

M0008/93A

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

OPTION: AUTOMATIQUE

THESE DE MAGISTER

Présentée le 27 Juin 1993 par:

Djamel BOUKHETALA

Ingénieur Automaticien

THEME:

**COMMANDE DECENTRALISEE
DES SYSTEMES STRUCTURES**

JURY:

Monsieur	R. TOUMI	U.S.T.H.B	Président
Monsieur	A. BELMEHDI	I.N.H	Rapporteur
Messieurs	M.S. BOUCHERIT	E.N.P	Examineur
	F. BOUDJEMA	E.N.P	"
	R. ILLOUL	E.N.P	"
Monsieur	M.C. SOUAMI	E.N.P	Invité

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

OPTION: AUTOMATIQUE

THESE DE MAGISTER

Présentée le 27 Juin 1993 par:

Djamel BOUKHETALA

Ingénieur Automaticien

THEME:

COMMANDE DECENTRALISEE DES SYSTEMES STRUCTURÉS

JURY:

Monsieur	R. TOUMI	U.S.T.H.B	Président
Monsieur	A. BELMEHDI	I.N.H	Rapporteur
Messieurs	M.S. BOUCHERIT	E.N.P	Examineur
	F. BOUDJEMA	E.N.P	"
	R. ILLOUL	E.N.P	"
Monsieur	M.C. SOUAMI	E.N.P	Invité

A ma mère

A ma mère

A ma mère

A mon père

A toute la famille

A tous les amis

AVANT-PROPOS

Au terme de ce travail, je désire remercier tous ceux qui, directement ou indirectement, m'ont aidé à le réaliser.

Tout d'abord, j'exprime ma profonde gratitude envers Monsieur A. Belmehdi promoteur de cette thèse, pour le soutien intellectuel et moral qu'il n'a cessé de me procurer tout au long du travail.

Je remercie le Professeur M. Toumi pour l'honneur qu'il m'a fait pour présider le jury.

Mes remerciements s'adressent également aux Messieurs M.S. Boucherit, R. Illoul, F. Boudjema et M.C. Souami, enseignants à l'E.N.P pour leur participation au jury et pour les critiques judicieuses qu'ils m'ont transmises après la lecture de cette thèse.

Ma reconnaissance va également aux Messieurs C. Commault et J.M. Dion, Professeurs au Laboratoire d'Automatique de Grenoble pour les multiples conseils qu'ils m'ont prodigués durant mon séjour au L.A.G.

D. BOUKHETALA

TABLE DES MATIERES

NOTATIONS ET ABREVIATIONS.....	5
CHAPITRE 0 : INTRODUCTION GENERALE	6
CHAPITRE I : BASES PRELIMINAIRES ET GENERALITES	9
0. INTRODUCTION.....	10
1. NOTIONS ALGEBRIQUES ET SYSTEMES STRUCTURES.....	10
1.1. Matrices structurées et systèmes structurées.....	10
a) Matrice structurée.....	11
b) Système structuré.....	12
1.2. Quelques propriétés algébriques.....	13
a) Indépendance algébrique.....	13
b) Variété algébrique.....	13
c) Propriété générique.....	13
1.3. Notion de rang structurel.....	14
a) Rang générique.....	14
b) Rang terme.....	14
c) Relation entre le rang terme et le rang générique.....	15
1.4. Notions de l'algèbre booléenne.....	16
1.4.1. Matrice booléenne associée à une matrice structurée..	16
1.4.2. Matrice de permutation.....	16
1.4.3. Interprétation booléenne du rang terme.....	17
2. ELEMENTS DE LA THEORIE DES GRAPHS.....	17
2.1. Graphes orientés.....	17
2.2. Graphe orienté associé à une matrice structurée.....	18
2.3. Chemins et cycles dans un graphe orienté.....	18
2.4. Graphe biparti associé à une matrice structurée.....	20
2.5. Interprétation graphique du rang terme	22
2.5.a) Interprétation par graphe orienté.....	22
2.5.b) Interprétation par graphe biparti.....	22

3. COMMANDABILITE ET OBSERVABILITE AU SENS USUEL ET.....	
STRUCTUREL.....	22
3.1. Commandabilité et observabilité au sens usuel.....	22
3.1.1. Commandabilité.....	23
3.1.2. Observabilité.....	24
3.2. Commandabilité et observabilité structurelle.....	26
3.2.1. Commandabilité structurelle.....	26
3.2.2. Observabilité structurelle.....	28
4. CONCLUSION.....	29
CHAPITRE II : COMMANDE DECENTRALISEE PAR L'APPROCHE CLASSIQUE	
CLASSIQUE (CARACTERISATIONS DES MODES FIXES)...	31
0. INTRODUCTION.....	32
1. GENERALITES.....	32
1.1. Définition d'un mode fixe.....	34
1.2. Algorithme de DAVISON.....	34
2. CARACTERISATION DES MODES FIXES.....	35
2.1. Caractérisation par l'approche d'état.....	35
2.2. Caractérisation par matrices polynômiales.....	40
2.3. Caractérisation par matrice de transfert rationnelle...	43
2.3.1 Matrice de transfert de dimension 2x2.....	43
2.3.2 Matrice de transfert de dimension arbitraire.....	45
3. CONCLUSION.....	47
CHAPITRE III : COMMANDE DECENTRALISEE PAR L'APPROCHE	
STRUCTURELLE (CARACTERISATION DES MODES	
STRUCTURELLEMENT FIXES).....	48
0. INTRODUCTION.....	49

1. CARACTERISATION DES MODES STRUCTURELLEMENT FIXES PAR L'ALGEBRE LINEAIRE.....	49
2. CARACTERISATION DES MODES STRUCTURELLEMENT FIXES PAR..... L'ALGEBRE BOOLEENNE.....	52
2.1. Matrice d'atteignabilité des états.....	53
2.2. Sous-espaces atteignables.....	54
2.3. Sous-espaces commandables et observables.....	55
2.4. Commandabilité et observabilité décentralisée.....	56
2.4.a Caractérisation des modes fixes décentralisé pour pour $N = 2$	56
2.4.b Caractérisation des modes fixes décentralisés pour $N > 2$	59
3. CARACTERISATION PAR LA THEORIE DES GRAPHES DES MODES STRUCTURELLEMENT FIXES DECENTRALISES.....	63
3.1. Caractérisation basée sur les conditions structurelles algébriques.....	63
3.2. Caractérisation basée sur l'interprétation par graphe des coefficients du polynôme caractéristique en boucle fermée.....	65
3.2.a Interprétation par les graphes des coefficients du polynôme caractéristique en boucle fermée.....	65
3.2.b Caractérisation des modes fixes en $S = 0$	71
3.2.c Caractérisation des modes fixes en $S = S_0$	73
4. CONCLUSION.....	74
CHAPITRE IV : ELIMINATION DES MODES FIXES (PROPOSITION D'UNE METHODE POUR L'ELIMINATION DES MODES STRUCTURELLEMENT FIXES).....	
0. INTRODUCTION.....	76
1. ELIMINATION DES MODES FIXES DECENTRALISES A L'AIDE DE L'ECHANGE D'INFORMATION ENTRE LES STATIONS DE COMMANDE...	77

1.1. Généralités.....	77
1.2. Détermination de la nouvelle structure de la matrice de de retour F.....	80
2. ELIMINATION DES MODES STRUCTURELLEMENT FIXES.....	84
2.1. Elimination par échange d'information entre les stations commande.....	84
2.2. Elimination par échange d'information minimum entre les stations de commande.....	87
2.3. Algorithme pour la caractérisation et l'élimination..... des modes structurellement fixes décentralisés.....	88
3. CONCLUSION.....	98
CONCLUSION GENERALE.....	100
BIBLIOGRAPHIE.....	104

NOTATIONS ET ABBREVIATIONS

- A: Matrice d'évolution.
- B: Matrice de commande.
- C: Matrice de sortie.
- B_I : Matrice de commande de la station de commande I .
- C_I : Matrice de sortie de la station de commande I .
- x : Vecteur d'état.
- u : Vecteur d'entrée.
- y : Vecteur de sortie.
- u_I : Vecteur de commande de la station de commande I .
- y_I : Vecteur de sortie de la station de commande I .
- M_s : Matrice structurée.
- $G(M_s)$: Graphe orienté associé à la matrice M_s .
- $G_B(M_s)$: Graphe biparti associée à la matrice M_s .
- $r.t(M)$: Rang terme de la matrice M .
- $r.g(M)$: Rang générique de la matrice M .
- s -commandable: Structurellement commandable.
- s -observable: Structurellement observable.
- \vee, \wedge : Respectivement la somme et le produit logiques.
- R: Matrice d'atteignabilité des états.
- R_{u_I} : Vecteur d'atteignabilité des entrées de la station I .
- R_{y_I} : Vecteur d'atteignabilité des sorties de la station I .
- M_I^T : Vecteur de commandabilité de la station de commande I .
- K_I^T : Vecteur d'observabilité de la station de commande I .
- L_I : Vecteur de commandabilité et d'observabilité de la station I .
- $\|M\|$: Norme de la matrice M .

CHAPITRE 0

INTRODUCTION GENERALE

0. INTRODUCTION GENERALE:

La croissante complexité des systèmes dynamiques a entraîné un progrès considérable dans le développement des outils mathématiques pour l'analyse, l'optimisation et la synthèse de commande de tels systèmes. Cette complexité peut avoir plusieurs origines.

D'une part, les modèles mathématiques qui décrivent le comportement dynamique des systèmes qui sont devenus de taille considérable, les techniques numériques et le matériel informatique existant sont devenus insuffisants pour le traitement de certains problèmes. C'est ainsi que les techniques de décomposition de calcul, d'agrégation, d'analyse qualitative structurelle etc... ont été utilisées avec succès dans un grand nombre d'applications sur les systèmes de grandes dimensions.

D'autre part, la difficulté de traiter les problèmes de commande pour les systèmes multi-entrées multi-sorties a motivé le développement de la théorie de commande des systèmes linéaires multivariables et plusieurs approches ont été proposées.

Les systèmes tels que les réseaux d'énergie électrique, de communications et du trafic urbain sont parmi beaucoup d'autres exemples des systèmes qui peuvent être vus comme étant composés d'un ensemble de sous-systèmes interconnectés et géographiquement éloignés.

La décomposition géographique engendre des problèmes de coût et de fiabilité dans l'échange d'information entre les sous systèmes. Pour de tels systèmes, une nouvelle structure de commande caractérisée par la décentralisation de l'information disponible a été utilisée.

Dans cette structure, les organes de commande de chaque sous-système disposent seulement de la mesure de l'état ou de la sortie locale. Ceci caractérise la commande décentralisée. Les systèmes soumis à une telle structure de commande sont appelés systèmes décentralisés

Durant les deux dernières décennies, une évolution intéressante a été remarquée dans l'étude de ces systèmes. Dans WANG & DAVISON (1973) on introduit la notion de mode fixe qui apparaissent comme conséquence de la décentralisation du système malgré que ce dernier est commandable et observable. L'étude de cette notion a fait l'objet d'un certain nombre d'articles et rapports de recherche [CORFMAT & MORSE (1976) POTTER, ANDERSON & MORSE (1979), ANDERSON (1981)]... WILLEMS (1990)]. Jusqu'à 1981 tous les résultats sont donnés dans un contexte classique, c'est à dire lorsque l'information caractérisant le système est quantitative, basée sur la connaissance des valeurs numériques des paramètres.

Dans la présente étude, on s'intéresse particulièrement à la notion de modes fixes qui est d'importance capitale dans la solvabilité des problèmes de la commande décentralisée. Cette étude se divise principalement en quatre parties.

Dans le premier chapitre nous donnons brièvement des notions préliminaires relatives aux systèmes structurés, ainsi que les bases et les outils mathématiques nécessaires pour leur analyse, ensuite nous abordons l'étude des critères de commandabilité et d'observabilité au sens classique et structurel afin de préparer la voie pour l'étude des systèmes décentralisés.

Dans le deuxième chapitre, nous commençons par étudier la commande décentralisée dans un contexte classique dont le but principal est de clarifier la notion de modes fixes. Les caractérisations de ces derniers sont données par différentes approches, allant de la représentation d'état jusqu'à la matrice de transfert.

Dans le troisième chapitre, nous touchons l'aspect structurel du problème en donnant les caractérisations des modes structurellement fixes par l'algèbre linéaire et booléenne, puis à l'aide de la théorie des graphes.

Le quatrième et dernier chapitre est consacré à l'élimination de ces modes fixes, dans lequel nous exposons la méthode de ARMENTANO & SINGH (1982) qui se caractérise par la recherche d'une nouvelle

structure de la matrice de retour en ajoutant des liaisons d'échange d'information entre les sous-systèmes. Cette méthode est spécifique aux systèmes interconnectés et à paramètres connus.

A la fin, nous proposons une nouvelle méthode pour l'élimination des modes structurellement fixes à l'aide d'un minimum d'échange d'information entre les sous-systèmes. Le résultat est donné sous forme d'un théorème et d'un corollaire à la base desquels nous développons un algorithme.

CHAPITRE I

BASES PRELIMINAIRES ET GENERALITES

0. INTRODUCTION:

Le but de ce chapitre est de rappeler quelques notions et outils mathématiques de base nécessaires à la compréhension du contenu de ce mémoire. Il est principalement constitué de trois parties. Dans une première partie nous donnons, brièvement, des éléments de l'algèbre liés aux notions de structure, matrices et systèmes structurés etc..., dans le but de mettre en évidence les propriétés de ces derniers. Dans une seconde partie, nous exposons quelques notions sur la théorie des graphes, juste utiles pour les développements qui suivent. Sa troisième partie est consacrée aux rappels sur les notions de commandabilité et d'observabilité dans un contexte classique et structurel.

1. NOTIONS ALGEBRIQUES ET SYSTEMES STRUCTURES.

Dans cette partie, nous donnerons les éléments de base de l'algèbre linéaire et booléenne permettant de caractériser les systèmes structurés.

1.1 Matrice structurée et système structuré:

Considérons un système linéaire invariant dans le temps donné sous sa représentation d'état suivante:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.1.a)$$

$$y = Cx + Du \quad (1.1.b)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$; $u \in \mathbb{R}^m$; $y \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, le vecteur d'état, de commande et de sortie et A,B,C,D sont des matrices à éléments réels et de dimensions appropriées.

La structure de ce système est déterminée si l'on connaît l'existence et la position des éléments nuls et non nuls dans les matrices A,B,C,D.

On dira que deux systèmes de même dimension sont structurellement équivalents si et seulement si leurs matrices possèdent le même nombre d'éléments fixés à zéro et si ces éléments ont les mêmes positions dans les deux systèmes.

Exemple 1:

Soit le système S_1 de la forme (1.1) avec: $n=3$, $m=2$, $p=2$ et

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} ; B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et soit un autre système S_2 de même dimension avec:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} ; B_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} ; C_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} ; D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

D'après la définition précédente, S_1 et S_2 sont structurellement équivalents.

a) Matrice structurée:

La définition mathématique suivante de la matrice structurée a été donnée par LINNEMAN (1981).

Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert et une application $M_\lambda: \Lambda \longrightarrow M_{n,m}$ où $M_{n,m}$ est l'ensemble de toutes les matrices de dimension $n \times m$.

M_λ est appelée matrice structurée dans Λ s'il existe un sous-ensemble $N \subset n \times m$ et une bijection $I: N \longrightarrow k$ tels que pour $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \in \Lambda$:

$$m_{i,j}(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } (i,j) \notin N \\ \lambda_{I(i,j)} & \text{si } (i,j) \in N \end{cases}$$

D'une manière explicite, une matrice structurée est une matrice constituée par des zéros et/ou par des paramètres libres et modifiables indépendamment les uns des autres.

