_i et L_{i+1} , on distingue deux étapes:

- Détermination des torseurs des actions différentielles;
- Calcul des torseurs complets de liaison par cumul.

La première étape étant plus spécifique au robot, utilisant:

- l'orientation relative des mouvements aux liaisons;
- distances interliaisons;
- données mécaniques: masses, inerties et centres de masses des éléments du robot;
- données cinématiques instantanées: position, vitesse et accélération au niveau de chaque liaison;
- chargement interchangeable .

Cette même étape montre les incréments dans les champs d'accélération au fur et à mesure de l'intervention des mouvements du système.

Quant à la deuxième étape, elle montre que ce sont les premières liaisons du système qui travaillent le plus, et que toute action extérieure ou non, appliquée en un point quelconque du système suit un cheminement qui la ramène nécessairement sur le bâti.

Ces deux étapes étant toutes deux compréhensibles, sont accessibles au raisonnement physique.

II.6-EQUATIONS DU MOUVEMENT DU SYSTEME:

II.6.1-Formulation des équations:

L'identification des résistances au mouvement comme étant (à partir des conditions imposées aux référentiels de calcul R_i):

- troisièmes composantes des résultantes $\bar{R}I_i$ (5.25) pour les mouvements de translation ($\sigma_i = 0$);
- troisièmes composantes des moments $\bar{M}I_i$ (5.26) pour les mouvements de rotation ($\sigma_i = 1$).

nous permet l'écriture des n équations du mouvement du système.

On suppose que tous les mouvements du système sont générés par des moteurs rotatifs avec ou sans réducteurs.

Après le choix d'une convention de signes, les expressions d'équilibre des moteurs qui sont en même temps les équations du mouvement du système.

$$Cm_i + \frac{1}{r_i} \left(\sigma_i (\bar{M}L_i \cdot \bar{k}_i) + \bar{\sigma}_i (\bar{R}L_i \cdot \bar{k}_i) \right) - \frac{1}{r_i} IC_i \cdot q_i - Cf_{vi} \cdot \dot{q}_m - Cf_{si} \cdot (\text{signe} \dot{q}_m) = 0$$

d'où:

$$Cm_i = \frac{1}{r_i} IC_i \cdot q_i + Cf_{vi} \cdot \dot{q}_m + Cf_{si} \cdot (\text{signe} \dot{q}_m) - \frac{1}{r_i} \left(\sigma_i (\bar{M}L_i \cdot \bar{k}_i) + \bar{\sigma}_i (\bar{R}L_i \cdot \bar{k}_i) \right) \quad (5.27)$$

avec:

IC_i : - moment d'inertie de la chaîne cinématique du groupe motoréducteur ramené en sortie si $\sigma_i = 1$ (mouvement de rotation sur L_i);

-masse équivalente de sa chaîne cinématique ramenée en sortie si $\sigma_i = 0$ (mouvement de translation);

r_i : rapport de réduction, entrée sur sortie, en valeur algébrique, il est sans dimension si $\sigma_i = 1$ et exprimé en rd/s si $\sigma_i = 0$;

Cm_i : valeur algébrique du couple moteur sur l'arbre moteur;

Cf_{vi} : couple de frottement visqueux supposé connu et exprimé sur l'arbre moteur en (m.N.S);

$\dot{q}_m = r_i \cdot \dot{q}_i$: valeur algébrique de la vitesse de rotation du moteur;

Cf_{si} : couple de frottement sec sur l'arbre moteur (supposé connu ou déterminé par mesures expérimentales).

II.6.2-Algorithmes de calcul des torseurs de liaison et des équations de mouvement du système:

L'application du modèle en calcul automatique a donné lieu à un programme comprenant six étapes différentes:

étape 1 : -Introduction des données géométriques et mécaniques du système en C.I.G et exprimées dans les référentiels intermédiaires R_{i0} .

étape 2 : -Expression des précédentes données dans les référentiels de calcul R_i en utilisant les matrices de passage $M_{i0,i}$.

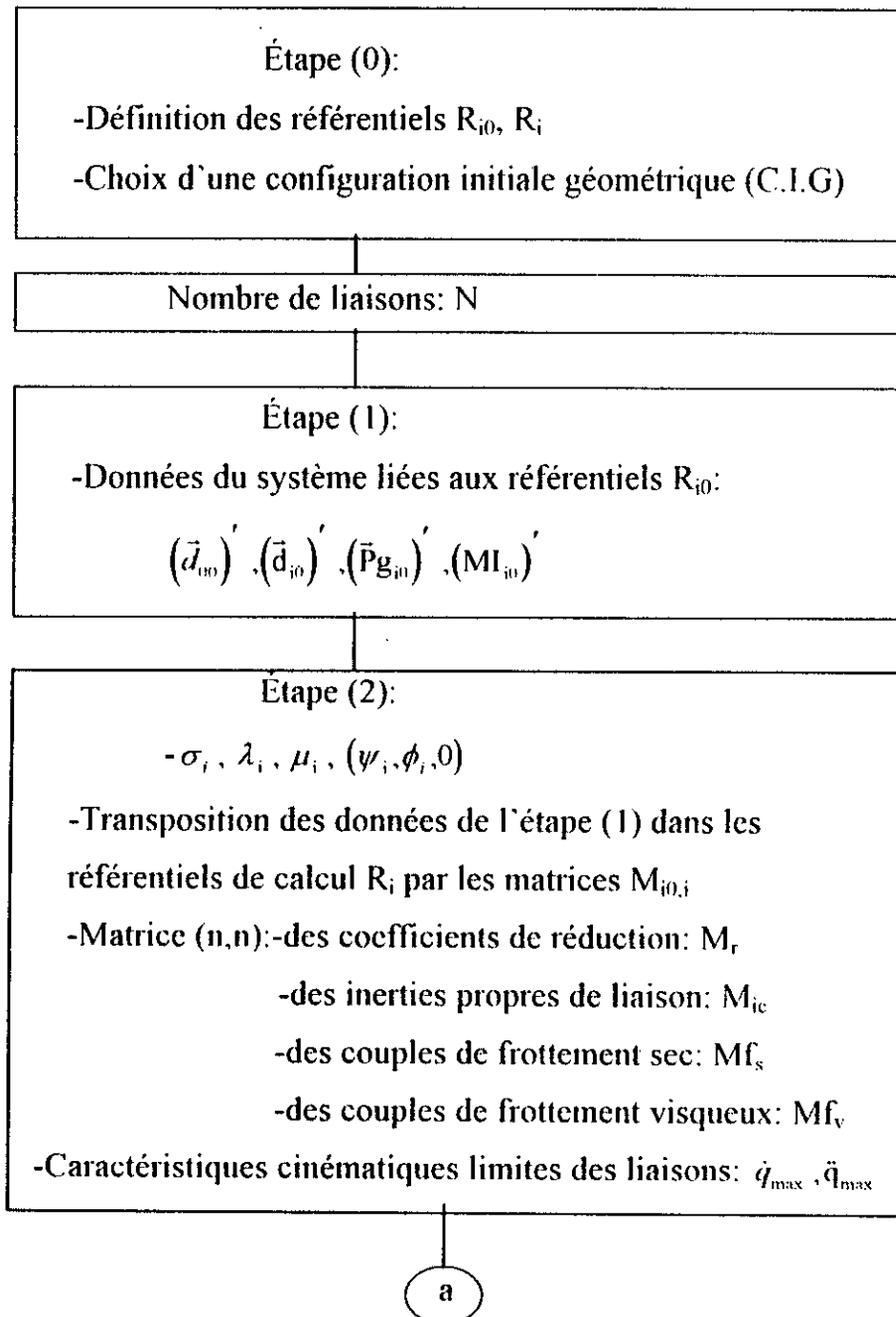
étape 3 : -Génération théorique ou introduction des coordonnées générales du système ainsi que leurs premières et secondes dérivées.

étape 4 : -Détermination des torseurs des actions différentielles en parcourant le système dans le sens amont-aval.

étape 5 : -Détermination des torseurs complets de liaison par cumulation des torseurs des actions extérieures et ceci en remontant le système dans le sens aval-amont.

étape 6 : -Equations de mouvement du système et calcul des couples moteurs.

II.6.2.1-Structure générale du programme:



a

Étape (3):

- Données relatives à l'organe terminal: m_n , $(\bar{P}g_{n0})'$ et $(MI_{n0})'$
- Conditions cinématiques de simulation:
 - lois de variation: $q_i(t)$, $\dot{q}_i(t)$, $\ddot{q}_i(t)$
 - valeurs ponctuelles: q_i , \dot{q}_i , \ddot{q}_i
 - relevées directement dans le cas d'un calcul en temps réel: commande dynamique
- Calcul de $\bar{P}g_{n0}$ et MI_{n0} dans R_n
- Calcul des matrices de passage $M_{i,i+1}^0$

Étape (4):

Le système étant parcouru dans le sens amont-aval:

- Données instantanées du système: $q_i(t)$, $\dot{q}_i(t)$, $\ddot{q}_i(t)$,
 $\bar{P}g_i(t)$, $\bar{d}_i(t)$ et $MI_i(t)$
- Matrices de passage instantanées: $M_{i,i+1}$
- Calcul des torseurs des actions différentielles

Étape (5):

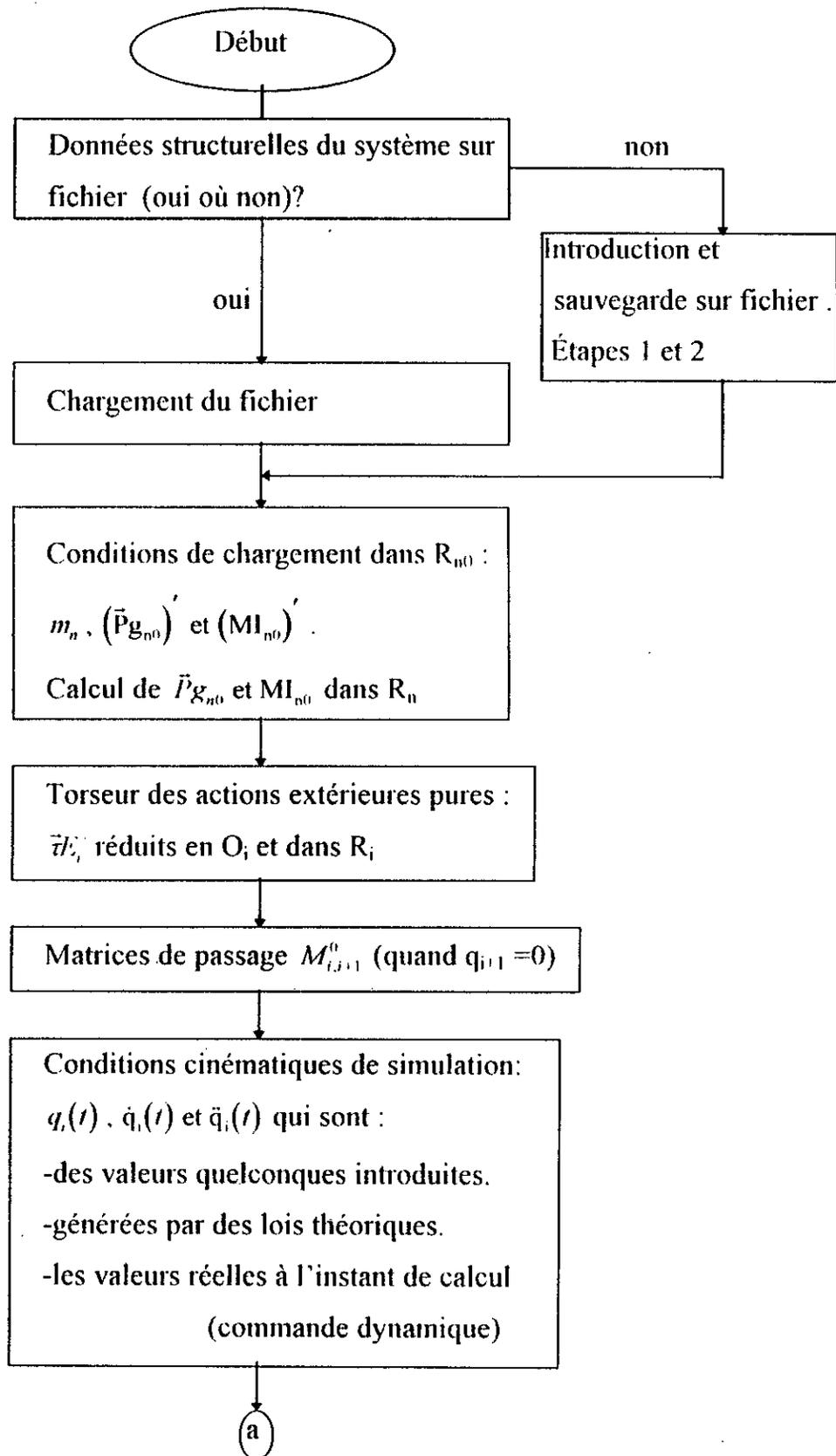
Le système étant parcouru dans le sens aval-amont:

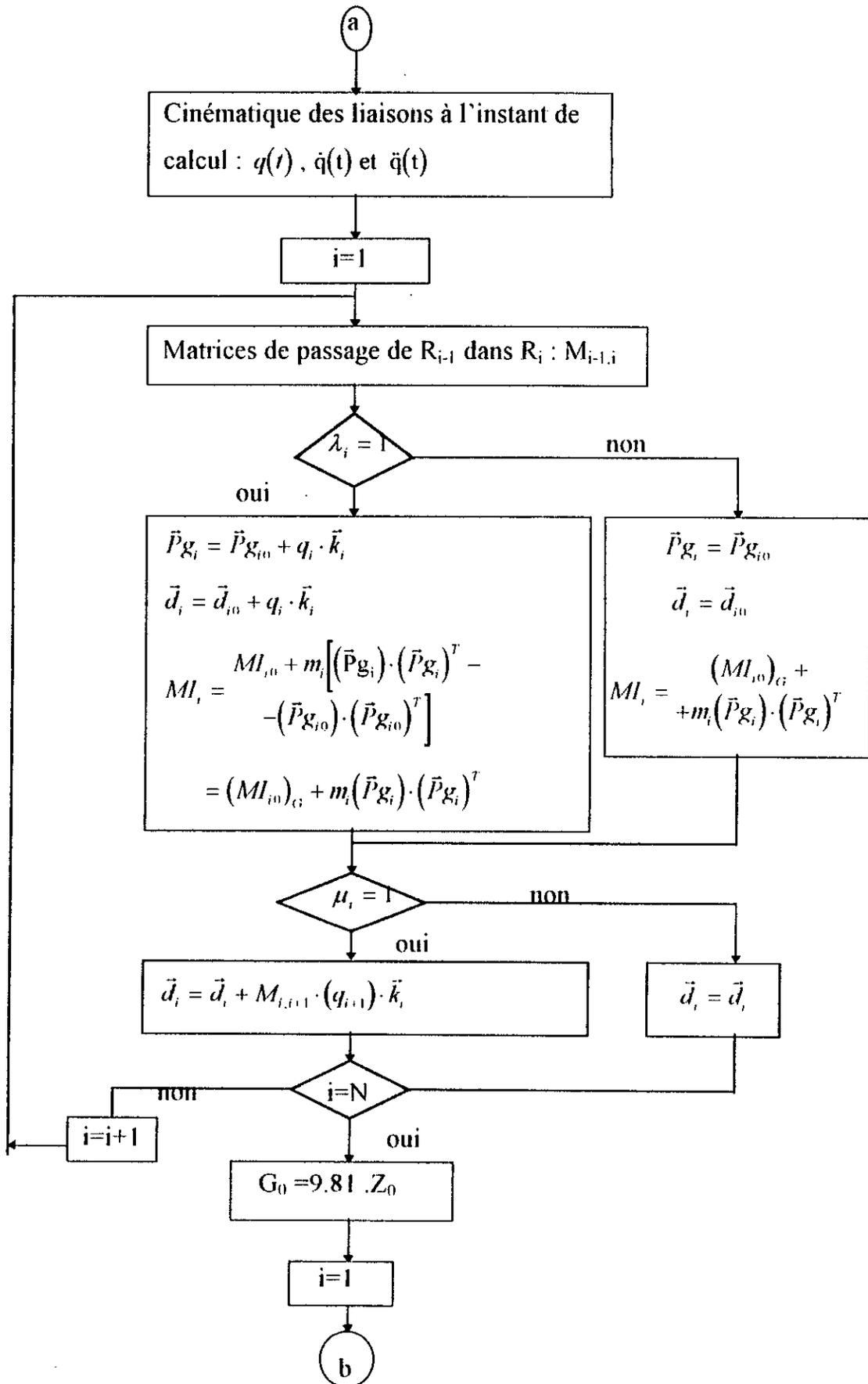
- Calcul des torseurs complets de liaison en tenant compte des actions extérieures pures éventuelles.

