

Ministère de l'Enseignement Supérieur et  
de la Recherche Scientifique  
*Ecole Nationale Polytechnique*



وزارة التعليم العالي  
والبحر العلمى  
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

**Département Génie Civil**

*Projet de fin d'études*

*Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Génie Civil*

*Thème*

*Analyse de la Réponse Statique et Dynamique des Structures  
Compte tenu des Paramètres Incertains  
Application aux Tunnels et les Portiques Auto-Stables*

**Proposé et dirigé par :**

Mr. M. DEMIDEM

**Présenté par :**

AILANE Abdenour  
MERZOUG Boumediene

*Promotion : 2014*

*Ecole Nationale Polytechnique 10, Avenue Hassen Badi B.P. 182 El-Harrach*

*16200 Alger, Algérie*

*Tel : 213 21 52 53 01/03 – Fax : 213 21 59 7973*

## ملخص :

لقد حاولنا في عملنا المتواضع الذي بين أيديكم، دراسة الاستجابة في التوازن بصيغة هبوط، وفي الحركية بصيغة الانتقال للهيكل، حيث أخذنا بعين الاعتبار العناصر غير المؤكدة.

فيما يخص جزء الحركيات، قمنا باختباري تأثير نظرية اللوحات الجامدة واللوحات المرنة، ومن ثمة حساب الشريط العلوي والشريط السفلي الخاص بنبض وانتقال الهيكل بطريقة المجال وطريقة ديف. Deif.

أما جزء التوازن فقمنا بدراسة تقارب نتائج طريقة العناصر المنتهية، و القيم الدقيق الخاصة بنفق تولو الفرنسي، ومن ثمة استخدمنا تقنية مزاجية طريقة العناصر المنتهية بالعناصر غير المنتهية، وكذلك درسنا هبوط السطح بطريقة العناصر المنتهية، وطبقنا نظرية المجال المذكورة آنفاً.

## الكلمات المفتاحية :

الاستجابة، التوازن، هبوط، الحركية، الانتقال، العناصر غير المؤكدة، اللوحات الجامدة، اللوحات المرنة، الشريط العلوي، الشريط السفلي، نبض، طريقة المجال، طريقة ديف، العناصر المنتهية، مزاجية، العناصر غير المنتهية.

## Résumé:

Dans ce travail nous avons essayé d'étudier la réponse statique (en termes de tassement) et dynamique (en terme de déplacement) des structures compte tien des paramètres incertains.

Dans la partie dynamique (portique auto-stable), nous allons examiner l'effet de l'hypothèse qui concerne la rigidité des planches (planchers infiniment rigides ou planchers ont une rigidité finis) pour calculé la bande inférieure et la bande supérieure des pulsations et des déplacements par la méthode intervalle et Deif.

Et pour la partie statique, nous avons faire une étude de convergence pour un tunnel peu profond (Tunnel de Toulon) par la méthode des éléments finis et par le technique de couplage éléments finis et infinis. Aussi, l'étude des tassements en surface par la méthode intervalle.

**Mots clé :** Réponse, statique, dynamique, paramètre incertains, rigidité, flexible, bonde inférieure, bonde supérieure, pulsation, MEF, MEI, tassements.

## Abstract :

In this work we tried to study the static response (in terms of settlement) and dynamic (in terms of displacement) account maintenance structures with uncertain parameters.

In the dynamic part (self-stabilizing portico), we will examine the effect of the assumption regarding the rigidity of the boards (or infinitely rigid floors have a finite stiffness) calculated for the lower band and the upper band pulsations and displacement by the method interval and the method Deif.

And the static part, we make a study of convergence to a shallow tunnel (Tunnel Toulon) by the finite element method and the technique of coupling finite and infinite elements. Also, the study of surface settlements by the interval method.

**Keywords:** response, static, dynamic, uncertain parameters, Rigidity, lower band upper band, pulsations, method interval, method Deif, convergence, tunnel, finite element, method coupling, infinite elements, surface settlements.

---

## Remerciements

*Nous remercions tout d'abord ALLAH le Tout-Puissant de nous avoir donné la force et le courage de surmonter les moments les plus difficiles dans notre vie et nous avoir prodigué la volonté de mener à bon terme le travail qui nous a été défini.*

**Et « quiconque ne remercie pas les gens, ne remercie pas ALLAH »**

*Premièrement, nous tenons à exprimer nos vifs remerciements et gratitude à Mr le professeur B. TILLOUINE qui nous ont orientés et mis à notre disposition la documentation spécialisée nécessaire, qui nous a été d'une grande utilité afin d'accomplir notre travail dans les meilleures conditions possible.*

*Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements, à Mr M. DEMIDEM pour son suivi, ses précieux conseils et orientations ainsi que pour sa grande disponibilité, qui nous a été d'une grande utilité tout au long de ce travail.*

*Nous remercions également les membres de jury qui ont accepté d'examiner ce modeste travail.*

*Nos remerciements vont également à tous les enseignants de l'ENP, particulièrement les enseignants du département de Génie civil.*

*Nos remerciements vont également à tous ceux et celles qui de près ou de loin nous ont apporté aide et encouragement. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude.*

# Dédicace

*Je dédie ce travail à mes chers parents  
Que ALLAH leurs préserve long vie et bonne santé*

*A mon promoteur et mon deuxième papa  
M. Mostapha DEMIDEM*

*A mes frères*

*A mes sœurs et leurs maris*

*A toutes ma famille*

*A tous mes amis (ies)*

*A tous mes enseignants durant mon étude*

*Boumediene MERZOUQ*



## *Dédicace*

*À ma fierté mon père qui a été toujours présent pour moi  
pour son soutien et ses encouragements.*

*À la source de ma vie, la meilleure des mères, ma mère qui m'a appris  
l'éducation avant le savoir et qui n'a pas cessé de me soutenir durant  
toutes mes études.*

*À mon promoteur et mon deuxième papa Mr. Mustapha  
DEMEDEME et mes enseignants depuis le primaire*

*À mes sœurs*

*À mes frères*

*À toute ma famille*

*À tous mes amis*

*Abd encour ALLANE*



# Table des matières

---

## TABLE DES MATIERE

### Chapitre I : INTRODUCTION GENERALE

II-1). Introduction générale : .....	1
--------------------------------------	---

### Chapitre II: PROBLEME D'ELASTICITE LINEAIRE

II-1). Introduction : .....	3
II-2). Les équations d'élasticité : .....	3
II-2-1) Notions de base : .....	3
II-2-2) Contraintes principales et direction principales des contraintes : .....	4
II.2.3) Les équations d'équilibre: .....	6
II.2.4) Relation entre déformations et déplacements : .....	12
II.2.5) Relation entre contraintes et déformations (loi de comportement): .....	13
II.3) Déformations planes: .....	16
II.4) Contraintes planes : .....	17

### Chapitre III: PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

III-1) GENERALITES :	
III-1-1)	
Introduction: .....	20
III-1-2) Bref historique de la MEF : .....	21
III-1-3) Principe de la MEF .....	22
III-1-3-1) Description et interprétation physique : .....	22
III-1-3-2) Attributs d'un élément: .....	24
III-1-3-3) Notion d'élément de référence: .....	25
III-1-3-4) Principe du travail virtuel: .....	26
III-2) Etapes caractéristiques d'étude des structures par la M.E.F : .....	27
III-2-1) Définition de la géométrie des éléments: .....	27
III-2-2) Représentation de la géométrie de chaque élément "V <sup>e</sup> " : .....	27
III-2-3) Approximation sur l'élément de référence : .....	28
III-2-4) Construction de la fonction N( $\xi$ ) et N( $\xi$ ) : .....	28
III-2-4-1) méthode générale de construction: .....	29
III-2-5) Calcul des matrices de rigidité de chaque élément [k <sup>e</sup> ] : .....	30

## Table des matières

---

III-2-6) Calcul des vecteurs de sollicitation de chaque élément $\{f^e\}$ :.....	31
III-2-7) Assemblage des matrices et des vecteurs élémentaires :.....	31
III-2-8) Résolution du système d'équation globale :.....	32
III-3) ETAPES CARACTERISTIQUES D'UN PROGRAMME :.....	32
III-4) CONVERGENCE DE LA METHODE VERS LA SOLUTION :.....	34
III-4-1) Types de convergence :.....	34
III-4-2) Critères de convergence:.....	35

### Chapitre IV : PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS INFINIS

IV-1) Introduction :.....	36
IV-2) Formulation des éléments infinis :.....	37
IV-2-1) Approche directe :.....	37
IV-2-2) Approche inverse :.....	38
IV-3) Critères de convergence des éléments infinis :.....	39
IV-4) Construction de la fonction de transformation :.....	39
IV-4-1) Cas unidimensionnel :.....	39
IV-4-2) Cas bidimensionnel :.....	40
IV-4-3) Eléments infinis dans le cas étudié (voir la Figure IV.2) :.....	41
IV-5) Calcul de la matrice de rigidité de l'élément infini :.....	41
IV-6) Formulation théorique de la technique de couplage MEF-MEI :.....	42

### Chapitre V : FORMULATION DES PROBLEMES DYNAMIQUE

#### V.1) OSCILLATEUR LINEAIRE A UN DEGRE DE LIBERTE

V.1.1) Définition :.....	44
V.1.2) Loi de comportement de l'oscillateur :.....	44
V.1.3) Equations de l'équilibre dynamique :.....	47
V.1.4) Formulation réduite de l'équation d'équilibre :.....	49
V.1.4.1) Vibrations libres :.....	51
V.1.4.2) Vibrations forcées :.....	55
V.1.5) Oscillateur simple généralise :.....	64

#### V.2) OSCILLATEUR A N DEGRES DE LIBERTE :.....

V.2.1) Introduction :.....	69
V.2.2) Equation de l'équilibre dynamique :.....	69
V.2.2.1) Masses concentrées :.....	69
V.2.2.2) Coordonnées généralisées :.....	72
V.2.3) Structure et propriétés de la matrice de raideur :.....	73

## Table des matières

---

V.2.3.1) Construction de la matrice de raideur :.....	73
V.2.4) Vibrations libres non amorties :.....	78
V.2.5) Vibration forcées non amorties :.....	80

### Chapitre VI : PRESENTATION DE L'ANALYSE DES STRUCTURES A PARAMETRES INCERTAINS.

V.1)- Les intervalles et l'intervalle d'extension :.....	84
V.2) - Généralisés sur intervalles de valeur propre :.....	86
V.3) -Méthode intervalle (méthode exacte) : .....	89
V.4-Méthode de Dief :.....	90
VI.6) Formulation des bornes inférieures et supérieures :.....	94

### Chapitre VII : APPLICATIONS

VII.1) Application dynamique :.....	95
VII.1.1) Introduction:.....	95
VII.1.2) Caractéristiques de la structure:.....	96
VII.1.3) Calcul de l'inertie :.....	96
VII.1.4) Calcul module de Young:.....	96
VII.1.5) Calcul la masses des planchers "M":.....	97
VII.1.6) Cas où "Les planchers sont supposés infiniment rigides" :.....	98
VII.1.6.1) Modélisation de système et les équations d'équilibre :.....	98
VII.1.6.2) Calcul e l a rigidité des poteaux "K" et " $\Delta K$ " :.....	99
VII.1.6.3) Méthode intervalle:.....	101
VII.1.6.4) Méthode de Deif :.....	102
VII.1.7) Cas où "Les planchers ont une rigidité finie " (Les planchers sont flexibles) :.....	103
VII. 1. 7.1) Modélisation de système et les équations d'équilibre :.....	103
VII. 1. 7.2) Calcul les rigidités $k_i$ et $\Delta k_i$ :.....	105
VII.1.7.3) Méthode intervalle :.....	107
VII.1.7.4) Méthode de Deif :.....	108
VII.1.8) La réponse de la structure :.....	109
VII.1.9) La réponse de la structure dans le cas ou les planchers sont rigides:.....	111
VII.1.10) La réponse de la structure dans le cas ou les planchers sont flexibles :.....	118

## Table des matières

---

VII.1.11) Comparaison et interprétation :.....	124
VII.1) Application 2 (Application statique) :.....	130
VII.2.1) Etude de convergence :.....	130
a) Etude de convergence par la M.E.F :.....	130
b) Etude de convergence par la technique de couplage entre la M.E.F et la M.E.I :.....	135
VII.2.2) CUVETTES DE TASSEMENTS :.....	139
a) Calcule de tassement en surface à paramètres incertains par la M.E.F :.....	140
a.1) cas isotrope : .....	141
a.2) Cas anisotrope :.....	142
VII.2.3) Interprétation :.....	143

### **Chapitre VIII : CONCLUSION GENERALE.**

Conclusion général : .....	144
----------------------------	-----

Bibliographie

---

## Liste des figures

---

### Liste des figures :

#### Chapitre II

<b>Figure II.1</b> Composantes du tenseur des contraintes.....	3
<b>Figure II.2</b> Variation de contrainte entre deux pointes .....	6
<b>Figure II.3</b> Variation de la contrainte sur une facette.....	7
<b>Figure II.4</b> Surfaces latérales de gauche d'un point matériel .....	8
<b>Figure II.5</b> Etat de contrainte plane.....	9
<b>Figure II.6</b> Equilibre des forces dans la direction $x$ .....	10
<b>Figure II.7</b> Courbe de comportement des matériaux .....	13
<b>Figure II.8</b> Etat de traction pure .....	14
<b>Figure II.9</b> Relation entre déplacement, contrainte et déformation .....	15
<b>Figure II.10</b> Problème de déformation plane .....	16
<b>Figure II.11</b> Problème de contrainte plane.....	18

#### Chapitre III

<b>Figure III.1</b> Division d'un domaine en éléments finis.....	22
<b>Figure III.2</b> Élément (Q4).....	22
<b>Figure III.3</b> Quelque type d'éléments.....	24
<b>Figure III.4</b> Élément de référence à 2D quadratique à quatre nœuds.....	25
<b>Figure III.5</b> Triangle de pascal .....	29
<b>Figure III.6</b> : Organigramme d'Etapes caractéristiques d'un programme d'éléments finis ...	33
<b>Figure III.7</b> : Courbe de convergence.....	34

#### Chapitre IV

<b>Figure IV.1</b> : Géométrie de l'élément infini .....	37
<b>Figure IV.2</b> Élément infini unidimensionnel.....	39

## Liste des figures

---

### Chapitre V

<b>Figure V.1 :</b> Oscillateur a 1 degré de liberté.....	44
<b>Figure V.2:</b> Relation force – déplacement .....	45
<b>Figure V.3:</b> Oscillation libre avec amortissement .....	46
<b>Figure V.4 :</b> forces appliquées à l'oscillateur .....	47
<b>Figure V.5:</b> système linéaire .....	50
<b>Figure V.6:</b> vibration libre d'un système non amorti .....	53
<b>Figure V.7:</b> vibration libre d'un système a amortissement sous-critique .....	54
<b>Figure V.8 :</b> influence de l'amortissement sur la vibration libre d'un système sous-critique...54	
<b>Figure V.9:</b> vibration libre d'un système a amortissement critique .....	55
<b>Figure V.10:</b> réponse de l'oscillateur soumis à une sollicitation harmonique .....	57
<b>Figure V.11 :</b> Sollicitation impulsive .....	57
<b>Figure V.12:</b> exemples d'impulsion .....	59
<b>Figure V.13:</b> spectres de choc .....	60
<b>Figure V.14:</b> principe d'obtention de l'intégrale de Duhamel .....	62
<b>Figure V.15:</b> Extension périodique de la sollicitation .....	64
<b>Figure V.16:</b> poutre console .....	65
<b>Figure V.17:</b> Modélisation en masses concentrées .....	70
<b>Figure V.18:</b> système masse –ressort à deux degrés liberté .....	73
<b>Figure V.19 :</b> Principe des puissances virtuelles pour la poutre .....	74

### Chapitre VII

<b>Figure VII.b.1 :</b> Structure à plancher rigide .....	103
<b>Figure VII.b.2 :</b> Structure à plancher Flexible .....	103
<b>Figure VII.c :</b> Représentation de système des charges nodales .....	109
<b>FigureVII.1 :</b> Courbe de déplacement horizontale x(m) des planchers en fonction du Temps T(s) du système propre. ....	113

## Liste des figures

---

<b>Figure VII.2</b> : Courbe de déplacement horizontale des planchers en fonction du temps. ....	115
<b>Figure VII.3</b> : Courbe de déplacement horizontale des planchers en fonction du temps. ....	116
<b>Figure VII.4</b> : Courbe de déplacement du cinquième plancher à paramètre incertain (bande supérieure et inférieure) en fonction du temps.....	117
<b>Figure VII.5</b> : Courbe de déplacement horizontale des planchers en fonction du temps. ....	119
<b>Figure VII.6</b> : Courbe de déplacement horizontal des planchers en fonction du temps.....	120
<b>Figure VII.7</b> : Courbe de déplacement horizontal des planchers en fonction du temps.....	122
<b>Figure VII.8</b> : Courbe de déplacement du cinquième étage à paramètre incertain en fonction du temps.....	122
<b>Figure VII.9</b> : Déplacement des planchers à paramètre incertain pour les deux cas (infiniment rigide et flexible) en fonction du temps.....	123
<b>Figure VII.10</b> : maillage par éléments finis (Modèle $\{1/2(48) \times 24\}$ ) .....	133
<b>Figure VII.11</b> : Convergence des déplacements en fonction de nombre d'élément.....	134
<b>Figure VII.12</b> : Convergence des contraintes en fonction de nombre d'élément. ....	135
<b>Figure VII.13</b> : Convergence des déplacements en fonction de pourcentage des éléments finis.....	137
<b>Figure VII.14</b> : Convergence des contraintes en fonction de pourcentage des éléments finis.....	137
<b>Figure VII.15</b> : Tassement en fonction de la profondeur.....	138
<b>Figure VII. 16</b> : Déformations des sols pendant le creusement d'un tunnel.....	140
<b>Figure VII.17</b> : Tassement en surface dans le cas isotrope .....	141
<b>Figure VII.18</b> : Tassement en surface dans le cas anisotrope.....	142

**Liste des tableaux :**

**Chapitre VII**

**Tableau (VII.1)** : Les solutions propres du système " $k^c u_i^c = \lambda_i^c M^c u_i^c$ " .....101

**Tableau (VII.2)** : La bande inférieure des valeurs propres et des vecteurs propres.....101

**Tableau (VII.3)** : La bande supérieure des valeurs propres et des vecteurs propres.....101

**Tableau (VII.4)** : La bande inférieure des valeurs propres et des vecteurs  
Propres associés.....120

**Tableau (VII.5)** : La bande supérieure des valeurs propres et des vecteurs  
Propre associés.....102

**Tableau (VII.6)** : Les solutions propres du système " $k^c u_i^c = \lambda_i^c M^c u_i^c$ " .....107

**Tableau (VII.7)** : La bande inférieure des valeurs propres et des vecteurs propres .....107

**Tableau (VII.8)** : La bande supérieure des valeurs propres et des  
vecteurs propres associés.....107

**Tableau (VII.9)** : La bande inférieure des valeurs propres et des  
vecteurs propres associés.....108

**Tableau (VII.10)** : La bande supérieure des valeurs propres et des  
vecteurs propres associés .....108

**Tableau VII.11** : Déplacement max des planchers dans  
le mode fondamentale .....117

**Tableau VII.12** : Déplacement max des planchers dans  
le mode fondamentale..... 123

**Tableau VII.13** : variation de  $\Delta\omega$  par rapport  $\omega_{moy}$  par  
la méthode intervalle .....124

**Tableau VII.14** : variation de  $\Delta\omega$  par rapport  $\omega_{moy}$  par  
la méthode de Deif .....124

<b>Tableau VII.15</b> : variation en pourcentage entre les deux méthodes.....	125
<b>Tableau VII.16</b> : variation de $\Delta\omega$ par rapport $\omega_{moy}$ par la méthode Intervalle .....	125
<b>Tableau VII.17</b> : variation de $\Delta\omega$ par rapport $\omega_{moy}$ par la méthode de Deif .....	126
<b>Tableau VII.18</b> : variation en pourcentage de la méthode de Deif par rapport de la méthode intervalle.....	126
<b>Tableau VII.19</b> : la différence en % de pulsation propre entre les deux cas.....	128
<b>Tableau VII.20</b> : la différence en % de déplacement des planchers entre Les deux cas.....	129
<b>Tableau VII.21</b> : Les valeurs de tassement et de contrainte pour les différents modèles de la M.E.F .....	134
<b>Tableau VII.22</b> : Les valeurs de tassement et de contrainte pour les différents modèles de couplage M.E.I-M.E.F.....	136
<b>Tableau VII.23</b> : tassement en clé de voute par la M.E.F et couplage M.E.F-M.E.I .....	138
<b>Tableau VII.24</b> : tassement en surface dans le cas isotrope .....	141
<b>Tableau VII.25</b> : tassement en surface dans le cas anisotrope.....	142

# **CHAPITRE I**

## **Introduction générale**

## Chapitre I

**INTRODUCTION GENERALE****Introduction générale :**

Dans une variété d'applications de conception pour calculer les quantités d'intervention, tels que les déplacements, les contraintes, les fréquences de vibration, les charges de tronçonnage et modes d'évaluation de l'intégrité d'une structure proposée, les quantités de réponse sont généralement considérées comme les fonctions de paramètres de conception. Toutefois, en raison de certaines informations incertaines (par exemple, les erreurs de fabrication, les erreurs dans les observations) ce qui est la prédication du comportement structurel pour une conception donnée causé par les incertitudes de paramètres de conception. Il est souhaitable, voire indispensable de trouver des stabilités ou des caractéristiques de réponse d'un système.

Les incertitudes ci-dessus prennent différentes valeurs sur une plage donnée, on peut citer trois méthodes pour décrire l'incertitude : probabilité (aléatoire), ensembles flous et l'intervalle (imperfection) [16].

Parmi les méthodes utilisées pour le calcul des pulsations des structures à paramètres incertains, on peut distinguer la méthode intervalle et la méthode de Deif. L'objectif de notre travail consiste en la comparaison entre les deux méthodes citées et de répondre à la question suivante :

- Comment varie les résultats obtenus par la méthode de Deif par rapport à ceux de la méthode intervalle qui est une méthode exacte ?

Le plancher est un élément structurel très important du bâtiment, car l'ensemble de ses fonctionnements ont une influence décisive sur la stabilité de la structure. Il agit comme un diaphragme horizontal qui assure la transmission et la répartition des charges horizontales entre les éléments participant au contreventement et, par-delà, aux fondations. Cette fonction dépend de leur comportement et leur rigidité aux forces horizontales. Peu importe la méthode utilisée pour le calcul des pulsations propres, la considération des hypothèses concernant la rigidité des plancher est une étape décisive. Dans le cas de cette étude et pour chacune des méthodes citées, on a optés pour deux hypothèses différentes :

- Les planchers sont infiniment rigides.
- Les planchers ont une rigidité finie (planchers flexibles).

Concernant la partie statique, la méthode des éléments finis (M.E.F) est l'une des méthodes globales la plus utilisée. Un des avantages principaux de cette méthode est sa capacité de prendre en compte les hétérogénéités résultant soit de la variation des caractéristiques du sol, Elle s'applique parfaitement aux milieux hétérogènes. C'est le cas d'ailleurs pour les systèmes sol-structure. Toutefois, quelques problèmes se posent lors de l'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'analyse des structures et les ouvrage d'art, tels que ceux relatifs aux conditions aux limites qui sont généralement imposées sur une frontière arbitraire. Ainsi que, les dimensions géométriques du problème qui sont importantes, ce qui nécessite l'utilisation d'un grand nombre d'éléments finis pour modéliser le système.

Pour surmonter ces difficultés liées à l'utilisation de la méthode des éléments finis pour les domaines non-bornés, de nombreuses méthodes ont été proposées. La méthode plus efficace des éléments infinis (M.E.I) est l'une des méthodes qui sont utilisées pour résoudre les problèmes non borné.

L'objectif de la partie statique est de faire une étude de convergence par deux méthodes: la M.E.F et couplage M.E.F-M.E.I, et de comparer ces deux méthodes

La deuxième partie de la partie statique a été consacrée au calcul des cuvettes des tassements en surface à paramètre incertain par le M.E.F.

Notre travail de projet de fin d'études est organisé en huit chapitres :

- Le premier chapitre présente une introduction générale.
- Le deuxième chapitre présente une brève introduction sur la théorie d'élasticité linéaire
- Le troisième chapitre et le quatrième chapitre sont consacrés à la présentation de la M.E.F et le couplage M.E.F-M.E.I.
- La partie dynamique des structures est détaillée au cinquième chapitre.
- Le sixième chapitre est consacré à l'analyse des structures à paramètres incertains
- Dans le septième chapitre est consacré aux applications.
- Au huitième chapitre, sont présentés la conclusion générale et les recommandations pour les travaux futurs.

# **CHAPITRE II**

## **Problème d'élasticité linéaire**

## Chapitre II : [11] [13]

## RAPPEL SUR LA THEORIE D'ELASTICITE LINEAIRE

## II-1). Introduction :

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'analyse des problèmes statique et dynamique nécessite la connaissance des équations de base de la théorie de l'élasticité linéaire. Dans ce chapitre, on présente les relations entre les contraintes et les déformations dans le cas tridimensionnel. De ce cas général, dérive le cas particulier de l'élasticité plane (état plan de contrainte et état plan de déformation).

## II-2). LES EQUATION D'ELASTICITE :

## II-2-1) Notions de base :

a) Forces extérieures : les forces extérieures auxquelles peut être soumis un corps peuvent être classées en deux catégories:

*Forces volumiques*: ceux sont des forces à distance associées à la masse du corps et réparties sur tout le volume.

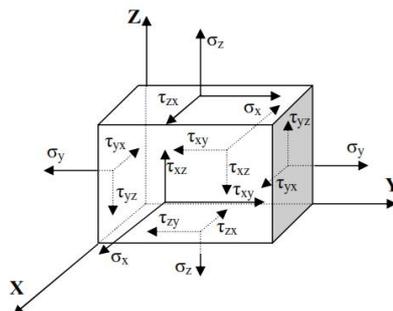
*Forces surfaciques*: ceux sont des forces de contact réparties sur toute la surface de contact.

b) Contraintes : un système de forces extérieures appliqué à un corps engendre un système de charges intérieures résultant d'interaction des particules élémentaires. A chaque force élémentaire correspond une contrainte

c) Tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes, noté, est une matrice 3x3 symétrique. C'est une approximation assez grossière de ce qui se passe en chaque point du matériau.

Dans le cas général chaque point matériel est soumis à neuf composantes de contrainte comme l'indique la **figure II.1**



**Figure II.1** Composantes du tenseur des contraintes

Trios composantes de contraintes normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$  et six composantes de contraintes tangentielles  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz}$  et  $\tau_{zy}$ .

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Pour satisfaire l'équilibre de l'élément on doit avoir:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \text{et} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \text{et} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Ainsi il en résulte six composantes indépendantes de contraintes en un point.

### II-2-2) Contraintes principales et direction principales des contraintes :

Soit  $\sigma_{ij}$  tenseur contraintes en un point, il permet de déterminer les vecteur de contraintes pour toutes les facettes, de normale unitaire extérieure  $\vec{n}$ , passant par ce point, par la relation.

$$T_{ij} = \sigma_{ij} \cdot X_{ij} \quad (2.2)$$

On obtient également les contraintes normales pour toutes les facettes :

$$\sigma = \vec{T} \cdot \vec{n} = T_i X_i = \sigma_{ij} X_j X_j \quad (2.3)$$

Avec :  $X_j X_j = \text{cosinus directeurs}$

S'il existe des vecteurs  $\vec{n}$ , tels que leur produit par un tenseur  $[\sigma]$  leur soient colinéaires c'est-à-dire tels que l'on ait :

$$\sigma_{ij} X_j = \lambda X_i \quad \text{et} \quad \lambda: \text{valeur scalaire} \quad (2.4)$$

On peut donc rechercher s'il existe des facettes soumises à des contraintes purement normales, c'est-à-dire telle que :

$$T_i = \sigma_{ij} X_j = \lambda X_i \quad (2.5)$$

A l'aide de la règle de substitution d'un indice attaché au symbole de Kronecker, on peut mettre les inconnues  $X_i$  en évidence ; on a d'abord.

$$\sigma_{ij}x_i - \lambda\delta_{ij}x_i = 0 \tag{2.6}$$

$$(\sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij}) x_i = 0 \tag{2.7}$$

Ces conditions sont trois équations linéaires et homogènes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_{xx}-\lambda)x_1 + (\tau_{xy}-\lambda) x_2 + (\tau_{xz}-\lambda) x_3=0 \\ (\tau_{yx}-\lambda) x_1+ (\sigma_{yy}-\lambda) x_2 + (\tau_{yz}-\lambda) x_3=0 \\ (\tau_{zx}-\lambda) x_1+ (\tau_{zy}-\lambda) x_2 + (\sigma_{zz}-\lambda) x_3=0 \end{array} \right. \tag{2.8}$$

La solution est obtenue en résolvant l'équation caractéristique du degré 3  $\det |\sigma - \lambda I|$

L'équation caractéristique d'un tenseur d'ordre 2 est une équation cubique, qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 - I_2\lambda - I_3 = 0 \tag{2.9}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \text{tr} (\sigma) \\ I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \tau_{13} \\ \tau_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \tau_{13} \\ \tau_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \\ I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii} \cdot \sigma_{jj} - \tau_{ij} \tau_{ji}) \\ I_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr}\sigma)^2 - \text{tr}(\tau)^2] \\ I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \det [\sigma] \end{array} \right. \tag{2.10}$$

Les solutions de l'équation (2.9) sont les trois contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et les coefficients  $I_1, I_2, I_3$  les invariants élémentaires du tenseur  $\sigma$ . Où  $(\sigma_{ij})$  représente les composantes du tenseur dans une base R orthonormé mais non nécessairement principale, le symbole  $\sigma$  désigne le tenseur du second ordre. [15]

En remplaçant  $\lambda$  par  $\sigma_1$  dans (2.8), on obtient un système homogène permettant de trouver les trois composantes  $x_{1i}$  de la première direction principale à un facteur près. Ce facteur se détermine ensuite par la condition suivante :

$$x_{1j} \cdot x_{1i} = x_{11}^2 + x_{12}^2 + x_{13}^2 \tag{2.11}$$

On procède de même avec  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ .

**II.2.3) Les équations d'équilibre:**

En générale, dans un corps les contraintes varient d'un point à un autre.

Soit  $\sigma_x$  la composante de la contrainte totale. Considérons la variation de cette composante (Figure II.2)

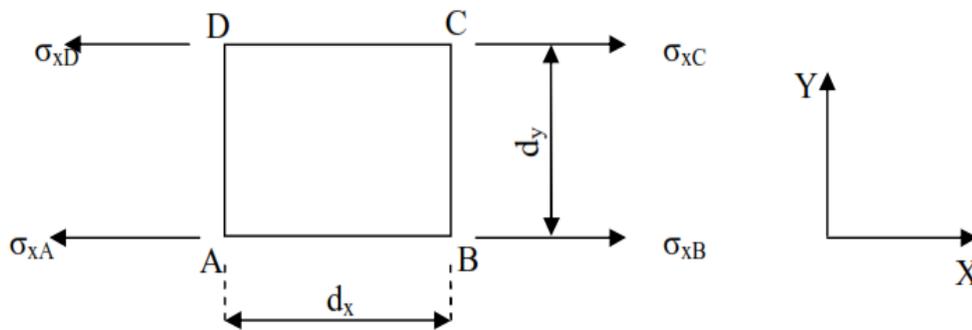


Figure II.2 Variation de contrainte entre deux points

Si la contrainte au point A est  $\sigma_x$ , en B la contrainte varie de  $(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} d_x)$  ou  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$  est le taux de variation de  $\sigma_x$ .

$\sigma_x$  étant fonction de x et y dans le cas bidimensionnel (et de z dans le cas tridimensionnel), la dérivation partielle est nécessaire.

La contrainte au point B est donnée par :

$$\sigma_{xB} = \sigma_{xA} + \frac{\partial \sigma_{xA}}{\partial x} dx \tag{2.12}$$

Egalement les contraintes en C et D sont :

$$\sigma_{xC} = \sigma_{xB} + \frac{\partial \sigma_{xB}}{\partial y} dy \quad (2.13)$$

$$\sigma_{xD} = \sigma_{xA} + \frac{\partial \sigma_{xA}}{\partial y} dy \quad (2.14)$$

$x$  : étant constant de B à C, en remplaçant  $\sigma_{xB}$  par sa valeur dans l'équation (2.13) on obtiendra :

$$\sigma_{xC} = \sigma_{xA} + \frac{\partial \sigma_{xA}}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma_{xA} + \frac{\partial \sigma_{xA}}{\partial x} dx \right) dy \quad (2.15)$$

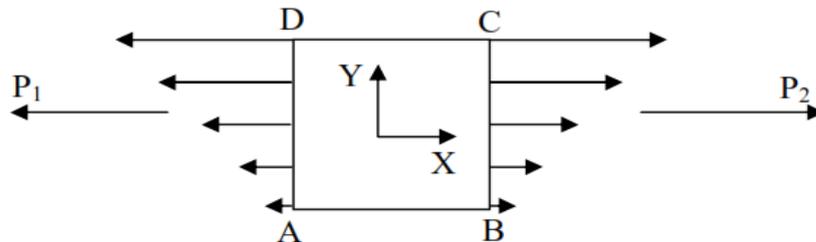
D'où

$$\sigma_{xC} = \sigma_{xA} + \frac{\partial \sigma_{xA}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{xA}}{\partial x} dx dy \quad (2.16)$$

(Où le terme du second ordre est négligé)

En négligeant les petites quantités du second ordre, les taux de variation sont constants, ainsi les contraintes sur la surface d'un élément infinitésimal varient linéairement.

D'où on aura :



**Figure II.3** Variation de la contrainte sur une facette.

Avec  $P_1$   $P_2$ , les forces extérieures respectivement sur les surfaces latérales de gauche et de droite.

En considérant la surface latérale de gauche (**figure II.4**)

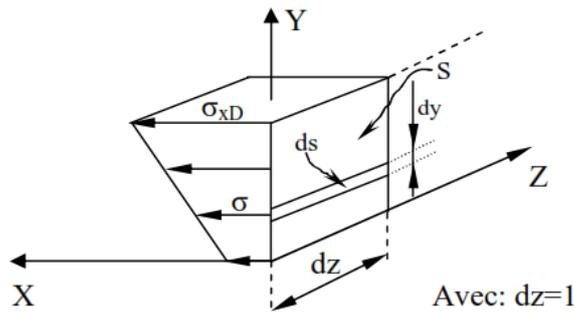


Figure II.4 Surfaces latérales de gauche d'un point matériel

La force extérieure sur cette surface est :

$$P_1 = \int_S \sigma \cdot ds \quad (2.17)$$

S : étant égale à (l.dy)

$$\Rightarrow P_1 = \int_S \sigma \cdot l dy = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_{xD}) dy = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy) dy$$

D'où :

$$P_1 = \sigma_x \cdot dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy^2 \quad (2.18)$$

De même, la force sur la facette droite est :

$$P_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{xB} + \sigma_{xC}) dy = \frac{1}{2}(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy) dy \quad (2.19)$$

D'où:

$$P_2 = \sigma_x \cdot dy + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy \cdot yx + \frac{1}{2} (\sigma_{xB} + \sigma_{xC}) dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy^2$$

La force résultante sur le corps dans la direction x sera :

$$P_1 - P_2 = \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy dx$$

Si on considère que la répartition des contraintes sur les facettes considérées est constante, alors les contraintes appliquées aux centres de gravité des facettes seront:

$$\sigma_x \quad \text{et} \quad \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

Ainsi la résultante des forces sera la même. D'où on aura:

$$P_1 - P_2 = (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) l.dy - \sigma_x l.dy$$

Donc:

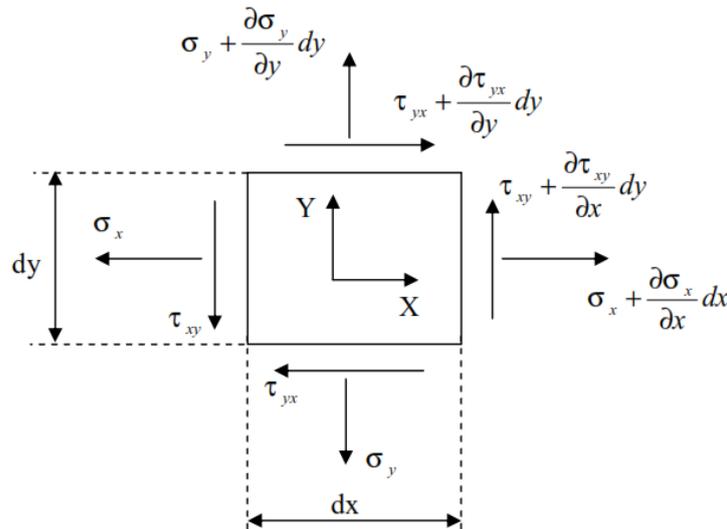
$$P_1 - P_2 = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx.dy \tag{2.20}$$

Cette représentation simplifiée de l'état de contrainte, peut être utilisée pour l'établissement des équations d'équilibre.

Si on suppose que:

$$\sigma_x = 0, \tau_{xz} = \tau_{yz} - \tau_{zx} = 0 \quad \text{et} \quad z = 0$$

Avec :  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  et  $\tau_{yx}$  étant supposées indépendantes de  $z$ , le modèle d'équilibre de l'élément sera (**figure II.5**).



**Figure II.5** Etat de contrainte plane

Avec: X, Y et Z les composantes de la force volumique suivant les directions x, y et z respectivement.

Vu que l'élément est en équilibre, la somme des forces projetées sur l'axe x est nulle.

D'où :

$$\sum F_x = 0 \tag{2.21}$$

$$\Rightarrow X \cdot dx \cdot dy + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx\right) dy - \sigma_x \cdot dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - \tau_{yx} dx = 0$$

(L'épaisseur de l'élément suivant la direction z étant égale à l'unité).

Après simplification en obtiendra :

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X\right) dx \cdot dy = 0$$

(dx.dy) est différent de zéro ainsi en aura:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0$$

De même l'équilibre des forces dans la direction y donne :

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0$$

Pour le cas général tridimensionnel, nous considérons l'équilibre des forces qui agissent sur un élément infinitésimal dans la direction x seulement. Les autres directions y et z peuvent être traitées de la même façon (**figure II.6**).