Exemple 2:

Soit la matrice $M_s = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$

Où * désigne la présence d'un paramètre non nul.

Soit N le nombre des paramètres libres non nuls contenus dans le vecteur $h \in \mathbb{R}^N$, ainsi la matrice M_s peut être écrite comme suit (en lui adoptant l'indice h):

$$M_h = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_4 & a_5 \end{bmatrix} \quad \text{où } h = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5.$$

Remarque:

Si les coefficients de la matrice structurée M_s sont fixés à des valeurs bien déterminées, la matrice résultante est dite admissible par rapport à M_s .

b) Système structuré:

Définition: Un système, donné par les matrices structurées (A_s, B_s, C_s, D_s) , est dit structuré à paramètres dans $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$, si Λ est un ouvert et la matrice

$$\begin{bmatrix} A_s & B_s \\ C_s & D_s \end{bmatrix} : \Lambda \longrightarrow M_{n+p, n+m} \text{ est une matrice structurée}$$

1.2 Quelques propriétés algébriques:

a) Indépendance algébrique:

Soit un anneau K et F une extension de K , c'est à dire $K \subset F$.

Un ensemble $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_q\}$ de F est dit algébriquement

indépendant s'il n'existe aucun polynôme non trivial

$P(x_1, x_2, \dots, x_q)$ à q indéterminées dans K tel que

$$P(y_1, y_2, \dots, y_q) = 0.$$

On entend par polynôme non trivial en x_1, x_2, \dots, x_q à coefficients dans K un polynôme dont certains de ces coefficients sont différents de zéro.

b) Variété algébrique:

Soit un ensemble fini de polynômes non triviaux dans K

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k.$$

L'ensemble des zéros communs aux ϕ_i tels que $\phi_i(Y) = 0 \forall i = 1, 2, \dots, k$

$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_q\} \in K^q$ forme une variété algébrique V .

Si $V \neq K^q$ elle est dite propre et si $V \neq \emptyset$ elle est dite non triviale.

c) Propriété générique:

D'après SHIELDS et PEARSON (1976), une propriété est générique dans K s'il existe une variété (ou intersection de variétés) $V \subset K$ telle que l'ensemble des paramètres soit inclu dans V . on dira alors que la propriété est générique par rapport à V , dans ce sens elle est vraie pour presque tous les éléments de K . Si V est propre et non triviale alors V est un fermé de K .

1.3 Notions de rang structurel:

a) Rang générique:

Soit une matrice A dont les coefficients sont des fonctions rationnelles dans K à q variables ou à q paramètres indépendants x_1, x_2, \dots, x_q .

Définition:

Si le rang numérique, au sens classique, de la matrice A est déterminé de façon unique, à l'extérieur d'une variété algébrique propre dans K^q , on appelle rang générique (noté $r.g(A)$) relativement à x_1, x_2, \dots, x_q la valeur du rang A ainsi déterminée de façon unique.

b) Rang terme:

Soit la matrice $A[a_{i,j}]$ une matrice de dimension $n \times m$ dans K .

Définition:

Le rang terme de A (noté $r.t(A)$) est égal à k_{\max} tel que $a_{i(1)j(1)} \cdot a_{i(2)j(2)} \cdots a_{i(k)j(k)} \neq 0$ avec $i(p) \neq i(q)$ et $j(p) \neq j(q) \forall p \neq q$

Exemple 3:

soit la matrice $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$, $K = \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

D'après la définition on a:

$$\begin{aligned} a_{i(1)j(1)} &= \alpha & i(1) &= 1 & j(1) &= 1 \\ a_{i(2)j(2)} &= \beta & i(2) &= 2 & j(2) &= 2 \end{aligned}$$

Alors $r.t(A) = 2$.

Remarque: Des interprétations booléennes et graphiques du rang terme seront données après avoir traité ces notions.

c) Relations entre le rang terme et le rang générique:

Dans leur publication, SHIELDS et PEARSON (1976) ont donné une définition du rang terme similaire à celle du rang générique alors que cette similarité n'est valable que si les paramètres sont des indéterminées dans K . On remarque, d'ailleurs, une utilisation fréquente du rang terme au début des années 1980 [MOMEN et EVANS (1983)]. En 1987, MUROTA a mis fin à cette confusion en donnant les propriétés suivantes:

i) Lorsque chaque paramètre de la matrice A est une indéterminée en elle-même, alors $r.g(A) = r.t(A)$.

ii) Dans le cas où chaque paramètre est une fonction rationnelle d'indéterminées x_1, x_2, \dots, x_q sur K , alors le rang générique de A est égal au rang maximum de A lorsque on a fixé les paramètres à des valeurs particulières de K .

Ainsi on a généralement $r.g(A) \leq r.t(A)$.

Exemple 4:

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda & \gamma \end{bmatrix}$ $\alpha, \beta, \lambda, \gamma \in \mathbb{R}$.

Nous avons $V = \left[\left\{ \alpha, \beta, \lambda, \gamma \right\} \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha\gamma - \beta\lambda = 0 \right]$

En appliquant la définition du rang générique, on voit qu'à l'extérieur de la variété V , le rang de A est déterminé de façon unique est égal à 2 donc $r.g(A) = 2$ et nous avons $\alpha\gamma \neq 0$ ou $\beta\lambda \neq 0$ alors $r.t(A) = 2$.

Exemple 5:

Soit $A = \begin{bmatrix} \alpha/\beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \lambda \end{bmatrix}$ $\alpha, \beta, \lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ et soit une matrice \bar{A} admissible

par rapport à A en posant $\alpha = \beta = 2$, $\gamma = 3$ et $\lambda = 4$, $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$rang(\bar{A}) = 2$ donc $r.g(A) = 2$. On vérifie que $r.t(A) = 2$

1.4 Notions de l'algèbre booléenne:

1.4.1 Matrice booléenne associée à une matrice structurée:

Définition:

La matrice booléenne M_B associée à une matrice structurée M_S est définie en remplaçant les zéros fixés par des zéros booléens et les coefficients non nuls par des uns booléens.

Exemple 5:

$$\text{Soit } M_S = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \end{bmatrix}; \quad M_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note: La matrice booléenne apparait comme un outil mathématique combinatoire important pour représenter un système par les graphes orientés

-Produit de deux matrices booléennes:

Soit les matrices booléennes $A_B = [a_{ij}]$, $B_B = [b_{kl}]$ respectivement de dimension $(n \times m)$ et $(m \times p)$ où a_{ij} et b_{kl} sont des variables booléennes

Le produit booléen $C = A \vee \wedge B$ est défini tel que $C = [C_{kl}]$ avec $C_{kl} = \vee (a_{ij} \wedge b_{kl})$ et \vee, \wedge sont respectivement la somme et le produit logiques.

1.4.2 Matrice de permutation:

Définition:

Une matrice de permutation M_p est une matrice booléenne contenant un et un seul "un" par ligne et par colonne. Cette matrice est dite matrice de permutation maximale $M_{p_{max}}$ si elle est d'ordre le plus grand que l'on peut extraire d'une matrice booléenne M_B .

Remarque: Chaque matrice M_B peut avoir une multitude de matrices de permutation maximale.

Exemple 6:

$$\text{Soit } M_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, M_{p_{\max 1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; M_{p_{\max 2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4.2 Interprétation booléenne du rang terme:

D'après la définition du rang terme (§ 1.3 b) et celle de la matrice de permutation maximale (§ 1.4.2), on peut interpréter le rang terme d'une matrice booléenne M_B comme étant le nombre de "un" logiques contenus dans sa matrice de permutation maximale.

Remarque: Le rang terme d'une matrice A n'est pas influencé par une transformation de la forme $M_p A M_p^{-1}$ car M_p ne fait que réarranger des colonnes et des lignes de A .

2. ELEMENTS DE LA THEORIE DES GRAPHES

Dans cette partie, nous donnons quelques notions sur la théorie des graphes que nous voyons indispensables pour l'étude et la caractérisation des systèmes structurés traités dans les chapitres suivants. Ces notions seront données d'une manière succincte. En effet, pour beaucoup plus de détails, le lecteur pourra consulter les ouvrages spécialisés tels que ceux cités en bibliographie.

2.1 Graphes orientés [BERGE 1970]:

Définition:

Un graphe orienté $G(V, E)$ est déterminé par:

- a) Un ensemble $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets ou noeuds. Si N est le nombre de sommets (noeuds), on dit que le graphe G est d'ordre N .
- b) Un ensemble $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ d'éléments du produit cartésien $V \times V = \{(x, y) / x \in V, y \in V\}$ appelés arcs.

Si $e(i,j)$ est un arc de G , i est l'extrémité initiale de e et j est l'extrémité terminale de e .

2.2 Graphe orienté associé à une matrice structurée:

Soit une matrice structurée quelconque $M_s = [m_{ij}]$ de dimension $n \times n$.

Définitions:

Le graphe orienté $G(M_s) \equiv (V, E)$ associé à M_s a pour ensemble de noeuds V et pour ensemble de d'arcs E , tels que :

a) Il y ait n noeuds.

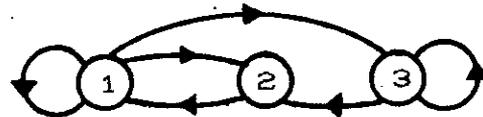
b) Il existe un arc orienté (j,i) de j vers i si et seulement si $m_{ij} \neq 0$. On dit que j et i sont incidents à l'arc (i,j) et j est le prédécesseur de i .

M_s est la matrice d'incidence (ou d'interconnexion) de G .

Exemple 7:

$$M_s = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & 0 & * \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$$

; $G(M_s)$



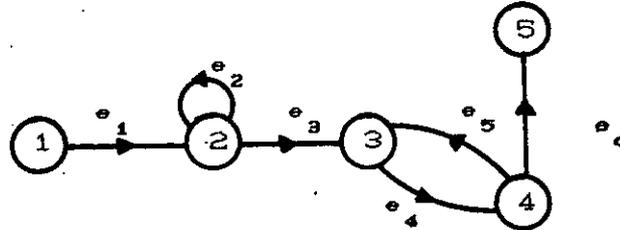
2.3 Chemins et cycles dans un graphe orienté:

Un chemin P de longueur (ou de cardinalité) q est une séquence de q arcs tels que $P = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ avec $e_1 = (i_0, i_1)$; $e_2 = (i_1, i_2)$, ..., $e_q = (i_{q-1}, i_q)$.

Autrement dit, un chemin est une chaîne dont tous les arcs sont orientés dans le même sens. Le sommet i_0 est l'extrémité initiale du chemin P et le sommet i_q est son extrémité terminale. Les arcs apparaissant dans la séquence $\{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ ne sont pas nécessairement distincts. Le nombre d'arcs contenus dans cette séquence est la longueur (ou la cardinalité) du chemin.

Exemple 8:

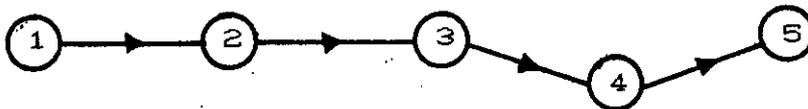
Soit le graphe suivant:



La séquence d'arcs $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_4, e_6)$ forme un chemin de longueur 7 allant du noeud initial 1 au noeud terminal 5.

Un chemin est dit simple s'il ne touche qu'une seule fois chaque noeud rencontré.

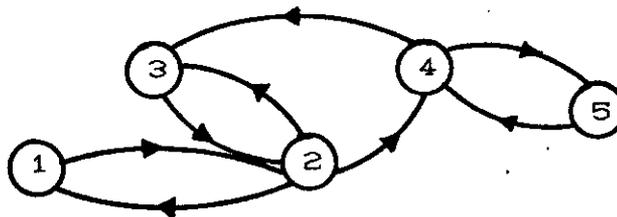
Exemple 9:



Deux noeuds i, j sont dits fortement connexes s'il existe un chemin de i vers j et un autre chemin de j vers i . Le graphe est dit fortement connexe si pour chaque noeud i et chaque noeud j il existe un chemin de i vers j .

Exemple 10:

Le graphe suivant est fortement connexe

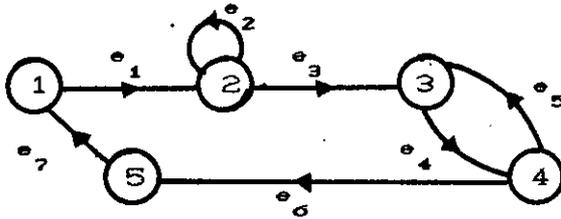


tandis que celui de l'exemple 8 n'est pas fortement connexe.

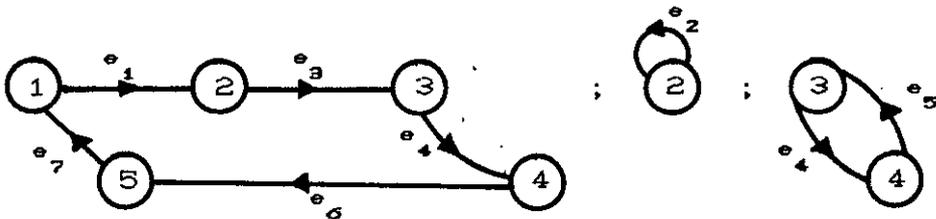
Un chemin fermé est un chemin dans lequel le noeud initial coïncide avec le noeud terminal.

Le chemin fermé est dit cycle s'il ne parcourt qu'une seule fois chaque noeud rencontré (sauf le noeud initial et terminal).

Exemple 11:



Ce graphe contient les trois cycles suivants:

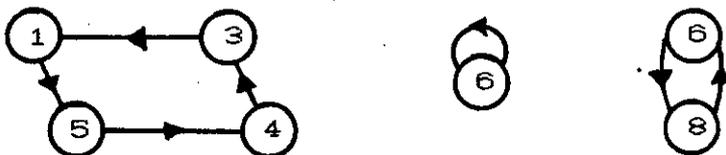


Le nombre de noeuds contenus dans un cycle définissent sa longueur. Ainsi pour l'exemple précédent les cycles sont respectivement de longueur 5, 1 et 2.

Le cycle de longueur 1 est dit auto cycle et l'ensemble des cycles de noeuds disjoints est dit famille de cycles.

Exemple 12:

La figure suivante représente une famille de trois cycles



2.4 Graphe biparti associé à une matrice structurée :

Soit une matrice structurée M_s .

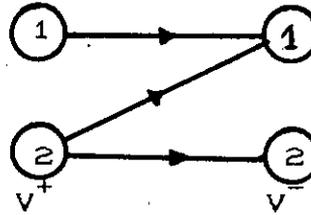
Le graphe biparti associé à $M_s : G_b(M_s) \equiv (V^+, V^-, E)$ a pour ensemble de noeuds initiaux V^+ , pour ensemble de noeuds terminaux V^- et pour ensemble d'arcs E tels que:

- a) V^+ est l'ensemble de colonnes de M_s .
- b) V^- est l'ensemble de lignes de M_s .
- c) Il existe un arc orienté $j, i \forall j \in V^+, \forall i \in V^-$ tels que $m_{ij} \neq 0$.

Exemple 13:

$$M_s = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

; $G_B(M_s)$



Un couplage \mathcal{C} dans G_B est un sous-ensemble d'arcs de E tel qu'il part au plus un arc d'un sommet initial V^+ et qu'il arrive au plus un arc sur un sommet terminal de V^- .

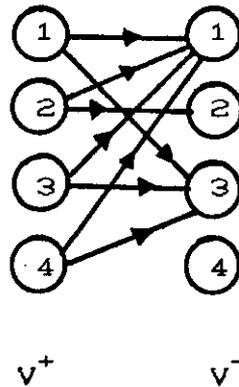
Le couplage \mathcal{C} est dit de cardinalite maximale si le nombre d'arcs est maximal.