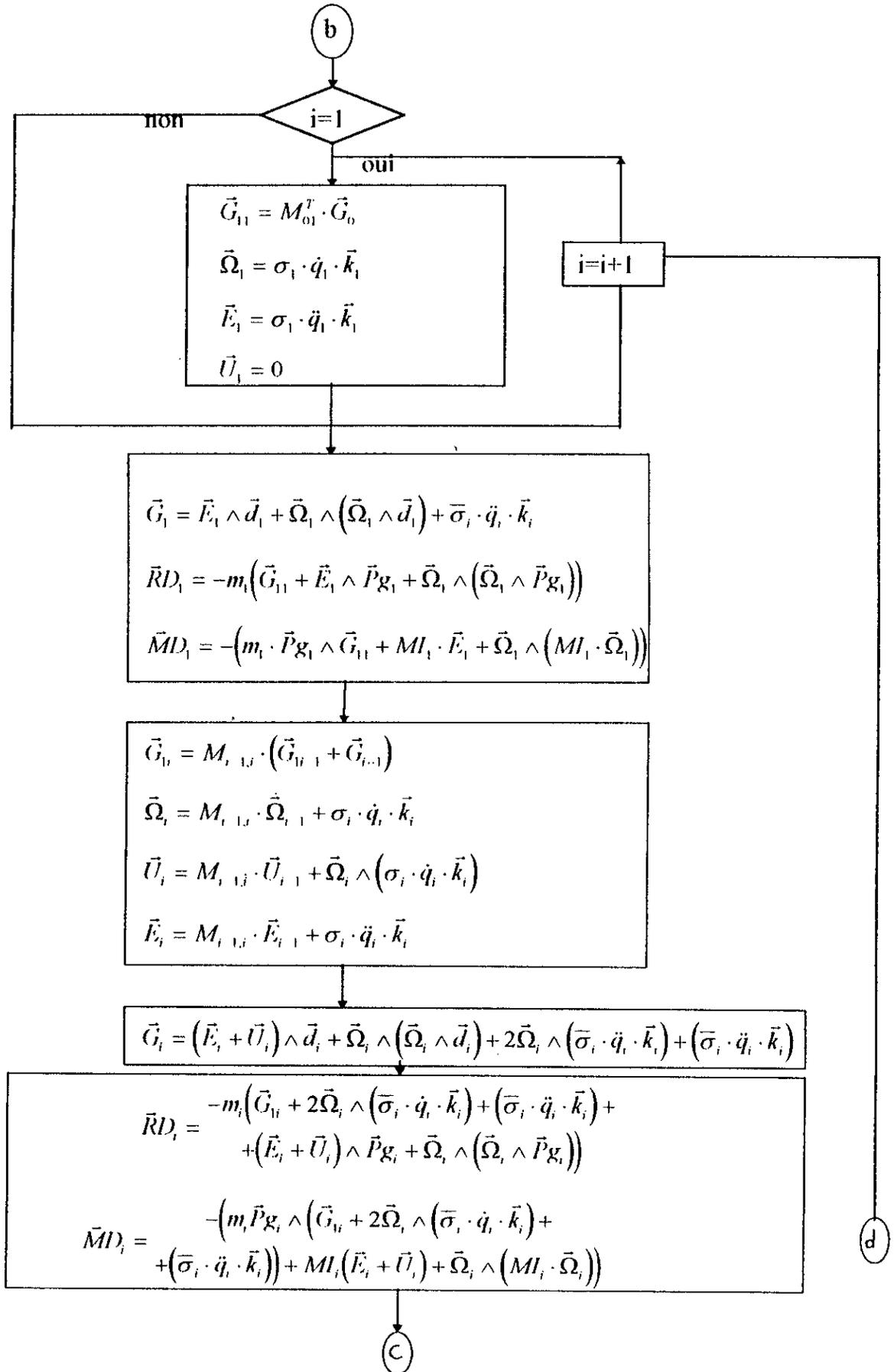
Étape (6):

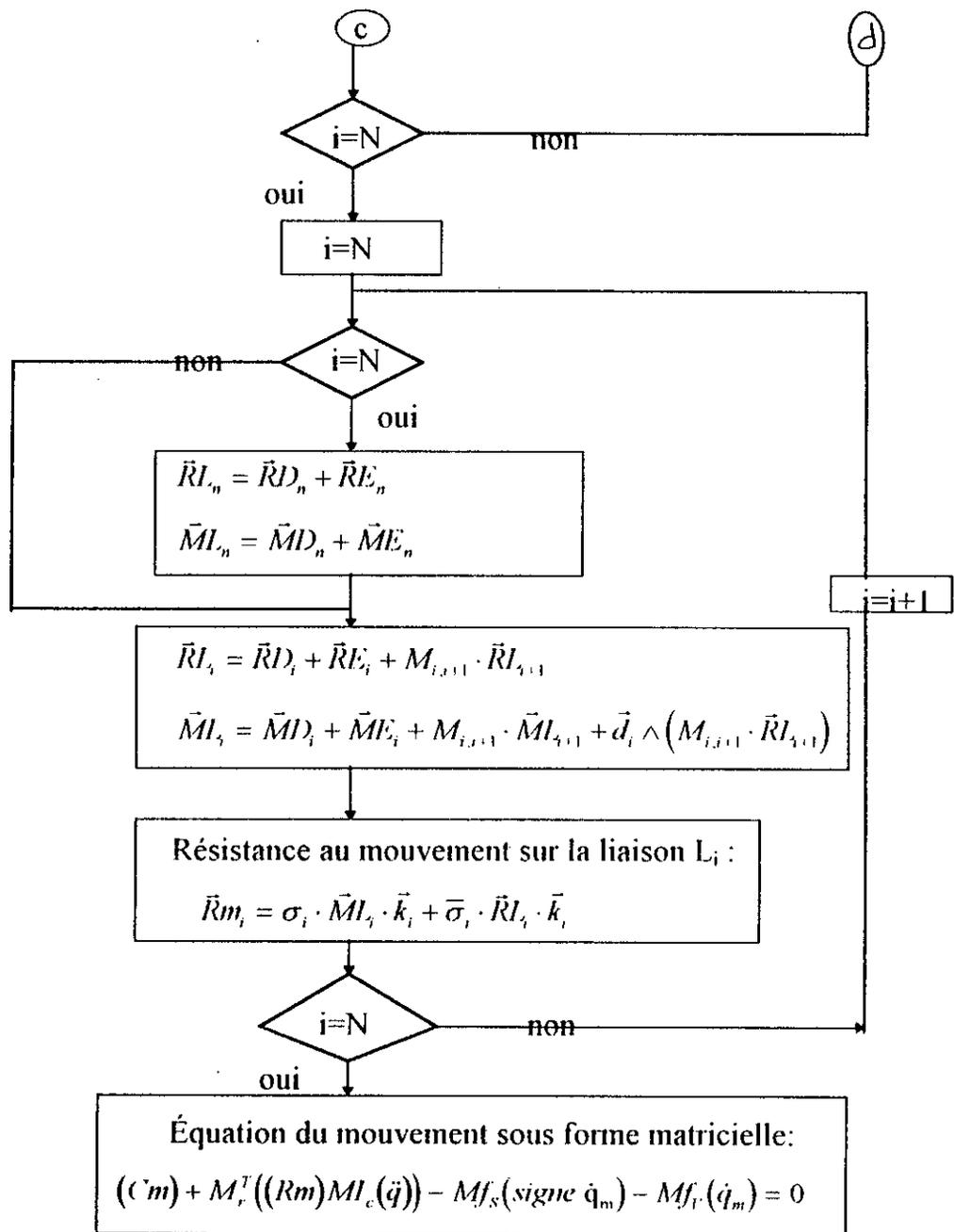
- Équation de mouvement du système et couples aux moteurs

II.6.2.2-Organigramme général de calcul:









Remarque:

- Les couples moteurs sont calculées au niveau des moteurs.
- Mf_s et Mf_v sont les matrices carrées dans le cas le plus général, leurs termes sont à déterminer par mesures expérimentales et doivent être ramenés au niveaux des moteurs.
- (\dot{q}_m) : matrice colonne des vitesses aux moteurs.

Quand le système a déjà fait l'objet d'une première simulation, ses données géométriques et mécaniques sont déjà sur fichier et les étapes 1 et 2 ne concernent plus que l'organe terminal ($n^{\text{ième}}$ corps) interchangeable. Pour un système à structure figée, son état de sollicitation est donc fonction de deux groupes de variables:

1. ses coordonnées générales ainsi que leurs dérivées (positions, vitesses et accélérations)
2. des paramètres géométriques et mécaniques de l'organe terminal: m_n , $\vec{P}_{g_{n0}}$ et MI_{n0}

Pour un travail spécifique effectué constamment avec le même organe terminal (cas d'un site réel de travail), l'état de sollicitation du robot dépend uniquement des positions, vitesses et accélérations aux niveaux de ses liaisons.

Le programme élaboré est général et comprend six étapes précédemment citées. Il est donc applicable à n'importe quel robot existant, ou en projet, pour une simulation des torseurs de liaison ou des résistances au mouvement, dans le but:

- de vérifier le dimensionnement de ses organes;
- d'établir ses limites de performances cinématiques, dynamiques et ses caractéristiques de charge.

CHAPITRE III

MISE AU POINT DU PROGRAMME

MISE AU POINT DU PROGRAMME

III.1-INTRODUCTION:

La détermination du torseur 'des actions différentielles' sur toute liaison L_i débute par le calcul du vecteur accélération d'un point P, quelconque, appartenant à un domaine subissant les i premiers mouvements du système. La deuxième étape associe à ce point P une masse élémentaire dm et donne, après application des lois fondamentales de la dynamique et intégration, ces 'actions différentielles' écrites dans le formalisme de d'ALEMBERT. Le reste de la méthode se réduit à une manipulation de torseurs connus et écrits dans les référentiels partiels attachés aux liaisons.

La particularité essentielle de la méthode réside donc dans le mode de décomposition et de calcul des vecteurs accélérations. De ce fait, la vérification peut porter, indifféremment, sur les accélérations ou sur les torseurs de liaison.

deux formes de vérifications sont mises en application dans le cas particulier du robot RENAULT-ACMA H80.

III.2-APPLICATION DU PROGRAMME:

Pour chercher la validité de notre programme et dans le but de vérifier les résultats obtenus, notre vérification est entreprise sur le robot H80 de la gamme RENAULT-ACMA.

Remarque: Le robot H80 est un robot d'assemblage RENAULT-ACMA, il assemble à flins des caisses de R18. Les robots H80 sont les 'grands frères' des petits robots à commande électrique appelés TH8. Ces derniers peuvent manipuler des masses de Kg, soit dix fois moins lourdes que celle des robots H80.

- **Présentation du robot H80:**

C'est un bras articulé horizontal à six degrés de liberté capable de déplacer et d'orienter une charge maximale de 80Kg à l'extrémité de l'organe terminal qui est un poignet trois axes à axes concourants. (voir fig III.1)

Le tableau (III.1) regroupe l'ensemble des paramètres du ACMA H80 (morphologiques, géométriques, mécaniques et cinématiques) préalablement définis.

La commande des mouvements de ce robot est assurée par des boucles d'asservissement en position axe par axe (voir fig III.2), associée à une génération de consignes théoriques qui sont générées dans le calculateur de la baie de commande (voir fig III.3)

-en fonction des coordonnées de départ (q_{id}) et d'arrivée (q_{in}) sur les six axes du robot.

-dans le respect des contraintes soft qui sont de trois ordres:

1-Les vitesses et les accélérations sont limitées.

2-Les accélérations et décélérations sont égales en valeurs absolues et constantes au cours d'un cycle.

3-Les mouvements sur les six axes sont synchronisés, ils démarrent simultanément et s'arrêtent de même.

-l'organigramme de génération de consignes de position pour les six axes en fonction des variables q_{id} et q_{in} et des contraintes soft ci dessus.

-des différents cas de figures de lois de vitesse.

III.3-SIMULATION DES MOUVEMENTS:

Le programme de simulation n'utilise qu'un seul référentiel par liaison: R_{i0} , les mouvements aux liaisons sont donc respectivement de direction Z_{i0} avec $i=1, \dots, 6$.

Ce programme permet de calculer:

- Les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération d'un point quelconque de la charge dans le référentiel inertiel R_0 du robot.
- Les composantes des résultantes et moments des six torseurs de liaisons dans leur référentiels respectifs R_{i0} .