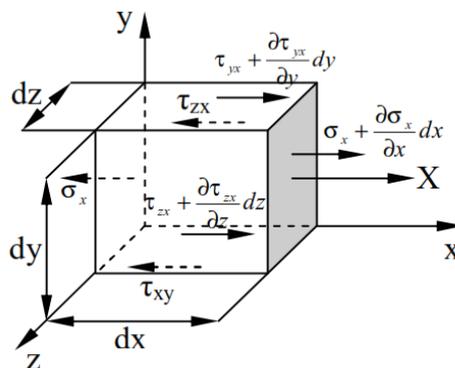


Figure II.6 Equilibre des forces dans la direction x

L'équilibre des forces dans la direction x donne:

$$\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx \right) dy \cdot dz - \sigma_x \cdot dz \cdot dy + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \cdot dz \cdot dx - \tau_{xy} \cdot dz \cdot dx + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) \cdot dx \cdot dy - \tau_{zx} \cdot dx \cdot dy + X \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

Après simplification on obtiendra :

$$\left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) \cdot dx dy dz = 0$$

(dx, dy, dz) étant différents de zéro, l'équation précédente se simplifie à :

$$\left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) = 0$$

De même on obtiendra pour les directions y et z :

$$\left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y \right) = 0$$

$$\left( \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z \right) = 0$$

Etant donné que:  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

Les équations d'équilibre pour le cas général tridimensionnel peuvent s'écrire comme suit:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

**II.2.4) Relation entre déformations et déplacements :**

Lorsqu'un corps est soumis à un système de forces, en général tous les points appartenant au corps changent de position. Le déplacement d'un point est défini comme étant la distance séparant sa position initiale de sa position finale. Les composantes de ce déplacement sont U, V et W elles sont en générales en fonction de x, y et z. Ainsi un point situé initialement en (x, y, z) sera déplacé en (x + u, y + v, z + w).

On dit qu'un corps est déformé, quand, les positions relatives entre les points appartenant à ce corps changent en fonction du système de forces appliquées. Dans le cas général deux types de déformations se produit, les longueurs parallèles aux directions x, y et z varient ainsi que les angles formée par ces longueurs.

**a) déformations directes:**

La déformation directe dans une direction donnée est définie comme étant le rapport de la variation de longueur par longueur, d'une fibre originalement orientée dans cette direction. Trois composantes indépendantes de déformation directe (normale)  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  et  $\varepsilon_z$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} \end{array} \right. \quad (2.23)$$

**b) déformation de cisaillement:**

La déformation de cisaillement est définie comme étant la variation de l'angle droit formé par deux axes. Elle est associée à deux directions orthogonales. Trois composantes de déformation de cisaillement  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$  sont définies en chaque point.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Il est à noter que :

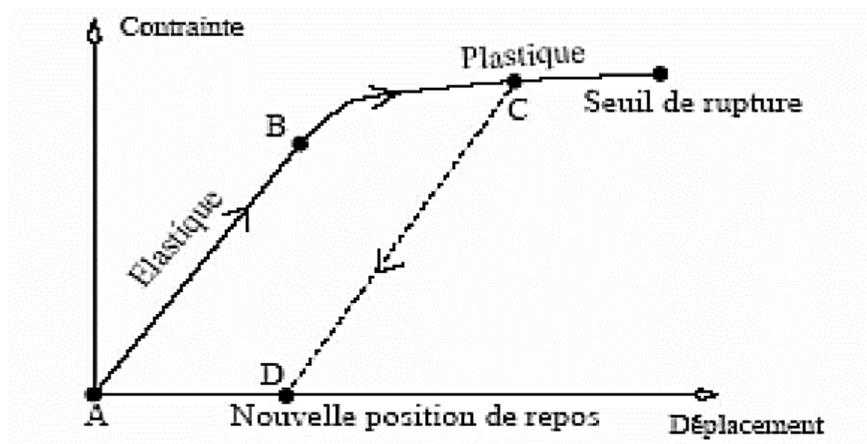
$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \quad , \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} \quad , \quad \gamma_{zy} = \gamma_{yz}$$

### II.2.5) Relation entre contraintes et déformations (loi de comportement):

Sous l'action d'une contrainte normale uni-axiale, la plupart des matériaux ont un comportement bien défini dans le domaine élastique. Ce comportement se traduit par la relation:

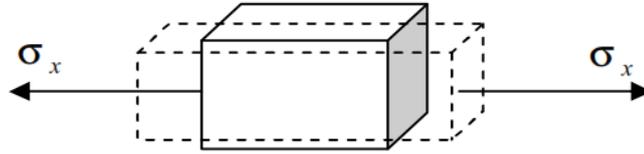
$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.25)$$

Cette relation est connue sous le nom de "la loi de Hooke". La constante E est appelée module d'élasticité ou module de Young. Il est à noter que cette relation n'est valable que dans le domaine élastique (**figure II.7**).



**Figure II.7** Courbe de comportement des matériaux

Soit un élément tridimensionnel soumis à une contrainte uni-axiale (**figure II.8**)



**Figure II.8** Etat de traction pure

La composante de déformation  $\varepsilon_x$  est donnée par:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

En plus de cette déformation, l'élément aura des contraintes suivant les directions y et z.

De ces contraintes il résulte des déformations  $\varepsilon_y$  et  $\varepsilon_z$  qui sont :

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

Où  $\nu$  est appelé coefficient de Poisson; il est constant pour la plupart des matériaux.

Considérons maintenant un élément soumis à un état de contrainte tridimensionnel, la déformation totale dans les directions x, y et z est alors donnée par:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases} \quad (2.26)$$

La relation dans le domaine élastique entre les contraintes et les déplacements, pour un corps soumis à un état de contrainte de cisaillement pur tridimensionnel, à été trouvée expérimentalement et elle a la forme suivante:

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \end{cases} \quad (2.27)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.28}$$

Où: la constante G représente le module d'élasticité de cisaillement appelé aussi le module de rigidité.

Les équations (2.26), (2.27) peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \tag{2.29}$$

La résolution du système d'équations (2.29) nous donnera:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

(2.30)

Les différentes relations entre ces quantités peuvent être schématisées par la figure suivante:

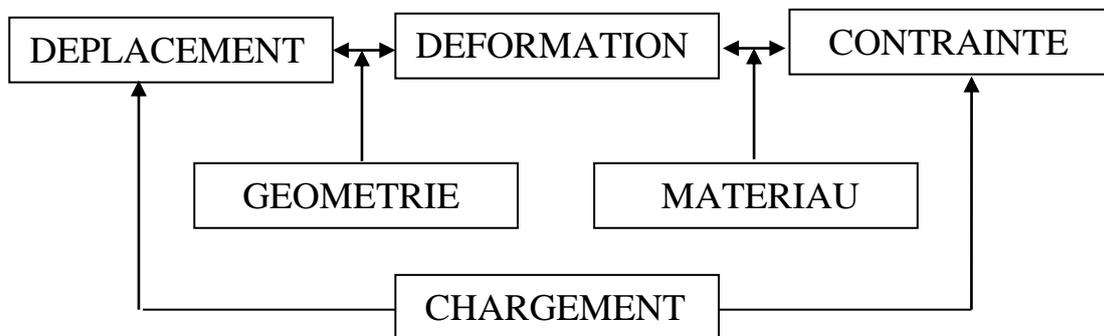


Figure II.9 Relation entre déplacement, contrainte et déformation

### II.3) DEFORMATIONS PLANES:

On peut dire qu'on est en présence d'un problème de déformation plane lorsqu'on a un corps dont l'une des dimensions est très importante par rapport aux deux autres (**figure II.10**)

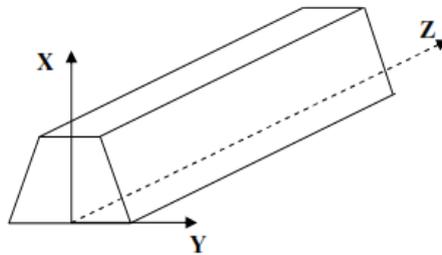
Un tel problème est définie par:

$$\begin{cases} U = U(x,y) \\ V = V(x,y) \\ W = 0 \end{cases}$$

Donc la matrice de déformation et la matrice de contrainte s'écrite comme suite:

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$



**Figure II.10** Problème de déformation plane

Les relations entre les déformations et les déplacements sont:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Les relations entre les déformations et les contraintes seront:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} = 0 \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Les relations entre les contraintes et les déformations sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} \quad (2.35)$$

Les équations d'équilibre seront :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{array} \right. \quad (2.36)$$

#### II.4) CONTRAINTES PLANES :

Contrairement à la condition de déformations planes, qui dit que: la dimension longitudinale dans la direction z est importante par rapport aux dimension suivant x et y; la condition de contraintes planes est caractérisé par le fait que la dimension suivant la direction z est très petite par rapport aux deux autres (**figure II.11**).

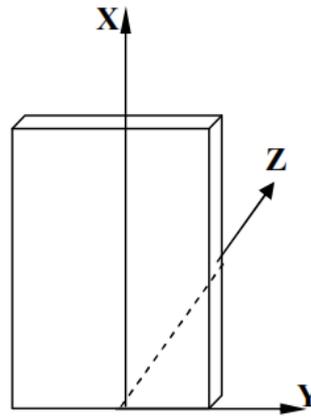


Figure II.11 Problème de contrainte plane

Dans ce cas les contraintes sont de la forme suivante:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_x(x,y) \\ \sigma_y = \sigma_y(x,y) \\ \tau_{xy} = \tau_{xy}(x,y) \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Les déformations sont de la forme suivante:

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Les relations entre les déformations et les contraintes seront:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{cases} \quad (2.40)$$

Les relations entre les contraintes et les déformations sont :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Les équations d'équilibre seront:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

# **CHAPITRE III**

## **Présentation de méthode des éléments finis**

**Chapitre III : [5] [9] [10] [14]****PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS****III-1) GENERALITES :****III-1-1) Introduction:**

En rendant la complexité des calculs une chose du passé, l'avènement de l'ordinateur a révolutionné les sciences de l'ingénieur, des problèmes, autrefois considérés insolubles avec les méthodes classiques, sont maintenant facilement accessibles avec les méthodes numériques. Une de ces méthodes est la méthode des éléments finis. De ce point de vue elle constitue un outil formidable à la disposition de l'ingénieur.

Pour des raisons historiques, puisqu'elle a été développée par des ingénieurs en structures, son premier domaine d'application fut la mécanique des solides,

Tellement des progrès ont été accomplis dans ce domaine qu'il est rare de nos jours de trouver un bureau d'étude n'ayant pas un logiciel d'éléments finis.

Certains de ces logiciels permettent, en plus de l'analyse linéaire, de faire l'analyse dynamique, et même dans certains cas non-linéaire de tous les types de structures rencontrées dans le génie civil avec une aisance et une rapidité remarquables quel que soit le matériau utilisé.

De nos jours, l'emploi de la méthode s'est généralisé à d'autres domaines en particulier la mécanique des fluides.

Elle permet de résoudre tout problème défini par des équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites

**III-1-2) Bref historique de la MEF :**

La MEF (méthode des éléments finis) est mise au point en 1953 chez BOEING (Seattle, USA, calcul des structures d'aile d'avion); on y développe le premier élément fini, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements (publié par Turner, Clough, Martin et Topp en 1956 seulement).

Quant aux bases théoriques générales, mariant l'analyse des structures en barres et poutres avec celle des solides, elles sont données de 1954 à 1960 (Argyris, Kelsey). Certaines idées apparurent auparavant en particulier chez les mathématiciens pour résoudre divers problèmes aux limites, par exemple celui de la torsion de Saint-Venant en divisant la section en triangle (Courant, 1943) ; Mais elles resteront sans suite.

L'expression *élément fini* date de 1960 (Clough). Les années 60 ont vu la MEF s'attaquer tous les domaines du calcul des solides et structures, avant de débordé dans d'autres domaines : écoulements sous terrains, transfère de chaleur, fluide, ...etc. (Zienkiewicz, Cheung, 1965) en fait, les ingénieurs (aéronautique, génie civil et mécanique) développent la MEF pour l'appliqué à leur problème pratique, avant que les bases théorique ne soient bien établies...

Dès 1970, la méthode envahit tous les créneaux de l'ingénierie et des mathématiques appliquées. Il faut ajouter que son essor et, dès le début et aujourd'hui encore, indissociable de celui des ordinateur.

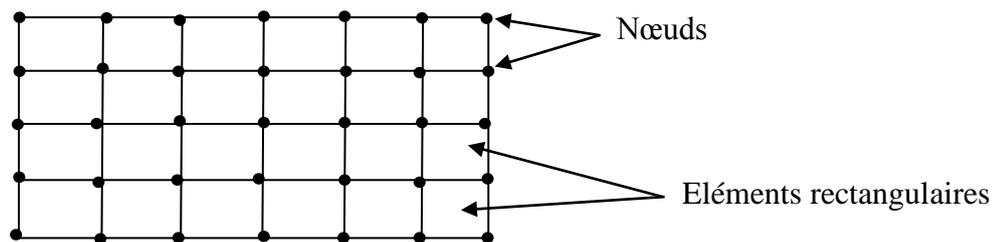
### III-1-3) Principe de la MEF :

#### III-1-3-1) Description et interprétation physique:

L'analyse des contraintes et des déplacements est l'un des plus importants domaines d'application de la MEF.

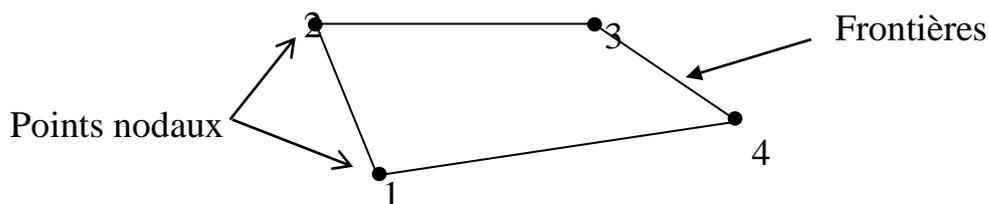
Pour déterminer des contraintes ou des déplacements dus à un système de charges connus dans une structure, celle-ci sera divisée en un nombre d'éléments finis comme le montre (la **Figure III.1**)

L'interprétation physique de la MEF consiste à considérer le modèle mathématique comme formé d'un ensemble de composants individuels, les éléments finis. On opère le découpage –artificiel- du modèle en certain nombre d'éléments finis de forme simple; cette opération géométrique produit le maillage. Chaque élément possède des points privilégiés, les nœuds.



**Figure III.1** Division d'un domaine en éléments finis

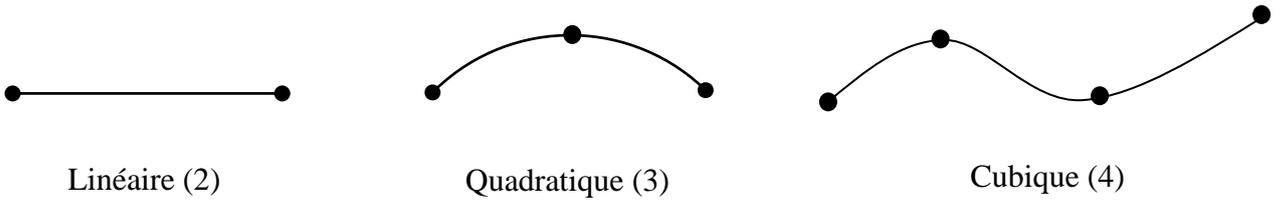
La structure à étudier est remplacée par un ensemble d'éléments supposés liés les uns aux autres en un nombre fini de points appelés "points nodaux". Ces nœuds se trouvent aux coins des éléments ou tout le long de leur frontière; comme le montre (la **figure III.2**)



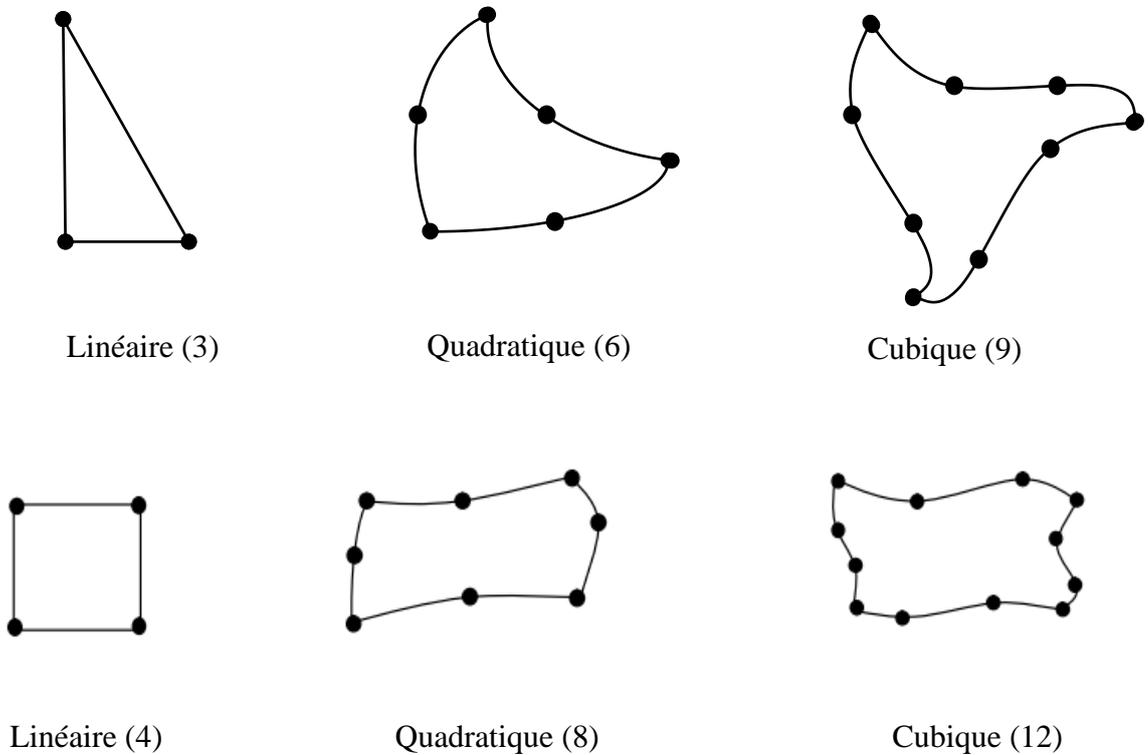
**Figure III.2** Élément (Q4)

Les types d'éléments utilisés pour la division de la structure dépendent de la géométrie de ces derniers. Ils peuvent être, unidimensionnels, bidimensionnels ou tridimensionnels (la figure III.3) montrent quelque types d'éléments.

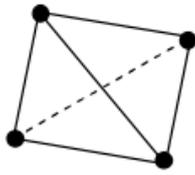
éléments unidimensionnels



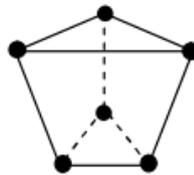
éléments bidimensionnels



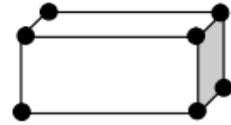
## éléments tridimensionnels



Linéaire (4)



Linéaire (6)



Linéaire (8)

Figure III.3 Quelque type d'éléments

## III-1-3-2) Attributs d'un élément:

La description d'un élément fini comprend les caractéristiques suivantes:

➤ **Géométrie:**

Un élément fini peut être 1D, 2D ou 3D sa forme est simple (fig.3.3)

➤ **Matériau:**

Le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope et ses propriétés physiques E et...etc.).

➤ **Nœuds:**

Les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments l'un aux autres. Ils occupent des positions stratégiques comme les extrémités, les sommets, les milieux des arêtes et faces, etc. (fig. 3.2)

➤ **Degrés de libertés:**

Pour tout élément fini. On doit faire le choix d'une ou plusieurs fonctions (en générale le champ des déplacements), elles sont exprimées en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds, valeurs qui deviennent les inconnues nodales. L'union, par leurs degrés de libertés nodales communes, de deux éléments adjacents, puis d'un troisième, et ainsi de suite, permet de reconstituer, pièce par pièce, la solution (assemblage). Pour aboutir à un

résultat valable, ces opérations nécessitent le respect de certaines règles, dites critères de convergence.

➤ **Forces nodales:**

A travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté. Les unes sont les réactions internes  $\mathbf{r}$ , les autres les forces  $\mathbf{f}$  dues aux charges appliquées à l'élément (poids propres, température, charge uniforme, ...etc.)

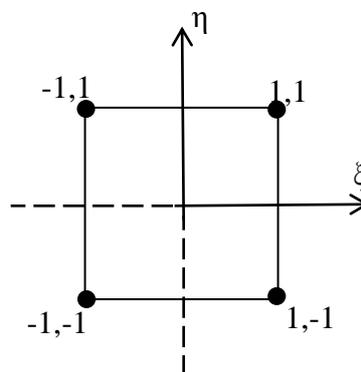
La description précédente permet de construire les deux caractéristiques clés d'un élément qui sont:

a) Sa matrice de rigidité  $\mathbf{k}^e$ .

b) Son vecteur force  $\mathbf{f}^e$ .

### III-1-3-3) Notion d'élément de référence:

De manière à simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, introduisons la notion **d'élément de référence** un élément de référence  $\mathbf{V}^r$  est un élément de forme très simple, repéré dans un **espace de référence**, qui peut être transformé en chaque élément réel  $\mathbf{V}^e$  par une transformation géométrique  $\boldsymbol{\tau}^e$ .



**Figure III.4** Élément de référence à 2D quadratique à quatre nœuds

Les fonctions d'interpolation d'un élément Q4 :

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}$$

$$N_2 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$$

$$N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}$$

$$N_4 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$$

### III-1-3-4) Principe du travail virtuel:

Pour déterminer les propriétés de rigidité de divers éléments en utilise le principe des travaux virtuels. Ce principe exprime les relations existantes entre l'ensemble des charges extérieures et les forces intérieures correspondantes satisfaisant ensemble à la condition d'équilibre, et l'ensemble des déplacements des nœuds et déformations correspondant des différentes parties satisfaisant à la condition de compatibilité. Ce principe peut être posé en terme généraux de la façon suivante: le travail virtuel des charges extérieures égale au travail virtuel des forces intérieures absorbé par la structure. Il est à noter que chacun des deux systèmes (forces et déplacements) peut être réel ou virtuel la seule limitation étant imposée par les conditions d'équilibre et de compatibilité qui doivent être satisfaites. Ce principe peut être exprimé en terme mathématique par la relation suivante:

$$\sum_e F\delta = \int^v \sigma \cdot \varepsilon \cdot d(vol) \quad (3.1)$$

F: les charges extérieures.

$\delta$ : le déplacement de ces charges.

$\varepsilon$ : les déformations intérieures.

$\sigma$ : les forces intérieures.

## III-2) ETAPES CARACTERISTIQUES D'ETUDE DES STRUCTURES PAR LA MEF:

### III-2-1) Définition de la géométrie des éléments:

Nous choisissons un ensemble de  $n$  nœuds, sur le domaine "V" qui servira à définir la géométrie des éléments. Ces points peuvent éventuellement coïncider avec les nœuds d'interpolation. Puis nous remplaçons le domaine "V" par un ensemble d'éléments "V<sup>e</sup>" de formes relativement simples. Chaque élément "V<sup>e</sup>" doit être défini analytiquement de manière unique en fonction des coordonnées des nœuds géométriques qui appartiennent à cet élément.

La partition du domaine "V" en élément "V<sup>e</sup>" doit respecter les deux règles suivantes:

- a) deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leur frontière commune, si elle existe. Cette condition exclut le recouvrement de deux éléments. Les frontières entre éléments peuvent être des points, des courbes ou des surfaces.
- b) l'ensemble de tous les éléments "V<sup>e</sup>" doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné "V". Nous excluons en particulier les vides entre éléments.

$$V = \sum_e V^e \quad (3.2)$$

### III-2-2) Représentation de la géométrie de chaque élément "V<sup>e</sup>" :

Nous utiliserons une transformation linéaire par rapport aux coordonnées  $\{X_n\}$  des nœuds géométriques de l'élément réel "V<sup>e</sup>"

$$\tau : \xi \rightarrow x(\xi) = [\bar{N}(\xi)] \{\bar{X}_n\} \quad (3.3)$$

$$X(\xi, \eta) = \bar{N}_1(\xi, \eta) X_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta) X_2 + \dots + \bar{N}_n(\xi, \eta) X_n = \langle \bar{N} \rangle \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

$\bar{N}$  : Fonctions de transformation géométrique

$\{X_n\}$  : Coordonnées des nœuds géométriques de l'élément réel "V<sup>e</sup>"

$X(\xi)$  : Coordonnées des nœuds géométriques de l'élément de référence "V<sup>r</sup>"

**III-2-3) Approximation sur l'élément de référence :**

Nous choisissons sur le domaine "V" un ensemble de **n** nœuds d'interpolation de coordonnées **x<sub>i</sub>**, confondus ou non avec les nœuds géométriques. Sur chaque élément "V<sup>e</sup>" nous utilisons une approximation nodale de la fonction exacte **U<sub>ex</sub> (x)**.

$$U_{ex}(x) \approx U(x) = \langle N_1(x), N_2(x), \dots, N_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

**N<sub>i</sub>** : Fonctions d'interpolation sur l'élément réel.

**{ U<sub>n</sub> }** : Variables nodales de l'élément (déplacement nodaux).

Les fonctions d'interpolation doivent vérifier les deux propriétés suivantes:

$$a-) N_j(\xi_i) = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ 1 & si \quad i = j \end{cases}$$

$$b-) \sum_{i=1}^{n_d} N_i(\xi) P(\xi_i) = P(\xi)$$

**III-2-4) Construction de la fonction N(ξ) et N̄(ξ) :**

Les fonctions de transformation géométrique **N̄(ξ)** et les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence **N(ξ)** ont les mêmes propriétés elles peuvent parfois être construites directement à partir des polynômes classiques de type Lagrange ou Hermite.

Les polynômes de l'interpolation de Lagrange, dont l'expression générale est :

$$N_i^n(x) = \prod_{j=1}^{n+1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad (3.6)$$

Le polynôme d'interpolation s'écrit (composant U par exemple)

$$U(x,y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2 + \dots + b_{(n+1)(n+2)/2}y_n = P(x,y) u$$

Et ses termes apparaissent naturellement grâce au triangle de pascal (fig.3.5).

Triangle	Degré	n	Nombre de termes
1	constant	0	1
x      y	linéaire	1	3
x <sup>2</sup> xy    y <sup>2</sup>	quadratique	2	6
x <sup>3</sup> x <sup>2</sup> y    xy <sup>2</sup> y <sup>3</sup>	cubique	3	10
x <sup>4</sup> x <sup>3</sup> y    x <sup>2</sup> y <sup>2</sup> xy <sup>3</sup> y <sup>4</sup>	quartique	4	15
x <sup>5</sup> x <sup>4</sup> y    x <sup>3</sup> y <sup>2</sup> x <sup>2</sup> y <sup>3</sup> xy <sup>4</sup> y <sup>5</sup>	quintique	5	21

Fig. 3.5 : Triangle de pascal

$N_i^n(x)$  : est un polynôme de degré n, qui passe par n points  $x_j(j \neq i)$  et vaut 1 au point restant  $x_i$ .

**III-2-4-1) méthode générale de construction:**

**III-2-4-1-1) choix de la base polynomiale:**

Exprimons  $U(x)$  sur l'élément de référence sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions connues indépendantes  $P_1(\xi), P_2(\xi), \dots$  qui sont le plus souvent des monômes indépendantes  $P_i(\xi)$  est l'une des opérations de base de la MEF

$$U(\xi) = \langle P_1(\xi) P_2(\xi) \dots \rangle \left\{ \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{matrix} \right\} = \langle P_1(\xi) \rangle \{U_n\} \tag{3.7}$$

L'ensemble des fonctions  $P(\xi)$  constitue la base polynomiale de l'approximation. Son nombre de termes doit être égal au nombre de degré de liberté  $n_d$  de l'élément.

**III-2-4-1-2) Expression de  $N(\xi)$  :**

Exprimons qu'en chaque nœud d'interpolation de coordonnées  $\xi$ , la fonction  $U(\xi)$  prend la valeur nodale  $U_i = U_{ex}(\xi)$  :

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \{U_n\} = \begin{bmatrix} P_1(\xi_1) & P_2(\xi_1) & \dots & P_{n^d}(\xi_1) \\ P_1(\xi_2) & P_2(\xi_2) & \dots & P_{n^d}(\xi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(\xi_{n^d}) & P_2(\xi_{n^d}) & \dots & P_{n^d}(\xi_{n^d}) \end{bmatrix} \{u\} \quad (3.8)$$

$$\{U_n\} = [P_n] \{u\} \quad (3.9)$$

Soit la matrice nodale  $[P_n]$  d'ordre  $n_d$  :

$$\{u\} = [P_n]^{-1} \{U_n\} \quad (3.10)$$

Reportons la relation (6.b) dans (6.a)

$$U(\xi) = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1} \{U_n\}$$

Soit  $U(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{U_n\}$  (3.11)

D'où  $\langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1}$

**III-2-5) Calcul des matrices de rigidité de chaque élément  $[k^e]$  :**

$$[k^e] = \int_V [B]^T [D][B] dV = t \int_{-b}^b \int_{-a}^a [B]^T [D][B] dx dy \quad (3.12)$$

Par transformation d'intégrale on peut passer de l'intégration de la formule (6.7) juste en dessus sur l'élément réel "V<sup>e</sup>" à une intégration plus simple sur l'élément de référence "V<sup>r</sup>" on obtient la formule suivante:

$$[k^e] = t \int_{-b}^b \int_{-a}^a [B]^T [D][B] det[J] d\xi d\eta \quad (3.13)$$

$$det[J] = \begin{bmatrix} \partial X / \partial \xi & \partial Y / \partial \xi \\ \partial X / \partial \eta & \partial Y / \partial \eta \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

[B] : matrice relie les gradients (déformations) en x au variable nodale (déplacements).

[D] : matrice des propriétés physiques d'élément (E,  $\nu$ ,  $\alpha, \dots$ ).

det [J] : matrice jacobienne et son déterminant.

### III-2-6) Calcul des vecteurs de sollicitation de chaque élément {f<sup>e</sup>}:

$$\{f^e\} = \int_{V^e} [N] f_V dV + \int_{S^e} [N] f_S dS$$

$$\{f^e\} = \int_{V^r} \{N(\xi)\} f_V \det(J(\xi)) dV^r + \int_{S^e} \{N(\xi_s)\} f_S dS \quad (3.15)$$

$f_V$  : Force de volume.

$f_S$  : Force de surface.

Le vecteur {F} s'écrit en négligeant l'intégral de surface:

$$\{f^e\} = \int_{V^r} \{N(\xi)\} f_V \det(J) dV^r = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{N(\xi)\} f_V \det(J) d\xi d\eta \quad (3.16)$$

### III-2-7) Assemblage des matrices et des vecteurs élémentaires:

L'assemblage est l'opération qui consiste à construire la matrice globale [K] et le vecteur global des sollicitations {F} à partir des matrices élémentaires [k<sup>e</sup>] et des vecteurs élémentaires de sollicitations {f<sup>e</sup>}.

Chaque forme intégrale élémentaire  $W^e$  s'écrit sous la forme discrétisée :

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle ([K^e] \{u_n\} - \{f^e\})$$

$$w = \sum_e w_e = \sum_e \langle \delta u_n \rangle ([K^e] \{u_n\} - \{f^e\})$$

$$w = \langle \delta U_n \rangle ([K^e] \{U_n\} - \{f^e\})$$

En effet de :

- La continuité des déplacements aux nœuds
- L'équilibre des forces à chaque nœud

On obtient :

$$\sum_e [K^e] \{U_n\} - \sum_e \{U_n\} \{f^e\} = \sum_e P_i^e$$

Donc :

$$[K] \{U_n\} - \{F_n\} = 0 \quad \Rightarrow \quad [K] \{U_n\} = \{F_n\}$$

Où :

$\{u_n\}$  : Variables (déplacements) nodales d'un élément.

$\{U_n\}$  : Ensemble de toutes les variables (déplacements) nodales

$W$  : Forme intégrale globale (travail virtuel totale).

$W^e$  : Forme intégrale élémentaire (travail virtuel élémentaire).

$\{\delta u_n\}$  : Variation des variables nodales d'un élément.

$\{\delta U_n\}$  : Variation de l'ensemble des variables nodales.

### III-2-8) Résolution du système d'équation globale:

Après l'assemblage, la forme intégrale globale s'écrit:

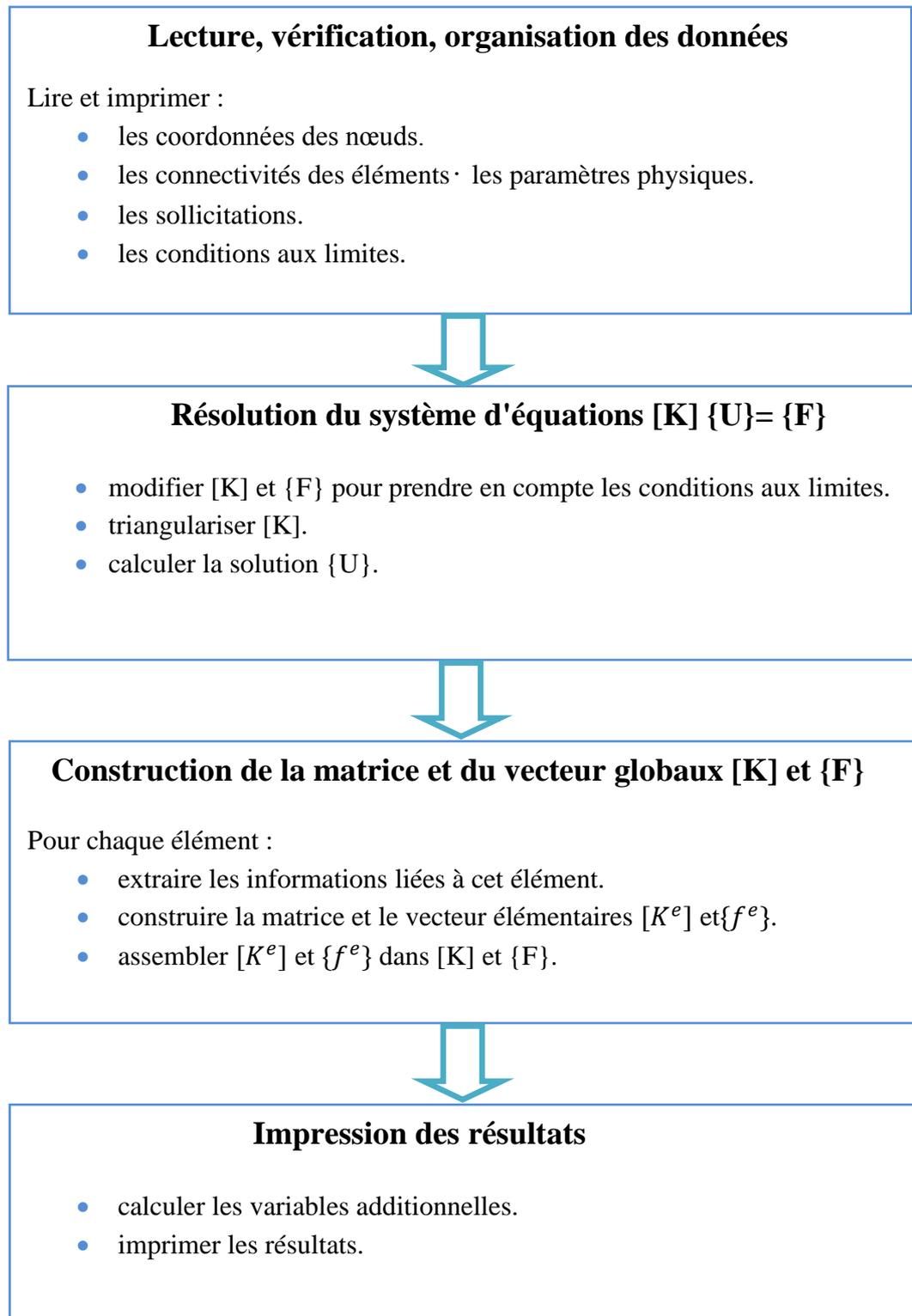
$$[K]\{U_n\} = \{F_n\}$$

- Modification de  $[k]$  et  $\{F\}$  pour prendre en compte les conditions aux limites.
- Triangularisation de  $[k]$ .
- Calculer de la solution  $U$ .

### III-3) ETAPES CARACTERISTIQUES D'UN PROGRAMME D'ELEMENTS FINIS :

Tout programme basé sur la MEF inclut quelques blocs fonctionnels caractéristiques:

- a) Lecture, vérification, organisation des données en décrivant le maillage (nœuds et éléments), les paramètres physiques ( $E, \nu, \dots$  etc.) les sollicitations et les conditions aux limites;
- b) Construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis assemblage des ceux-ci pour former la matrice globale et le vecteur global des sollicitations;
- c) Résolution du système d'équations après prise en compte des conditions aux limites;
- d) Impression des résultats après calcul éventuel des variables additionnelles (gradients, contraintes, réactions, ... etc.). La figure 3.6 montre l'enchaînement de ces différents blocs.



**Figure III.6 :** Organigramme d'Etapes caractéristiques d'un programme d'éléments finis

### III-4) CONVERGENCE DE LA METHODE VERS LA SOLUTION EXACTE:

#### III-4-1) Types de convergence :

Il existe deux types de convergence :

- **La convergence  $h$** , par raffinement du maillage sans modification de l'interpolation

Considérons un maillage d'élément fini on appelle  $h$  la dimension caractéristique d'un élément (longueur plus grande côté diamètre du cercle circonscrite). On subdivise toujours davantage le domaine en éléments toujours plus petits chaque nouvelle division contient la précédente et on conserve pour les éléments de même type constamment la même approximation du champ.

Alors si les critères de convergence sont remplis la solution approchée tend vers la solution exacte quand la taille des éléments tend vers zéro  $\langle h \rightarrow 0 \rangle$  c'est le principe de la convergence  $h$ .

- **La convergence  $p$** , par enrichissement de l'interpolation sans changement de maillage

Partons d'un maillage donné d'élément fini et appelle  $p$  le degré des polynômes utilisés pour l'interpolation on conserve le maillage choisi et on enrichit le champ approché des éléments en augmentant le degré  $p$ .

Alors si les critères de convergence sont satisfaits la solution approchée tend vers la solution exacte lorsque le degré de l'interpolation tend vers l'infini  $\langle p \rightarrow \infty \rangle$ . C'est la technique de la convergence  $p$ .