Exemple 14:

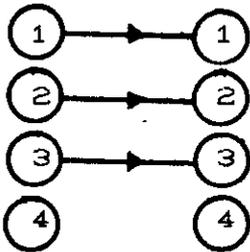
Soit le graphe biparti G_B associé à la matrice structurée M_s .

$$M_s = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & 0 \\ * & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

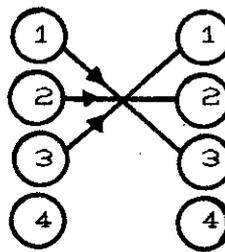
; G_B :



A partir de ce graphe, on peut extraire deux couplages maximaux \mathcal{C}^1 et \mathcal{C}^2 de cardinalité 3.



\mathcal{C}^1



\mathcal{C}^2

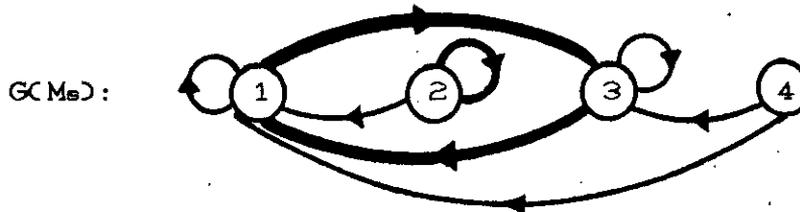
2.5 Interprétations graphiques du rang terme:

2.5.a Interprétation par graphe orienté:

Le rang terme d'une matrice structurée M_s est égal au nombre d'arcs contenus dans le plus large sous-graphe que l'on peut extraire d'un graphe orienté condition que pour chaque noeud de ce sous-graphe il n'arrive et ne part qu'un seul arc.

Exemple 15:

Soit le graphe $G_B(M_s)$ associé à la matrice M_s de l'exemple précédent



Le rang terme de M_s est égal au nombre d'arcs tracés en lignes épaisses.

2.5.b Interprétation par graphe biparti:

En utilisant les définitions et les propriétés du graphe biparti, nous pouvons donner l'interprétation suivante au rang terme: Le rang terme d'une matrice structurée M_s est égal à la cardinalité du couplage maximum dans son graphe biparti $G_B(M_s)$.

Exemple 16:

Dans l'exemple 14 la cardinalité des couplages maximaux \mathcal{C}^1 et \mathcal{C}^2 est égale à 3. Cette valeur coïncide avec $r.t(M_s)$.

3 COMMANDABILITE ET OBSERVABILITE AU SENS USUEL ET STRUCTUREL:

3.1 Commandabilité et observabilité au sens usuel:

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux notions fondamentales de la commandabilité et de l'observabilité, au sens classique de Kalman, des systèmes linéaires invariants dans le temps. Les différents

critères sont rassemblés en se référant à une littérature consacrée aux systèmes linéaires [FOSSARD (1972), GILLE (1976), KAILATH (1980),...] Ainsi, nous nous sommes particulièrement intéressés à la thèse de RECH(1988) qui les donne d'une manière succincte mais complète.

3.1.1 Commandabilité:

a) Définition:

L'état $x_0(t)$ est commandable si et seulement si quelque soit l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ il existe une fonction $U_{x_0}(t)$ définie dans $[t_1, t_2]$ telle que la solution du système, donné par (1.1), pour $u(t) = U_{x_0}(t)$ et $x(t_1) = x_0$ satisfasse à la condition $x(t_2) = 0$.

On dit que la paire $[A, B]$ est commandable si et seulement si la définition précédente est vraie pour tous les états et les intervalles $[t_1, t_2]$.

b) Critères de commandabilité:

Vu la grande diversification dans les critères de commandabilité équivalents à la propriété de commandabilité, nous ne sélectionnons que ceux qui nous seront utiles par la suite.

Le système (1.1) est dit commandable si et seulement si l'un des critères suivants est vérifié.

1) Rang de la matrice de commandabilité Q_c est égal à n

$$Q_c = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \text{ avec } \dim Q_c = n \times n \cdot m.$$

$$\text{ou bien } \text{rang} [B \quad AB \quad \dots \quad A^{\nu-1}B] = n \quad \nu \leq n.$$

2) Il n'existe aucune matrice de transformation non singulière T telle que :

$$\tilde{A} = TAT^{-1} \text{ et } \tilde{B} = TB \text{ soit de la forme}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} ; \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cette forme indique que tous les états décrits par A_{22} ($k \times k$) ne sont pas atteignables par \tilde{B}_1 ($(n-k) \times m$).

3) Rang de la matrice modale $[\lambda I - A \quad B]$ est égal à $n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

4) La matrice de transfert $(sI - A)^{-1}B$ a des lignes linéairement indépendantes $\forall s$ tel que cette matrice est définie.

5) Soit la matrice polynomiale, [WOLOVICH (1974)], de transfert $T(s) = N_d(s) \cdot D_d^{-1}(s) = D_g^{-1}(s) \cdot N_g(s)$ où $\dim N_d(s) = p \times m$, $\dim D_d^{-1}(s) = p \times p$, $\dim D_g^{-1}(s) = p \times p$, $\dim N_g(s) = p \times m$ avec $D_g^{-1}(s) \cdot N_g(s)$ toujours observable et $N_d(s) D_d^{-1}(s)$ toujours commandable.

Le système est donc commandable si et seulement si $N_g(s)$ et $D_g(s)$ sont premières entre elles à gauche.

6) Soit la matrice système d'état [ROSENBRICK, (1970)]

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices $sI - A$ et B sont premières entre elles à gauche (pour un système mono-entrée la matrice de transfert $(sI - A)^{-1}$ n'admet pas de simplification pôle-zéro).

Remarque: S'il existe un polynôme facteur commun à gauche, le nombre de ces racines détermine la déficience en rang de la matrice Q_c donnée dans le critère 1.

3.1.2 Observabilité :

Définition:

L'état $x_0(t)$ est observable si et seulement si il peut être identifié à partir de la connaissance de la sortie $y(t)$ et de l'entrée $u(t)$ sur un intervalle de temps $[t_0, t_1]$.

On dit que la paire $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ est observable si et seulement si tout

état $x_0(t)$ est observable quelque soit t .

a) Notion de dualité:

Deux systèmes S_1 et S_2 sont dits duaux s'il sont définis par:

$$S_1: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad S_2: \begin{cases} \dot{\xi} = A^T \xi + C^T v \\ v = B^T \xi + D^T u \end{cases}$$

où M^T désigne la transposée de M .

c) Critères d'observabilité:

Tous les critères d'observabilité peuvent être obtenus en transcrivant ceux de commandabilité du système dual. C'est à dire que le test de l'observabilité du système revient au test de la commandabilité de son système dual. Nous donnons particulièrement les critères suivants:

Le système (1.1) est dit observable si et seulement si l'un des critères suivants est vérifié:

1) Rang de la matrice d'observabilité Q_0 est égal à n
 $Q_0 = [C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T]$ $\dim Q_0 = n \times n \cdot p$.

2) Il n'existe aucune matrice non singulière H telle que la paire $\bar{A} = HAH^{-1}, \bar{C} = CH^{-1}$ soit de la forme:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{C} = [\bar{C}_1 \ 0] \quad \text{où} \quad \dim \bar{A}_{22} = k \times k, \quad k < n \quad \dim \bar{C}_1 = p \times n - k$$

Cela signifie que les états décrits par \bar{A}_{22} n'atteignent pas les sorties.

3) $N_d(s) \cdot D_d^{-1}(s)$ (toujours commandable) est observable si et seulement si $N_d(s)$ et $D_d(s)$ sont premières entre elle à droite.

4) Les matrices $(sI - A)$ et $-C$ n'admettent pas de facteur commun à droite.

3.2 Commandabilité et observabilité structurelles:

Le concept de commandabilité structurelle a été introduit, pour la première fois, par LIN (1974) dans la publication de ses résultats développés en 1972. Dans ce suit, nous allons donner quelques critères algébriques et graphiques de la commandabilité et de l'observabilité des systèmes structurés. Rappelons que ces derniers sont des systèmes à paramètres inconnus ou mal connus par manque de valeurs quantitatives. Il s'agit donc d'exploiter leur structure qui présente une information qualitative certaine.

3.2.1. Commandabilité structurelle:

Définition:

Un système caractérisé par la paire structurée $[A_s \ B_s]$ est structurellement commandable (ou tout-court s-commandable), s'il existe au moins une paire admissible (§ 1.1 CH.I) $(A, B) \in [A_s \ B_s]$ qui soit commandable au sens numérique usuel.

Définition:

On dit qu'un système est atteignable par les entrées si, dans le graphe $G(Q_1)$ il existe pour chaque noeud d'état, un chemin entre au moins un noeud d'entrée et le noeud d'état en question.

La matrice Q_1 est donnée par :

$$Q_1 = \begin{bmatrix} A_s & B_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Une condition d'atteignabilité équivalente est donnée par le lemme suivant:

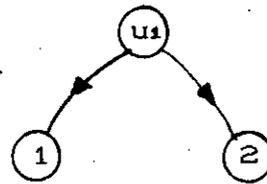
Lemme:

Si la classe des systèmes caractérisés par la paire $[A_s \ B_s]$ est atteignable en entrée, alors $\text{rang}[\lambda I - A_s \ B_s] = n \ \forall \lambda \neq 0$ et $\forall (A, B) \in [A_s \ B_s]$

Remarque: L'atteignabilité des entrées du système n'est qu'une condition nécessaire pour la commandabilité structurelle.

Exemple 17:

Soit $Q_1 = \begin{bmatrix} A_s & B_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $G(Q_1)$:



Les états x_1 et x_2 sont atteignables par u_1 par contre aucune paire admissible $[A \ B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas commandable au sens numérique usuel. Le système n'est donc pas s-commandable.

a) Critères de commandabilité structurelle:

Nous donnons ici les principaux critères de commandabilité structurelle qui ont été introduits par plusieurs auteurs, à savoir; SHIELDS et PEARSON (1976), GLOVER et SILVERMAN (1976), DAVISON (1977), REINCHKE (1988) et autres.

Théorème: [REINCHKE (1988)]

Le système structuré caractérisé par la paire $[A_s \ B_s]$ est s-commandable si et seulement si:

- a) Il est atteignable en entrée.
- b) $\text{Rang-s}[A_s \ B_s] = n$

où rang-s désigne le rang structurel (générique ou terme).

Théorème: [REINCHKE (1988)]

Le système structuré caractérisé par la paire $[A_s \ B_s]$ est s-commandable si et seulement si, dans le graphe $G(Q_1)$ les conditions suivantes sont satisfaites:

- a) Pour chaque noeud d'état de $G(Q_1)$, il existe un chemin entre au moins une des m-entrées et l'état en question.
- b) Il existe, dans $G(Q_1)$, au moins une famille de cycles de largeur n.

Remarque:

On entend par largeur d'un cycle, le nombre de nœuds d'état qu'il contient.

Notes:

- a) Ce théorème est une interprétation graphique des conditions du théorème précédent. Cette question sera traitée ultérieurement lors de la caractérisation des modes structurellement fixes.
- b) Une interprétation booléenne de la première condition du théorème sera aussi donnée au chapitre III. Celle-ci se base sur la notion de matrice et vecteur d'atteignabilité.

3.2.2 Observabilité structurelle:

Nous avons déjà vu, dans le cas de la commandabilité et de l'observabilité au sens usuel de Kalman, que ces deux notions sont duales. Cette propriété de dualité reste aussi valable dans le cas des systèmes structurés.

Définition:

Un système structuré caractérisé par la paire $\begin{bmatrix} A_s \\ C_s \end{bmatrix}$ est structurellement observable (ou tout-court s-observable), s'il existe au moins une réalisation admissible $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} A_s \\ C_s \end{bmatrix}$ qui soit observable au sens numérique usuel.

Définition:

On dit qu'un système est atteignable en sorties si, dans le graphe $G(Q_2)$, il existe un chemin entre chaque nœud d'état et au moins une sortie.

Où
$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & C_s \\ E & A_s \end{bmatrix}$$

E est une matrice dont tous les éléments sont non nuls.

Théorème: [REINCHKE (1988)]

Le système structuré caractérisé par la paire

$$\begin{bmatrix} A_s \\ C_s \end{bmatrix}$$

est structurellement observable si et seulement si:

a) Il est atteignable en sorties.

b) Rang-s $\begin{bmatrix} A_s \\ C_s \end{bmatrix} = n.$

Théorème: [REINCHKE (1988)]

Le système structuré caractérisé par la paire

$$\begin{bmatrix} A_s \\ C_s \end{bmatrix}$$

est

structurellement observable si et seulement si, dans le graphe $G(Qz)$, les deux conditions suivantes sont satisfaites:

a) Pour chaque noeud d'état il existe au moins un chemin entre ce noeud et une sortie.

b) Il existe au moins une famille de cycles de largeur n dans $G(Qz)$.

4. CONCLUSION:

Dans ce chapitre, nous avons exposé un certain nombre de définitions et bases mathématiques, dans le but de mettre en évidence les propriétés des systèmes structurés.

En conclusion, nous donnons quelques remarques sur certains aspects que nous jugeons nécessaire d'être clarifiés.

Les systèmes structurés sont des systèmes dont la propriété principale est purement qualitative caractérisée par la structure du système qui donne une information certaine. Cette nature d'information donne l'avantage à cette classe de systèmes d'être analysée à l'aide des outils mathématiques efficaces tels que l'algèbre de boole et la théorie des graphes. En utilisant ces derniers, on évite, éventuellement, la mise en oeuvre des calculs numériques complexes et lourds.

Les notions de commandabilité et d'observabilité, au sens classique et structurel, ont été également présentées en vue d'atteindre un double objectif. Le premier est de préparer la voie pour l'étude de la commande décentralisée, sachant qu'elles sont des conditions nécessaires pour l'étude de cette dernière. Le second est de mettre en relief ces notions par l'approche structurelle.

Cette étude nous permet de tirer les conclusions suivantes :

-Certains critères de commandabilité et d'observabilité structurelles apparaissent comme une décomposition, en deux conditions, de ceux donnés par l'approche classique:

a)Condition d'atteignabilité.

b)Condition du rang structurel.

-La nature de type binaire de ces conditions leurs permet d'être exprimées par l'algèbre de Boole et la théorie des graphes [REINCHKE (1984)].

CHAPITRE II

COMMANDE DECENTRALISEE PAR L'APPROCHE CLASSIQUE

(CARACTERISATIONS DES MODES FIXES)

0. INTRODUCTION:

La commande décentralisée est une approche intéressante pour la conduite de grands systèmes et/ou de systèmes complexes. Ces derniers sont généralement constitués de plusieurs sous-systèmes interconnectés et géographiquement éloignés, ce qui engendre des problèmes de coût et de fiabilité dans l'échange de l'information entre les sous-systèmes.

L'utilisation de l'approche décentralisée a permis d'obtenir des résultats probants au cours de ces deux dernières décennies, [LAU & PERSIANO (1972)], [WANG & DAVISON (1973)], [CORFMAT & MORSE (1976)], ..., [PATEL & MISRA (1991)]. Ainsi, dans WANG & DAVISON (1973), il a été montré que la décentralisation de l'information peut forcer le système à avoir, en boucle fermée, certaines fréquences indépendantes de la commande utilisée. Ces fréquences, appelées "modes fixes", jouent un rôle fondamental dans la solvabilité du problème et leur connaissance devient impérative.

Le présent chapitre, constitue une synthèse des différentes méthodes de caractérisation et d'évaluation des modes fixes, étudiées dans une littérature éparpillée. Pour la clarté de l'exposé, le même exemple est repris dans les différentes caractérisations.