Ces grandeurs sont calculables à tout instant du cycle de travail défini par le débattement sur les six axes du robot. (voir tableau III.2)

III.3 Organigramme donnant les positions moyennant les vitesses

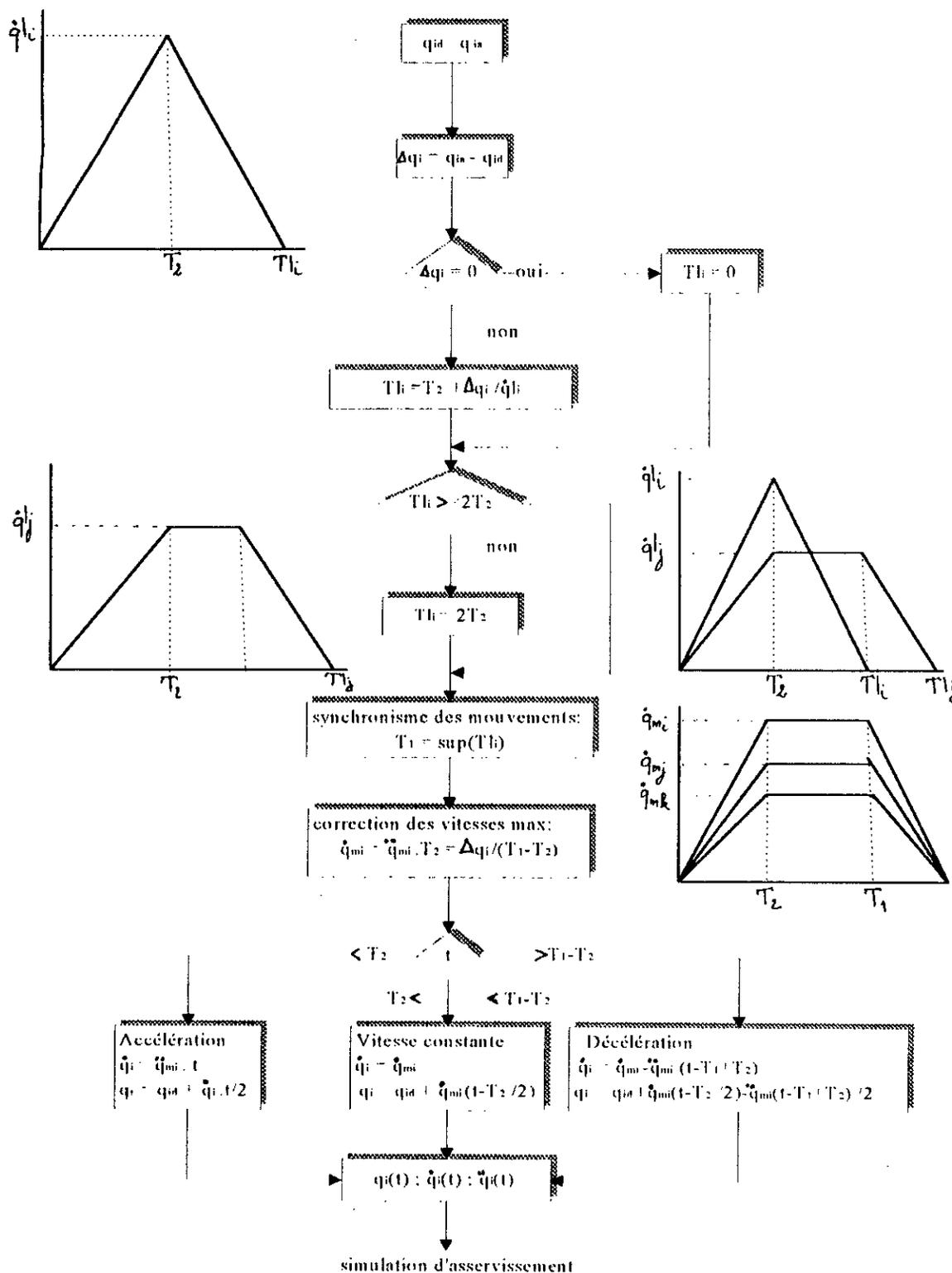
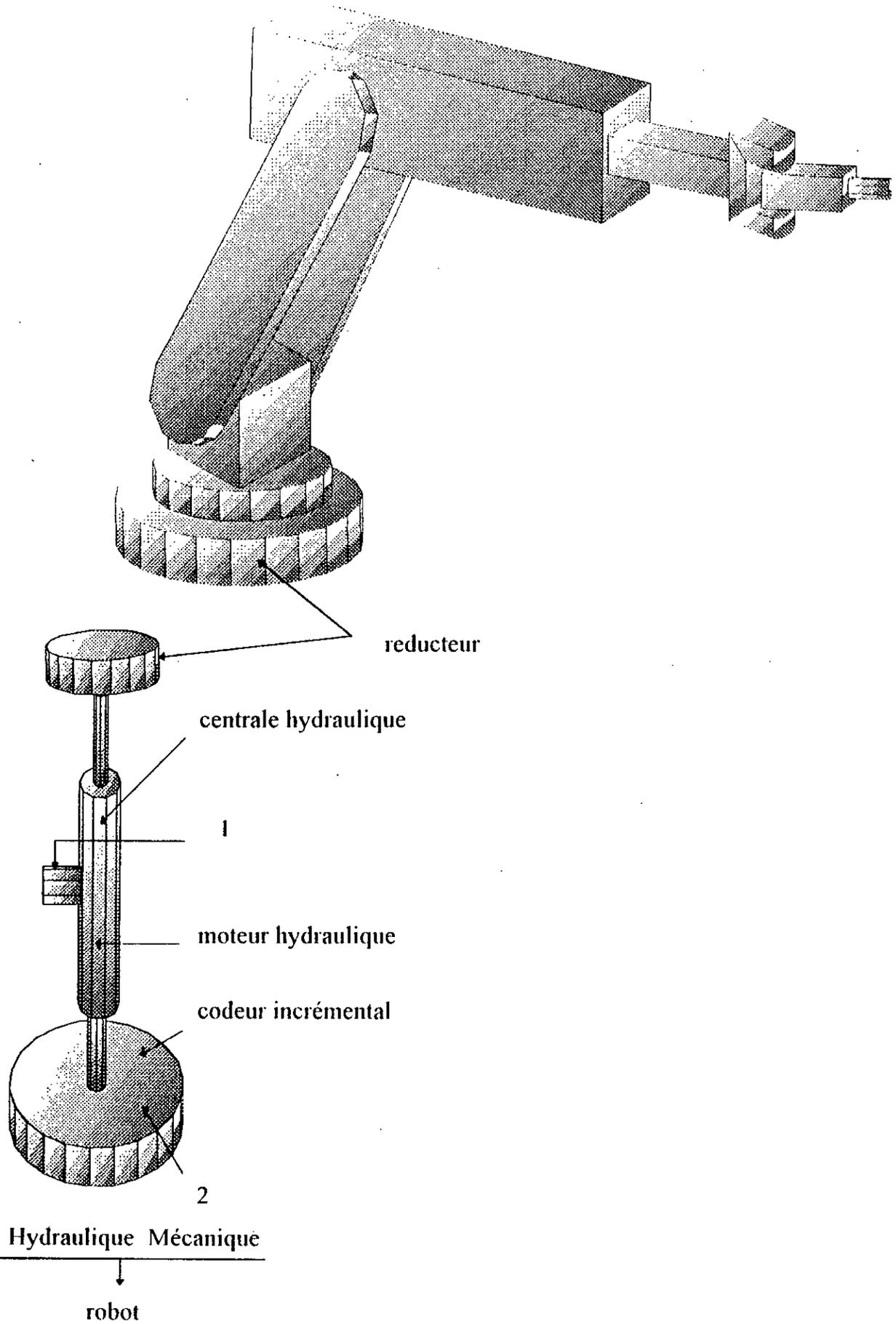


Tableau III.1 : paramètres du robot H80

Axe		1	2	3	4	5	6
σ_i		1	0	1	1	1	1
λ_i		0	0	0	0	0	0
μ_i		1	0	0	0	0	0
ψ (deg)		0	0	0	90	180	90
ϕ (deg)		0	0	0	90	90	90
(d _{i0}) en mm	X	0	1	0,9	0,1	0,13	/
	Y	0	0	0	0	0	/
	Z	0,43	0	0,088	0	0	/
m _i (Kg)		550	470	103	5	15	50
(P _{g,i0}) en m	X	/	0,3	0,622	0,05	0,08	0,27
	Y	/	0	0	0	0	0
	Z	/	0,185	0,022	0	0	0
\dot{q}_{\max}		1 rd/s	0,66 m/s	1 rd/s	3 rd/s	3 rd/s	3 rd/s
\ddot{q}_{\max}		1,25	0,825	1,25	3,75	3,75	3,75

Tableau III.2 : Cycle de fonctionnement simulé

Axe	Variables de départ q _{i0}	Variables d'arrivée q _{ia}
1	-22.918°	34.377°
2	0.736 m	1.396 m
3	-22.918	34.377°
4	-68.755°	103.132°
5	-68.755°	103.132°
6	-68.755°	103.132°



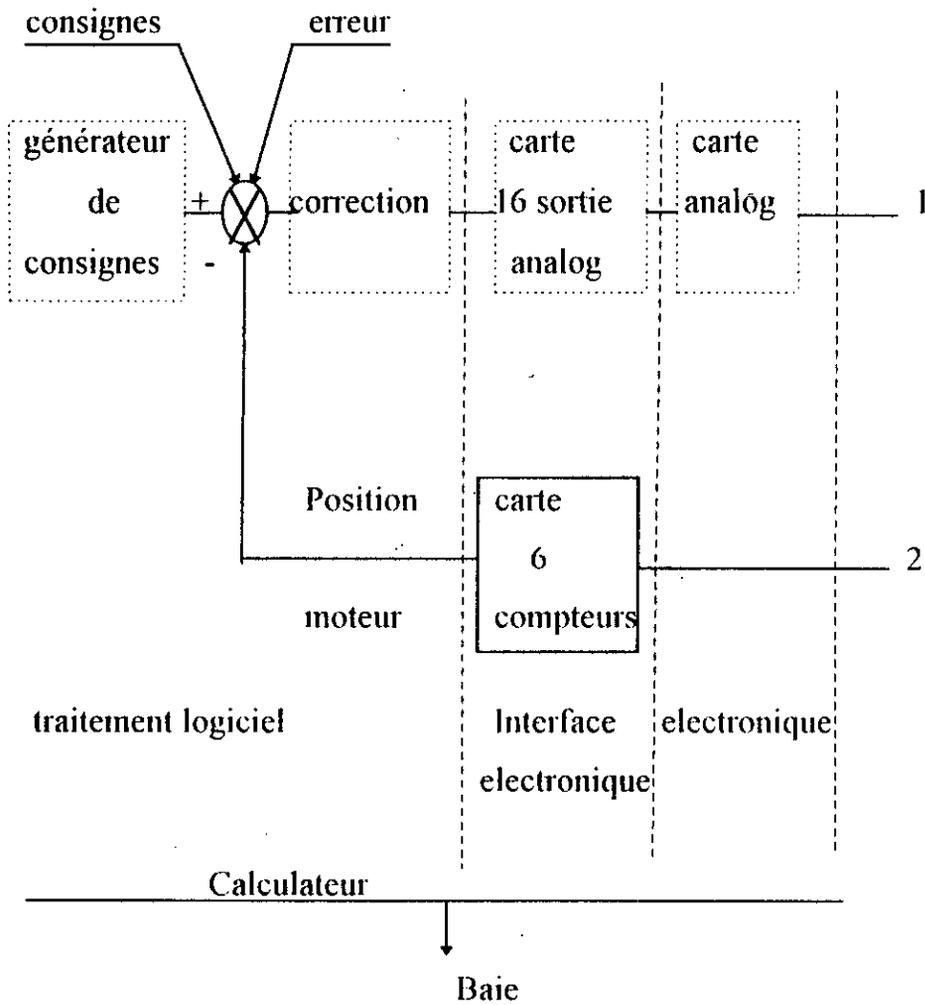


Fig III. 3: le robot et sa baie de commande

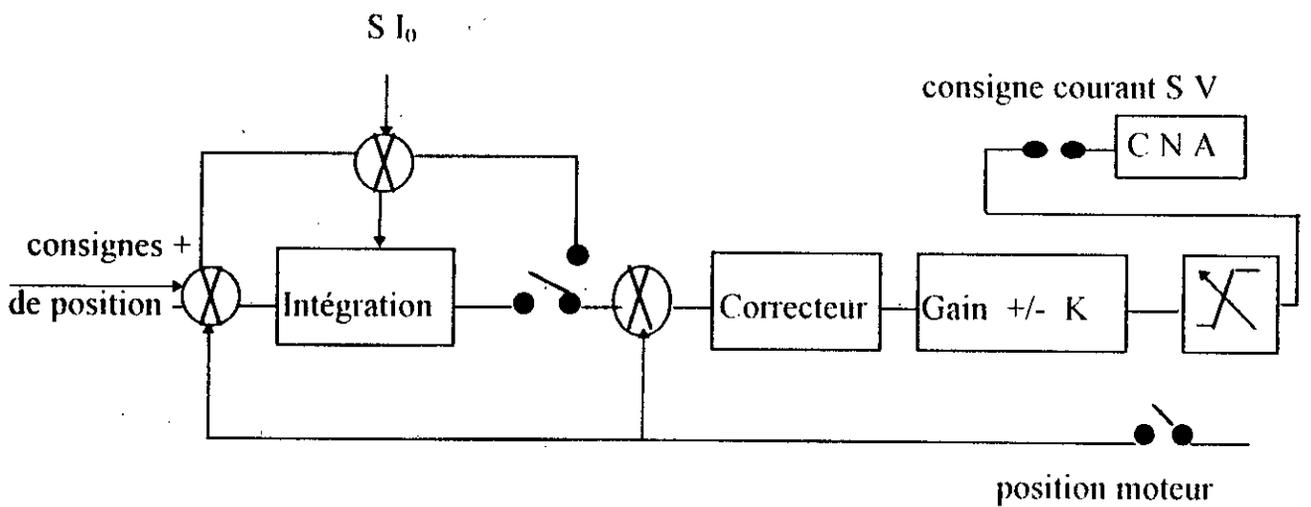


Fig III.2: boucle d'asservissement en position

Les résultats seront présentés sous forme de courbes tracées à l'aide du logiciel grapher à partir des fichiers résultats. Les grandeurs calculées sont:

- La position, vitesse, accélération de l'organe terminal dans R_0 .
- Les éléments du torseur complet de liaison ($RL_i=RD_i$ et $ML_i=MD_i$ dans notre cas).

Nous présenterons également le cycle simulé d'après le tableau (III.2) c'est à dire, position, vitesse et accélération de chaque axe. (Voir les différents graphes en Annexe).

Interprétation des courbes:

A partir des différentes courbes tracées on déduit que le robot subit toute la gamme de sollicitations connues (traction-compression, cisaillement, torsion, flexion bidimensionnelle). Celles-ci varient dans les limites considérables au cours d'un cycle avec très souvent inversion de signe: la totalité de la structure du robot travaille en fatigue.

Pour certains cycles et pendant la phase d'accélération certains moteurs travaillent en pompe.

Les couples à vaincre au niveau de chaque axe présentent des allures complexes qui:

- dépendent des cycles de travail ;
- ne reproduisent en rien les lois de vitesse imposées aux axes (accélérations constantes).

III.5-VERIFICATION:

III.5.1-Vérification manuelle des résultats:

$$\bar{R}L_n = \bar{R}E_n + \bar{R}D_n$$

$$\bar{M}L_n = \bar{M}E_n + \bar{M}D_n$$

Soit à considérer le cas particulier où $\bar{R}E_n$ et $\bar{M}E_n$ sont nuls, nous avons donc:

$$\bar{R}L_n = \bar{R}D_n \quad \text{et} \quad \bar{M}L_n = \bar{M}D_n$$

d'ou les expressions des éléments de réduction du torseur de liaison de l'axe 6:

$$\bar{R}L_n = -m_n \left(\bar{G}_{1n} + 2\bar{\Omega}_n \wedge (\bar{\sigma}_n \cdot \dot{q}_n \cdot \bar{k}_n) + (\bar{\sigma}_n \cdot \ddot{q}_n \cdot \bar{k}_n) + (\bar{F}_n + \bar{U}_n) \wedge \bar{P}g_n + \bar{\Omega}_n \wedge (\bar{\Omega}_n \wedge \bar{P}g_n) \right)$$

$$\bar{M}D_n = -\left(m_n \bar{P}g_n \left(\bar{G}_{1n} + 2\bar{\Omega}_n \wedge (\bar{\sigma}_n \cdot \dot{q}_n \cdot \bar{k}_n) + \bar{\sigma}_n \cdot \ddot{q}_n \cdot \bar{k}_n \right) + M L_n (\bar{F}_n + \bar{U}_n) + \bar{\Omega}_n \wedge (M L_n \cdot \bar{\Omega}_n) \right)$$

On choisit le temps $t=0.8$ s qui correspond à la fin de phase accélérations, c'est à dire les vitesses et les accélérations sont maximales.

