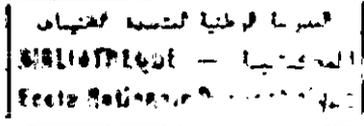


وزارة الجامعات والبحث العلمي
Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



DEPARTEMENT *Génie Mécanique*

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Une approche mathématique et numérique
pour l'étude des écoulements diphasiques
dans les conduites*

Proposé par :
R. DJELLOULI

Abel Housssem Bekki

Etudié par :

H.A.R. BOUTEKEDJIRET
M. HABOUSSI

Stohained

Dirigé par :
R. DJELLOULI

PROMOTION
1992

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

الميكانيك دائرة
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Spécialité :

GENIE MECANIQUE

Présenté par :

Houssem A. R. BOUTEKEDJIRET
Mohamed HABOUSSI

Pour obtenir le titre D'INGENIEUR D'ETAT DE L'ECOLE
NATIONALE POLYTECHNIQUE

Sujet du mémoire :

UNE APPROCHE MATHEMATIQUE ET NUMERIQUE
POUR L'ETUDE DES ECOULEMENTS DIPHASIQUES
DANS LES CONDUITES

Soutenu le 12 Juillet 1992

Devant le jury composé de :

Messieurs :

A. GAHMUSSE
M. AMARA
M. S. MOULAY
R. DJELLOULI

Président

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

إلى والدينا

REMERCIEMENTS

Ce travail nous a été proposé puis dirigé par M^r R.DJELLOULI; nous tenons à lui exprimer notre profonde gratitude et notre reconnaissance. Il nous a montré l'interêt et la richesse de l'analyse numérique comme outil, actuellement très performant pour la résolution de problèmes industriels. Nous ne saurons oublier les longues séances de travail, parfois houleuses, que nous avons eu avec lui ces trois dernières années. Nous espérons que ce travail sera digne de ses enseignements.

L'honneur que nous fait M^r A.GAHMOUSSE de présider notre jury, s'ajoute à tout le respect et la considération que nous avons pour lui. Nous l'en remercions vivement.

MM M.AMARA et M.S.MOULAY, ont aimablement accepté de nous faire l'honneur de participer à la critique de ce travail, qu'ils trouvent ici l'expression de notre profond respect.

Nous tenons à remercier vivement Mr A.BELHAOUAS (Directeur du C.R.D) pour tout les moyens qu'il a bien voulu mettre à notre disposition et sans lesquels ce travail n'aurait pu prendre forme.

Il ne faudrait pas oublier "l'inqualifiable" Selim pour toute sa patience et sa disponibilité de tout instant.

Nous remercions enfin toutes les personnes qui rendu ce travail possible.

"...إذا كانت الثقافة هي الجسر الذي يعبره
البعض إلى الرقي و التمدن، فإنها أيضا
ذلك الحاجز الذي يحفظ البعض الآخر
من السقوط من أعلى الجسر إلى الهاوية."

- مالك بن نبي -

- مشكلة الثقافة -

"De toutes les sciences que l'homme
peut et doit savoir, celle de faire le moins
de mal et le plus de bien possible est vraiment la principale."

ملخص

تستهدف هذه الدراسة محورين أساسيين :

أولهما وضع نموذج رياضي قادر على وصف سيلان ثنائي الأحوال

وثانيهما وضع طريقة عددية ذات طابع الفروق المتناهية لحلّ

النموذج الرياضي المعتمد.

وانطلاقا من المزيج ، نقتترح نموذجا رياضيا معتمدين نشرًا تقريبا.

أما من الجانب العددي ، نقتترح طريقة بسيطة و سهلة البرمجة لحلّ

ذلك النموذج.

تبدو النتائج المحصل عليها جدّ مشجعة.

SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Dédicaces
Remerciements
Résumé
Sommaire

INTRODUCTION GENERALE

3

1ère Partie

MODELISATION MATHEMATIQUE DES ECOULEMENTS DIPHASIQUES

INTRODUCTION

9

Chapitre 1

MODELE BIPLUIDE

13

Bilans d'équilibre pour chaque phase.....	13
Conditions de transfert à l'interface.....	15
Equations constitutives.....	17
Conclusion.....	20

Chapitre 2

Chapitre 2

MODELE MONOFLUIDE

23

Les variables thermodynamiques du mélange.....	23
Bilans d'équilibre pour le mélange.....	25
Equations constitutives.....	26
Conclusion.....	27

Chapitre 3

MODELE PHYSIQUE ADOPTE

31

Hypothèses.....	31
Equations du modèle.....	32
Conditions initiales et conditions aux limites....	36
Conclusion.....	36

2ème Partie

RESOLUTION NUMERIQUE

INTRODUCTION

41

Chapitre 4

DESCRIPTION DU PROBLEME APPROCHE

45

Rappel du problème mathématique continu.....	45
Problème approché.....	49

Chapitre 5

DESCRIPTION DE LA METHODE DE RESOLUTION

55

Algorithme de résolution.....	56
Conclusion.....	62

Chapitre 6	EXPERIENCES NUMERIQUES	67
	Ecoulement diphasique.....	68
	Ecoulement de gaz.....	79
	Conclusion.....	86
CONCLUSION GENERALE		89
Annexe 1	EQUATIONS DU MODELE	93
Annexe 2	METHODE DE BROWN POUR LA RESOLUTION DES SYSTEMES ALGEBRIQUES NON LINEAIRES	99
Références		105

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE

L'un des vieux rêves de l'ingénieur, est la possibilité de prédéterminer les phénomènes physiques qu'il étudie, sans recourir systématiquement à l'expérience physique au préalable.

Pour satisfaire à cette demande, les chercheurs ont sans cesse essayé de mettre en "équations" des phénomènes physiques, de résoudre ces équations et de comparer les résultats de calcul aux données expérimentales. Lorsque la comparaison est satisfaisante et la physique assez bien comprise, ces équations reçoivent alors le label de "modèle mathématique".

Ainsi, durant les trente dernières années, les instruments de travail de l'ingénieur ont subi d'énormes évolutions. A la place des catalogues contenant des formules toutes faites et des abaques toutes tracées, l'ingénieur ressent de plus en plus le besoin de "revenir aux sources", en se tournant de nouveau vers les principes fondamentaux de la physique, vers les équations qui en découlent mais aussi vers les méthodes de résolution de ces dernières.

La mécanique des fluides est une branche de la physique qui depuis longtemps se trouve être le champ d'application des progrès de la résolution numérique des équations aux dérivées partielles; cela est dû à un fait: la mécanique des fluides est riche en non linéarité, non linéarité qui limite dramatiquement les méthodes habituelles.

A travers ce travail nous allons essayer d'appliquer cette méthodologie (modélisation puis résolution) à l'étude des écoulements diphasiques.

Nous nous intéressons aux écoulements diphasiques constitués d'un brouillard de gouttes suspendues dans une phase gazeuse. C'est le type d'écoulements que l'on retrouve lors du transport du gaz naturel dans les conduites.

Ces brouillards étant formés d'un nombre assez élevé de gouttes, il n'est donc pas possible de résoudre un problème de frontières libres pour chacune de ces gouttes. La simulation d'un tel écoulement nécessite alors l'introduction de modèles macroscopiques dans lesquels les gouttes sont traitées de façon collective. Deux voies sont possibles:

- * Une approche cinétique classique dans le problème de la cinétique des gaz (Cf. [B1]).
- * Une approche eulérienne classique dans la mécanique des milieux continus (Cf. [De1], [Is]).

Pour des considérations mathématiques et numériques, nous avons opté pour une approche eulérienne dans laquelle chaque phase est traitée comme un fluide continu. Le système ainsi obtenu présente l'avantage d'être plus adapté à la résolution numérique.

Les différents champs qui caractérisent chacune des deux phases sont définis comme moyenne des quantités microscopiques correspondantes. Nous introduisons ainsi la masse et la fraction volumique moyenne du gaz, les impulsions et les énergies moyennes de chacune des deux phases.

Le système d'équations qui gouverne l'évolution de ces grandeurs macroscopiques est obtenu en moyennant par rapport au temps les équations de bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, vérifiées par l'écoulement du gaz et du liquide autour et à l'intérieur des gouttes. Ce système est "fermé" par des équations d'état et des équations constitutives fonction des variables macroscopiques évoquées précédemment.

L'approche eulérienne conduit essentiellement à deux modèles importants (Cf. [Del], [Is]):

i-Le modèle bifluide où chaque phase (liquide, gaz) est décrite séparément: deux fois trois équations de conservation phasique, complétées par des conditions de transfert à l'interface et des équations constitutives.

ii-Le modèle monofluide (ou de la mixture) qui considère le mélange diphasique comme un tout, est décrit par trois équations de conservation auxquelles vient s'ajouter en général, soit une équation de conservation de la masse phasique soit une équation de propagation du taux de vide (Cf. Chap.2). Il est de même complété par des équations constitutives.

Dans ce travail, nous avons choisi le deuxième modèle (monofluide) qui, pris dans sa globalité, reste très complexe à traiter. Nous l'avons simplifié en nous appuyant sur un développement asymptotique, qui traduit essentiellement l'idée que l'écoulement ainsi que les phénomènes thermodynamiques s'y rattachant se font le long d'une direction privilégiée. Cette hypothèse est licite puisque nous étudions exclusivement des écoulements à phase dispersée dans les conduites.

Pour résoudre numériquement le problème mathématique obtenu, nous avons adopté une méthode à base de différences finies. Il existe dans la littérature plusieurs travaux qui traitent des problèmes de mécanique des fluides de ce type (Cf. [Ba], [Du], [La], [Le], [Sal], [Vi]).

Pour ce qui est des problèmes diphasiques, nous pouvons citer le travail de [Mo] qui utilise une technique d'éléments finis et celui de [To] qui résoud à l'aide des schémas de Godunov (Cf. [Ra]).

Quant au schéma numérique que nous avons construit, il tient compte de la nature de l'écoulement i.e. il traduit le fait que l'état thermodynamique du système à un instant donné dépend de l'état en amont au même instant et de l'état en aval à l'instant précédent.

• Finalement, le travail que nous présentons est constitué de deux parties. La première partie est consacrée à l'établissement du modèle mathématique. Nous commençons tout d'abord par introduire, au chapitre 1, le modèle bifluide, nous déduisons ensuite, au chapitre 2, les équations du mélange (le modèle

monofluide) et nous établissons enfin, au chapitre 3, à l'aide du développement asymptotique le modèle mathématique adopté pour décrire les écoulements diphasiques à phase dispersée dans les conduites.

La deuxième partie porte sur la résolution numérique du modèle mathématique obtenu précédemment. Nous commençons, au chapitre 4, par construire le schéma d'approximation, nous décrivons ensuite, au chapitre 5, la méthode de résolution du système algébrique non linéaire obtenu au chapitre précédent et enfin nous effectuons, au chapitre 6, des expériences numériques pour valider la méthode d'approximation du problème continu.

Nous terminerons ce travail par une conclusion générale.

Mots clés:

Transport du gaz, Dynamique des gaz, Ecoulement diphasique, Phase dispersée

Différences finies, Schéma implicite, Système algébrique non linéaire.

PARTIE 1

**MODELISATION MATHEMATIQUE DES
ECOULEMENTS DIPHASIQUES**

De façon générale, un modèle mathématique est un ensemble d'équations présumé représenter le comportement d'un phénomène physique considéré dans des conditions données.

Fondamentalement, l'établissement d'un tel modèle, pour les écoulements diphasiques¹, repose sur les axiomes issus de la mécanique des milieux continus (Cf. [Ba], [Is]). Le domaine diphasique est alors subdivisé en domaines monophasiques limités par des surfaces fixes ou mobiles. Ainsi, en théorie, il est possible de formuler un problème d'écoulement diphasique en terme de variables locales instantannées, i.e.:

$$F = F(\vec{x}, t)$$

où: \vec{x} : vecteur espace,
 t : variable temps.

L'écoulement est alors complètement décrit par un ensemble de deux systèmes d'équations s'écrivant sous la forme (Cf. [To]):

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t U_k(\vec{x}, t) = L_k(U_k) \\ \vec{x} \in \Omega_k(t) \subset R^3 \end{array} \right. \quad k = l, g$$

où:

$\Omega_k(t)$: est le domaine occupé par la phase liquide ($k=l$) ou gaz ($k=g$) à l'instant t ,

$U_k(\vec{x}, t)$: est un vecteur d'état décrivant les caractéristiques du fluide dans la phase k ,

L_k : est un opérateur aux dérivées partielles approprié.

Pour "fermer" ce système, il faut s'imposer des conditions aux limites qui traduisent les phénomènes de transfert de masse, de quantité de mouvement et d'énergie aux bords des domaines $\Omega_k(t)$.

Cette approche locale instantannée aboutit donc à un problème aux conditions aux limites multiples qui ne peut être résolu que pour des types d'écoulement très particuliers comme les écoulements de monogoutte ou monobulle (Cf. [Is], [Wa]).

¹ Un écoulement diphasique ou fluide diphasique est caractérisé par la présence côte à côte de deux phases qui interagissent fortement. Il existe entre elles des transferts de masse, de quantité de mouvement et d'énergie.

Il apparaît donc nécessaire de se ramener en pratique à des modèles plus simples et capables de rendre compte des phénomènes physiques liés aux écoulements diphasiques rencontrés dans les différents processus industriels.

Ces modèles sont obtenus en appliquant aux équations locales instantanées une procédure de moyenne spatiale, temporelle, statistique ou mixte² (Cf. [Del], [Is], [Sal]).

Cette démarche aboutit à un système d'équations similaire au système d'Euler habituel mais "pondéré" par le facteur α appelé taux de vide (Cf. Chap.1) et présentant les différences importantes suivantes (Cf. [To]):

- Forme non conservative de certaines équations.
- Système d'équation éventuellement non hyperbolique.

Pour saisir l'importance de ces opérateurs de moyenne, il faut rappeler que dans plusieurs cas d'écoulements diphasiques des fluctuations locales des propriétés physiques apparaissent. Ces fluctuations ne sont pas uniquement dues aux phénomènes de turbulence comme dans les écoulements monophasiques, mais aussi aux mouvements et déformations rapides des interfaces. La solution découlant de la formulation locale instantanée étant inaccessible, il apparaît alors nécessaire de moyennner.

La procédure de moyenne la plus utilisée en mécanique des milieux continus est celle basée sur les opérateurs de moyenne d'Euler (Cf. [Is]). En effet, ces opérateurs sont étroitement liés aux observations des phénomènes et aux prises de mesure expérimentales.

Dans notre cas, nous appliquons aux équations locales instantanées l'opérateur temporel d'Euler, ce qui nous ramène à des équations locales, moyennées dans le temps (Cf. [Del], [Is]).

Dans cette partie nous développons en détail le modèle général d'écoulement diphasique (Cf. Chap.1) appelé aussi "modèle bifluide". Ce modèle reste difficile à étudier. Nous introduisons alors (Cf. Chap.2) des variables dites du mélange ce qui nous permet de le réécrire sous la forme dite "monofluide".

Bien que le modèle obtenu soit mieux adapté, il reste de part sa forme générale assez complexe à étudier. C'est pourquoi (Cf. Chap.3), moyennant des considérations physiques liées à la nature de l'écoulement que nous traitons (transport du gaz dans les conduites), nous effectuons un développement asymptotique nous permettant ainsi d'établir un modèle plus pratique à l'analyse mathématique et numérique.

C'est ce modèle qui fera l'objet d'une résolution numérique dans la seconde partie de ce travail.

² Nous renvoyons le lecteur à [Ba] où un exposé détaillé sur la question est présenté.

MODELE BIFLUIDE

Le modèle bifluide, appelé aussi modèle à deux fluides, est établi en considérant chaque phase (liquide-gaz) séparément. Les équations de ce modèle traduisent les bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie pour chaque phase.

De plus, l'interaction thermodynamique des phases est prise en compte par l'introduction de termes sources Γ_k , M_k et E_k exprimant respectivement les transferts de masse, de quantité de mouvement et d'énergie à l'interface des phases. Comme ces termes doivent satisfaire à des bilans d'équilibre à l'interface, nous aboutissons alors à un ensemble de six équations aux dérivées partielles et trois équations algébriques de transfert à l'interface (Cf. [Del], [Is]).

Le modèle bifluide trouve son application dans les problèmes où la connaissance des interactions dynamiques entre phases est nécessaire. En effet, l'écriture des deux équations de quantité de mouvement avec deux champs de vitesse différents nous permet de bien décrire ce type de phénomène. Il est aussi bien adapté à l'étude des changements de régime d'écoulement. En effet, ces changements étant liés aux instabilités des interfaces, ils peuvent donc être pris en considération dans les conditions de transfert.

Dans ce chapitre, nous présenterons tout d'abord les équations d'équilibre du modèle bifluide; nous poserons ensuite les conditions de transfert à l'interface et enfin nous établirons les équations constitutives nécessaires à la description complète des phénomènes physiques se produisant dans l'écoulement. Nous terminerons ce chapitre par une conclusion sur le modèle.

1- BILANS D'EQUILIBRE POUR CHAQUE PHASE

Conservation de la masse:

$$(1) \quad \partial_t(\alpha_k \rho_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \vec{v}_k) = \Gamma_k \quad k = l, g$$

où:

α_k : taux de présence de la phase k ,

ρ_k : densité de la phase k ,

\vec{v}_k : vecteur vitesse de la phase k ,

Γ_k : génération de masse dans la phase k . Elle est due au changement de phase à l'interface.

Conservation de la quantité de mouvement:

$$(2) \quad \left| \begin{aligned} \partial_t(\alpha_k \rho_k \vec{v}_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \vec{v}_k \otimes \vec{v}_k) &= -\nabla(\alpha_k P_k) + \nabla \cdot (\alpha_k (\tau_k + \tau_k^T)) + \\ &\alpha_k \rho_k \vec{g} + M_k \end{aligned} \right. \quad k = l, g$$

où:

 P_k : pression dans la phase k , τ_k : tenseur de viscosité de la phase k , τ_k^T : tenseur de cisaillement dû aux effets de la turbulence de la phase k , \vec{g} : champ de gravité terrestre, M_k : moment source pour la phase k . Il est dû au transfert de quantité de mouvement à l'interface.

Lorsqu'on se place dans des conditions d'écoulement où les effets de la turbulence peuvent être négligés (ce qui est le cas pour notre écoulement), l'équation de la quantité de mouvement de la phase liquide se met sous la forme suivante:

$$(2)_l \quad \partial_t(\alpha_l \rho_l \vec{v}_l) + \nabla \cdot (\alpha_l \rho_l \vec{v}_l \otimes \vec{v}_l) = -\nabla(\alpha_l P_l) + \nabla \cdot (\alpha_l \tau_l) + \alpha_l \rho_l \vec{g} + M_l$$

si, de plus, la phase gaz est assimilée à un gaz parfait, on a:

$$(2)_g \quad \partial_t(\alpha_g \rho_g \vec{v}_g) + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g \vec{v}_g \otimes \vec{v}_g) = -\nabla(\alpha_g P_g) + \alpha_g \rho_g \vec{g} + M_g$$

Remarque 1

Les équations (2)_l et (2)_g montrent que les effets prépondérants dans l'écoulement sont dus au champ de pression dans le gaz et aux forces de viscosité dans le liquide.

Conservation de l'énergie:

$$(3) \quad \left| \begin{aligned} \partial_t \left(\alpha_k \rho_k \left(\epsilon_k + \frac{v_k^2}{2} \right) \right) + \nabla \cdot \left(\alpha_k \rho_k \left(\epsilon_k + \frac{v_k^2}{2} \right) \vec{v}_k \right) &= -\nabla \cdot (\alpha_k (\phi_k + \phi_k^T)) + \\ &\nabla \cdot (\alpha_k \tau_k \vec{v}_k) - \nabla \cdot (\alpha_k P_k \vec{v}_k) + \alpha_k \rho_k \vec{g} \cdot \vec{v}_k + E_k \end{aligned} \right. \quad k = l, g$$

où:

 ϵ_k : énergie interne "apparente" de la phase k . C'est la somme de l'énergie interne classique et de l'énergie cinétique de turbulence, ϕ_k : flux de conduction dans la phase k ,

ϕ_k^T : flux de turbulence dans la phase k. Il tient compte de l'énergie de convection et du travail des forces dues à la turbulence,

E_k : gain d'énergie à l'interface pour la phase k.

Lorsque les transferts de masse et de chaleur sont plus significatifs que les effets mécaniques, il est plus judicieux d'utiliser l'équation de l'énergie sous la forme:

$$(3.bis) \quad \left. \begin{aligned} \partial_t(\alpha_k \rho_k i_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k i_k \vec{v}_k) &= -\nabla \cdot (\alpha_k \phi_k) - \nabla \cdot (\alpha_k (\phi_k^T + \tau_k^T \vec{v}_k)) + \\ \frac{D_k}{Dt}(\alpha_k P_k) + \alpha_k (\tau_k + \tau_k^T) : \nabla \otimes \vec{v}_k + \left(\frac{v_k^2}{2} \Gamma_k - M_k \cdot \vec{v}_k + E_k \right) \end{aligned} \right\} k = l, g$$

Cette équation est dite équation de l'énergie thermique. i_k désigne l'enthalpie apparente. Elle est donnée par:

$$i_k = \epsilon_k + \frac{P_k}{\rho_k} \quad k = l, g$$

Pour des écoulements sans aucun effet de turbulence et où la phase liquide est en équilibre thermique (cas des écoulements à gouttes par exemple), l'équation de l'énergie totale pour le liquide devient:

$$(3)_l \quad \partial_t(\alpha_l \rho_l e_l) + \nabla \cdot (\alpha_l \rho_l e_l \vec{v}_l) = \nabla \cdot (\alpha_l \tau_l \vec{v}_l) - \nabla \cdot (\alpha_l P_l \vec{v}_l) + \alpha_l \rho_l \vec{g} \cdot \vec{v}_l + E_l$$

et celle de la phase gazeuse se réduit à:

$$(3)_{II} \quad \partial_t(\alpha_g \rho_g e_g) + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g e_g \vec{v}_g) = -\nabla \cdot (\alpha_g \phi_g) - \nabla \cdot (\alpha_g P_g \vec{v}_g) + \alpha_g \rho_g \vec{g} \cdot \vec{v}_g + E_g$$

où:

e_k : énergie totale de la phase k.

Remarque 2

Pour les équations précédentes (3)_I et (3)_{II}, les principales contributions énergétiques sont celles des forces de viscosité du liquide et celles des forces de pression et des flux de chaleur dans le gaz.

Conclusion 1

Pour des écoulements à phase liquide dispersée, i.e., des écoulements à gouttes, sans effets de turbulence, la phase gaz étant assimilée à un gaz parfait, les équations de bilan pour le modèle bifluide sont celles données par les relations (1), (2)_I, (2)_{II}, (3)_I et (3)_{II}.

2- CONDITIONS DE TRANSFERT A L'INTERFACE

Les conditions de transfert, appelées aussi conditions de saut, découlent des bilans d'équilibre écrits à l'interface liquide-gaz. Elles quantifient la discontinuité entre les variables de chaque phase au niveau de l'interface. Elles sont données par les relations suivantes:

Pour la masse:

$$(4) \quad \Gamma_l + \Gamma_g = 0$$

Cette équation exprime la conservation de la masse à l'interface.

Pour la quantité de mouvement:

En exprimant le moment source de l'équation (2) de la façon suivante (Cf. [Is]):

$$(5) \quad M_k = \Gamma_k \vec{v}_i + P_k \nabla \alpha_k + M_k^d \quad k = l, g$$

où:

$\Gamma_k \vec{v}_i$: quantité de mouvement due au transfert de masse relativement à la vitesse de l'interface,

$P_k \nabla \alpha_k$: effet de la pression de la phase k sur l'interface,

M_k^d : effet des forces de viscosité de la phase k sur l'interface ("drag forces"),

le bilan de la quantité de mouvement à l'interface s'écrit alors:

$$(6) \quad M_l + M_g = M_m$$

où:

M_m : moment source à l'interface. Il est donné par (Cf. [Is]):

$$(7) \quad M_m = 2H_{l0} \sigma \nabla \alpha_l + M_m^H$$

où:

H_{l0} : courbure moyenne de l'interface. Cette grandeur est positive si la phase liquide est la phase dispersée,

σ : tension de surface,

M_m^H : force due au changement de la courbure de l'interface. Elle est donc liée à la déformabilité de cette dernière.

En prenant en compte les composantes normales et tangentielles de l'équation (6), nous pouvons réécrire la condition de saut pour la quantité de mouvement sous la forme suivante:

$$(8)_i \quad P_l - P_g = P_a = 2H_{l0} \sigma$$

$$(8)_{ii} \quad M_l^d + M_g^d = M_m^H$$

Remarque 3

En pratique, M_m^H est faible devant M_l^d .