1. GENERALITES:

Le problème de la commande décentralisée se pose comme suit: Soit le système dynamique composé de N sous-systèmes dont chacun est commandé par une station de commande. L'équation du système est :

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^N B_i u_i \quad (1a)$$

$$y_i = C_i x \quad i=1, 2, \dots, N \quad (1b)$$

Avec: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m_i}$; $C_i \in \mathbb{R}^{p_i \times n}$

x est le vecteur d'état du système et u_i, y_i sont respectivement le vecteur d'entrée et de sortie du sous-système i .

Une commande par retour de sortie de la forme:

$$u_i = F_i y_i + v_i \quad (2)$$

est appliquée à chaque sous-système où v_i est une entrée externe.

La contrainte de décentralisation est donnée par l'ensemble des matrices

$$\mathcal{F} = \left\{ F / F = \text{diag}(F_1, F_2, \dots, F_N), F_i \in \mathbb{R}^{m_i \times p_i} \right\} \quad (3)$$

$i = 1, 2, \dots, N$

Le principe d'une commande décentralisée d'après WANG & DAVISON (1973) est illustré par la figure 1.

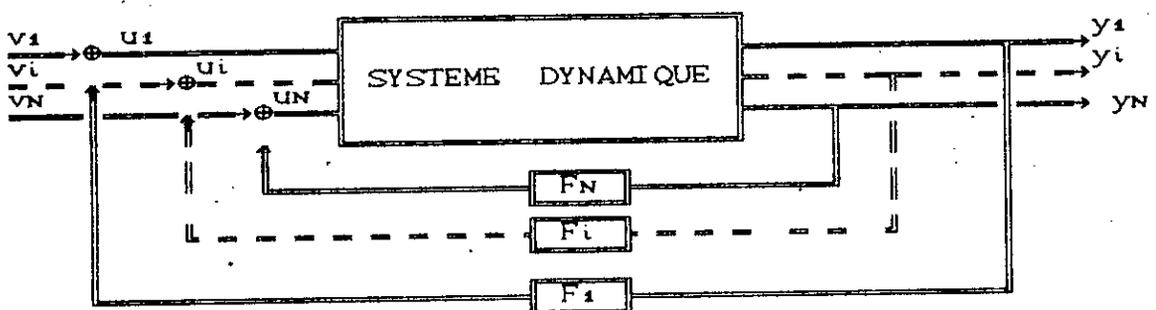


Figure 1

Schéma de principe de la commande décentralisée

1.1 Définition d'un mode fixe: [WANG & DAVISON (1973)]

L'ensemble des modes fixes du système (1) caractérisé par l'ensemble des matrices $\langle A, B_i, C_i, i=1, 2, \dots, N \rangle$ en respectant la contrainte \mathcal{F} est défini par:

$$\Lambda(A, B_i, C_i, \mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \alpha(A + \sum_{i=1}^N B_i F_i C_i) \quad (4)$$

où $\alpha(\cdot)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de (\cdot) .

et $\Lambda(\cdot)$ l'ensemble des modes fixes du système (\cdot) .

Plusieurs travaux sur l'évaluation de ces modes fixes ont été faits allant des tests pratiques aux méthodes théoriques. Un test pratique est donné par l'algorithme de DAVISON (1981).

1.2 Algorithme de DAVISON

- 1) Calcul des valeurs propres de la matrice A.
- 2) Choix arbitraire des matrices $F_i, i=1, 2, \dots, N$.
- 3) Calcul des valeurs propres de la matrice en boucle fermée.

$$A_F = A + \sum_{i=1}^N B_i F_i C_i$$

- 4) Les modes fixes seront les valeurs propres communes entre A et A_F .

Illustrons cet algorithme par l'exemple suivant:

Exemple 1:

Soit le système (1) ayant deux stations de commande (N=2) et le retour de sortie

$$u_i = F_i y_i \quad i=1,2$$

avec:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad F_1 = f_1; \quad F_2 = f_2.$$

Les valeurs propres de A sont: $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -2$.

celles de A_F sont: $\lambda_{1F} = -1 + f_1$; $\lambda_{2F} = 1$; $\lambda_{3F} = -2 + f_2$.

On remarque que λ_{2F} reste inchangée et ne dépend pas de f_1 et f_2 c'est donc un mode fixe.

2. CARACTERISATIONS DES MODES FIXES

2.1 caractérisation par l'approche d'état:

Dans ce paragraphe la caractérisation des modes fixes sera présentée par l'approche d'état. Le résultat de ANDERSON (1981) donné par le théorème suivant, est illustré par l'exemple 2.

Théorème 1:

La condition nécessaire et suffisante pour que le système (1), avec la configuration du feedback (2), ait un mode fixe en $s=s_0$ est que : pour une partition de l'ensemble $\nu = \{1, 2, \dots, N\}$ en deux sous-ensembles $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ et $\{i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_N\}$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} s_0 I - A & B_{i_1} & B_{i_2} & \dots & B_{i_k} \\ C_{i_1} & & & & \\ C_{i_{k+1}} & & 0 & & \\ \vdots & & & & \\ C_{i_N} & & & & \end{bmatrix} < n \quad (5)$$

où n est la dimension de A et I la matrice identité.

Remarque:

Nous allons donner une démonstration de ce théorème autre que celle de ANDERSON (1981). Celle-ci est basée sur le lemme suivant:

Lemme 1: [XUKAI & YONG (1986)]

Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times r}$ alors

$$\text{r.g.} \begin{bmatrix} A+BFC \\ F \end{bmatrix} = \min \left\{ \text{rang} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}; \text{rang} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \right\} \quad (6)$$

où $\text{r.g.}(\cdot)$ désigne le rang générique de la matrice (\cdot) .

Démonstration:

Par définition, le mode fixe s_0 satisfait à la condition:

$$\text{r.g.}_{F_i} \left[A(s_0) + \sum_{i=1}^N B_i F_i C_i \right] < n \quad (7)$$

Avec $A(s_0) = s_0 I - A$

En appliquant le lemme 1, la condition nécessaire et suffisante pour que (7) soit vraie est que, au moins une des deux des deux conditions suivantes soit vérifiée:

$$\text{r.g.}_{F_1, F_2, \dots, F_{N-1}} \left[A(s_0) + \sum_{i=1}^{N-1} B_i F_i C_i \quad B_N \right] < n \quad (8)$$

$$\text{r.g.}_{F_1, F_2, \dots, F_{N-1}} \left[\begin{array}{c} A(s_0) + \sum_{i=1}^{N-1} B_i F_i C_i \\ C_N \end{array} \right] < n \quad (9)$$

Si on utilise le lemme 1 une deuxième fois, la condition nécessaire et suffisante pour que (7) soit vraie est que au moins une des quatre conditions suivantes soit vérifiée:

$$\text{r.g. } \begin{matrix} F_1, F_2, \dots, F_{N-2} \end{matrix} \left[\begin{array}{c} A(s_0) + \sum_{i=1}^{N-2} B_i F_i C_i \\ B_{N-1} \quad B_N \end{array} \right] < n \quad (10)$$

$$\text{r.g. } \begin{matrix} F_1, F_2, \dots, F_{N-2} \end{matrix} \left[\begin{array}{c} A(s_0) + \sum_{i=1}^{N-2} B_i F_i C_i \\ C_{N-1} \quad 0 \end{array} \right] < n \quad (11)$$

$$\text{r.g. } \begin{matrix} F_1, F_2, \dots, F_{N-2} \end{matrix} \left[\begin{array}{c} A(s_0) + \sum_{i=1}^{N-2} B_i F_i C_i \\ C_N \quad 0 \end{array} \right] < n \quad (12)$$

$$\text{r.g. } \begin{matrix} F_1, F_2, \dots, F_{N-2} \end{matrix} \left[\begin{array}{c} A(s_0) + \sum_{i=1}^{N-2} B_i F_i C_i \\ C_{N-1} \\ C_N \end{array} \right] < n \quad (13)$$

En continuant de la même manière, on trouve la condition du théorème.

□

Exemple 2:

Reprenons le système de l'exemple 1.

Nous avons la partition $\nu = (1, 2)$ $i_1=1$, $i_2=2$.

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda_2 I - A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 < 3$$

La condition est vérifiée, $\lambda_2=1$ est donc un mode fixe.

2.2 Caractérisation par matrices polynômiales (factorisation de WOLOVICH (1974)).

Considérons le système (1) et la commande décentralisée (2).

Sa matrice de transfert en boucle ouverte peut être écrite sous sa forme factorisée à gauche.

$$\frac{y(s)}{u(s)} = W(s) = D_g^{-1}(s) N_g(s) \quad (14)$$

où $D_g^{-1}(s)$ et $N_g(s)$ sont des matrices polynômiales en s .

Par la notation de la transformation de Laplace, on peut écrire:

$$D_g(s)y(s) = N_g(s)u(s) \quad (15)$$

$$\text{avec } D_g(s) = \begin{bmatrix} D_{g_1}(s) & D_{g_2}(s) & \dots & D_{g_N}(s) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$N_g(s) = \begin{bmatrix} N_{g_1}(s) & N_{g_1}(s) & \dots & N_{g_N}(s) \end{bmatrix} \quad (17)$$

D_{g_i}, N_{g_i} ont respectivement p_i, m_i colonnes $i=1, 2, \dots, N$.

L'équation (16) peut donc s'écrire sous la forme:

$$\sum_{i=1}^N D_{g_i}(s) y_i(s) = \sum_{i=1}^N N_{g_i}(s) u_i(s) \quad (18)$$

Le système en boucle fermée aura la matrice de transfert factorisée suivante:

$$W_F(s) = \overline{D_g^{-1}(s)} N_g(s) \quad (19)$$

Avec:

$$\overline{D_g(s)} = \begin{bmatrix} D_{g_1}(s) + N_{g_1}(s)F_1 & \dots & D_{g_N}(s) + N_{g_N}(s)F_N \end{bmatrix} \quad (20)$$

Le résultat est donné par le théorème suivant:

Théorème 2: (ANDERSON & CLEMENTS (1981))

Le système, décrit par (14) et le retour de sorties (2) possède un mode fixe décentralisé en s_0 , si et seulement si $\overline{D_g(s_0)}$ est une matrice singulière $\forall F_i \quad i=1, 2, \dots, N$.

Dans le but de trouver une condition équivalente à celle du théorème précédent, on commence par donner le corollaire suivant:

Corollaire: [ANDERSON & CLEMENTS (1981)]

soit A_1, A_2, \dots, A_N N -matrices de dimension $\gamma \times m_i$

et B_1, B_2, \dots, B_N N -matrices de dimension $\gamma \times p_i$
 $i = 1, 2, \dots, N$

La condition nécessaire et suffisante pour que

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A_1 + B_1 F_1 & A_2 + B_2 F_2 & \dots & A_N + B_N F_N \end{bmatrix} < \gamma, \sum_{i=1}^N m_i \quad (21)$$

$\forall F_i \in \mathbb{R}^{m_i \times p_i}$ est qu'il existe un sous-ensemble

$$s = \{ i_1, i_2, \dots, i_j \} \subset \{ 1, 2, \dots, N \} \quad \text{pour lequel}$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A_{i_1} & B_{i_1} & \dots & A_{i_j} & B_{i_j} \end{bmatrix} < \gamma - \sum_{i \in s} m_i, \sum_{i \in s} m_i \quad (22)$$

En utilisant ce corollaire, on peut exprimer une condition d'existence du mode fixe qui soit indépendante des F_i .

Si on prend $\gamma = \sum_{i=1}^N m_i$, $A_i = D_{g_i}$ (so) et $B_i = N_{g_i}$ (so)

on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème 3: [ANDERSON & CLEMENTS, (1981)]

Le système, donné par la matrice de transfert factorisée à gauche (14) et le retour de sorties (2), possède un mode fixe en s_0 , si et seulement si, il existe un sous-ensemble $\delta \neq \emptyset$

$$\delta = \{ i_1, i_2, \dots, i_j \} \subset \{ 1, 2, \dots, N \} \text{ pour lequel}$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} D_{g_{i_1}}(s_0) & N_{g_{i_1}}(s_0) & D_{g_{i_2}}(s_0) & N_{g_{i_2}}(s_0) & \dots & D_{g_{i_j}}(s_0) & N_{g_{i_j}}(s_0) \end{bmatrix} < \sum_{i \in \delta} m_i \quad (23)$$

Ce théorème est illustré par l'exemple suivant:

Exemple 3:

Pour l'exemple 1, la factorisation à gauche de la matrice de transfert est donnée par: $W(s) = D_g(s)^{-1} N_g(s)$

$$\text{avec } D_g(s) = \begin{bmatrix} (s+1)(s-1) & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}; N_g(s) = \begin{bmatrix} s-1 & s+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m_1 = 1, m_2 = 1$$

$$D_{g_1}(s) = \begin{bmatrix} (s+1)(s-1) \\ 0 \end{bmatrix}; D_{g_2}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ s+2 \end{bmatrix}; N_{g_1}(s) = \begin{bmatrix} s-1 \\ 0 \end{bmatrix}; N_{g_2}(s) = \begin{bmatrix} s+1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si nous prenons $j=1$, nous aurons $\phi = \{ i_1 \} \subset \{ 1, 2 \}$ et $i_1=1$

l'application du théorème 3 nous donne :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} D_{g_1}(s_0) & N_{g_1}(s_0) \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} (s_0+1)(s_0-1) & s_0-1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{s_0=1} =$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 < m_1 \text{ d'où } s_0 \text{ est un mode fixe décentralisé.}$$

2.3 Caractérisation des modes fixes par matrice de transfert rationnelle : [ANDERSON (1982)]

2.3.1 Matrice de transfert de dimension 2x2 :

Considérons la fonction de transfert 2x2 suivante:

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{t_{11}(s)}{a(s)} & \frac{t_{12}(s)}{a(s)} \\ \frac{t_{21}(s)}{a(s)} & \frac{t_{22}(s)}{a(s)} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$a(s)$ est le polynôme caractéristique.

La matrice de transfert est:

$$W(s) = D_g^{-1}(s) N_g(s)$$

Avec :

$$D_g(s) = \begin{bmatrix} d_{11}(s) & d_{12}(s) \\ d_{21}(s) & d_{22}(s) \end{bmatrix} ; N_g(s) = \begin{bmatrix} n_{11}(s) & n_{12}(s) \\ n_{21}(s) & n_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$D_g(s)$ et $N_g(s)$ sont premières entre elles [WOLOVICH (1974)]

D'après le théorème 3, il existe un mode fixe en s_0 si,

$$d_{11}(s_0) = d_{21}(s_0) = n_{11}(s_0) = n_{21}(s_0) = a(s_0) = 0.$$

$$a(s) = d_{11}(s)d_{22}(s) - d_{12}(s)d_{21}(s).$$

Un simple calcul permet d'exprimer $t_{ij}(s)$ en fonction de

$d_{ij}(s)$ et $n_{ij}(s)$, on trouve :

$$t_{11}(s_0) = 0 ; t_{12}(s_0) \neq 0 ; t_{22}(s_0) = 0 ; t_{21}(s_0) = \left. \frac{d}{ds} t_{21}(s) \right|_{s=s_0} = 0$$

On peut dire donc que s_0 est un mode fixe si et seulement si, après simplification et réarrangement des entrées et des sorties, dans le cas où c'est nécessaire, la matrice de transfert prend la forme suivante:

$$W(s) = \left[\begin{array}{c|c} \text{élément sans} & \text{élément avec} \\ \text{pôle en } s_0 & \text{pôle en } s_0 \\ \hline \text{élément avec} & \text{élément sans} \\ \text{zéro en } s_0 & \text{pôle en } s_0 \end{array} \right] \quad (25)$$

Exemple 4:

Le calcul de la matrice de transfert du système de l'exemple 1 donne:

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s-1} \\ 0 & \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

Cette forme répond à celle de l'équation (25), $s_0=1$ est donc un mode fixe décentralisé.