Soit:

$$\bar{\sigma}_6 = 0 ; \dot{q}_6 = 3 \text{ rd/s} ; \ddot{q}_6 = 3.75 \text{ rd/s}^2 ; \vec{P}g_6 (\text{en m}) \begin{cases} 0 \\ 0.2 \\ 0.27 \end{cases} ; m_6 = 50 \text{ Kg} ;$$

$$MJ_6 (\text{en Kg. m}^2) = \begin{bmatrix} 5.645 & 0 & 0 \\ 0 & 3.645 & -2.7 \\ 0 & -2.7 & 2 \end{bmatrix} ; M_{5,6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{G}_{16} = M_{5,6} \cdot (\vec{G}_{15} + \vec{G}_5)$$

$$\vec{\Omega}_6 = M_{5,6} \cdot \vec{\Omega}_5 + \sigma_6 \cdot \dot{q}_6 \cdot \vec{k}_6$$

$$\vec{U}_6 = M_{5,6} \cdot \vec{U}_5 + \vec{\Omega}_6 \wedge (\sigma_6 \cdot \dot{q}_6 \cdot \vec{k}_6)$$

$$\vec{E}_6 = M_{5,6} \cdot \vec{E}_5 + \sigma_6 \cdot \ddot{q}_6 \cdot \vec{k}_6$$

avec:

$$\vec{G}_{15} = \begin{Bmatrix} 4.999 \\ 10.635 \\ 3.749 \end{Bmatrix} ; \vec{G}_5 = \begin{Bmatrix} 1.689 \\ -0.487 \\ 2.664 \end{Bmatrix} ; \vec{\Omega}_5 = \begin{Bmatrix} -3.00 \\ 1.999 \\ 2.999 \end{Bmatrix} ; \vec{E}_5 = \begin{Bmatrix} -3.75 \\ 2.499 \\ 3.749 \end{Bmatrix} ; \vec{U}_5 = \begin{Bmatrix} 5.999 \\ 9.000 \\ 5.999 \end{Bmatrix}$$

d'où:

$$\vec{G}_{16} = \begin{Bmatrix} 6.414 \\ 10.147 \\ -6.689 \end{Bmatrix} ; \vec{\Omega}_6 = \begin{Bmatrix} 2.999 \\ 1.999 \\ 5.999 \end{Bmatrix} ; \vec{E}_6 = \begin{Bmatrix} 3.7491 \\ 2.499 \\ 7.499 \end{Bmatrix} ; \vec{U}_6 = \begin{Bmatrix} 1.999 \\ 10^{-4} \\ -5.999 \end{Bmatrix}$$

après calcul on trouve:

$$\vec{R}I_6 = -64.249 \cdot \vec{i}_6 - 0.675 \cdot \vec{j}_6 + 23.249 \cdot \vec{k}_6$$

$$\vec{M}I_6 (\text{en daN}) = 4.832 \cdot \vec{i}_6 - 17.347 \cdot \vec{j}_6 + 12.849 \cdot \vec{k}_6$$

Nous pouvons déduire que notre vérification est concluante car nos résultats sont strictement identiques.

III.5.2-Vérification expérimentale:

Cette vérification a pour objet de déterminer la trajectoire d'un point de l'organe terminal (3^{ème} corps). A cet effet un ensemble de trois corps articulés en mouvement dans le plan vertical sous l'action de la pesanteur est mis en oeuvre.

L'ensemble est ramené à une certaine position, puis relâché. Ce dernier décrit une trajectoire qui sera ensuite vérifiée à l'aide d'un programme de simulation.

Malheureusement, notre programme de simulation ne peut être vérifié expérimentalement vu la non disponibilité de l'ensemble de trois corps articulés.

CONCLUSION

CONCLUSION

L'objectif principal de notre étude est la contribution à la modélisation et la commande dynamique des robots industriels.

Pour répondre aux exigences du cahier de charge on a élaboré un programme de calcul automatique des torseurs complets de liaison. La connaissance de ces torseurs est indispensable pour la conception et le dimensionnement de la structure du robot en fonction des paramètres définis dans son cahier de charge prévisionnel:

- nombre de mouvements et leurs orientations relatives (morphologie),
- vitesses et accélérations limites sur les liaisons (performances cinématiques),
- distances interliaisons (volume utile du travail),
- type de charge à manoeuvrer (performances dynamiques),

que pour la commande dynamique de ce même robot.

Une fois les données géométriques et mécaniques du système ramenées dans les référentiels de calcul R_j , nous avons vu que le développement de la méthode repose essentiellement sur:

- le calcul vectoriel,
- les équations de base de la dynamique des solides.

Sa formulation théorique ne pose donc aucune difficulté majeure et elle est indépendante de la configuration du système.

Ses propriétés de récurrence apparaissent naturellement entre:

- les termes d'accélération qui permettent de calculer les torseurs des 'actions différentielles' que chaque corps C_i induit sur sa liaison portante, ceci en parcourant le système dans le sens amont-aval.
- les éléments de réduction des torseurs complets de liaison qui sont obtenus par cumulation successives des torseurs précédemment exercées sur la liaison, ceci à chaque passage de liaison et en remontant le système dans le sens aval-amont.

En exploitant à fond les propriétés de récurrence démontrées, l'application de la méthode en calcul automatique est très aisée du fait:

1. que, les calculs peuvent être menés entièrement, sous forme matricielle,
2. qu'on ne programme que des expressions simples et condensées, ce qui réduit les risques d'erreurs de programmation,
3. qu'on ne rentre que les données essentielles à la caractérisation du système dans sa configuration géométrique la plus simple: la C.I.G.

Cette méthode, entièrement autonome est mathématiquement exacte et s'applique à n'importe quel robot existant à structure de chaîne ouverte.

Comme perspectives d'avenir, on propose:

- d'étudier les interactions entre les mouvements du poignet trois axes de l'organe terminal,
- d'optimiser le volume de contrôle,
- d'approfondir l'étude sur les réducteurs.

BIBLIOGRAPHIE

M.E.KAHN B.ROTH

Publication: "The near minimum time, control of open loop articulated kinematic chains"

Transactions of the A.S.M.E. Journal of dynamic systems,
measurement and control, Septembre 1971 (p164-172)

Y.KOREN "La robotique pour ingénieurs"

(édition Mac Graw Hill 1986)

J.Y.S.LUH M.W.WALKER R.P.C.PAUL

Publication: "On line computational scheme for mechanical manipulators"

Transactions of the A.S.M.E. Journal of dynamic systems,
measurement and control, Vol 102 Juin 1980 (p69-76)

N&S TAIBI "Le fortran par la pratique"

(édition Berti)

R.TOUNSI A.YOUSNADJ

Publication: "Modèle réccurent de modélisation dynamique des bras manipulateurs"

Actes de journées sur la robotique et son environnement ROB 95

(E.N.I.T.A 16-18 Septembre 1995)

J.J.VICKER J

Publication: "Dynamic behavior of spatial linkages"

Transactions of the A.S.M.E. Journal of dynamic systems,
measurement and control, N° 68 mech. 1968 (p1-15)

A.YOUSNADJ "Modélisation et comportement dynamique des chaînes de corps
ouvertes"

(Thèse de Docteur Ingénieur 1983)E.N.S.A.M. Paris

ANNEXES

ANNEXE A

PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS:**Enoncé:**

Il existe au moins un repère d'espace et une mesure de temps constituant un référentiel appelé GALILEEN, dans lequel à tout instant pour tout déplacement virtuel d'un système (Σ) quelconque, la somme des travaux virtuels de toutes les actions s'exerçant sur (Σ) est nulle:

$$\delta W = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta W_e + \delta W_i + \delta W_j = 0$$

Commentaires:

Le principe étant valable pour des systèmes quelconques (et pas seulement pour des systèmes de solides indéformables) est nécessairement insuffisant pour résoudre les problèmes; il faut en outre, comme on le verra dans chaque cas, faire intervenir le comportement constitutif du système étudié.

On peut écrire le principe sous deux formes selon la décomposition adoptée pour les actions:

$$\delta W_e + \delta W_i + \delta W_j = 0 \quad \text{avec:}$$

δW_e : travail des actions extérieures

δW_i : travail virtuel des actions intérieures

δW_j : travail virtuel des actions d'inertie

Ou dans le cas des systèmes de solides rigides:

$$\delta W_d + \delta W_l + \delta W_j = 0 \quad \text{avec:}$$

δW_d : travail virtuel des actions données

δW_l : travail virtuel des actions de liaison.

En mécanique des milieux continus on utilise la première forme car le travail de déformation (opposé du travail des actions intérieures) y joue un rôle essentiel.

Au contraire en mécanique des systèmes de solides rigides les hypothèses physiques supplémentaires qui sont nécessaires sont relatives aux contacts entre solides: puisque les solides sont indéformables, leur comportement interne est complètement

caractérisé donc le travail des actions de liaisons joue un rôle essentiel: c'est pourquoi on utilisera la seconde forme.

Théorème: (loi fondamentale de la mécanique)

Dans un référentiel galiléen le torseur des quantités d'accélération est équivalent au torseur des actions extérieures.

$$\vec{F}_e \approx (\rho \vec{\gamma})$$

Les théorèmes généraux de la mécanique:

Comme le principe des travaux virtuels, l'équivalence (a) s'applique à tout ou partie d'un système quelconque, qu'il soit ou non composé de solides rigides.

Cette équivalence se traduit, en considérant les éléments de réduction des torseurs en un point O fixe ou mobile par les deux théorèmes généraux:

1. Théorème (de la résultante dynamique):

La résultante des actions extérieures est égale à la quantité d'accélération, qui se traduit par trois équations.

$$\int_{\Sigma} \vec{F}_e \cdot dV = \int_{\Sigma} \vec{\gamma} \cdot dm$$

2. Théorème (du moment dynamique):

En un point O quelconque, le moment résultant des actions extérieures est égal au moment dynamique en ce point, soit trois équations.

$$\int_{\Sigma} \vec{OM} \wedge \vec{F}_e(M) dV = \int_{\Sigma} \vec{OM} \wedge \vec{\gamma} dm$$

RAPPEL SUR LE PRODUIT VECTORIEL:

L'opérateur produit vectoriel, que nous notons \wedge , agit sur deux tenseurs d'ordre 1 (vecteurs). Il fait correspondre à deux vecteurs A et B un vecteur C qui, s'ils sont tous les trois exprimés dans une même base, peut être calculé par l'expression

$$C_i = \zeta_{ijk} a_k b_j \quad (1)$$

ζ_{ijk} : symbole de LEVI-CEVITA

a_j, b_j, c_j : les composantes respectives des vecteurs A, B, C

- $\zeta_{ijk} = 0$ si deux indices i, j, k sont égaux tous devant prendre les valeurs 1, 2, 3
 $\zeta_{ijk} = 1$ si les trois indices constituent une permutation paire des valeurs 1, 2, 3
 $\zeta_{123} = \zeta_{231} = \zeta_{312} = 1$
 $\zeta_{ijk} = -1$ si les trois indices constituent une permutation impaire des valeurs 1, 2, 3
 $\zeta_{213} = \zeta_{321} = \zeta_{132} = -1$

Ecrite sous forme matricielle l'expression (1) devient:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = [\vec{A}] \vec{B} \quad \text{avec: } [\vec{A}] \text{ matrice pré-produit vectoriel à droite par } \vec{A}.$$

-Double produit vectoriel:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

REMARQUE (sur les robots manipulateurs à chaîne ouverte):

La plupart des robots industriels construits à ce jour sont de type sériel, c'est-à-dire que leur structure mobile est une chaîne ouverte formée d'une succession de segments reliés entre eux par des liaisons à un degré de liberté, chaque articulation est commandée par un actionneur situé à l'endroit de l'articulation ou sur un des segments précédents; dans ce dernier cas, un mécanisme assure la transmission entre l'actionneur et l'articulation considérée.

Ces robots ont pour avantage de disposer d'un grand volume de travail et d'être relativement simples sur le plan des calculs liés à leur commande.