Pour l'énergie:

L'écriture de la condition de saut pour l'énergie peut se révéler très difficile car les phénomènes de transfert d'énergie à l'interface sont assez complexes. Néanmoins, un certain nombre de simplifications peuvent être apportées et restent licites pour plusieurs types d'écoulement diphasique (Cf. [Is]).

En négligeant les effets mécaniques à l'interface devant les énergies latentes dues au changement de phase, on a:

$$(9)_i \quad E_l + E_g = 0$$

$$(9)_u \quad E_k = \Gamma_k i_{ki} + \frac{g_k}{L_s} \quad k = l, g$$

où:

i_{ki} : enthalpie apparente de la phase k à l'interface, i.e., à la saturation. Elle se réduit à l'enthalpie classique lorsque l'énergie de turbulence est négligée,

g_k : flux de chaleur par unité de surface d'interface. Il est dû au gradient de température entre l'interface et la phase k ,

$\frac{1}{L_s}$: concentration en surface d'interface.

Remarque 4

Les conditions de transfert écrites pour la quantité de mouvement et pour l'énergie montrent que ces deux grandeurs peuvent être emmagasinées à l'interface liquide-gaz, ce qui n'est pas le cas pour la masse.

Conclusion 2

Notre modèle bifluide est formé des six équations de bilan (1), (2) et (3) pour la phase liquide et gaz et des trois équations de transfert à l'interface (4), (8) et (9). A ce système d'équations il faut ajouter des équations constitutives qui caractérisent les phénomènes ayant lieu lors de l'écoulement tels que: la diffusion moléculaire, les effets de turbulence, les mécanismes de transfert à l'interface ..., ainsi que les relations entre les différentes variables d'état. C'est l'objet du paragraphe suivant.

3- EQUATIONS CONSTITUTIVES

Les équations constitutives décrivent les propriétés intrinsèques d'un milieu donné. Elles n'ont pas de forme générale car elles sont liées directement aux paramètres de l'écoulement tels que le taux de vide, la concentration en surface d'interface, la nature des interfaces, les vitesses d'écoulement, etc... En outre, elles sont souvent non linéaires et devront donc être écrites et simplifiées selon le problème traité.

Dans notre cas, nous nous intéressons aux écoulements à phase liquide dispersée (Cf. [Is], [Wa]), et nous adoptons, dans un premier temps, les trois hypothèses de base suivantes:

i-les effets de la turbulence sont négligés:

En effet, dans le cas des écoulements à gouttes, ils sont dus à l'écoulement du gaz lui même et à son sillage derrière la goutte. Nous nous plaçons donc dans des plages de Reynolds où la présence des gouttes n'induit pas de turbulence (Cf. [Sa2]).

ii-Le liquide est en saturation:

La phase liquide dispersée est en saturation et en équilibre thermique, elle est constituée de gouttelettes sphériques de rayon constant mais dont le nombre peut varier; sa densité, quant à elle, reste constante.

iii-Le gaz est parfait:

La phase gaz est assimilée à un gaz parfait.

Sous ces hypothèses, les équations constitutives deviennent:

Axiome de continuité:

$$(10) \quad \alpha_l + \alpha_g = 0$$

Condition de saturation:

$$(11) \quad P^{sat} = P_l^{sat}(T_l) = P_l^{sat}(T_l^{sat})$$

où:

T_l : température de l'interface,

P_l^{sat} : pression du liquide à la saturation,

T_l^{sat} : température du liquide à la saturation.

Remarque 5

Dans le cas où aucune des phases n'est à la saturation, cette équation doit être complétée par une autre donnant l'écart de pression entre la pression de l'une des phases et la pression de saturation.

Equations d'état:

$$(12)_i \quad \rho_k = \rho_k(T_k, P_k) \quad k = l, g$$

$$(12)_{ii} \quad u_k = u_k(T_k, P_k) \quad k = l, g$$

$$(12)_{iii} \quad \sigma = \sigma(T_l)$$

où:

T_k : température de la phase k,

u_k : énergie interne de la phase k.

Remarque 6

Les équations d'état peuvent être analytiques ou empiriques. Pour les liquides incompressibles et les gaz parfaits, leur forme est classique (Cf. [Ol], [Wy]).

Tenseur de cisaillement:

$$(13) \quad \tau_l = \mu_l (\nabla \otimes \vec{v}_l + {}^t \nabla \otimes \vec{v}_l)$$

où:

 μ_l : viscosité dynamique du liquide.**Flux de conduction:**

$$(14) \quad \phi_g = -k_g \nabla T_g$$

où:

 k_g : conductivité thermique de la phase gazeuse.**les termes d'interface:**

$$(15)_I \quad \Gamma_g = b_g^{\Gamma} \frac{k_g}{(h_{gI} - h_l) L_s^2} (T_l - T_g)$$

$$(15)_{II} \quad M_g^d = b_g^{M^d} \frac{(\rho_l + \rho_g) \|\vec{v}_l - \vec{v}_g\|}{L_s} (\vec{v}_l - \vec{v}_g)$$

$$(15)_{III} \quad \frac{g_l}{L_s} = 0$$

où:

 h_{kI} : enthalpie de la phase k à l'interface, i.e., à la saturation, h_k : enthalpie de la phase k, b_g^{Γ} , $b_g^{M^d}$: constantes adimensionnelles qui dépendent des conditions de l'écoulement (Cf. [Is]).

Finalement, nous devons ajouter une équation constitutive pour la concentration en surface d'interface. En général, elle prend la forme d'une équation d'équilibre et s'écrit, sous l'hypothèse ii, de la manière suivante:

$$(16)_I \quad H_{lg} = \frac{1}{\alpha_l L_s} = \text{const.}$$

$$(16)_{II} \quad \partial_t \left(\frac{1}{L_s} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{L_s} \vec{v}_l \right) = \Gamma_s$$

où:

 Γ_s : génération en surface d'interface. Elle dépend des paramètres d'écoulement.

Ainsi, avec les équations (10) à (16), le système d'équations du modèle bifluide est "fermé" au sens déterministe.

4- CONCLUSION

Finalemt, le modèle bifluide est décrit par le système suivant:

$$\begin{aligned}
 (S)_1 \quad & \partial_t(\alpha_l \rho_l) + \nabla \cdot (\alpha_l \rho_l \vec{v}_l) = -\Gamma_\sigma \\
 & \partial_t(\alpha_\sigma \rho_\sigma) + \nabla \cdot (\alpha_\sigma \rho_\sigma \vec{v}_\sigma) = \Gamma_\sigma \\
 & \partial_t(\alpha_l \rho_l \vec{v}_l) + \nabla \cdot (\alpha_l \rho_l \vec{v}_l \otimes \vec{v}_l) + \alpha_l \nabla (P_\sigma + P_a) = \nabla \cdot (\alpha_l \tau_l) + \alpha_l \rho_l \vec{g} - \\
 & \qquad \qquad \qquad \Gamma_\sigma \vec{v}_l - M_\sigma^d \\
 & \partial_t(\alpha_\sigma \rho_\sigma \vec{v}_\sigma) + \nabla \cdot (\alpha_\sigma \rho_\sigma \vec{v}_\sigma \otimes \vec{v}_\sigma) + \alpha_\sigma \nabla (P_\sigma) = \alpha_\sigma \rho_\sigma \vec{g} + \Gamma_\sigma \vec{v}_l + M_\sigma^d \\
 & \partial_t(\alpha_l \rho_l e_l) + \nabla \cdot (\alpha_l \rho_l e_l \vec{v}_l) + \nabla \cdot (\alpha_l (P_\sigma + P_a) \vec{v}_l) = \nabla \cdot (\alpha_l \tau_l \vec{v}_l) + \\
 & \qquad \qquad \qquad \alpha_l \rho_l \vec{g} \cdot \vec{v}_l - \Gamma_\sigma h_l \\
 & \partial_t(\alpha_\sigma \rho_\sigma e_\sigma) + \nabla \cdot (\alpha_\sigma \rho_\sigma e_\sigma \vec{v}_\sigma) + \nabla \cdot (\alpha_\sigma P_\sigma \vec{v}_\sigma) = \nabla \cdot (\alpha_\sigma k_\sigma \nabla T_\sigma) + \\
 & \qquad \qquad \qquad \alpha_\sigma \rho_\sigma \vec{g} \cdot \vec{v}_\sigma + \Gamma_\sigma h_l
 \end{aligned}$$

En complétant le système (S)₁ par les équations constitutives et les équations d'état, il sera fonction des seules inconnues:

$$\begin{aligned}
 & \alpha_l, \vec{v}_l, e_l \text{ pour le liquide,} \\
 & \rho_\sigma, \vec{v}_\sigma, e_\sigma \text{ pour le gaz.}
 \end{aligned}$$

A ce système devront s'ajouter les conditions initiales, les conditions à la paroi et aux limites de la conduite.

Il faut noter que ce modèle présente deux inconvénients majeurs:

a-Cette classe de modèle n'est pas tout à fait validée expérimentalement par manque de connaissances sur les lois de transfert (15) et les équations (16) donnant l'évolution des interfaces (Cf. [Is], [To]).

b-Le modèle bifluide a une forme non conservative, ce qui peut rendre son étude mathématique et numérique particulièrement difficile.

Ceci nous amène donc à abandonner la résolution directe de ce système.

En revanche, en considérant notre écoulement comme un seul fluide: le mélange, nous pourrions le réécrire sous une forme bien plus adaptée à la résolution numérique. Pour cela nous allons définir les propriétés du mélange et établir, moyennant une identité remarquable qui lie les caractéristiques des deux phases à celles du mélange, le modèle monofluide. C'est l'objet du chapitre suivant.

MODELE MONOFLUIDE

L'idée de base du modèle monofluide, appelé aussi modèle de la mixture, est de considérer l'écoulement diphasique comme un tout. Cette schématisation va se traduire par un gain de manéabilité du modèle et une perte d'information quant aux différentes interactions microlocales ayant lieu à l'interface des phases (Cf. [Is]).

Ce modèle est constitué des lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie du mélange. A ces bilans d'équilibre vient s'ajouter, en général (Cf. [To]), soit une équation de conservation de la masse phasique, soit une équation de propagation du taux de vide.

Le modèle de la mixture est mieux adapté que le modèle bifluide à l'étude de nombreux problèmes d'"Engineering", en particulier ceux où les interactions dynamiques entre les phases du mélange sont étroitement couplées. En effet, dans ce type d'applications, l'information recherchée est la réponse dynamique du mélange diphasique plutôt que celle de ses constituants.

Dans ce chapitre, nous commencerons par introduire tout d'abord les variables thermodynamiques du mélange, puis nous écrirons les équations de bilans et les équations constitutives du modèle et nous terminerons enfin par une conclusion.

1- LES VARIABLES THERMODYNAMIQUES DU MELANGE

On définit les paramètres suivants du mélange:

Densité:

$$(17) \quad \rho_m = \sum_k \alpha_k \rho_k \quad k = l, g$$

Vitesse:

$$(18) \quad \vec{v}_m = \frac{\sum_k \alpha_k \rho_k \vec{v}_k}{\sum_k \alpha_k \rho_k} \quad k = l, g$$

Pression:

$$(19) \quad P_m = \sum_k \alpha_k P_k \quad k = l, g$$

Energie interne et enthalpie:

$$(20)_i \quad u_m = \frac{\sum_k \alpha_k \rho_k u_k}{\sum_k \alpha_k \rho_k} \quad k = l, g$$

$$(20)_{ii} \quad h_m = u_m + \frac{P_m}{\rho_m}$$

On démontre alors (Cf. [Is]):

$$(21) \quad \left| \begin{array}{l} \partial_t (\rho_m \psi_m) + \nabla \cdot (\rho_m \psi_m \vec{v}_m) + \nabla \cdot J_m^D = \sum_k \partial_t (\alpha_k \rho_k \psi_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \psi_k \vec{v}_k) \\ k = l, g \end{array} \right.$$

C'est une relation qui lie les propriétés moyennes des deux phases à celles du mélange où:

ψ_m, ψ_k : entités physiques pour lesquelles la loi de conservation est écrite. Elles correspondent aux grandeurs suivantes:

1 pour la conservation de la masse,
 \vec{v}_m, \vec{v}_k pour la conservation de la quantité de mouvement,
 h_m, h_k pour la conservation de l'énergie thermique.

J_m^D : flux de diffusion. Il est donné par la relation suivante (Cf. [Is]):

$$(22) \quad J_m^D = \sum_k \alpha_k \rho_k \psi_k \vec{v}_{km} \quad k = l, g$$

où:

\vec{v}_{km} : vitesse de diffusion de la phase k, i.e., sa vitesse relativement au centre de masse de la mixture. Elle est définie par:

$$(23)_i \quad \vec{v}_{km} = \vec{v}_k - \vec{v}_m \quad k = l, g$$

$$(23)_{ii} \quad \vec{v}_{lm} = \frac{\rho_g}{\rho} \vec{v}_{lj}$$

où:

\vec{v}_{lj} : vitesse "drift" de la phase liquide. C'est sa vitesse relativement au centre du volume de la mixture.

En outre, on vérifie aisément la relation suivante:

$$(24) \quad \sum_k \alpha_k \rho_k \vec{v}_{km} = 0 \quad k = l, g$$

2- BILANS D'EQUILIBRE POUR LE MELANGE

Partant des équations de bilan écrites pour chaque phase (Cf. Chap.1) et moyennant la relation (21) nous pouvons écrire les lois de conservation pour le mélange. Nous avons alors:

Conservation de la masse:

Des relations (1) et (4) nous déduisons:

$$(25) \quad \partial_t \rho_m + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}_m) = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement:

Moyennant les relations (2)_i, (2)_{ij} et (6) nous avons:

$$(26) \quad \partial_t (\rho_m \vec{v}_m) + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}_m \otimes \vec{v}_m) = -\nabla P_m + \nabla \cdot (\tau_m - \tau_m^D) + \rho_m \vec{g} + M_m$$

où:

τ_m : tenseur de viscosité du mélange,

τ_m^D : tenseur de diffusion caractérisant le phénomène de transport de la quantité de mouvement de chaque phase par diffusion.

Conservation de l'énergie thermique:

En négligeant l'effet de la turbulence dans l'équation de l'énergie thermique (3)_{bis}, nous avons:

$$(27) \quad \partial_t (\rho_m h_m) + \nabla \cdot (\rho_m h_m \vec{v}_m) = -\nabla \cdot (\phi_m + \phi_m^D) + \frac{DP_m}{Dt} + \phi_m^\mu + \phi_m^i + \phi_m^\sigma$$

où:

ϕ_m : flux de conduction dans le mélange,

ϕ_m^D : flux de diffusion représentant le transport de l'énergie de la phase k relativement au centre de masse de la mixture,

ϕ_m^μ : effet de la dissipation visqueuse,

ϕ_m^i : contribution de l'énergie mécanique transférée de l'interface,

ϕ_m^σ : effet de la tension de surface.

Remarque 7

Les équations (25), (26) et (27) décrivant le modèle de la mixture sont semblables à celles utilisées dans les écoulements monophasiques. La seule différence existante et caractérisant le fait que nous traitons un mélange, est la présence de termes supplémentaires:

- les flux de diffusion liés à l'existence d'un gradient de vitesse entre les phases du mélange.
- Les termes d'interface.
- Les termes de la tension de surface.

3- EQUATIONS CONSTITUTIVES

Pour "fermer" l'ensemble des équations du modèle monofluide, il est nécessaire de lui adjoindre des équations constitutives et des équations d'état. Il faut donc définir les différents tenseurs, flux et termes sources y apparaissant.

Ces différentes équations sont écrites en fonction des propriétés physiques, ce qui nous amènera à ajouter aux équations de bilan et aux équations constitutives les relations définissant les propriétés du mélange. Nous aurons ainsi les relations suivantes:

Tenseur de cisaillement:

$$(28) \quad \tau_m = \alpha_l \mu_l (\nabla \otimes \vec{v}_l + {}^t \nabla \otimes \vec{v}_l)$$

Tenseur de diffusion:

$$(29) \quad \tau_m^D = \sum_k \alpha_k \rho_k \vec{v}_{km} \otimes \vec{v}_{km} \quad k=l, g$$

Flux de conduction:

$$(30) \quad \phi_m = -\alpha_g k_g \nabla T_g$$

Flux de diffusion:

$$(31) \quad \phi_m^D = \sum_k \alpha_k \rho_k h_k \vec{v}_{km} \quad k=l, g$$

Remarque 8

Le tenseur et le flux de diffusion peuvent être exprimés en fonction de la vitesse "drift" du liquide (Cf. [Is]). Pour les écoulements à phase dispersée, plusieurs travaux (Cf. [Is], [Wa]) ont montré que cette vitesse est fonction de la vitesse \vec{v}_o d'une particule (goutte ou bulle) dans un milieu infini et du taux de vide. Ainsi nous avons:

$$(32) \quad \vec{v}_{ij} = (1 - \alpha_l)^m \vec{v}_o$$

où:

m : est une constante. Elle dépend de la nature de l'écoulements (Cf. [Is], [Wa]).

Moment source:

$$(33) \quad M_m = \nabla(2H_{l0} \sigma \alpha_l)$$

Cette relation est valable pour les écoulements à phase dispersée (Cf. [Is]).

Ecart de pression:

$$(34) \quad P_l - P_g = 2H_{l0} \sigma$$

Ecart de température:

$$(35) \quad T_l - T_g$$

Cette équation est l'une des équations les plus difficiles à obtenir puisqu'elle informe sur le degré de déséquilibre thermique.

Remarque 9

Les équations (28) à (35) doivent être complétées par l'axiome de continuité et les équations d'état pour les propriétés phasiques (Cf. Chap.1).

Equation de propagation du taux de vide:

$$(36) \quad \partial_t \left(\frac{1}{\alpha_l} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\vec{v}_l}{\alpha_l} \right) = \Gamma_n$$

où:

Γ_n : génération du nombre de gouttes.

La relation précédente est valable pour des écoulements à gouttelettes de rayon constant mais dont le nombre peut augmenter (Cf. [Is]).

Remarque 10

Les équations constitutives pour les termes ϕ_m^u , ϕ_m^a et ϕ_m^i sont en général assez complexes, mais la simplicité de leur forme, pour le type d'écoulement que nous étudions (Cf. Chap.3), rend plus avantageux l'écriture de l'équation de l'énergie thermique pour le bilan d'énergie.

4- CONCLUSION

Finalement, le modèle monofluide est décrit par le système suivant:

$$(S)_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho_m + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}_m) = 0 \\ \partial_t (\rho_m \vec{v}_m) + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}_m \otimes \vec{v}_m) = -\nabla P_m + \nabla \cdot (\tau_m - \tau_m^D) + \rho_m \vec{g} + M_m \\ \partial_t (\rho_m h_m) + \nabla \cdot (\rho_m h_m \vec{v}_m) = -\nabla \cdot (\phi_m + \phi_m^D) + \frac{DP_m}{Dt} \\ \partial_t \left(\frac{1}{\alpha_l} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\vec{v}_l}{\alpha_l} \right) = \Gamma_n \end{array} \right.$$

En complétant le système (S)₂ par les équations constitutives et les équations d'état, il sera fonction des seules inconnues:

$$\rho_m, \vec{v}_m, h_m, \alpha_l$$

A ce système devront s'ajouter les conditions initiales, les conditions à la paroi et aux limites de la conduite.

Les équations du système $(S)_2$ sont écrites sous les hypothèses i, ii et iii relatives aux effets de la turbulence et aux propriétés de la phase liquide et gaz (Cf. Chap.1) et en négligeant les termes de dissipation dans l'équation de l'énergie thermique. Ces différentes hypothèses n'altèrent guère le caractère assez général de ce modèle.

Par ailleurs, comme nous nous intéressons dans cette étude aux écoulements à phases dispersées, nous allons réécrire le système $(S)_2$ en tenant compte des propriétés de ces écoulements. C'est l'objet du chapitre suivant.

MODELE PHYSIQUE ADOPTE

L'objet de chapitre est d'établir, à partir du modèle général (S)₂ (Cf. Chap.2) du mélange, le modèle mathématique spécifique à l'écoulement du gaz naturel dans les conduites.

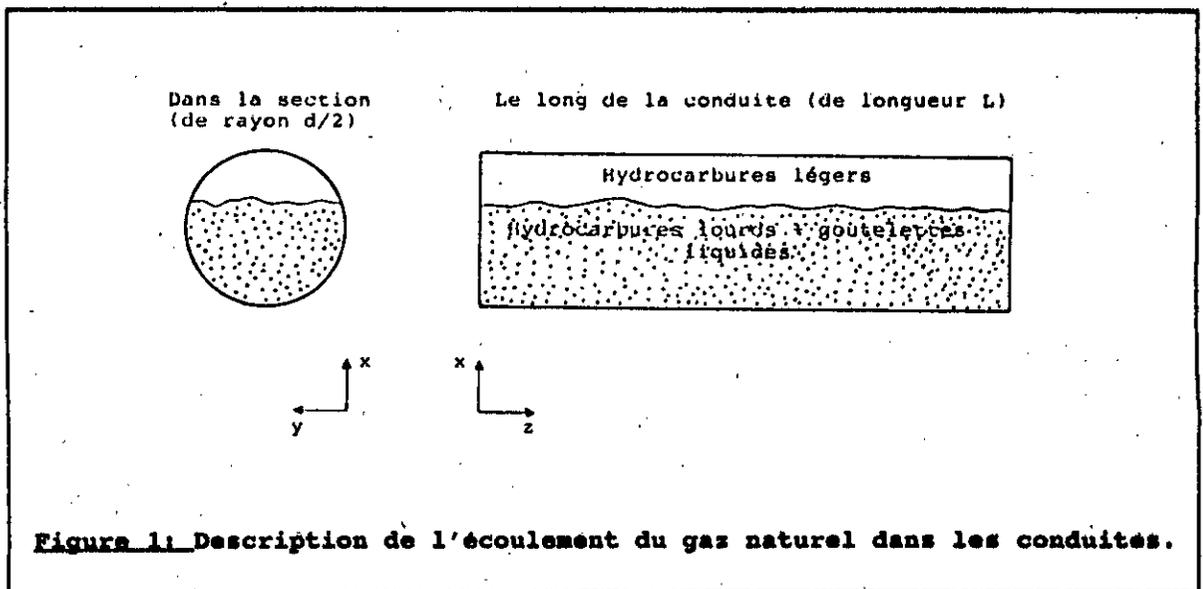
Pour cela, nous poserons tout d'abord les hypothèses physiques liées à notre type d'écoulement; sous ces conditions nous établirons par la suite nos équations de bilan et enfin nous écrirons les équations qui traduisent les conditions initiales, à la paroi et aux bords de la conduite. Nous terminerons ce chapitre par une conclusion.

1- HYPHOTHESES

Nous rappelons que l'écoulement du gaz naturel dans les conduites se présente sous forme d'un mélange diphasique constitué de:

- Une phase gazeuse formée d'hydrocarbures légers pris comme gaz inertes et jouant le rôle de gaz porteurs car non condensables dans les conditions d'écoulement et d'une vapeur d'hydrocarbures lourds pouvant se condenser.
- Une phase liquide formée de fines gouttelettes sphériques résultant de la condensation des hydrocarbures lourds et restant en suspension dans le mélange gazeux (Cf. Fig.1).

Nous supposons en outre que les différents phénomènes de transfert ont lieu entre la phase gazeuse prise dans sa totalité et la phase liquide.



Ceci nous amène donc à étudier un écoulement diphasique à phases dispersées sous les hypothèses suivantes:

i-Les effets de la turbulences sont négligés:

Les vitesses d'écoulement n'induisent pas d'effets de turbulence.

ii-Le liquide est en saturation:

La phase liquide dispersée est en saturation et en équilibre thermique. Elle est constituée de gouttelettes sphériques de rayon constant mais dont le nombre peut varier. La densité ainsi que la viscosité de la phase liquide restent constantes.

iii-Le gaz est parfait:

La phase gazeuse est assimilée à un gaz parfait subissant des transformations isentropiques.

Nous supposons aussi que:

iv-Les effets énergétiques dus à ϕ_m^u , ϕ_m^l et ϕ_m^s sont négligés (Cf. Chap.2).

v-L'énergie de pression $\frac{DP}{Dt}$ est négligeable (Cf. Chap.2).

Il est à noter que les hypothèses iv et v sont licites pour les écoulements à faible vitesse où les effets des énergies d'origine thermique sont prépondérants (Cf. [15]).

Par ailleurs, nous considérons que tous les phénomènes (cinétiques, mécaniques et thermiques) qui apparaissent lors de l'écoulement se font dans la direction longitudinale (direction de l'écoulement (Cf. Fig.1)). Nous pouvons donc supposer que:

vi-Tous les phénomènes physiques se produisent selon une direction privilégiée i.e. le long de la conduite.