2.3.2 Matrice de transfert de dimension arbitraire:

Par réarrangement des entrées et des sorties, si c'est nécessaire, supposons $i_j=j$ dans (23) et par l'agrégation des N stations en deux stations, pour lesquelles il existe des modes fixes, on peut écrire:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(s) &= \begin{bmatrix} D_{g_1}(s) & D_{g_2}(s) & \dots & D_{g_j}(s) \end{bmatrix} \\ \mathcal{N}_1(s) &= \begin{bmatrix} N_{g_1}(s) & N_{g_2}(s) & \dots & D_{g_j}(s) \end{bmatrix} \\ \mathcal{D}_2(s) &= \begin{bmatrix} D_{g_{j+1}}(s) & D_{g_{j+2}}(s) & \dots & D_{g_N}(s) \end{bmatrix} \\ \mathcal{N}_2(s) &= \begin{bmatrix} N_{g_{j+1}}(s) & N_{g_{j+2}}(s) & \dots & D_{g_N}(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{26}$$

et l'équation (15) aura la forme:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}_{g_1} & \mathcal{D}_{g_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{g_1} & \mathcal{N}_{g_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

La fonction de transfert correspondante prend la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (28)$$

$W_{11}(s)$ et $W_{21}(s)$ possèdent respectivement β et $\bar{\beta}$ lignes

Théorème 4: [ANDERSON (1982)]

Si nous avons $\begin{bmatrix} \mathcal{D}_{g_1}(s) & \mathcal{D}_{g_2}(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{g_1}(s) & \mathcal{N}_{g_2}(s) \end{bmatrix}$ première à gauche, on peut montrer que la condition d'existence du mode fixe en s_0 donnée par : $\text{rang} \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{g_1}(s_0) & \mathcal{N}_{g_1}(s_0) \end{bmatrix} < \beta$ est équivalente à la condition suivante:

$$W(s) = \left[\begin{array}{|l|l|} \hline \text{aucun élément n'a} & \text{le polynôme caractéristique} \\ \text{un pôle en } s_0 & \text{de ce bloc a un zéro en } s_0 \\ \hline \text{chaque élément a} & \text{aucun élément n'a} \\ \text{un zéro en } s_0 & \text{un pôle en } s_0 \\ \hline \end{array} \right] \quad (29)$$

Remarque: la démonstration de ce résultat est fondée sur la même idée que dans le cas d'une matrice de transfert 2×2 mais présente une complexité supplémentaire. Pour plus de détails, le lecteur pourra la consulter dans l'article de ANDERSON & CLEMENTS (1981).

3. CONCLUSION:

La caractérisation des modes fixes dans la commande décentralisée a été donnée par différentes approches algébriques. Les conditions d'existence de ces modes fixes ne constituent pas un moyen de calcul, sauf celle du théorème 2 qui peut servir pour l'évaluation du mode fixe. La caractérisation par matrice de fonction de transfert découle de la caractérisation par matrices polynômiales. La condition de la singularité de la matrice $\overline{D}_g(s_0)$ du système en boucle fermée, donnée par le théorème 2, indépendamment des valeurs des matrices de retour F_i s'explique par le fait que, d'après WOLOVICH, son déterminant donne le polynôme caractéristique du système et ce dernier s'annule en s_0 qui ne dépend pas des éléments des matrices $F_i, i=1,2,\dots,N$.

CHAPITRE III

COMMANDE DECENTRALISEE PAR L'APPROCHE STRUCTURELLE (CARACTERISATIONS DES MODES STRUCTURELLEMENT FIXES)

0. INTRODUCTION:

Le mode fixe dans la commande décentralisée peut avoir deux origines différentes: il peut être une conséquence d'une liaison (dépendance) entre les paramètres du système, ou bien de la structure de ce dernier. Dans le premier cas, une faible perturbation sur les paramètres peut éliminer ce mode, alors qu'il reste fixe dans le second cas quelque soient les valeurs des paramètres du système. Du point de vue physique, seul le deuxième type est important, du fait de la liaison entre les paramètres qui n'est généralement pas connue. Pour ce second type, appelé mode structurellement fixe, plusieurs outils mathématiques peuvent être utilisés pour son analyse, tels que l'algèbre booléenne et la théorie des graphes.

Dans ce qui suit, nous allons tout d'abord mettre en évidence la différence entre ces deux types de modes fixes à travers deux exemples illustratifs. On énonce par la suite deux conditions structurelles nécessaires et suffisantes pour l'existence du mode structurellement fixe, sous forme d'un théorème donné par SEZER & SILJAK (1981). La suite sera consacrée à la caractérisation par l'algèbre de boole [MOMEN & EVANS (1983a), (1983b)]. En dernier lieu, nous donnons des caractérisations à l'aide de la théorie des graphes par deux approches différentes celle de PICHAI & SEZER (1984) et celle de REINCHKE (1984).

1. CARACTERISATION DES MODES STRUCTURELLEMENT FIXES PAR L'ALGEBRE

LINEAIRE: [SEZER & SILJAK, (1981)].

Considérons le système décentralisé (1.CH.I) et désignons l'ensemble stations de commande par

$$\nu = \{1, 2, \dots, N\}$$

Pour clarifier le terme "mode structurellement fixe", considérons l'exemple suivant:

Exemple 1:

Soit un système à deux stations de commande ($N=2$) et

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B_1 = C_2^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; B_2 = C_1^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; F = \text{diag}(F_1, F_2)$$

Avec: $F_1 = f_1$ et $F_2 = f_2$

Les valeurs propres de la matrice A sont:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -(\sqrt{5} - 1)/2, \lambda_3 = (\sqrt{5} + 1)/2$$

Les valeurs propres de la matrice A_F sont:

$$\lambda_{1F} = 1, \lambda_{2F} = -(\sqrt{4f_1 f_2 + 5} - 1)/2, \lambda_{3F} = (\sqrt{4f_1 f_2 + 5} + 1)/2$$

La première valeur reste inchangée et indépendante de f_1 et f_2 c'est donc un mode fixe décentralisé.

Si on perturbe l'élément (3,3) de la matrice A en le remplaçant par $1+\epsilon$, on trouve que l'équation caractéristique en boucle fermée prend la forme:

$$(\lambda^2 - \lambda - 1)(\lambda - (1 + \epsilon)) - (\lambda - 1)f_1 f_2 = 0$$

Il est clair que le mode fixe a disparu, il n'est donc pas un mode structurellement fixe.

- Mode structurellement fixe:

Pour clarifier la notion de mode structurellement fixe, nous donnons l'exemple suivant:

Exemple 2:

Considérons le système décentralisé à deux stations de commande ($N=2$) donné par les matrices paramétrées (structurées) suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{23} \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{13} \end{bmatrix}; C_2 = \begin{bmatrix} c_{21} & 0 & 0 \end{bmatrix}; F = \text{diag}(F_1, F_2)$$

Avec $F_1 = f_1$, $F_2 = f_2$ et a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} sont des paramètres.

Les valeurs propres de la matrice A sont: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm \sqrt{a_{12} a_{21}}$

et celles de A_F sont: $\lambda_{1F} = 0$, $\lambda_{2F,3F} = \pm \sqrt{a_{12} a_{21} + b_{11} b_{23} C_{13} C_{21} f_1 f_2}$

La première valeur propre reste fixe indépendamment des valeurs des paramètres du système. Ce mode fixe est donc dû à la structure du système, d'où l'appellation *mode structurellement fixe*.

Définition 1: (SEZER & SILJAK, (1981)).

Le système S_ν possède un mode structurellement fixe si, il est aussi un mode fixe pour tous les systèmes décentralisés qui lui sont structurellement équivalents (§1.1 CH.I). Supposons que le système S_ν est commandable et observable lorsque une commande centralisée lui est appliquée.

Soit l'ensemble $\sigma = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \nu$ et $\ell = \nu - \sigma$

$$B^\sigma = \{B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_k}\}, C^\sigma = \{C_{i_1}^T, C_{i_2}^T, \dots, C_{i_k}^T\}$$

$$B^\ell = \{B_{i_{k+1}}, B_{i_{k+2}}, \dots, B_{i_N}\}, C^\ell = \{C_{i_{k+1}}^T, C_{i_{k+2}}^T, \dots, C_{i_N}^T\}$$

La caractérisation est donnée par le théorème suivant:

Théorème 1: [SEZER & SILJAK (1981)]

Le système S_ν possède des modes structurellement fixes en lui appliquant la commande décentralisée (2) si et seulement si, une des conditions suivantes est satisfaite:

i) Il existe une partition de ν en deux sous-ensembles \circ et l et une matrice de permutation P tel que:

$$P^T A P = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}; \quad P^T B^\circ = \begin{bmatrix} B_1^\circ \\ B_2^\circ \\ B_3^\circ \end{bmatrix}; \quad C^\circ P = \begin{bmatrix} C_1^\circ & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$P^T B^l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3^l \end{bmatrix}; \quad C^l P = \begin{bmatrix} C_1^l & C_2^l & C_3^l \end{bmatrix}$$

ii) Il existe une partition de ν en deux sous-ensembles \circ et l tel que :

$$r.g \begin{bmatrix} A & B^\circ \\ C^l & 0 \end{bmatrix} < n$$

2. CARACTERISATION DES MODES STRUCTURELLEMENT FIXES PAR

L'ALGEBRE BOOLEENNE : [MOMEN & EVANS (1983a), (1983b)]

Soit le système S_ν et supposons qu'il est structuré c'est à dire que les matrices A, B, C sont structurées (§.1 CH.I).

On désigne par AB_i, BB_i, CB_i , les matrices booléennes associées aux matrices précédentes en remplaçant chaque élément non nul par un "un" logique et l'élément nul par un "zéro" logique.

Avant de traiter les notions de commandabilité et d'observabilité structurelles en décentralisé, nous devons passer par la notion d'atteignabilité qui est indispensable pour l'analyse qui suit.

2.1 Matrice d'atteignabilité des états

La matrice d'atteignabilité associée à la matrice booléenne A_B du système est définie par la relation :

$$R = A_B^0 \vee A_B^1 \vee A_B^2 \vee A_B^3 \vee \dots \vee A_B^{n-1}$$

avec : $A_B^2 = A_B \vee \wedge A_B$, $A_B^3 = A_B^2 \vee \wedge A_B^1$, ..., $A_B^{n-1} = A_B^{n-2} \vee \wedge A_B^{n-3}$.

\vee, \wedge sont respectivement la somme et le produit booléen.

n est la dimension de l'espace d'état du système.

Afin d'éclaircir toutes les notions qui suivent, le même exemple sera repris durant toute l'étude.

Exemple 3:

Considérons le système décentralisé de l'exemple 2 les matrices booléennes associées aux matrices structurées sont:

$$A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{B_1} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$C_{B_2} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Le graphe associé à ce système est donnée par la figure 1

La matrice d'atteignabilité du système est

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La vérification de cette matrice le graphe de la figure 1 est évidente.

2.2 Sous-espaces atteignables:

A chaque station de commande sont associés deux sous-espaces d'état d'atteignabilité.

a) sous-espace d'atteignabilité des entrées de la station I

$$Ru_I = \underset{\text{lign}}{\vee} (Rv_i \wedge B B_I) \quad \dim Ru_I = (nx1).$$

b) sous-espace d'atteignabilité des sorties de la station I

$$Ry_I = \underset{\text{col}}{\vee} (C B_i \vee A R) \quad \dim Ry_I = (1xn).$$

Remarque: Le premier symbole \vee la somme des lignes (colonnes), élément par élément, du résultat de l'opération entre parenthèse.

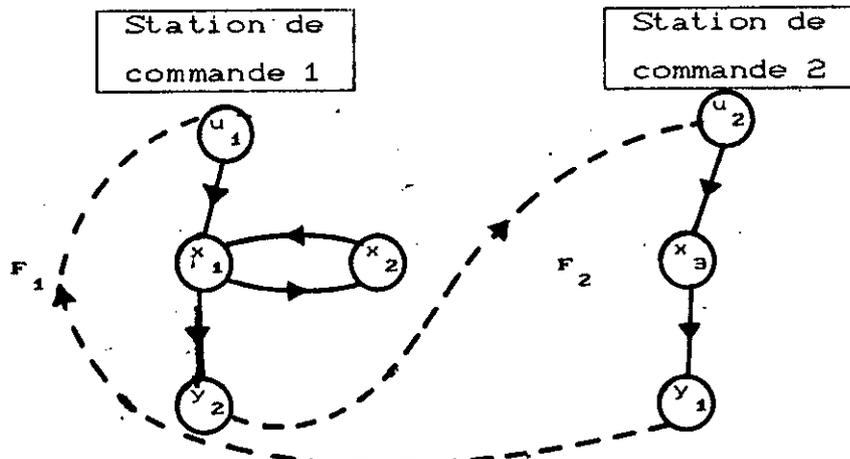


Figure 1: Graphe associé au système

Exemple 4:

Pur l'exemple donné nous trouvons:

$$u_1 = [1 \ 1 \ 0]^T, Ry_1 = [0 \ 0 \ 1] \quad , Ru_2 = [0 \ 0 \ 1]^T, Ry_2 = [1 \ 1 \ 0]$$

On voit clairement, d'après Ru_1 , que les variables d'état 1,2 sont atteignables par la station 1.

De même pour les autres vecteurs, on peut voir les états atteignables.

2.3 Sous-espaces commandables et observables:

Pour chaque station de commande, on examine si ses entrées peuvent commander le sous-espace Ru_I et si de ces sorties on peut observer le sous-espace Ry_I .

On introduit, tout d'abord, les matrices Au_I, Ay_I obtenues en mettant à zéro tous les éléments dans la j -ème ligne et la j -ème colonne de A_B correspondant au j -ème élément nul respectivement dans Ru_I et Ry_I .

Théorème 2: [MOMEN & EVANS (1981a)].

Le sous-espace Ru_I est commandable par la station I si et seulement si :

$$r.t [Au_I \quad B_{B_I}] = ru_I$$

et le sous-espace Ry_I est observable par la station I si et seulement si :

$$r.t \begin{bmatrix} Ay_I \\ C_{B_I} \end{bmatrix} = ry_I$$

où ru_I, ry_I sont le nombre d'éléments égaux à "un" respectivement dans Ru_I, Ry_I et $r.t [.]$ est le rang terme (§1.3 CH1) de la matrice $[.]$.

Si $r.t [Au_I \quad B_{B_I}] < ru_I$, le sous-espace commandable n'est pas unique et il pourra être représenté par l'ensemble des vecteurs ${}^i K_I$.

De même si la condition d'observabilité n'est pas vérifiée, le sous-espace observable n'est pas unique et il sera donné par ${}^i M_I \quad i=1, 2, \dots$

Remarque: Le rang terme d'une matrice booléenne M_B est le nombre de "un" contenu dans sa matrice de permutation. cette dernière s'obtient à partir de M_B en ne prenant qu'un et un seul "un" par ligne et par colonne.

Exemple 5:

Pour l'exemple nous avons:

$$r.t [Au_1 \quad Bb_1] = r.t \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = 2 = ru_1$$

De la même manière on trouve:

$$r.t [Au_2 \quad Bb_2] = 1 = ru_2, \quad r.t \begin{bmatrix} Ay_1 \\ Cb_1 \end{bmatrix} = 1 = ry_1, \quad r.t \begin{bmatrix} Ay_2 \\ Cb_2 \end{bmatrix} = 2 = ry_2$$

On peut donc dire que, pour chaque station, les sous-espaces atteignables en entrée sont commandables et ceux atteignables en sorties sont observables. Les sous-espacs de commandabilité et et d'observabilité seront donc:

$$K_I = Ru_I \quad \text{et} \quad M_I = Ry_I \quad I=1,2$$

2.4 Commandabilité et observabilité décentralisée

2.4.a Caractérisation des modes fixes décentralisés pour N=2:

Pour permettre au lecteur une compréhension rapide des notions, limitons nous pour le moment à un système ayant deux stations de commande.