ANNEXE B

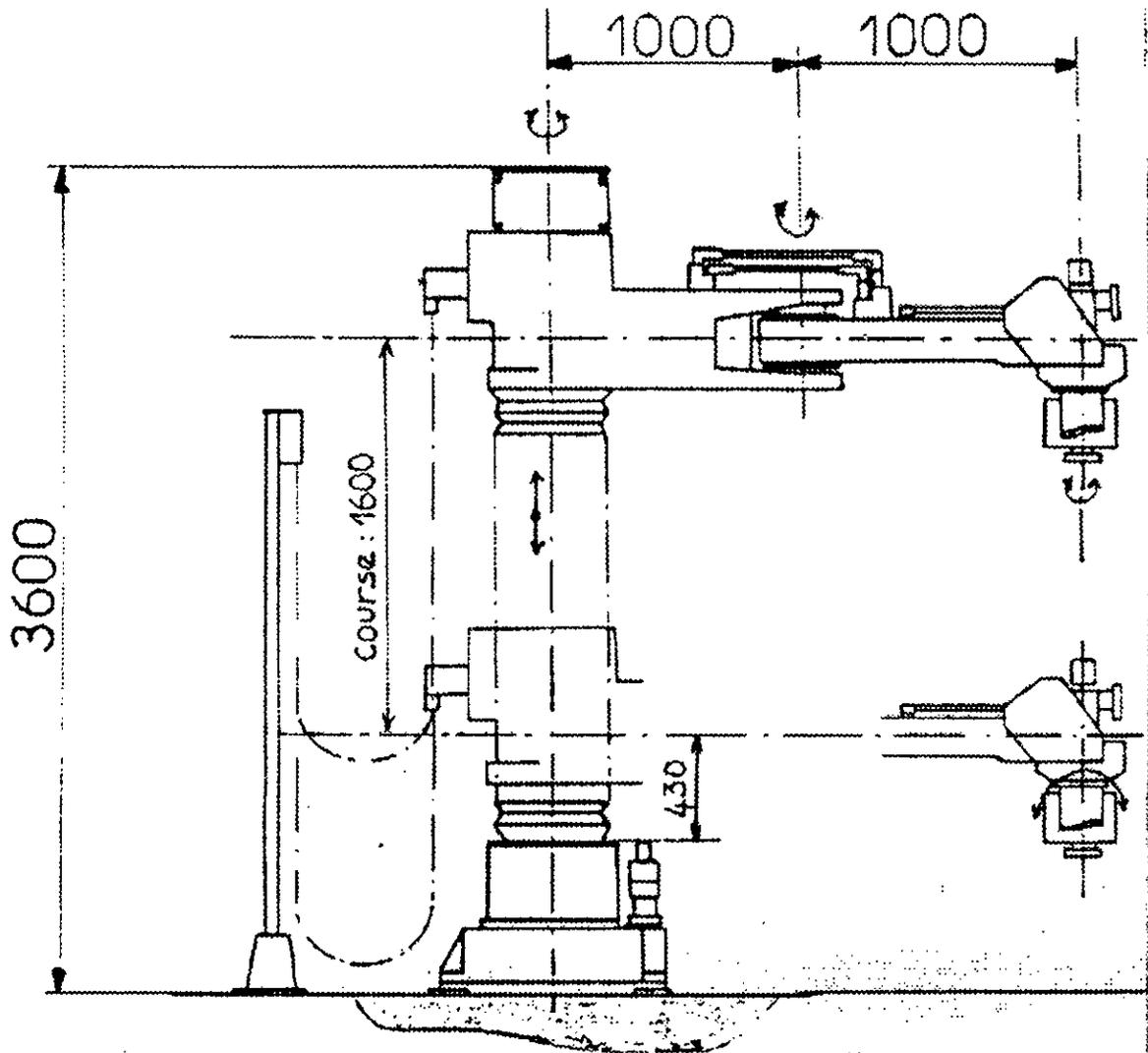
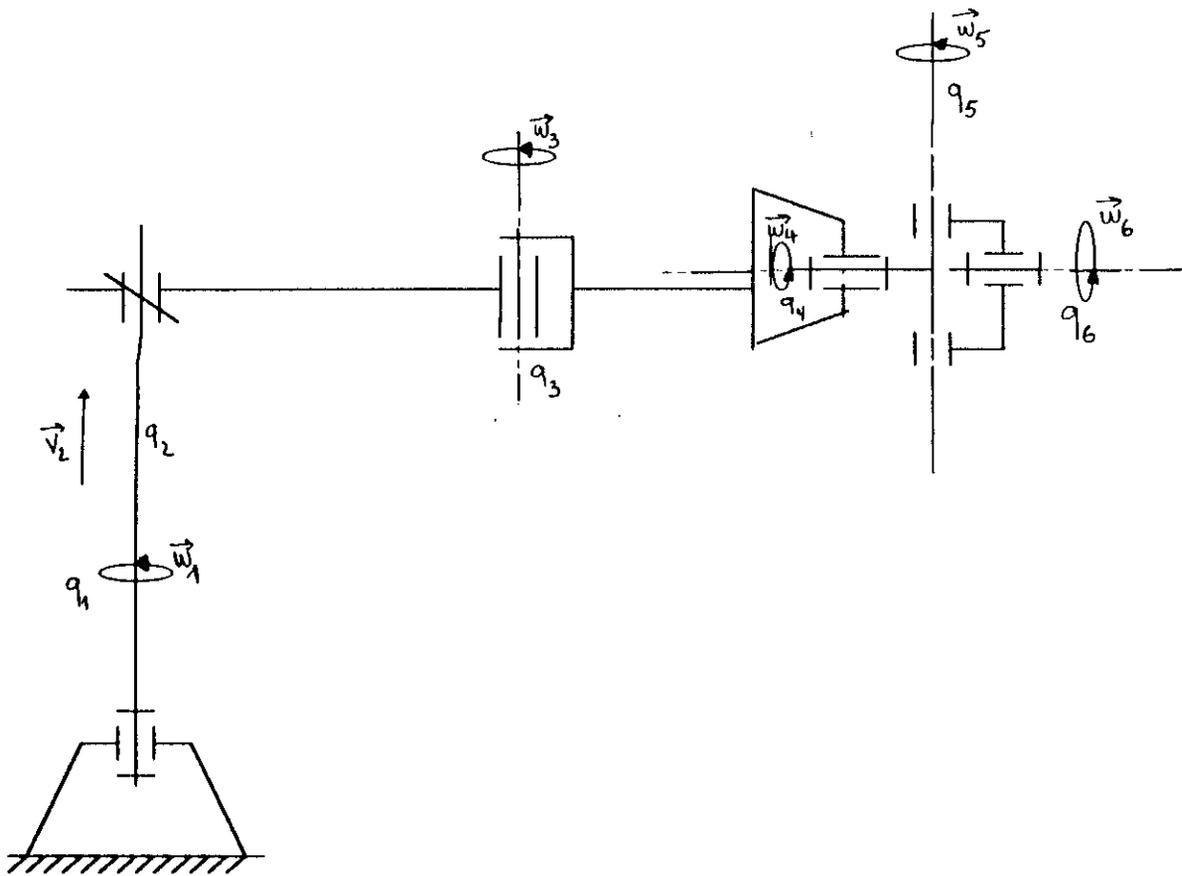
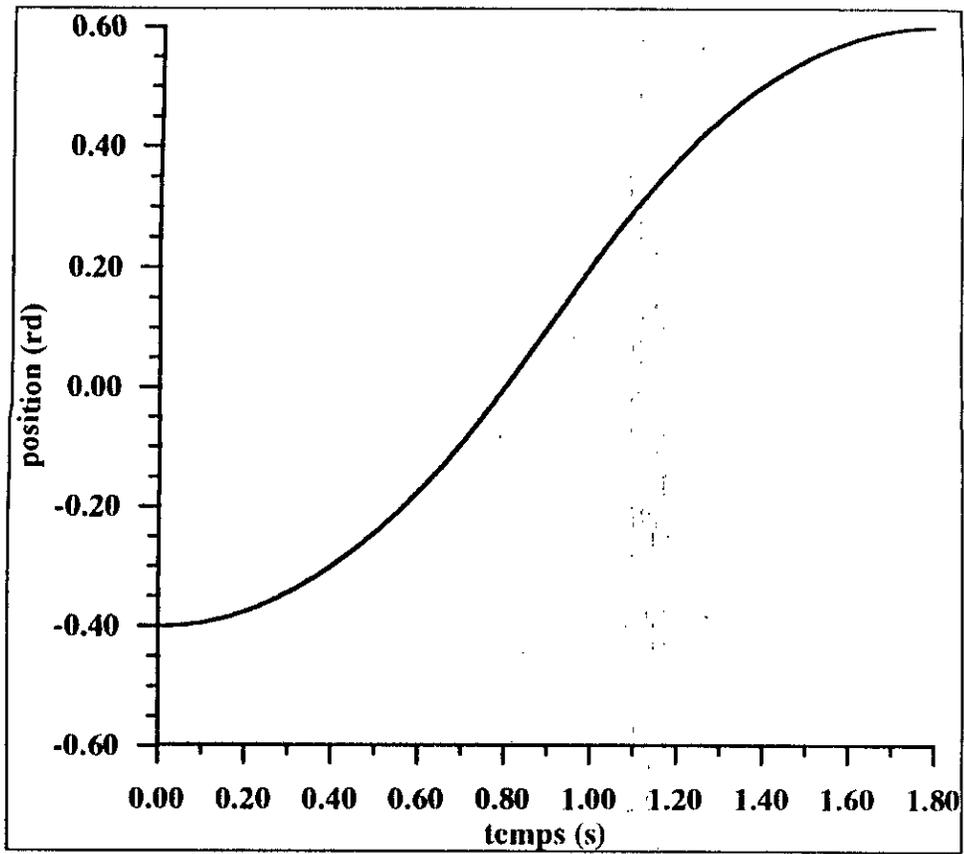


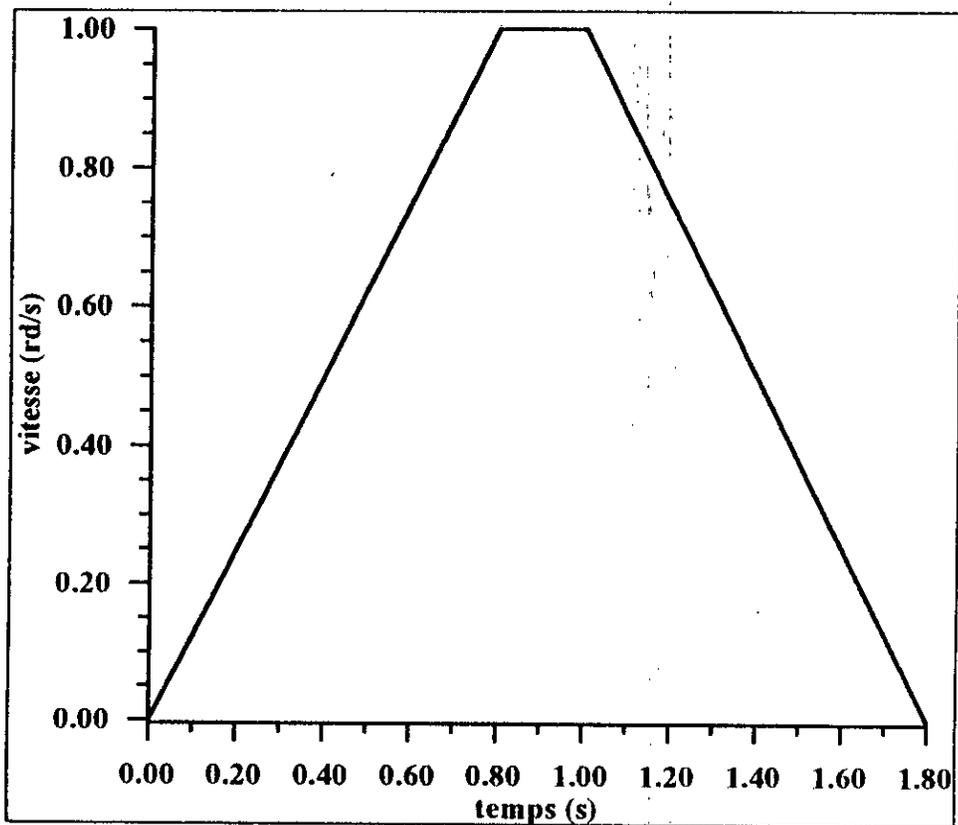
FIGURE DU ROBOT H80 EN C.I.G (TETE EN DESSOUS)



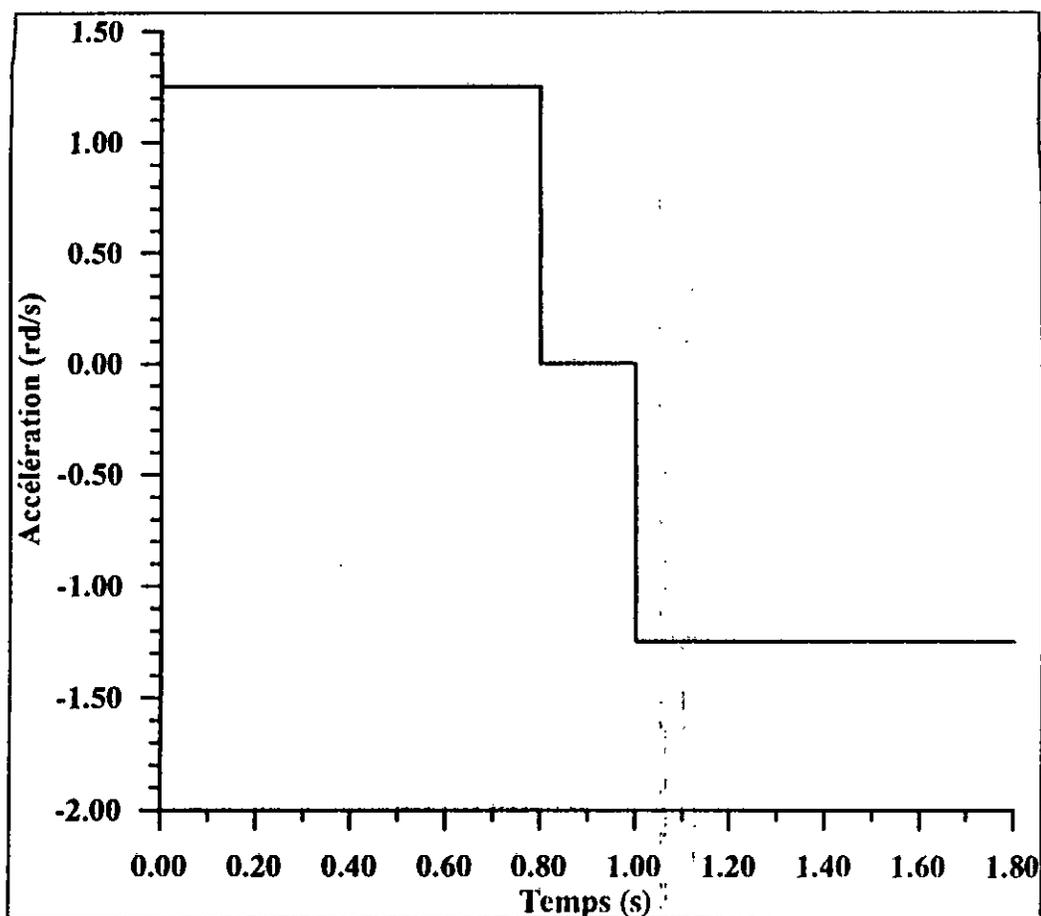
CHAINE CINEMATIQUE DU ROBOT 'H 80



POSITION (rd)

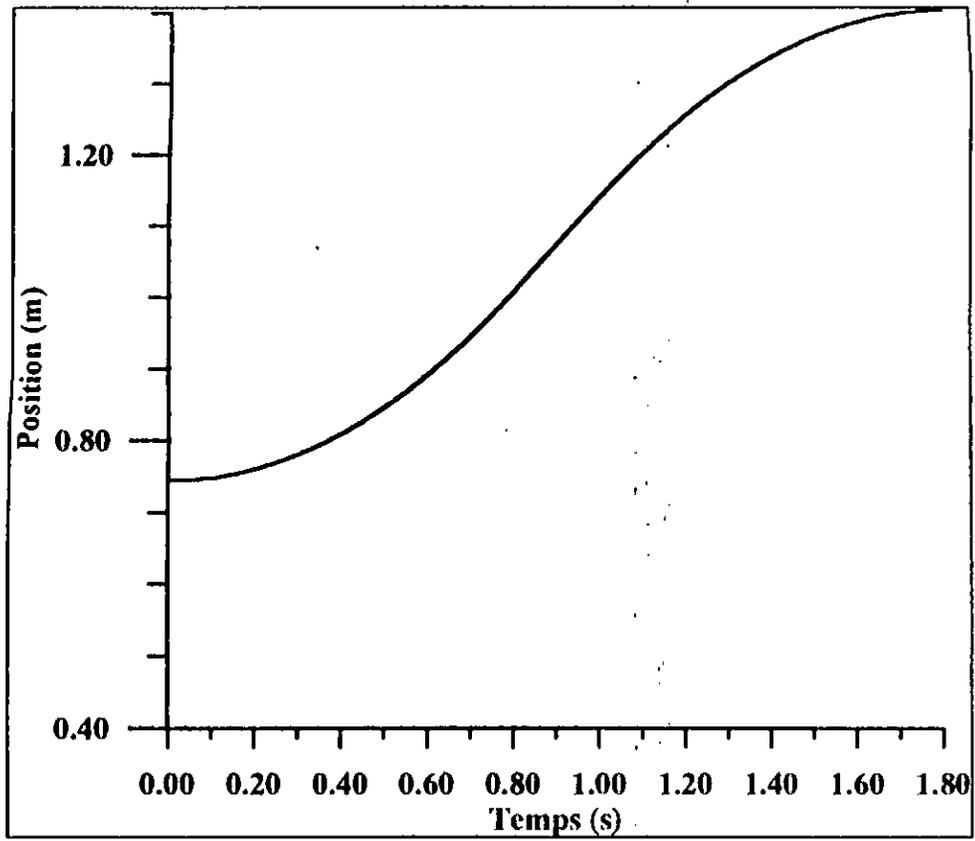


VITESSE (rd/s)

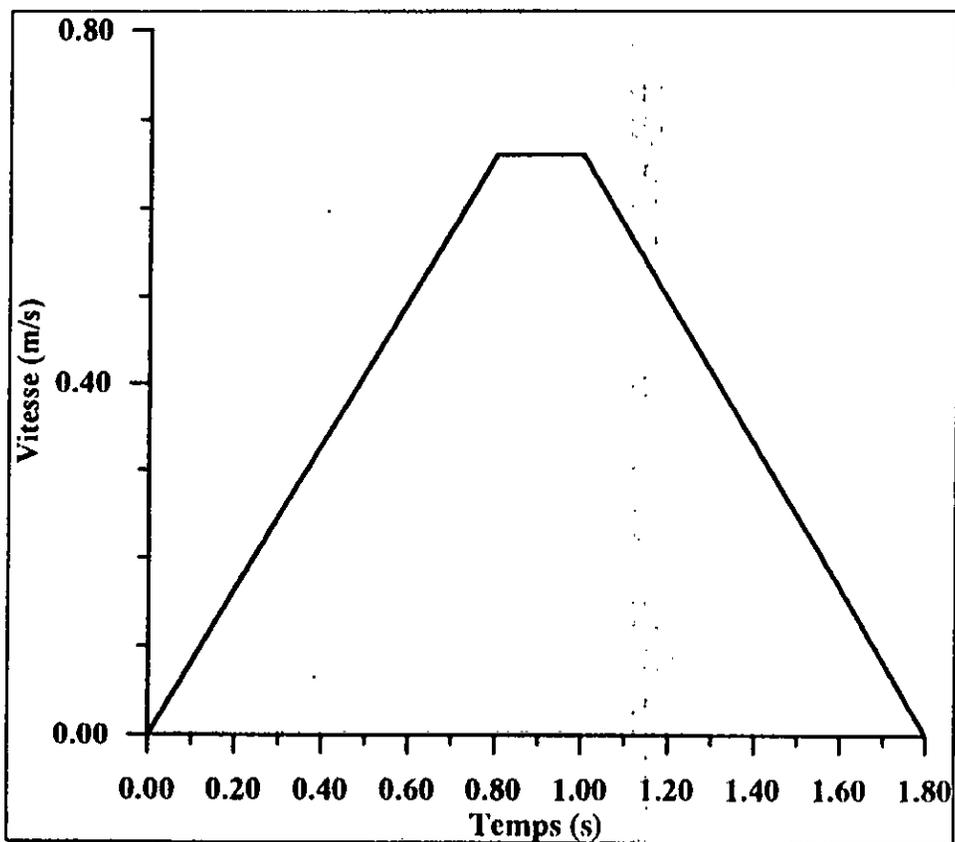


ACCELERATION (rd/s²)