Cette hypothèse est fondamentale et sera à la base des calculs développés dans la suite de notre analyse.

2- EQUATIONS DU MODELE

Partant des équations du modèle du mélange (Cf. Chap.2) et compte tenu des hypothèses posées précédemment, les équations de conservation deviennent:

$$(S)_3 \quad \left| \begin{array}{l} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ \partial_t (\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) + \nabla \cdot \tau^D + \nabla P = \nabla \cdot \tau \\ \partial_t (\rho h) + \nabla \cdot (\rho h \vec{v}) + \nabla \cdot \phi^D = -\nabla \cdot \phi \\ \partial_t \left(\frac{1}{\alpha_l} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\vec{v}_l}{\alpha_l} \right) = \Gamma_n \end{array} \right.$$

où:

ρ : densité,

\vec{v} : vecteur vitesse,

P : pression effective (Cf. [Sa2]),

h : enthalpie.

L'écoulement considéré est à phase liquide dispersée, nous écrivons alors le tenseur et le flux de diffusion en fonction de la vitesse "drift" du liquide. Nous avons donc (Cf. Chap.2):

$$(37)_i \quad \tau^D = \frac{\alpha_l \rho_l \rho_g}{1 - \alpha_l \rho} \vec{v}_{lj} \otimes \vec{v}_{lj}$$

$$(37)_{ii} \quad \phi^D = \alpha_l \frac{\rho_l \rho_g}{\rho} (h_l - h_g) \vec{v}_{lj}$$

et:

$$(37)_{iii} \quad \tau = \mu_l \alpha_l (\nabla \otimes \vec{v}_l + {}^t \nabla \otimes \vec{v}_l)$$

$$(37)_{iv} \quad \phi = -k_g (1 - \alpha_l) \nabla T_g$$

$$(37)_v \quad P = P_m - 2H_{lg} \sigma \alpha_l$$

En outre, on démontre en fait que (Cf. [Sa2]) la pression effective P est donnée par la relation suivante:

$$(38) \quad P = P_g + P_0 \alpha^P \quad P_0 > 0 \quad p > 0$$

C'est cette formule qui sera utilisée dans les calculs. De plus, les équations du système (S)₃ sont complétées par les équations constitutives suivantes:

$$(39)_i \quad \rho_l = \rho^* = \text{const.}$$

$$(39)_{ii} \quad P_g = c \rho_g^\gamma, \quad h_g = c_p T_g, \quad P_g = R \rho_g T_g \quad c > 0$$

où:

γ : constante isentropique,

c_p : chaleur massique à pression constante,

R : constante des gaz parfait.

$$(39)_{iii} \quad \rho = (1 - \alpha_l) \rho_g + \alpha_l \rho_l$$

$$(39)_{iv} \quad \rho h = (1 - \alpha_l) \rho_g h_g + \alpha_l \rho_l h_l$$

$$(39)_v \quad \vec{v}_{lj} = (1 - \alpha_l)^m \vec{v}_\infty$$

Remarque 11

La vitesse "drift" écrite sous cette forme tient compte de l'effet de la gravité. Voilà pourquoi les forces de gravité ont été éliminées des équations du système (S)₃.

Par ailleurs, l'hypothèse vi nous permet d'approcher notre problème asymptotiquement et nous amène à:

1-Faire le changement de variable suivant:

$$(40)_i \quad X = \epsilon^a x \quad a > 0$$

$$(40)_{ii} \quad Y = \epsilon^a y$$

$$(40)_{iii} \quad Z = z$$

2-Négliger les variations de la vitesse pour les composantes transverses. Par conséquent, nous pouvons chercher le vecteur vitesse \vec{v} sous la forme:

$$(41)_i \quad \vec{v} = (\epsilon^b U_1, \epsilon^b U_2, U_3) \quad b > 0$$

et de même:

$$(41)_{ii} \quad \vec{v}_\infty = (\epsilon^b U_{1\infty}, \epsilon^b U_{2\infty}, U_{3\infty})$$

Moyennant les relations (40) et (41) nous pouvons écrire les équations du système (S)₃ comme suit:

Pour la conservation de la masse:

Nous avons:

$$\partial_t \rho + \epsilon^a \partial_x (\rho U_1) + \epsilon^a \partial_y (\rho U_2) + \partial_z (\rho U_3) = 0$$

Sachant que:

$$\partial_x = \epsilon^a \partial_X, \quad \partial_y = \epsilon^a \partial_Y, \quad \partial_z = \partial_Z$$

Nous aboutissons à:

$$\partial_t \rho + \partial_z (\rho U_3) + \epsilon^{a+b} \{ \partial_X (\rho U_1) + \partial_Y (\rho U_2) \} = 0$$

Ainsi, asymptotiquement le bilan de la masse est donné par:

$$(42) \quad \partial_t \rho + \partial_z (\rho U_3) = 0$$

Pour la conservation de la quantité de mouvement:

En projetant l'équation de la quantité de mouvement sur les trois axes et en adoptons la même démarche que pour la conservation de la masse nous avons:

Selon X:

$$\left| \begin{aligned} & \epsilon^b \partial_i (\rho U_1) + \epsilon^{a+2b} \{ \partial_x (\rho U_1^2) + \partial_y (\rho U_1 U_2) \} + \epsilon^b \partial_z (\rho U_1 U_3) + \\ & \epsilon^{a+2b} \{ \partial_x (\zeta U_{1\infty}^2) + \partial_y (\zeta U_{1\infty} U_{2\infty}) \} + \epsilon^b \partial_z (\zeta U_{1\infty} U_{3\infty}) + \epsilon^a \partial_x P = \\ & \epsilon^{b+2a} \{ \partial_x (2\mu_l \alpha_l \partial_x U_{1l}) + \partial_y (\mu_l \alpha_l (\partial_y U_{1l} + \partial_x U_{2l})) \} + \\ & \partial_z (\mu_l \alpha_l (\epsilon^b \partial_z U_{1l} + \epsilon^a \partial_x U_{3l})) \end{aligned} \right.$$

ou:

$$\zeta = \alpha_l \frac{\rho_l \rho_g}{\rho} (1 - \alpha_l)^{2m-1}$$

En prenant alors $a = b$ nous aboutissons à:

$$\left| \begin{aligned} & \partial_i (\rho U_1) + \partial_x P + \partial_z (\rho U_1 U_3 + \zeta U_{1\infty} U_{3\infty}) - \partial_z (\mu_l \alpha_l (\partial_z U_{1l} + \partial_x U_{3l})) + \\ & \epsilon^{2b} \{ \partial_x (\rho U_1^2 + \zeta U_{1\infty}^2) + \partial_y (\rho U_1 U_2 + \zeta U_{1\infty} U_{2\infty}) - \partial_x (2\mu_l \alpha_l \partial_x U_{1l}) - \\ & \partial_y (\mu_l \alpha_l (\partial_y U_{1l} + \partial_x U_{2l})) \} = 0 \end{aligned} \right.$$

Et ainsi, asymptotiquement, l'équation de la quantité de mouvement selon X devient:

$$(43) \quad \left| \begin{aligned} & \partial_i (\rho U_1) + \partial_x P + \partial_z (\rho U_1 U_3 + \zeta U_{1\infty} U_{3\infty}) = \\ & \partial_z (\mu_l \alpha_l (\partial_z U_{1l} + \partial_x U_{3l})) \end{aligned} \right.$$

Selon Y:

$$(44) \quad \left| \begin{aligned} & \partial_i (\rho U_2) + \partial_y P + \partial_z (\rho U_2 U_3 + \zeta U_{2\infty} U_{3\infty}) = \\ & \partial_z (\mu_l \alpha_l (\partial_z U_{2l} + \partial_y U_{3l})) \end{aligned} \right.$$

Selon Z:

$$(45) \quad \partial_i (\rho U_3) + \partial_z (P + \rho U_3^2 + \eta U_{3\infty}^2) = 2 \partial_z (\mu_l \alpha_l \partial_z U_{3l})$$

Pour la conservation de l'énergie:

Cette équation ayant la même forme que l'équation de la conservation de la masse, nous démontrons que:

$$(46) \quad \left| \begin{aligned} & \partial_i (\rho h) + \partial_z (\rho h U_3 + \zeta (h_l - h_g) (1 - \alpha_l)^{m-1} U_{3\infty}) = \\ & \partial_z (k_l (1 - \alpha_l) \partial_z T_{3l}) \end{aligned} \right.$$

Pour la propagation du taux de vide:

Nous démontrons de façon analogue à l'équation de la conservation de la masse que:

$$(47) \quad \partial_t \left(\frac{1}{\alpha_l} \right) + \partial_z \left(\frac{U_{3l}}{\alpha_l} \right) = \Gamma_n$$

3- CONDITIONS INITIALES ET CONDITIONS AUX LIMITES

Nous allons adopter les conditions physiques suivantes:

Conditions initiales:

Le vecteur état est donné en tout point de la conduite i.e.:

$$\rho, U_1, U_2, U_3, h, \alpha_l \quad \text{connu.}$$

Conditions aux limites:**En entrée:**

Le vecteur état est donné en tout instant i.e.:

$$\rho, U_1, U_2, U_3, h, \alpha_l \quad \text{connu.}$$

A la paroi:

$$\bar{U}_t = 0 \quad \text{condition d'adhérence pour le liquide,}$$

$$\bar{U}_g \cdot \bar{v} = 0 \quad \text{condition de glissement pour le gaz,}$$

$$P \quad \text{connue.}$$

où:

\bar{v} : vecteur normal dirigé vers l'extérieur.

En sortie:

$$\bar{U} \times \bar{v} = 0 \quad \text{débit sortant,}$$

$$\bar{U} \cdot \bar{v} > 0$$

$$T \quad \text{connue.}$$

4- CONCLUSION

Finalement, le modèle mathématique obtenu est le suivant:

$$\begin{aligned}
 (S)_4 \quad & \partial_t \rho + \partial_z(\rho U_3) = 0 \\
 & \partial_t(\rho U_1) + \partial_x P + \partial_z(\rho U_1 U_3 + U_{1\infty} U_{3\infty} \xi) = \\
 & \quad \partial_z(\mu_l \alpha_l (\partial_z U_{1l} + \partial_x U_{3l})) \\
 & \partial_t(\rho U_2) + \partial_y P + \partial_z(\rho U_2 U_3 + U_{2\infty} U_{3\infty} \xi) = \\
 & \quad \partial_z(\mu_l \alpha_l (\partial_z U_{2l} + \partial_y U_{3l})) \\
 & \partial_t(\rho U_3) + \partial_z(P + \rho U_3^2 + U_{3\infty}^2 \xi) = 2\partial_z(\mu_l \alpha_l \partial_z U_{3l}) \\
 & \partial_t(\rho h) + \partial_z(\rho h U_3 + U_{3\infty} \xi) = \partial_z(k_g (1 - \alpha_l) \partial_z T_g) \\
 & \partial_t\left(\frac{1}{\alpha_l}\right) + \partial_z\left(\frac{U_{3l}}{\alpha_l}\right) = \Gamma_n
 \end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned}
 (S)_{4bis} \quad & \xi = \rho^* \alpha_l \left(1 - \frac{\rho^* \alpha_l}{\rho}\right) (1 - \alpha_l)^{2(m-1)} \\
 & \xi = (\rho - \rho^* \alpha_l) (h - c_p T_g) (1 - \alpha_l)^{m-1} \\
 & \bar{U}_l = \bar{U} + \left(1 - \frac{\rho^* \alpha_l}{\rho}\right) (1 - \alpha_l)^{m-1} \bar{U}_\infty \\
 & P = c \left(\frac{\rho - \rho^* \alpha_l}{1 - \alpha_l}\right)^\gamma + P_0 \alpha_l^P \\
 & T_g = \frac{c}{R} \left(\frac{\rho - \rho^* \alpha_l}{1 - \alpha_l}\right)^{\gamma-1}
 \end{aligned}$$

et:

C.I: $\rho, U_1, U_2, U_3, h, \alpha$ connus.

C.L:

En entrée: $\rho, U_1, U_2, U_3, h, \alpha$ connus,

A la paroi: $\bar{U}_t = 0$
 $U_{10} = U_{20} = 0$
 P connue,

En sortie: $U_1 = U_2 = 0, U_3 > 0$
 T_0 connue.

L'approche asymptotique, menée dans le présent chapitre nous a ainsi permis d'aboutir au système d'équations $(S)_4$ pouvant rendre compte des phénomènes ayant lieu dans la direction principale de l'écoulement sans pour autant éliminer les fluctuations éventuelles dans la section transverse. C'est le système $(S)_4$ qui sera résolu numériquement dans la seconde partie de ce travail.

PARTIE 2

RESOLUTION NUMERIQUE

L'objet de cette partie est la résolution numérique du modèle mathématique établi au chapitre 3. Il existe dans la littérature différentes méthodes numériques pour résoudre ce type de problèmes. On peut trouver les méthodes à base d'éléments finis (Cf. [Mo]) mais surtout et de façon plus abondante, celles à base de différences finies (Cf. [Ba], [Sal], [To]) pour les problèmes diphasiques et (Cf. [Du], [La], [Le], [Vi]) pour des problèmes analogues .

Pour notre part, nous avons construit un schéma original à base de différences finies traduisant de façon simple le fait que l'écoulement a lieu le long d'une direction privilégiée qui est l'axe de la conduite.

Cette partie est scindée en trois chapitres. Le chapitre 4 est consacré au rappel du modèle mathématique et à l'établissement du modèle approché. La méthode de résolution du système algébrique non linéaire obtenu après discrétisation est décrite au chapitre 5. Enfin, le chapitre 6 est consacré aux expériences numériques réalisées et à l'analyse des résultats obtenus.

DESCRIPTION DU PROBLEME APPROCHE

1- RAPPEL DU PROBLEME MATHEMATIQUE CONTINU

Ce chapitre est consacré à la mise en oeuvre d'une méthode numérique, capable de résoudre le modèle mathématique (S), établi au chapitre 3.

Nous rappelons que nous nous plaçons dans des conditions d'écoulement particulières dont les principales hypothèses sont:

-La phase liquide est en état de saturation. Elle est présente sous forme de gouttelettes sphériques de rayon constant, mais dont le nombre peut varier. En outre, elle est supposée incompressible et possède une viscosité constante.

-La phase gazeuse se comporte comme un gas parfait, subissant des transformations isentropiques.

Nous rappelons aussi que l'écoulement que nous étudions, ainsi que tout les phénomènes physiques s'y rattachant se font le long d'une direction privilégiée qui est celle de la conduite. Cela revient donc à résoudre le problème aux limites (P) suivant:

Il s'agit de déterminer, pour tout $(t, x, y, z) \in \Omega_T$, le vecteur $(\rho, \rho U_1, \rho U_2, \rho U_3, \rho h, \alpha_i^{-1})'$ qui soit solution du système d'équations suivant:

$$(P) \quad \begin{matrix} \partial_t \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{matrix} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho U_1 \\ \rho U_2 \\ \rho U_3 \\ \rho h \\ \alpha_i^{-1} \end{bmatrix} + \begin{matrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{matrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{matrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{matrix} \begin{bmatrix} \rho U_3 \\ \rho U_1 U_3 + U_{1z} U_{3z} \zeta \\ \rho U_2 U_3 + U_{2z} U_{3z} \zeta \\ \dot{P} + \rho U_3^2 + U_{3z}^2 \zeta \\ \rho h U_3 + U_{3z} \xi \\ U_{3z} \alpha_i^{-1} \end{bmatrix} = \begin{matrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_l \alpha_l (\partial_x U_{3l} + \partial_z U_{1l}) \\ \mu_l \alpha_l (\partial_y U_{3l} + \partial_z U_{2l}) \\ 2\mu_l \alpha_l \partial_z U_{3l} \\ k_g (1 - \alpha_l) \partial_z T_g \end{bmatrix} + \begin{matrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Gamma_n \end{bmatrix} \quad \text{dans } \Omega_T$$

où l'on a noté:

$$\Omega_T =]0, T] \times \Omega$$

avec:

$]0, T]$: intervalle du temps de l'écoulement,

$$\Omega = \left\{ (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 < x^2 + y^2 < \frac{d^2}{4}, 0 < z < L \right\}$$

d : diamètre de la conduite,

L : longueur de la conduite.

et:

$$\zeta = \rho^* \alpha_l \left(1 - \frac{\rho^* \alpha_l}{\rho} \right) (1 - \alpha_l)^{2(m-1)}$$

$$\xi = (\rho - \rho^* \alpha_l) (h - c_p T_\theta) (1 - \alpha_l)^{m-1}$$

$$\bar{U}_l = \bar{U} + \left(1 - \frac{\rho^* \alpha_l}{\rho} \right) (1 - \alpha_l)^{m-1} \bar{U}_\infty$$

$$P = c \left(\frac{\rho - \rho^* \alpha_l}{1 - \alpha_l} \right)^\nu + P_0 \alpha_l^p$$

$$T_\theta = \frac{c}{R} \left(\frac{\rho - \rho^* \alpha_l}{1 - \alpha_l} \right)^{\nu-1}$$

La solution du problème (P) doit en outre vérifier les conditions initiales et aux limites suivantes:

Conditions initiales:

$$\left| \begin{array}{l} \rho(0, x, y, z) = \rho^0(x, y, z) \\ \bar{U}(0, x, y, z) = \bar{U}^0(x, y, z) \\ h(0, x, y, z) = h^0(x, y, z) \\ \alpha_l(0, x, y, z) = \alpha_l^0(x, y, z) \end{array} \right.$$

Conditions aux limites:

En entrée: $z = 0$

Nous avons:

$$\left| \begin{array}{l} \rho(t, x, y, 0) = \rho^o(t, x, y) \\ \bar{U}(t, x, y, 0) = \bar{U}^o(t, x, y) \\ h(t, x, y, 0) = h^o(t, x, y) \\ \alpha_i(t, x, y, 0) = \alpha_i^o(t, x, y) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t \in]0, T] \\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{d^2}{4} \end{array}$$

Sur la paroi $\partial\Omega$:

avec:

$$\partial\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = \frac{d^2}{2}, 0 < z < L \right\}$$

nous avons:

$$\left| \begin{array}{l} \bar{U}_i(t, x, y, z) = \bar{U}_i^w(t, x, y, z) = 0 \\ U_{1\sigma}(t, x, y, z) = U_{1\sigma}^w(t, x, y, z) = 0 \\ U_{2\sigma}(t, x, y, z) = U_{2\sigma}^w(t, x, y, z) = 0 \\ P(t, x, y, z) = P^w(t, x, y, z) \end{array} \right.$$

En sortie: $z = L$

Nous avons:

$$\left| \begin{array}{l} U_1(t, x, y, L) = U_1^s(t, x, y) = 0 \\ U_2(t, x, y, L) = U_2^s(t, x, y) = 0 \\ U_3(t, x, y, L) = U_3^s(t, x, y) > 0 \\ T_\sigma(t, x, y, L) = T_\sigma^s(t, x, y) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t \in]0, T] \\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{d^2}{4} \end{array}$$

Il s'agit donc de résoudre, dans le domaine borné $\Omega_T =]0, T] \times \Omega$ un système d'évolution non linéaire mis sous forme conservative (Cf. [Ra]).

Pour des raisons de commodité, nous allons réécrire le système (P) sous forme vectorielle. Nous introduisons pour cela les notations suivantes:

Notations:

Nous posons:

$$\vec{W} = (\rho, \rho U_1, \rho U_2, \rho U_3, \rho h, \alpha_i^{-1})$$

\vec{W} désigne le vecteur d'état.

Pour $i = 1, 3$, nous définissons:

$$H_i : R^6 \rightarrow R^6$$

$$\vec{W} \rightarrow H_i(\vec{W})$$

tel que:

$$H_1(\vec{W}) = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_2(\vec{W}) = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_3(\vec{W}) = \begin{bmatrix} \rho U_3 \\ \rho U_1 U_3 + U_{1\infty} U_{3\infty} \xi \\ \rho U_2 U_3 + U_{2\infty} U_{3\infty} \xi \\ P + \rho U_3^2 + U_{3\infty}^2 \xi \\ \rho h U_3 + U_{3\infty} \xi \\ U_{3i} \alpha_i^{-1} \end{bmatrix}$$

H_i est une fonction non linéaire de \vec{W} .

Nous posons alors:

$$H = (H_1, H_2, H_3)$$

\vec{W}^0 désigne le vecteur d'état initial. Par conséquent:

$$\vec{W}^0(x, y, z) = (\rho^0, \rho U_1^0, \rho U_2^0, \rho U_3^0, \rho h^0, \alpha_i^{-10})(x, y, z)$$

\vec{W}^e désigne la donnée entrante:

$$\vec{W}^e(t, x, y) = (\rho^e, \rho U_1^e, \rho U_2^e, \rho U_3^e, \rho h^e, \alpha_i^{-1e})(t, x, y)$$

\vec{W}^w représente la condition à la paroi:

$$\vec{W}^w(t, x, y, z) = (U_{1i}^w, U_{2i}^w, U_{3i}^w, U_{1\theta}^w, U_{2\theta}^w, P^w)(t, x, y, z)$$

\vec{W}^s représente la condition en sortie:

$$\vec{W}^s(t, x, y) = (U_1^s, U_2^s, U_3^s, T_\theta^s)(t, x, y)$$

Ecriture du système sous forme vectorielle:

Moyennant les notations précédentes, le système (P) peut être réécrit sous la forme vectorielle suivante:

$$(P) \quad \left. \begin{array}{l} \partial_t \bar{W} + \text{Div} H(\bar{W}) = F(\bar{W}, L(\bar{W})) \\ \\ \text{sachant:} \\ \\ \bar{W}^0(x, y, z) \\ \bar{W}^e(t, x, y) \\ \bar{\omega}^w(t, x, y, z) \\ \bar{\omega}^s(t, x, y) \end{array} \right\}$$

où:

F : est une fonction non linéaire,

L : opérateur aux dérivées partielles de second ordre.

Nous allons maintenant résoudre numériquement le problème (P).

2- PROBLEME APPROCHE

La technique utilisée pour approximer le problème (P) est une méthode à base de différences finies. Elle nous permettra de ramener le système aux dérivées partielles (P) à un système algébrique non linéaire dont la résolution sera entièrement décrite au chapitre suivant.

Approximation de Ω_T :

Nous allons générer un maillage régulier de pas Δt en temps, Δx dans la direction x , Δy dans la direction y et Δz dans la direction z , de sorte que Ω_T soit ramenée à une grille uniforme (Cf. Fig.2) notée Ω_T^h .