Définition 2:

On dit que le système est complètement structurellement commandable (observable) par les deux stations en combinaison si,

les sous-espaces commandables (observables) sont telles que

$${}^i K_1 \vee {}^j K_2 = \text{vecteur unité} \quad {}^i M_1 \vee {}^j M_2 = \text{vecteur unité.}$$

et les sous-espaces choisis sont dits compatibles.

Théorème 3 : (MOMEN & EVANS (1983a))

Le système décentralisé ayant deux stations de commande est complètement structurellement commandable par la station de commande I, si et seulement si

$$Ru_I \wedge Ry_J^T \neq 0 \quad \text{et} \quad r.t = \begin{bmatrix} Ab & Bb_I \\ Cb_J & 0 \end{bmatrix} \geq n$$

$$I=1,2 \quad J=1,2 \quad I \neq J$$

D'une manière duale, on peut montrer que si le système est complètement structurellement commandable par la station I, il est complètement structurellement observable par la station J.

Exemple 6:

Pour l'exemple traité, nous avons:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{et} \quad r.t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 < n$$

Le système n'est donc pas complètement structurellement commandable par la station de commande 1 et n'est pas complètement structurellement observable par la station 2. Les sous-espaces ne seront pas élargis et nous aurons :

$$K_1^* = K_1 \quad , \quad M_2^* = M_2$$

Pour I=2 et J=1, on trouve que les deux conditions du théorème sont vérifiées, le système est donc complètement structurellement commandable par la station 2 et complètement structurellement observable par la station de commande 1. Les sous-espaces seront donc élargis et donnés par:

$$K_2^* = K_1 \vee K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M_1^{*T} = M_1^T \vee M_2^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soit L_I le sous-espace structurellement commandable et en même temps observable par la station I et L_I^* est le sous-espace élargi par l'effet des retours de sorties.

$$L_I = K_I \wedge M_I^T, \quad L_I^* = K_I^* \wedge M_I^{*T}$$

K_I^* et M_I^* sont respectivement le sous-espace commandable et observable élargis relatifs à la station I.

Théorème 4: (MOMEN & EVANS (1983 a))

Un système décentralisé ayant 2 stations de commande n'a pas de modes structurellement fixes si et seulement si; il est complètement structurellement commandable et observable sous la structure de décentralisée c'est à dire que:

$$L_1^* \vee L_2^* = \text{vecteur unité}$$

Où le vecteur unité est un vecteur dont tous les éléments sont égaux à "un".

Exemple 7:

Pour le même exemple , nous avons :

$$L_1^* = K_1^* \wedge M_1^{*T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L_2^* = K_2^* \wedge M_2^{*T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_1^* \vee L_2^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dans ce vecteur le dernier élément est égal à zéro logique. Le système possède donc un mode fixe.

2.4.b Caractérisation des modes fixes décentralisés pour $N \geq 2$:

Pour généraliser le concept de la commandabilité et de l'observabilité structurelle dans les systèmes décentralisés, on considère le système suivant ayant 3 stations de commande:

$$\dot{x} = A x + B_I u_I + B_J u_J + B_K u_K$$

$$\begin{bmatrix} y_I \\ y_J \\ y_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_I \\ C_J \\ C_K \end{bmatrix} x$$

Avec la commande décentralisée de la forme:

$$\begin{bmatrix} u_I \\ u_J \\ u_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_I & 0 & 0 \\ 0 & F_J & 0 \\ 0 & 0 & F_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_I \\ y_J \\ y_K \end{bmatrix}$$

On suppose toujours que le système est commandable et observable en centralisée c'est à dire lorsqu'il n'y a pas des contraintes sur la structure de la matrice de retour F.

-Sous-espaces atteignables élargies:

Nous avons vu pour le cas où $N=2$ que si $Ru_1 \wedge Ry_2^T \neq 0$ la station de commande 1 peut élargir son sous-espace d'atteignabilité. Dans le cas où le système possède plus de deux stations de commande ($N \geq 2$), la station I peut élargir son sous-espace d'atteignabilité à l'aide de celui de Ru_K malgré que $Ru_I \wedge Ry_K^T = 0$. Ainsi si nous avons:

$$Ru_I \wedge Ry_J^T \neq 0 \quad \text{et} \quad Ru_J \wedge Ry_K^T \neq 0 \quad \text{nous aurons} \quad Ru_I^* = Ru_I \vee Ru_J \vee Ru_K$$

De même pour l'atteignabilité des sorties si

$$Ry_I^T \wedge Ru_K = 0 \text{ mais } Ry_I^T \wedge Ru_J \neq 0 \text{ et } Ry_J^T \wedge Ru_K^T \text{ alors } Ry_I^{*T} = Ry_I^T \vee Ry_J^T \vee Ry_K^T$$

Le sous-espace élargi commun entre l'atteignabilité des entrées et des sorties relativement à chaque station de commande I, I=1,...,N et défini par:

$$R_I^* = Ru_I^* \wedge Ry_I^{*T}$$

et le nombre d'unités dans R_I^* est égal à r_I^* .

A partir de ce vecteur, on peut obtenir la matrice booléenne AB_I^* qui représente le sous-système I en mettant à zéro les lignes et les colonnes de AB correspondantes aux éléments nuls de R_I^* .

Théorème 5: (MOMEN & EVANS (1983.b))

Si dans un système décentralisé avec $N \geq 2$ $R_I^* \wedge R_J^* \neq 0$, la station de commande I peut élargir son sous-espace structurellement commandable K_I à l'aide de la station de commande J pour qu'il devient

$$K_{IJ}^* = K_I \vee K_J = R_J^* \text{ si et seulement si r.t. } \begin{bmatrix} AB_I^* & BB_I \\ CB_J & 0 \end{bmatrix} \geq r_I^*.$$

Théorème 6: (MOMEN & EVANS (1983.b))

Si dans un système décentralisé avec $N \geq 2$ $R_I^* \wedge R_J^* \neq 0$, la station de commande J peut élargir son sous-espace structurellement observable M_J à l'aide de la station de commande I pour qu'il devient

$$M_{JI}^* = M_J^* \vee M_I^* = R_I^* \text{ si et seulement si r.t. } \begin{bmatrix} AB_I^* & BB_I \\ CB_J & 0 \end{bmatrix} \geq r_I^*.$$

Le sous-espace structurellement commandable élargi de la station I en coopération avec toutes les autres stations est défini par:

$$K_I^* = K_{IJ}^* \vee K_{IK}^* \vee \dots$$

et celui structurellement observable est défini par:

$$M_I^{*T} = M_{IJ}^{*T} \vee M_{IK}^{*T} \vee \dots$$

Dans le cas où la condition du rang terme n'est pas vérifiée, c'est à dire si:

$$\text{r.t} \begin{bmatrix} AB_I^* & BB_I \\ CB_J & 0 \end{bmatrix} = \bar{r}_I^* < r_I^*$$

la station I ne peut pas commander tout le sous-système AB_I^* et la station J ne peut pas l'observer, mais il existe au moins un sous-système de AB_I^* de dimension \bar{r}_I^* qui est structurellement commandable par la station I et structurellement observable par la station J. Dans ce cas, K_{IJ}^* et M_{IJ}^{*T} ne sont pas uniques et on doit déterminer toutes les paires compatibles ${}^i K_{IJ}^*$ et ${}^i M_{IJ}^{*T}$ $i=1,2,\dots$ comme suit:

Puisque la condition du rang terme n'est pas vérifiée, alors le sous-espace commandable de la station I ne peut pas être élargi par celui de la station J.

$$\text{Puisque } \text{r.t} \begin{bmatrix} AB_I^* & BB_I & BB_J \end{bmatrix} \geq \bar{r}_I^* \quad \text{et } \text{r.t} \begin{bmatrix} AB_I^* & BB_I \end{bmatrix} \leq \bar{r}_I^*, \text{ on peut}$$

déduire qu'il y a des colonnes de B_J qui doivent augmenter le rang

$$\text{terme de la matrice } \begin{bmatrix} AB_I^* & BB_I \end{bmatrix}.$$

Les sous-espaces commandables élargies possibles ${}^i K_{IJ}^*$ peuvent être extraits des matrices suivantes:

$$\left[\begin{array}{cc} AB_I^* & B_I \end{array} \begin{array}{c} \\ b_j \end{array} \right] \text{ où } b_j, j=1,2,\dots \text{ sont les colonnes}$$

de B_j permettant de rendre le rang terme de la matrice $\left[\begin{array}{cc} AB_I^* & BB_I \end{array} \right]$ égal à r_I^* .

Les sous-espaces d'observabilité seront obtenus directement par la formule :

$$M_{IJ}^{*T} = K_{JI}^*$$

Soit le vecteur L_I^* commun entre la commandabilité et l'observabilité structurelles associé à chaque station de commande $I, I=1,2,\dots,N$.

$$L_I^* = K_I^* \wedge M_I^*$$

A la base de tout ce qui précède, on donne le théorème suivant:

Théorème 7: [MOMEN & EVANS(1983a)]

Un système décentralisé est structurellement commandable et observable sous la structure de commande décentralisée si et seulement si $\forall L_I^* = \text{vecteur unité } I=1,2,\dots,N$ et le système ne possède pas de modes structurellement fixes décentralisés.

Remarque: a) Un exemple illustratif sera donné au chapitre IV.
 b) Dans un certain nombre d'articles on parle de la commandabilité et de l'observabilité potentielles [FRANKSEN & al.(1976), MOMEN & EVANS (1983a), (1983b)] au lieu de la commandabilité et l'observabilité structurelles. Notons que les deux notions sont équivalentes.

3. CARACTERISATION PAR LA THEORIE DES GRAPHES DES MODES STRUCTURELLEMENT FIXES DECENTRALISES:

3.1 caractérisation basée sur les conditions structurelles algébriques

Comme nous l'avons déjà mentionné lors de la caractérisation donnée par SEZER ET SILJAK (1981), les conditions d'existence des modes fixes sont purement structurelles. Par conséquent, des conditions graphiques équivalentes peuvent être déduites. Dans ce qui suit, nous allons les exposer telles qu'elles ont été introduites par PICHAÏ ET SEZER (1984).

Définition 3:

Soit le système (1.CH.II).

On définit le graphe associé à ce système par $G(V,E)$

où V : L'ensemble des noeuds tel que $V=X \cup U \cup Y$ et

$$U=\{u_1, u_2, \dots, u_m\}, X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, Y=\{y_1, y_2, \dots, y_p\}.$$

E : L'ensemble d'arcs tel que $(u_i, x_j) \in E, (x_j, x_i) \in E$ et $(x_j, y_i) \in E$.

En ajoutant le retour de sorties $u=F.y$, on obtient le graphe associé au système global (en boucle fermée) $G(V, E \cup E_F)$ où E_F est l'ensemble des arcs de retour de sorties en admettant qu'il existe des contraintes sur la matrice F . $E_F = \{(y_j, u_i) \mid \begin{matrix} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,p \end{matrix}\}$

Théorème 8: [PICHAÏ & SEZER (1984)]

On dit que le système décentralisé donné par (1.CH.2) et la commande $u=F.y$ ne possède pas de modes structurellement fixes, si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

i) Chaque noeud d'état $x_k \in X$ appartient à une composante fortement connexe de G_F qui contient un arc de E_F .

ii) Il existe des cycles disjoints $\mathcal{C}_k = \langle V_k, E_k \rangle$ dans G_F tels que

$$X \subset \bigcup_{k=1}^s V_k$$

avec s le nombre de composantes fortement connexes.

Remarque et commentaires:

A première vue, on remarque que ces deux conditions sont respectivement les négations des conditions algébriques (i),(ii) données par le théorème 1 (§1 CH III).

Si la condition (i) du théorème est vérifiée, alors G_F possède la structure suivante:

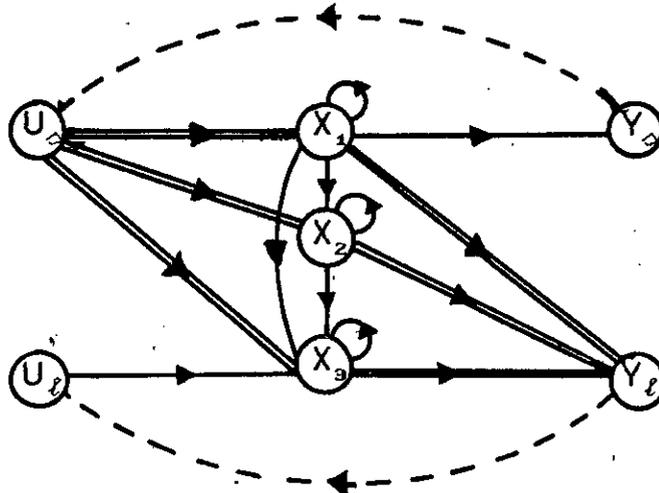


Figure 2: Graphe orienté G_F

$X_i, i = 1, 2, 3$ sont identifiés par les blocs diagonaux A_{ii} de la matrice $P^T A P$. (§1 CH III).

D'après la figure, on constate que G_F contient au moins une composante fortement connexe dont tous les noeuds sont dans X_2 et dans cette composante il n'ya pas d'arcs de retour.

Pour montrer l'inverse, soit $G_F^i = \{V^i, E^i U E_F^i\}$ où $V^i = X^i U U^i U Y^i$ $i=1, 2, \dots, s$ désignent les composantes fortement connexes du graphe telles que aucun noeud de V^i n'atteigne un noeud de V^j si $i < j$ et soit G_F^k la composante fortement connexe ne contenant aucun arc de retour c'est à dire $E_F = \emptyset$, alors $U = \emptyset$ et $Y = \emptyset$.

Définissant $X_1 = X^1 U X^2 U \dots U X^{k-1}$; $X_2 = X^k$; $X_3 = X^{k+1} U \dots U X^s$ et $U = U^{k+1} U U^{k+2} U \dots U U^s$; on peut voir que G_F possède la structure de la figure précédente.

La condition (ii) du théorème 8 est une négation de celle du

théorème 1. Ceci se justifi par le lemme suivant:

Lemme 1: [PICHAI & SEZER (1984)]

Soit le graphe G ayant n noeuds, et M sa matrice d'incidence. Alors G est parcouru par l'union des cycles disjoints si et seulement si $r.g(MD)=n$.

En appliquant ce lemme à la condition (ii) du théorème 1, on trouve que si cette dernière est vérifiée, le graphe associé ne contient pas de cycles di joints dont l'union englobe n noeuds d'état.

3.2 Caractérisation basé sur l'interprétation par graphe des coefficients du polynôme caractéristique en boucle fermée:

Une méthode de caractérisation, par les graphes pondérés des modes fixes sera exposée. Le résultat est obtenu à partir de l'interprétation des coefficients du polynôme caractéristique du système en boucle fermée par les graphes. Les conséquences des contraintes structurelles sur la matrice de retour F deviennent évidentes et la commande décentralisée sera donc considérée comme un cas particulier.

Notons que ce résultat est due à REINCHKE (1984).

3.2.a Interprétation par les graphes des coefficients du polynôme caractéristique du système en boucle fermée:

Considérons le système (1.CH:II) et prenons la matrice F quelconque.

Le polynôme caractéristique en boucle fermée est donné par :

$$\det[sI-A-BFC] = s^n + P_1 s^{n-1} + \dots + P_{n-2} s^2 + P_{n-1} s + P_n$$

Dans le but de caractériser graphiquement les coefficients $P_i, i=1, \dots, n$ on considère la matrice Q_4 $\dim(Q_4) = n+m+pxn+m+p$.

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & C & 0 \\ 0 & A & B \\ F & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et son graphe } \mathcal{G}(Q_4).$$

Définition 3:

La largeur w d'une famille de cycles est égale au nombre de neuds d'état touchés par cette famille.