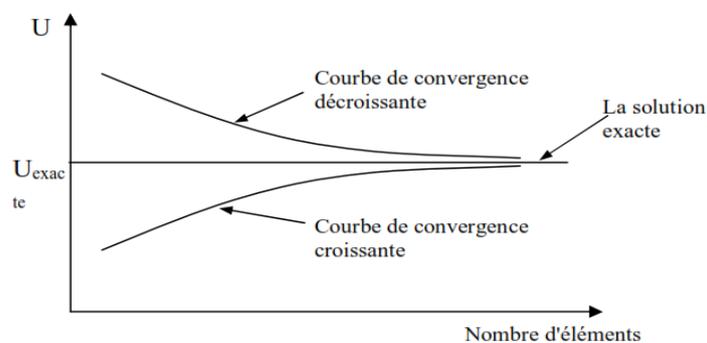


Figure III.7 Courbe de convergence

**III-4-2) Critères de convergence:**

Pour que la solution approchée tende vers la solution exacte, l'interpolation choisie doit satisfaire à certaines conditions, appelées critères de convergence, ces critères garantissent une convergence monotone de la solution numérique vers la solution exacte:

**a) critère 1:**

Le premier critère de convergence est le critère de continuité, conformité ou compatibilité cinématique, l'interpolation doit être telle que le champ des déplacements soit:

- Continue et dérivable dans l'élément.
- Continue à travers les frontières.

La première condition prévient l'emploi des fonctions présentant des discontinuité (arrêtes, sauts,....).

Par la seconde condition, les déplacements doivent être continus en tout point des frontières séparant les éléments. Or, à la frontière de deux éléments adjacents, les déplacements ne sont a priori égaux qu'aux seuls nœuds communs.

**b) critère 2:**

Le second critère de convergence est le critère des déformations constantes ou de complétude, l'interpolation doit permettre de représenter:

- Les états de déplacement constant ou modes rigides.
- Les états de déformation constante.

Ce critère semble physiquement évident : l'élément fini doit pouvoir se déplacer en bloc, comme un corps rigide, sans qu'aucune contrainte (ou déformation) n'y naisse, et il doit être capable de représenter des états de déformations les plus simple, c'est-à-dire constante.

En réalité ce critère doit être compris de manière plus aiguë et se justifie à la limite : Quand un élément fini devient de plus en plus petit ( $h \rightarrow 0$ ), ses déplacements et déformations tendent vers des valeurs constantes; pour assurer la convergence, il est donc indispensable que l'interpolation puisse les représenter.

# **CHAPITRE IV**

## **Présentation de la méthode des éléments infinis**

## Chapitre IV : [2] [6] [7]

**PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS INFINIS****IV-1) Introduction :**

L'infini est différent d'un nombre normal parce que, par définition, il n'est pas fini. En divisant l'infini par n'importe quel nombre positif (excepté l'infini), nous obtiendrons l'infini. Vous pouvez aussi le multiplier par n'importe quoi excepté zéro (ou l'infini) et il ne sera pas plus grand. Donc, regardons de plus près les différentes sortes d'infinis.

Dans la modélisation de n'importe quel problème d'interaction sol-structure, le milieu est représenté comme une région soit infinie ou semi-infinie. L'utilisation de la MEF pour ce type de problème consiste à faire un maillage qui nécessite l'utilisation d'un grand nombre d'éléments finis.

Et à cause des problèmes trouvés dans la modélisation des domaines infinis par la MEF, plusieurs recherches ont été faites pour résoudre ces problèmes ;

UNGLESS et ANDERSON ont construit le premier élément infini, en se basant sur l'utilisation d'une fonction de décroissance dans la direction radiale sous la forme de  $(\frac{1}{1+r})$ .

Le premier travail publié sur ce type d'éléments était celui de ZIENKIEWICZ et BETTESS en 1975. Dans cette formulation, le domaine de l'élément est étendu jusqu'à l'infini. Les fonctions de forme sont multipliées par des fonctions décroissantes et qui sont choisies suivant le type de problème étudié.

En 1981, BEER et MEEK ont utilisé une transformation incluant un terme de la forme  $(\frac{1}{1+\xi})$  et qui transforme le domaine  $\xi$  en un domaine  $x$  infini.

En 1983, BANDO a utilisé une nouvelle formulation des éléments infinis pour des excavations. Cette formulation est basée sur la transformation à un domaine fini. Jusqu'à nos jours les recherches et les publications se poursuivent afin de trouver des formulations qui solutionnent le mieux possible un tel problème.

## IV-2) Formulation des éléments infinis :

Dans la formulation des éléments infinis, deux types de transformations sont encore utilisés :

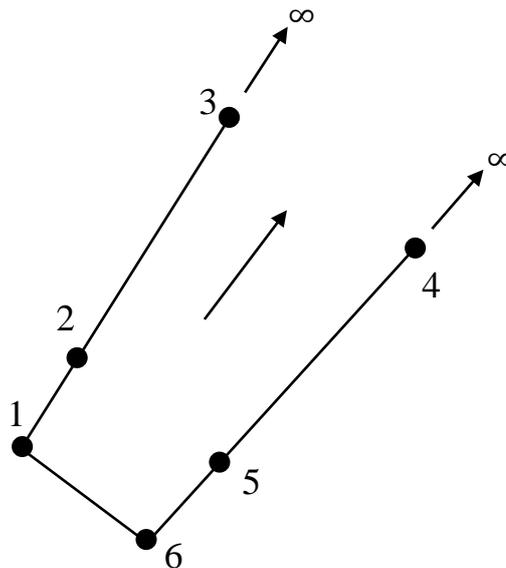
- Interpolation de la géométrie (des coordonnées) ;
- Interpolation des déplacements.

Ces deux transformations sont utilisées pour la formulation des éléments infinis, il existe deux approches pour la formulation des éléments infinis :

- Approche directe,
- Approche inverse.

### IV-2-1) Approche directe :

Dans cette approche, le domaine des coordonnées naturelles est étendu à l'infini dans la direction considérée.



**Figure IV.1 :** Géométrie de l'élément infini

Les variables inconnues sont exprimées en termes de fonction de formes descendantes et qui tendent vers 0 à l'infini. Les fonctions de forme de l'élément infini sont données par l'expression:

$$M_i(\xi, \eta) = F_i(\xi, \eta) N_i(\xi, \eta) \quad (4.1)$$

Avec :

$N_i(\xi, \eta)$  : sont les fonctions de forme standard.

$F_i(\xi, \eta)$  : sont les fonctions décroissantes.

$M_i(\xi, \eta)$  : sont les fonctions de l'élément infini.

Le rôle de la fonction décroissante  $F_i(\xi, \eta)$  est d'assurer que le comportement de l'élément soit une bonne réflexion du sens physique du problème.

Les fonctions décroissantes  $F_i(\xi, \eta)$  doit être égale à l'unité en chaque nœud.

$$F_i(\xi, \eta) = 1$$

Les dérivées des fonctions de forme de l'élément infini peuvent être facilement obtenues en utilisant la règle de dérivation en chaîne :

$$\begin{cases} \frac{\partial M_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} F_i + \frac{\partial F_i}{\partial \xi} N_i \\ \frac{\partial M_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} F_i \end{cases} \quad (4.2)$$

Généralement deux types de fonctions décroissantes  $F_i(\xi_i, \eta_i)$  sont utilisés :

- Fonctions exponentielles décroissantes ( $\exp(-x)$ ) : Elle a l'avantage de tendre vers zéro à l'infini plus rapidement qu'un autre polynôme.
- Fractions rationnelles décroissantes.

#### Remarque :

L'inconvénient principal de l'approche directe est qu'elle nécessite l'utilisation d'une intégration numérique sur un domaine semi-infini.

#### IV-2-2) Approche inverse :

Dans cette approche, le domaine des coordonnées naturelles est maintenu.

Des fonctions de forme ascendantes sont utilisées pour la transformation géométrique et qui sont singulièrement à l'extrémité du plan  $\xi = 1$ .

Les valeurs des coordonnées physiques tendent vers l'infini à l'extrémité du plan naturel.

Ainsi les éléments infinis représentent un milieu infini.

L'avantage principal de cette approche est qu'elle garde les points d'intégration originaux de GAUSS-LEGENDRE.

### IV-3) Critères de convergence des éléments infinis :

- Les fonctions qui représentent le champ de déplacement et les fonctions qui représentent la transformation géométrique de l'élément doivent avoir la forme de la solution à obtenir.
- Les quantités intégrables doivent donner lieu à des valeurs bornées.
- Les deux nœuds intermédiaires des côtés de l'élément infini doivent être l'un en face de l'autre autant que possible.

### IV-4) Construction de la fonction de transformation :

#### IV-4-1) Cas unidimensionnel :

Considérons la transformation unidimensionnelle, dans laquelle le point  $x_1$  est étendu à  $x_3$  ( $x$  tend vers  $\infty$ ) à travers un point  $x_2$ .

Considérons la formule suivante :

$$X = X_1 N_1 + X_2 N_2 = \frac{-2\xi}{1-\xi} X_1 + \frac{1+\xi}{1-\xi} X_2 \quad (4.3)$$

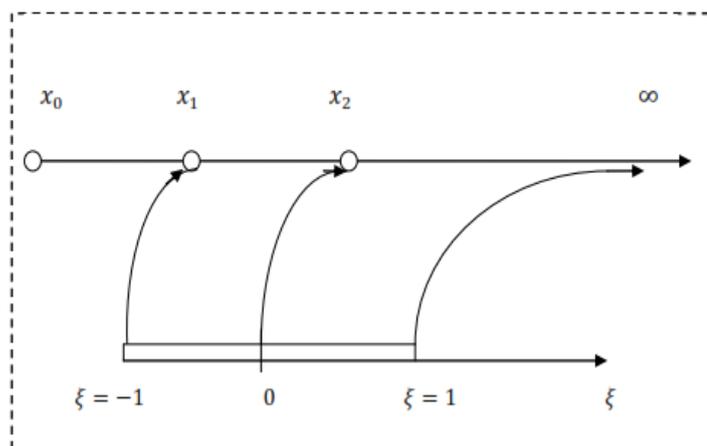


Figure IV.2 Élément infini unidimensionnel

Dans cette formulation, on peut remarquer :

$$\xi = 0 \implies X = X_2$$

$$\xi = -1 \implies X = X_1$$

$$\xi = 1 \implies X = \infty$$

De plus on a :

$$N_1 + N_2 = \sum_{i=1}^2 N_i = 1 \tag{4.4}$$

Et :

$$\sum M_i = 1$$

En résolvant l'équation (4.4) en  $\xi$ , on trouve :

$$\xi = \frac{X - X_2}{X - 2X_1 + X_2} = 1 - \frac{2(X_2 - X_1)}{X - 2X_1 + X_2} \tag{4.5}$$

Avec :  $X_2 = 2X_1$ , l'équation (4.5) devient :

$$\xi = 1 - \frac{2X_1}{X} \tag{4.6}$$

On a obtenu une transformation entre un domaine infini X et un domaine fini  $\xi$ .

La généralisation de cette interpolation pour n'importe quelle ligne dans l'espace (X, Y, Z) nous donne :

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^2 N_i X_i \\ Y = \sum_{i=1}^2 N_i Y_i \\ Z = \sum_{i=1}^2 N_i Z_i \end{cases} \tag{4.7}$$

$N_i$  : Sont les transformations infinies à une dimension.

**IV-4-2) Cas bidimensionnel :**

La généralisation de cette formulation pour le cas 2D se fait par le produit des transformations infinies à une dimension avec des fonctions de forme standard en  $\eta$  (direction finie).

Par conséquent les fonctions de forme sont données par :

$$M_i(\xi, \eta) = N_i(\xi)N_i(\eta) \tag{4.8}$$

$N_i(\eta)$  : Fonction de forme standard en  $\eta$ .

$N_i(\xi)$  : Transformation infinie à une dimension.

$M_i(\xi, \eta)$  : Fonction de forme de l'élément fini.

#### IV-4-3) Éléments infinis dans le cas étudié (voir la Figure IV.2) :

Dans ce cas les fonctions de forme de l'élément infini peuvent être données par :

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^6 M_i X_i \\ Y = \sum_{i=1}^6 M_i Y_i \end{cases} \quad (4.9)$$

Avec :  $\sum_{i=1}^6 M_i(\xi, \eta) = 1$

$$\begin{cases} M_1 = \frac{-\eta(1-\xi)}{(1-\eta)} \\ M_2 = \frac{(1+\eta)(1-\xi)}{2(1-\eta)} \\ M_5 = \frac{(1+\eta)(1+\xi)}{2(1-\eta)} \\ M_6 = \frac{-\eta(1-\xi)}{(1-\eta)} \end{cases} \quad (4.10)$$

#### IV-5) Calcul de la matrice de rigidité de l'élément infini :

La transformation géométrique qui permet le passage des coordonnées locales aux coordonnées globales. Si s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^6 M_i(\xi, \eta) X_i \\ Y = \sum_{i=1}^6 M_i(\xi, \eta) Y_i \end{cases} \quad (4.11)$$

Avec :

$M_i(\xi, \eta)$  : Les fonctions de transformation de l'élément infini, sont citées précédemment.

L'interpolation du champ de déplacement des éléments infinis est donnée en termes des déplacements nodaux des nœuds situés à une distance finie.

En supposant que les déplacements tendent vers zéro à l'infini, l'élément infini peut être considéré comme un élément quadrilatère à 6 nœuds dont le champ de déplacement, sur la surface ( $\xi=+1$ ) est nul.

Donc, les fonctions d'interpolation de l'élément infini sont obtenues directement à partir des celles correspondantes aux mêmes nœuds de l'élément fini.

Le champ de déplacement en tout point de l'élément est donné par :

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^2 N(\xi, \eta)_i U_i \\ V &= \sum_{i=1}^2 N(\xi, \eta)_i V_i \end{aligned} \quad (4.12)$$

La matrice de rigidité de l'élément infini est donnée par :

$$[K^e] = \int [B]^T [D] [B] dV \quad (4.13)$$

Ou bien par :

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta \quad (4.14)$$

Pour un élément infini, les fonctions de transformations  $M_i(\xi, \eta)$  sont différentes des fonctions d'interpolation  $N_i(\xi, \eta)$ .

D'où la matrice Jacobienne pour un élément infini est donnée par :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial M_i X_i}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial M_i Y_i}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial M_i X_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial M_i Y_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

#### IV-6) Formulation théorique de la technique de couplage MEF-MEI :

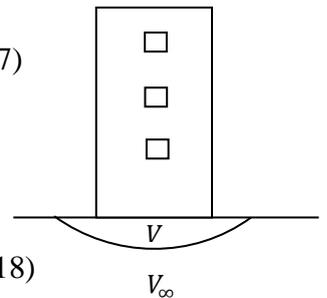
Le P.T.V stipule l'égalité de l'énergie de déformation et le travail des forces externes, ce dernier s'écrit sous forme incrémentale comme suite :

- Champ proche ( $V$ ) :

$$\iiint_V \sigma_{ij}^{t+\Delta t} \delta \varepsilon_{ij} dv = \iint_S F_i^{t+\Delta t} \delta U_i ds + \iiint_V B_i^{t+\Delta t} \delta U_i dv \quad (4.17)$$

- Champ lointain ( $V_\infty$ ) :

$$\iiint_{V_\infty} \sigma_{ij}^{t+dt} \delta \varepsilon_{ij} dv = -\iint_S F_i^{t+dt} \delta U_i ds + 0 \quad (4.18)$$



D'après les deux équations (a) et (b), on a :

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \quad & \iiint_V \sigma_{ij}^{t+\Delta t} \delta \varepsilon_{ij} dv = -\iiint_{V_\infty} \sigma_{ij}^{t+\Delta t} \delta \varepsilon_{ij} dv + \iiint_V B_i^{t+\Delta t} \delta U_i dv \\
 \Rightarrow \quad & \iiint_{V+V_\infty} \sigma_{ij}^{t+\Delta t} \delta \varepsilon_{ij} dv = \iiint_V B_i^{t+\Delta t} \delta U_i dv \\
 \Rightarrow \quad & \iiint_{V+V_\infty} \sigma_{ij}^t \delta \varepsilon_{ij} dv + \iiint_{V+V_\infty} \sigma_{ij}^t D_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} dv = \iiint_V B_i^{t+\Delta t} \delta U_i dv \\
 \Rightarrow \quad & \iiint_{V+V_\infty} \sigma_{ij}^t D_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} dv = \iiint_V B_i^{t+\Delta t} \delta U_i dv - \iiint_{V+V_\infty} \sigma_{ij}^t \delta \varepsilon_{ij} dv \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

L'optimisation de cette dernière équation, on a :

$$[K]\{U\} = \{F\}^{t+\Delta t} - \{F\}^t \quad (4.21)$$

$\{F\}^{t+\Delta t}$  : Vecteur forces nodales.

$\{F\}^t$  : Vecteur force équivalentes.

Au final, l'équilibre global s'écrit comme suit :

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (4.22)$$

# **CHAPITRE V**

## **Formulation des problèmes dynamique**

## Chapitre V : [1] [3] [8]

## FORMULATION DES PROBLEMES DYNAMIQUE

## V.1) OSCILLATEUR LINEAIRE A UN DEGRE DE LIBERTE

## V.1.1) Définition :

L'oscillateur à 1 degré de liberté est constitué d'un bloc rigide, de masse  $M$  connecté à un support.

La figure V.1 présente un tel oscillateur, sollicité par une force  $p(t)$  variable dans le temps. Le seul mouvement autorisé pour l'oscillateur est le déplacement horizontal  $u(t)$ , de la masse. L'oscillateur est connecté à son support par un élément qui développe une force  $F(u, \dot{u})$ , fonction du déplacement et de la vitesse de la masse  $M$ . La relation  $F(u, \dot{u})$  caractérise le comportement de l'oscillateur; la force  $p(t)$  caractérise la sollicitation.

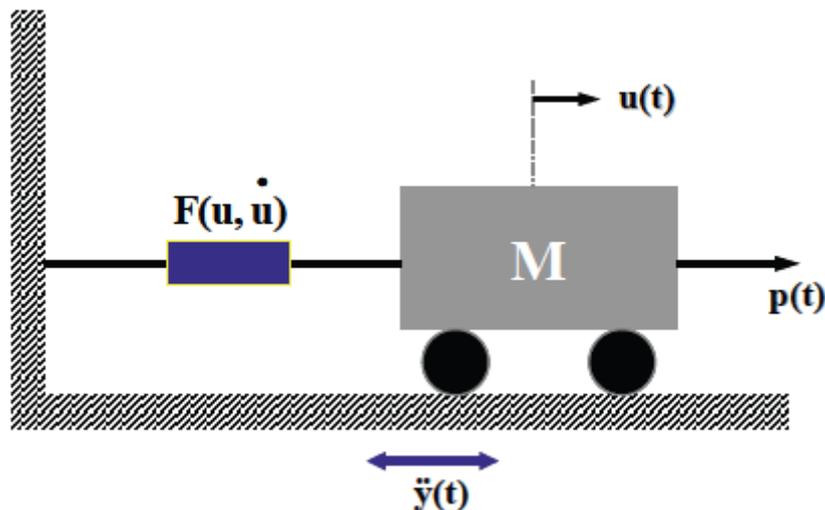


Figure V.1 : Oscillateur a 1 degré de liberté

## V.1.2) Loi de comportement de l'oscillateur :

Cette loi de comportement dépend dans le cas le plus général du déplacement  $u(t)$  de la masse et de sa vitesse  $\dot{u}(t)$  par rapport au support.

La force de rappel  $F$  peut ne dépendre que du déplacement  $u(t)$  (figure V.2). Si à tout instant il y a proportionnalité entre la force et le déplacement (figure V.2a), l'oscillateur est élastique linéaire. Ce cas est typiquement celui d'un ressort.

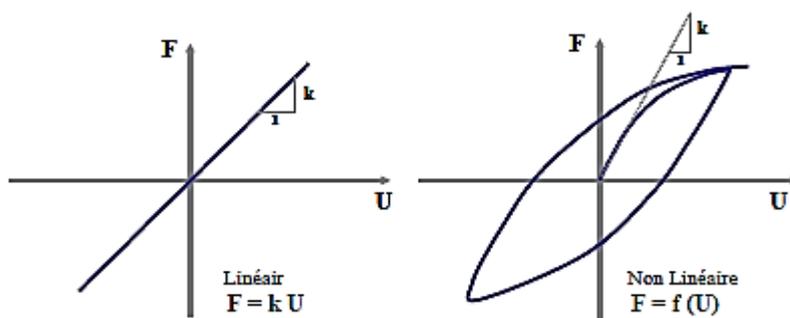
La relation entre la force développée dans la liaison et le déplacement relatif  $u$  des deux extrémités de cette liaison s'écrit simplement :

$$F = k.u \quad (\text{V.1})$$

La dépendance de la force sur le déplacement peut cependant être non linéaire (figure 4.2b); initialement il y a proportionnalité entre force et déplacement (oscillateur élastique linéaire) puis, au-delà d'un certain seuil de déplacement, la relation cesse d'être linéaire; par ailleurs la décharge peut s'effectuer suivant un trajet distinct de la charge. C'est le cas par exemple d'une liaison masse-support constituée d'un assemblage en série d'éléments de ressorts linéaires et de frotteurs de Coulomb (éléments rigides en-deçà d'un certain seuil d'effort puis développant un effort constant au-delà du seuil).

Notons que pour certaines liaisons, il est possible que la décharge s'effectue le long de la même courbe que la charge; l'oscillateur est alors élastique non linéaire. Dans tous les cas, l'oscillateur est dit non linéaire et la relation force-déplacement s'écrit de façon symbolique :

$$F = f(U) \quad (\text{V.2})$$

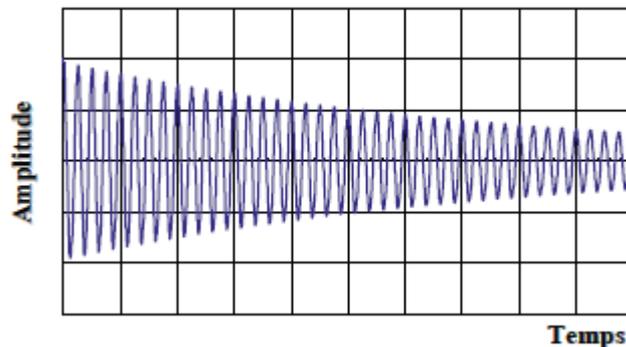


**Figure V.2:** Relation force – déplacement

Dans les expressions  $F$  de la (figure V.2), le temps n'intervient pas. La relation est la même que le chargement de l'oscillateur soit effectué très lentement ou très rapidement. Si en particulier on considère une liaison constituée d'un seul ressort linéaire et que l'on impose à la

masse  $M$  un déplacement initial  $u_0$  avant de la relâcher, celle-ci oscillera indéfiniment avec une amplitude maximale  $u_0$ .

Dans la pratique, on constate que l'amplitude décroît au cours du temps et que la masse retrouve au bout d'un certain temps une position d'équilibre (figure V.3).



**Figure IV.3:** Oscillation libre avec amortissement

Donc une partie de l'énergie élastique emmagasinée dans le ressort est dissipée au cours du temps; ce phénomène est dénommé de façon générique amortissement.

En règle générale, et sauf cas exceptionnel, l'amortissement ne peut être calculé à partir des propriétés physiques du système. Par exemple dans le cas d'un bâtiment soumis à une sollicitation sismique significative, les sources de dissipation d'énergie sont multiples : fissuration du béton, plastification des aciers, glissements relatifs entre la structure porteuse et les éléments secondaires (cloisons, baies vitrées...). Dans la pratique, les phénomènes de dissipation d'énergie sont donc caractérisés de façon très simplifiée en considérant qu'ils proviennent d'un amortisseur visqueux linéaire.

Un amortisseur visqueux linéaire est caractérisé par une relation linéaire entre la force développée dans l'amortisseur et la vitesse relative des deux extrémités de celui-ci :

$$F = c \dot{u} \quad (V.3)$$

La constante de proportionnalité  $c$ , caractéristique de l'amortisseur, a pour unités une masse par unité de temps. La description des phénomènes de dissipation d'énergie à l'aide d'un amortisseur équivalent est obtenue en écrivant que l'énergie dissipée dans un cycle de

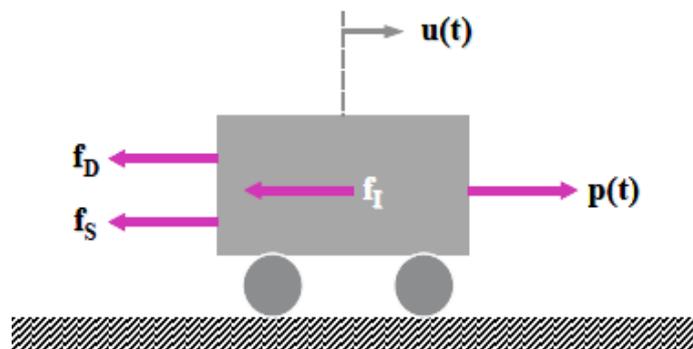
vibration du système est égale à l'énergie dissipée dans un amortisseur linéaire pour un cycle de même amplitude de déplacement.

### V.1.3) Equations de l'équilibre dynamique :

L'équation d'équilibre dynamique peut être obtenue à partir de trois méthodes : méthode directe, méthode énergétique et principe des puissances virtuelles. Ces trois méthodes sont illustrées ci-après :

#### a) Méthode directe :

Les forces s'exerçant sur l'oscillateur de la figure V.5 sont :



**Figure V.4** : forces appliquées à l'oscillateur

En écrivant que la résultante de toutes ces forces est nulle :

$$f_S + f_D = p(t) - f_I \quad (\text{V.4})$$

Dans l'équation précédente, on reconnaît le principe d'Alembert; les forces extérieures sont égales aux forces directement appliquées à la masse,  $p(t)$ , diminuées des forces d'inertie  $f_I$ .

Ces forces extérieures sont égales aux forces "intérieures",  $f_S + f_D$ , se développant dans la liaison.

Pour un système visco-élastique linéaire, l'équation (V.4) devient en tenant compte de (V.1) et (V.3):

$$M \ddot{u} + C\dot{u} + Ku = p(t) \quad (\text{V.5})$$

**b) Méthode des puissances virtuelles:**

Considérons une vitesse virtuelle  $\delta \hat{u}$  pour la masse M. La puissance virtuelle des efforts extérieurs est :

$$P_e(\delta \hat{u}) = P(t) \delta \hat{u} \quad (\text{V.6})$$

La puissance virtuelle des efforts intérieurs est :

$$P_i(\delta \hat{u}) = - f_S \delta \hat{u} - f_D \delta \hat{u} \quad (\text{V.7})$$

et la puissance virtuelle des quantités d'accélération est :

$$A(\delta \hat{u}) = M \ddot{u} \delta \hat{u} \quad (\text{V.8})$$

En écrivant le principe des puissances virtuelles, il vient :

$$(-f_S - f_D + p(t)) \delta \hat{u} = M \ddot{u} \delta \hat{u} \quad (\text{V.9})$$

Valable pour toute vitesse virtuelle  $\delta \hat{u}$ . La relation (V.4) en découle de manière triviale.

**c) Méthode énergétique :**

L'énergie cinétique du système de la figure V.1 est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} M \dot{u}^2 \quad (\text{V.10})$$

Son énergie potentielle, dans le cas d'un système linéaire par :

$$V = \frac{1}{2} k u^2 \quad (\text{V.11})$$

Le travail des forces non conservatives est égal au travail des forces appliquées et des forces dissipatives

$$\delta W_{nc} = p(t) \delta u - C \dot{u} \delta u \quad (\text{V.12})$$

Le principe d'Hamilton permet d'écrire :

$$\int_{t_1}^{t_2} [M\dot{u}\delta\dot{u} - ku\delta u] dt + \int_{t_1}^{t_2} [p(t) - C\dot{u}\delta u] dt = 0 \quad (\text{V.13})$$

En intégrant par parties le terme  $\int_{t_1}^{t_2} M\dot{u}\delta\dot{u} dt$ , il vient :

$$\int_{t_1}^{t_2} [-M\ddot{u} - C\dot{u} - ku + p(t)] \delta u dt = 0 \quad (\text{V.14})$$

Qui est valable pour toute variation  $\delta u$ . L'équation (V.5) en découle immédiatement.

#### V.1.4 Formulation réduite de l'équation d'équilibre :

La mise en œuvre de l'une des trois méthodes exposées ci-dessus conduit à l'équation d'équilibre (V.5) pour l'oscillateur à 1 degré de liberté. Divisant les deux membres de cette équation par M, on obtient la formulation réduite de l'équation d'équilibre :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = \frac{p(t)}{M} \quad (\text{V.15})$$

L'écriture précédente montre que l'équation d'équilibre fait intervenir les deux grandeurs fondamentales suivantes caractérisant l'oscillateur :

Pulsation propre

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (\text{V.16})$$

Ou, de façon équivalente, la fréquence propre f

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (\text{V.17})$$

Où la période propre T

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \quad (\text{V.18})$$

Pourcentage d'amortissement critique

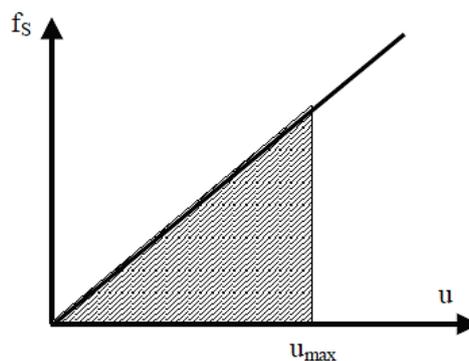
$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{kM}} = \frac{c}{2M\omega} = \frac{c}{c_c} \quad (\text{V.19})$$

Où  $c_c$  est par définition l'amortissement critique dont la signification physique

L'amortissement critique donné par l'équation (V.19) peut également s'exprimer en fonction de la raideur k en tenant compte de l'équation (V.17).

$$c_c = \frac{2k}{\omega} \quad (\text{V.20})$$

Pour un système linéaire, dont la courbe effort-déplacement est représentée sur la figure V.5 la raideur k peut être exprimée en fonction de l'énergie élastique emmagasinée  $E_S$ , égale à l'aire sous la courbe.



**Figure V.5:** système linéaire

$$k = \frac{2E_S}{u_{max}^2} \quad (\text{V.21})$$

Le pourcentage d'amortissement critique équivalent de la structure est donné par :

$$\xi = \frac{E_D}{4\pi E_S} \quad (\text{V.22})$$

$E_D$  est l'énergie dissipée par la structure au cours d'un cycle de sollicitation.

#### V.1.4.1) Vibrations libres :

Les vibrations libres sont solutions de l'équation :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2u = 0 \quad (\text{V.23})$$

sous certaines conditions initiales pour la vitesse et le déplacement.

La solution générale de l'équation (V.23) est recherchée sous la forme :

$$u(t) = \lambda e^{st} \quad (\text{V.24})$$

Reportant (V.23) dans (V.24), l'inconnue " s " doit satisfaire l'équation :

$$S^2 + 2\xi\omega S + \omega^2 = 0 \quad (\text{V.25})$$

Dont la solution dépend du signe du déterminant :

$$\Delta = \omega^2(\xi^2 - 1) \quad (\text{V.26})$$

qui lui-même dépend de la valeur de  $\xi$ .

On distinguera trois cas possibles :

- système non amorti  $\xi=0$  ou à **amortissement sous-critique**  $\xi < 1$
- système à **amortissement critique**  $\xi = 1$
- système à **amortissement sur-critique**  $\xi > 1$

tout en notant que le cas de l'amortissement sous-critique est celui pertinent pour la majorité des systèmes physiques rencontrés dans la pratique.

**a) Système non amorti  $\xi = 0$  :**

L'équation (V.23) se réduit à :

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (\text{V.27})$$

Dont la solution s'écrit pour des conditions initiales du déplacement  $u(0)$  et de la vitesse  $\dot{u}(0)$

$$u(t) = \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin(\omega t) + u(0) \cos(\omega t) \quad (\text{V.28})$$

Ou de façon équivalente

$$u(t) = \rho \cos(\omega t - \theta) \quad (\text{V.29})$$

$\rho$  désigne l'amplitude de la réponse et  $\theta$  la phase

$$\rho = \sqrt{u(0)^2 + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega}\right)^2} \quad (\text{V.30a})$$

$$\theta = \text{Arctg}\left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega u(0)}\right) \quad (\text{V.30b})$$

La figure V.6 représente la vibration du système au cours du temps. Celle-ci se reproduit à l'identique au bout d'un intervalle de temps égal à la période propre  $T=2\pi/\omega$  de l'oscillateur et se prolonge indéfiniment avec une amplitude maximale égale à  $\rho$ .

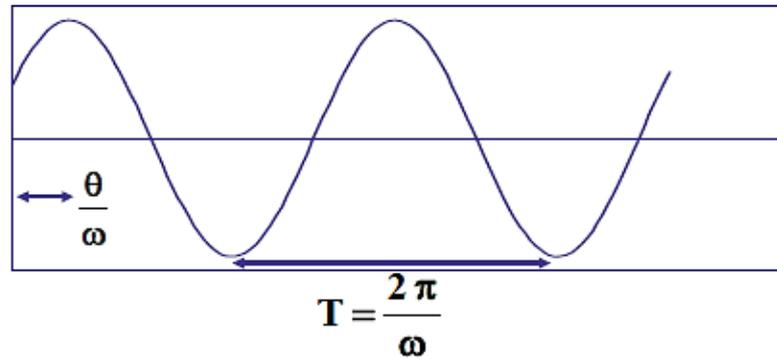


Figure V.6: vibration libre d'un système non amorti

### b) Système a amortissement sous-critique :

Ce cas correspond à  $\xi < 1$  et  $C < 2M\omega$ . La solution de l'équation (V.25) conduit aux deux solutions :

$$S = -\xi \omega \pm i \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (\text{V.31})$$

Introduisant la quantité

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (\text{V.32})$$

Appelée pulsation propre amortie, la réponse du système soumis aux mêmes conditions initiales s'écrit

$$u(t) = \left[ \frac{\dot{u}(0) + \xi \omega u(0)}{\omega_D} \sin(\omega_D t) + u(0) \cos(\omega_D t) \right] e^{-\xi \omega t} \quad (\text{V.33})$$

La solution (V.45) peut être écrite, de façon équivalente, en introduisant l'amplitude  $\rho$  et la phase  $\theta$  sous la forme :

$$u(t) = \rho e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_D t - \theta) \quad (\text{V.34})$$

Elle est représentée sur la figure V.7 en fonction du temps

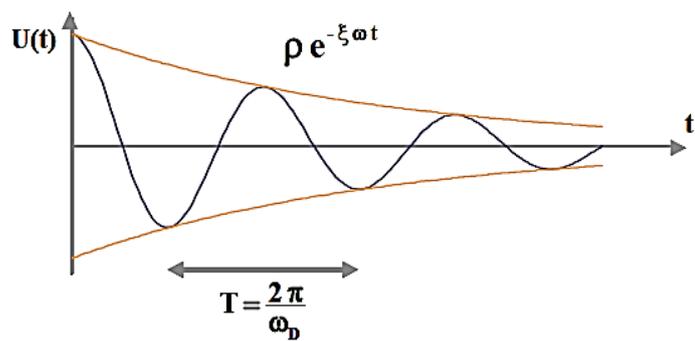


Figure V.7: vibration libre d'un système a amortissement sous-critique

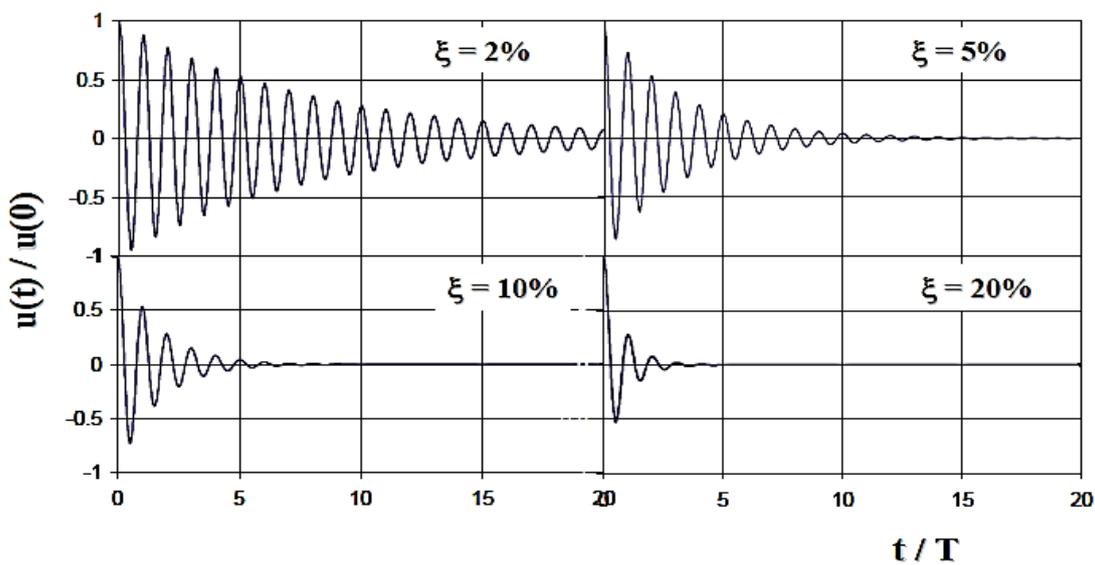


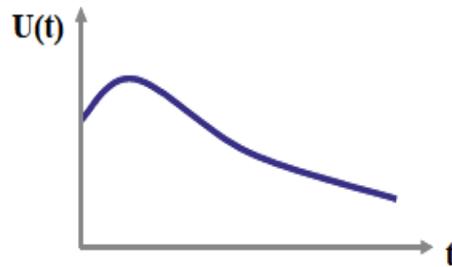
Figure V.8 : influence de l'amortissement sur la vibration libre d'un système sous-critique

**c) Système a amortissement critique :**

Ce cas correspond à  $\xi=1$  et  $C=2M\omega$ .

Sous les mêmes conditions initiales  $u(0)$  et  $\dot{u}(0)$ , la réponse du système s'écrit :

$$u(t) = [(1+\omega t) u(0) + t \dot{u}(0)]e^{-\omega t} \tag{V.35}$$



**Figure V.9:** vibration libre d'un système à amortissement critique

Ce cas correspond à  $\xi > 1$  et  $C > 2M\omega$ . La solution de l'équation (V.25) s'écrit :

$$u(t) = \left[ \frac{\dot{u}(0) + \xi\omega u(0)}{\hat{\omega}} \operatorname{sh}(\hat{\omega}t) + u(0) \operatorname{ch}(\hat{\omega}t) \right] e^{-\xi\omega t} \quad (\text{V.36})$$

Avec

$$\hat{\omega} = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (\text{V.37})$$

On notera que la vibration libre d'un système sur-amorti ne comporte pas d'oscillations et que le système revient à l'équilibre au bout d'un temps infini. La réponse est analogue à celle du système à amortissement critique mais le retour à l'équilibre s'effectue d'autant moins rapidement que le pourcentage d'amortissement critique est élevé.

#### V.1.4.2) Vibrations forcées :

Dans ce paragraphe, on s'intéressera au cas où les vibrations de l'oscillateur simple sont engendrées par une sollicitation  $p(t)$  directement appliquée à la masse  $M$ . On se restreindra dans la suite au cas d'un système à amortissement sous-critique, seul cas d'intérêt dans la pratique.