En notant:

$$t^n = n\Delta t$$

$$x_i = i\Delta x$$

$$y_j = j\Delta y$$

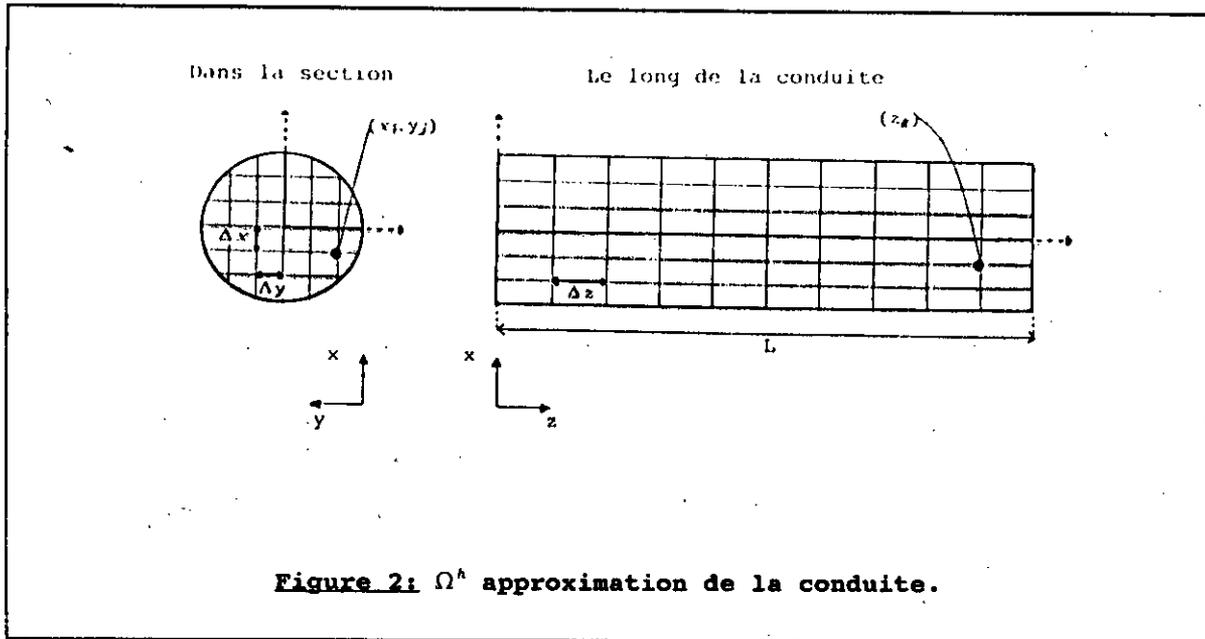
$$z_k = k\Delta z$$

Ω_T^h est donnée par:

$$\Omega_T^h = \left\{ (t^n, x_i, y_j, z_k) / 0 < t^n \leq T, 0 < \sqrt{x_i^2 + y_j^2} < \frac{d}{2}, 0 < z_k < L \right\}$$

et à $t = t^n = n\Delta t$, nous définissons:

$$\Omega^h = \left\{ (x_i, y_j, z_k) / 0 < \sqrt{x_i^2 + y_j^2} < \frac{d}{2}, 0 < z_k < L \right\}$$



Approximation du vecteur état:

Nous allons déterminer en chaque point (t^{n+1}, x_i, y_j, z_k) de la grille Ω^h le vecteur:

$$\vec{W}(t^{n+1}, x_i, y_j, z_k) = \vec{W}((n+1)\Delta t, l\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) = \vec{W}_{ijk}^{n+1}$$

Approximation des dérivées:

Soient f et g deux fonctions. Nous approchons leurs dérivées au point (t^{n+1}, x_i, y_j, z_k) de la façon suivante:

$$\partial_t f(t^{n+1}, x_i, y_j, z_k) \approx \frac{f_{ijk}^{n+1} - f_{ijk}^n}{\Delta t}$$

$$\partial_x f(t^{n+1}, x_i, y_j, z_k) \approx \frac{f_{i+1jk}^{n+1} - f_{ijk}^{n+1}}{\Delta x}$$

$$\partial_y f(t^{n+1}, x_i, y_j, z_k) \approx \frac{f_{ij+1k}^{n+1} - f_{ijk}^{n+1}}{\Delta y}$$

$$\partial_z f(t^{n+1}, x_i, y_j, z_k) \approx \frac{f_{ijk}^{n+1} - f_{ijk-1}^{n+1}}{\Delta z}$$

$$\partial_z(f\partial_x g)(t^{n+1}, x_i, y_j, z_k) \approx \frac{f_{ijk}^{n+1} \left(\frac{g_{i+1,j,k}^{n+1} - g_{ijk}^{n+1}}{\Delta x} \right) - f_{ijk-1}^{n+1} \left(\frac{g_{i+1,j,k-1}^{n+1} - g_{ijk-1}^{n+1}}{\Delta x} \right)}{\Delta z}$$

$$\partial_z(f\partial_y g)(t^{n+1}, x_i, y_j, z_k) \approx \frac{f_{ijk}^{n+1} \left(\frac{g_{i,j+1,k}^{n+1} - g_{ijk}^{n+1}}{\Delta y} \right) - f_{ijk-1}^{n+1} \left(\frac{g_{i,j+1,k-1}^{n+1} - g_{ijk-1}^{n+1}}{\Delta y} \right)}{\Delta z}$$

Ce sont des approximations décentrées à droite pour les variables t, x, y et décentrées à gauche pour la variable z . Elles sont toutes d'ordre 1.

Quant à la dérivée seconde en z , nous allons choisir de l'approximer de la façon suivante:

Au lieu donc d'avoir des termes en g_{ijk}^{n+1} , nous avons gardé l'information à l'instant précédent. Ceci traduit le phénomène physique ayant lieu en ce sens que nous utilisons la dernière information en amont, i.e., au temps $n+1$ et la dernière information en aval, i.e., au temps n .

$$\partial_z(f\partial_z g)(t^{n+1}, x_i, y_j, z_k) \approx \frac{f_{ijk}^{n+1} \left(\frac{g_{ijk+1}^{n+1} - g_{ijk}^{n+1}}{\Delta z} \right) - f_{ijk-1}^{n+1} \left(\frac{g_{ijk}^{n+1} - g_{ijk-1}^{n+1}}{\Delta z} \right)}{\Delta z}$$

cette approximation est d'ordre 1.

Approximation des conditions initiales et aux limites:

Nous allons adopter une approximation ponctuelle. Par conséquent, nous avons:

A l'instant initial: $t=0$

$$\bar{w}^0(x_i, y_j, z_k) = \bar{w}^0(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) = \bar{w}_{ijk}^0$$

En entrée: $z=0$

$$\bar{w}^e(t^{n+1}, x_i, y_j) = \bar{w}^e((n+1)\Delta t, i\Delta x, j\Delta y) = \bar{w}_{ij}^{e^{n+1}}$$

Sur la paroi: $\partial\Omega$

$$\bar{w}^w(t^{n+1}, x_i, y_j, z_k) = \bar{w}^w((n+1)\Delta t, i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) = \bar{w}_{ijk}^{w^{n+1}}$$

En sortie: $z=L$

$$\bar{w}^s(t^{n+1}, x_i, y_j) = \bar{w}^s((n+1)\Delta t, i\Delta x, j\Delta y) = \bar{w}_{ij}^{s^{n+1}}$$

Moyennant les approximations précédentes, le problème continu (P) est approché par le problème discret (P_h) suivant:

Il s'agit de déterminer, pour tout $(t^{n+1}, x_i, y_j, z_k) \in \Omega_T^h$, le vecteur \vec{W}_{ijk}^{n+1} qui soit solution du système d'équations suivant:

(P_h)

$$\frac{\vec{W}_{ijk}^{n+1}}{\Delta t} - \frac{H_1(\vec{W}_{ijk}^{n+1})}{\Delta x} - \frac{H_2(\vec{W}_{ijk}^{n+1})}{\Delta y} + \frac{H_3(\vec{W}_{ijk}^{n+1})}{\Delta z} = F^h(\vec{W}_{ijk}^n, \vec{W}_{ijk+1}^n, \vec{W}_{ijk}^{n+1}, \vec{W}_{i+1jk}^{n+1}, \vec{W}_{ij+1k}^{n+1}, \vec{W}_{ijk-1}^{n+1}, \vec{W}_{i+1jk-1}^{n+1}, \vec{W}_{ij+1k-1}^{n+1})$$

sachant:

$$\vec{W}_{ijk}^0$$

$$\vec{W}_{ij}^{n+1}$$

$$\vec{\omega}_{ijk}^{n+1}$$

$$\vec{\omega}_{ij}^{n+1}$$

où:

F^h : est une fonction non linéaire (Cf. Annexe 1),

(P_h) est un système algébrique non linéaire dont l'inconnue est \vec{W}_{ijk}^{n+1} . La résolution de ce problème sera entièrement décrite au chapitre suivant.

DESCRIPTION DE LA METHODE DE RESOLUTION

Ce chapitre est consacré à la description de la méthode adoptée pour déterminer, en tout point (t^{n+1}, x_i, y_j, z_k) de la grille Ω_7^n , le vecteur état approché:

$$\bar{W}_{ijk}^{n+1} = \left(\rho_{ijk}^{n+1}, \rho U_{1ijk}^{n+1}, \rho U_{2ijk}^{n+1}, \rho U_{3ijk}^{n+1}, \rho h_{ijk}^{n+1}, \alpha_l^{-1n+1} \right)$$

solution du problème (P_h) (Cf. Chap.4).

Nous effectuons un "splitting" du vecteur état en posant:

$$\bar{W}_{ijk}^{n+1} = \tilde{W}_{ijk}^{n+1} + \tilde{\omega}_{ijk}^{n+1}$$

où:

$$\tilde{W}_{ijk}^{n+1} = \left(\rho_{ijk}^{n+1}, 0, 0, \rho U_{3ijk}^{n+1}, \rho h_{ijk}^{n+1}, \alpha_l^{-1n+1} \right)$$

$$\tilde{\omega}_{ijk}^{n+1} = \left(0, \rho U_{1ijk}^{n+1}, \rho U_{2ijk}^{n+1}, 0, 0, 0 \right)$$

\tilde{W}_{ijk}^{n+1} est solution du système d'équations algébriques non linéaire suivant:

$$(P_h)_1 \left| \begin{array}{l} \frac{\tilde{W}_{ijk}^{n+1}}{\Delta t} - \frac{H_1(\tilde{W}_{ijk}^{n+1})}{\Delta x} - \frac{H_2(\tilde{W}_{ijk}^{n+1})}{\Delta y} + \frac{H_3(\tilde{W}_{ijk}^{n+1})}{\Delta z} = \\ F^h(\tilde{W}_{ijk}^n, \tilde{W}_{ijk+1}^n, \tilde{W}_{ijk}^{n+1}, \tilde{W}_{i+1jk}^{n+1}, \tilde{W}_{ij+1k}^{n+1}, \tilde{W}_{ijk-1}^{n+1}, \tilde{W}_{i+1jk-1}^{n+1}, \tilde{W}_{ij+1k-1}^{n+1}) \end{array} \right.$$

En fait, $(P_h)_1$ est un système à quatre équations qui sera résolu par une méthode de point fixe (Cf. Annexe2).

$\tilde{\omega}_{ijk}^{n+1}$ est solution du système d'équations algébriques suivant:

$$(P_h)_2 \left| \begin{array}{l} \frac{\tilde{\omega}_{ijk}^{n+1}}{\Delta t} - \frac{H_1(\tilde{\omega}_{ijk}^{n+1})}{\Delta x} - \frac{H_2(\tilde{\omega}_{ijk}^{n+1})}{\Delta y} + \frac{H_3(\tilde{\omega}_{ijk}^{n+1})}{\Delta z} = \\ F^h(\tilde{\omega}_{ijk}^n, \tilde{\omega}_{ijk+1}^n, \tilde{\omega}_{ijk}^{n+1}, \tilde{\omega}_{i+1jk}^{n+1}, \tilde{\omega}_{ij+1k}^{n+1}, \tilde{\omega}_{ijk-1}^{n+1}, \tilde{\omega}_{i+1jk-1}^{n+1}, \tilde{\omega}_{ij+1k-1}^{n+1}) \end{array} \right.$$

C'est un système de deux équations linéaires découplées.

Par ailleurs, puisque nous traitons un écoulement diphasique en conduites circulaires, les systèmes $(P_h)_1$ et $(P_h)_2$ sont réécrits en fonction des coordonnées cylindriques (r, θ, z) (Cf. Annexe 1). Ainsi, les vecteurs \tilde{W}_{ijk}^{n+1} et $\tilde{\omega}_{ijk}^{n+1}$ sont calculés en tout points $(t^{n+1}, r_i, \theta_j, z_k)$ de la grille Ω_T^h .

En posant:

$$r_i = i\Delta r$$

$$\theta_j = j\Delta\theta$$

Nous avons donc:

$$\Omega_T^h = \{(t^n, r_i, \theta_j, z_k) / 0 < n \leq N, 0 < i < I, 1 \leq j \leq J, 0 < k < K\}$$

$$\tilde{W}_{ijk}^{n+1} = {}^t(\rho_{ijk}^{n+1}, 0, 0, \rho U_{zijk}^{n+1}, \rho h_{ijk}^{n+1}, \alpha_l^{-1n+1})$$

$$\tilde{\omega}_{ijk}^{n+1} = {}^t(0, \rho l / r_{ijk}^{n+1}, \rho l / \theta_{ijk}^{n+1}, 0, 0, 0)$$

1- ALGORITHME DE RESOLUTION

Nous allons procéder maintenant au calcul du vecteur état \bar{W}_{ijk}^{n+1} selon les étapes suivantes:

Etape 0:

\bar{W}_{ijk}^{n+1} est entièrement donné. C'est la condition initiale.

Etape 1:

Nous calculons successivement \bar{W}_{ijk}^1 le long de la conduite section par section.

k=0

\bar{W}_{ij0}^1 est donné entièrement. C'est la condition entrante.

k=1

$$\bar{W}_{ij1}^1 = \tilde{W}_{ij1}^1 + \tilde{\omega}_{ij1}^1$$

Nous calculons tout d'abord \bar{W}_{ij1}^1 dans toute la section. Ainsi, pour:

i=I-1, ..., 1

et,

j=1, ..., J

\bar{W}_{ij1}^1 est calculé connaissant:

\bar{W}_{ij1}^0 : vecteur état à la même section donné en condition initiale,

$\rho_{i,j/2}^0$: densité du mélange à la section avale donnée en condition initiale,

$U_{z,i,j/2}^0$: vitesse axiale du mélange à la section avale donnée en condition initiale,

$\alpha_{i,j/2}^0$: taux de présence de la phase liquide à la section avale donné en condition initiale.

$\tilde{W}_{i,j}^1$: vecteur état à la section amont donné en condition entrante,

$\Gamma_{i,j}^1$: génération du nombre de gouttes à la même section donnée.

Nous réitérons le calcul selon j,
puis,

Nous réitérons le calcul selon i.

Nous passons maintenant au calcul de $\tilde{\omega}_{i,j}^1$. En premier lieu, pour:

$i=I-1$
et,

$j=1, \dots, J$

$\tilde{\omega}_{i-1,j}^1$ est calculé connaissant:

$\tilde{\omega}_{i-1,j}^0$: vecteur état à la même section donné en condition initiale ,

$\rho_{i-1,j/2}^0$: densité du mélange à la section avale donnée en condition initiale,

$U_{r,i-1,j/2}^0$: vitesse radiale du mélange à la section avale donnée en condition initiale,

$U_{\theta,i-1,j/2}^0$: vitesse tangentielle du mélange à la section avale donnée en condition initiale,

$\alpha_{i-1,j/2}^1$: taux de présence de la phase liquide à la section avale donné en condition initiale,

$\rho_{i-1,j}^1$: densité du mélange à la section amont donnée en condition entrante,

$\bar{U}_{i-1,j}^1$: vecteur vitesse du mélange à la section amont donné en condition entrante,

$\alpha_{i,i-1,j}^1$: taux de présence de la phase liquide à la section amont donné en condition entrante,

$U_{z(i,j)\sigma}^1, U_{z(i,j)}^1$: composantes longitudinales de la vitesse de la phase liquide données en condition à la paroi,

$P_{i,j}^1$: pression effective du mélange donnée en condition à la paroi,

ainsi que:

$\vec{W}_{i-1,j}^1$: vecteur état à la même section déjà calculé.

Nous réitérons le calcul selon j.

Pour,
 $i=I-2, \dots, 1$
et

$j=1, \dots, J$

$\vec{\omega}_{i,j}^1$ est calculé connaissant:

$\vec{\omega}_{i,j}^0$: vecteur état à la même section donné en condition initiale,

$\rho_{i,j,2}^0$: densité du mélange à la section avale donnée en condition initiale,

$U_{r,i,j,2}^0$: vitesse radiale du mélange à la section avale donnée en condition initiale,

$U_{\theta,i,j,2}^0$: vitesse tangentielle du mélange à la section avale donnée en condition initiale,

$\alpha_{i,j,2}^0$: taux de présence de la phase liquide à la section avale donné en condition initiale,

$\rho_{i-1,j,\sigma}^1, \rho_{i-1,j}^1$: densités du mélange à la section amont données en condition entrante,

$U_{r,i-1,j,\sigma}^1$: vitesse radiale du mélange à la section amont donnée en condition entrante,

$U_{\theta,i-1,j,\sigma}^1$: vitesse tangentielle du mélange à la section amont donnée en condition entrante,

$U_{z(i-1,j,\sigma)}^1, U_{z(i-1,j)}^1$: vitesses axiales du mélange à la section amont données en condition entrante,

$\alpha_{i-1,j,\sigma}^1, \alpha_{i-1,j}^1$: taux de présence de la phase liquide à la section amont donnés en condition entrante,

ainsi que:

\tilde{W}_{ij1}^1 : vecteur état à la même section déjà calculé,

$\rho_{i,11}^1$: densité du mélange à la même section déjà calculée,

$U_{z,i,11}^1$: vitesse axiale du mélange à la même section déjà calculée,

$\alpha_{i,11}^1$: taux de présence de la phase liquide à la même section déjà calculé.

Nous réitérons le calcul selon j,
puis,

Nous réitérons le calcul selon i.

Ainsi le vecteur \bar{W}_{ij1}^1 est entièrement calculé à la première section.

$k=2, \dots, K-1$

$$\bar{W}_{ijk}^1 = \tilde{W}_{ijk}^1 + \tilde{\omega}_{ijk}^1$$

Identiquement à la première section, nous calculons tout d'abord \tilde{W}_{ijk}^1 dans toute la section puis nous déduisons $\tilde{\omega}_{ijk}^1$ mais en prenant cette fois, toutes les valeurs des données entrantes comme étant celles de la section amont, i.e., celles à la section (k-1).

Ainsi, tout le vecteur état est calculé en tout point (l^1, r, θ, z_k) se trouvant à l'intérieur de la grille Ω_T^A

Etape n:

De même, nous calculons successivement \bar{W}_{ijk}^{n+1} le long de la conduite section par section.

$k=0$

\bar{W}_{ij0}^{n+1} est donné entièrement. C'est la condition entrante.

$k=1, \dots, K-2$

Nous adoptons la même démarche qu'à l'étape 1 pour calculer le vecteur état au temps n+1 mais en prenant cette fois, toutes les valeurs des données initiales comme étant celles du temps précédent, i.e., celles à l'instant n.

$k=K-1$

$$\bar{W}_{ijK-1}^{n+1} = \tilde{W}_{ijK-1}^{n+1} + \tilde{\omega}_{ijK-1}^{n+1}$$

La aussi, nous calculons tout d'abord \tilde{W}_{ijK-1}^{n+1} , dans toute la section. Ainsi, pour:

$i=I-1, \dots, 1$

et,

$j=1, \dots, J$

\bar{W}_{ijk-1}^{n+1} est calculé connaissant:

\bar{W}_{ijk-1}^n : vecteur état à la même section et au temps précédent,

U_{zijk}^n : vitesse axiale de la phase liquide à la section avale donnée en condition de sortie,

T_{oijk}^n : température de la phase gaz à la section avale donnée en condition de sortie.

Γ_{ijk-1}^{n+1} : génération du nombre de gouttes à la même section donnée.

Nous réitérons le calcul selon j ,

puis,

Nous réitérons le calcul selon i .

Nous passons maintenant au calcul de $\bar{\omega}_{ijk-1}^{n+1}$. De même pour:

$i=I-1$

et,

$j=1, \dots, J$

$\bar{\omega}_{i-1jk-1}^{n+1}$ est calculé connaissant:

$\bar{\omega}_{i-1jk-1}^n$: vecteur état à la même section et au temps précédent,

$\rho_{i-1jk-2}^{n+1}$: densité du mélange à la section amont,

$\bar{U}_{i-1jk-2}^{n+1}$: vecteur vitesse du mélange à la section amont,

$\alpha_{i-1jk-2}^{n+1}$: taux de présence de la phase liquide à la section amont,

U_{zijk-2}^{n+1} , U_{zijk-1}^{n+1} : composantes longitudinales de la vitesse de la phase liquide données en condition à la paroi,

P_{ijk-1}^{n+1} : pression effective du mélange donnée en condition à la paroi,

U_{ri-1jk}^n : vitesse radiale de la phase liquide à la section avale donnée en condition de sortie,

U_{oi-1jk}^n : vitesse tangentielle de la phase liquide à la section avale donnée en condition de sortie,

ainsi que,

$\vec{W}_{i-1/K-1}^{n+1}$: vecteur état à la même section déjà calculé.

Nous réitérons le calcul selon j,

pour

$i=I-2, \dots, 1$

et,

$j=1, \dots, J$

$\vec{\omega}_{ijk-1}^{n+1}$ est calculé connaissant:

$\vec{\omega}_{ijk-1}^n$: vecteur état à la même section et au temps précédent,

$\rho_{i-1/K-2}^{n+1}$, ρ_{ijk-2}^{n+1} : densités du mélange à la section amont,

$U_{r_{ijk-2}}^{n+1}$: vitesse radiale du mélange à la section amont,

$U_{\theta_{ijk-2}}^{n+1}$: vitesse tangentielle du mélange à la section amont,

$U_{z_{i-1/K-2}}^{n+1}$, $U_{z_{ijk-2}}^{n+1}$: vitesses axiales du mélange à la section amont,

$\alpha_{i-1/K-2}^{n+1}$, α_{ijk-2}^{n+1} : taux de présence de la phase liquide à la section amont,

$U_{r_{ijk}}^n$: vitesse radiale de la phase liquide à la section aval donnée en condition de sortie,

$U_{\theta_{ijk}}^n$: vitesse tangentielle de la phase liquide à la section aval donnée en condition de sortie,

ainsi que:

\vec{W}_{ijk-1}^{n+1} : vecteur état à la même section déjà calculé.

$\rho_{i-1/K-1}^{n+1}$: densité du mélange à la même section déjà calculée,

$U_{z_{i-1/K-1}}^{n+1}$: vitesse axiale du mélange à la même section déjà calculée,

$\alpha_{i-1/K-1}^{n+1}$: taux de présence de la phase liquide à la même section déjà calculé,

Nous réitérons le calcul selon j,

puis,

Nous réitérons le calcul selon i.

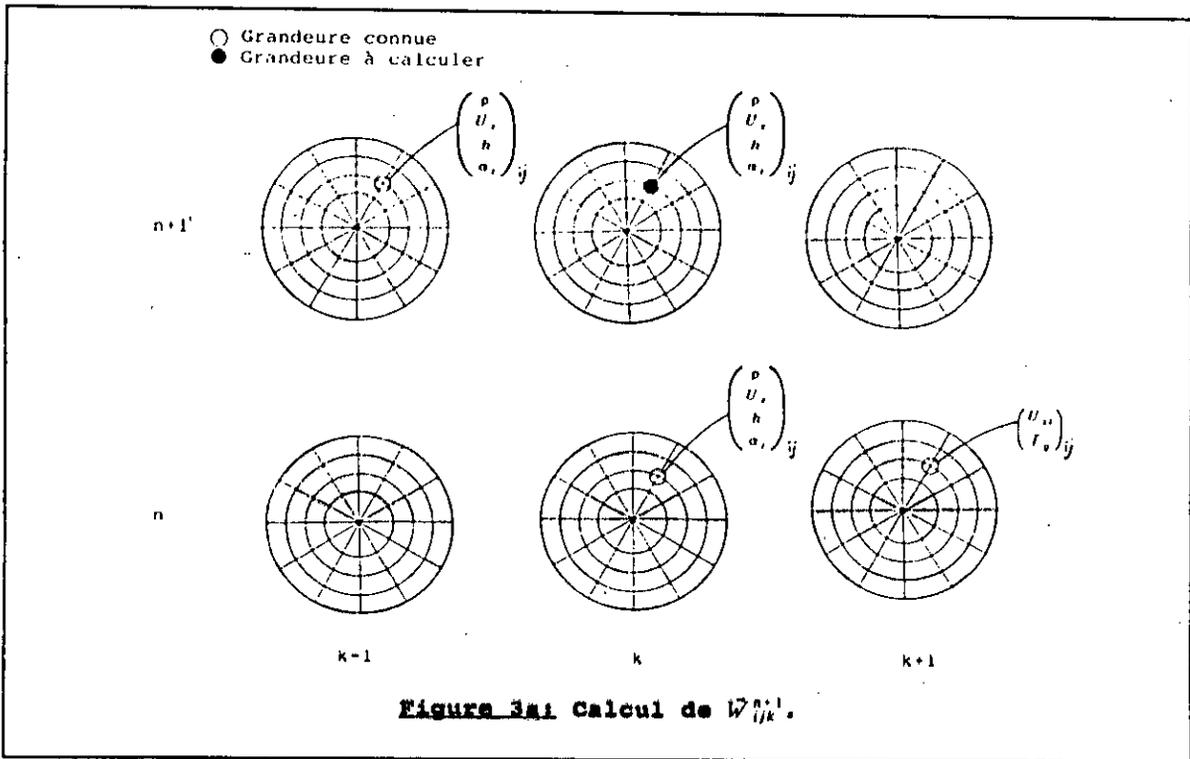
Ainsi le vecteur \vec{W}_{ijk-1}^{n+1} est entièrement calculé à la section K-1.