Le théorème suivant donne une interprétation par le théorie des graphes des coefficients P_i $i=1, \dots, n$

Théorème 9 : (REINCHKE (1984))

Les coefficients, P_i $i=1, 2, \dots, n$ du polynôme caractéristique en boucle fermée sont déterminés par les familles de cycles de largeur i dans le graphe $\mathcal{G}(Q_4)$. A chaque famille de cycles correspond une somme relative au coefficient P_i dont la valeur numérique résulte de la largeur de la famille de cycles correspondante. Cette valeur doit être multipliée par le facteur de signe $(-1)^d$ lorsque la famille de cycles est constituée de d cycles disjoints. En particulier on a:

P_1 : résulte de tous les cycles de largeur 1 et le facteur de signe est -1.

P_2 : résulte de tous les cycles de largeur 2, chacun avec un facteur de signe -1, et toutes les paires de cycles disjoints de largeur 1, chacun avec un facteur de signe +1.

P_3 : résulte de tous les cycles de largeur 3, chacun avec un facteur de signe -1, toutes les paires de cycles disjoints constituées d'un cycle de largeur 2 et d'un cycle de largeur 1, chaque paire avec un facteur de signe +1, et tous les triplets de cycles disjoints de, chacun avec un facteur de signe -1.

Et ainsi de suite...

Illustrons ce théorème à l'aide de l'exemple suivant:

Exemple 8:

Soit un système donné par la matrice Q_4

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline f_{11} & f_{12} & & & \\ f_{21} & f_{22} & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

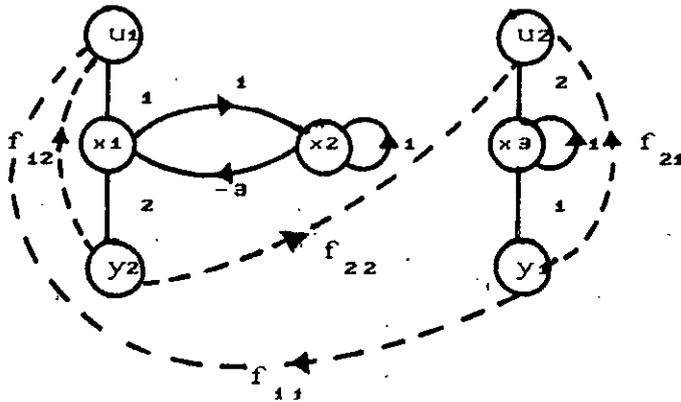
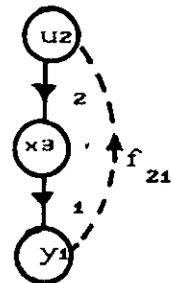
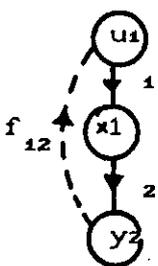


Figure 3: graphe $G(Q_4)$

Désignons le facteur de signe par F_s .

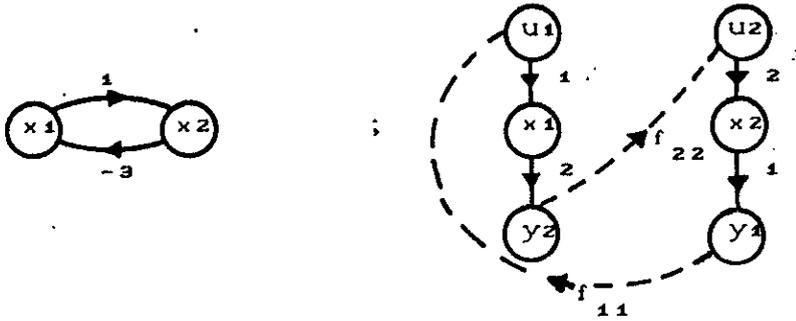
Familles de cycles avec $w=1$:



F_s : -1 ; -1 ; -1 ; -1

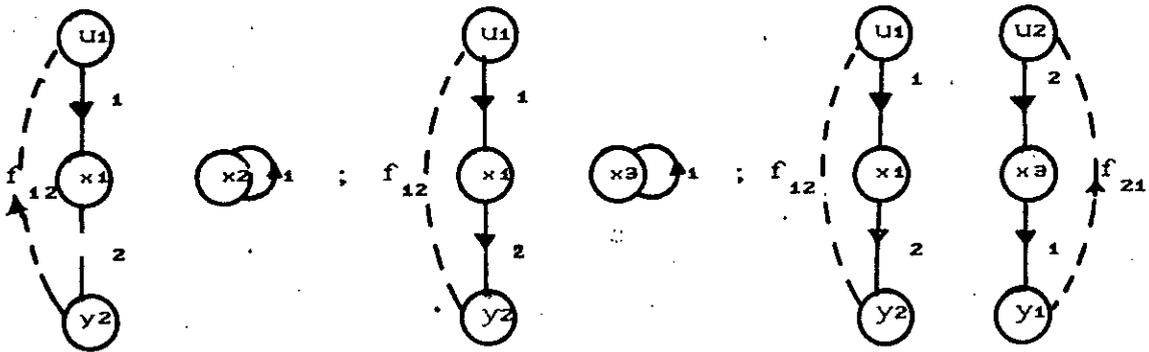
familles de cycles avec $w=2$:

a) constituée par des cycles disjoints de largeur 2

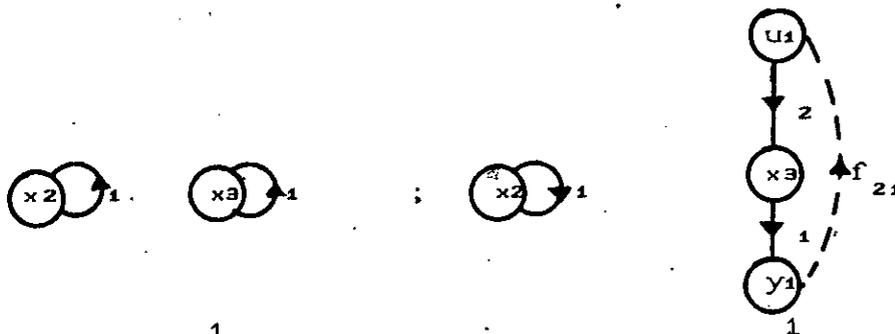


Fs: -1 ; -1

b) constituée par des paires de cycles, chaque cycle de largeur 1:



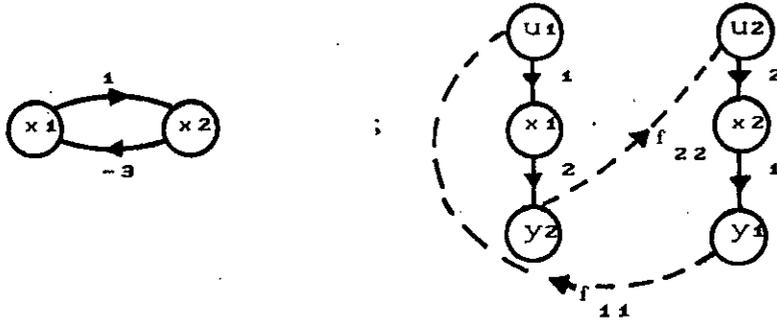
Fs: +1 ; +1 ; +1



Fs: 1 ; 1

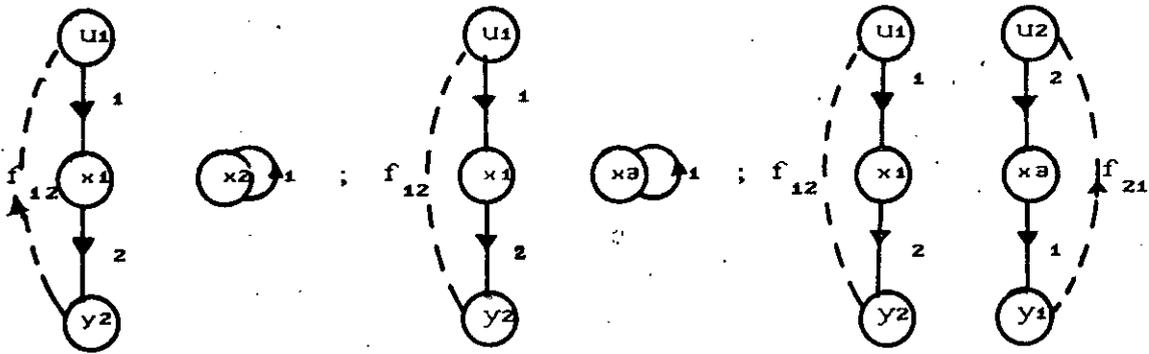
familles de cycles avec $w=2$:

a) constituée par des cycles disjoints de largeur 2

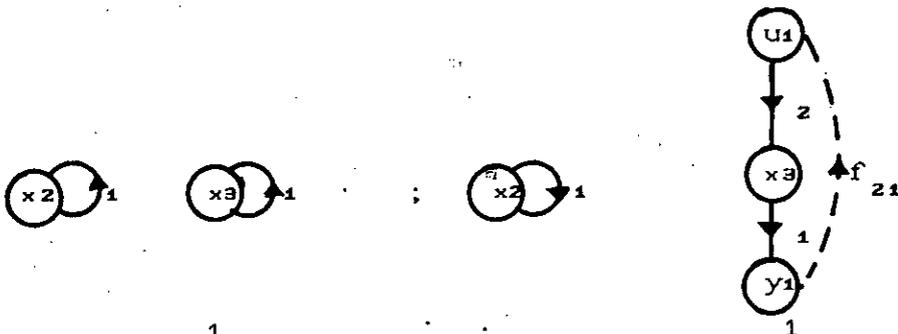


Fs: -1 ; -1

b) constituée par des paires de cycles, chaque cycle de largeur 1:



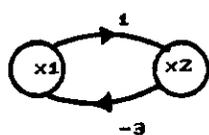
Fs: +1 ; +1 ; +1



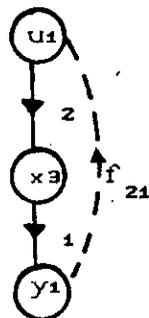
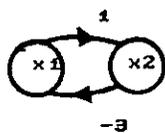
Fs: 1 ; 1

famille de cycles de largeur 3:

a) constituée par 2 cycles disjoints

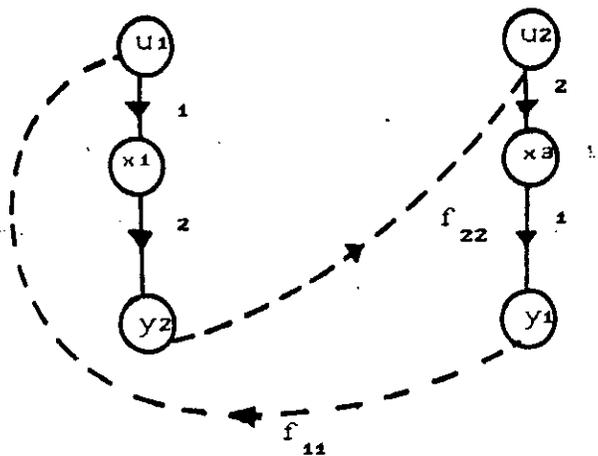


;



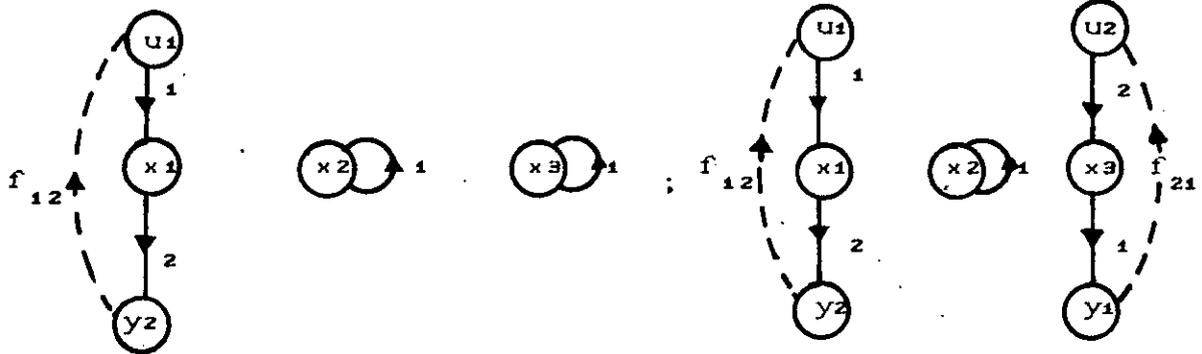
+1

+1



+1

b) constituée de 3 cycles disjoints



Fs: -1 ; -1

D'après le théorème on aura:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (-1)(2f_{12} + 1 + 1 + 2f_{21}) = -2 - 2f_{21} - 2f_{12} \\
 P_2 &= (-1)(-3 + 4f_{11}f_{12}) + 2f_{12} + 2f_{12} + 4f_{12}f_{21} + 1 + 2f_{21} \\
 &= 4 + 4f_{12} + 4f_{12}f_{21} - 4f_{11}f_{22} + 2f_{21} \\
 P_3 &= -3 - 6f_{21} + 4f_{11}f_{22} - 4f_{12}f_{21} - 2f_{12}
 \end{aligned}$$

La représentation matricielle donne:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} f_{12} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} f_{21} + \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} f_{11}f_{22} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} f_{12}f_{21}$$

On constate que P_i $i=1,2,3$ et de la forme:

$$P_i = P_i^0 + g_i(F) \quad i=1,2,3$$

où P_i^0 sont les coefficients de l'équation caractéristique en boucle ouverte et $g_i(F)$ est une fonction non linéaire des éléments de la matrice de retour F.

3.2.b Caractérisation des modes fixes en $s=0$:

Lemme 1: [REINCHKE (1984)]

Si du graphe $G(Q)$ on ne peut extraire aucune famille de cycle de largeur n , alors le coefficient P_n du polynôme caractéristique du système en boucle fermée est nul indépendamment des valeurs non nulles de F et le mode $s=0$ est fixe.