##### a) Sollicitation harmonique

La sollicitation appliquée  $p(t)$  est décrite par une expression :

$$p(t) = p_0 \sin(\omega t) \quad (\text{V.38})$$

L'équation générale dont on recherche la solution s'écrit :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega \dot{u} + \omega^2 u = \frac{p_0}{M} \sin(\overline{\omega}t) \quad (\text{V.39})$$

La solution générale s'écrit sous la forme de la solution générale de l'équation homogène (éq(V.33)), soit :

$$u(t) = A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t) \quad (\text{V.40})$$

et d'une solution particulière que l'on recherchera sous la forme :

$$u_1(t) = \lambda \sin(\omega t) + \mu \cos(\omega t) \quad (\text{V.41})$$

Reportant (V.41) dans (V.39) et identifiant les constants termes à terme, il vient en posant :

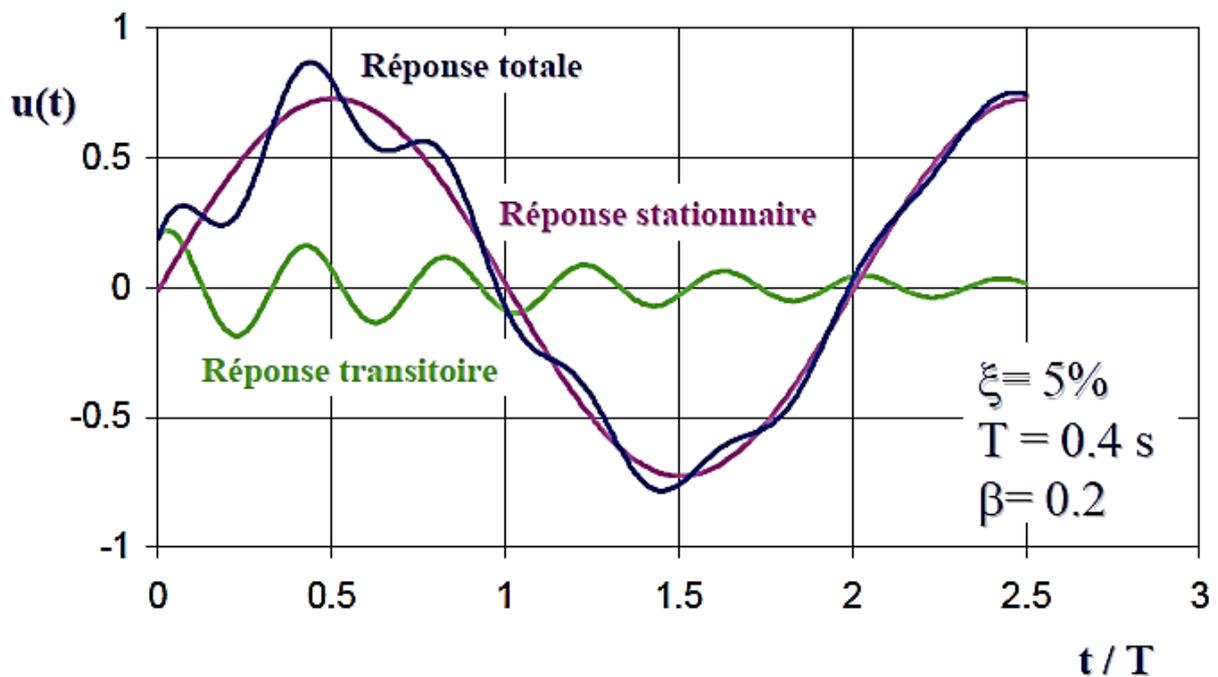
$$\beta = \frac{\overline{\omega}}{\omega} \quad (\text{V.42})$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} [A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t)] + \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1-\beta^2) \sin(\overline{\omega}t) - 2\xi\beta \cos(\overline{\omega}t)] \quad (\text{V.43})$$

Le premier terme de l'équation (V.43) constitue la réponse transitoire de l'oscillateur et le second la réponse forcée ou stationnaire de celui-ci (figure V.13).

La réponse transitoire s'amortit au cours du temps, d'autant plus rapidement que le pourcentage d'amortissement critique est élevé et la réponse tend vers la solution stationnaire. Cette réponse s'effectue alors avec une période  $T = 2\pi / \overline{\omega}$  égale à celle de la sollicitation.

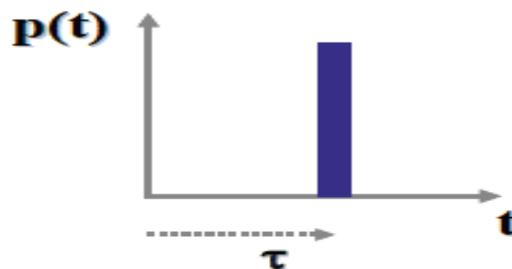
Dans l'équation (.43), les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales, vitesse et déplacement du système, à l'instant  $t = 0$ .



**Figure V.10:** réponse de l'oscillateur soumis à une sollicitation harmonique

#### b) SOLLICITATION IMPULSIVE

La sollicitation consiste en une impulsion appliquée soudainement à l'instant  $t=\tau$  (figure V.11).



**Figure V.11 :** Sollicitation impulsive

L'étude de la sollicitation impulsive revêt une importance toute particulière car, elle constitue la solution fondamentale élémentaire de la réponse de l'oscillateur, toute sollicitation générale pouvant être considérée comme une succession d'impulsions élémentaires.

Mathématiquement, la sollicitation impulsive est représentée par la fonction de Dirac  $\delta$  égale à l'infini au temps  $t=\tau$  et nulle pour les autres valeurs du temps, mais dont l'intégrale, appelée impulsion, est égale à l'unité :

$$p(t) = \delta(t - \tau) \quad (\text{V.44a})$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt \quad (\text{V.44b})$$

D'après l'équation fondamentale de la dynamique, la variation de la quantité de mouvement de la masse M est égale à la résultante des forces appliquées, soit :

$$\frac{d}{dt}(M\dot{u}) = p(t) - k u(t) - o\dot{u}(t) \quad (\text{V.45})$$

Si la force  $p(t)$  agit pendant une durée infiniment brève, le ressort et l'amortisseur n'ont pas le temps de développer des forces et les deux derniers termes du membre de droite de l'équation (V.45) sont nuls. Par intégration de l'équation (IV.45), il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = M \Delta\dot{u} \quad (\text{V.46})$$

Où  $\Delta\dot{u}$  représente la variation de vitesse communiquée à la masse M.

Pour un système initialement au repos ( $u = 0$ ), tenant compte de (V.44b) :

$$\dot{u}(\tau) = \frac{1}{m} \quad (\text{V.47a})$$

Par ailleurs, pour  $t \leq \tau$ , le déplacement est nul, soit :

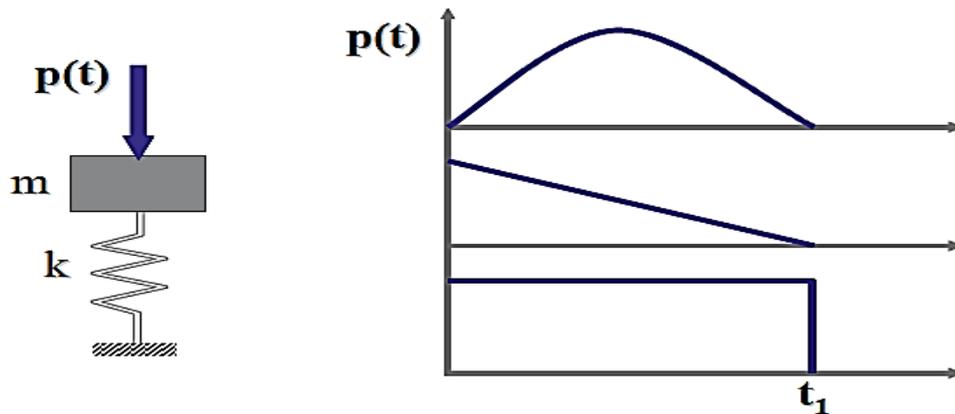
$$u(\tau) = 0 \quad (\text{V.47b})$$

Les relations (V.47) constituent les conditions initiales de la réponse vibratoire de l'oscillateur soumis à une impulsion unité à l'instant  $t = \tau$ . Pour les temps  $t > \tau$  la réponse de l'oscillateur correspondra à sa vibration libre. Son déplacement  $u(t)$  sera régi par l'équation ((V.33) dans laquelle les conditions initiales sont introduites :

$$u(t) \equiv h(t - \tau) = \frac{1}{m \omega_D} e^{-\xi \omega(t - \tau)} \sin [\omega_D(t - \tau)] \quad (\text{V.48})$$

Valable pour  $t \geq \tau$ .

$h(t-\tau)$  constitue la solution élémentaire pour une impulsion unité intervenant à l'instant  $t = \tau$ . Physiquement, une impulsion de durée nulle n'existe pas et toute impulsion a une durée finie  $t_1$ , très courte. Sa variation temporelle pendant la durée  $t$ , peut-être, par exemple sinusoïdale, triangulaire ou être représentée par un créneau (figure V.12). Ces situations se rencontrent par exemple dans le cas d'un choc mou, d'une explosion ou d'un choc dur.



**Figure V.12:** exemples d'impulsion

Pour ces sollicitations, une solution analytique explicite peut être obtenue pour la réponse de l'oscillateur. Cependant il est plus fécond de s'intéresser à la réponse maximale de l'oscillateur. Cette réponse peut se produire pendant la durée de l'impulsion ou pendant l'anaphase de vibration libre après la fin de l'impulsion.

Dans tous les cas, la réponse maximale est atteinte très rapidement et les forces d'amortissement n'ont pas le temps nécessaire pour absorber une énergie significative; il est donc licite de s'intéresser à la réponse maximale de l'oscillateur non amorti (figure V.12). Pour une force d'amplitude maximale  $p_0$ , on écrira que le déplacement maximal est égal à :

$$\text{Max } u(t) = \frac{p_0}{k} D \quad (\text{V.49})$$

Où  $D$  représente le coefficient d'amplification dynamique maximal. De façon générale, quelle que soit la forme de l'impulsion,  $D$  ne dépend que du rapport  $t_1/T$  de la durée de l'impulsion à la période propre de l'oscillateur. On peut donc représenter la variation de  $D$  en fonction de ce

paramètre. La figure (V.13) présente cette variation pour les trois types d'impulsion de la figure (V.12) Un graphique de ce type est dénommé spectre de choc.

On constate sur la figure (V.13) que la valeur de D est au plus égale à 2.0, ce qui justifie que dans les analyses d'impact il est souvent préconisé de retenir une force statique équivalente égale au double de la force appliquée.

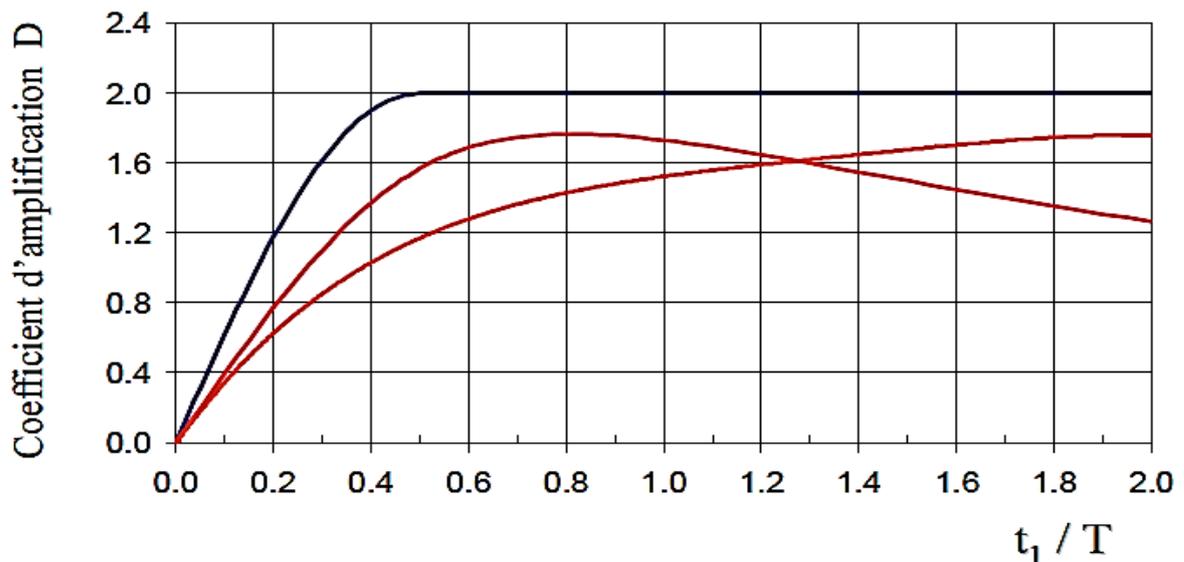


Figure V.13: spectres de choc

Pour des durées de choc telles que  $t_1/T < 0.5$ , la réponse maximale se produit pendant la phase de vibration libre suivant la phase d'impulsion et dépend de la valeur de l'impulsion totale

$$I = \int_0^{t_1} p(t) dt$$

### c) Sollicitation quelconque

La sollicitation est définie par sa variation temporelle  $p(t)$  qui peut toutefois être périodique ou totalement quelconque. Les techniques d'obtention de la solution diffèrent suivant cette particularité mais s'inspirent des développements présentés précédemment pour la sollicitation harmonique ou impulsive.

### d) Sollicitation périodique

Une fonction périodique, de période  $T_p$ , peut être décomposée en la somme d'un nombre infini d'harmoniques en utilisant les séries de Fourier.

$$P(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_p} t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_p} t\right) \quad (\text{V.50})$$

Que l'on peut également écrire de façon condensée en utilisant les nombres complexes :

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2i\pi k}{T_p} t} \quad (\text{V.51})$$

Les coefficients  $C_k$  sont les coefficients de Fourier de la fonction  $p(t)$ , donnés par :

$$C_k = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) e^{-\frac{2i\pi k}{T_p} t} dt \quad (\text{V.52})$$

L'expression des coefficients de Fourier est obtenue aisément en multipliant les deux membres de l'équation (V.51) par  $e^{-\frac{2i\pi k}{T_p} t}$  et en intégrant de 0 à  $T_p$  et en notant que les fonctions exponentielles sont orthogonales, autrement dit que l'intégrale de leur produit est nulle pour  $n \neq k$  et égale à  $T_p$  pour  $n = k$ .

Tenant compte de la relation linéaire (V.51), la réponse stationnaire de l'oscillateur est alors simplement obtenue en résolvant l'équation de la vibration forcée pour chaque harmonique  $\omega_k$  et en additionnant les réponses ainsi obtenues. En conservant les notations complexes introduites dans ce paragraphe, la solution pour une harmonique  $\omega_k$  d'amplitude unité s'écrit :

$$u(t) = H(\omega_k) e^{i\omega_k t} \quad (\text{V.53})$$

où

$$H(\omega_k) = \frac{1}{k} \frac{1}{(1-\beta^2) + 2i\beta\xi}, \quad \beta = \frac{\omega_k}{\omega} = \frac{2\pi k}{T_p} \frac{1}{\omega} \quad (\text{V.54})$$

La quantité  $H(\omega_k)$  représente la fonction de transfert de l'oscillateur simple, c'est-à-dire sa réponse lorsqu'il est soumis à une sollicitation harmonique d'amplitude unité.

La réponse stationnaire de l'oscillateur soumis à la sollicitation  $p(t)$  est alors donnée par :

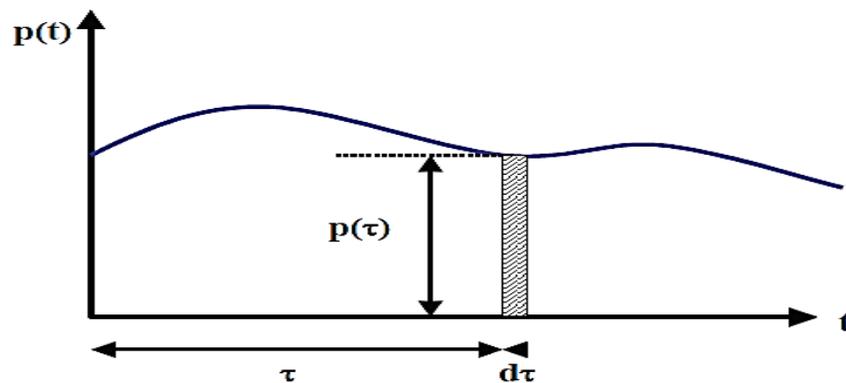
$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H\left(\frac{2\pi k}{T_p}\right) e^{\frac{2i\pi k}{T_p} t} \quad (\text{IV.55})$$

## e) Sollicitation non périodique :

Toute sollicitation quelconque  $p(t)$  peut être considérée comme égale à la somme d'impulsions  $p(\tau)d\tau$  agissant à l'instant  $t = \tau$  (figure V.14).

Cette impulsion produit la réponse dont la solution élémentaire est donnée par l'équation (IV.48). Le déplacement incrémental vaut donc

$$d u(t) = h(t- \tau) p(\tau)d\tau \quad (V.56)$$



**Figure V.14:** principe d'obtention de l'intégrale de Duhamel

La réponse à l'instant  $t$  est la somme des réponses aux impulsions produites aux temps  $\tau < t$ , soit :

$$u(t) = \frac{1}{m \omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi \omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau \quad (V.57)$$

Cette intégrale de convolution est connue sous le nom d'intégrale de Duhamel caractérisant la réponse d'un oscillateur simple initialement au repos à une sollicitation quelconque  $p(t)$ . Si  $p(t)$  n'est pas connue analytiquement, ou est représentée par une fonction compliquée, l'intégrale de Duhamel doit être évaluée numériquement. Cette intégration numérique ne se révèle pas particulièrement compétitive et il est souvent préférable d'intégrer directement l'équation différentielle régissant l'équilibre dynamique de l'oscillateur

Une méthode alternative d'obtention de la réponse de l'oscillateur à une sollicitation quelconque est similaire à celle décrite pour une sollicitation périodique; elle fait appel à la

transformée de Fourier de la fonction  $p(t)$  qui s'exprime non plus en fonction d'une série, mais d'une intégrale :

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{V.58})$$

$P(\omega)$  est la transformée de Fourier de la fonction  $p(t)$  et s'exprime :

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) e^{i\omega t} dt \quad (\text{V.59})$$

De façon analogue à l'équation (2.83), la réponse de l'oscillateur est :

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) p(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{V.60})$$

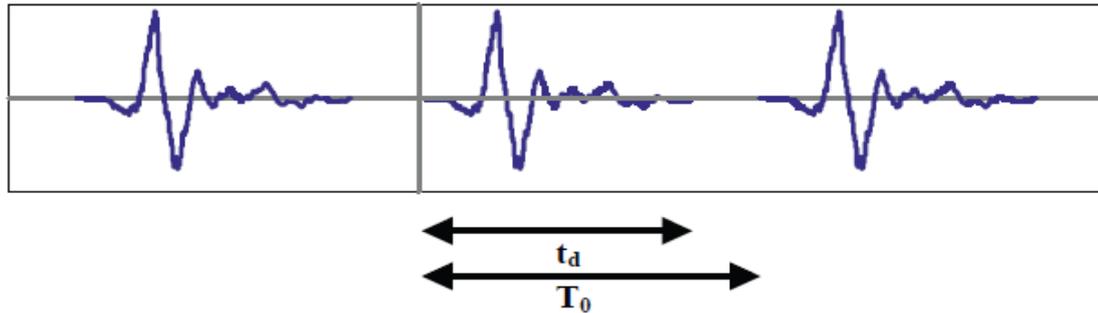
Si l'évaluation de l'intégrale (V.59) pour la détermination de la transformée de Fourier ne pose pas de difficulté, l'évaluation de la transformée de Fourier inverse (équation V.60) nécessite le recours à une intégration le long de contours dans le plan complexe. Cette technique n'est jamais utilisée dans la pratique car difficile de mise en œuvre analytiquement.

L'intégration numérique de ces intégrales nécessite de les tronquer pour les restreindre à un intervalle fini; cette troncature est mathématiquement équivalente à rendre la fonction  $p(t)$  périodique.

Considérons donc une sollicitation  $p(t)$  de durée finie  $t_d$ . La réponse maximale de l'oscillateur à cette sollicitation peut intervenir après la fin de la sollicitation; il est donc nécessaire de déterminer cette réponse sur une durée  $T_0$  suffisamment longue. Typiquement, si la réponse maximale se produit après la fin de la sollicitation, elle sera atteinte au cours du premier demi-cycle de vibration libre puisque, en raison de l'amortissement, cette réponse s'atténue au cours du temps. La durée d'analyse doit donc être telle que :

$$T_0 \geq t_d + \frac{T}{2} \quad (\text{V.61})$$

Où  $T$  est la période propre de l'oscillateur.



**Figure V.15:** Extension périodique de la sollicitation

Si au-delà d'un temps supérieur à  $T_0$ , la fonction  $p(t)$  est reproduite à l'identique (figure V.15), la sollicitation est rendue périodique et susceptible pour les sollicitations périodiques.

La solution est donc obtenue en exprimant cette fonction périodique en série de Fourier, en résolvant l'équation d'équilibre pour chaque harmonique et en superposant les réponses. On dit que la réponse est obtenue par analyse fréquentielle.

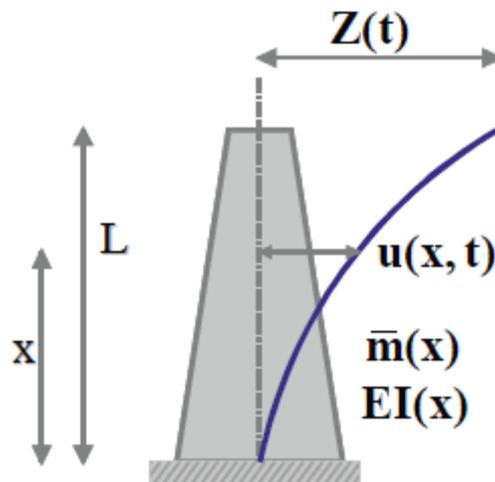
### V.1.5) Oscillateur simple généralisé

L'étude de l'oscillateur simple à 1 degré de liberté ne se restreint pas à l'étude d'un système masse-ressort-amortisseur. On a montré que moyennant l'introduction de grandeurs généralisées (masse  $m^*$ , raideur  $k^*$ , amortisseur  $c^*$  et chargement  $p^*$ ), l'équation différentielle régissant l'équilibre dynamique du système se ramenait à celle de l'oscillateur à 1 degré de liberté. Ce concept peut être généralisé à l'étude de systèmes possédant une flexibilité distribuée sur l'ensemble de la structure, comme par exemple une poutre en flexion. En toute théorie, la poutre possède un nombre infini de degrés de liberté cependant en admettant que la déformée de la poutre ne peut prendre qu'une forme unique, il est possible de ramener l'étude de cette structure à celle d'un oscillateur à 1 degré de liberté. Cette méthode, alliée à un choix pertinent de la forme pré-supposée de la déformée, se révèle féconde pour l'obtention de solutions approchées de la réponse vibratoire. La méthode sera illustrée sur l'exemple simple d'une poutre console (figure V.16), mais est d'application plus générale.

### V.1.5.1) Equation d'équilibre dynamique :

La poutre console de la figure (V.16) est caractérisée par une rigidité en flexion  $EI(x)$  variable sur sa hauteur, et une masse représentée par une variation  $m(x)$  de la masse linéique. Ce système possède une infinité de degrés de liberté représentés par le déplacement horizontal et la rotation de tout point  $M$  de la fibre neutre. Pour ramener ce système à un oscillateur à 1 degré de liberté, il est nécessaire de supposer que la déformée de la poutre s'exprime à l'aide d'une fonction unique  $\Psi(x)$  et que l'amplitude du déplacement d'un point quelconque de la poutre s'exprime par :

$$u(x,t) = \psi(x)Z(t) \quad (V.62)$$



**Figure V.16:** poutre console

Où  $Z(t)$  représente la variation temporelle du déplacement.  $Z(t)$  est appelé coordonnée généralisée. Typiquement  $Z(t)$  est choisi comme étant le déplacement d'un point particulier de la poutre, par exemple son extrémité supérieure.

L'équation différentielle régissant l'équilibre dynamique de ce système peut être obtenue à partir du principe des puissances virtuelles.

Soit  $p(x,t)$  la distribution des efforts extérieurs appliqués le long de la poutre; pour toute vitesse virtuelle,  $\delta\dot{u}$ , la puissance des efforts extérieurs est donnée par:

$$P_e(\delta\hat{u}) = \int_0^L p(x, t) \delta\hat{u} dx \quad (\text{V.63})$$

Les efforts intérieurs sont représentés par le moment de flexion  $M(x,t)$  dans toute section de la poutre; la puissance des efforts intérieurs pour toute vitesse de rotation  $\delta\hat{R}$  est donnée par :

$$P_i(\delta\hat{R}) = -\int_0^L M(x, t) d(\delta\hat{R}) dx = -\int_0^L EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d(\delta\hat{R}) dx \quad (\text{V.64})$$

La puissance des quantités d'accélération a pour expression :

$$A(\delta\hat{u}) = \int_0^L m(x) \ddot{u}(x, t) \delta\hat{u} dx \quad (\text{V.67})$$

Tenant compte de la relation (V.62), il vient :

$$\ddot{u}(x,t) = \psi(x) \ddot{Z}(t) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \psi''(x) Z(t) \quad (\text{V.68})$$

et les vitesses virtuelles  $\delta\hat{u}$  et  $\delta\hat{R}$  s'expriment par :

$$\delta\hat{u} = \psi(x) \delta\hat{Z} \quad , \quad \delta\hat{R} = \psi'(x) \delta\hat{Z} \quad (\text{V.69})$$

Reportant les expressions (V.68) et (V.69) dans les relations (V.63) à (V.67) :

$$P_e(\delta\hat{u}) = \int_0^L p(x, t) \psi(x) \delta\hat{Z} dx = p^* \delta\hat{Z} \quad (\text{V.70a})$$

$$P_i(\delta\hat{R}) = -\int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 Z(t) \delta\hat{Z} dx = -k^* Z(t) \delta\hat{Z} \quad (\text{V.70b})$$

$$A(\delta\hat{u}) = \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 \ddot{Z}(t) \delta\hat{Z} dx = m^* \ddot{Z}(t) \delta\hat{Z} \quad (\text{V.70c})$$

L'expression du principe des puissances virtuelles

$$P_i(\delta\hat{R}) + P_e(\delta\hat{u}) = A(\delta\hat{u}) \quad (\text{V.71})$$

Conduit à l'équation :

$$[m^* \ddot{Z}(t) + k^* Z(t) - p^*(t)] \delta\hat{Z} = 0 \quad (\text{V.72})$$

valable pour toute vitesse virtuelle  $\delta\hat{Z}$ . Il s'ensuit que :

$$m^* \ddot{Z}(t) + k^* Z(t) = p^*(t) \quad (\text{V.73})$$

dans laquelle on reconnaît l'équation différentielle de l'oscillateur simple à 1 degré de liberté. La pulsation propre de cet oscillateur est donnée par :

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \quad (\text{V.74})$$

### ➤ Méthode de Rayleigh

L'introduction de coordonnées généralisées a permis de réduire un système à un nombre infini de degrés de liberté à un oscillateur simple pour lequel la pulsation propre est calculée par l'équation (V.74)

Ce résultat pour la pulsation propre peut être obtenu de façon équivalente par des considérations énergétiques. Elle est connue sous le nom de méthode de Rayleigh. Pour un système conservatif isolé, la somme de l'énergie potentielle  $V$  et de l'énergie cinétique  $T$  est constante.

Lorsque l'énergie potentielle est maximale, l'énergie cinétique est nulle. De même, lorsque l'énergie cinétique est maximale, l'énergie potentielle est nulle. La conservation de l'énergie totale implique donc :

$$V_{\max} = T_{\max} \quad (\text{V.75})$$

En vibration libre, le déplacement  $u(x,t)$  est donné :

$$u(x, t) = \psi(x)Z_0 \sin(\omega t) \quad (\text{V.76})$$

qui est l'analogie de (IV.74) pour une vibration harmonique. La vitesse vaut alors

$$\ddot{u}(x, t) = \omega\psi(x)Z_0 \cos(\omega t) \quad (\text{V.77})$$

et les énergies potentielle et cinétique de la poutre en flexion prennent les valeurs :

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (\text{V.78a})$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \dot{u}^2 dx \quad (\text{V.78b})$$

Reportant (V.76) et (V.77) dans (V.78) :

$$V_{max} = \frac{1}{2} Z_0^2 \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx \quad (\text{V.79})$$

$$T_{max} = \frac{1}{2} Z_0^2 \omega^2 \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx$$

et tenant compte de la relation (V.79), on en déduit la pulsation propre  $\omega^2$

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx}{\int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx} \quad (\text{V.80})$$

dans laquelle on reconnaît au numérateur l'expression de la raideur généralisée et au dénominateur celle de la masse généralisée (équations V.70).

## V.2) OSCILLATEUR A N DEGRES DE LIBERTE

### V.2.1) Introduction :

On a vu qu'il était possible de réduire l'étude dynamique d'une structure à celle d'un système à 1 degré de liberté, dont l'équilibre dynamique est régi par une équation différentielle du second ordre. Cette configuration se rencontre lorsque le mouvement de la structure réelle est contraint par des conditions aux limites permettant de décrire sa cinématique par le mouvement d'un seul point. Cependant, en règle générale, une structure possède plusieurs degrés de liberté et la réduction à un degré de liberté, obtenue en se donnant a priori la déformée  $\psi(x)$  de la structure, ne permet l'obtention que d'une solution approchée de la réponse. La difficulté réside alors dans l'évaluation de la qualité de l'approximation. Si les conditions aux limites et le chargement de la structure qui, rappelons-le, est induit par les forces d'inerties dépendant de la distribution des masses, sont tels que le mouvement de la structure s'effectue effectivement de façon préférentielle suivant cette déformée, alors l'approximation sera acceptable, et utile pour l'obtention d'une solution rapide. Dans les autres cas, l'approximation est médiocre et il convient de décrire la réponse dynamique de la structure par les mouvements d'un nombre, fini ou infini, de points de celle-ci. Comme on l'a indiqué au chapitre 1, les degrés de liberté d'une structure peuvent être représentés par le déplacement d'un nombre fini de points, ou par l'introduction de coordonnées généralisées représentant les amplitudes d'un nombre spécifié de déformées.

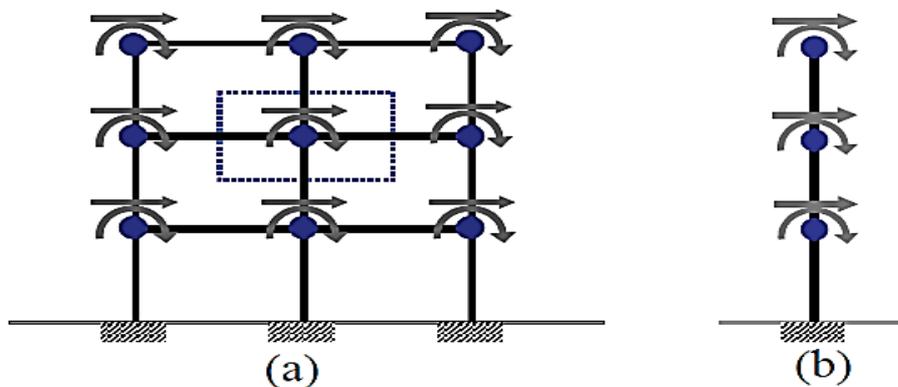
### V.2.2) Equation de l'équilibre dynamique :

#### V.2.2.1) Masses concentrées :

Rappelons que le nombre de degrés de liberté d'un système est le nombre de composantes du déplacement requises pour exprimer les forces d'inertie se développant dans celui-ci. Ces déplacements sont évalués en un nombre de points de la structure, appelés nœuds où sont concentrées les masses. Dans le cas le plus général, un nœud possède six mouvements possibles (3 translations et 3 rotations) et le nombre de degrés de liberté du système est égal à  $N=6p$  où  $p$  est le nombre de nœuds. La figure 6.1 présente deux exemples de modélisations de structures planes entrant dans ce cadre. Dans le cas du portique à deux travées, les degrés de liberté sont constitués par les déplacements des nœuds situés à l'intersection des poteaux et des poutres, les masses de la structure sont concentrées en ces nœuds. A chaque nœud est

affectée la masse des éléments de poteaux et planchers localisés à son voisinage et symbolisés sur la figure 6.1 par le rectangle pointillé pour le nœud central. Si la raideur axiale des poteaux est infinie, les seuls mouvements possibles des nœuds sont la translation horizontale et la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, soit un nombre de degrés de liberté égal à  $2p=12$ .

Si de plus les planchers sont considérés comme infiniment rigides, la cinématique d'un niveau de plancher est décrite par le mouvement d'un de ses points; on aboutit au modèle "brochette" de la figure 6.1b, dans lequel la masse d'un niveau est concentrée en un point et la raideur en flexion-cisaillement des poutres verticales est égale à la somme des raideurs des poteaux d'un niveau. Le nombre de degrés de liberté a été réduit dans le cas présent à  $2p=6$ .



**Figure V.17:** Modélisation en masses concentrées

L'équation d'équilibre dynamique d'un système du type de celui de la figure 4.17 peut être obtenue par la méthode directe en écrivant en chaque nœud et pour chaque degré de liberté que la résultante des forces est nulle. Ces forces se composent de :

- forces élastiques  $\underline{f}_S$
- forces d'amortissement  $\underline{f}_D$
- forces d'inertie  $\underline{f}_I$
- forces appliquées extérieures  $\underline{p}$

L'équilibre général du système s'exprime, pour chaque degré de liberté  $i$  :

$$\underline{f}_{Si} + \underline{f}_{Di} + \underline{f}_{Ii} = \underline{p}_i \quad (\text{V.80})$$

en supposant que le principe de superposition est valide, et donc que le système est linéaire, la force élastique développée suivant le degré de liberté  $i$  s'exprime par :

$$f_{Si} = k_{i1} u_1 + k_{i2} u_2 + \dots = \sum_{j=1}^N k_{ij} u_j \quad (\text{V.82a})$$

soit pour l'ensemble des degrés de liberté, sous la forme matricielle :

$$F_S = K U \quad (\text{V.82b})$$

En supposant que les forces d'amortissement sont d'origine visqueuse, et dépendent donc de la vitesse, on peut écrire de façon similaire :

$$f_{Di} = c_{i1} \dot{u}_1 + c_{i2} \dot{u}_2 + \dots = \sum_{j=1}^N c_{ij} \dot{u}_j \quad (\text{V.83a})$$

soit sous forme matricielle :

$$F_D = C \dot{U} \quad (\text{V.83b})$$

Les coefficients  $c_{ij}$  sont les coefficients de la matrice d'amortissement du système. Le coefficient  $c_{ij}$  représente la force engendrée suivant le degré de liberté  $i$  par une vitesse unité imposée au degré de liberté  $j$ .

Finalement les forces d'inertie peuvent être exprimées de façon similaire :

$$f_{Ii} = m_{i1} \ddot{u}_1 + m_{i2} \ddot{u}_2 + \dots = \sum_{j=1}^N m_{ij} \ddot{u}_j \quad (\text{V.84a})$$

Soit sous forme matricielle :

$$F_I = M \ddot{U} \quad (\text{V.84b})$$

La matrice des coefficients  $m_{ij}$  est la matrice de masse du système.

Le coefficient  $m_{ij}$  représente la force engendrée suivant le degré de liberté  $i$  par une accélération unité imposée au degré de liberté  $j$ .

Regroupant les équations (V.82b), (V.83b) et (V.84b), l'équation d'équilibre dynamique du système s'écrit sous forme matricielle :

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = P(t) \quad (V.85)$$

Les matrices M, C et K ont pour dimensions NxN, et les matrices U et P pour dimensions Nx1 où N représente le nombre de degrés de liberté du système (égal au nombre de nœuds multiplié par le nombre de déplacements possibles du nœud).

### V.2.2.2) Coordonnées généralisées :

Dénotons par q le vecteur des N coordonnées généralisées du système, N étant le nombre de degrés de liberté. On postule que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle s'expriment par les formes quadratiques suivantes :

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \quad (V.86)$$

$$V = \frac{1}{2} q^T K q \quad (V.87)$$

Les forces généralisées, qui incluent les forces extérieures et les forces non conservatives, sont représentées par le vecteur Q, que par analogie avec l'oscillateur à un degré de liberté, on écrira

$$Q = P - C \dot{q} \quad (V.88)$$

Où P représente les charges appliquées. Les équations de Lagrange du système s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}(M \dot{q}) + K q = P - C \quad (V.89)$$

$$\text{Soit} \quad M \ddot{q} + C \dot{q} + K q = P(t) \quad (V.90)$$

L'équation (V.90) a une structure identique à celle de l'équation (V.85), les inconnues n'étant plus les déplacements des nœuds où sont concentrées les masses, mais les coordonnées généralisées. L'évaluation des matrices M, K et C est liée à la discrétisation spatiale du système.

### V.2.3) Structure et propriétés de la matrice de raideur

#### V.2.3.1) Construction de la matrice de raideur :

La définition de la matrice de raideur montre que le terme  $k_{ij}$  de la matrice est égal à la force qu'il faut appliquer au degré de liberté  $i$  pour maintenir son déplacement nul sous l'effet d'un déplacement unitaire appliqué au seul degré de liberté  $j$ ; en particulier le terme  $k_{ii}$  est égal à la force qu'il faut appliquer au degré de liberté  $i$  pour lui imposer un déplacement unitaire tout en maintenant nuls les autres degrés de liberté.

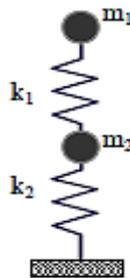


Figure V.18: système masse –ressort à deux degrés liberté

#### a) La structure de la matrice $K$ :

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{pmatrix} \quad (\text{V.91})$$

Dans le cadre d'une formulation à l'aide des coordonnées généralisées, la construction de la matrice  $K$  s'appuie sur le principe des puissances virtuelles.