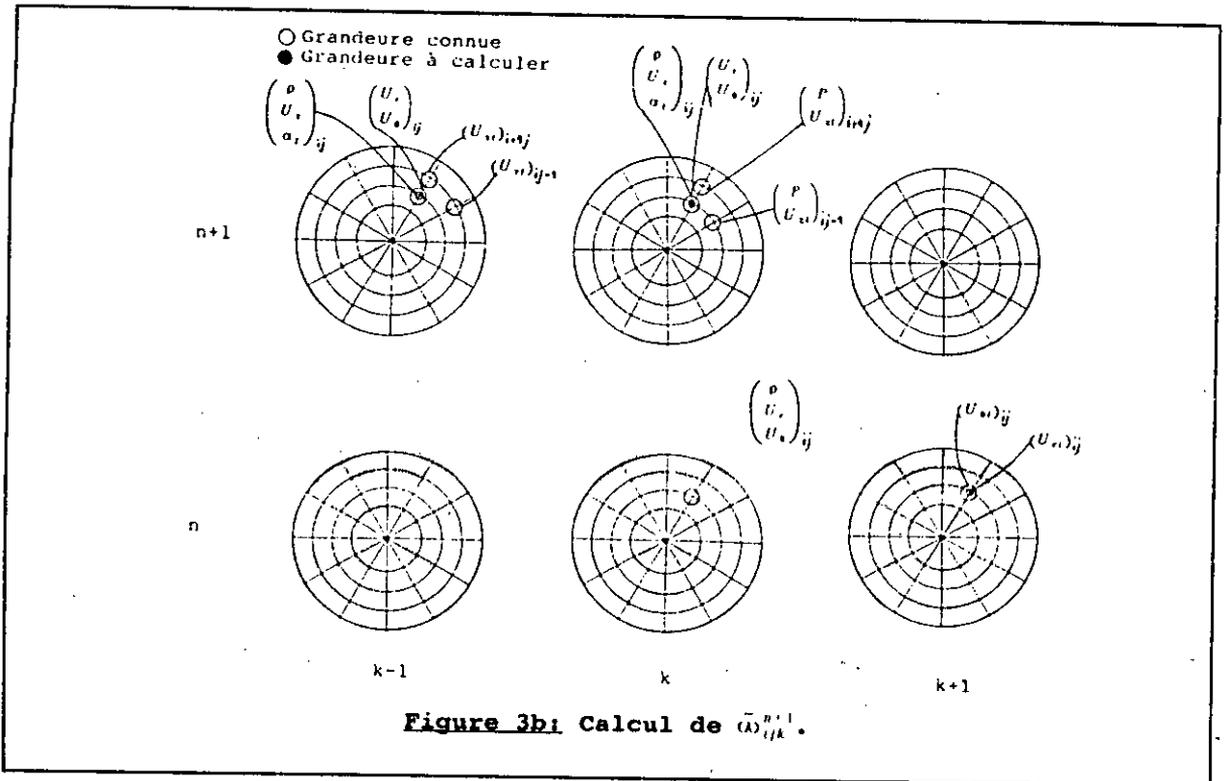
2- CONCLUSION

Nous venons ainsi de présenter un algorithme de résolution du problème (P_h) (Cf. Chap.4) dont la mise en oeuvre est relativement simple. Il nous permet entre de découpler le système algébrique (P_h) en deux systèmes l'un à quatre équations non linéaires et l'autre à deux équations linéaires découplées.

Par ailleurs, nous pouvons remarquer que l'algorithme proposé suit l'évolution de l'écoulement en ce sens que la résolution évolue section par section. Ainsi le vecteur état est entièrement calculé à l'intérieur de la grille Ω_h^n et partiellement connu sur la paroi et en sortie de la grille Ω_h^n . Ceci n'altère guère l'évolution du calcul numérique. Nous avons en outre utilisé un artifice de calcul qui consiste à supposer la vitesse du liquide connue en sortie de la conduite.

Enfin, nous pouvons schématiser l'algorithme de résolution comme suit (Cf. Fig.3).





EXPERIENCES NUMERIQUES

Afin de valider la méthode numérique adoptée au chapitre 4, nous avons effectuée une série de tests numériques portant sur deux types d'écoulement:

- Un écoulement de gaz et de liquide i.e., un écoulement vraiment diphasique.
- Un écoulement formé uniquement de gaz i.e., absence de la phase liquide.

Nous avons choisi, pour effectuer ces tests, une conduite ayant une longueur de cent mètres et un rayon de un mètre.

Les conditions initiales et aux limites pour ces tests ont été choisies de telle sorte que la solution analytique du problème continu soit de la forme suivante:

Pour l'écoulement diphasique:

$$\left| \begin{array}{l}
 \rho = \frac{1}{at+b} \\
 U_r = U_\theta = 0 \\
 U_z = \frac{az+1}{at+b} \\
 h = \frac{1}{a} \left\{ \frac{az+1}{at+b} + U_3 \cdot \left(\ln \left(\frac{b}{at+b} \right) + at \right) + U_{3-\rho} \cdot \left(\frac{(at+b)^2 - b^2}{2} - \frac{(at+b)^3 - b^3}{3} \right) \right\} \\
 \alpha_t = at+b \\
 \Gamma_n = 0 \quad \gamma=2, \quad c_p=2, \quad a, b = \text{const.}
 \end{array} \right.$$

Pour l'écoulement du gaz:

$$\left| \begin{array}{l}
 \rho = ct^2 + t + a - z \\
 U_r = U_\theta = 0 \\
 U_z = 2ct + 1 \\
 h = c \frac{c_p}{R} (ct^2 + t + a - z) \\
 \alpha_t = \Gamma_n = 0 \quad \gamma=2, \quad c_p=2, \quad a = \text{const.}
 \end{array} \right.$$

En l'absence de résultats théoriques sur la stabilité du schéma et de critère du type CFL (Cf. [Ra]), nous ne disposons donc pas d'argument a priori qui nous permet de choisir de façon optimale les pas de discrétisation Δt , Δr , $\Delta \theta$ et Δz . C'est pourquoi, nous avons effectué des tests en faisant varier essentiellement le pas de temps Δt sur l'intervalle [0.05, 0.2] et le pas d'espace Δz sur l'intervalle [0.02, 20].

Dans toutes les figures ci-contre, les solutions numériques obtenues sont représentées en traits discontinus et les solutions analytiques en trait plein.

1ère expérience: Ecoulement Diphasique

Tests 1:

Nous choisissons:

$$\Delta t = 0.05$$

et nous faisons varier le pas d'espace Δz le long de la direction de l'écoulement. Nous choisissons:

$$\Delta z = 0.02$$

L'état de l'écoulement dans la conduite est représenté:

En début de conduite: $z = 20m$ (Cf. Fig.4a),

En milieu de conduite: $z = 40m$ (Cf. Fig.4b),

En fin de conduite: $z = 80m$ (Cf. Fig.4c).

Nous avons fait une représentation identique pour les tests suivants:

$\Delta t = 0.05$ et $\Delta z = 1m$ (Cf. Fig.5),

$\Delta t = 0.05$ et $\Delta z = 5m$ (Cf. Fig.6),

$\Delta t = 0.05$ et $\Delta z = 10m$ (Cf. Fig.7),

$\Delta t = 0.05$ et $\Delta z = 20m$ (Cf. Fig.8).

Commentaire 1:

Nous remarquons que pour Δt fixé ($\Delta t = 0.05$), nous avons une bonne concordance des courbes numériques et analytiques. Les résultats restent probants jusqu'à $\Delta z = 10m$ (Cf. Fig.7) où nous commençons à perdre en précision. En revanche, à partir de $\Delta z = 20m$ (Cf. Fig.8) des instabilités numériques apparaissent.

Tests 2:

Nous choisissons cette fois-ci:

$$\Delta z = 5m$$

et nous faisons varier le pas de temps Δt de 0.05 à 0.2. Nous représentons les résultats en début.

$\Delta z = 5m$ et $\Delta t = 0.05$ (Cf. Fig.6),

$\Delta z = 5m$ et $\Delta t = 0.1$ (Cf. Fig.9),

$\Delta z = 5m$ et $\Delta t = 0.15$ (Cf. Fig.10),

$\Delta z = 5m$ et $\Delta t = 0.2$ (Cf. Fig.11).

Commentaire 2:

Nous remarquons que les allures des courbes approchées restent identiques à celles des courbes analytiques avec une moins bonne précision.

Conclusion 1:

A l'issue de cette série de tests, nous pouvons affirmer que pour des pas Δt et Δz convenablement choisis, le schéma numérique adopté permet d'obtenir des résultats probants. Quant aux pas Δr et $\Delta \theta$, ils n'interviennent que dans le calcul des vitesses transverses pour lesquelles nous retrouvons les mêmes résultats.