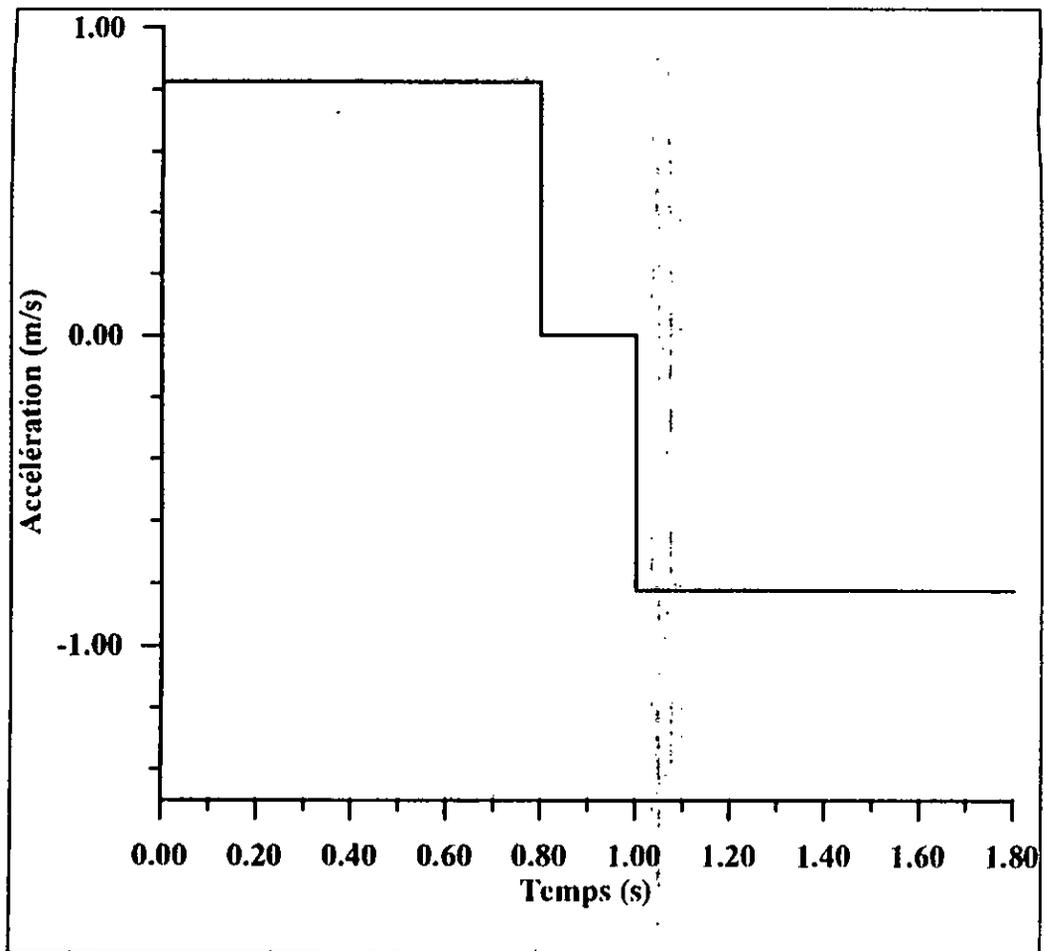
**REPRESENTATION GRAPHIQUE DES RESULTATS DU
PROGRAMME DE SIMULATION (génération de consignes) AXES:1 et 3.**



POSITION (m)

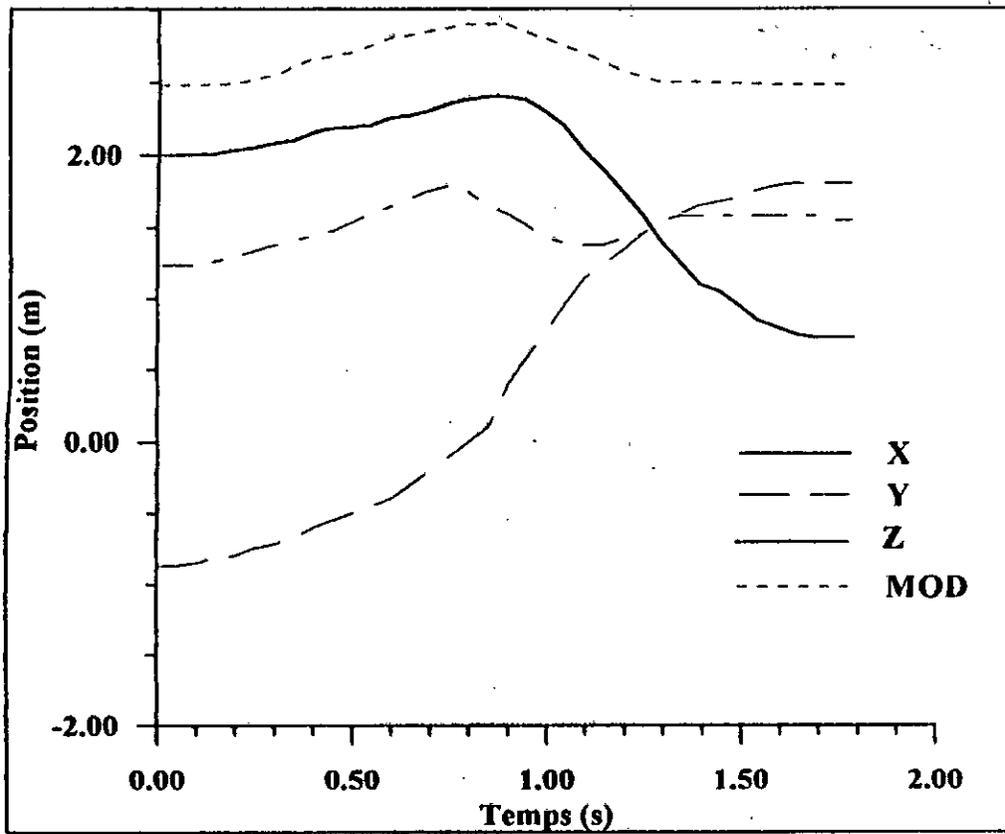


VITESSE (m/s)

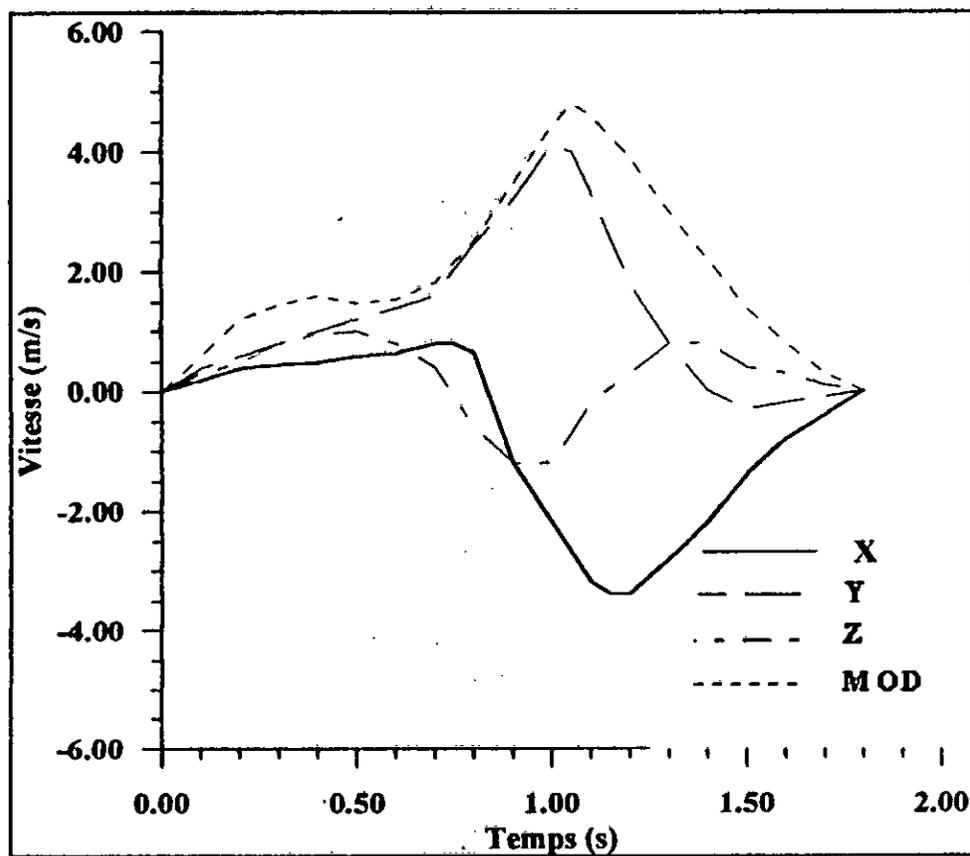


ACCELERATION (m/s²)

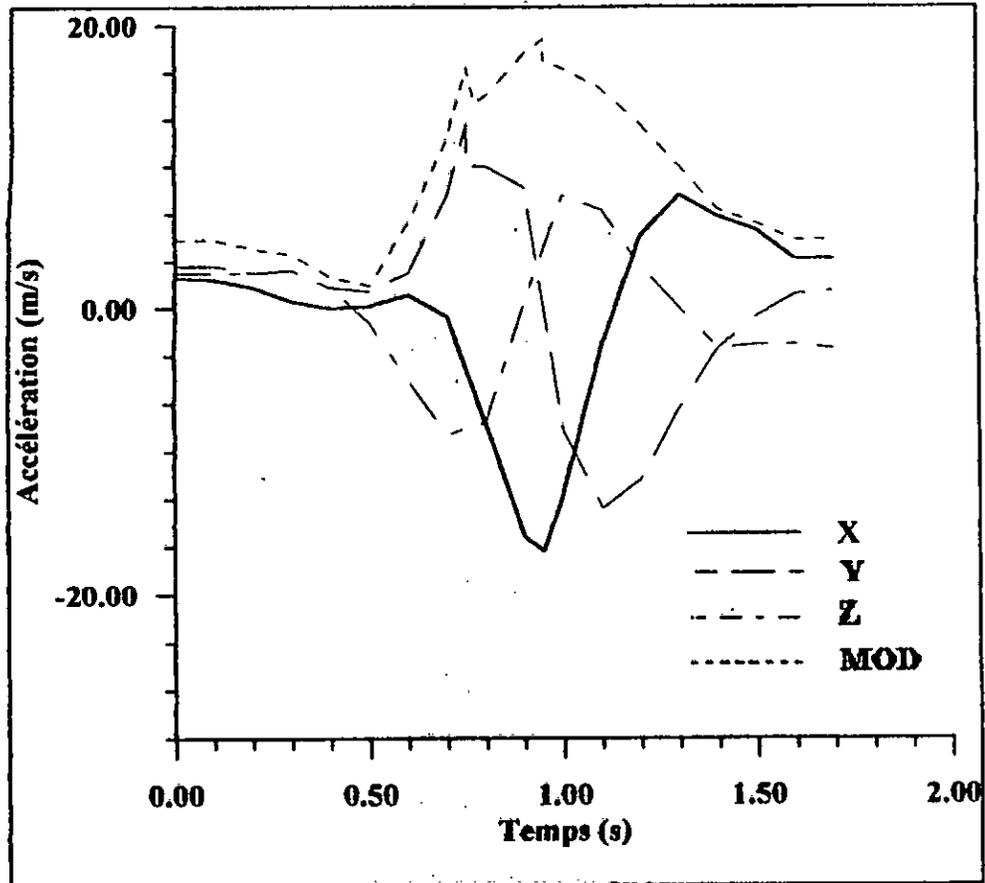
**REPRESENTATION GRAPHIQUE DES RESULTATS DU
PROGRAMME DE SIMULATION AXE:2**



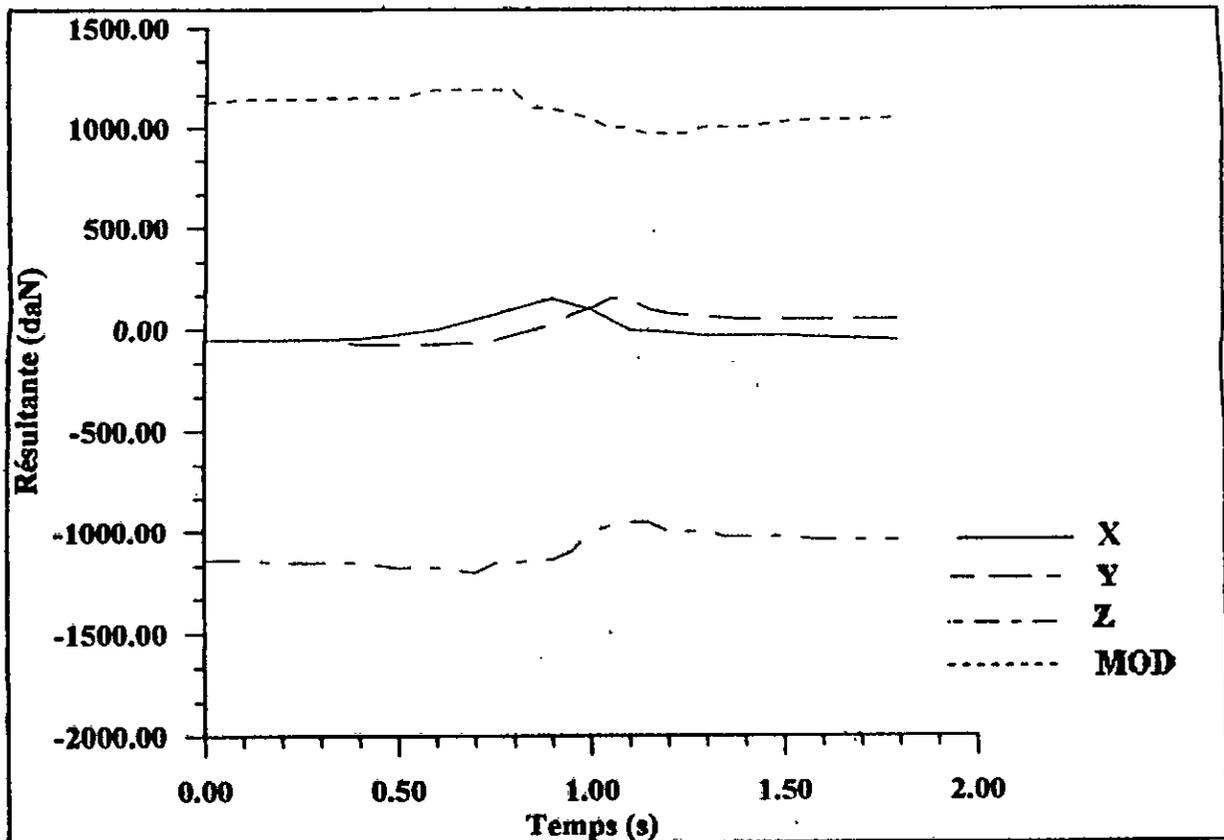
Evolution de la Position de l'organe terminal en fonction du temps dans R_0