Par exemple à l'étude des déplacements transverses de la poutre, il existe quatre degrés de liberté pour la poutre (déplacements transverses et rotations des deux extrémités de la poutre); le déplacement de tout point de la poutre s'exprime par :

$$u(x) = \sum \Psi_i(x) u_i \quad (\text{V.91.1})$$



La puissance des efforts intérieurs, en négligeant la contribution de l'effort tranchant (poutre en flexion), s'écrit :

$$P_i(\delta\hat{u}) = - \int_0^L M(x) d(\delta\hat{R}) \quad (\text{V.91.5})$$

où  $\delta\hat{R}$  est la vitesse de rotation virtuelle associée à  $\delta\hat{u}_1$ . Par définition de  $\psi_1(x)$ , la vitesse virtuelle  $\delta\hat{u}_1$ , induit en tout point de la poutre une vitesse  $\psi_1(x) \delta\hat{u}_1$  et donc une vitesse de rotation  $\delta\hat{R} = \psi_1(x)' \delta\hat{u}_1 \Rightarrow d(\delta\hat{R}) = \psi_1(x)'' \delta\hat{u}_1 dx$

L'équation (V.91.5) devient en tenant compte de (V.91.2):

$$P_i(\delta\hat{u}) = - \int_0^L EI(x) \psi_1(x)'' \psi_2(x)'' \delta\hat{u}_1 dx \quad (\text{V.91.6})$$

La puissance des quantités d'accélération étant nul (problème statique), le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$P_e(\delta\hat{u}) + P_i(\delta\hat{u}) = 0 \quad (\text{V.91.7})$$

valable pour tout champ de vitesse virtuelle  $\delta\hat{u}$  ; il en résulte :

$$k_{12} = \int_0^L EI(x) \psi_1(x)'' \psi_2(x)'' dx \quad (\text{V.91.8})$$

De façon générale, le terme  $k_{ij}$  de la matrice de raideur s'obtient par :

$$k_{ij} = \int_0^L EI(x) \psi_i(x)'' \psi_j(x)'' dx \quad (\text{V.91.9})$$

### b) Propriétés de la matrice k

L'énergie élastique emmagasinée dans la structure sous l'action d'un champ de forces P appliqué aux degrés de liberté du système est une quantité positive qui vaut :

$$V = \frac{1}{2} U^T P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i u_i \quad (\text{V.92})$$

En tenant compte de la définition de la matrice de raideur l'énergie élastique s'exprime également par :

$$V = \frac{1}{2} U^T K U \quad (\text{V.93})$$

Cette quantité étant positive, il s'ensuit que la matrice  $K$  est définie positive. Elle possède donc une inverse, appelée matrice de flexibilité :

$$S = K^{-1} \quad (\text{V.94})$$

Par ailleurs, la matrice  $K$  est symétrique. Ce résultat, évident pour l'élément de poutre, peut être obtenu de façon plus générale par application du théorème de Betti. Ce théorème exprime le résultat suivant : soit deux champs de forces  $P_1$  et  $P_2$  induisant des champs de déplacements  $U_1$  et  $U_2$ , alors le travail de  $P_1$  dans le champ  $U_2$  est égal au travail de  $P_2$  dans le champ  $U_1$ .

$$P_1^T U_2 = P_2^T U_1 \quad (\text{V.95})$$

Tenant compte de  $P_i = K U_i$ ,

Soit d'après le **théorème de Betti** :

$$K^T = K \quad (\text{V.96})$$

### c) Structure de la matrice $k$

La formulation de la matrice  $K$  dans le cadre de la méthode des éléments finis ne conduit pas à une matrice pleine dans laquelle tous les coefficients sont non nuls. Au contraire le couplage entre nœuds n'existe que pour les nœuds adjacents. Il en résulte qu'un grand nombre de termes sont nuls et que la matrice  $K$  a une structure bande. Par exemple dans le cas d'une poutre droite, la matrice  $K$  sera tridiagonale.



soit nécessairement significatif. Aussi bien souvent, dans la pratique, on privilégie l'utilisation d'une matrice masse diagonale.

#### V.2.4) Vibrations libres non amorties :

La vibration libre du système est solution de l'équation (V.85) ou (V.90), dans laquelle le terme d'amortissement est pris égal à 0 et les forces extérieures appliquées sont nulles :

$$M\ddot{U} + KU = 0 \quad (\text{V.100})$$

Une solution particulière de ce système d'équations différentielles est de la forme :

$$U = D\sin(\omega t + \theta) \quad (\text{V.101})$$

Reportant (V.100) dans (V.101), il vient :

$$[K - \omega^2 M]D = 0 \quad (\text{V.102})$$

Le système matriciel (V.36) n'a de solution non triviale ( $D \neq 0$ ) que si, et seulement si, son déterminant est nul.

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (\text{V.103})$$

Les matrices  $K$  et  $M$  étant définies positives, il en résulte que l'équation (V.103) possède  $N$  racines réelles  $\omega_i^2$  où  $N$  est la dimension des matrices  $K$  et  $M$ , c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté du système. Ces racines sont les valeurs propres du système (V.102).

On nomme fréquence propre du système les quantités

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad (\text{V.104})$$

A chaque valeur propre  $\omega_i^2$  est associé un vecteur propre  $D_i$ , solution de l'équation :

$$[K - \omega_i^2 M]D_i = 0 \quad (\text{V.105})$$

Le système possède  $N$  vecteurs propres associés aux valeurs propres. Ces vecteurs propres sont appelés modes propres du système.

La solution générale de l'équation (V.102) s'écrit alors

$$U = \sum_{i=1}^N D_i \sin(\omega_i t + \theta_i) \quad (\text{V.106})$$

Où les constantes  $\theta_i$  sont déterminées par les conditions initiales et les  $D_i$  sont définis à une constante multiplicative près.

### V.2.4.1) Propriétés des modes propres

Les modes propres, solutions de l'équation (V.105), possèdent la propriété fondamentale d'être Orthogonaux 2 par 2 par rapport aux matrices de masse et de raideur.

$$D_m^T M D_n^T = 1 \quad \text{si } n=m \quad (\text{V.106a})$$

$$D_m^T M D_n^T = 0 \quad \text{si } n \neq m \quad (\text{V.106b})$$

La démonstration de la relation (V.106a) s'obtient par application du théorème de Betti aux forces d'inertie. Les forces d'inertie  $f_{In}$  (respectivement  $f_{Im}$ ) engendrent les déplacements  $D_n$  (respectivement  $D_m$ ), donc :

$$f_{Im}^T D_n = f_{In}^T D_m \quad (\text{V.107})$$

Par définition des forces d'inertie

$$f_{Im}^T D_n = -\omega_m^2 [M D_m]^T D_n = -\omega_m^2 D_m^T M D_n \quad (\text{V.108a})$$

$$f_{In}^T D_m = -\omega_n^2 [M D_n]^T D_m = -\omega_n^2 D_n^T M D_m \quad (\text{V.108b})$$

Par soustraction des équations (V.108a) et (V.108b) et en transposant la deuxième équation, il vient :

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2) D_m^T M D_n = 0 \quad (\text{V.109})$$

Lorsque  $\omega_n$  est différent de  $\omega_m$ , la propriété (V.108a) en découle. La propriété (V.108b) s'obtient en notant que  $D$  étant solution de (V.102):

$$\omega_n^2 M D_n = K D_n \quad (\text{V.110})$$

Soit en pré-multipliant par  $D_m^T$

$$\omega_n^2 D_m^T M D_n = D_m^T K D_n \quad (\text{V.111})$$

ce qui compte tenu de (V.106) achève la démonstration.

La propriété d'orthogonalité des modes propres permet d'exprimer les pulsations propres  $\omega_i$

en fonction des modes propres : reprenant l'équation (V.105) et pré-multipliant par  $D_m^T$ , il

vient du fait de (V.106):

$$\omega_i^2 = \frac{D_i^T K D_i}{D_i^T M D_i} \quad (\text{V.112})$$

#### V.2.4.2) Normalisation des modes propres :

Les modes propres sont définis à une constante multiplicative près. Cette constante peut être choisie de façon que :

- le déplacement d'un nœud particulier, par exemple le nœud 1 du portique de la, soit toujours égal à 1 dans tous les modes;
- le plus grand déplacement d'un nœud dans le mode considéré soit égal à 1;
- les modes propres soient normalisés par rapport à la matrice K ou à la matrice M

$$D_i^T K D_i = 1$$

$$D_i^T M D_i = 1$$

Dans les programmes de calculs éléments finis, c'est généralement cette dernière méthode qui est retenue et le plus souvent la normalisation est effectuée par rapport à la matrice de masse.

#### V.2.5) Vibration forcées non amorties :

➤ **Découplage des équations du mouvement**

L'équation générale du mouvement (V.85) se réduit en l'absence de termes d'amortissement à :

$$M\ddot{U} + KU = p(t) \quad (\text{V.113})$$

Du fait de la structure non diagonale de la matrice K, et bien que la matrice M puisse souvent être considérée comme diagonale, il existe un couplage entre les degrés de liberté du système : l'équation de rang i du système (V.113) fait intervenir non seulement le degré de liberté  $u_i$  mais également des degrés de liberté  $u_k$  ( $k \neq i$ ).

Afin de découpler les équations (V.113), on utilise la propriété d'orthogonalité des modes propres. La base des modes propres constitue une base orthogonale complète qui permet d'exprimer tout déplacement U sur cette base :

$$u = \sum_{i=1}^N D_i y_i(t) \quad (\text{V.114})$$

Où  $y_i(t)$  joue le rôle de coordonnée généralisée et  $D_i$  le rôle de fonction de forme du déplacement.

Reportant l'équation (V.114) dans (V.112), pré-multipliant par  $D_j^T$  les deux membres de l'équation, il vient :

$$D_j^T M \sum_{i=1}^N D_i \ddot{y}_i(t) + D_j^T K \sum_{i=1}^N D_i y_i(t) = D_j^T P \quad (\text{V.115})$$

Tenant alors compte de la propriété d'orthogonalité (V.106), l'équation (V.115) se réduit à :

$$D_j^T M D_j \ddot{y}_j(t) + D_j^T K D_j y_j(t) = D_j^T P \quad j=1, N \quad (\text{V.116})$$

Définissant les quantités suivantes :

- masse généralisée  $m_j = D_j^T M D_j$

- raideur généralisée  $k_j = D_j^T K D_j$
- chargement généralisé  $p_j = D_j^T P$

L'équation (V.116) s'écrit :

$$\ddot{y}_j(t) + \omega_j^2 y_j(t) = \frac{p_j(t)}{m_j} \quad j=1,N \quad (\text{V.117})$$

Dans laquelle on a posé :

$$\omega_j^2 = \frac{k_j}{m_j} \quad (\text{V.118})$$

Sous la forme (V.117) on reconnaît l'équation d'équilibre dynamique de l'oscillateur simple à un degré de liberté.

Ainsi, l'utilisation de la base modale a permis la transformation du système (V.112) de N équations différentielles couplées en N équations différentielles découplées (V.117), avec  $j=1,N$ ). La solution  $y_j$  de chacune de ces équations est obtenue par les techniques intégrales de Duhamel, transformation de Fourier et la solution générale est donnée par l'équation (V.114)

### ➤ Calcul des efforts

Une fois les déplacements  $U$  déterminés, les efforts dans la structure s'obtiennent par :

$$F = K U \quad (\text{V.119})$$

Soit pour chaque mode propre :

$$F_j = K U_j = K D_j y_j(t) \quad (\text{V.120})$$

Tenant compte du fait que  $D_j$  est un vecteur propre (V.105) :

$$K D_j = \omega_j^2 M D_j$$

et (V.120) peut également s'écrire :

$$F_j = \omega_j^2 M D_j y_j(t) \quad j=1,N \quad (V.121)$$

Sous cette forme on reconnaît que la force  $F_j$  est le produit d'une masse par une quantité qui a la dimension d'une accélération.

Du fait de la structure diagonale de la matrice  $M$ , la formulation (V.121) est préférable à la formulation (V.119) car elle nécessite moins d'opérations : la force au degré de liberté  $i$  dans le mode  $j$  s'écrit simplement :

$$f_{ij} = \omega_j^2 \left( \sum_{k=1}^N m_{ik} d_{kj} \right) y_j(t) = \omega_j^2 m_{ii} d_{ij} y_j(t) \quad (V.122)$$

La résultante globale des efforts résulte de la superposition de tous les modes :

$$F = \sum_{j=1}^N F_j = \sum_{j=1}^N \omega_j^2 M D_j y_j(t) \quad (V.123)$$

On retiendra qu'un système à  $N$  degrés de liberté possède  $N$  fréquences propres réelles et  $N$  modes propres associés.

Ces modes propres constituent une base orthogonale complète. La base des modes propres, dénommée base modale, permet donc d'exprimer un déplacement quelconque du système en fonction des déformées modales.

# **CHAPITRE VI**

## **Analyse des structures à paramètres incertains**

## Chapitre VI : [15] [16] [17]

## PRESENTATION DES METHODES INTERVALLES

## VI.1) Intervalle et intervalle d'extension :

Dans cette section, nous allons donner une brève présentation sur analyse intervalle.

On suppose que  $I(\mathbb{R})$ ,  $I(\mathbb{R}^n)$  et  $I(\mathbb{R}^{m \times n})$  l'ensemble de tous les intervalles réels fermés : intervalle vecteur et intervalle matrice respectivement.  $X^I = [\underline{x}, \bar{x}]$  fait partie de  $I(\mathbb{R})$ .

$X^I$  peut être écrit aussi sous la forme suivante :

$$X^I = [X^c - \Delta X, X^c + \Delta X] \quad (\text{VI.1})$$

Les quantités  $X^c$  et  $\Delta X$  représentent respectivement, la moyenne (ou point central) de la valeur de  $X^I$  et son incertitude (ou erreur maximale) dans  $X^I$ . Il s'en suit que :

$$X^c = \frac{(\bar{x} + \underline{x})}{2} \quad (\text{VI.2a})$$

$$\Delta X = \frac{(\bar{x} - \underline{x})}{2} \quad (\text{VI.2b})$$

En termes d'addition intervalle, l'équation (VI.1) peut être mise sous la forme suivante :

$$X^I = X^c + \Delta X^I \quad (\text{VI.3})$$

$$\Delta X^I = [-\Delta X, \Delta X]$$

Des expressions similaires existent aussi pour une matrice intervalle.

$$A^I = [\underline{A}, \bar{A}] \in (\mathbb{R}^{m \times n})$$

$$A^I = A^c + \Delta A^I \quad (\text{VI.4})$$

Avec  $\Delta A^I = [-\Delta A, \Delta A]$ ,  $A^c$  et  $\Delta A$  représentent la matrice moyenne de  $A^I$  et son incertitude.

Il s'en suit :

$$A^c = \frac{(\bar{A} + \underline{A})}{2}, \quad a_{ij}^c = \frac{(\bar{a}_{ij} + \underline{a}_{ij})}{2} \quad (\text{VI.5})$$

$$\Delta A = \frac{(\bar{A} - \underline{A})}{2}, \quad \Delta a_{ij} = \frac{(\bar{a}_{ij} - \underline{a}_{ij})}{2} \quad (\text{VI.6})$$

$A^I = [\underline{A}, \overline{A}]$  est appelée matrice intervalle symétrique si A est symétrique pour chaque matrice réelle  $\in A^I$ .

Soit f une fonction réelle de n variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , par allongement de la périodicité de f.

Nous définissons un intervalle d'une valeur de la fonction F à n variables intervalles  $X_1^I, X_2^I, \dots, X_n^I$ , avec la propriété suivante :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

pour tout  $x \in X_i^I, i=1,2,\dots,n$  (VI.7)

Une fonction d'une valeur d'intervalle F de variables intervalles

$X_1^I, X_2^I, \dots, X_n^I$  sont dits d'inclusion monotone si :

$$Y_i^I \subseteq X_i^I, i=1,2,\dots,n \tag{VI.8}$$

Ce qui implique que :

$$F(Y_1^I, Y_2^I, \dots, Y_n^I) \subseteq F(X_1^I, X_2^I, \dots, X_n^I) \tag{VI.9}$$

Puisque les fonctions d'intervalles rationnelles sont inclusion monotone, nous avons le théorème suivant :

**Théorème :**

Si F est une fonction rationnelle et un intervalle allongement de f, puis

$$\{f(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in X_i^I, i=1,2,\dots,n\} \subseteq F(X_1^I, X_2^I, \dots, X_n^I) \tag{V.10}$$

En d'autres termes, une valeur intervalle de F contient la variation des valeurs de la fonction réelle correspondante à f.

Ce théorème nous donne un moyen d'évaluation finie de bornes supérieures et inférieures sur les plages de valeurs des fonctions rationnelles réelles.

**Quelque notation sur les intervalles :**

1. Addition :

$$[a,b]+[c,d] = [a+c,b+d]$$

2. Substruction :

$$[a,b]-[c,d] = [a-d,b-c]$$

3. Multiplication :

$$[a ,b]*[c,d] = [\min(ac,ad,bc,bd);\max(ac,ad,bc,bd)]$$

4. Division :

$$[a , b] \div [c , d] = [a , b] \times [1/d , 1/c] \text{ tel que } c \neq 0 \text{ et } d \neq 0$$

Par exemple, considérons le polynôme

$$f(x, a) = \frac{ax}{1-x}$$

Si  $A^I = [0,1]$  et  $X^I = [2,3]$  , nous obtenons une naturelle extension aux intervalles de  $f$  comme le polynôme intervalle suivant :

$$F(X^I, A^I) = \frac{A^I X^I}{1 - X^I}$$

Le calcul de  $F([2, 3], [0, 1])$  nous donne

$$F([2, 3], [0, 1]) = \frac{[0,1]*[2,3]}{1 - [2,3]} = [-2, 0]$$

**VI.2) Généralisés sur les intervalles des problèmes aux valeurs propres :**

Il est souvent souhaitable dans une variété d'applications d'obtenir des solutions à l'équation  $Ku = \lambda Mu$ , dans laquelle  $K$  et  $M$  sont affectées par des incertitudes. Une conséquence immédiate de ces incertitudes va concerner la détermination de la tolérance dans chaque valeur de  $\lambda_i$  de la solution, connaissant les variations inhérentes aux éléments  $k_{ij}$  et  $m_{ij}$ .

Un tel problème se rapporte généralement aux données de modèles dynamiques qui donnent les caractéristiques vibratoires des structures :

$$Ku = \lambda Mu \quad (VI.11)$$

Avec

$$\underline{K} \leq K \leq \overline{K} \quad \text{ou} \quad \underline{k}_{ij} \leq k_{ij} \leq \overline{k}_{ij} \quad i,j=1,2,\dots,n \quad (VI.12)$$

$$\underline{M} \leq M \leq \overline{M} \quad \text{ou} \quad \underline{m}_{ij} \leq m_{ij} \leq \overline{m}_{ij} \quad i,j=1,2,\dots,n \quad (VI.13)$$

Où  $K = (k_{ij})$  est la matrice de rigidité,  $M = (m_{ij})$  est l' matrice masse,  $u$  est la forme propre et  $\lambda_i$  est le carré de la fréquence de la vibration libre.  $K$  et  $M$  sont symétriques,  $K$  est semi-définie positive et  $M$  est définie positive.  $\underline{K} = (\underline{k}_{ij})$  et  $\overline{K} = (\overline{k}_{ij})$  sont les minimums et les maximums de la matrices de rigidité admissibles du système.  $\underline{M} = (\underline{m}_{ij})$  et  $\overline{M} = (\overline{m}_{ij})$  sont les minimums et les maximums de la matrices masses admissibles du système.

Avec les notations de la matrice intervalle, l'équation (V.12) et (V.13) peut s'écrire :

$$K \in K^I, M \in M^I \quad (VI.14)$$

Dans laquelle  $K^I = [\underline{K}, \overline{K}]$  est une semi-définie positive matrice intervalle, et  $M^I = [\underline{M}, \overline{M}]$  est une définie positif matrice intervalle.

Pour des raisons de simplifications l'équation (VI.11) peut s'écrire:

$$K^I u = \lambda M^I u \quad (VI.15)$$

L'équation (VI.15) est appelée un intervalle généralisé du problème aux valeurs propres.

Soient les matrices centrales et les matrices incertitudes suivantes :

$$K^c = (\underline{K} + \overline{K}) / 2 \quad \text{et} \quad M^c = (\overline{M} + \underline{M}) / 2$$

$$\Delta K = (\overline{K} - \underline{K}) / 2 \quad \text{et} \quad \Delta M = (\overline{M} - \underline{M}) / 2$$

Question : comment trouver l'intervalle de la valeur propre  $\lambda^I$  qui est la plus petite largeur qui renferme toutes les valeurs propres possibles  $\lambda_i$  satisfaisant  $ku = \lambda Mu$  lorsque K et M exhibent toutes les combinaisons possibles ?

En d'autres termes,

$$\lambda^I = [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \quad , \quad \lambda_i^I = [\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i] \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{VI.16}$$

Où

à l'ensemble

$$\Gamma = \{ \lambda : \lambda \in R, ku = \lambda Mu, u \neq 0, K \in K^I, M \in M^I \} \tag{VI.17}$$

Où

$$\underline{\lambda}_i = \min_{K \in K^I, M \in M^I} \lambda_i (< K, M >) \tag{VI.18}$$

$$\bar{\lambda}_i = \max_{K \in K^I, M \in M^I} \lambda_i (< K, M >) \tag{VI.19}$$

Dans lequel

$$\lambda_i (< K, M >) = \min_{\phi_I \subset R^n} \max_{u \in \phi_I, u \neq 0} \frac{u^T K u}{u^T M u} \tag{VI.20}$$

**VI.3) Méthode intervalle :**

Afin d'illustrer le problème, on considère un système dynamique à un seul degré de liberté (système masse-ressort) représenté sur la Fig.VI 1. La valeur propre, qui est la fréquence naturelle au carrée est :

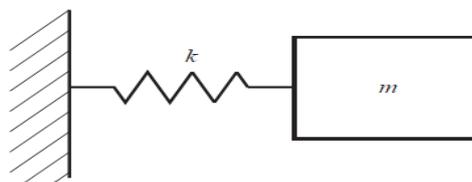


Figure VI.1 système masse-ressort

$$\lambda = \omega^2 = \frac{k}{m} \quad (\text{VI.21})$$

Soient la raideur du ressort  $k$  et la masse  $m$  des variables intervalles avec des incertitudes

$$K^I = [\underline{K}, \bar{K}] \text{ et } M^I = [\underline{M}, \bar{M}]$$

L'objectif est de trouver la bornes inférieure et supérieure  $\underline{\lambda}$  et  $\bar{\lambda}$  de la valeur propre de  $\lambda$  du système masse-ressort. Par extension intervalle naturelle on a :

$$\lambda^I = [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] = \frac{[\underline{K}, \bar{K}]}{[\underline{M}, \bar{M}]} = \left[ \frac{\underline{K}}{\bar{M}}, \frac{\bar{K}}{\underline{M}} \right] \quad (\text{VI.22})$$

Les bornes de valeur propre sont alors :

$$\underline{\lambda} = \frac{\underline{K}}{\bar{M}}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\bar{K}}{\underline{M}} \quad (\text{VI.23})$$

Ceci correspond à la compréhension de l'ingénierie par la pensée, que la valeur propre la plus faible est obtenue lorsque la valeur de raideur du ressort est plus basse, et la valeur du masse la plus élevée, ainsi que la valeur propre la plus forte est obtenue lorsque la valeur de raideur du ressort est plus élevée, et la valeur du masse est la plus basse. Notez que dans l'équation (VI.22) les variables d'intervalles  $K^I$  et  $M^I$  se produisent qu'une seule fois, et par conséquent, l'équation (VI.22) donne l'intervalle exact de la valeur propre. Une autre interprétation de la valeur propre intervalle est de prendre le milieu,  $\lambda^c = \frac{(\bar{\lambda} + \underline{\lambda})}{2}$  est une approximation à  $\lambda$ , et la moitié de la largeur,  $\Delta \lambda = \frac{(\bar{\lambda} - \underline{\lambda})}{2}$  donner l'incertitude. Ainsi, le calcul d'une valeur propre intervalle contenant une valeur propre exacte fournit à la fois une approximation des valeurs propres et les erreurs bornes exactes sur la valeur propre

#### VI.4) Méthode de Dief :

Deif méthode présente une approche pour calculer les valeurs propres intervalles pour les problèmes aux valeurs propres standards.

A l'aide de l'évaluation de l'intervalle, l'équation (VI.20) peut s'écrire

$$\lambda_i^I = \min_{\phi_I \subset \mathbb{R}^n} \max_{u \in \phi_{I, u \neq 0}} \frac{u^T K u}{u^T M u} \quad (\text{VI.24})$$

En utilisant la notation centrale des intervalles : l'intervalle de la rigidité et l'intervalle de la masse peuvent être exprimés sous la forme suivante:

$$K^I = K^c + \Delta k e_\Delta \quad (\text{VI.25a})$$

$$M^I = M^c + \Delta M e_\Delta \quad (\text{VI.25b})$$

Où  $e_\Delta = [-1, 1]$

Le remplacement des équations (VI.25a) et (VI.25b) dans les équations (VI.24) donne l'évaluation intervalle de l'équation (VI.20):

$$\lambda_i^I = \min_{\phi_I \subset \mathbb{R}^n} \max_{u \in \phi_I, u \neq 0} \frac{u^T (K^c + \Delta k e_\Delta) u}{u^T (M^c + \Delta M e_\Delta) u} \quad (\text{VI.26})$$

$$\lambda_i^I = \min_{\phi_I \subset \mathbb{R}^n} \max_{u \in \phi_I, u \neq 0} \frac{[u^T K^c u - |u^T \Delta k| |u|, u^T K^c u + |u^T \Delta k| |u|]}{[u^T M^c u - |u^T \Delta M| |u|, u^T M^c u + |u^T \Delta M| |u|]} \quad (\text{VI.27})$$

Pour calculer les bornes inférieures et supérieures sur une valeur  $\lambda_i$ , nous introduisons l'hypothèse de Deif [16], c'est à dire les signes des composantes du vecteur propre associé  $u^i$  restent inchangés, quand les matrices K et M sont dans l'intervalle  $K^I = [\underline{K}, \overline{K}]$

et  $M^I = [\underline{M}, \overline{M}]$  désignant

$$S^i = \text{diag} \left( \text{sgn}(u_1^i), \text{sgn}(u_2^i), \text{sgn}(u_3^i), \dots, \text{sgn}(u_n^i) \right) \quad u_n^i \neq 0 \quad (\text{VI.28})$$

On a :

$$S^i u^i = |u^T| > 0$$

On remplace  $|u| = S^i u$

$$\lambda_i^I = \min_{\phi_I \subset \mathbb{R}^n} \max_{u \in \phi_I, u \neq 0} \frac{[u^T (K^c - S^i \Delta k S^i) u, u^T (K^c + S^i \Delta k S^i) u]}{[u^T (M^c - S^i \Delta M S^i) u, u^T (M^c + S^i \Delta M S^i) u]} \quad (\text{VI.29})$$

$\lambda_i^I$  Peut s'écrire aussi :

$$\lambda_i^I = \min_{\phi_I \subset \mathbb{R}^n} \max_{u \in \phi_I, u \neq 0} \left[ u^T (K^c - S^i \Delta k S^i) u, u^T (K^c + S^i \Delta k S^i) u \left[ \frac{1}{u^T (M^c - S^i \Delta M S^i) u}, \frac{1}{u^T (M^c + S^i \Delta M S^i) u} \right] \right]$$

Considérons maintenant les définitions de  $M^I = [\underline{M}, \overline{M}]$  et de  $K^I = [\underline{K}, \overline{K}]$ , les cinq inégalités suivantes doivent être examinées:

$$\frac{u^T (K^c - S^i \Delta k S^i) u}{u^T (M^c + S^i \Delta M S^i) u} \leq \frac{u^T (K^c + S^i \Delta k S^i) u}{u^T (M^c - S^i \Delta M S^i) u}$$

$$\frac{u^T (K^c - S^i \Delta k S^i) u}{u^T (M^c + S^i \Delta M S^i) u} \leq \frac{u^T (K^c + S^i \Delta k S^i) u}{u^T (M^c + S^i \Delta M S^i) u}$$

$$\frac{u^T (K^c - S^i \Delta k S^i) u}{u^T (M^c - S^i \Delta M S^i) u} \leq \frac{u^T (K^c + S^i \Delta k S^i) u}{u^T (M^c - S^i \Delta M S^i) u}$$

$$\frac{u^T (K^c - S^i \Delta k S^i) u}{u^T (M^c + S^i \Delta M S^i) u} \leq \frac{u^T (K^c - S^i \Delta k S^i) u}{u^T (M^c - S^i \Delta M S^i) u}$$

$$\frac{u^T (K^c + S^i \Delta k S^i) u}{u^T (M^c + S^i \Delta M S^i) u} \leq \frac{u^T (K^c + S^i \Delta k S^i) u}{u^T (M^c - S^i \Delta M S^i) u}$$

Après une série de transformations de substitutions dans les équations, on obtient les expressions des bandes supérieure et inférieure de la valeur propre .

$$(K^c - S^i \Delta k S^i) \underline{u}_i = \underline{\lambda}_i (M^c + S^i \Delta M S^i) \underline{u}_i$$

$$(K^c + S^i \Delta k S^i) \overline{u}_i = \overline{\lambda}_i (M^c - S^i \Delta M S^i) \underline{u}_i$$

Avec :

$$S^i = \text{diag} \left( \text{sgn}(u_1^i), \text{sgn}(u_2^i), \text{sgn}(u_3^i), \dots, \text{sgn}(u_n^i) \right) \quad u_n^i \neq 0$$

Les signes correspondent à ceux du vecteur propre (u) de l'équation suivante:

$$K^c u^i = \lambda_i M^c u^i$$

## VI.5) Méthode des éléments finis intervalles :

L'équilibre matriciel avec paramètres incertains dans le domaine des éléments finis s'écrit :

$$[K]' \{u\}' = \{F\}'$$

Avec

$$[K]' = [\underline{K}, \overline{K}] = [K^c - \Delta K, K^c + \Delta K]$$

$[K]'$  est dite matrice de rigidité intervalle

Avec

$$K^c = \frac{(\underline{K} + \overline{K})}{2} \quad (\text{Matrice de rigidité centrale}).$$

$$\Delta K = \frac{(\underline{K} - \overline{K})}{2} \quad (\text{Matrice incertitude}).$$

En se basant sur la méthode des poids des terres pour évaluer les charges sur la voûte d'un tunnel :

$$F = \sum_{i=1}^N \gamma_i h_i$$

$\gamma_i$  : Poids volumique de la couche (i)

$h_i$  : Hauteur de la couche (i)

La formulation des bandes inférieure et supérieure s'écrit comme suit:

$$\left\{ \iiint_V [B]^T [\underline{D}] [B] dv \right\} \{\underline{u}\} = \{F(\underline{\gamma})\}$$

$$\left\{ \iiint_V [B]^T [\overline{D}] [B] dv \right\} \{\overline{u}\} = \{F(\overline{\gamma})\}$$

Avec :

$[K]' = [\underline{K}, \overline{K}] = [K^c - \Delta K, K^c + \Delta K]$  : matrice de rigidité intervalle

$[D]' = [\underline{D}, \overline{D}]$  : matrice de comportement intervalle

$\{\gamma\}' = \{\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\}$  : Vecteur poids volumique intervalle

# **CHAPITRE VII**

## **Applications**

## Chapitre VII : [3] [4] [12]

## APPLICATIONS

## VII.1) Application 1:

## VII.1.1) Introduction:

On applique les deux méthodes "méthode intervalle et la méthode de Deif " sur un portique d'un bâtiment auto-stable (poteaux, poutres) à usage d'habitation, qu'est implanter dans une région moins séismique (zone II.a), et on calcule la repense du portique par rapport à une force soudainement appliquée, et puis on trace les courbes de déplacement en fonction de la période

Les calculs se font par deux hypothèses :

- a) Les planchers sont infiniment rigides
- b) Les planchers sont flexibles (à rigidité finis)

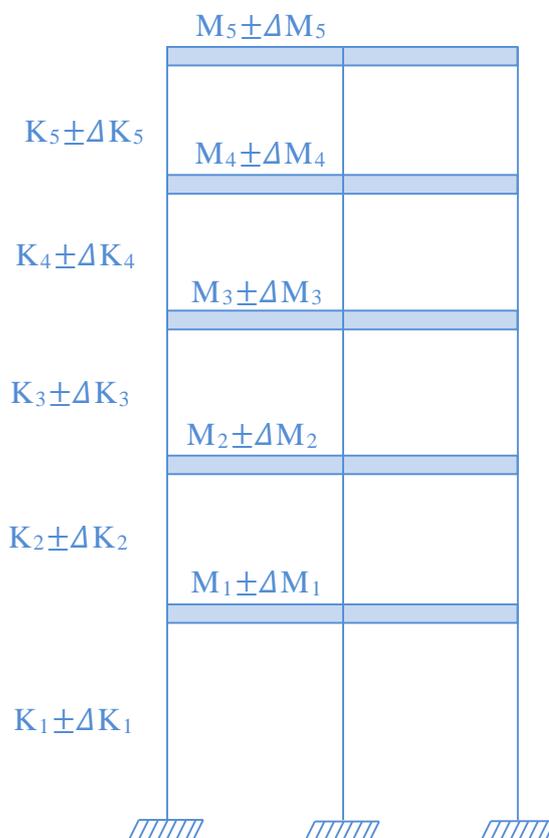


Figure VII.1a



Figure VII.1b

**VII.1.2) Caractéristiques de la structure:**

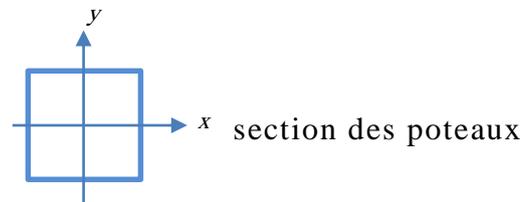
Les caractéristiques sont :

- 1- Les poteaux : " 0.3x0.3 " (m)
- 2- Les poutres principale : " 0.3x0.4 " (m)
- 3- La hauteur de chaque étage est :
  - $h_1 = 3.4$  m
  - $h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = 3$  m
- 4- Poids propre de la dalle : 600 Kg/m<sup>2</sup>
- 5- Cloison périphérique : 120 Kg/m<sup>2</sup>
- 6- Cloison de séparation : 100 Kg/m<sup>2</sup>
- 7- L'acrotère : 100 Kg/ml
- 8- La charge d'exploitation : 250Kg/m<sup>2</sup>
- 9- La résistance caractéristique du béton à la compression :  $f_{c28} = 25$  MPa

**VII.1.3) Calcul de l'inertie :****a) L'inertie des poteaux :**

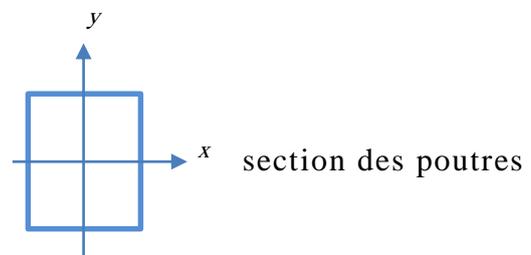
$$I_x = (b \cdot h^3) / 12$$

$$I_x = (0.3 \times 0.3^3) / 12 = 0.675 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

**b) L'inertie des poutres :**

$$I_x = (b \cdot h^3) / 12$$

$$I_x = (0.3 \times 0.4^3) / 12 = 1.6 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

**VII.1.4) Calcul module de Young:**

$$E = 11000(f_{c28})^{1/3}$$

$$E = 11000(25)^{1/3} = 32164 \text{ MPa}$$

### VII.1.5) Calcul la masses des planchers "M":

Les masses seront calculées en tenant compte les charges réparties de chaque plancher (poids de la dalle et la charge d'exploitation) et les poids des poutres, les poteaux et des surfaces des murs revenant à chacun des planchers.

Les masses seront supposées concentrées au chaque plancher.