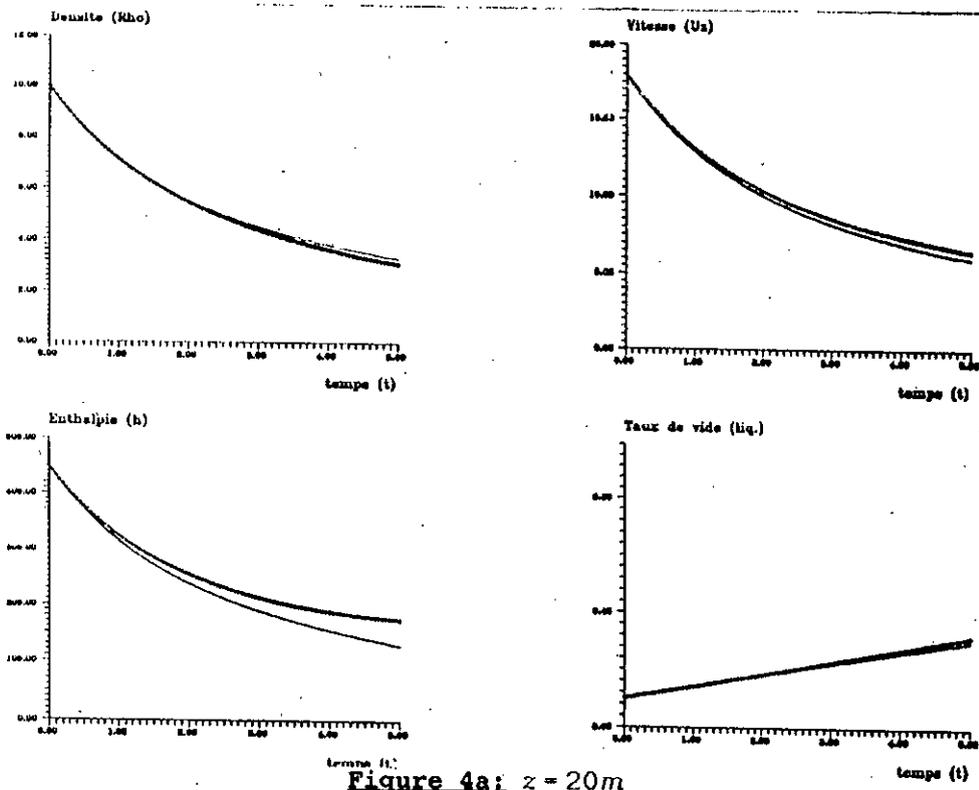


Figure 4a: $z = 20m$

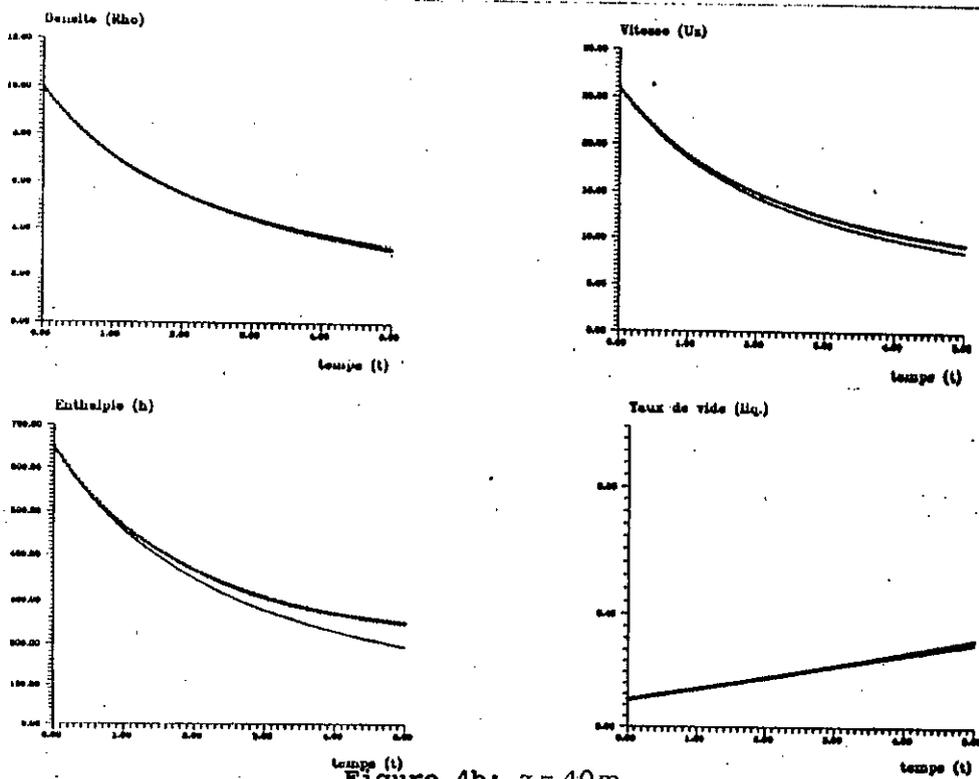


Figure 4b: $z = 40m$

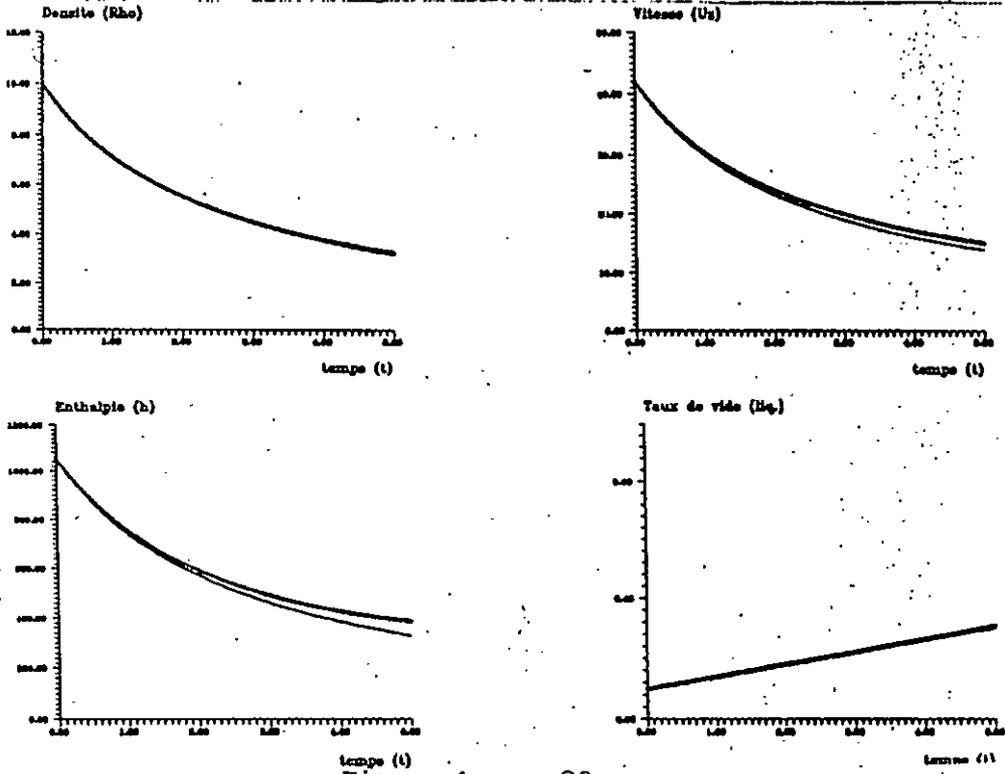


Figure 4a: $z = 80m$

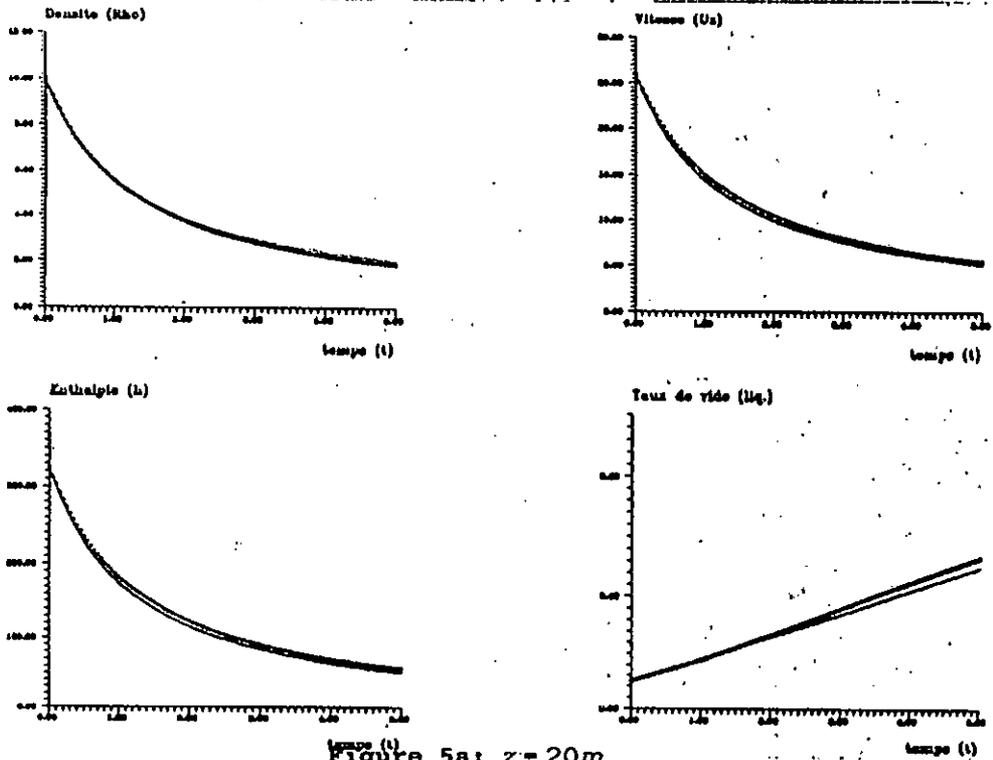


Figure 5a: $z = 20m$

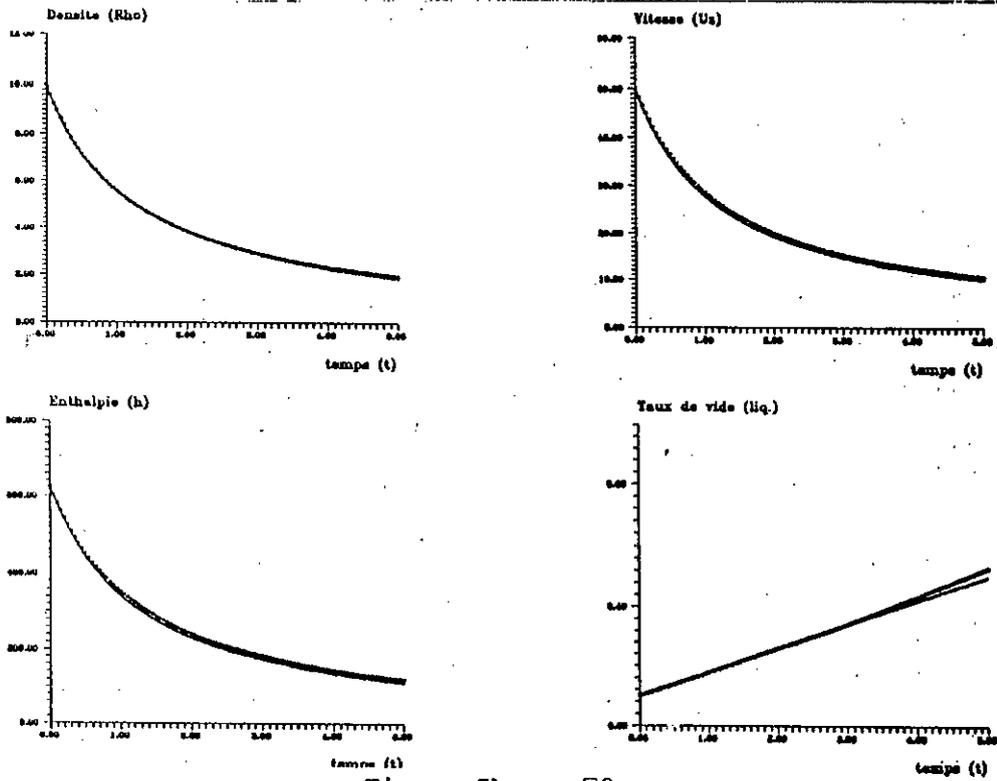


Figure 5b: $z = 50m$

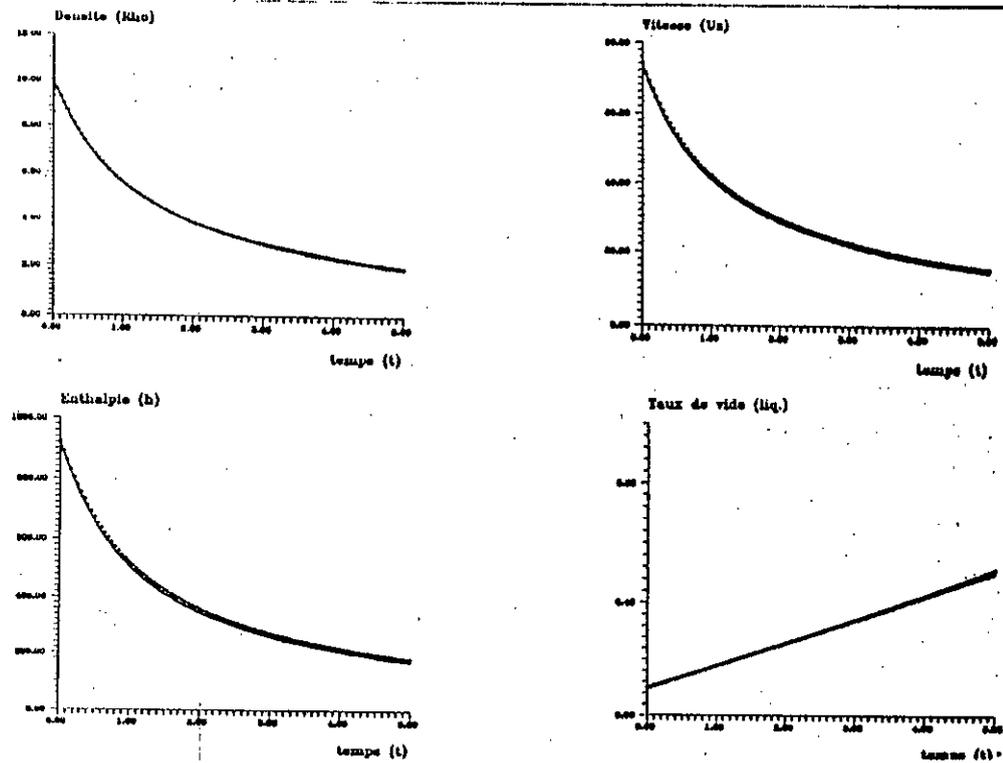


Figure 5c: $z = 80m$

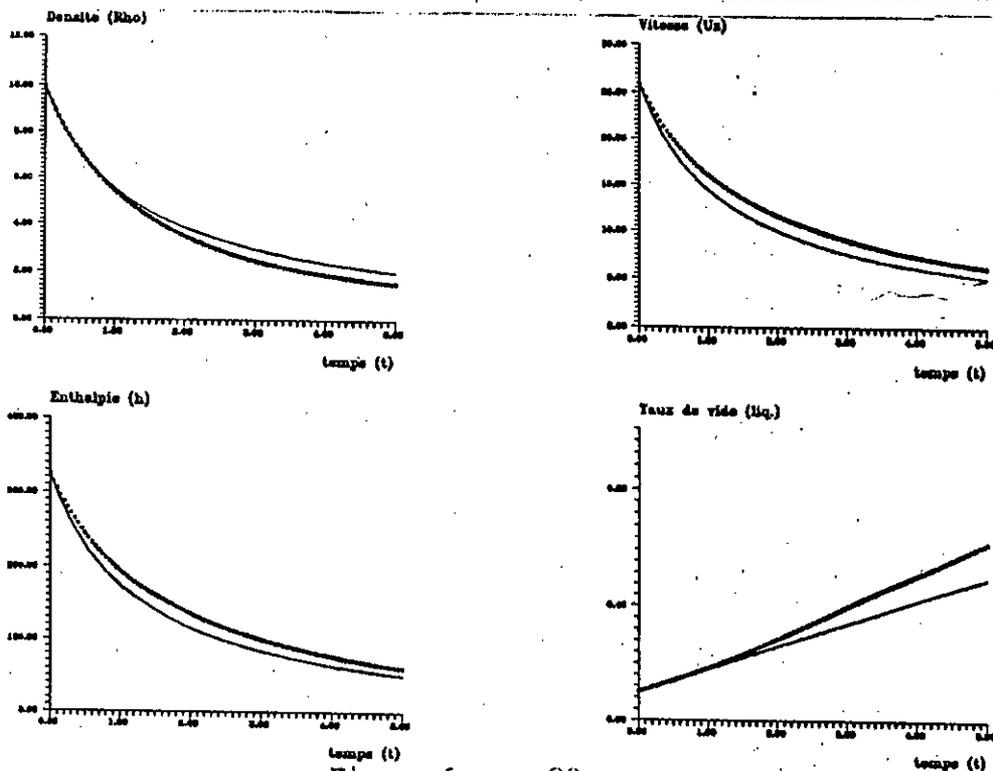


Figure 6a: $z = 20m$

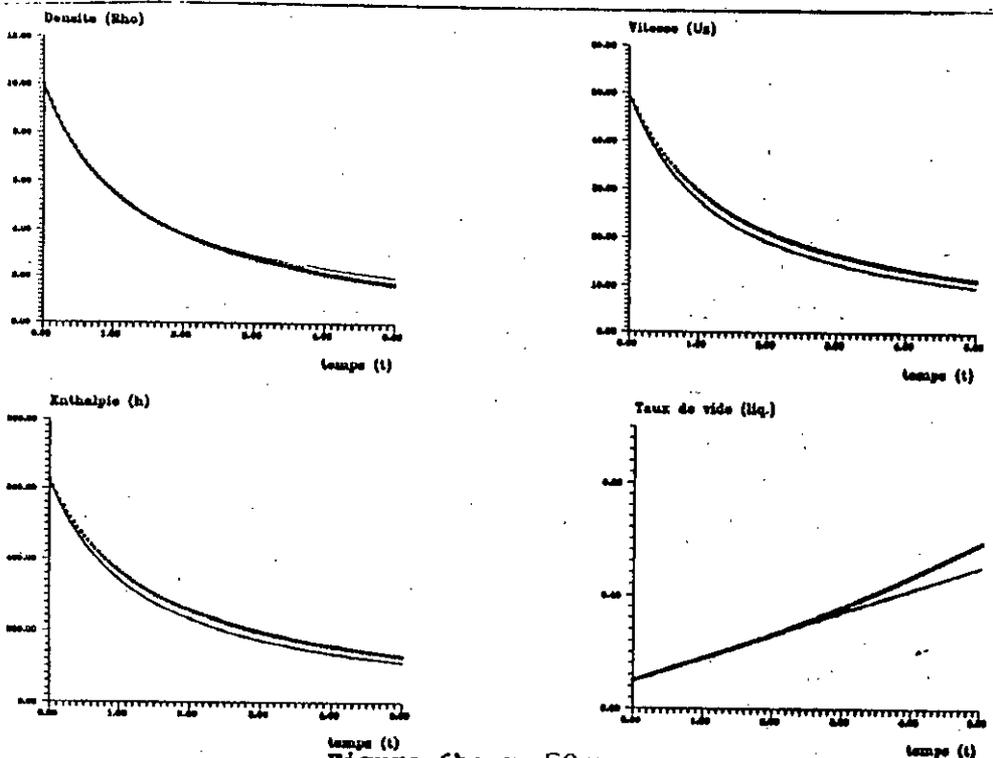


Figure 6b: $z = 50m$

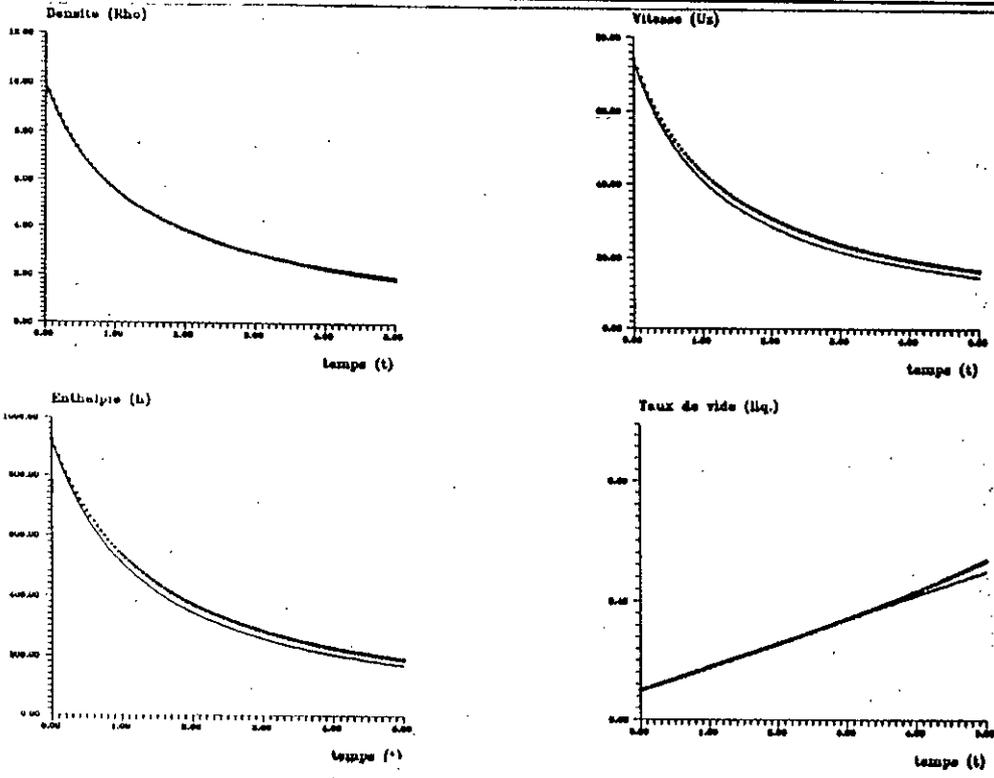


Figure 6c: $z = 80m$

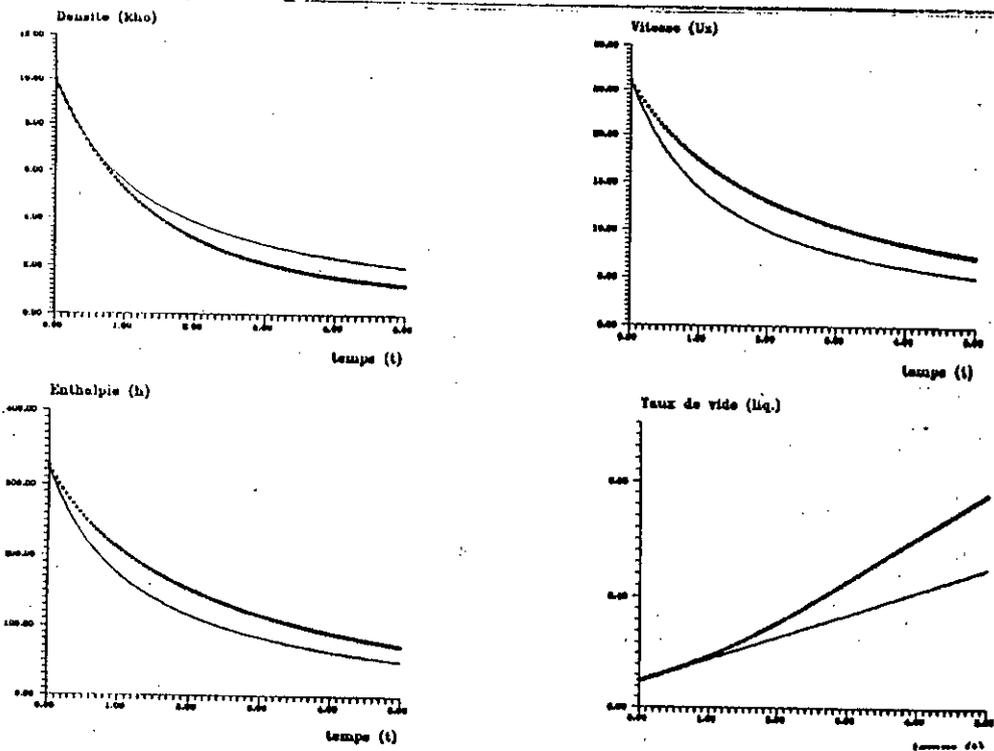


Figure 7a: $z = 20m$

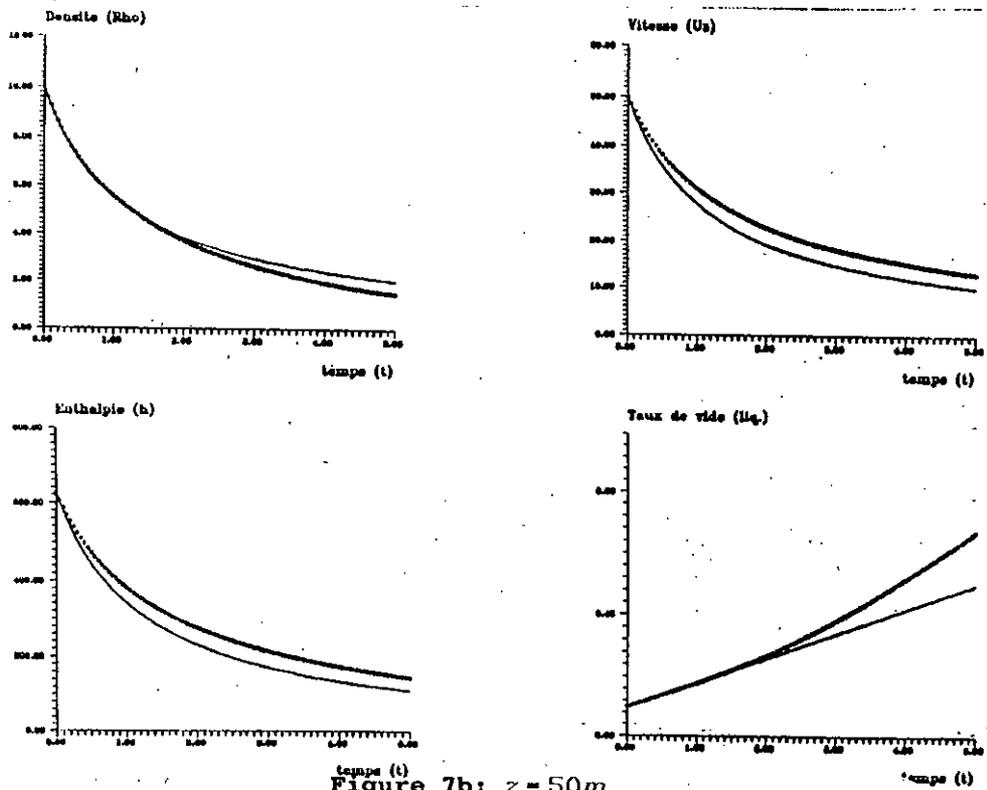


Figure 7b: $z = 50m$

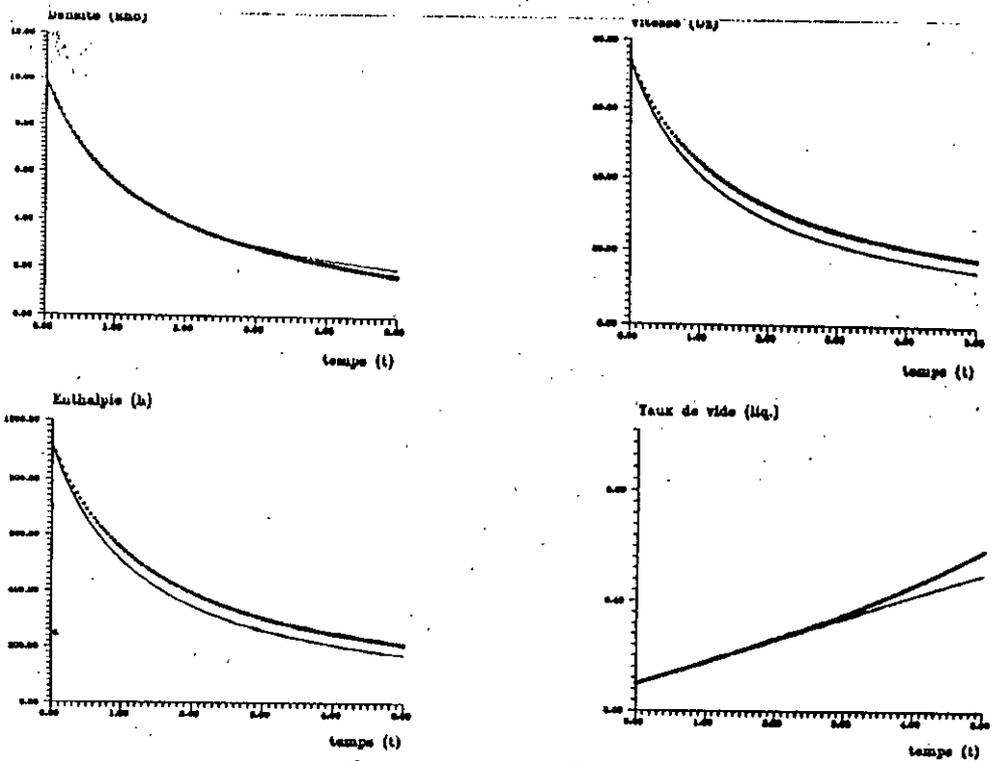


Figure 7c: $z = 80m$

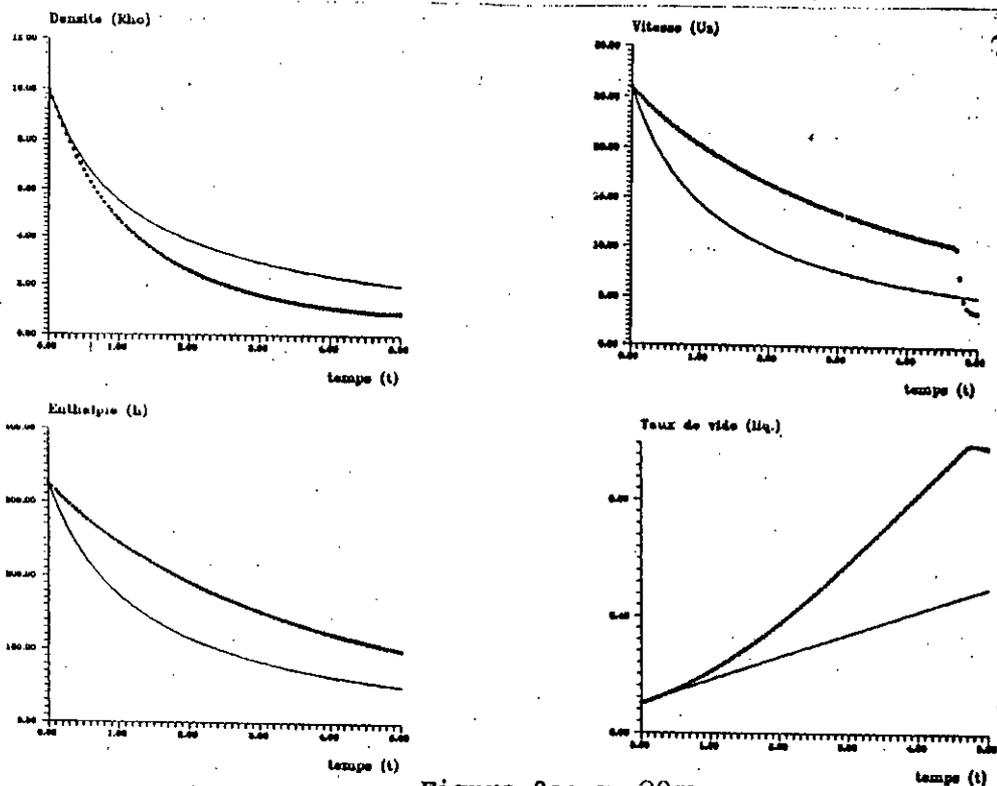


Figure 8a: $z = 20m$

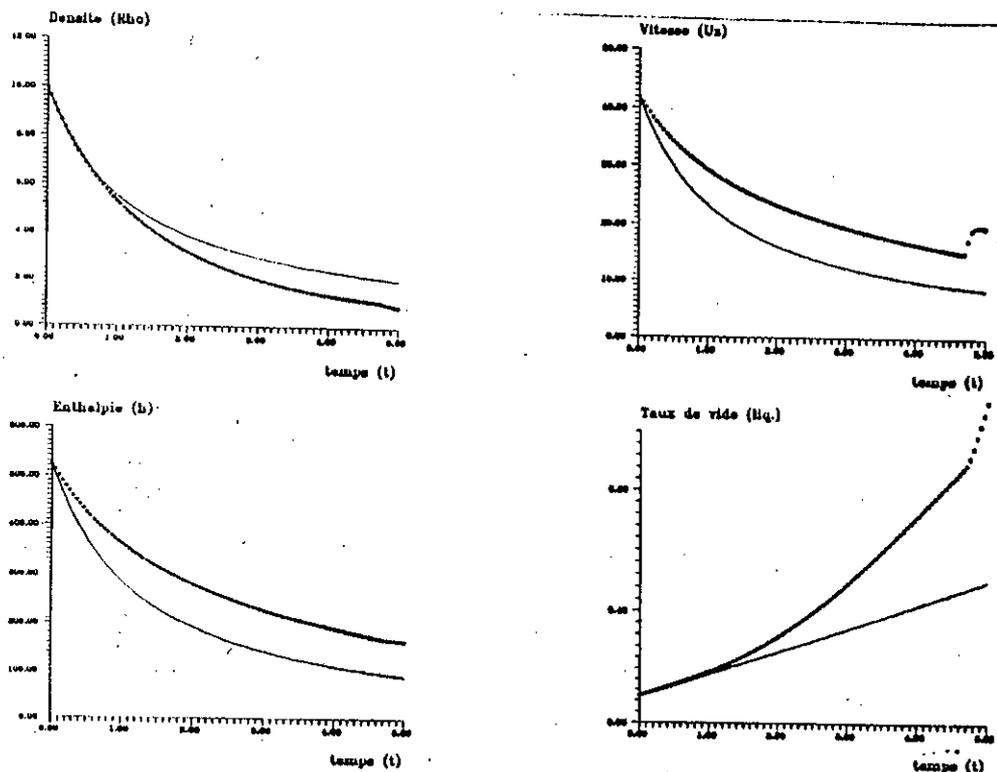


Figure 8b: $z = 40m$

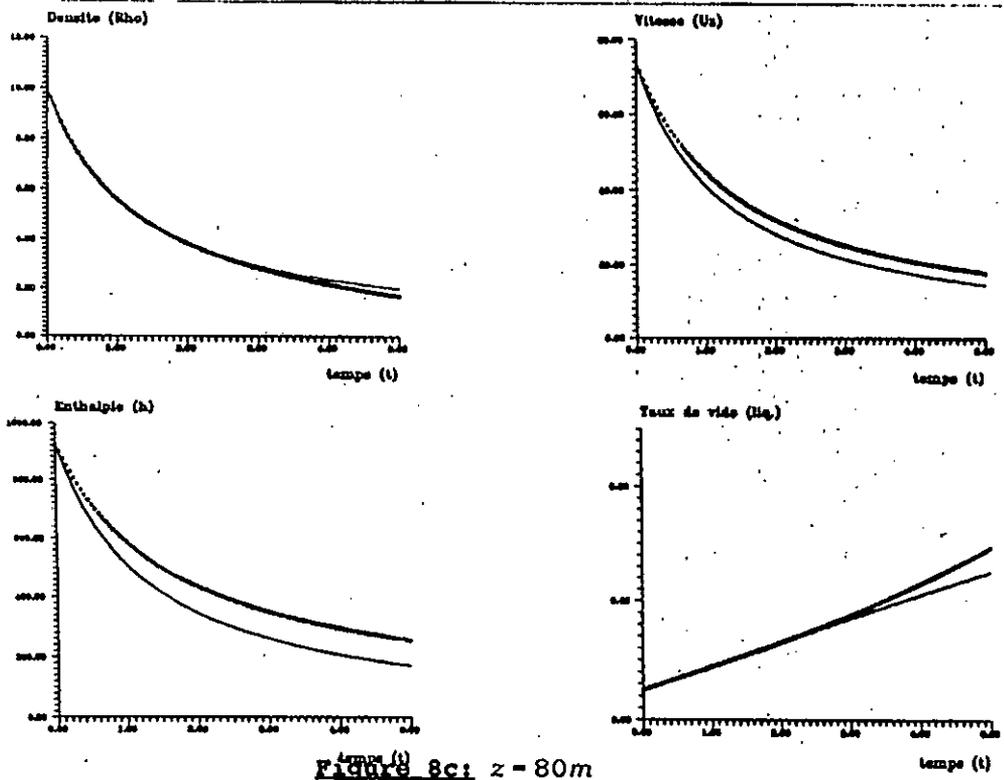


Figure 8: $z = 80m$

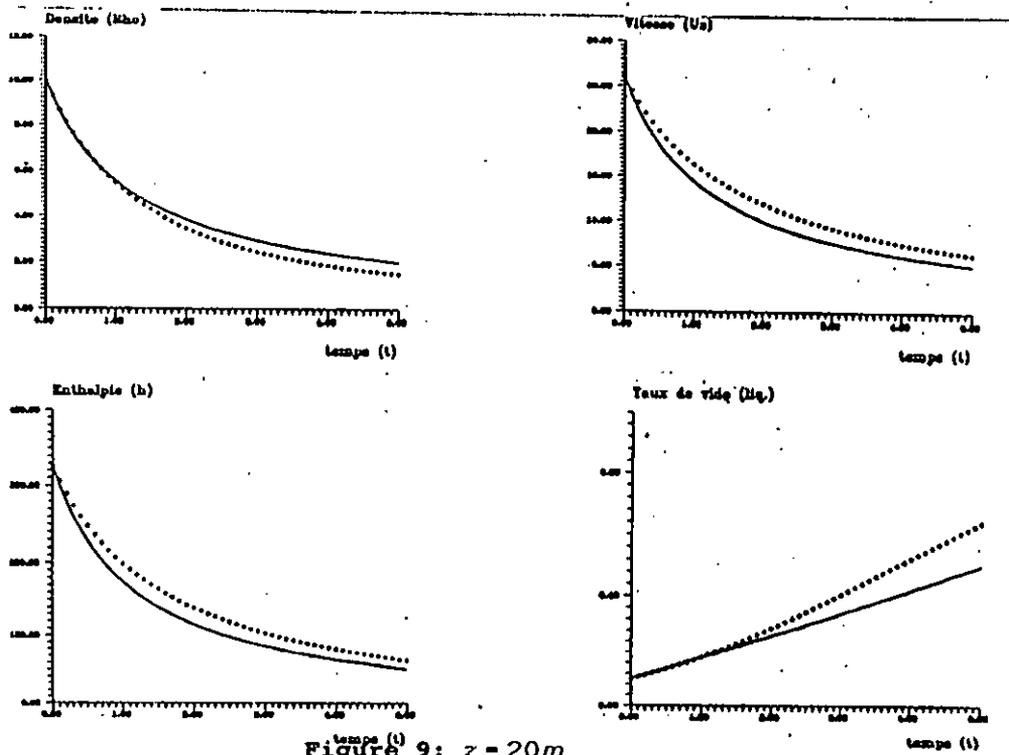


Figure 9: $z = 20m$

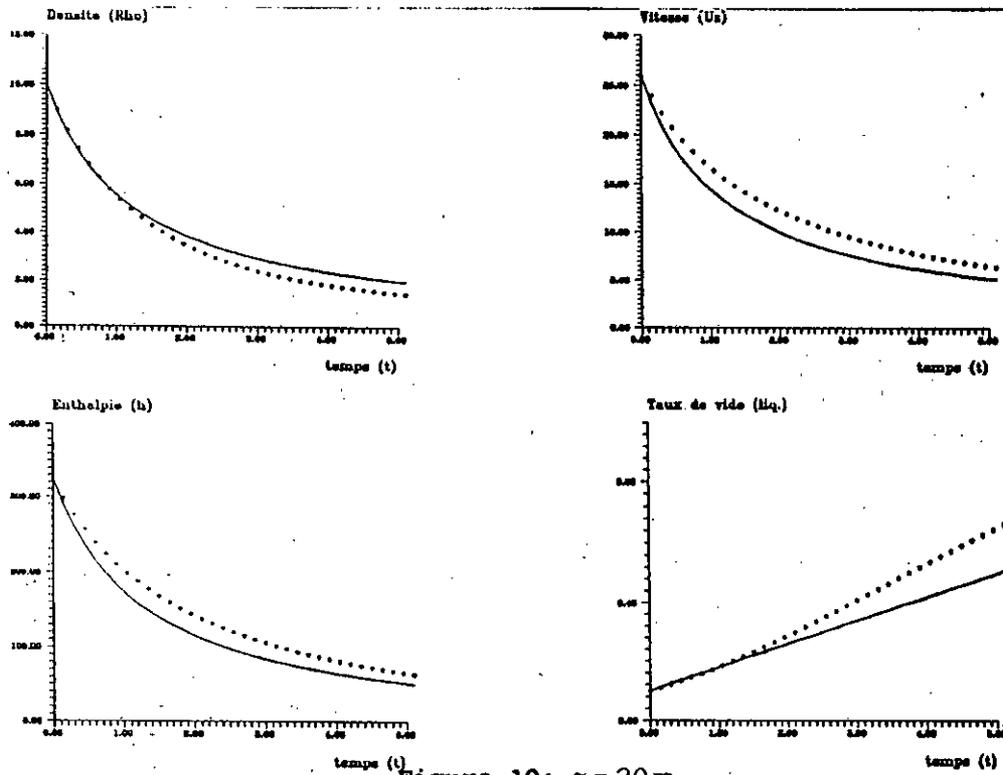


Figure 10: $z = 20m$

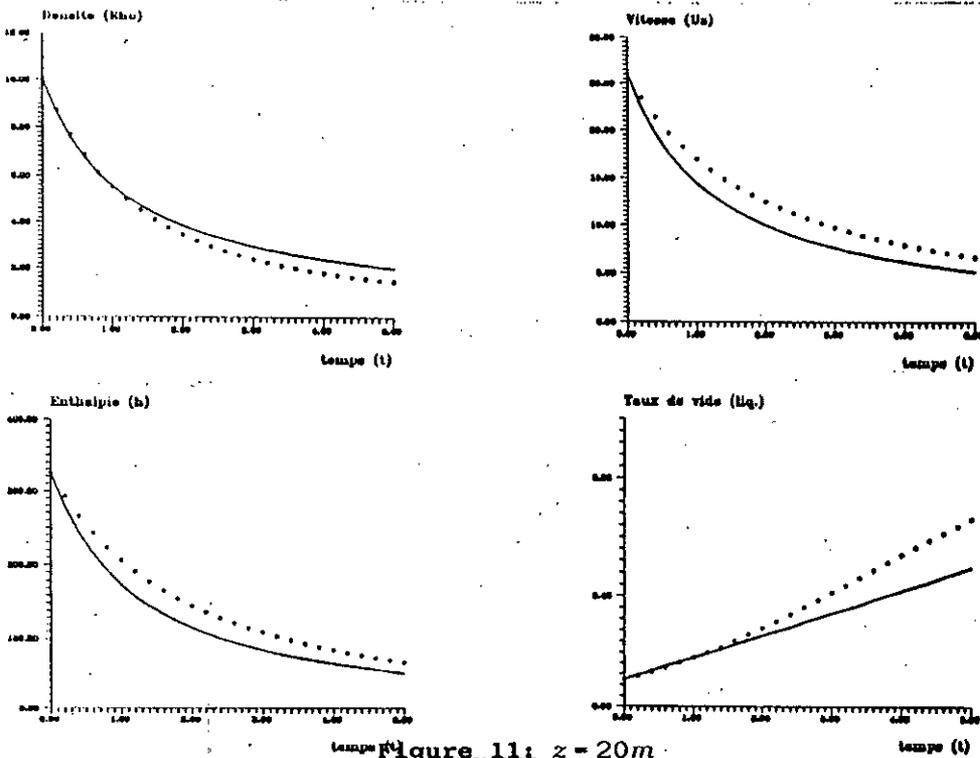


Figure 11: $z = 20m$

2ème expérience: Ecoulement de gaz

Nous avons suivi la même démarche que pour la première expérience en se fixant tout d'abord le pas de temps et en faisant varier le pas d'espace puis en fixant le pas d'espace et en faisant varier le pas de temps. Nous présentons les tests suivants:

Tests 1:

Nous choisissons:

$$\Delta t = 0.05$$

et nous faisons varier le pas d'espace Δz le long de la direction de l'écoulement. Nous avons ainsi représenté les tests suivants:

$$\Delta t = 0.05 \text{ et } \Delta z = 10m \text{ (Cf. Fig.12),}$$

$$\Delta t = 0.05 \text{ et } \Delta z = 20m \text{ (Cf. Fig.13).}$$

Une illustration en 3D est présentée pour le cas $\Delta t = 0.05u$ et $\Delta z = 10m$ (Cf. Fig.12bis).

Commentaire 3:

Pour cette série de tests, nous avons déterminé un seuil selon le pas d'espace $\Delta z = 10m$ en dessous duquel les instabilités numériques apparaissent de façon très nette. Par ailleurs, lorsque est $\Delta z > 10m$, les résultats obtenus restent peu satisfaisant notamment en ce qui concerne l'enthalpie.

Tests 2:

Pour $\Delta z = 10m$ et Δt allant de 0.05 à 0.2 nous avons:

$$\Delta z = 10m \text{ et } \Delta t = 0.05 \text{ (Cf. Fig.12),}$$

$$\Delta z = 10m \text{ et } \Delta t = 0.1 \text{ (Cf. Fig.14),}$$

$$\Delta z = 10m \text{ et } \Delta t = 0.15 \text{ (Cf. Fig.15),}$$

$$\Delta z = 10m \text{ et } \Delta t = 0.2 \text{ (Cf. Fig.16).}$$

Commentaire 4:

Les allures des courbes restent les mêmes et les phénomènes d'instabilité persistent.

Conclusion 2:

A l'issue de cette série de tests, nous remarquons que nous sommes en présence d'instabilités numériques même si ces dernières sont atténuées en augmentant le pas d'espace Δz . Quant aux pas Δr et $\Delta \theta$, ils n'interviennent que dans le calcul des vitesses transverses pour lesquelles nous retrouvons là aussi les mêmes phénomènes.

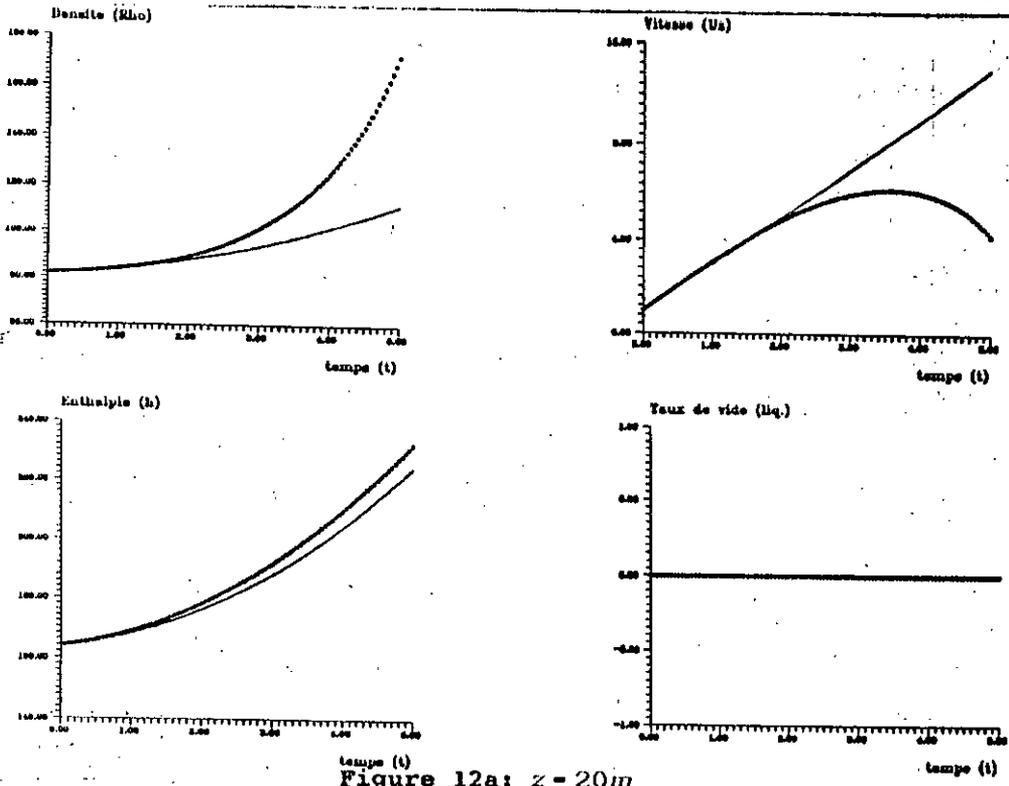


Figure 12a: $z = 20m$

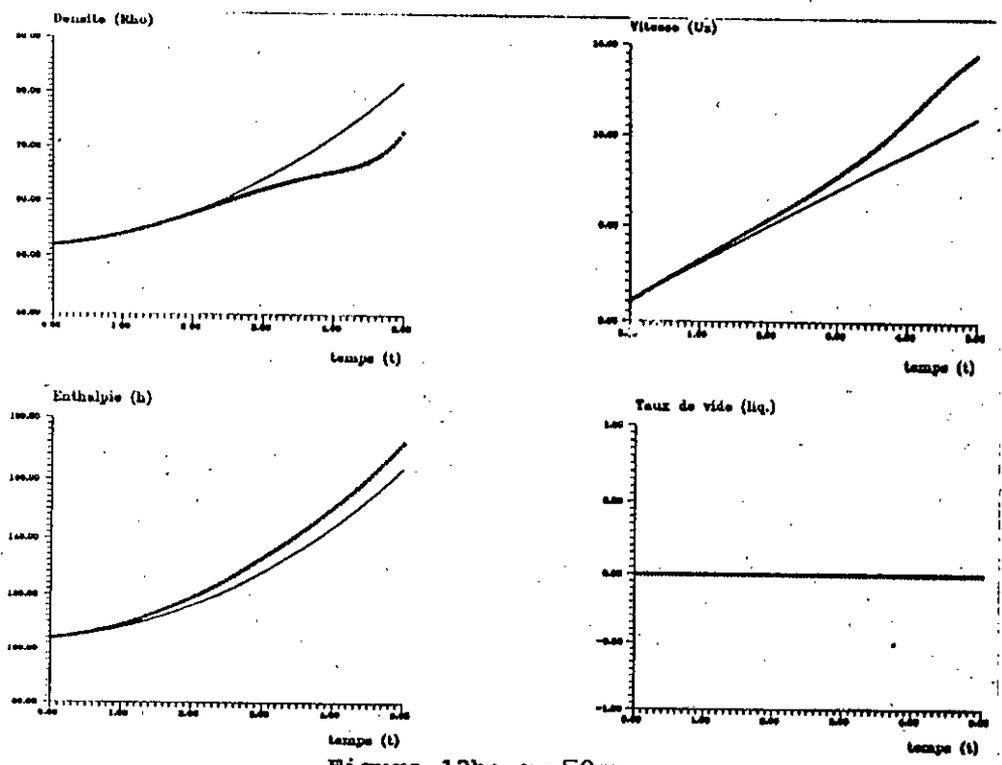


Figure 12b: $z = 50m$

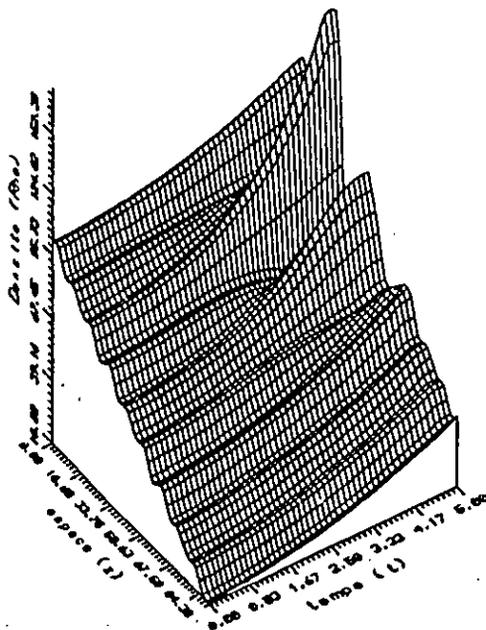
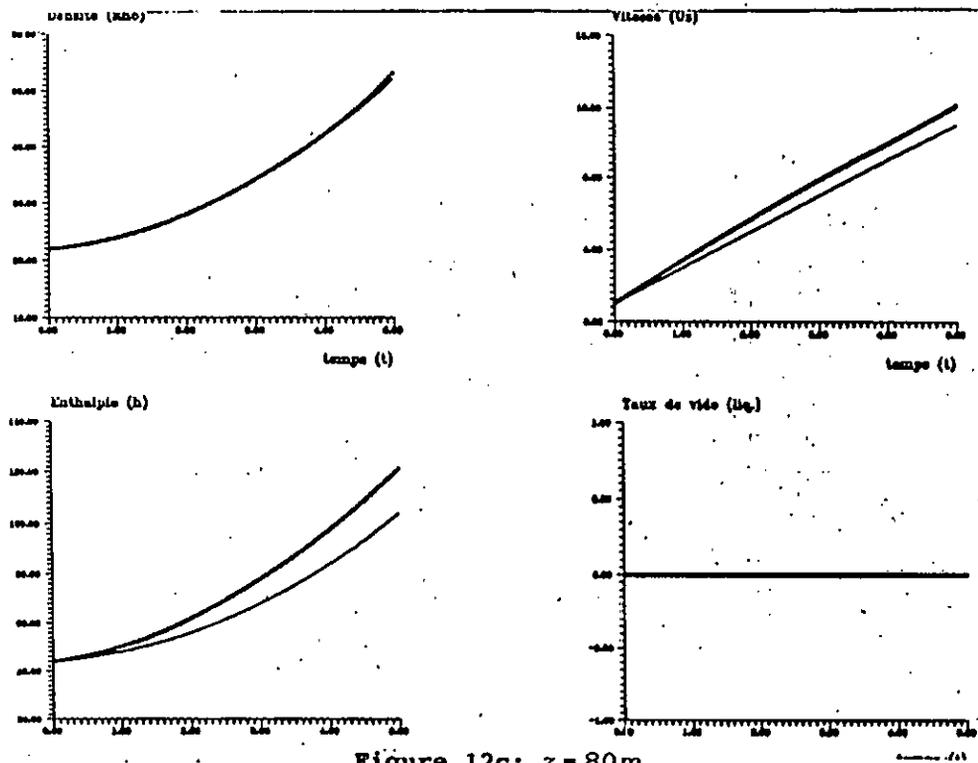


Figure 12bis a:

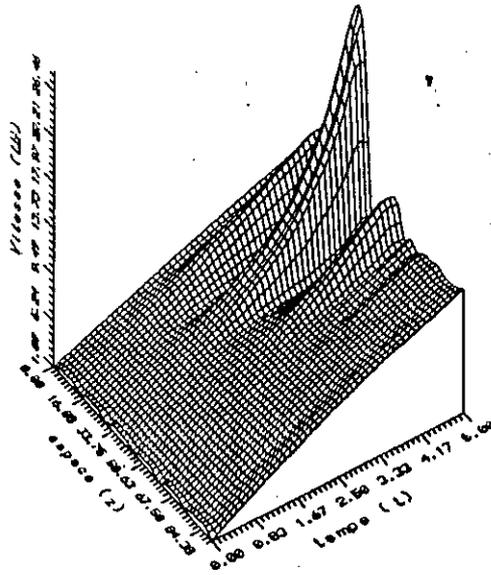


Figure 12bis b:

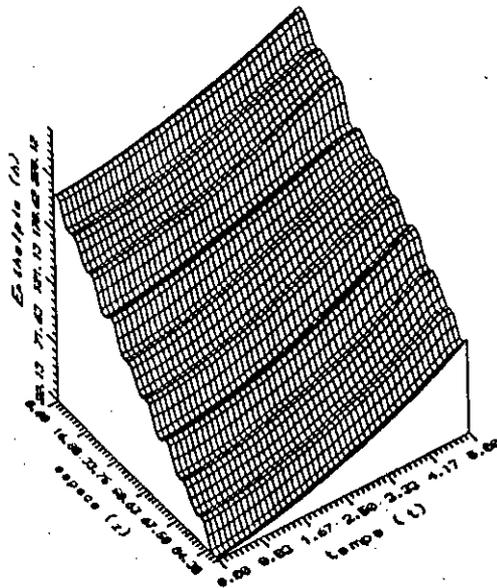


Figure 12bis c:

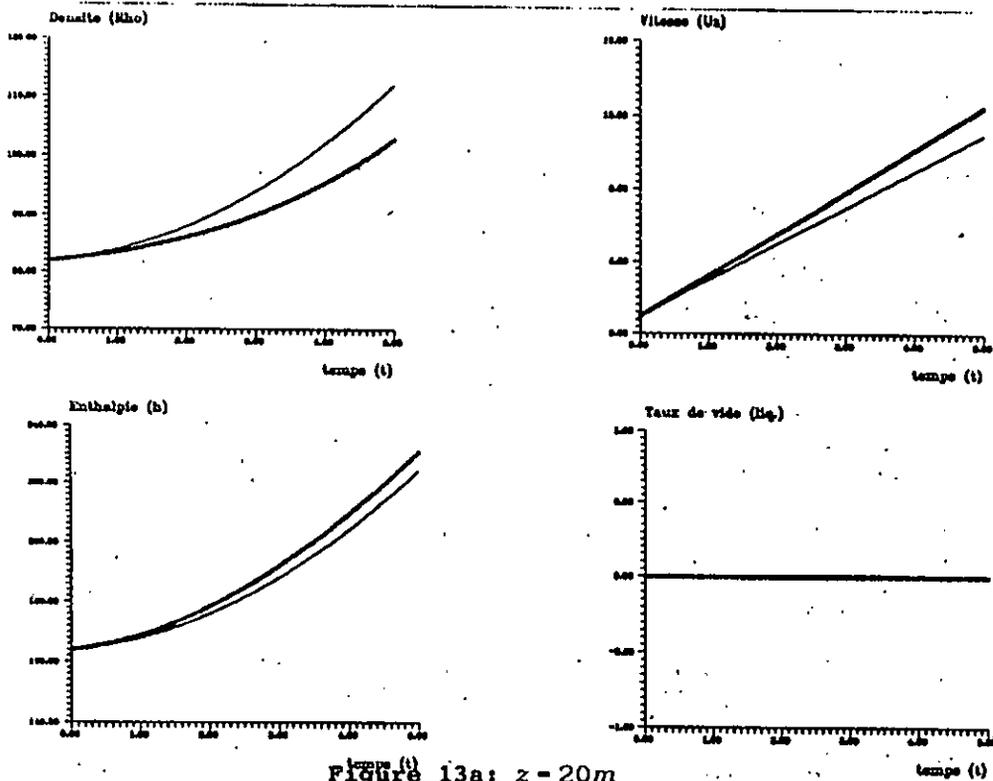


Figure 13a1 $z = 20m$

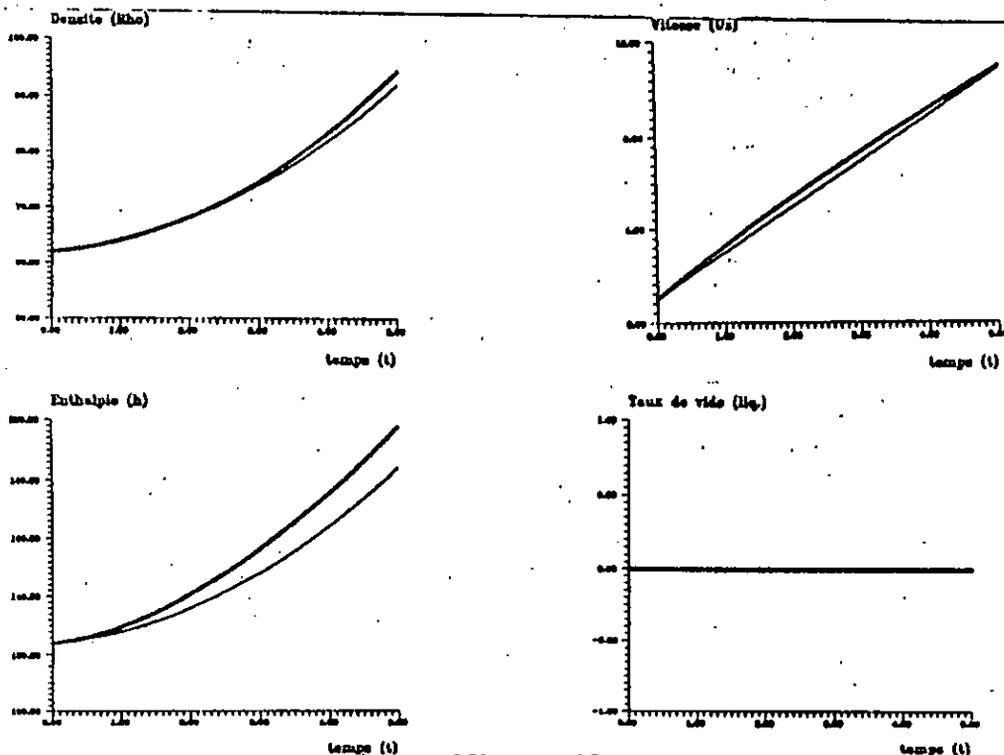


Figure 13b1 $z = 40m$

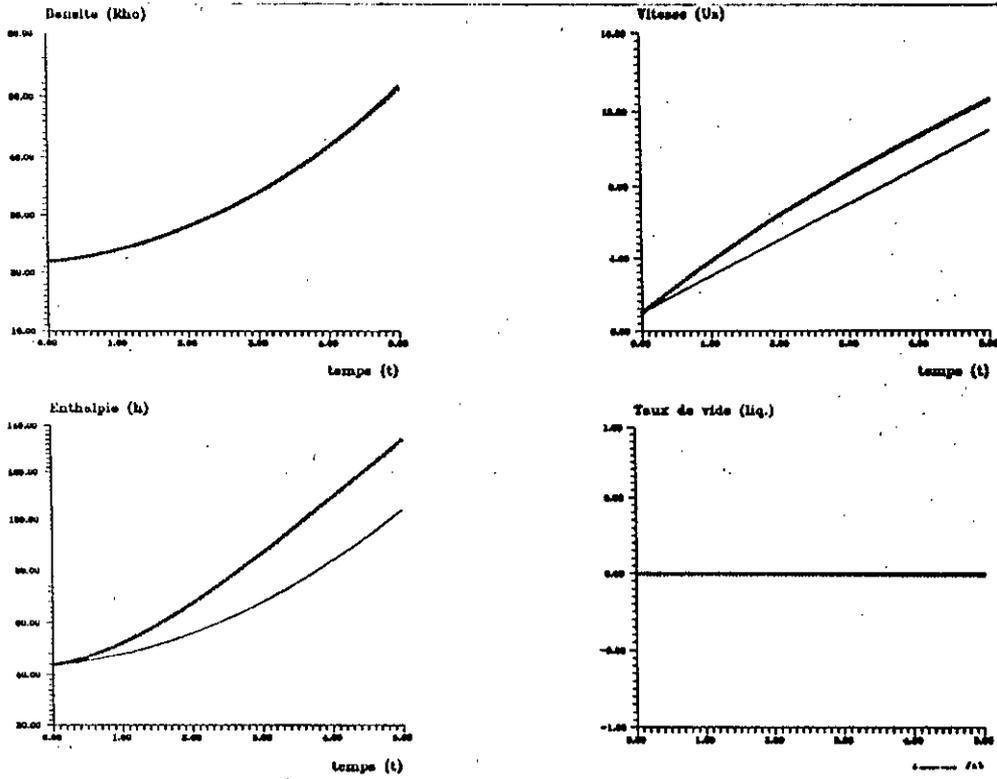


Figure 13c: $z = 80m$

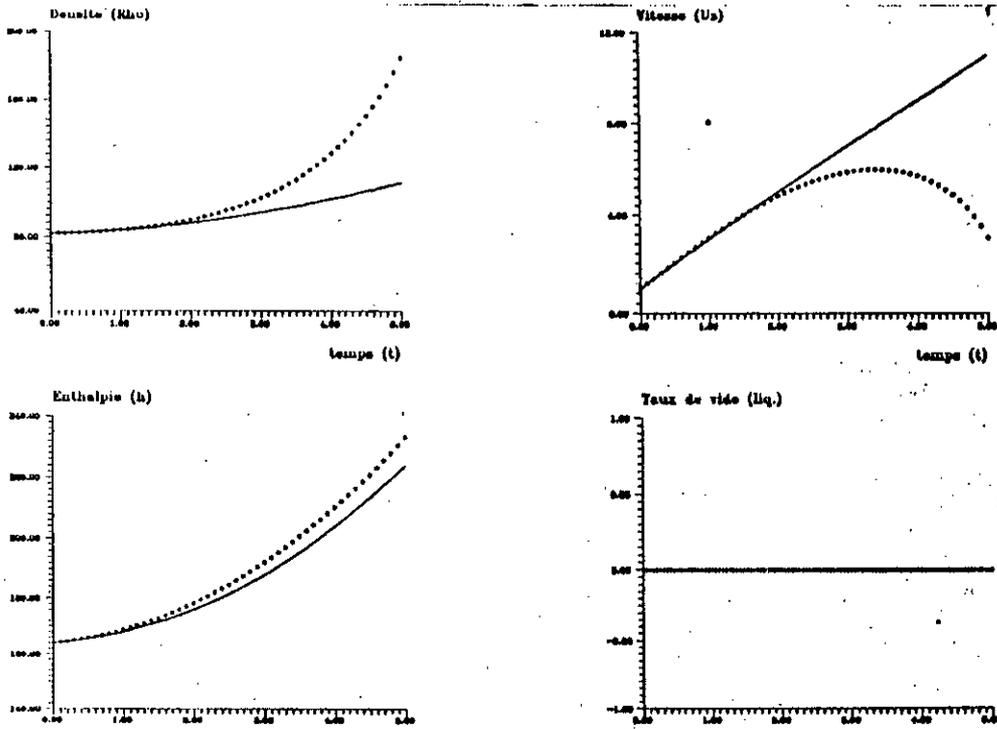


Figure 14: $z = 20m$

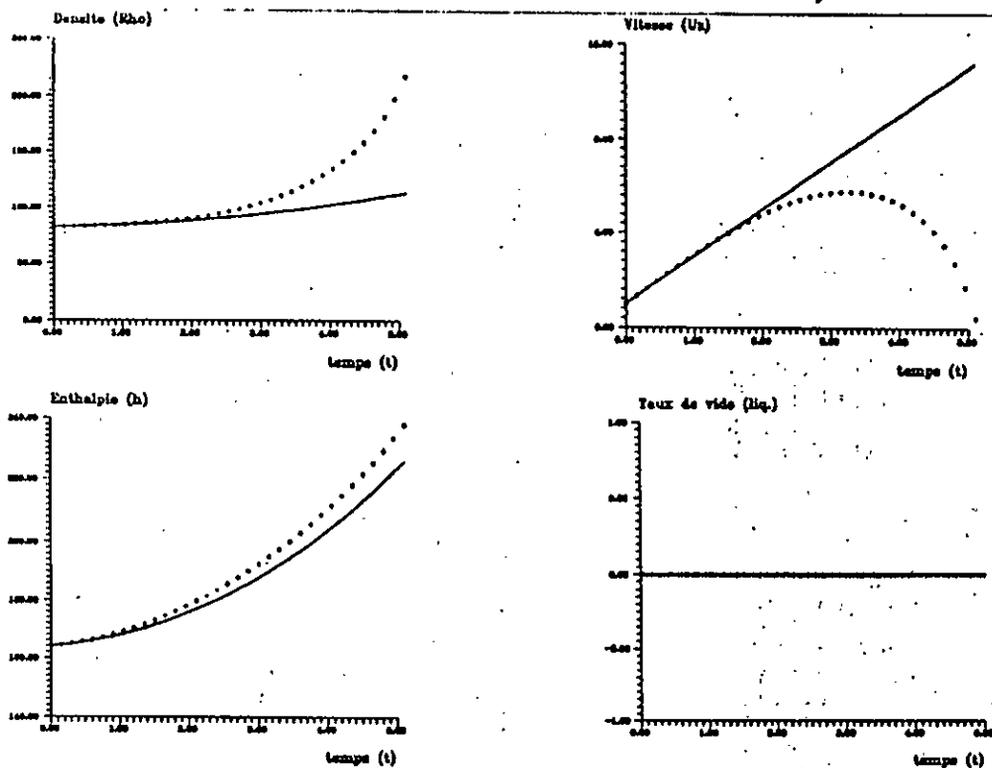


Figure 15: $z = 20m$

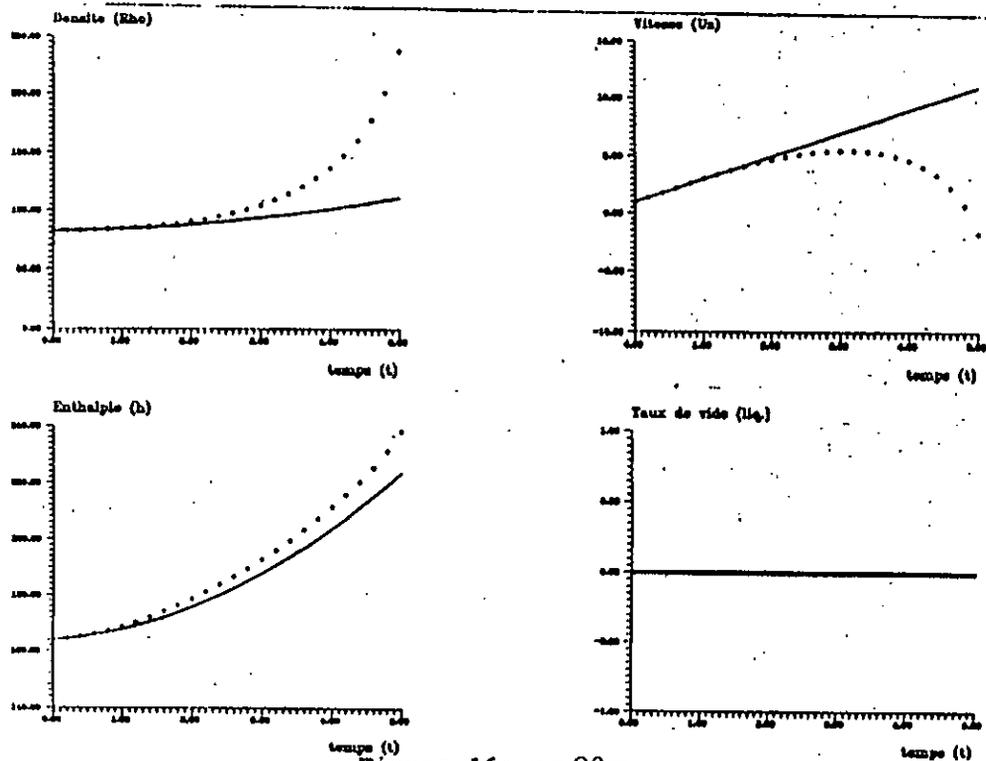


Figure 16: $z = 20m$

CONCLUSION

Le schéma que nous avons construit présente les propriétés suivantes:

Il existe des plages de valeurs pour le pas de temps Δt et le pas d'espace Δz pour lesquels le schéma approche convenablement la solution du problème dans le cas de l'écoulement diphasique. De plus, Δr et $\Delta \theta$ n'interviennent que dans le calcul des vitesses transverses. Ceci laisse croire que le schéma est conditionnellement stable et que cette condition dépend en particulier de Δt et Δz .

Quant au cas du gaz, le schéma n'a pas donné des résultats satisfaisants. Ceci n'est pas dû, à notre avis, au schéma adopté mais plutôt au modèle continu qui n'est plus valide dans le cas limite $\alpha_l = 0$.

En revanche, nous avons aussi effectué des tests dans le cas limite $\alpha_l = 1$ i.e. présence exclusive du liquide. Les résultats obtenus confortent notre analyse.

Enfin, nous retrouvons les mêmes phénomènes pour les vitesses transverses U_r et U_θ , pour les deux écoulements (diphasique, gaz), avec toute fois une moins bonne approximation près de la paroi. Les équations de quantité de mouvement approchées étant explicites en U_r et U_θ , nous pensons améliorer leur approximation en écrivant un schéma implicite pour chacune d'elles.

CONCLUSION GENERALE

|

L'objectif de ce travail a été double. D'une part établir un modèle mathématique qui décrit les écoulements diphasiques dans les conduites et d'autre part, mettre au point une méthode numérique capable de résoudre ce modèle.

Sur le plan de la modélisation, nous proposons un modèle mathématique pour les écoulements diphasiques à phase dispersée dans les conduites. Ce modèle a été obtenu à partir d'un développement asymptotique formel du modèle du mélange.

Il reste donc à démontrer que le modèle général converge asymptotiquement vers le modèle adopté et que ce dernier est "bien posé". Ceci nécessite une étude mathématique: cadre fonctionnel, détermination des caractéristiques du système et des invariants de Riemann s'ils existent, écriture convenable des conditions aux limites.

Sur le plan numérique, nous avons construit un schéma aux différences finies implicite assez simple, de mise en oeuvre sur ordinateur facile, peu coûteux, qui nous a permis, pour des pas de discrétisation convenablement choisis, d'obtenir des résultats probants.

Il reste, dans ce cas aussi, à faire une analyse théorique de ce schéma: étude de la stabilité, étude de l'erreur, détermination de paramètres de discrétisation optimaux.

Enfin, il est clair que pour mieux apprécier la validité du modèle mathématique et les performances de la méthode numérique, une comparaison avec les résultats expérimentaux des industriels doit être menée.

EQUATIONS DU MODELE

1- EQUATIONS DU MODELE EN COORDONNEES CYLINDRIQUES

Moyennant le changement de variables suivant:

$$\left| \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 < \theta \leq 2\pi \\ 0 < r < \frac{d}{2} \end{array}$$

nous pouvons écrire les composantes cartésiennes d'un vecteur \vec{F} quelconque, en fonction de ses composantes cylindriques. Nous avons alors les relations suivantes:

$$\left| \begin{array}{l} F_x = F_r \cos \theta - F_\theta \sin \theta \\ F_y = F_r \sin \theta + F_\theta \cos \theta \\ F_z = F_z \end{array} \right.$$

De plus, les dérivées partielles par rapport aux variables cartésiennes peuvent s'écrire sous la forme:

$$\left| \begin{array}{l} \partial_x = \partial_r \cos \theta - \partial_\theta \sin \theta \\ \partial_y = \partial_r \sin \theta + \partial_\theta \cos \theta \\ \partial_z = \partial_z \end{array} \right.$$

Ces relations étant appliquées aux équations du modèle écrit en coordonnées cartésiennes (Cf. Chap.4), nous obtenons les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
\partial_t \begin{bmatrix} \rho \\ \rho U_r \\ \rho U_\theta \\ \rho U_z \\ \rho h \\ \alpha_l^{-1} \end{bmatrix} + \partial_r \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r^{-1} \partial_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \partial_z \begin{bmatrix} \rho U_z \\ \rho U_r U_z + U_{r\infty} U_{z\infty} \xi \\ \rho U_\theta U_z + U_{\theta\infty} U_{z\infty} \xi \\ P + \rho U_z^2 + U_{z\infty}^2 \xi \\ \rho h U_z + U_{z\infty} \xi \\ U_{z\infty} \alpha_l^{-1} \end{bmatrix} = \\
\partial_z \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_l \alpha_l (\partial_r U_{z\infty} + \partial_z U_{r\infty}) \\ \mu_l \alpha_l (r^{-1} \partial_\theta U_{z\infty} + \partial_z U_{\theta\infty}) \\ 2\mu_l \alpha_l \partial_z U_{z\infty} \\ k_g (1 - \alpha_l) \partial_z T_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Gamma_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

où ξ , ξ , \bar{U}_∞ , P et T_g ont déjà été définis (Cf. Chap.4). Les conditions initiales et aux limites sont données par les fonctions suivantes:

$$\bar{w}^0(r, 0, z)$$

$$\bar{w}^p(t, r, \theta)$$

$$\bar{\omega}^w(t, r, \theta, z)$$

$$\bar{\omega}^s(t, r, \theta)$$

2- ECRITURE DU MODELE APPROCHE

Système (Ph) 1

Conservation de la masse:

$$\left| \frac{1}{\Delta t} \rho_{ijk}^{n+1} + \frac{1}{\Delta z} (\rho U_z)_{ijk}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \rho_{ijk}^n + \frac{1}{\Delta z} (\rho U_z)_{ijk}^{n+1} \right.$$

Conservation de la quantité de mouvement selon z:

$$\left| \begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (\rho U_z)_{ijk}^{n+1} + \frac{1}{\Delta z} (P + \rho U_z^2 + U_{z\infty}^2 \xi)_{ijk}^{n+1} &= \frac{1}{\Delta t} (\rho U_z)_{ijk}^n + \\ &\frac{1}{\Delta z} (P + \rho U_z^2 + U_{z\infty}^2 \xi)_{ijk-1}^{n+1} + \\ &\frac{2\mu_l}{\Delta z^2} (\alpha_{ljk}^{n+1} (U_{zlijk+1}^n - U_{zlijk}^{n+1}) - \alpha_{lijk-1}^{n+1} (U_{zlijk}^{n+1} - U_{zlijk-1}^{n+1})) \end{aligned} \right.$$

Conservation de l'énergie thermique:

$$\left| \begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (\rho h)_{ijk}^{n+1} + \frac{1}{\Delta z} (\rho h U_z + U_{z\infty} \xi)_{ijk}^{n+1} &= \frac{1}{\Delta t} (\rho h)_{ijk}^n + \\ &\frac{1}{\Delta z} (\rho h U_z + U_{z\infty} \xi)_{ijk-1}^{n+1} + \\ &\frac{k_g}{\Delta z^2} (\alpha_{ljk}^{n+1} (T_{gijk+1}^n - T_{gijk}^{n+1}) - \alpha_{lijk-1}^{n+1} (T_{gijk}^{n+1} - T_{gijk-1}^{n+1})) \end{aligned} \right.$$

Propagation du taux de vide:

$$\left| \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{\alpha_l} \right)_{ijk}^{n+1} + \frac{1}{\Delta z} \left(\frac{U_{zl}}{\alpha_l} \right)_{ijk}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{\alpha_l} \right)_{ijk}^n + \frac{1}{\Delta z} \left(\frac{U_{zl}}{\alpha_l} \right)_{ijk-1}^{n+1} \right.$$

Systeme (Ph)₂

Conservation de la quantité de mouvement selon r:

$$\left| \begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (\rho U_r)_{ijk}^{n+1} - \frac{1}{\Delta r} P_{ijk}^{n+1} + \frac{1}{\Delta z} (\rho U_r U_z + U_{r\infty} U_{z\infty} \xi)_{ijk}^{n+1} &= \\ \frac{1}{\Delta t} (\rho U_r)_{ijk}^n - \frac{1}{\Delta r} P_{i+1,jk}^{n+1} + \frac{1}{\Delta z} (\rho U_r U_z + U_{r\infty} U_{z\infty} \xi)_{ijk-1}^{n+1} &+ \\ \frac{\mu_l}{\Delta z \Delta r} (\alpha_{ljk}^{n+1} (U_{zli+1,jk}^{n+1} - U_{zlijk}^{n+1}) - \alpha_{lijk-1}^{n+1} (U_{zli+1,jk-1}^{n+1} - U_{zlijk-1}^{n+1})) &+ \\ \frac{\mu_l}{\Delta z^2} (\alpha_{ljk}^{n+1} (U_{rljk+1}^n - U_{rljk}^{n+1}) - \alpha_{lijk-1}^{n+1} (U_{rljk}^{n+1} - U_{rljk-1}^{n+1})) & \end{aligned} \right.$$

Conservation de la quantité de mouvement selon 0:

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{1}{\Delta t} (\rho U_\theta)_{ijk}^{n+1} + \frac{1}{r_i \Delta \theta} P_{ijk}^{n+1} + \frac{1}{\Delta z} (\rho U_\theta U_z + U_{\theta\infty} U_{z\infty} \zeta)_{ijk}^{n+1} = \right. \\
 & \frac{1}{\Delta t} (\rho U_\theta)_{ijk}^n + \frac{1}{r_i \Delta \theta} P_{ij-1k}^{n+1} + \frac{1}{\Delta z} (\rho U_\theta U_z + U_{\theta\infty} U_{z\infty} \zeta)_{ijk-1}^{n+1} + \\
 & \frac{\mu_l}{\Delta z r_i \Delta \theta} \left(\alpha_{ljk}^{n+1} (U_{zlijk}^{n+1} - U_{zlij-1k}^{n+1}) - \alpha_{lijk-1}^{n+1} (U_{zlijk-1}^{n+1} - U_{zlij-1k-1}^{n+1}) \right) + \\
 & \frac{\mu_l}{\Delta z^2} \left(\alpha_{ljk}^{n+1} (U_{olijk+1}^n - U_{olijk}^{n+1}) - \alpha_{lijk-1}^{n+1} (U_{olijk}^{n+1} - U_{olijk-1}^{n+1}) \right)
 \end{aligned}$$

METHODE DE BROWN POUR LA RESOLUTION DES
SYSTEMES ALGEBRIQUES NON LINEAIRES

Soit à résoudre le système d'équations non linéaire d'ordre m suivant:

$$(S) \quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \text{-----} \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$$

où, x_1, x_2, \dots, x_m sont des inconnues réelles et indépendantes, et f_1, f_2, \dots, f_m sont des fonctions réelles des m variables x_i .

Nous allons décrire la méthode de Brown (Cf. [By]) pour la résolution du système (S).

DESCRIPTION DE LA METHODE

La méthode de Brown est une méthode itérative qui permet de construire une suite de vecteurs \underline{x}^n qui converge vers la solution \underline{x}^* du système (S).

Supposons maintenant que le point \underline{x}^n de R^m est connu et montrons comment on calcule le point \underline{x}^{n+1} .

Etape 1:

soit $f_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$ la première fonction du système (S) et x_k une composante de \underline{x} vérifiant la condition:

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \right|_{\underline{x}=\underline{x}^n} = \max_{i=1, m} \left(\left. \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \right|_{\underline{x}=\underline{x}^n} \right)$$

Pour des raisons de commodité, nous choisissons x_k comme étant la dernière composante x_m de \underline{x} . Moyennant un développement de Taylor à l'ordre 1 de f_1 au voisinage de \underline{x}^n , on écrit x_m sous la forme:

$$x_m = x_m^n - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{f_{1x_j;h}^n}{f_{1x_m;h}^n} (x_j - x_j^n) - \frac{f_1^n}{f_{1x_m;h}^n} \quad (1)$$

où:

$$f_{1x_j;h}^n = \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\underline{x}^n) = \frac{f_1(\underline{x}^n + h^n \underline{e}_j) - f_1(\underline{x}^n)}{h^n}$$

$$f_1^n = f_1(\underline{x}^n)$$

\underline{e}_j ; j^{ème} vecteur unitaire de R^m

On a donc:

$$x_m = l_m(x_1, \dots, x_{m-1}) \quad (1)_i$$

l_m est une fonction linéaire de (x_1, \dots, x_{m-1}) donnée par (1).

Etape 2:

Soit f_2 la deuxième fonction du système (S). On définit une nouvelle fonction g_2 telle que:

$$g_2(x_1, \dots, x_{m-1}) = f_2(x_1, \dots, x_{m-1}, l_m(x_1, \dots, x_{m-1}))$$

Tout comme à l'étape 1, on considère que x_{m-1} est la composante de \underline{x} qui vérifie:

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_{m-1}} \Big|_{\underline{x}=\underline{x}^n} = \max_{i=1, m-1} \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_i} \Big|_{\underline{x}=\underline{x}^n} \right)$$

x_{m-1} est alors exprimée par:

$$x_{m-1} = x_{m-1}^n - \sum_{j=1}^{m-2} \frac{g_{2x_j;h}^n}{g_{2x_{m-1};h}^n} (x_j - x_j^n) - \frac{g_2^n}{g_{2x_{m-1};h}^n} \quad (2)$$

On pose aussi:

$$x_{m-1} = l_{m-1}(x_1, \dots, x_{m-2}) \quad (2)_i$$

l_{m-1} est une fonction linéaire de (x_1, \dots, x_{m-2}) donnée par (2). De (1)_i et (2)_i, on obtient:

$$l_m = l_m(x_1, \dots, x_{m-2}, l_{m-1}(x_1, \dots, x_{m-2}))$$

Etape 3:

On procède de façon analogue aux deux étapes précédentes. On introduit la fonction g_3 telle que:

$$g_3(x_1, \dots, x_{m-2}) = f_3(x_1, \dots, x_{m-2}, l_{m-1}(x_1, \dots, x_{m-2}), l_m(x_1, \dots, x_{m-2}, l_{m-1}(x_1, \dots, x_{m-2})))$$

x_{m-2} est donnée par:

$$x_{m-2} = x_{m-2}^n - \sum_{j=1}^{m-3} \frac{g_{3x_j;h}^n}{g_{3x_{m-2};h}^n} (x_j - x_j^n) - \frac{g_3^n}{g_{3x_{m-2};h}^n} \quad (3)$$

i.e.:

$$x_{m-2} = l_{m-2}(x_1, \dots, x_{m-3}) \quad (3)_i$$

La nouvelle expression de x_{m-2} sera injectée dans les expressions (2)_i et (1)_i; donnant l_{m-1} et l_m . On obtient alors:

$$l_{m-1} = l_{m-1}(x_1, \dots, x_{m-3}, l_{m-2}(x_1, \dots, x_{m-3}))$$

$$l_m = l_m(x_1, \dots, x_{m-3}, l_{m-2}(x_1, \dots, x_{m-3}), l_{m-1}(x_1, \dots, x_{m-3}, l_{m-2}(x_1, \dots, x_{m-3})))$$

On continue ainsi jusqu'à l'étape m .

Etape m :

$$g_m(x_1) = f_m(x_1, l_2, l_3, \dots, l_m)$$

où:

$$l_i = x_i^n - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{g_{(m-i+1)x_j;h}^n}{g_{(m-i+1)x_i;h}^n} (l_j - x_j^n) - \frac{g_{(m-i+1)}^n}{g_{(m-i+1)x_i;h}^n} \quad i = \overline{m, 2}$$

avec:

$$g_1 = f_1$$

$$l_1 = x_1$$

g_m est fonction uniquement de x_1 . x_1 est alors donné par:

$$x_1 = x_1^n - \frac{g_m^n}{g_{m x_1;h}^n} = l_1 \quad (m)$$

On pose alors:

$$x_1^{n+1} = l_1$$

et on déduit les x_j^{n+1} successifs en procédant par une remontée au cours de laquelle ils sont calculés en fonction de x_1^{n+1} :

$$x_j^{n+1} = l_j(x_1^{n+1}) \quad j = \overline{2, m}$$

Une fois ce calcul effectué, on réitère tout le processus pour calculer x_1^{n+2} et ainsi de suite jusqu'à ce que la suite générée des x_1^n ($n = \overline{1, N}$) converge vers la solution x^* du système (S).

Enfin, pour les critères de convergence et le choix des paramètres de calcul, nous renvoyons le lecteur vers [By].

REFERENCES

|

- [Ba] A.BAGGAG; "Contribution au Calcul par la Méthode aux Différences Finies des Ecoulements Diphasiques"; Thèse d'Ingénieur d'Etat à l'Ecole Nationale Polytechnique (E.N.P), Juin 1990.
- [Bl] E.BLOCH; "Théorie Cinétique des Gaz"; Collection Armand Collin, 9^{ème} Edition (1965).
- [Br] Y.BRENIER, J.P.HENNART; "Introduction to Numerical Hyperbolic Equations"; I.I.M.A.S, U.N.M, (1985).
- [By] G.D.BYRNE, C.A.HALL; "Numerical Solution of Systems of Non Linear Algebraic Equations"; Academic Press (1973).
- [Da] R.DAUTRAY, J.L.LIONS; "Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques: Méthodes Numériques pour les Problèmes d'Evolution".
- [De1] J.M.DELHAYE; "Ecoulements Diphasiques"; Cours à l'Ecole des Arts et Manufactures (E.C.P) (1991-1992).
- [De2] J.M.DELHAYE; "Les Ecoulements Diphasiques Gaz-Liquide en Conduites"; Entropie n'99, 3-25, (1981).
- [Du] F.DUBOIS; "Quelques Idées Liés au Calcul d'Ecoulement de Fluides Parfaits dans les Tuyères"; Thèse de Doctorat de l'Université de Paris VI, Janvier 1988.
- [Gl] R.GLOWINSKI; "Computing Methods in Applied Sciences and Engineering"; Proceeding of the 10th International Conference on Computing Methods in Applied Sciences and Engineering; Paris February 11-14 1992; Nova Science Publishers.
- [Ha] L.HALPERN; "Introduction à l'Analyse Numérique des Equations Différentielles Ordinaires et des Equations d'Evolution Lineaires"; Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées (E.N.S.T.A) (1985).
- [Ho] K.A.HOFFMANN; "Computational Fluid Dynamics for Engineers"; Engineering Educational System (1989).
- [In] F.P.INCROPERA, D.P.DEWITT; "Fundamentals of Heat and Mass Transfer"; John Wiley & Son (1985).
- [Is] M.ISHII; "Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two Phase flow"; Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'E.D.F, Eyrolles (1975).
- [La] M.H.LALLEMAND; "Dissipative Proprieties of Runge-Kutta Schemes with Upwind Spatial Approximation for the Euler Equations"; Rapport de recherche I.N.R.I.A n'1173, Mars 1990.