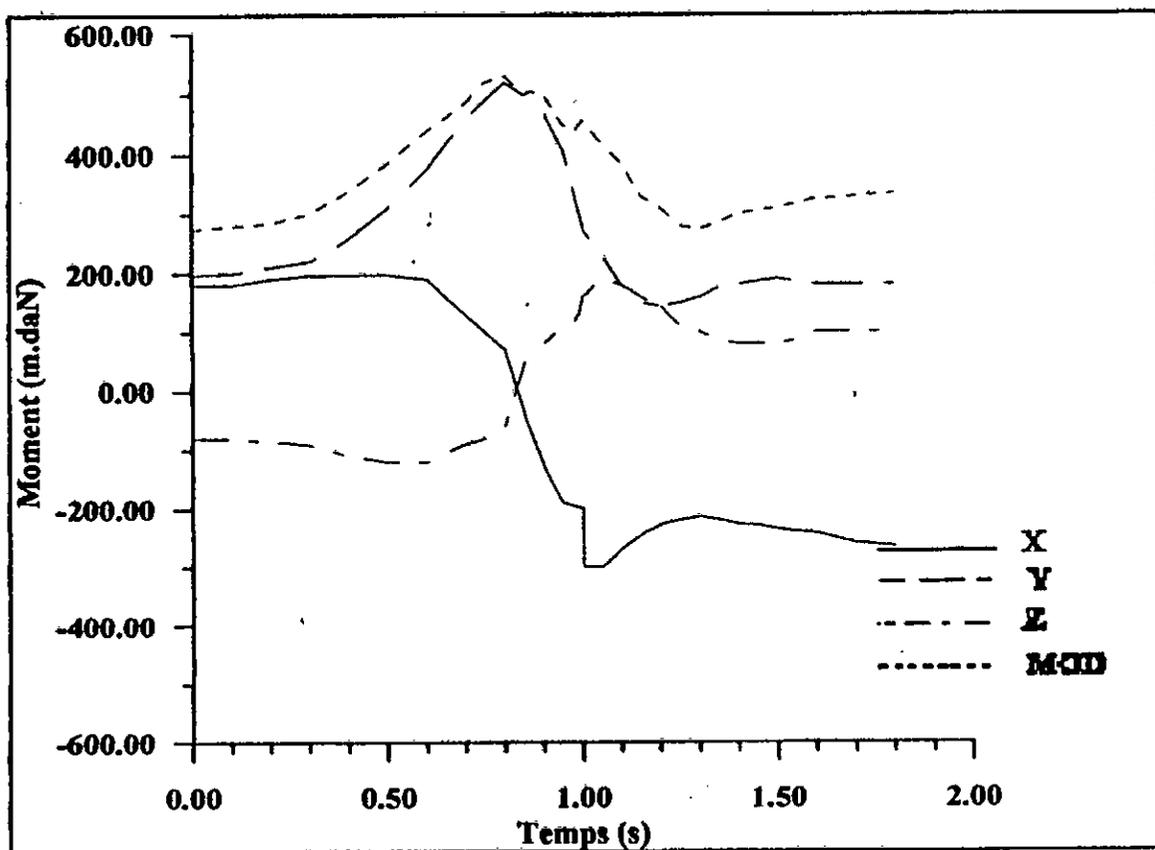
Evolution de la Vitesse de l'organe terminal en fonction du temps dans R_0



l'Accélération de l'organe terminal en fonction du temps dans R_0

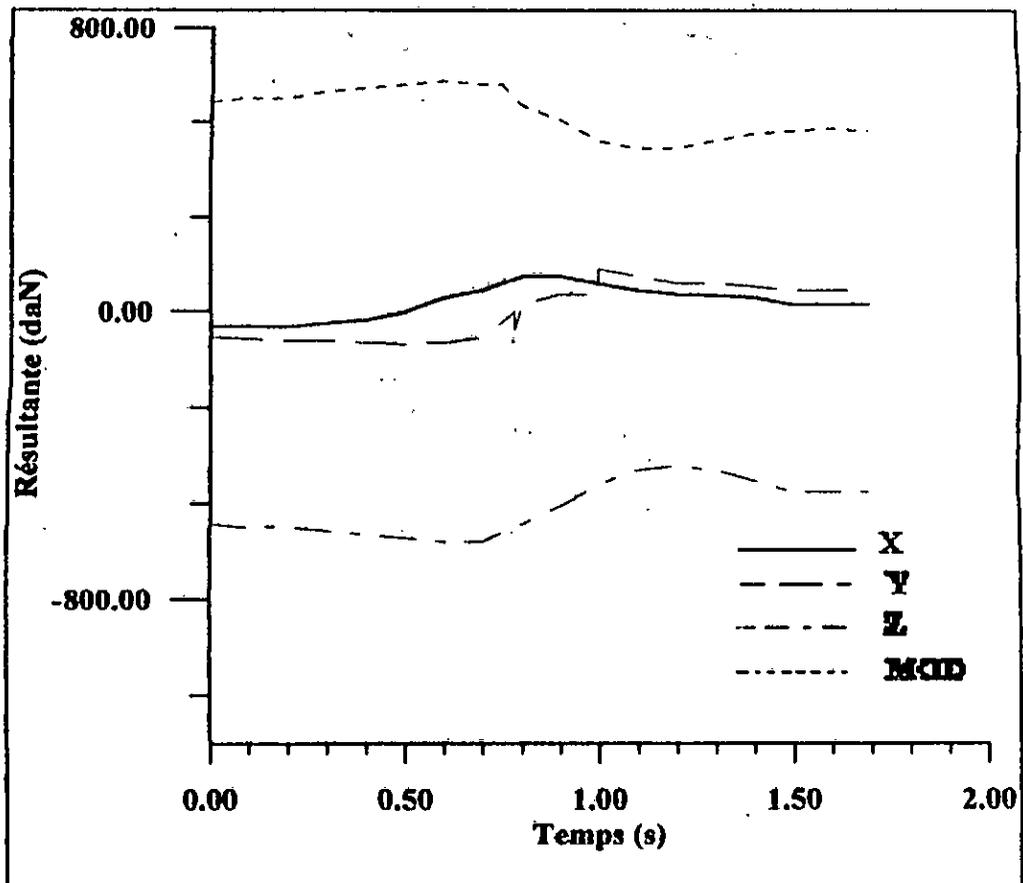


RESULTANTE

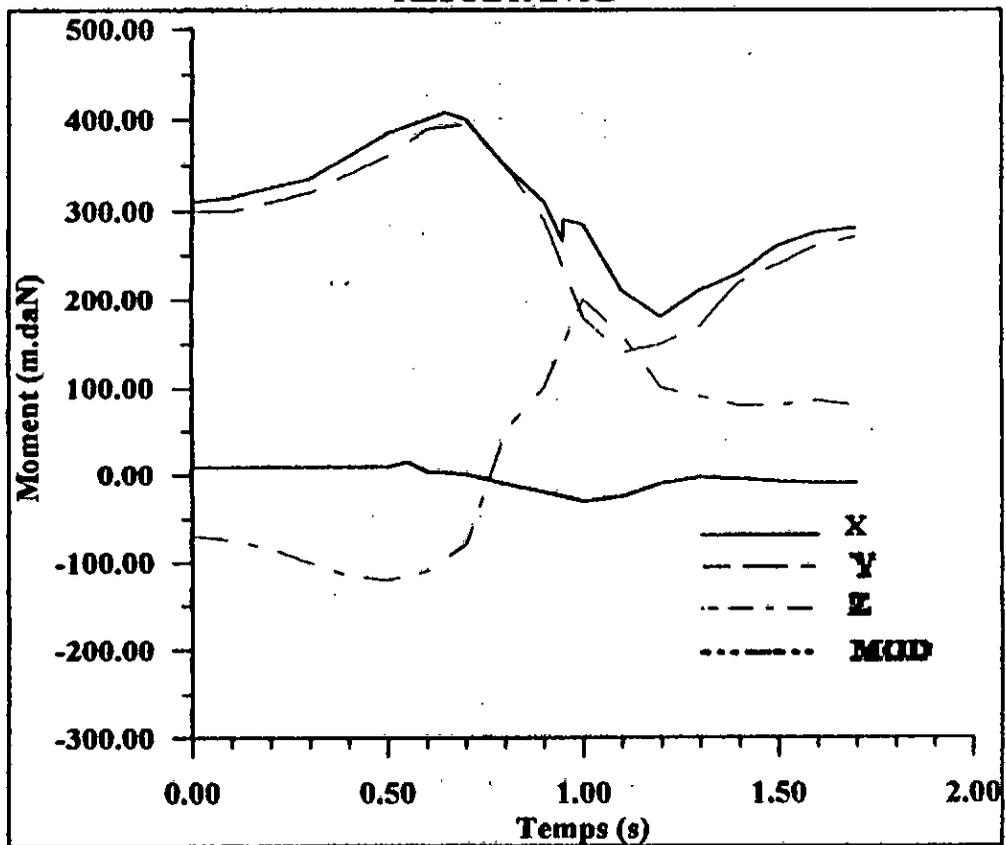


MOMENT

AXE 1: Evolution de la Résultante et du Moment en fonction du temps.

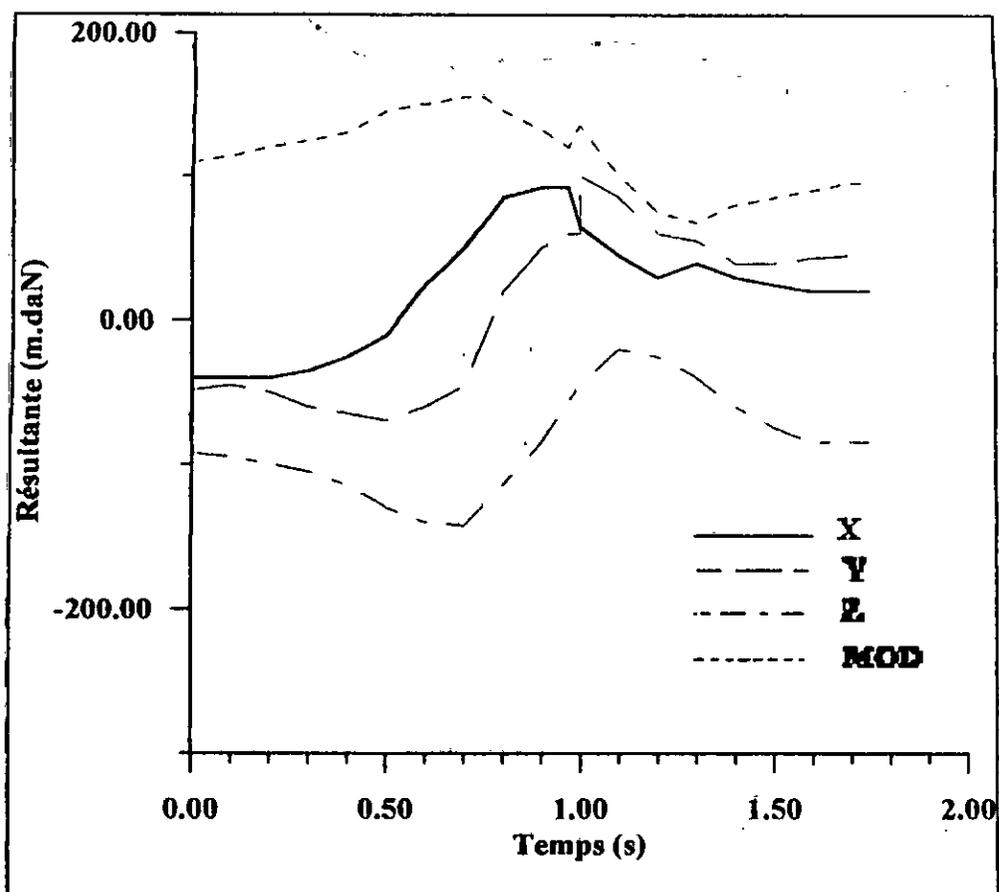


RESULTANTE

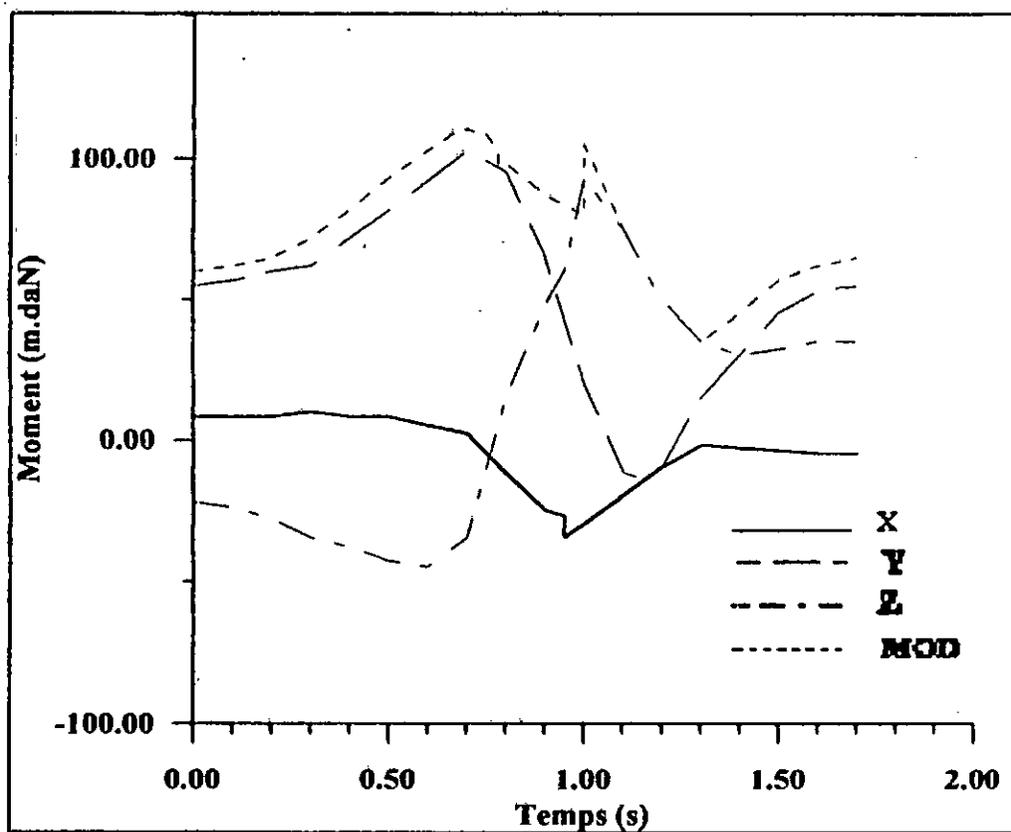


MOMENT

AXE 2: Evolution de la Résultante et du Moment en fonction du temps.