- $M_i = G + 20\%Q$

=>  $M = M_{\text{(Plancher)}} + M_{\text{(Poutres)}} + M_{\text{(Poteaux)}} + M_{\text{(Cloison périphérique)}} + M_{\text{(Cloison de séparation)}} + 20\% \text{ charge d'exploitation}$

- $M_1 = ?$

$$M_1 = (600 * 4 * 8) + (0.3 * 0.3 * 2500 * (4 * 3 + 8)) + (0.3 * 0.4 * 2500 * 3.2) + (120 * 2 * 4 * 3.2) + (100 * 3.2 * (8 + 4)) + (0.2 * 250 * 4 * 8)$$

$$M_1 = 36 \text{ t}$$

- 1.1.2)  $M_2 = ?$

$$M_2 = (600 * 4 * 8) + (0.3 * 0.4 * 2500 * 20) + (0.3 * 0.3 * 2500 * 3) + (120 * 2 * 3 * 4) + (100 * 3 * 12) + (0.2 * 250 * 4 * 8)$$

$$M_2 = 35 \text{ t}$$

- $M = M_2 = M_3 = M_4 = ?$

$$M = 35 \text{ t}$$

- $M_5 = ?$

$$M_5 = (600 * 4 * 8) + (0.3 * 0.4 * 2500 * 20) + (0.3 * 0.3 * 2500 * 3 * 1.5) + (120 * 2 * 4 * 1.5) + (100 * 1.5 * 12) + (0.2 * 250 * 4 * 8)$$

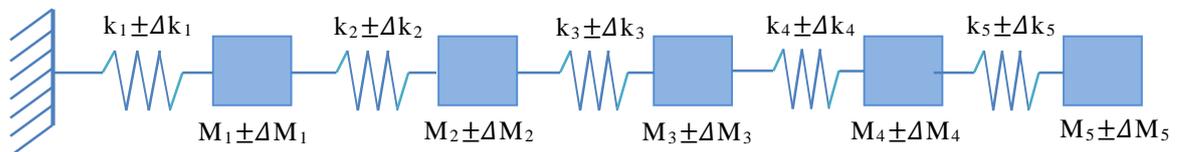
$$M_5 = 32 \text{ t}$$

**VII.1.6) Cas où "Les planchers sont supposés infiniment rigides" :**

Dans ce cas, on calcule la matrice masse et la matrice rigidité à partir d'une hypothèse, cette hypothèse stipule que tous les planchers sont infiniment rigides

**VII.1.6.1) Modélisation de système et les équations d'équilibre :**

La modélisation du portique à étudier, en considérant un système masse-ressort équivalent dont les masses simulent les masses des planchers et les rigidités des poteaux simulent les coefficients de raideur des ressorts.



$$\left\{ \begin{array}{l} (M_1 \pm \Delta M_1) \ddot{x}_1 + (k_1 \pm \Delta k_1)x_1 - (k_2 \pm \Delta k_2)(x_2 - x_1) = 0 \\ (M_2 \pm \Delta M_2) \ddot{x}_2 + (k_2 \pm \Delta k_2)(x_2 - x_1) - (k_3 \pm \Delta k_3)(x_3 - x_2) = 0 \\ (M_3 \pm \Delta M_3) \ddot{x}_3 + (k_3 \pm \Delta k_3)(x_3 - x_2) - (k_4 \pm \Delta k_4)(x_4 - x_3) = 0 \\ (M_4 \pm \Delta M_4) \ddot{x}_4 + (k_4 \pm \Delta k_4)(x_4 - x_3) - (k_5 \pm \Delta k_5)(x_5 - x_4) = 0 \\ (M_5 \pm \Delta M_5) \ddot{x}_5 + (k_5 \pm \Delta k_5)(x_5 - x_4) = 0 \end{array} \right.$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} [(K_1 + K_2) \pm (\Delta K_1 + \Delta K_2)] & -[K_2 \pm \Delta K_2] & 0 & 0 & 0 \\ -[K_2 \pm \Delta K_2] & [(K_2 + K_3) \pm (\Delta K_2 + \Delta K_3)] & -[K_3 \pm \Delta K_3] & 0 & 0 \\ 0 & -[K_3 \pm \Delta K_3] & [(K_3 + K_4) \pm (\Delta K_3 + \Delta K_4)] & -[K_4 \pm \Delta K_4] & 0 \\ 0 & 0 & -[K_4 \pm \Delta K_4] & [(K_4 + K_5) \pm (\Delta K_4 + \Delta K_5)] & -[K_5 \pm \Delta K_5] \\ 0 & 0 & 0 & -[K_5 \pm \Delta K_5] & [K_5 \pm \Delta K_5] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} [M_1 \pm \Delta M_1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [M_2 \pm \Delta M_2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [M_3 \pm \Delta M_3] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [M_4 \pm \Delta M_4] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [M_5 \pm \Delta M_5] \end{pmatrix}$$

### VII.1.6.2) Calcule la rigidité des poteaux "K" et " $\Delta K$ " :

- $E = 32164 \text{ MPa}$
- $\Delta E = 10\% E = 3216.4 \text{ MPa}$
- $K' = (12.E.I_x)/L^3$  et  $\Delta K' = (12. \Delta E.I_x)/L^3$

Avec :  $K'$  est La rigidité de chaque poteau dans chaque niveau

- $K = 3K' = 3(12.E.I_x)/L^3$  et  $\Delta K = 3\Delta K' = 3(12. \Delta E.I_x)/L^3$

Avec :  $K$  est La rigidité total des poteaux de chaque niveau

1)  $k_1 = ?$  et  $\Delta k_1 = ?$

- $k_1 = 3(12 \times 32164 \times 10^3 \times 0.675 \times 10^{-3})/3.4^3$

$$k_1 = 19885.64 \text{ KN/m}$$

- $\Delta k_1 = 3(12 \times 3216.4 \times 10^3 \times 0.675 \times 10^{-3})/3.4^3$

$$\Delta k_1 = 1988.564 \text{ KN/m}$$

2)  $k = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = ?$  et  $\Delta k = \Delta k_2 = \Delta k_3 = \Delta k_4 = \Delta k_5 = ?$

- $k = 3((12 \times 32164 \times 10^3 \times 0.675 \times 10^{-3})/3^3)$

$$k = 28947.6 \text{ KN/m}$$

- $\Delta k = 3((12 \times 3216.4 \times 10^3 \times 0.675 \times 10^{-3})/3^3)$

$$\Delta k = 2894.76 \text{ KN/m}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} [43949.92 ; 53716.56] & -[26052.84 ; 31842.36] & 0 & 0 & 0 \\ -[26052.84 ; 31842.36] & [52105.68 ; 63684.72] & -[26052.84 ; 31842.36] & 0 & 0 \\ 0 & -[26052.84 ; 31842.36] & [52105.68 ; 63684.72] & -[26052.84 ; 31842.36] & 0 \\ 0 & 0 & -[26052.84 ; 31842.36] & [52105.68 ; 63684.72] & -[26052.84 ; 31842.36] \\ 0 & 0 & 0 & -[26052.84 ; 31842.36] & [26052.84 ; 31842.36] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} [35 ; 37] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [34 ; 36] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [34 ; 36] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [34 ; 36] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [31 ; 33] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k}^c = \begin{pmatrix} 48833.24 & -28947.6 & 0 & 0 & 0 \\ -28947.6 & 57895.2 & -28947.6 & 0 & 0 \\ 0 & -28947.6 & 57895.2 & -28947.6 & 0 \\ 0 & 0 & -28947.6 & 57895.2 & -28947.6 \\ 0 & 0 & 0 & -28947.6 & 28947.6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^c = \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}$$

Les solutions propres du système "  $k^c u_i^c = \lambda_i^c M^c u_i^c$  " sont énumérés dans le tableau (VII.1).

On utilise les deux méthodes (méthode intervalle et méthode de Deif), nous obtenons les valeurs propres intervalles (bande supérieure et inférieure) et les vecteurs propres associés figurent dans les tableaux (VII.2) et (VII.3) pour la méthode intervalle, et dans les tableaux (VII.4) et (VII.5) pour la méthode de Deif.

**VII.1.6.3). Méthode intervalle :**

**Tableau (VII.1) :** Les solutions propres du système "  $k^c u_i^c = \lambda_i^c M^c u_i^c$  "

	$\lambda_1^c$	$\lambda_2^c$	$\lambda_3^c$	$\lambda_4^c$	$\lambda_5^c$
$\lambda_i^c$	59.06984	517.88256	1338.14513	2281.68537	3026.75419
$\omega_i^c$	7.68569	22.75703	36.58067	47.76699	55.01594
$u_i^c$	0.037362081339949	0.090221320721168	0.100748740584802	0.079356502415994	0.042358030383028
	0.060283425476199	0.094091864164113	0.002297105766419	-0.091308482372863	-0.087986036586885
	0.078899313206073	0.039045649202238	-0.099871076593088	-0.010076833018232	0.103662865684268
	0.091880193455559	-0.040449471105961	-0.040455230229336	0.098954208617975	-0.084051994938415
	0.098298968708398	-0.094616666009303	0.084414191948131	-0.065003977443337	0.035829127514351

**Tableau (VII.2) :** La bande inférieure des valeurs propres et des vecteurs propres associés

	$\underline{\lambda}_1$	$\underline{\lambda}_2$	$\underline{\lambda}_3$	$\underline{\lambda}_4$	$\underline{\lambda}_5$
$\underline{\lambda}_i$	51.64652	452.91192	1170.51324	1996.12377	2648.26023
$\underline{\omega}_i$	7.18655	21.28173	34.21276	44.67800	51.46125
$\underline{u}_i$	0.036817071914648	0.088918718075868	0.099363721386077	0.078353184237781	0.041864319061861
	0.059408219394872	0.092807298875726	0.002444462509604	-0.089943437549508	-0.086830001533555
	0.077759667484129	0.038613646206325	-0.098428527577246	-0.010152849023760	0.102220070597043
	0.090561755262095	-0.039745851619914	-0.040100899964060	0.097641917012411	-0.082792435674088
	0.096900854878817	-0.093230928347941	0.083086867303207	-0.063884920185590	0.035164443416412

**Tableau (VII.3) :** La bande supérieure des valeurs propres et des vecteurs propres associés

	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_4$	$\bar{\lambda}_5$
$\bar{\lambda}_i$	66.94222	586.74899	1515.75486	2584.16196	3427.56373
$\bar{\omega}_i$	8.18182	24.22290	38.93270	50.83465	58.54540
$\bar{u}_i$	0.037932016197674	0.091582904351673	0.102193247252511	0.080398795149713	0.042868826711049
	0.061198465164756	0.095431130154624	0.002134666159863	-0.092737349977637	-0.089188783399500
	0.080090556424555	0.039491072464062	-0.101378792038991	-0.009986579169165	0.105168110348807
	0.093257916813517	-0.041190423708038	-0.040814478145929	0.100319809143611	-0.085370890350885
	0.099759366773513	-0.096065825727382	0.085806537633091	-0.066182732011829	0.036531828140192

VII.1.6.4) Méthode de Deif :

L'application de la méthode de Deif donne des résultats qu'on présente dans les tableaux suivants :

Tableau (VII.1) : Les solutions propres du système "  $k^c u_i^c = \lambda_i^c M^c u_i^c$  "

	$\lambda_1^c$	$\lambda_2^c$	$\lambda_3^c$	$\lambda_4^c$	$\lambda_5^c$
$\lambda_i^c$	59.06984	517.88256	1338.14513	2281.68537	3026.75419
$\omega_i^c$	7.68569	22.75703	36.58067	47.76699	55.01594
$u_i^c$	0.037362081339949	0.090221320721168	0.100748740584802	0.079356502415994	0.042358030383028
	0.060283425476199	0.094091864164113	0.002297105766419	-0.091308482372863	-0.087986036586885
	0.078899313206073	0.039045649202238	-0.099871076593088	-0.010076833018232	0.103662865684268
	0.091880193455559	-0.040449471105961	-0.040455230229336	0.098954208617975	-0.084051994938415
	0.098298968708398	-0.094616666009303	0.084414191948131	-0.065003977443337	0.035829127514351

Tableau (VII.4) : La bande inférieure des valeurs propres et des vecteurs propres associés

	$\underline{\lambda}_1$	$\underline{\lambda}_2$	$\underline{\lambda}_3$	$\underline{\lambda}_4$	$\underline{\lambda}_5$
$\underline{\lambda}_i$	51.64652	469.32780	1201.18886	2161.63576	2925.30980
$\underline{\omega}_i$	7.18655	21.66397	34.65817	46.49339	54.08613
$\underline{u}_i$	0.036817071914648	0.091074412477666	0.114882534173811	0.085447125676941	0.042698862734737
	0.059408219394872	0.092933986178101	-0.002178640145719	-0.096686033362236	-0.086204736726295
	0.077759667484129	0.034523965344594	-0.094601195076835	-0.009009770258968	0.101340830924549
	0.090561755262095	-0.037861817330432	-0.029519472519792	0.086382286024197	-0.083125891681007
	0.096900854878817	-0.093365427862735	0.069184640391566	-0.060745286869870	0.037554413438920

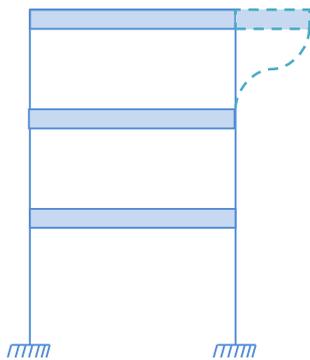
Tableau (VII.5) : La bande supérieure des valeurs propres et des vecteurs propres associés

	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_4$	$\bar{\lambda}_5$
$\bar{\lambda}_i$	66.94221	566.61111	1461.81357	2410.23519	3135.1683
$\bar{\omega}_i$	8.18182	23.80359	38.23367	49.09415	55.99257
$\bar{u}_i$	0.037932016197674	0.089849776845846	0.086542391957698	0.072498541199263	0.041773934011077
	0.061198465164756	0.095613989649890	0.006938872756681	-0.085268112593639	-0.089815122150424
	0.080090556424555	0.043531288916902	-0.102049808607497	-0.010411218911207	0.106158384751899
	0.093257916813517	-0.042640945595045	-0.050490786312234	0.111514940673810	-0.08503578977261
	0.099759366773513	-0.095100427622243	0.097628171071412	-0.067761763032599	0.033902011066915

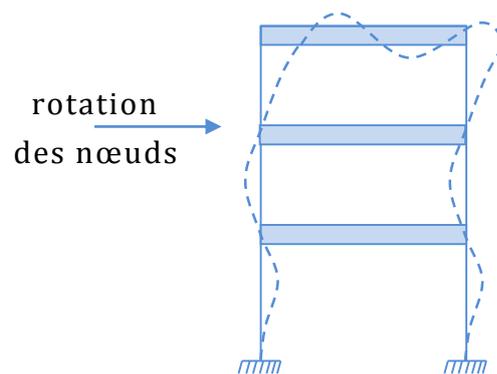
### VII.1.7) Cas où "Les planchers ont une rigidité finie " (Les planchers sont flexibles) :

Pour mieux illustrer la différence entre une structure rigide et une structure flexible, on prend une structure (R+3) et on déplaçant le troisième plancher pendant que les autres planchers restent fixes.

Si les poutres sont rigides, il n'y a pas d'effort transmis au troisième plancher. Si les poutres sont flexibles, les nœuds des planchers tourneront, causant une flexion dans les poteaux aux niveaux inférieurs et transmettant des efforts au premier plancher.



**Figure VII.b.1 :** Structure à plancher rigide

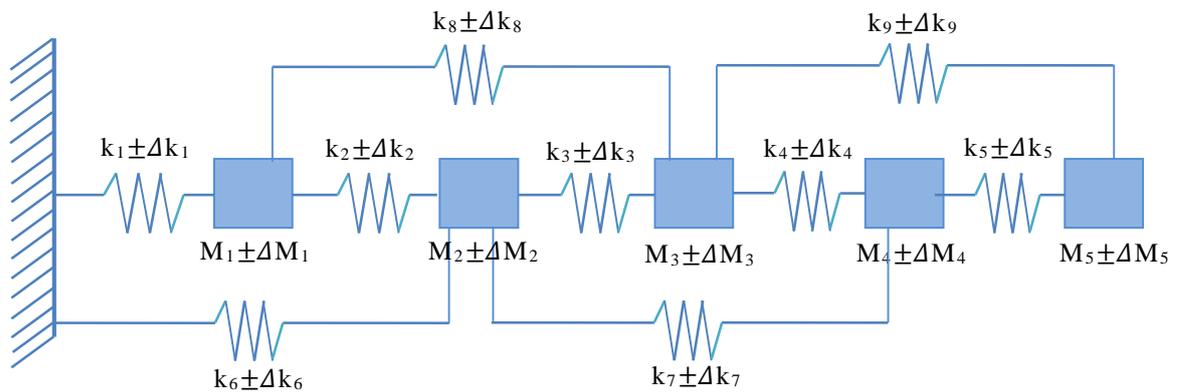


**Figure VII.b.2 :** Structure à plancher Flexible

#### VII.1.7.1) Modélisation de système et les équations d'équilibre :

Ayant des rigidités finies des planchers, l'étude de portique, implique un effet réciproque indirect "couplage indirect" masses-masse non contiguës ou masse appui non contiguës.

L'étude de système devient :



$$\left\{ \begin{array}{l}
 (M_1 \pm \Delta M_1) \ddot{x}_1 + (k_1 \pm \Delta k_1) x_1 - (k_2 \pm \Delta k_2)(x_2 - x_1) - (k_8 \pm \Delta k_8)(x_3 - x_1) = 0 \\
 (M_2 \pm \Delta M_2) \ddot{x}_2 + (k_2 \pm \Delta k_2)(x_2 - x_1) - (k_3 \pm \Delta k_3)(x_3 - x_2) + (k_6 \pm \Delta k_6)x_2 \\
 \qquad \qquad \qquad - (k_7 \pm \Delta k_7)(x_4 - x_2) = 0 \\
 (M_3 \pm \Delta M_3) \ddot{x}_3 + (k_3 \pm \Delta k_3)(x_3 - x_2) - (k_4 \pm \Delta k_4)(x_4 - x_3) + (k_8 \pm \Delta k_8)(x_3 - x_1) \\
 \qquad \qquad \qquad - (k_9 \pm \Delta k_9)(x_5 - x_3) = 0 \\
 (M_4 \pm \Delta M_4) \ddot{x}_4 + (k_4 \pm \Delta k_4)(x_4 - x_3) + (k_7 \pm \Delta k_7)(x_4 - x_2) - (k_5 \pm \Delta k_5)(x_5 - x_4) = 0 \\
 (M_5 \pm \Delta M_5) \ddot{x}_5 + (k_5 \pm \Delta k_5)(x_5 - x_4) + (k_9 \pm \Delta k_9)(x_5 - x_3) = 0
 \end{array} \right.$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix}
 K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 \\
 K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 \\
 K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\
 0 & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\
 0 & 0 & K_{53} & K_{54} & K_{55}
 \end{pmatrix}$$

- $K_{11} = (k_1+k_2+ k_8)\pm(\Delta k_1+\Delta k_2+\Delta k_8)$
- $K_{12} = - (k_2\pm\Delta k_2)$
- $K_{13} = - (k_8\pm\Delta k_8)$
- $K_{22} = (k_2+k_3+ k_6+k_7)\pm(\Delta k_2+\Delta k_3+\Delta k_6+ \Delta k_7)$
- $K_{23} = - (k_3\pm \Delta k_3)$
- $K_{24} = - (k_7\pm \Delta k_7)$
- $K_{33} = (k_3+k_4+ k_8+k_9)\pm(\Delta k_3+\Delta k_4+\Delta k_8+ \Delta k_9)$
- $K_{34} = - (k_4\pm \Delta k_4)$
- $K_{35} = - (k_9\pm \Delta k_9)$
- $K_{44} = (k_4+ k_5+k_7)\pm(\Delta k_4+\Delta k_5+ \Delta k_7)$
- $K_{45} = - (k_5\pm \Delta k_5)$
- $K_{55} = (k_5+k_9)\pm(\Delta k_5+ \Delta k_9)$

$$\mathbf{M} = \text{diag} ((M_1\pm\Delta M_1), (M_2\pm\Delta M_2), (M_3\pm\Delta M_3), (M_4\pm\Delta M_4), (M_5\pm\Delta M_5))$$

$$\mathbf{M}^c = \text{diag} (M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$$

$$\Delta \mathbf{M} = \text{diag} (\Delta M_1, \Delta M_2, \Delta M_3, \Delta M_4, \Delta M_5)$$

### VII.1.7.2) Calcul les rigidités $k_i$ et $\Delta k_i$ :

- $E = 32164 \text{ MPa}$
- $\Delta E = 10\% E = 10\% \cdot 32164 = 3216.4 \text{ MPa}$

On a utilisé un programme d'ordinateur "Fortran" pour calcule les rigidités

$k_i(k_1, k_2, \dots, k_9)$  et  $\Delta k_i(\Delta k_1, \Delta k_2, \dots, \Delta k_9)$

- |                    |      |                         |      |
|--------------------|------|-------------------------|------|
| • $k_1 = 19738,12$ | KN/m | $\Delta k_1 = 1973,812$ | KN/m |
| • $k_2 = 26535,62$ | KN/m | $\Delta k_2 = 2653,562$ | KN/m |
| • $k_3 = 26865,85$ | KN/m | $\Delta k_3 = 2686,585$ | KN/m |
| • $k_4 = 26763,14$ | KN/m | $\Delta k_4 = 2676,314$ | KN/m |
| • $k_5 = 22560,81$ | KN/m | $\Delta k_5 = 2256,081$ | KN/m |
| • $k_6 = -2988,79$ | KN/m | $\Delta k_6 = -298,879$ | KN/m |
| • $k_7 = -3572,13$ | KN/m | $\Delta k_7 = -357,213$ | KN/m |
| • $k_8 = -3572,97$ | KN/m | $\Delta k_8 = -357,297$ | KN/m |
| • $k_9 = -3259,12$ | KN/m | $\Delta k_9 = -325,912$ | KN/m |

$$\mathbf{K}^c = \begin{pmatrix} 42700.77 & -26535.62 & 3572.97 & 0 & 0 \\ -26535.62 & 46840.55 & -26865.85 & 3572.13 & 0 \\ 3572.97 & -26865.85 & 46796.9 & -26763.14 & 3259.12 \\ 0 & 3572.13 & -26763.14 & 45751.82 & -22560.81 \\ 0 & 0 & 3259.12 & -22560.81 & 19301.69 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 4270.077 & -2653.562 & 357.297 & 0 & 0 \\ -2653.562 & 4684.055 & -2686.585 & 357.213 & 0 \\ 357.297 & -2686.585 & 4679.69 & -2676.314 & 325.912 \\ 0 & 357.213 & -2676.314 & 4575.182 & -2256.081 \\ 0 & 0 & 325.912 & -2256.081 & 1930.169 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \text{diag} ([37;35], [36;34], [36;34], [36;34], [33;31])$$

$$\mathbf{M}^c = \text{diag} (36, 35, 35, 35, 32)$$

$$\Delta \mathbf{M} = \text{diag} (1, 1, 1, 1, 1)$$

Les solutions propres du système "  $\mathbf{K}^c \mathbf{u}_i^c = \lambda_i^c \mathbf{M}^c \mathbf{u}_i^c$  " sont énumérés dans le tableau (VII.6).

On utilise les deux méthodes (méthode intervalle et méthode de Deif), nous obtenons les valeurs propres intervalles (bande supérieure et inférieure) et les vecteurs propres associés figurent dans les tableaux (VII.7) et (VII.8) pour la méthode intervalle, et dans les tableaux (VII.9) et (VII.10) pour la méthode de Deif.

VII.1.7.3) Méthode intervalle :

Tableau (VII.6) : Les solutions propres du système "  $k^c u_i^c = \lambda_i^c M^c u_i^c$  "

	$\lambda_1^c$	$\lambda_2^c$	$\lambda_3^c$	$\lambda_4^c$	$\lambda_5^c$
$\lambda_i^c$	32.38273	311.88514	920.05675	1812.76587	2694.77039
$\omega_i^c$	5.69058	17.66027	30.33243	42.57658	51.91117
$u_i^c$	0.028516491016185	0.078840651949819	0.100430599122296	0.089275157319081	0.051888150512607
	0.055173075543853	0.100560785188826	0.023724379406481	-0.079368167080877	-0.092481007048297
	0.078259695769322	0.052364962375787	-0.093047572765509	-0.025788902554490	0.101891319612548
	0.094456731728151	-0.031826436406952	-0.050979320759553	0.100254693063607	-0.077372719494118
	0.102705566137064	-0.095339452356011	0.083517854963567	-0.060606279071557	0.031041944982657

Tableau (VII.7) : La bande inférieure des valeurs propres et des vecteurs propres associés

	$\underline{\lambda}_1$	$\underline{\lambda}_2$	$\underline{\lambda}_3$	$\underline{\lambda}_4$	$\underline{\lambda}_5$
$\underline{\lambda}_i$	28.31064	272.74011	804.80824	1586.03769	2357.91217
$\underline{\omega}_i$	5.32077	16.5148	28.36914	39.82508	48.55834
$\underline{u}_i$	0.028099190805366	0.077700759033955	0.099037400089640	0.088117615731669	0.051253621627241
	0.054369151009722	0.099167628583313	0.023536305331693	-0.078170989940848	-0.091229892581451
	0.077125243510546	0.051728287512003	-0.091692851496583	-0.025582306146393	0.100457082671905
	0.093096484886298	-0.031248700268199	-0.050432813736116	0.098891099762154	-0.076232687855220
	0.101237888917204	-0.093921525215654	0.082187656912250	-0.059569083515692	0.030485744080773

Tableau (VII.8) : La bande supérieure des valeurs propres et des vecteurs propres associés

	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_4$	$\bar{\lambda}_5$
$\bar{\lambda}_i$	36.70195	353.38304	1042.16253	2052.87765	3051.45055
$\bar{\omega}_i$	6.05821	18.79848	32.28254	45.3086	55.23994
$\bar{u}_i$	0.028952941391022	0.080032270643891	0.101884261804600	0.090479109313086	0.052546354642945
	0.056013730758159	0.102014293764822	0.023913732921718	-0.080621762130073	-0.093784728974872
	0.079445705378056	0.053024871594119	-0.094464103348292	-0.025996898166107	0.103388597338570
	0.095878375002588	-0.032435823173158	-0.051541383315818	0.101675811774336	-0.078565478384254
	0.104238953133566	-0.096823356276702	0.084914203795875	-0.061698676505518	0.031629008145092

VII.1.7.4) Méthode de Deif :

Tableau (VII.6) : Les solutions propres du système "  $k^c u_i^c = \lambda_i^c M^c u_i^c$  "

	$\lambda_1^c$	$\lambda_2^c$	$\lambda_3^c$	$\lambda_4^c$	$\lambda_5^c$
$\lambda_i^c$	32.38273	311.88514	920.05675	1812.76587	2694.77039
$\omega_i^c$	5.690583	17.660270	30.33243	42.576588	51.911177
$u_i^c$	0.028516491016185	0.078840651949819	0.100430599122296	0.089275157319081	0.051888150512607
	0.055173075543853	0.100560785188826	0.023724379406481	-0.079368167080877	-0.092481007048297
	0.078259695769322	0.052364962375787	-0.093047572765509	-0.025788902554490	0.101891319612548
	0.094456731728151	-0.031826436406952	-0.050979320759553	0.100254693063607	-0.077372719494118
	0.102705566137064	-0.095339452356011	0.083517854963567	-0.060606279071557	0.031041944982657

Tableau (VII.9) : La bande inférieure des valeurs propres et des vecteurs propres associés

	$\underline{\lambda}_1$	$\underline{\lambda}_2$	$\underline{\lambda}_3$	$\underline{\lambda}_4$	$\underline{\lambda}_5$
$\underline{\lambda}_i$	28.31063	278.76631	834.12135	1726.25830	2609.11649
$\underline{\omega}_i$	5.32077	16.696296	28.88116	41.54826	51.07951
$\underline{u}_i$	0.028099190805366	0.077165410899267	0.113406838864260	0.090891660078007	0.051176983635121
	0.054369151009722	0.097306875155322	0.021390283665805	-0.082766148382302	-0.090832600405387
	0.077125243510546	0.047977368845896	-0.088401624600184	-0.026337597241470	0.100256489349488
	0.093096484886298	-0.031216122394424	-0.041614749701317	0.092084900014680	-0.076493525272930
	0.101237888917204	-0.098606502672047	0.070493595302817	-0.059666988255337	0.031899115490114

Tableau (VII.10) : La bande supérieure des valeurs propres et des vecteurs propres associés

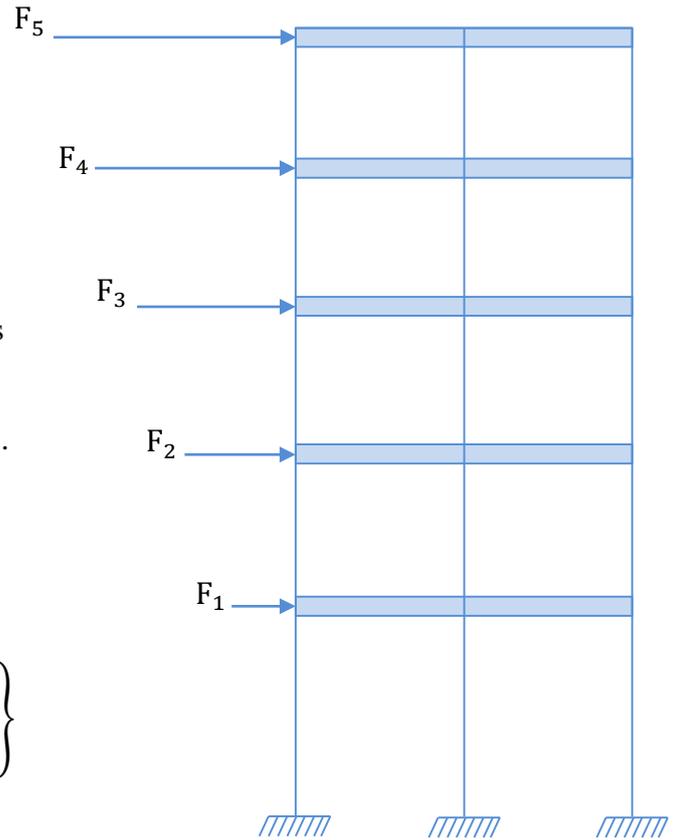
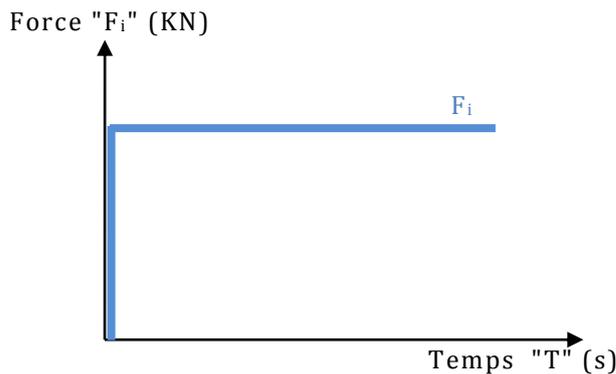
	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_4$	$\bar{\lambda}_5$
$\bar{\lambda}_i$	36.70195	345.92396	997.85187	1907.21032	2785.70732
$\bar{\omega}_i$	6.05821	18.599031	31.588793	43.67162	52.77980
$\bar{u}_i$	0.028952941391022	0.080755543213761	0.088084510188738	0.087277442651562	0.052576768977281
	0.056013730758159	0.104107409391650	0.025844408550050	-0.075603400001532	-0.094192709274012
	0.079445705378056	0.056838011783337	-0.095374014458756	-0.024593542221888	0.103588648402862
	0.095878375002588	-0.031961272778736	-0.059024666762211	0.109019085661656	-0.078331648823445
	0.104238953133566	-0.091347295551633	0.094699108651925	-0.060746126086601	0.030124675183741

**VII.1.8) La Réponse de la structure :**

On détermine le déplacement aux coordonnées nodal de tous les modes de vibrations, et on trace les courbes du déplacement des étages en fonction de la période dans le mode fondamental pour les différents paramètres incertains (bande supérieure, centrale et la bande inférieure).

On suppose que les forces  $F_i$  sont soudainement appliquées aux coordonnées nodales

Les conditions initial sont:  $F_i \begin{cases} x(t = 0) = 0 \\ \dot{x}(t = 0) = 0 \\ \ddot{x}(t = 0) \neq 0 \end{cases}$



**Figure VII.c :** Représentation de système des charges nodales

**VII.1.8.1) Evaluation de l'effort tranchant à la base :**

On suppose que ce bâtiment est implanté dans une région de zone IIa (groupe usage2 : bâtiment courant).

- $V = \frac{ADQ}{R} W$
- Zone IIa :
  - $S_2 \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 0.15s \\ T_2 = 0.40s \end{cases}$
  - $A = 0.15$
  - $\xi = 0.05$
  - $R = 5$
  - $Q = 1.1$

- $D = 2.5\eta(T_2/T)^{2/3} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 0.15s \\ T_2 = 0.40s \end{cases}$  et  $\eta \approx 1 \Rightarrow D = 1.553$
- $W = (M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5) g = (36 + 3 \times 35 + 32) 10$   
 $\Rightarrow W = 1730 \text{ KN}$
- $V = \frac{0.15 \cdot 1.553 \cdot 1.1}{5} 1730 \Rightarrow V = 88.66 \text{ KN}$

### VII.1.8.2) Répartition de l'effort tranchant :

- $V = 88.66 \text{ KN}$
- $T = 0.817 \text{ s} > 0.7 \text{ s} \Rightarrow F_t = 0.07 \cdot T \cdot V$

$T = 0.817 \text{ s}$  (période de premier mode de vibration "mode fondamentale")

$$\Rightarrow F_t = 0.07 \cdot T \cdot V = 0.07 \times 0.817 \times 88.66$$

$$\Rightarrow F_t = 5.06 \text{ KN}$$

- $F_k = (V - F_t) \frac{m_k h_k}{\sum_1^n m_j h_j}$

$$\sum_1^n m_j h_j = m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3 + m_4 h_4 + m_5 h_5$$

$$\sum_1^n m_j h_j = 36 \times 3.4 + 35 \times (6.4 + 9.4 + 12.4) + 32 \times 15.4$$

$$\Rightarrow \sum_1^n m_j h_j = 1602.2 \text{ t.m}$$

$$\Rightarrow F_k = (88.66 - 5.06) \frac{m_k h_k}{1602.2} = 83.6 \left( \frac{m_k h_k}{1602.2} \right)$$

- $F_1 = 83.6 \left( \frac{36 \times 3.4}{1602.2} \right) \Rightarrow F_1 = 6.386 \text{ KN}$
- $F_2 = 83.6 \left( \frac{35 \times 6.4}{1602.2} \right) \Rightarrow F_2 = 11.688 \text{ KN}$
- $F_3 = 83.6 \left( \frac{35 \times 9.4}{1602.2} \right) \Rightarrow F_3 = 17.166 \text{ KN}$
- $F_4 = 83.6 \left( \frac{35 \times 12.4}{1602.2} \right) \Rightarrow F_4 = 22.645 \text{ KN}$
- $F_5 = 83.6 \left( \frac{32 \times 15.4}{1602.2} \right) \Rightarrow F_5 = 25.713 \text{ KN}$

**VII.1.8.3) calcul de la réponse :**

$$M\ddot{x} + Kx = F$$

Découplage d'un système à une équation à n degré de liberté en un système de n équation à 1 degré de liberté :

$$M_{\text{diag}}\ddot{z} + K_{\text{diag}} z = P_i$$

$$P_i = \Phi^T F_i$$

$$M_{\text{diag}} = \Phi^T M \Phi$$

$$K_{\text{diag}} = \Phi^T K \Phi$$

$$z = \Phi^{-1} x$$

**VII.1.8.3.1) La réponse dans la base modale :**

La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$z_i(t) = \frac{2P_i}{M_{\text{diag}}\omega_i^2} \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega t\right)$$

**VII.1.8.3.2) La réponse dans la base physique :**

$$x = \Phi z$$

**VII.1.9) Réponse de la structure dans le cas où les planchers sont infiniment rigides :****VII.1.9.1) Réponse de la structure dans le système propre :**

$$P_i^c = (\Phi^c)^T \cdot F_i = \begin{pmatrix} 6.9066 \\ -1.0026 \\ 0.2093 \\ -0.1639 \\ 0.0407 \end{pmatrix}$$

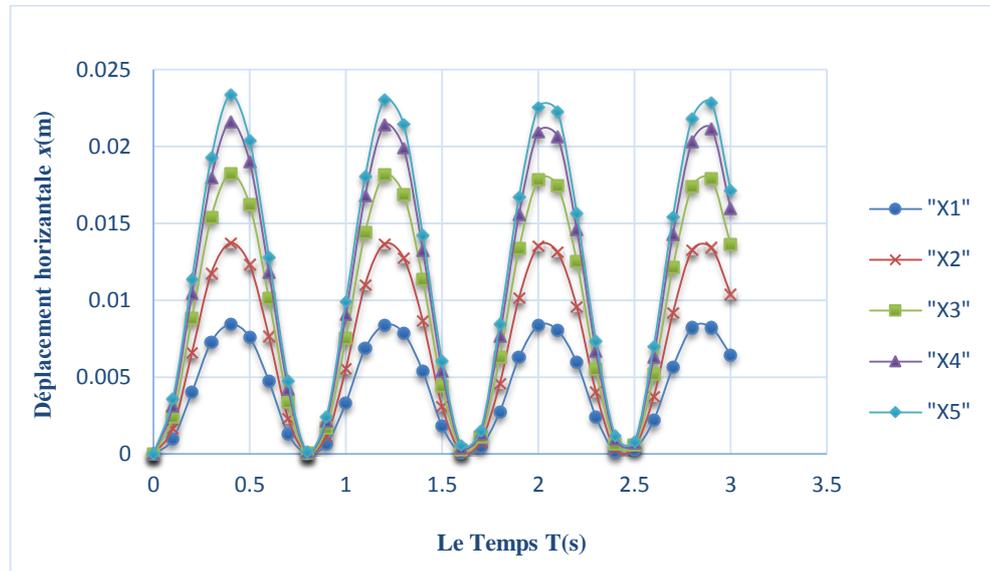
➤ Réponse dans la base modal : "  $z_i^c(t) = \frac{2P_i}{M_{diag}\omega_i^2} \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega_i^c t\right)$  "

- $z_1^c = 2338,459 \cdot 10^{-4} \sin^2(3,84285 \cdot t)$
- $z_2^c = -38,720 \cdot 10^{-4} \sin^2(11,37852 \cdot t)$
- $z_3^c = 3,129 \cdot 10^{-4} \sin^2(18,29034 \cdot t)$
- $z_4^c = -1.437 \cdot 10^{-4} \sin^2(23,88350 \cdot t)$
- $z_5^c = 0.269 \cdot 10^{-4} \sin^2(27,50797 \cdot t)$

➤ Réponse dans la base physique :  $x = \phi z$

$$\begin{aligned}
 x_i^c = & \begin{pmatrix} 87.36970 \\ 140.97032 \\ 184.50281 \\ 214.85807 \\ 229.86811 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(3,84285 \cdot t) + \begin{pmatrix} -3.49337 \\ -3.64324 \\ -1.51185 \\ 1.56620 \\ 3.66356 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(11,37852 \cdot t) \\
 & + \begin{pmatrix} 0.31524 \\ 0.00719 \\ -0.31250 \\ -0.12658 \\ 0.26413 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(18,29034 \cdot t) + \begin{pmatrix} -0.19404 \\ 0.13121 \\ 0.01448 \\ -0.14220 \\ 0,09341 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(23,88350 \cdot t) \\
 & + \begin{pmatrix} 0.01139 \\ -0.02369 \\ 0.02789 \\ -0.02261 \\ 0.00964 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(27,50797 \cdot t)
 \end{aligned}$$

Ce graphe représente le déplacement horizontal des planchers en fonction de la période du système propre ( $k^c u_i^c = \lambda_i^c M^c u_i^c$ ) :



**FigureVII.1** : Courbe de déplacement horizontale  $x$ (m) des planchers en fonction du Temps  $T$ (s) du système propre

$x_1$  : déplacement du premier plancher.

$x_2$  : déplacement du deuxième plancher.

$x_3$  : déplacement du troisième plancher.

$x_4$  : déplacement du quatrième plancher.

$x_5$  : déplacement du cinquième plancher.

#### VII.1.9.2) Bande supérieure :

$$P_i = \underline{\phi}^T \cdot F_i = \begin{pmatrix} 6.80753 \\ -0.98182 \\ 0.20087 \\ -0.15664 \\ 0.03768 \end{pmatrix}$$

➤ Réponse dans la base modal : "  $\bar{z}_i(t) = \frac{2P_i}{M_{\text{diag}}\omega_i^2} \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega_i t\right)$  "

- $\bar{z}_1 = 2636,200 \cdot 10^{-4} \sin^2(3,59328 \cdot t)$
- $\bar{z}_2 = -4,356 \cdot 10^{-4} \sin^2(10,64087 \cdot t)$
- $\bar{z}_3 = 3,432 \cdot 10^{-4} \sin^2(17,10638 \cdot t)$
- $\bar{z}_4 = -1,570 \cdot 10^{-4} \sin^2(22,33900 \cdot t)$
- $\bar{z}_5 = 0,285 \cdot 10^{-4} \sin^2(25,73063 \cdot t)$

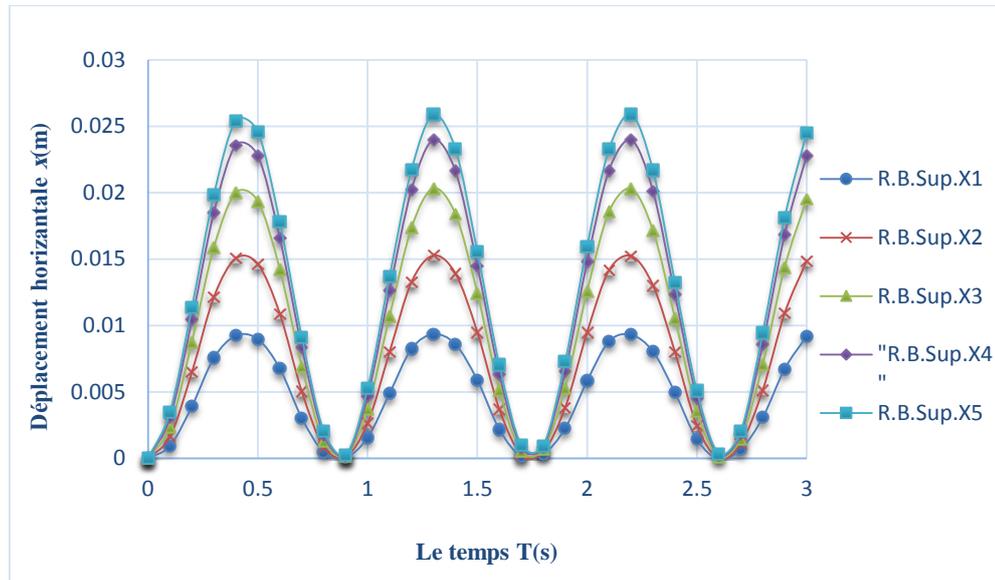
➤ Réponse dans la base physique :  $x = \phi z$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 97.05717 \\ 156.61196 \\ 204.99005 \\ 238.73892 \\ 255.45006 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(3,59328 \cdot t) + \begin{pmatrix} -3.85513 \\ -4.02373 \\ -1.67412 \\ 1.72321 \\ 4.04209 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(10,64087 \cdot t)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0.34102 \\ 0.00839 \\ -0.33782 \\ -0.13763 \\ 0.28516 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(17,10638 \cdot t) + \begin{pmatrix} -0.12297 \\ 0.14116 \\ 0.01593 \\ -0.15324 \\ 0.10026 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(22,339 \cdot t)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0.01191 \\ -0.02471 \\ 0.02909 \\ -0.02356 \\ 0.01001 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(25,73063 \cdot t)$$

Ce graphe représente le déplacement horizontal des planchers en fonction de la période dans la bande supérieure :



**Figure VII.2 :** Courbe de déplacement horizontale des planchers en fonction du temps.

R : Rigide.

B.Sup : Bande Supérieure.

**VII.1.9.3) Bande inférieure :**

$$P_i = \overline{\Phi^T} \cdot F_i = \begin{pmatrix} 7.01017 \\ -1.02468 \\ 0.21841 \\ -0.17181 \\ 0.04394 \end{pmatrix}$$

➤ Réponse dans la base modale : " $\underline{z}_i(t) = \frac{2P_i}{M_{diag}\omega_i^2} \sin^2\left(\frac{1}{2}\overline{\omega}_i t\right)$ "

- $\underline{z}_1 = 2094,393 \cdot 10^{-4} \sin^2(4,09091 \cdot t)$
- $\underline{z}_2 = -34,927 \cdot 10^{-4} \sin^2(12,11145 \cdot t)$
- $\underline{z}_3 = 2,882 \cdot 10^{-4} \sin^2(19,46635 \cdot t)$
- $\underline{z}_4 = -1,330 \cdot 10^{-4} \sin^2(25,41733 \cdot t)$
- $\underline{z}_5 = 0,256 \cdot 10^{-4} \sin^2(29,2727 \cdot t)$

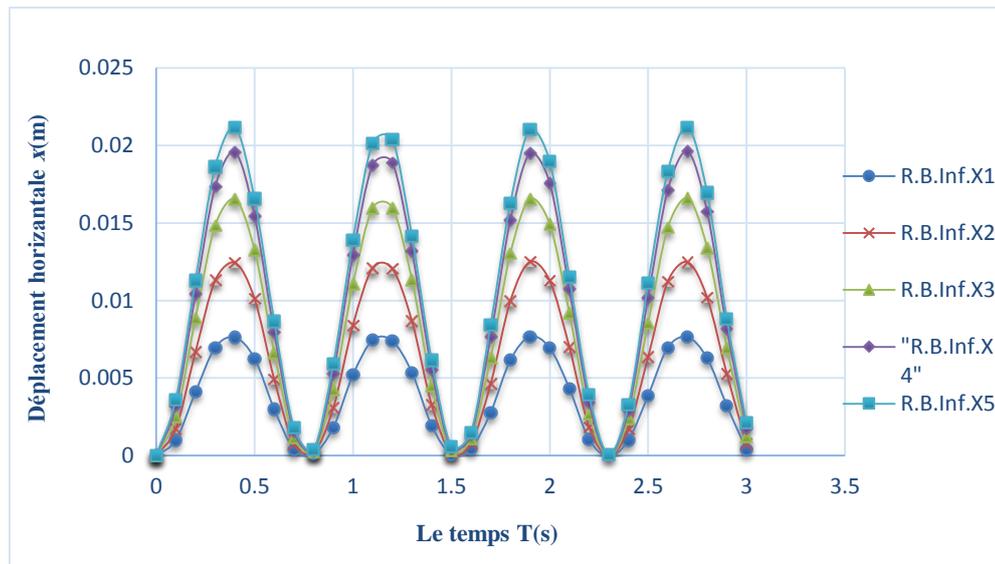
➤ Réponse dans la base physique :  $x = \phi z$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 79.44455 \\ 128.17363 \\ 167.74109 \\ 195.31872 \\ 208.93531 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(4,09091 \cdot t) + \begin{pmatrix} -3.19875 \\ -3.33316 \\ -1.37932 \\ 1.43867 \\ 3.35533 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(12,11145 \cdot t)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0.29451 \\ 0.00615 \\ -0.29217 \\ -0.11762 \\ 0.24729 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(19,46635 \cdot t) + \begin{pmatrix} -0.10691 \\ 0.12332 \\ 0.01328 \\ -0.13340 \\ 0.08801 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(25,41733 \cdot t)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0.01099 \\ -0,02287 \\ 0.02696 \\ -0.02189 \\ 0.00937 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(29,2727 \cdot t)$$

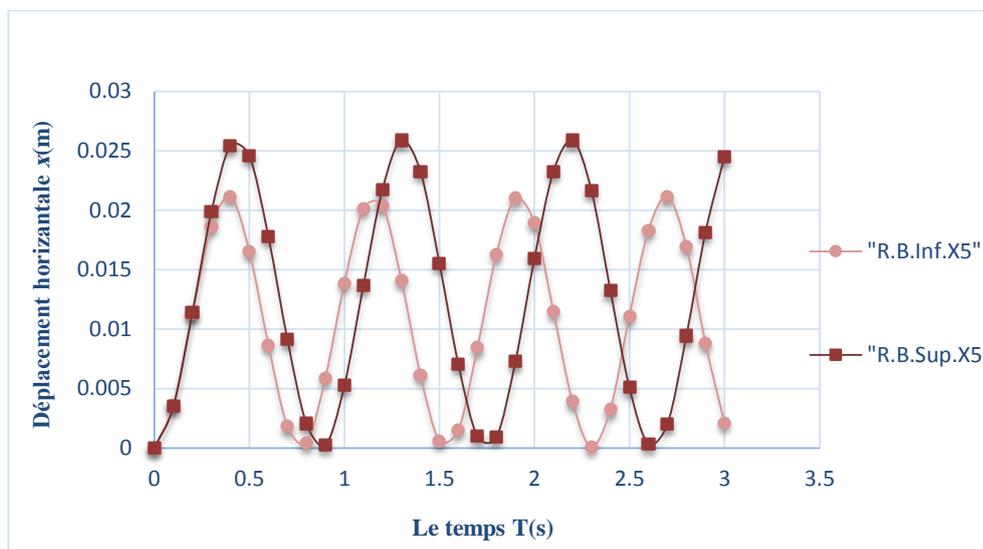
Ce graphe représente le déplacement horizontal des planchers en fonction de la période de la bande inférieure :



**Figure VII.3 :** Courbe de déplacement horizontal des planchers en fonction du temps.

B.Inf : Bande Inférieure.

La courbe suivant montre le déplacement du cinquième plancher à paramètre incertain (bande supérieure et inférieure) en fonction de la période :



**Figure VII.4 :** Courbe de déplacement du cinquième plancher à paramètre incertain (bande supérieure et inférieure) en fonction du temps.

On présente dans le tableau suivant les déplacements maximaux des planchers pour un portique à planchers infiniment rigides :

**Tableau VII.11 :** Déplacement maximum des planchers pour un portique à planchers infiniment rigides

Déplacement Max (mm)	Bande supérieure (Déplacement max)	centrale	Bande inférieure (Déplacement min)
$x_{\max 1}$	9.343	8.401	7.644
$x_{\max 2}$	15.271	13.744	12.495
$x_{\max 3}$	20.302	18.272	16.610
$x_{\max 4}$	24.014	21.613	19.648
$x_{\max 5}$	25.988	23.390	21.264

## VII.1.10) la réponse de la structure dans le cas où les planchers sont flexible :

VII.1.10.1) Réponse de la structure dans le système propre :

$$P_i^c = (\Phi^c)^T \cdot F_i = \begin{pmatrix} 6.95109 \\ -0.59425 \\ 0.31351 \\ -0.08840 \\ 0.04674 \end{pmatrix}$$

➤ Réponse dans la base modal : "  $z_i^c(t) = \frac{2P_i}{M_{\text{diag}}\omega_i^2} \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega_i^c t\right)$  "

- $z_1^c = 4293,082 \cdot 10^{-4} \sin^2(2,84529 \cdot t)$
- $z_2^c = -38,107 \cdot 10^{-4} \sin^2(8,83014 \cdot t)$
- $z_3^c = 6,815 \cdot 10^{-4} \sin^2(15,16622 \cdot t)$
- $z_4^c = -0,975 \cdot 10^{-4} \sin^2(21,28829 \cdot t)$
- $z_5^c = 0,347 \cdot 10^{-4} \sin^2(25,95559 \cdot t)$

➤ Réponse dans la base physique :

$$x^c = \begin{pmatrix} 122.42363 \\ 236.86253 \\ 335.97528 \\ 405.51048 \\ 440.92340 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(2,84529 \cdot t) + \begin{pmatrix} -3.00438 \\ -3.83207 \\ -1.99547 \\ 1.21281 \\ 3.63310 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(8,83014 \cdot t)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0.68443 \\ 0.16168 \\ -0.63412 \\ -0.34742 \\ 0.56917 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(15,16622 \cdot t) + \begin{pmatrix} -0.08707 \\ 0.07741 \\ 0.02515 \\ -0.09778 \\ 0.05911 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(21,28829 \cdot t)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0.01780 \\ -0.03208 \\ 0.03535 \\ -0.02684 \\ 0.01077 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(25,95559 \cdot t)$$

Ce graphe représente le déplacement horizontal des planchers en fonction de la période du système propre ( $k^c u_i^c = \lambda_i^c M^c u_i^c$ ) :

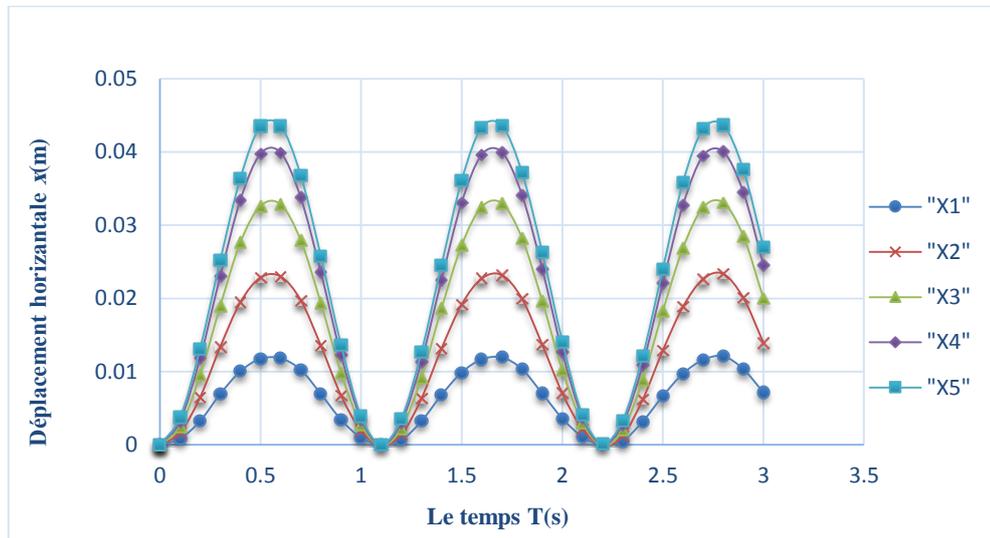


Figure VII.5 : Courbe de déplacement horizontale des planchers en fonction du temps.

VII.1.10.2) Bande supérieure :

$$P_i = \underline{\phi}^T \cdot F_i = \begin{pmatrix} 6.85100 \\ -0.57920 \\ 0.30385 \\ -0.08246 \\ 0.04419 \end{pmatrix}$$

➤ Réponse dans la base modal : " $\bar{z}_i(t) = \frac{2P_i}{M_{diag}\omega_i^2} \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega_i t\right)$ "

- $\bar{z}_1 = 4839,874 \cdot 10^{-4} \sin^2(2,66039 \cdot t)$
- $\bar{z}_2 = -42,473 \cdot 10^{-4} \sin^2(8,25742 \cdot t)$
- $\bar{z}_3 = 7,551 \cdot 10^{-4} \sin^2(14,18457 \cdot t)$
- $\bar{z}_4 = -1,040 \cdot 10^{-4} \sin^2(19,91254 \cdot t)$
- $\bar{z}_5 = 0,375 \cdot 10^{-4} \sin^2(24,27917 \cdot t)$

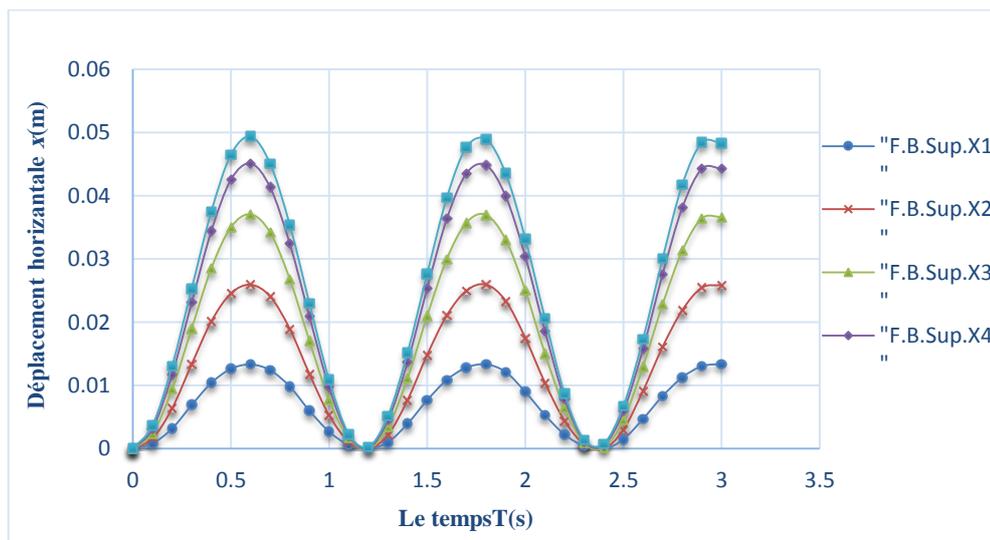
➤ Réponse dans la base physique :  $x = \phi z$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 135.99654 \\ 263.14000 \\ 373.27646 \\ 450.57526 \\ 489.97863 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(2,66039 . t) + \begin{pmatrix} -3.30017 \\ -4.21192 \\ -2.19704 \\ 1.32722 \\ 3.98911 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(8,25742 . t)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0.74783 \\ 0.17772 \\ -0.69237 \\ -0.38082 \\ 0.62060 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(14,18457 . t) + \begin{pmatrix} -0.09163 \\ 0.08128 \\ 0.02660 \\ -0.10283 \\ 0.06194 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(19,91254 . t)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0.01921 \\ -0.03419 \\ 0.03765 \\ -0.02857 \\ 0.01142 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(24,27917 . t)$$

Ce graphe représente le déplacement horizontal des planchers en fonction de la période dans le mode fondamentale (1 ère mode de vibration) de la bande supérieure.



**Figure VII.6 :** Courbe de déplacement horizontal des planchers en fonction du temps.

## VII.1.10.3) Bande inférieure :

$$P_i = \bar{\Phi}^T \cdot F_i = \begin{pmatrix} 7.05569 \\ -0.61021 \\ 0.32385 \\ -0.09484 \\ 0.04951 \end{pmatrix}$$

➤ Réponse dans la base modal : "  $\underline{z}_i(t) = \frac{2P_i}{M_{\text{diag}} \bar{\omega}_i^2} \sin^2\left(\frac{1}{2} \bar{\omega}_i t\right)$  "

- $\underline{z}_1 = 3844,859 \cdot 10^{-4} \sin^2(3,02911 \cdot t)$
- $\underline{z}_2 = -34,539 \cdot 10^{-4} \sin^2(9,39924 \cdot t)$
- $\underline{z}_3 = 6,215 \cdot 10^{-4} \sin^2(16,14127 \cdot t)$
- $\underline{z}_4 = -0,924 \cdot 10^{-4} \sin^2(22,65435 \cdot t)$
- $\underline{z}_5 = 0,324 \cdot 10^{-4} \sin^2(27,61997 \cdot t)$

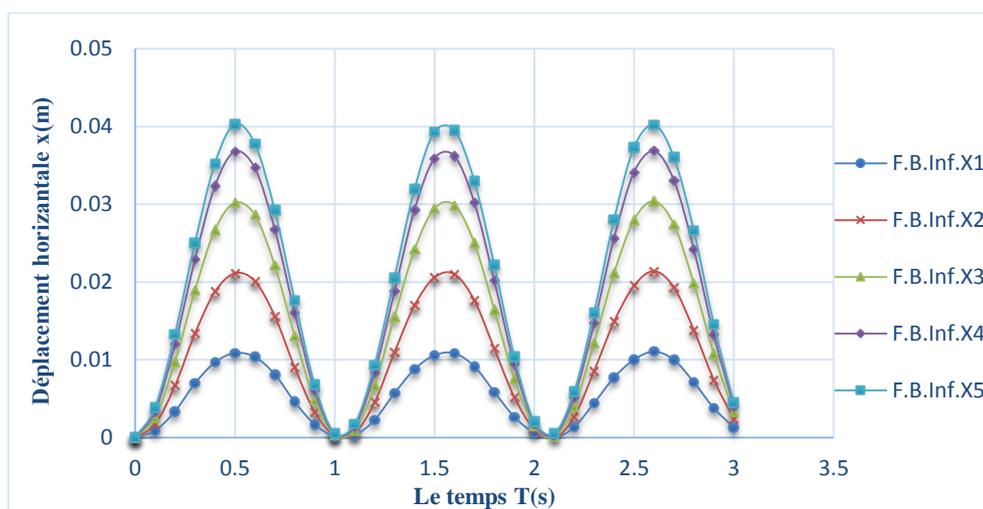
➤ Réponse dans la base physique :  $\underline{x} = \bar{\Phi} \underline{z}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 111.31998 \\ 215.36491 \\ 305.45755 \\ 368.63885 \\ 400.78410 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(3,02911 \cdot t) + \begin{pmatrix} -2.76424 \\ -3.52348 \\ -1.83143 \\ 1.12031 \\ 3.34419 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(9,39924 \cdot t)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0.63321 \\ 0.14862 \\ -0.58709 \\ -0.32033 \\ 0.52774 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(16,14127 \cdot t) + \begin{pmatrix} -0.08340 \\ 0.07449 \\ 0.02402 \\ -0.09394 \\ 0.05701 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(22,65435 \cdot t)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0.01705 \\ -0.03043 \\ 0.03355 \\ -0.02549 \\ 0.01026 \end{pmatrix} 10^{-4} \sin^2(27,61997 \cdot t)$$

Ce graphe représente le déplacement horizontal des planchers en fonction de la période de la bande inférieure :

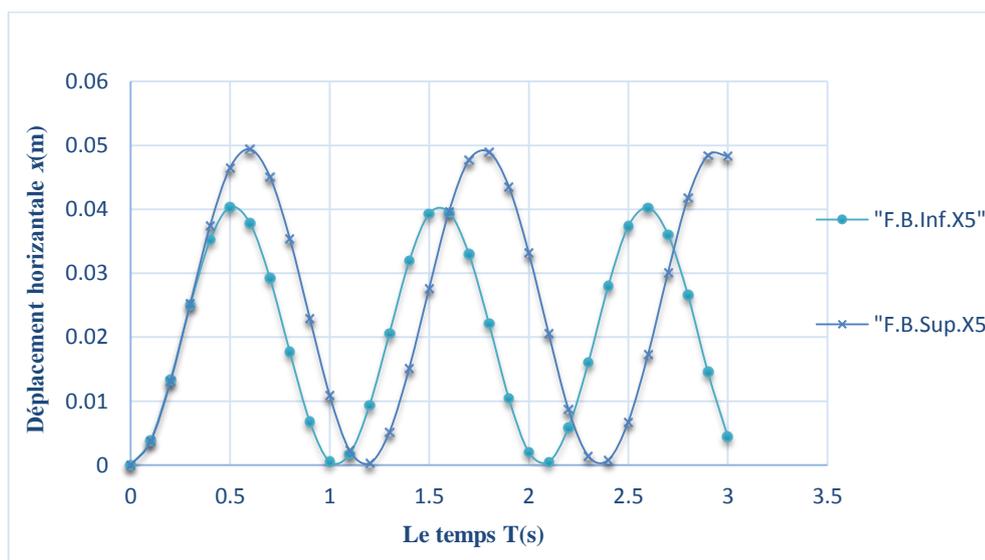


**Figure VII.7 :** Courbe de déplacement horizontal des planchers en fonction du temps.

F : Flexible.

B.Inf : Bande Inférieure.

Nous avons tracé la courbe de déplacement du cinquième plancher à paramètre incertain (bande supérieure et inférieure) en fonction de la période :



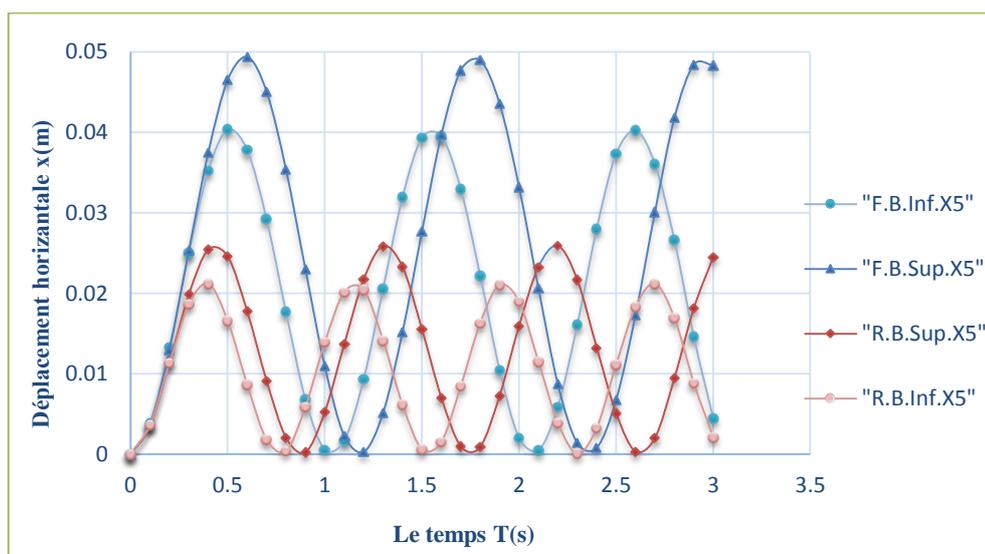
**Figure VII.8 :** Courbe de déplacement du cinquième étage à paramètre incertain en fonction du temps.

On présente dans le tableau suivant les déplacements maximaux des planchers dans le mode fondamental pour un portique à planchers flexibles :

**Tableau VII.12 :** Déplacement max des planchers dans le cas où les planchers a une rigidité finis (flexibles).

Déplacement Max (mm)	Bande inférieure	centrale	Band supérieure
$x_{max1}$	10.912	12.003	13.337
$x_{max2}$	21.203	23.324	25.915
$x_{max3}$	30.310	33.341	37.047
$x_{max4}$	36.932	40.625	45.139
$x_{max5}$	40.472	44.520	49.466

Dans ce graphe, on présente le déplacement de cinquième planchers à paramètre incertain pour les deux cas (cas où les planchers sont infiniment rigide et dans le cas où les planchers sont flexibles) :



**Figure VII.9 :** Déplacement des planchers à paramètre incertain pour les deux cas (infiniment rigide et flexible) en fonction du temps.

## VII.1.11) Comparaison et interprétation :

## VII.1.11.1) Comparaison entre les deux méthodes “Intervalle et Deif” :

## a) Les planchers sont rigides :

On présente dans les deux tableaux suivants la variation de  $\Delta\omega$  par rapport à  $\omega_{\text{moy}}$  dans les deux méthodes pour un portique à planchers rigides :

Tableau VII.13 : variation de  $\Delta\omega$  par rapport  $\omega_{\text{moy}}$  par la méthode intervalle

	Méthode intervalle				
	$\underline{\omega}$	$\overline{\omega}$	$\omega_{\text{moy}} = \frac{\overline{\omega} + \underline{\omega}}{2}$	$\Delta\omega = \frac{\overline{\omega} - \underline{\omega}}{2}$	$\Delta\omega/\omega_{\text{moy}}$ (%)
<b>1<sup>ère</sup> mode</b>	7.18655	8.18182	7.684185	0.49764	6.47 %
<b>2<sup>ème</sup> mode</b>	21.28173	24.22290	22.752315	1.47059	6.46 %
<b>3<sup>ème</sup> mode</b>	34.21276	38.93270	36.57273	2.35997	6.45 %
<b>4<sup>ème</sup> mode</b>	44.67800	50.83465	47.756325	3.07818	6.45 %
<b>5<sup>ème</sup> mode</b>	51.46125	58.54540	55.003325	3.54208	6.45 %

Tableau VII.14 : variation de  $\Delta\omega$  par rapport  $\omega_{\text{moy}}$  par la méthode de Deif

	Méthode Deif				
	$\underline{\omega}$	$\overline{\omega}$	$\omega_{\text{moy}} = \frac{\overline{\omega} + \underline{\omega}}{2}$	$\Delta\omega = \frac{\overline{\omega} - \underline{\omega}}{2}$	$\Delta\omega/\omega_{\text{moy}}$ (%)
<b>1<sup>ère</sup> mode</b>	7.18655	8.18182	7.684185	0.49764	6.47 %
<b>2<sup>ème</sup> mode</b>	21.66397	23.80359	22.73378	1.16981	5.15 %
<b>3<sup>ème</sup> mode</b>	34.75817	38.23367	36.54592	1.78775	4.76 %
<b>4<sup>ème</sup> mode</b>	46.49339	49.09415	47.79377	1.30038	2.72 %
<b>5<sup>ème</sup> mode</b>	54.08613	55.99257	55.03935	0.95322	1.73 %

Le tableau suivant montre la variation de l'intervalle de  $\omega$  par la méthode de Deif par rapport à la méthode intervalle pour un portique à planchers rigides :

**Tableau VII.15** : variation en pourcentage entre les deux méthodes.

	Méthode intervalle		Méthode de Deif		Pourcentage %	
	$\underline{\omega}_{\text{intervale}}$	$\overline{\omega}_{\text{intervale}}$	$\underline{\omega}_{\text{Deif}}$	$\overline{\omega}_{\text{Deif}}$	$\frac{\overline{\omega}_{\text{Deif}} - \underline{\omega}_{\text{int}}}{\underline{\omega}_{\text{interval}}} \%$	$\frac{\underline{\omega}_{\text{int}} - \overline{\omega}_{\text{Deif}}}{\underline{\omega}_{\text{int}}} \%$
<b>1<sup>ère</sup> mode</b>	7.18655	8.18182	7.18655	8.18182	0	0
<b>2<sup>ème</sup> mode</b>	21.28173	24.22290	21.66397	23.80359	1.79	1.73
<b>3<sup>ème</sup> mode</b>	34.21276	38.93270	34.75817	38.23367	1.60	1.80
<b>4<sup>ème</sup> mode</b>	44.67800	50.83465	46.49339	49.09415	4.06	3.42
<b>5<sup>ème</sup> mode</b>	51.46125	58.54540	54.08613	55.99257	5.10	4.36

**b) Les planchers sont flexibles :**

On présente dans les deux tableaux suivants la variation de  $\Delta\omega$  par rapport à  $\omega_{\text{moy}}$  dans les deux méthodes pour un portique à planchers flexibles :

**Tableau VII.16** : variation de  $\Delta\omega$  par rapport  $\omega_{\text{moy}}$  par la méthode intervalle

	Méthode intervalle				
	$\underline{\omega}$	$\overline{\omega}$	$\omega_{\text{moy}} = \frac{\overline{\omega} + \underline{\omega}}{2}$	$\Delta\omega = \frac{\overline{\omega} - \underline{\omega}}{2}$	$\frac{\Delta\omega}{\omega_{\text{moy}}} (\%)$
<b>1<sup>ère</sup> mode</b>	5.32077	6.05821	5.68949	0.36872	6.48 %
<b>2<sup>ème</sup> mode</b>	16.51480	18.7984	17.6566	1.1418	6.47 %
<b>3<sup>ème</sup> mode</b>	28.36914	32.2825	30.32582	1.95668	6.45 %
<b>4<sup>ème</sup> mode</b>	39.82508	45.3086	42.56684	2.74176	6.44 %
<b>5<sup>ème</sup> mode</b>	48.55834	55.2399	51.89912	3.34078	6.44 %

**Tableau VII.17** : variation de  $\Delta\omega$  par rapport  $\omega_{\text{moy}}$  par la méthode de Deif

	<b>Méthode Deif</b>				
	$\underline{\omega}$	$\overline{\omega}$	$\omega_{\text{moy}} = \frac{\overline{\omega} + \underline{\omega}}{2}$	$\Delta\omega = \frac{\overline{\omega} - \underline{\omega}}{2}$	$\frac{\Delta\omega}{\omega_{\text{moy}}}$ (%)
<b>1<sup>ère</sup> mode</b>	5.32077	6.05821	5.68949	0.36872	6.48 %
<b>2<sup>ème</sup> mode</b>	16.69620	18.5990	17.6476	0.9514	5.39 %
<b>3<sup>ème</sup> mode</b>	28.88110	31.5887	30.2349	1.3538	4.48 %
<b>4<sup>ème</sup> mode</b>	41.54830	43.6716	42.60995	1.06165	2.49 %
<b>5<sup>ème</sup> mode</b>	51.07950	52.7798	51.92965	0.85015	1.64 %

Le tableau suivant montre la variation de l'intervalle de  $\omega$  par la méthode de Deif par rapport à la méthode intervalle pour un portique à planchers flexibles:

**Tableau VII.18** : variation en pourcentage de la méthode de Deif par rapport de la méthode intervalle.

	<b>Méthode intervalle</b>		<b>Méthode de Deif</b>		<b>Pourcentage</b>	
	$\underline{\omega}$	$\overline{\omega}$	$\underline{\omega}$	$\overline{\omega}$	$\frac{\underline{\omega}_{\text{Deif}} - \underline{\omega}_{\text{int}}}{\underline{\omega}_{\text{intervalle}}}$ %	$\frac{\overline{\omega}_{\text{int}} - \overline{\omega}_{\text{Deif}}}{\overline{\omega}_{\text{intervalle}}}$ %
1 <sup>ère</sup> mode	5.32077	6.05821	5.32077	6.05821	0 %	0 %
2 <sup>ème</sup> mode	16.51480	18.7984	16.69620	18.5990	1.09 %	1.06 %
3 <sup>ème</sup> mode	28.36914	32.2825	28.88110	31.5887	1.8 %	2.19 %
4 <sup>ème</sup> mode	39.82508	45.3086	41.54830	43.6716	4.32 %	3.61 %
5 <sup>ème</sup> mode	48.55834	55.2399	51.07950	52.7798	5.19 %	4.45 %

- En comparant les deux méthodes (méthode intervalle et méthode Deif) pour l'analyse d'un portique à planchers rigides, on constate que les variations de  $\Delta\omega/\omega_{moy}$  dans la première méthode, sont pratiquement constantes (6.45%) sur tous les modes de vibration. En revanche, la deuxième méthode présente des variations variables allant de 6.47% jusqu'à 1.73%.
- En comparant les deux méthodes pour le même portique à planchers flexibles, on constate que les variations de  $\frac{\Delta\omega}{\omega_{moy}}$  dans la première méthode sont pratiquement constantes (6.45%) sur tous les modes de vibration. En revanche la deuxième méthode présente des variations variables allant de 6.47% jusqu'à 1.64%.
- La variation de  $\Delta\omega$  par rapport à  $\omega_{moy}$  pour les deux méthodes (intervalle et Deif) est presque la même dans les deux cas (portique à planchers rigides et flexibles).
- Les intervalles obtenus par la méthode de Deif se resserrent de plus en plus en fonction de l'augmentation de mode de vibration et on remarque qu'ils sont toujours inclus dans les intervalles obtenus par la méthode intervalle (méthode exact).

### VII.1.11.2) Comparaison entre les deux cas “les planchers sont rigides et flexibles”:

**Tableau VII.19** : la différence en % de pulsation propre entre les deux cas.

	<b>Les plancher sont infiniment rigides</b>	<b>Les planchers sont flexibles</b>	<b>Pourcentage %</b>
	$\omega_R^c$	$\omega_F^c$	$\frac{\omega_R^c - \omega_F^c}{\omega_R^c} \%$
1 <sup>ère</sup> mode	7.68569	5.69058	25.96
2 <sup>ème</sup> mode	22.75703	17.66027	22.40
3 <sup>ème</sup> mode	36.85067	30.33243	17.69
4 <sup>ème</sup> mode	47.76699	42.57658	10.86
5 <sup>ème</sup> mode	55.01594	51.91117	5.64

- La valeur de  $\omega$  dans le mode fondamental obtenue à partir de l’hypothèse d’un portique à planchers flexibles est inférieure d’environ 26% par rapport à celle calculé à partir de l’hypothèse d’un portique à planchers rigides.

- Les valeurs de  $\omega$  dans les trois premiers modes obtenues à partir de l’hypothèse d’un portique à planchers flexibles sont inférieures au moins de 18% par rapport à celles calculées à partir de l’hypothèse d’un portique à planchers rigides.

- La valeur de la band supérieure de la pulsation obtenue en mode fondamentale pour un portique à planchers flexibles est inférieure à la valeur de la band inférieure d’un portique à planchers rigides.

- Au vu des résultats obtenus, l’étude du portique basé sur l’hypothèse d’un plancher flexible et celle d’un plancher rigide a révélé des différences notables dans les valeurs des pulsations, les périodes et les réponses.

### VII.1.11.3) Déplacement maximaux du portique dans le mode fondamentale pour les deux cas :

Le tableau suivant montre la différence (exprimé en %) des déplacements maximaux entre les deux cas (rigides et flexibles) à un force soudainement appliquée au niveau des planchers :

**Tableau VII.20** : la différence en % de déplacement des planchers entre les deux cas.

Déplacement Max (mm)	Les planchers sont rigides	Les planchers sont flexibles	Différence en %
$x_{\max 1}$	8.401	12.003	42.88 %
$x_{\max 2}$	13.744	23.324	69.7 %
$x_{\max 3}$	18.272	33.341	82.47 %
$x_{\max 4}$	21.613	40.625	87.98 %
$x_{\max 5}$	23.390	44.520	90.34 %

- Les déplacements observés sur le portique à planchers flexible sont toujours plus important que ceux observés sur le portique à planchers rigides.
- La différence entre les déplacements par rapport aux déplacements des planchers du portique a planchers infiniment rigides varié de façon croissante à partir de premier étage jusqu'à atteindre une valeur de 90.34 % de dernier étage.

**Application 2 :****VII.2.1) ETUDE DE CONVERGENCE :**

Pour l'étude de cette partie on a choisi comme exemple le tunnel de TOULON en France.

**Objectifs du projet:**

Le projet de réalisation du 2<sup>nd</sup> tube du tunnel de Toulon et d'élargissement de l'A57 à 3 voies répond à plusieurs objectifs :

- Réaliser la continuité autoroutière entre l'A50 et l'A57 :
  - Le tube Nord (1<sup>ère</sup> tube) permet déjà de rejoindre Marseille vers l'Ouest en provenance de Nice, de l'Est du Var ou d'Hyères.
  - Le tube Sud (2<sup>ème</sup> tube) permettra d'achever la continuité autoroutière entre l'A50 venant de Marseille vers l'A57 en direction de Nice en réalisant le second tube pour le sens Marseille/Nice sous le centre-ville de Toulon parallèlement au tube Nord
- Délester les axes du centre de Toulon pour permettre de retirer le trafic de transit de l'agglomération toulonnaise et libérer ainsi les rues du centre-ville. Cela contribuera à améliorer la qualité de vie des toulonnais en réduisant les nuisances (bruit, pollution, congestion, ...) et permettra de favoriser le développement de nouvelles formes de mobilités au sein de la ville : couloirs bus, bandes cyclables, TCSP,...
- Ouvrir les tunnels à l'ensemble des poids lourds et des véhicules de transports en commun. Ces trafics sont aujourd'hui interdits dans le tube Nord pour des raisons de

**Enjeux :**

Sécurité. Ils transitent donc par la surface (centre-ville de Toulon). Avec la mise en service du tube Sud, et à l'exception des transports de matières dangereuses, les poids lourds et transports en commun pourront circuler dans les deux sens du tunnel.

Le projet de traversée souterraine de Toulon s'inscrit dans la démarche engagée à l'échelle de l'agglomération de développement des mobilités durables, en cohérence avec la requalification des espaces littoraux et le développement de l'attractivité de l'aire toulonnaise pour les habitants, le tourisme et l'économie.

Cet aménagement accompagne la démarche de rééquilibrage des différents modes de déplacement et de réorganisation du fonctionnement et des circulations du centre-ville de Toulon initiées par la ville et la communauté d'agglomération.

**Description générale :**

L'opération consiste à réaliser un ouvrage routier de 3,3 km dont 3 km de tunnel entre l'A50 et l'A57.

Dès l'origine, la traversée souterraine de Toulon a été conçue comme un tunnel bi-tubulaire, chaque tube étant dédié à un sens de circulation.

Le tube Nord a été mis en service en 2002.

Dans sa configuration définitive, l'ouvrage comporte deux tubes indépendants (un par sens de circulation), distants d'une cinquantaine de mètres, chaque sens disposant de 2 voies.

Ces tubes sont dotés d'un système de ventilation semi-transversal. Chacun est divisé en deux cantons de 1 500 m environ. Chaque canton est alimenté par une usine de ventilation dont le gros œuvre a été construit avec le tube Nord : Unité de Ventilation 1 (Castagneur) à l'Ouest, et Unité de Ventilation 2 (Cdt Marchand) à l'Est.