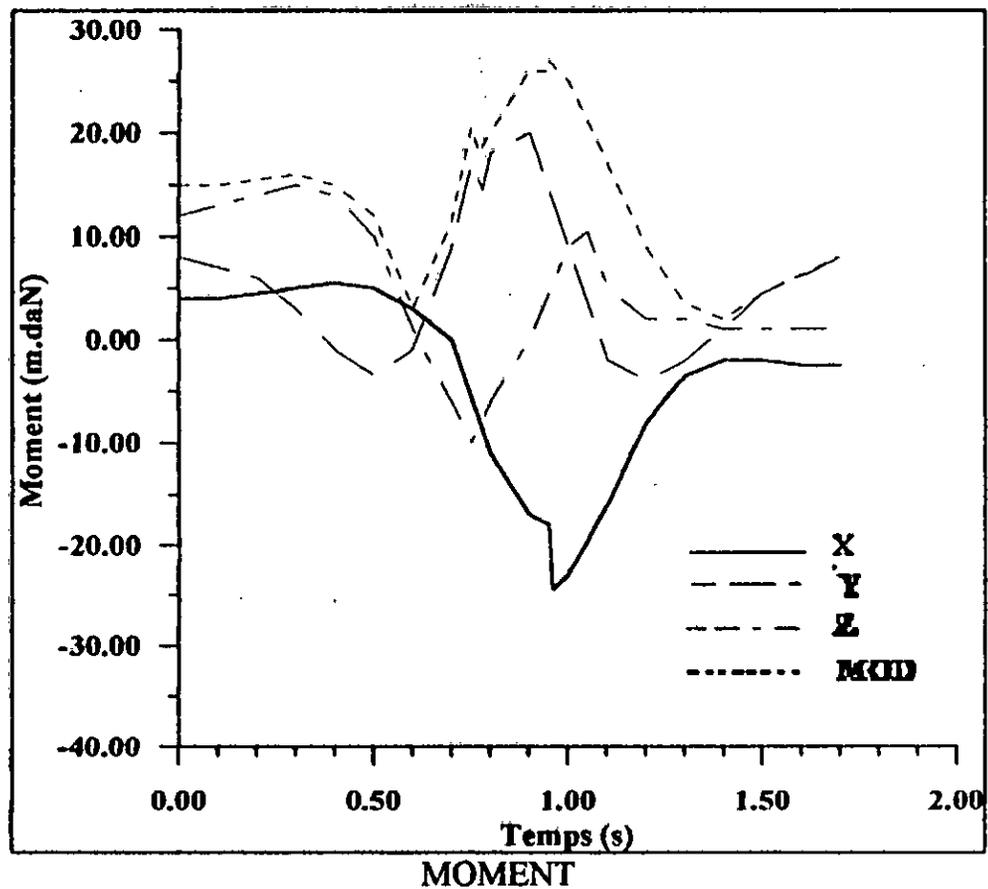
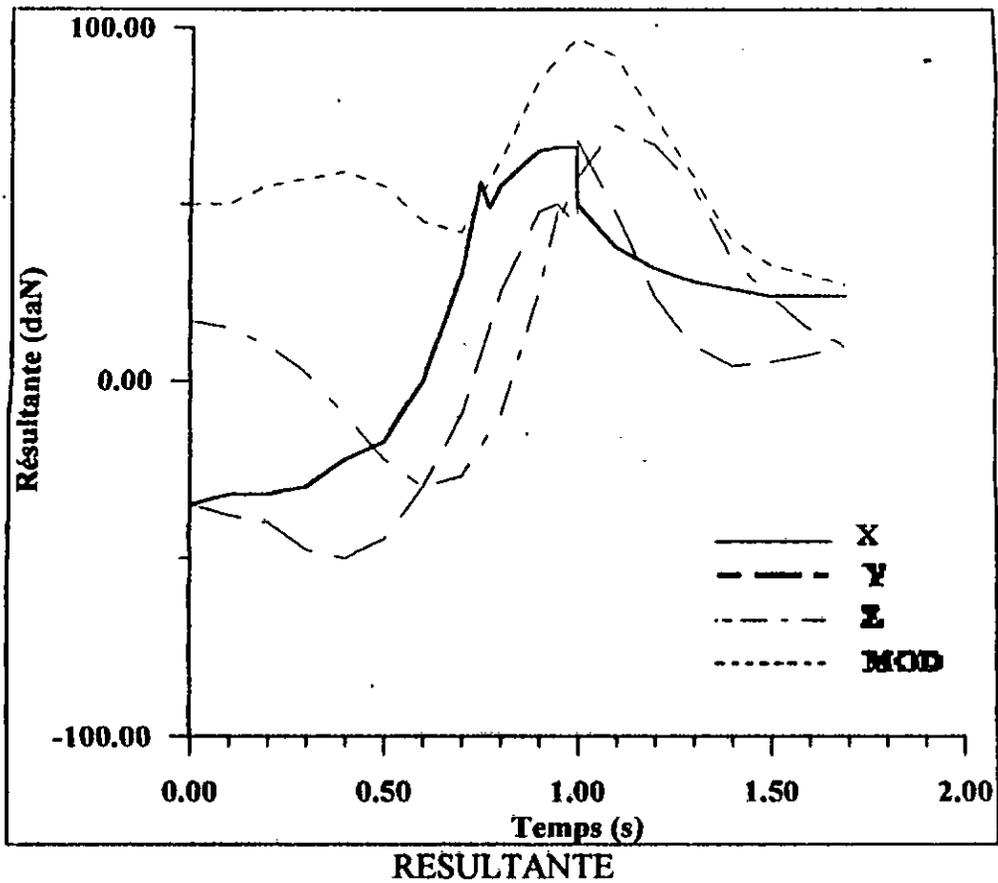


RESULTANTE

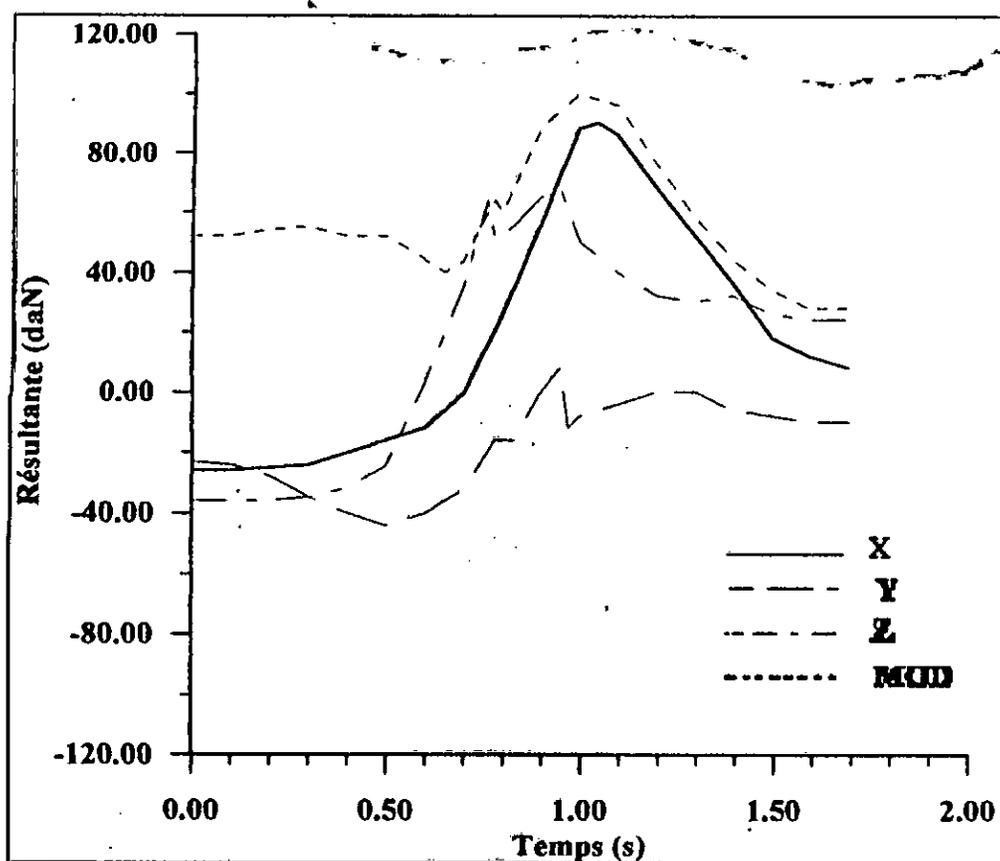


MOMENT

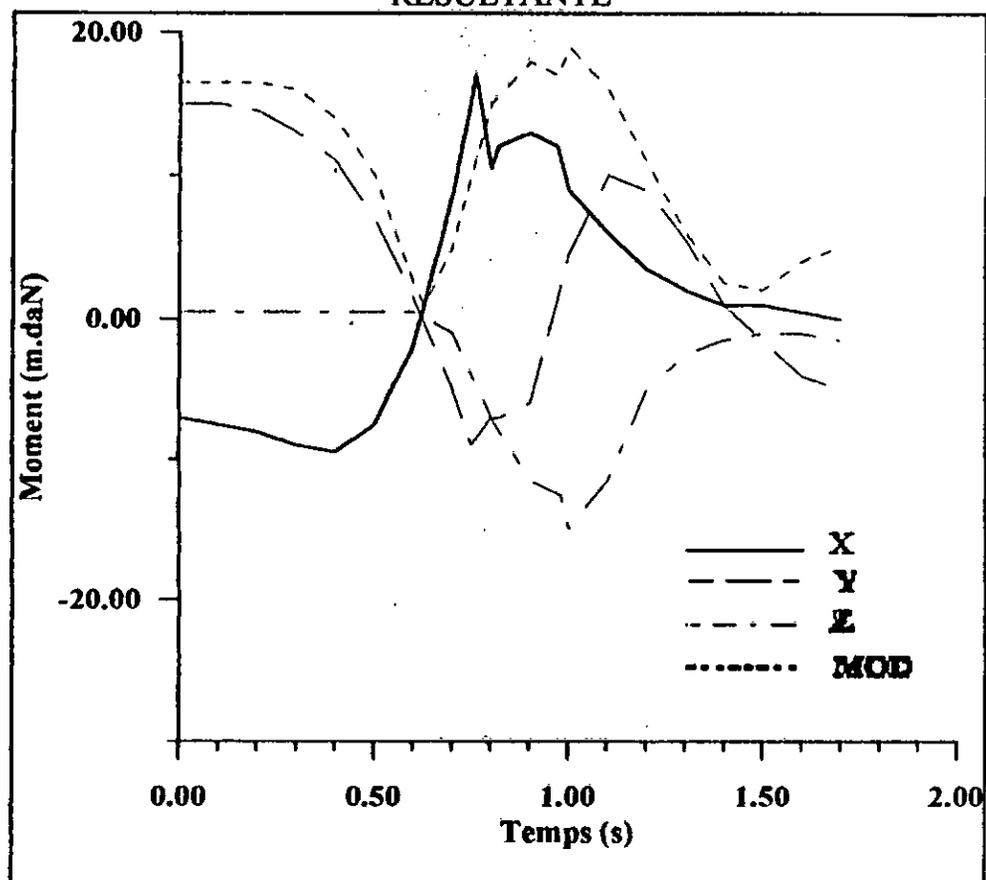
AXE 3: Evolution de la Résultante et du Moment en fonction du temps.



AXE 4: Evolution de la Résultante et du Moment en fonction du temps.

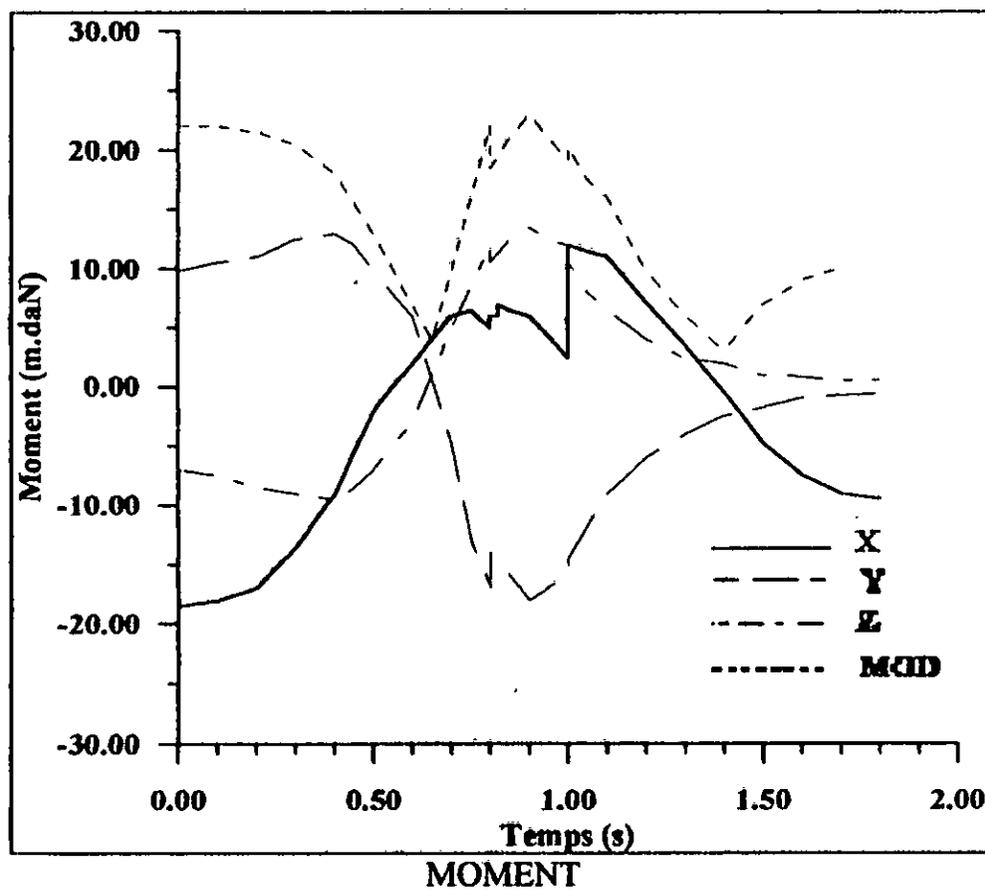
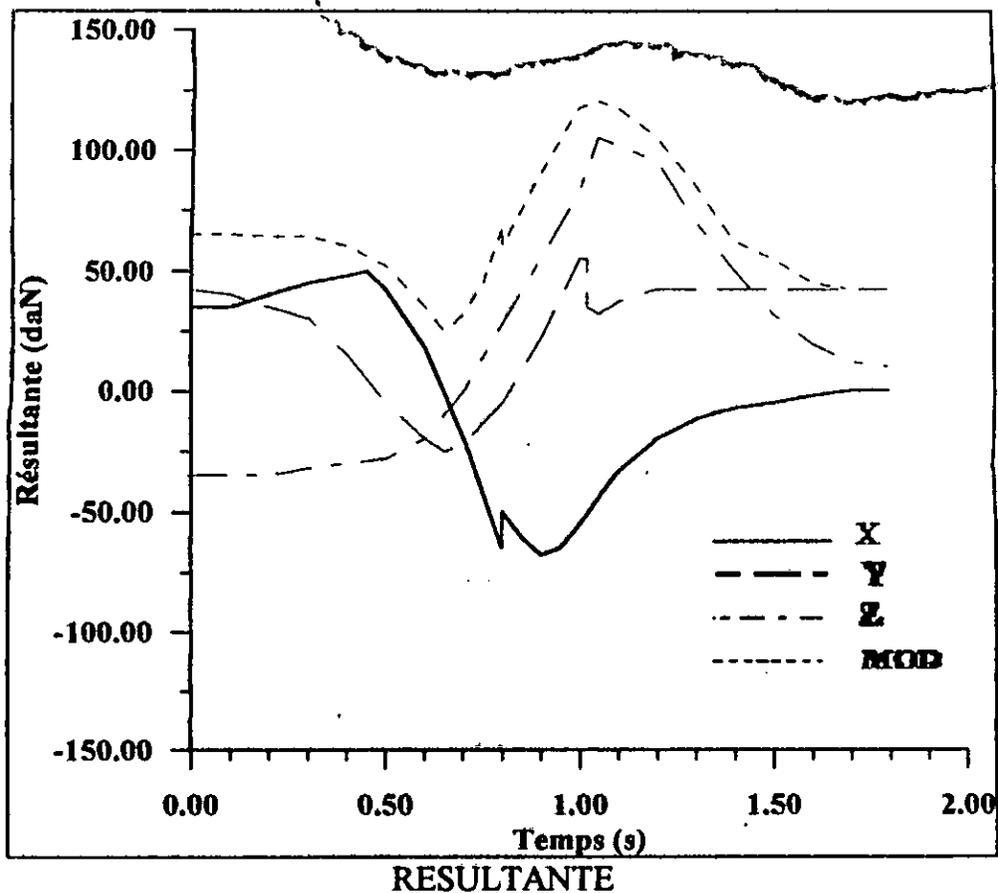


RESULTANTE



MOMENT

AXE 5: Evolution de la Résultante et du Moment en fonction du temps.



AXE 6: Evolution de la Résultante et du Moment en fonction du temps.