Lors de la réalisation du 2<sup>ème</sup> tube, les dispositifs de sécurité sont complétés en connectant les deux tubes par des rameaux de liaison espacés de 200 m en moyenne et destinés à l'évacuation des usagers en cas d'accident majeur.

Afin d'assurer la meilleure fluidité de la sortie de ville (Est) et la sécurité du tunnel en évitant les remontées de files de l'autoroute A57 dans le tunnel, un élargissement de l'A57 à 3 voies depuis la sortie Est du tunnel jusqu'à Tom badou est prévu.

Dans un second temps, cette opération sera complétée par l'élargissement de l'A57 à 2x3 voies entre l'extrémité Est du tunnel et l'échangeur Pierre Ronde.

Pour ce cas d'étude on a choisi comme modèle de calcul pour la discrétisation du sol un modèle rectangulaire, car l'étude de convergence par la M.E.F et la méthode de couplage M.E.F-M.E.I ne dépend pas du modèle, elle dépend de la taille et du nombre des éléments.

$$H_c = 36 \text{ m (hauteur de couverture).}$$

$$H_0 = 41.6 \text{ m (hauteur total).}$$

$$E = 100 \text{ MPa}$$

$$\gamma = 0.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_0 = \sum \gamma_i h_i = \gamma_0 H_0 = 0.2 \times 41.6 = 0.832 \text{ MPa}$$

**a) Etude de convergence par la M.E.F :**

On a pris comme maillage les modèles suivants :

➤ Modèle 12X6 :

72 éléments.

Le nombre de degrés de liberté est de 161, et le nombre de nœuds est de 91

➤ Modèle 24X12 :

288 éléments.

Le nombre de degrés de liberté est de 611, et le nombre de nœuds est de 325.

➤ Modèle 48X18:

864 éléments.

Le nombre de degrés de liberté est de 1805, et le nombre de nœuds est de 931.

➤ Modèle 48X24 :

1152 éléments.

Le nombre de degrés de liberté est de 2375 DDL et le nombre de nœuds est de 1225.

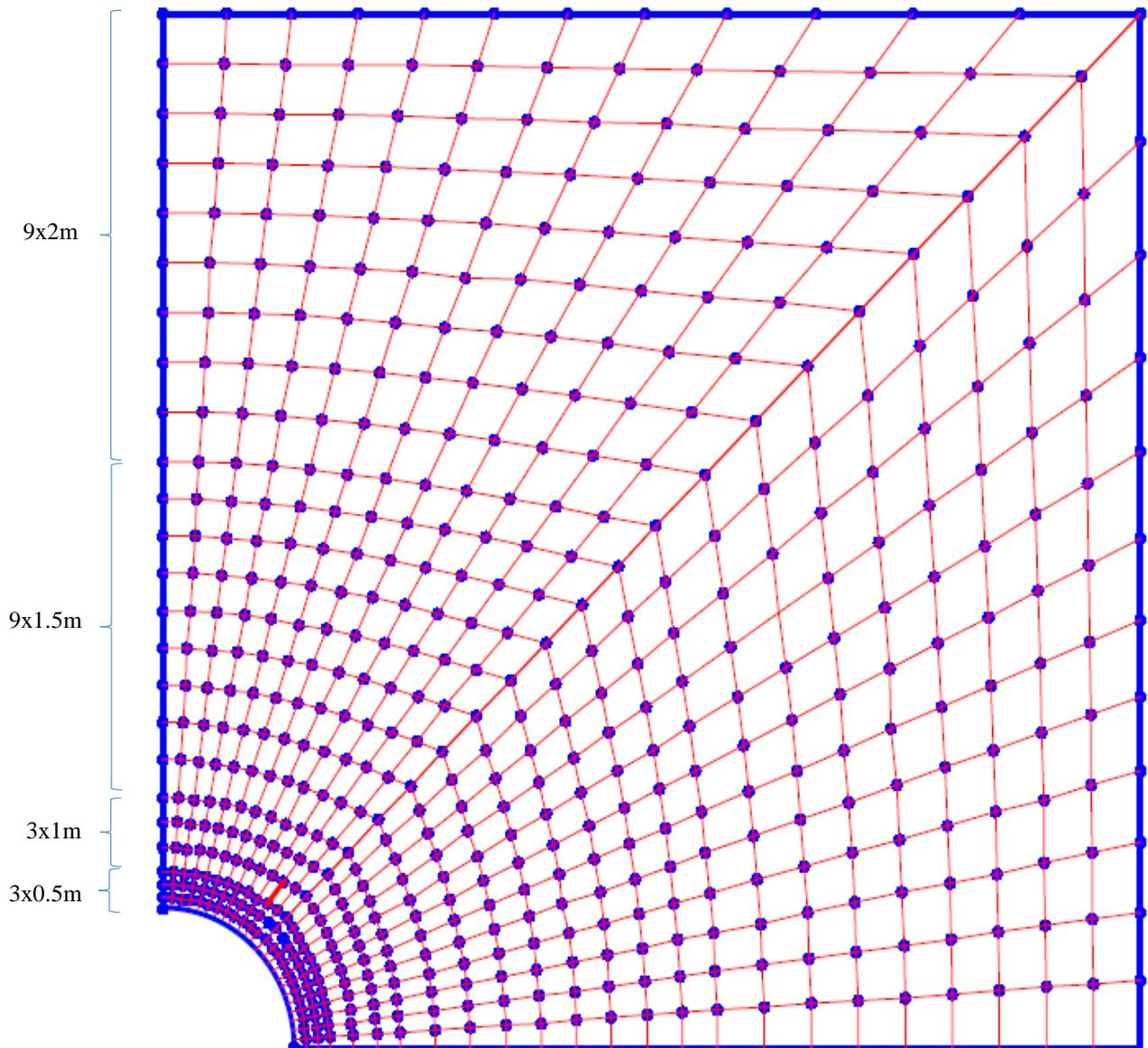


Figure VII.10 : maillage par éléments finis (Modèle  $\{1/2(48) \times 24\}$ )

Le tableau suivant récapitule le déplacement maximal et la contrainte maximale des différents modèles :

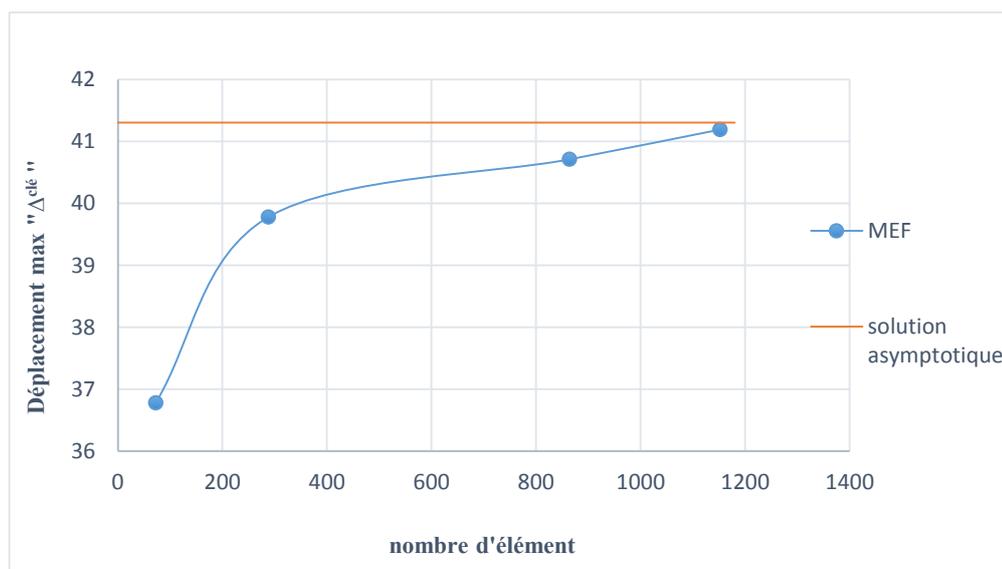
**Tableau VII.21** : Les valeurs de tassement et de contrainte pour les différents modèles de la M.E.F

Dpl et cont Modèles	$\Delta_{max}^{clé}$ (mm)	$\sigma_{y(max)}$ (MPa)
<b>12x6</b>	37.78	0.3196
<b>24x12</b>	39.78	0.5474
<b>48x18</b>	40.71	0.6314
<b>48x24</b>	41.19	0.7858

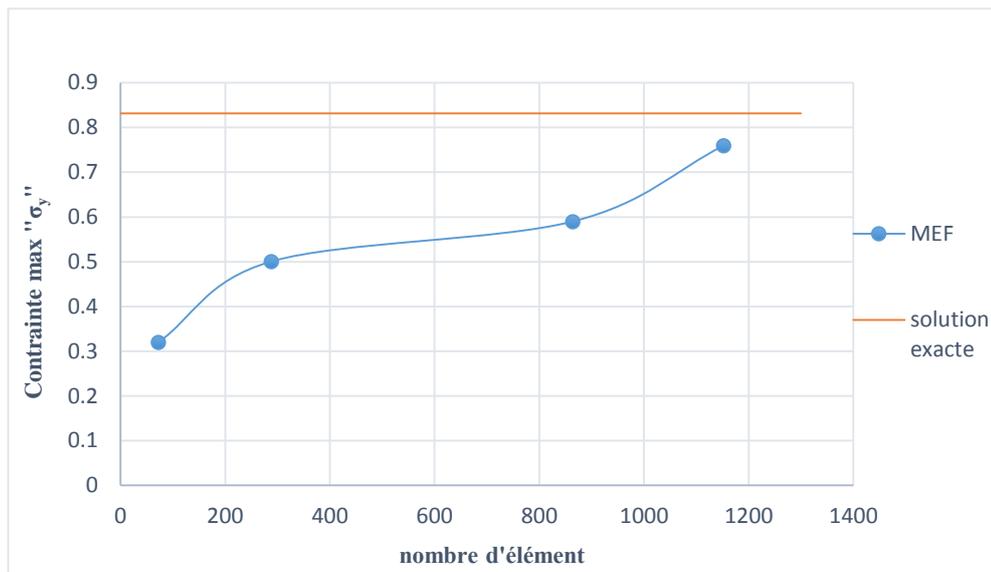
Dpl et cont : Déplacement et contrainte.

On trace les courbes du déplacement  $\Delta_{max}^{clé}$  (déplacement max) et de la contrainte  $\sigma_{y(max)}$  (contrainte max) en fonction de nombre d'éléments de chaque maillage et on obtient les courbes suivantes :

D'après les résultats qu'on a trouvé, on a pris la solution asymptotique égale à : 41.3 mm pour le déplacement et 0.832 MPa pour la contrainte (la valeur exacte de la contrainte).



**Figure VII.11** : Convergence des déplacements en fonction de nombre d'élément.



**Figure VII.12 :** Convergence des contraintes en fonction de nombre d'élément.

**b) Etude de convergence par la technique de couplage entre la M.E.F et la M.E.I :**

Les modèles de couplage utilisés sont :

➤ **Modèle 12X5 :**

On prend 20% pour élément finis et 80% élément infinis.

Le nombre d'éléments est 60 éléments.

Le nombre de degrés de liberté est de 161, et le nombre de nœuds est de 91.

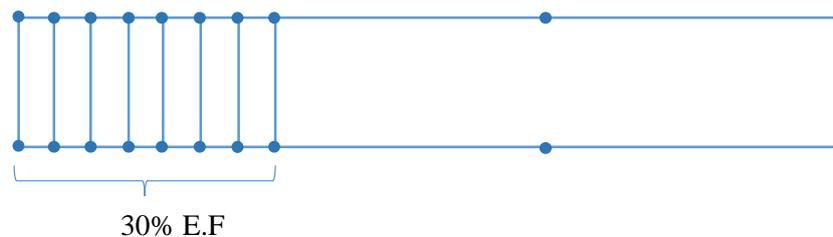


➤ Modèle 24X7 :

On prend 30% pour élément finis et 70% élément infinis.

Le nombre d'éléments est 168 éléments.

Le nombre de degrés de liberté est de 207 et le nombre de nœuds est de 225.

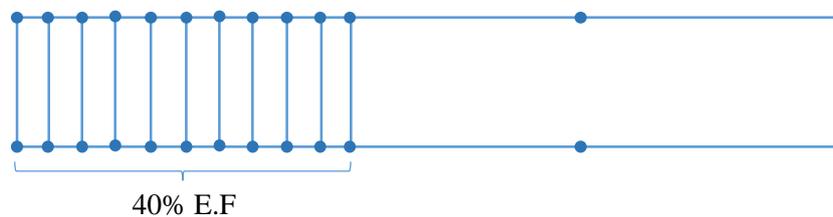


➤ Modèle 24X11:

On prend 40% pour élément finis et 60% élément infinis.

Le nombre d'éléments est 264 éléments.

Le nombre de degrés de liberté est de 611 et le nombre de nœuds est de 325.



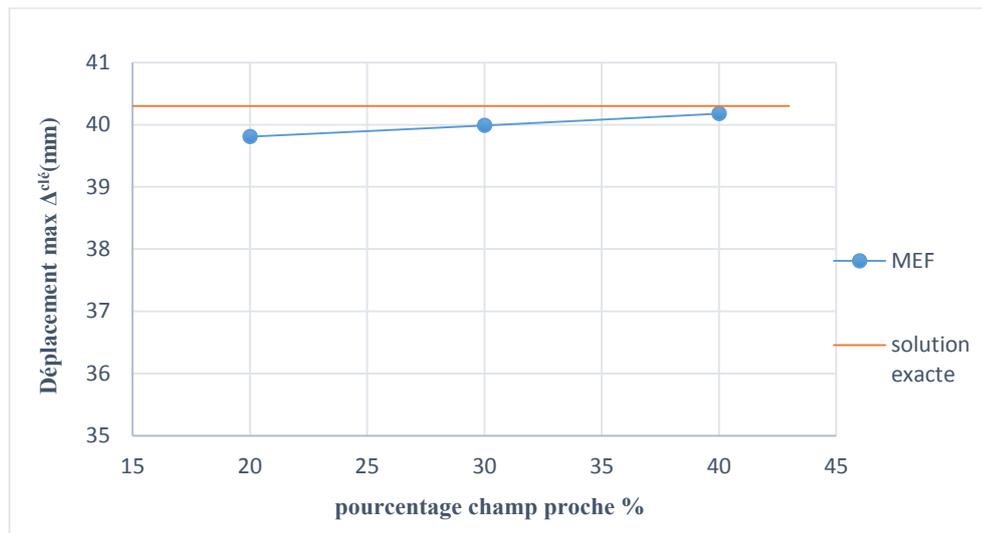
Le tableau et les graphes ci-dessous montrent la façon de convergence des déplacements en clé de voute et des contraintes verticales maximales.

**Tableau VII.22** : Les valeurs de tassement et de contrainte pour les différents modèles de couplage M.E.I-M.E.F

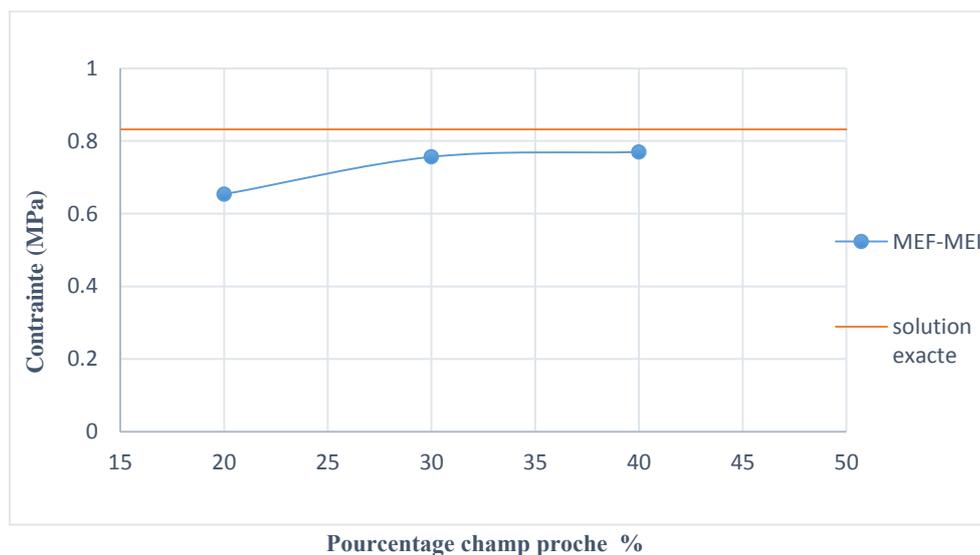
Dpl et cont Modèles	$\Delta_{max}^{clé}$ (mm)	$\sigma_{y(max)}$ (MPa)
12x5 (20%)	39.81	0.6532
24x7 (30%)	39.99	0.7561
24x11 (40%)	40.18	0.77

On trace les courbes du déplacement  $\Delta_{max}^{clé}$  (déplacement max) et de la contrainte  $\sigma_{y(max)}$  (contrainte max) en fonction de pourcentage des éléments finis de chaque maillage et on obtient les courbes suivantes :

D'après les résultats qu'On a trouvé, on a prend la solution asymptotique égale à : 41.3 mm pour le déplacement et 0.832 MPa pour la contrainte (la valeur exact de la contrainte).



**Figure VII.13 :** Convergence des déplacements en fonction de pourcentage des éléments finis.

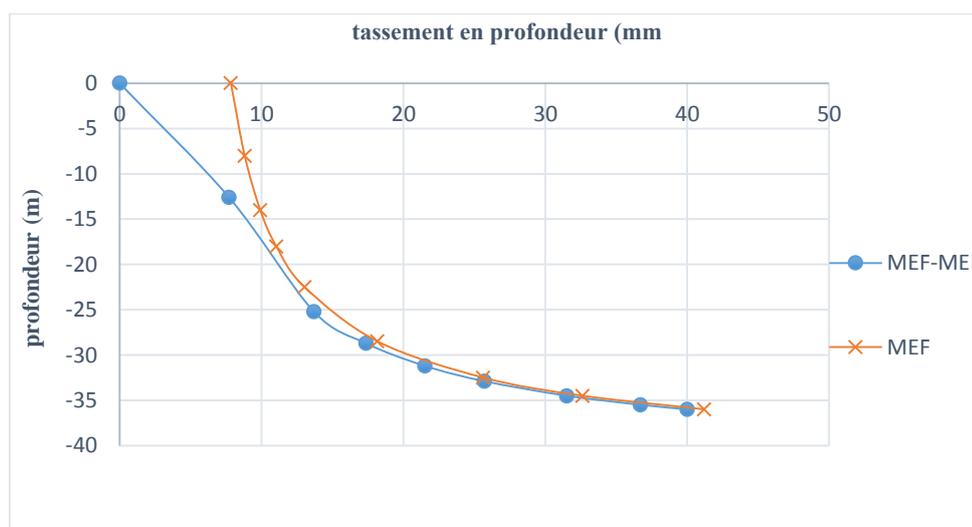


**.Figure VII.14 :** Convergence des contraintes en fonction de pourcentage des éléments finis

Les tassements en clé de voute trouvés par les deux modèles, un modèle avec couplage de la méthode des éléments finis et infinis (Modèle 24x11 “40% E.F”), et un autre sans couplage (Modèle 48x24 “M.E.F”), sont donnés dans le tableau suivant :

**Tableau VII.23** : tassement en clé de voute par la M.E.F et couplage M.E.F-M.E.I

Modèle de couplage (40% élément finis (E.F))		Modèle de la M.E.F (Modèle 48x24)	
Profondeur (m)	$\Delta^{clé}(mm)$	Profondeur (m)	$\Delta^{clé}(mm)$
0	0	0	7.83
12.6	7.71	8	8.8
25.2	13.68	14	9.9
28.7	17.35	18	11.03
31.2	21.50	22.5	13.02
32.9	25.71	28.5	18.16
34.5	31.50	32.5	25.62
35.5	36.70	34.5	32.61
36	40.18	36	41.19



**Figure VII.15** : Tassement en fonction de la profondeur.

**VII.2.2) CUVETTES DE TASSEMENTS :**

La prévision des tassements de surface constitue l'un des enjeux des projets de la construction des ouvrages souterrains en site urbain.

La construction souterraine y compris le creusement des tunnels peu profonds provoque des déformations en surface du massif qui les accueille. Ces déformations sont surtout représentées par des tassements qui ne sont pas uniforme mais se concentrent à l'aplomb du souterrain sous la forme de cuvette de tassement. Le problème est particulièrement sensible dans les villes, où ces tassements affectent toutes les composantes du tissu urbain, qu'il s'agisse des bâtiments, des ouvrages d'arts ou d'autres types de construction.

Les tassements de surface résultent d'un double mécanisme d'interaction sol-structure : l'interaction entre le tunnel et le massif, d'une part, et l'interaction entre le massif et le bâti environnant, d'autre part.

Au voisinage du front de taille, le champ de déplacements engendrés par le creusement est tridimensionnel : à la convergence du terrain dans le plan orthogonal à l'axe du tunnel (tassement en clé de voûte, soulèvement du radier) s'ajoutent des déplacements d'extrusion du terrain vers le front de taille, dans la direction de l'axe du tunnel.

Globalement, les vecteurs de déplacements sont dirigés vers la région active de l'excavation, ce qui, compte tenu de la progression quasi continue du creusement, confère au champ des déplacements un caractère évolutif : en un point situé dans une section donnée du massif, la direction et l'amplitude du vecteur de déplacement du sol changent à l'approche du front, lors de son passage, puis pendant son éloignement de la section considérée. L'interaction tunnel massif se traduit donc par des convergences en paroi, l'extrusion du front et par des efforts dans les soutènements. La convergence totale (convergence en avant et en arrière du front) et l'extrusion composent ce que l'on nomme les pertes de volume.

Ces différents ingrédients sont rassemblés dans la figure ci-dessous qui représenté un écorché tridimensionnel d'un tunnel en construction, qui avance vers la droite du graphique et est éclairé de l'intérieur. On y voit :

- les convergences et l'extrusion du front,
- les déplacements dans le massif,
- la cuvette de tassement en surface, graduée en courbes de niveau.

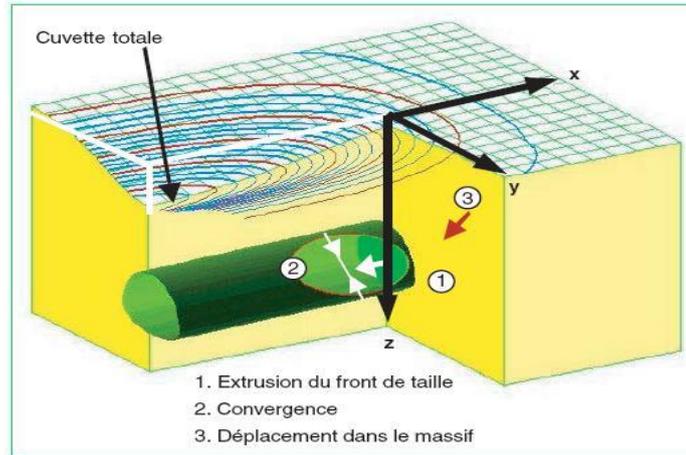


Figure VII. 16 : Déformations des sols pendant le creusement d'un tunnel.

c) Calcul de tassement en surface à paramètre incertain :

L'étude porte sur le tunnel de Toulon dont le massif rocheux se compose de deux couches de caractéristiques mécanique différentes. Le modèle adopté constitués de 1152 (24x48) éléments finis quadrilatères à quatre nœuds (Q4). La profondeur du tunnel est  $H_0=36\text{m}$ , le rayon est 5.6m.

$$H_0 = 36 \text{ m}$$

$$R = 5.6 \text{ m}$$

$$H_T = 41.6 \text{ m}$$

$$E_1 = \{ \underline{E}_1, E_1^c, \overline{E}_1 \} = \{ 70, 100, 130 \} \text{ MPa}$$

$$\gamma_1 = \{ \underline{\gamma}_1, \gamma_1^c, \overline{\gamma}_1 \} = \{ 18, 20, 22 \}$$

$$h_1 = 25.5 \text{ m}$$

$$E_2 = \{ \underline{E}_2, E_2^c, \overline{E}_2 \} = \{ 120, 150, 180 \} \text{ MPa}$$

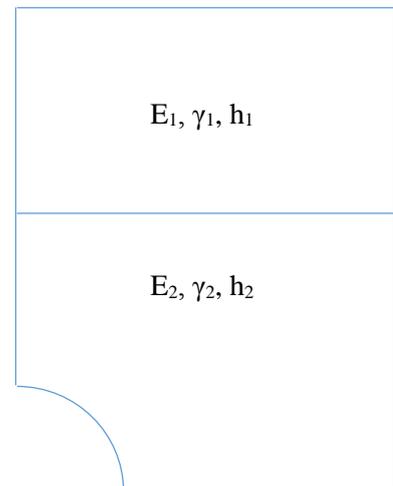
$$\gamma_2 = \{ \underline{\gamma}_2, \gamma_2^c, \overline{\gamma}_2 \} = \{ 22, 24, 26 \}$$

$$h_2 = 16.1 \text{ m}$$

$$\sigma_0 = \{ \underline{\sigma}_0, \sigma_0^c, \overline{\sigma}_0 \}$$

$$\sigma_0 = \{ (\sum \underline{\gamma}_1 h_1 + \underline{\gamma}_2 h_2) , (\sum \gamma_1^c h_1 + \gamma_2^c h_2) , (\sum \overline{\gamma}_1 h_1 + \overline{\gamma}_2 h_2) \}$$

$$\sigma_0 = \{ 0.8132, 0.8964, 0.9796 \} \text{ MPa}$$



a.1) Cas isotrope :  $K_0 = 1$

On résume les résultats de tassement en surface à paramètre incertain pour le cas isotrope dans le tableau suivant :

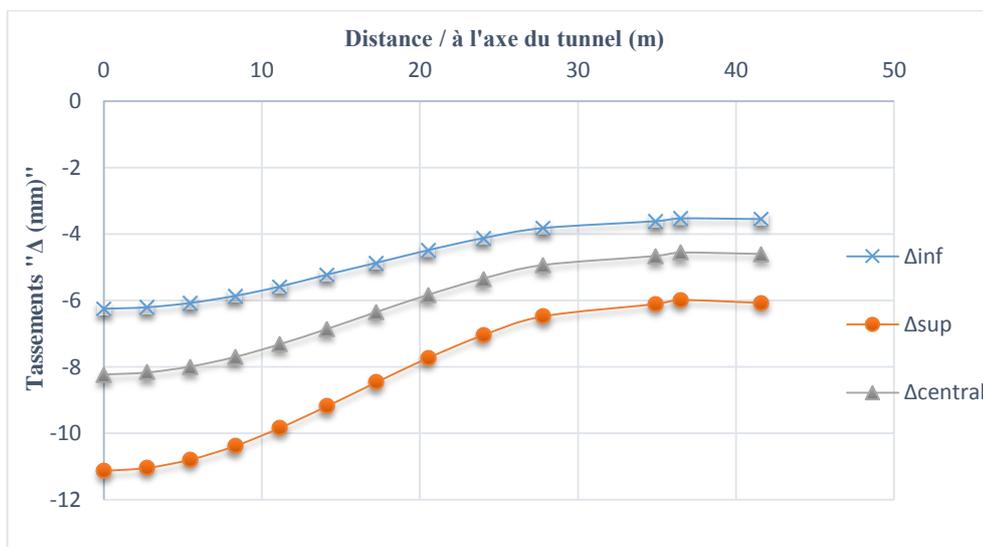
**Tableau VII.24** : tassement en surface dans le cas isotrope

Y (m)	$\underline{\Delta}$ (mm)	$\Delta^c$ (mm)	$\overline{\Delta}$ (mm)
0	-6.253	-8.226	-11.13
2.73	-6.209	-8.165	-11.04
5.47	-6.078	-7.987	-10.79
8.3	-5.865	-7.699	-10.38
11.14	-5.583	-7.315	-9.835
14.12	-5.224	-6.856	-9.183
17.23	-4.87	-6.349	-8.464
20.51	-4.486	-5.83	-7.73
24	-4.123	-5.341	-7.042
27.8	-3.819	-4.934	-6.475
34.92	-3.612	-4.661	-6.104
36.48	-3.528	-4.559	-5.982
41.6	-3.548	-4.6	-6.072

$\underline{\Delta}$  : Bande inférieure de tassement en surface (tassement min).

$\Delta^c$  : Tassement en surface moyenne (centrale)

$\overline{\Delta}$  : Bande supérieure de tassement en surface (tassement max).



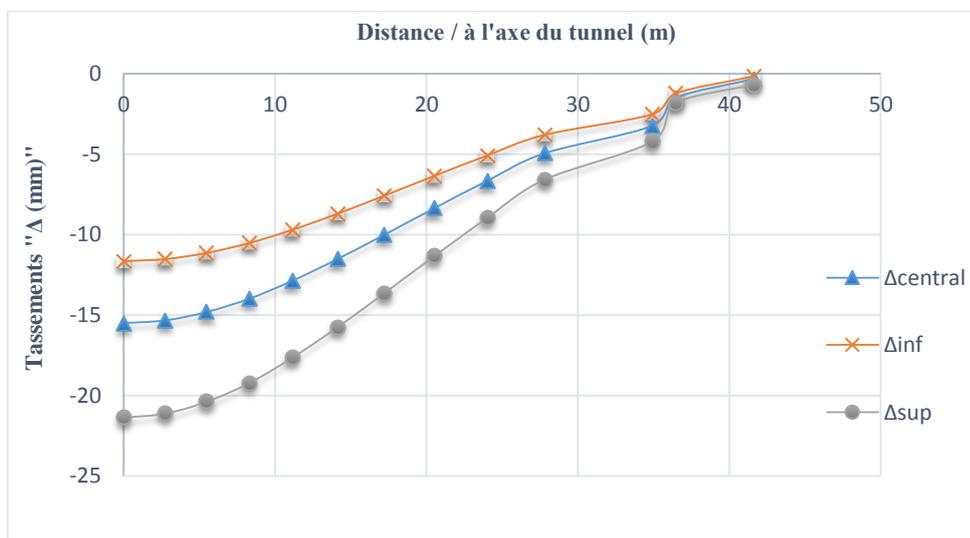
**Figure VII.17** : Tassement en surface dans le cas isotrope.

a.2) Cas anisotrope :  $K_0 = 0.5$

On résume les résultats de tassement en surface à paramètre incertain pour le cas anisotrope dans le tableau suivant :

**Tableau VII.25** : tassement en surface dans le cas anisotrope.

Y (m)	$\underline{\Delta}$ (mm)	$\Delta^c$ (mm)	$\bar{\Delta}$ (mm)
0	-11.65	-15.5	-21.37
2.73	-11.52	-15.33	-21.12
5.47	-11.14	-14.81	-20.39
8.3	-10.52	-13.98	-19.22
11.14	-9.7	-12.87	-17.65
14.12	-8.702	-11.52	-15.76
17.23	-7.572	-10	-13.63
20.51	-6.352	-8.363	-11.34
24	-5.084	-6.663	-8.969
27.8	-3.799	-4.946	-6.585
34.92	-2.514	-3.233	-4.215
36.48	-1.215	-1.504	-1.832
41.6	-0.1586	-0.3214	-0.6819



**Figure VII.18** : Tassement en surface dans le cas anisotrope.

$\Delta_{inf}$  : Tassement inférieure (bande inférieure).

$\Delta_{sup}$  : Tassement supérieure (bande supérieure).

$\Delta_{central}$  : Tassement moyenne (centrale).

**VII.2.3) Interprétation :**

- Les courbes de convergence de déplacement en clé de voute et de contrainte en fonction du nombre d'éléments. Nous avons constaté que plus le nombre d'éléments augmente plus la solution se stabilise autour de la solution exacte.
- A travers l'analyse des résultats obtenus, on peut dire que l'utilisation de la technique de couplage entre la M.E.F et la M.E.I, offre un avantage considérable pour le calcul des tunnels à grande profondeur. En effet, on a remarqué que le nombre d'éléments à résoudre a été considérablement réduit. Aussi, la construction des fichiers de données et l'exploitation des fichiers de sorties ont été fortement allégés.
- Nous avons remarqué que la courbe de convergence de déplacement converge rapidement par rapport à la courbe de convergence de contrainte.
- Les résultats de tassement en surface à paramètres incertains dans le cas anisotrope sont importants par rapport à les résultats dans le cas isotrope.

# **CHAPITRE VIII**

## **Conclusion générale**

## **Conclusion Générale:**

L'objectif de ce travail, consiste en l'analyse de la réponse statique et dynamique des constructions de Génie Civil, telles que les tunnels et les structures en portiques auto-stables qui sont caractérisés par des paramètres incertains.

Dans la partie statique (cas du tunnel de Toulon, France), on a examiné la réponse de la structure en termes de tassements en surface et en profondeur, en utilisant la méthode des éléments finis (MEF). La technique de couplage entre la méthode des éléments finis et la méthode des éléments infinis (MEF-MEI) a été utilisée afin de comparer la performance de cette récente technique numérique qui sert au calcul des problèmes non bornés.

A travers l'analyse des résultats obtenus, on a montré que la technique de couplage converge vers les résultats obtenus par la MEF moyennant un choix judicieux de modélisation et un nombre optimal d'éléments finis utilisés. En conséquence, on peut dire que l'utilisation de la technique de couplage entre la M.E.F. et la M.E.I., offre un avantage considérable pour les problèmes dont les dimensions géométriques sont importantes. En effet, on a remarqué que le nombre d'équations à résoudre a été considérablement réduit (nombre de d.d.l.), aussi la construction des fichiers de données et l'exploitation des fichiers de sorties ont été fortement allégés. Par ailleurs, il est à noter que les tassements en surface à paramètres incertains dans le cas anisotrope, sont plus importants par rapport à ceux obtenus dans le cas isotrope, d'où la nécessité de prendre en considération l'anisotropie du terrain excavé.

Pour ce qui est de l'analyse dynamique, l'accent a été mis sur le calcul des caractéristiques dynamiques, ainsi que la réponse temporelle des structures en portiques auto-stables (à planchers rigides et flexibles) ayant des paramètres incertains tel que la rigidité, la masse...etc...Le principe de l'inclusion des incertitudes sur les valeurs centrales des paramètres a été utilisé pour déterminer les bornes inférieures et supérieures par rapport aux valeurs propres, les périodes propres, les vecteurs propres ainsi que la réponse en termes de déplacements de la structure étudiée, et ce en utilisant la méthode intervalle. L'efficacité de cette méthode a été démontrée par comparaison des résultats obtenus par (Deif method) à l'aide d'exemples numériques. Cette dernière reste une bonne méthode numérique approximative de référence, qui est utilisée à toutes fins de comparaison des résultats.

Les résultats de l'analyse ont permis de relever les points suivants:

- ❖ La variation de  $\Delta\omega$  par rapport à  $\omega_{moy}$  pour les deux méthodes (intervalle et Deif) est presque la même dans les deux cas (portique à planchers infiniment rigides et flexibles).
- ❖ La méthode de Deif donne des résultats très proches de la méthode exacte en basses fréquences.
- ❖ Les valeurs de  $\omega$  dans les trois premiers modes obtenues à partir de l'hypothèse du portique à planchers flexibles sont inférieures d'au moins 18% par rapport à celles calculées à partir de l'hypothèse du même portique à planchers rigides.
- ❖ Les déplacements obtenus pour le portique à planchers flexibles sont toujours plus importants que ceux obtenus pour le portique à planchers rigides.

Au vu des résultats obtenus, l'étude de notre structure basée sur l'hypothèse de planchers flexibles et celle de planchers rigides a révélé des différences assez importantes dans les valeurs des pulsations, les périodes et notamment dans la réponse en termes de déplacements (dont les variations peuvent aller du simple au double pour le cas du dernier étage de notre structure).

### **Recommandations :**

- 1- Introduction du coefficient d'amortissement pour faire une étude dynamique complète à paramètres incertains.
- 2- Prendre en compte l'effet de l'interaction sol-structure moyennant une modélisation appropriée.
- 3- Penser à faire une analyse non linéaire en statique et dynamique en utilisant la méthode intervalle.

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1]- Alain PECKER(2006) DYNAMIQUE DES STRUCTURES ET DES OUVRAGES.
- [2]- Bettess ,Pn" Infinite Element " . Int.J.Num. Meth .ENG ,vl.11,PP.53-64.
- [3]- B. TILIOUINE: «notes de cours de dynamique des structures »2013/2014.
- [4]- Clough, R.W., Penzien, J. (1993). Dynamics of Structures. Mc Graw Hill.
- [5]- Dhatt. G, Touzot. G, " Une Présentation de la méthode des éléments finis", Maloine S.A, 2eme édition, 1984.
- [6]- K.RAHAB, T.KAMEL " Investigation Numérique Des Différentes Phases D'un Creusement Souterrain Par Eléments Finis et Une Technique De Couplage D'éléments Finis et Infinis" mémoire de fin d'étude, Juin 2009 E.N.P.
- [7]-Kumar ,P., "static Infinite Element formulation ".Jou Str .Eng .Vol.111,PP.2355-2372.
- [8]- Mario Paz , "structural dynamics " Theory and computation (second edition ) 1985.
- [9] -M.DEMIDEM : « Notes de cours de la méthode des éléments finis ».2014
- [10]-Notes de cours MEF et Programmes informatiques des Universite's de Sherbrooke ,Laval et Mc Gill Quebec ,Canada
- [11]- O.REFFIS, M.ABOUBAKEUR " Calcul des déplacements et des contraintes Des structures compte tenu de l'effet du Demi-espace élastique par La méthode des éléments finis" mémoire de fin d'étude, Juin 2007 E.N.P.
- [12]- Règles parasismiques algériennes RPA 99 / version 2003.
- [13]- YVES Débarde "élasticité " Institut Universitaire de Technologie du Mans Département Génie Mécanique et Productique 24 mars 2006 / 21 novembre 2007.
- [14]- Zienkiewics. O. C., Taylor. R. L., "The finite element Method: Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-Linearity", volume 2. McGraw-Hill Book Company, 4th édition, 1989.
- [15]- Z. P. Qiu. S. H. Chen and J. X. Na The Bound Set of Possible Eigenvalues of Structures with Uncertain But Non-random Parameters.

[16]- Z. P. Qiu. S. H. Chen and J. X. Na. The Rayleigh quotient method for Computing eigenvalue bounds of vibrational systems with interval parameters, *Acta Mechanica Sinica* 6. 309-318 (1995).

[17]- Z. P. Qiu. S. H. Chen and I. ELISHAKOFF communicated by G. Leitmann. Natural Frequencies of Structures with Uncertain but Nonrandom Parameters, *Optimization theory and applications*, vol. 86, NO. 3, pp. 669-683, septembre 1995