Remarque: Cette condition est une conséquence du théorème précédent. Elle n'est nécessaire et suffisante que pour les systèmes structurés car la nullité de P_n peut être due à des éliminations numériques à cause de la présence de plus d'une famille de cycles de largeur n . Cette question est illustrée à travers l'exemple suivant:

Exemple 9:

Soit un système possédant un mode fixe à l'origine et caractérisé par la matrice Q_* suivante:

$$Q_* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_{11} & f_{12} & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & f_{21} & 0 & & & & \\ 0 & 0 & f_{22} & & & & & \end{bmatrix}$$

Le graphe associé à ce système est le suivant:

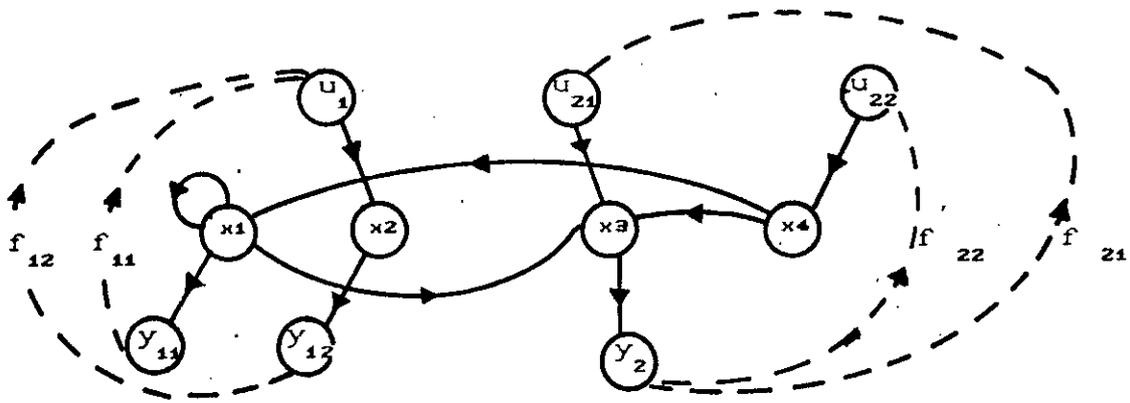
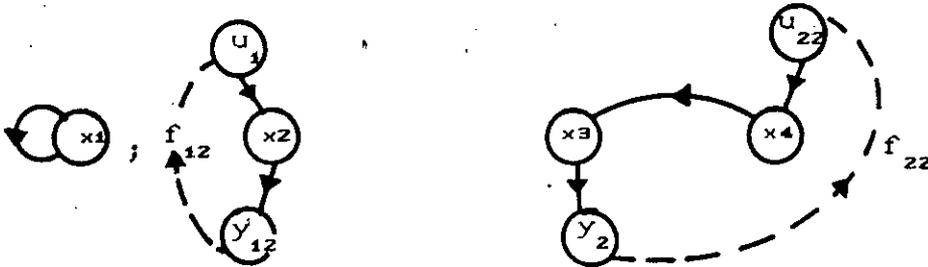


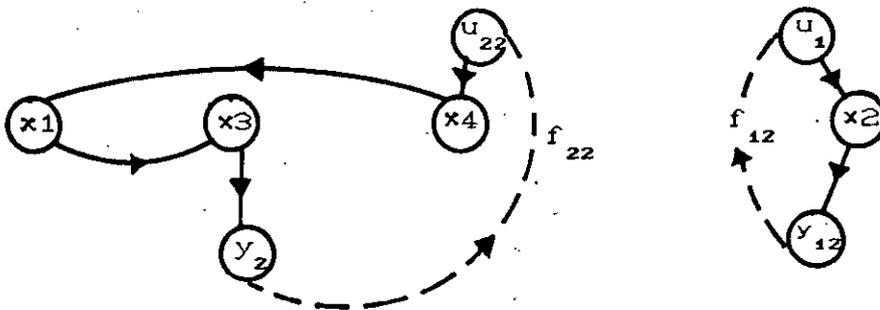
Figure 4: graphe GCQ)

Dans ce graphe, on trouve deux familles de cycles de largeur 4 et de facteur de signe différents

a) Famille de cycles de largeur 4 et de facteur de signe -1



b) Famille de cycles de largeur 4 et de facteur de signe +1



Si on remplace, dans Q_4 , les valeurs numériques par des paramètres variables on trouve :

$$P_n = b_{21} b_{43} f_{12} f_{22} c_{33} (a_{31} a_{14} - a_{11} a_{34})$$

Ce coefficient n'est nul que si :

$$(a_{31} a_{14} - a_{11} a_{34}) = 0$$

Cette condition est vérifiée pour les valeurs données des variables. Le mode est donc fixe, mais non structurellement fixe.

Si le système n'est pas structuré, la condition suivante doit être ajoutée au lemme précédent :

ii) Il existe deux ou plus de deux familles de cycles de largeur n dans $G(Q_4)$ et qui s'éliminent mutuellement pour toutes les valeurs admissibles des éléments non nuls de F .

3.1.0 Caractérisation des modes fixes en $s=s_0$:

Soit $s_0 \in \mathbb{C}$ et la matrice

$$Q_4(s_0) = \begin{bmatrix} 0 & C & 0 \\ 0 & A - s_0 I_n & B \\ F & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lemme 3: (REINCHKE (1984))

Le système décrit par les matrices A, B, C, F possède un mode fixe en $s=s_0$ si et seulement si une des conditions suivantes est satisfaite :

i) Il n'existe pas de familles de cycles de largeur n dans $G(Q_4(s_0))$

- ii) il existe deux ou plus de deux familles de cycles de largeur n dans $\mathcal{G}Q_4(s_0)$ et qui s'éliminent mutuellement pour toutes les valeurs admissibles des éléments non nuls de F .

Remarque: Si s_0 est un mode structurellement fixe, on ne retient que la condition (i) du lemme 3.

4. CONCLUSION:

Les caractérisations des modes structurellement fixes ont été données par différentes approches algébriques et graphiques. Toutes les conditions données ne dépendent pas des valeurs numériques des paramètres sauf celles de REINCHKE. Dans le cas où le mode fixe n'est pas nul, un calcul numérique des valeurs propres de la matrice A est nécessaire. Cela implique la nécessité de travailler avec des réalisations admissibles des matrices représentatives du système.

Lors de l'étude de la commandabilité et de l'observabilité pour une commande centralisée (CH.I), nous avons constaté que le critère basé sur les matrices modales $[\lambda I - A \quad B]$ et $[(\lambda I - A)^T \quad C^T]^T$ possède un équivalent en structuré, constitué par deux conditions :

La condition d'atteignabilité et celle du rang terme pour $\lambda=0$. Par analogie, la caractérisation algébrique du mode fixe donnée par ANDERSON (1981) se décompose en deux conditions données par SEZER & SILJAK (1981): la condition d'atteignabilité et celle du rang générique. Cette dernière caractérise le mode structurellement fixe à l'origine.

Les méthodes basées sur l'algèbre de Boole permettent de connaître l'état correspondant au mode fixe. Vu la nature binaire de ces conditions, cette méthode présente un grand intérêt pratique lors de son implémentation sur calculateur numérique qui se justifie par l'absence d'erreurs numériques de calcul.

CHAPITRE IV

ELIMINATION DES MODES FIXES (PROPOSITION D'UNE METHODE POUR L'ELIMINATION DES MODES STRUCTURELLEMENT FIXES)

0. INTRODUCTION:

Dans les chapitres précédents, nous avons introduit la notion de mode fixe. Les conséquences de l'apparition de ce dernier constituent un problème principal lors du placement des pôles et de la stabilisation du système. Ainsi, WANG & DAVISON (1973), les premiers qui ont introduit cette notion ont également donné la condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation décentralisée.

Cette condition indique qu'un système décentralisé ne peut être stabilisé que si l'ensemble des modes fixes est situé dans le demi plan complexe gauche. En effet, la présence des modes fixes instables rend le système non stabilisable sous une commande décentralisée.

Durant la dernière décennie, plusieurs chercheurs se sont intéressés aux moyens d'élimination de ces modes fixes et par conséquent, de stabiliser le système.

Parmi les résultats obtenus, citons celui d'ANDERSON & MOORE (1981) qui est fondé sur les lois de commande par retour de sortie variant dans le temps. Cette idée a été développée par WILLEMS (1985), (1989) qui a donné des conditions de stabilisation en utilisant les retours de sortie décentralisés variants périodiquement dans le temps pour les systèmes échantillonnés. Dans WILLEMS (1988), on trouve également une méthode pour l'élimination des modes fixes décentralisés par échantillonnage.

ARMENTANO & SINGH (1982) ont donné une approche basée sur l'échange d'information réduit entre les stations de commande dans les systèmes multivariables interconnectés décentralisés.

Notons que, dans tous ces résultats, l'aspect structurel ne figure pas. Les études sont donc faites dans un contexte classique (non structurel).

Dans le présent chapitre, nous allons proposer une méthode pour l'élimination des modes structurellement fixes dans la commande décentralisée, en utilisant un échange minimum d'information entre

les stations de commande. Cette approche structurelle repose sur les caractérisations par l'algèbre de boole [MOMEN & EVANS, (1983)] exposées dans le chapitre III. A la base de notre résultat, nous développons un algorithme qui sera illustré par un exemple.

Avant de donner le résultat, nous trouvons nécessaire d'exposer la méthode d'ARMENTANO & SINGH (1982) puisque la nôtre est issue de la même idée que celle-ci qui peut donc servir comme un élément de comparaison malgré qu'elle est introduite pour les systèmes interconnectés et par une approche non structurelle.

1. Elimination des modes fixes décentralisés à l'aide de l'échange d'information entre les stations de commande:

1.1 Généralités:

On considère l'ensemble des sous-systèmes interconnectés suivants:

$$\dot{x}_i = A_{ii} x_i + B_{ii} u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij} x_j \quad (1.a)$$

$$i=1,2,\dots,N$$

$$y_i = C_i x_i \quad (1.b)$$

où $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $y_i \in \mathbb{R}^{p_i}$

D'une autre manière, les équations précédentes peuvent s'écrire:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2)$$

Avec :

$$A = \left\{ A_{ij}, i=1, 2, \dots, N, j=1, 2, \dots, N \right\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$B = \text{Bloc diag} (B_1, B_2, \dots, B_N) \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$C = \text{Bloc diag} (C_1, C_2, \dots, C_N) \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

$$n = \sum_{i=1}^N n_i \quad ; \quad m = \sum_{i=1}^N m_i \quad ; \quad p = \sum_{i=1}^N p_i$$

Le triplet (A,B,C) est supposé commandable et observable.

On considère aussi l'ensemble:

$$\mathcal{F} = \left\{ F / F = \text{bloc diag} (F_{11}, F_{22}, \dots, F_{NN}), F_{ii} \in \mathbb{R}^{m_i \times p_i} \quad i=1, 2, \dots, N \right\} \quad (3)$$

Par application de la commande décentralisée

$$u_i = F_{ii} y_i \quad (4)$$

on obtient un système en boucle fermée donné par:

$$\dot{x} = (A + BFC)x \quad (5)$$

$$y = Cx$$

Les modes fixes décentralisés sont donnés par l'ensemble

$$\lambda(C, A, B, \mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \sigma [A + BFC] \quad (6)$$

où $\sigma[\cdot]$ désigne les valeurs propre de la matrice $[\cdot]$.

Soit $\hat{A}_{ii} = A_{ii} + B_i F_i C_i$ $i=1, 2, \dots, N$ les sous-matrices situées sur la diagonale de la matrice $A+BFC$.

D'où cette dernière aura la forme suivante:

$$A+BFC = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & \hat{A}_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & \hat{A}_{NN} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Si les sous-matrices \hat{A}_{ii} sont non-singulières et si

$$\| \hat{A}_{ii}^{-1} \|^{-1} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \| A_{ij} \| \quad \forall i=1, 2, \dots, N \quad (8)$$

alors $A+BFC$ est dite à bloc strictement diagonalement dominant.

Où la norme de la matrice A est définie par :

$$\| A \|_1 = \max_i \sum_j |a_{ij}| \quad (9)$$

Le théorème suivant sert pour la caractérisation du mode fixe décentralisé.

Théorème 1: [ARMENTANO & SINGH (1982)]

Si la matrice $A+BFC$ est à bloc strictement diagonalement dominant, alors elle est non-singulière.

A la base de ce théorème on donne le corollaire suivant:

Corollaire 1: [ARMENTANO & SINGH (1982)]

Soit $s_0 \in \mathbb{C}$ est mode fixe décentralisé, alors

$$\|(\hat{A}_{ii} - s_0 I_i)^{-1}\|^{-1} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \|A_{ij}\| \quad \forall F_{ii} \in \mathbb{R}^{m_i \times p_i} \quad (10)$$

pour au moins un $i, i=1,2,\dots,N$.

I_i est une matrice identité de dimension n_i

1.2 Détermination de la nouvelle structure de la matrice de retour F:

On sait que dans la commande décentralisée, est associée à chaque sous-système une matrice de retour F_{ii} qui appartient aux blocs situés sur la diagonale de F . Dans le but d'éliminer les modes fixes qui apparaissent comme une conséquence de la structure de F , on propose de modifier cette dernière en ajoutant des liaisons d'échange réduit d'information entre les sous-systèmes à travers les retours de sorties.

Pour le moment, on suppose que $\bar{\mathcal{F}}$ est l'ensemble des matrices qui inclut la structure de \mathcal{F} . Par exemple, pour $N=3$, $\bar{\mathcal{F}}$ peut être l'ensemble des matrices F tel les que:

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Si on désigne l'ensemble des modes fixes, en respectant \mathcal{F} , par:

$$\Lambda(C, A, B, \bar{\mathcal{F}}) = \bigcap_{F \in \bar{\mathcal{F}}} \sigma \left[A + BFC \right] \quad (12)$$

on peut vérifier que:

$$\Lambda(C, A, B, \bar{\mathcal{F}}) \subset \Lambda(C, A, B, \mathcal{F}) \quad (13)$$

Soit S_0 un mode fixe pour les deux structures \mathcal{F} et $\bar{\mathcal{F}}$. Alors le corollaire précédent, appliqué à $\bar{\mathcal{F}}$ donne, pour au moins un i :

$$\|(\hat{A}_{ii} - S_0 I)^{-1}\|^{-1} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \|A_{ij} + B_i F_{ij} C_j\| \quad \forall F_{ii} \in \mathbb{R}^{m_i \times p_i}, F_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times p_j}, i \neq j \quad (14)$$

Ici, quelques éléments F_{ij} doivent être nuls.

Puisque l'équation (14) est vérifiée pour toutes F_{ii}, F_{ij} , elle l'est en particulier pour F_{ii}, F_{ij} nulles.

On considère S et \bar{S} les ensembles des indices pour lesquels (10) et (14) sont respectivement vérifiées. A partir de cela, on peut dire que:

$$\bar{S} \subset S \quad (15)$$

c'est à dire que si S_0 est un mode fixe pour les structures \mathcal{F} et $\bar{\mathcal{F}}$ alors S_0 satisfait (14) pour les indices $i \in \bar{S}$ tel que (15) soit vérifiée.

D'après cette analyse, S_0 reste fixe pour la structure $\bar{\mathcal{F}}$ et les F_{ij} peuvent donc être prises égales à zéro pour $i \in \bar{S}$ sachant qu'elles ne contribuent pas à l'élimination de ce mode fixe. La structure de la nouvelle matrice de retour sera donnée par le critère suivant:

Critère: [ARMENTANO & SINGH (1982)]

La structure de la nouvelle matrice permettant d'éliminer le mode fixe par échange d'information entre les stations de commande est obtenue en ajoutant les blocs matriciels F_{ij} à condition que $i \notin \bar{S}$.

Exemple 1:

Soit le système interconnecté suivant pour lequel les paires (A, B) (A_i, B_i) $i=1,2,3$ sont toutes commandables et possède un mode fixe décentralisé à l'origine.

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \dots \\ x_{21} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{31} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \dots \\ x_{21} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{31} \\ x_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

L'ensemble des retours d'état décentralisés sous forme:

$$u_i = F_{ii} x_i = \begin{bmatrix} f_{i1} & f_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{bmatrix} \quad i=1,2,3$$

La matrice d'état en boucle fermée aura la forme suivante:

$$A+BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{11} & f_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & f_{21} & f_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{31} & f_{32} \end{bmatrix}$$

En vérifiant la relation (10) avec:

$$\hat{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_{i1} & f_{i2} \end{bmatrix} \quad \text{et } S_0 = 0, \text{ on obtient}$$

$$\|(\hat{A}_{ii})^{-1}\|^{-1} = \frac{1}{\max \left\{ \left(\frac{|f_{i2}|}{|f_{i1}|} + \frac{1}{|f_{i1}|}, 1 \right) \right\}} \leq 1, \quad i=2,3$$

Donc S_0 satisfait (10) pour l'ensemble des indices $\bar{S} = \{2,3\}$.

On peut vérifier que pour la structure

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix}$$

le mode $S_0 = 0$ reste fixe.

En utilisant le critère précédent, on trouve que pour la structure

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix}$$

Le mode fixe est éliminé.

2. ELIMINATION DES MODES STRUCTURELLEMENT FIXES :

Ici, nous allons proposer une méthode pour l'élimination des modes structurellement fixes dans les systèmes décentralisés à l'aide de l'échange d'information entre les sous-systèmes à travers les retours de sorties. Dans une première étape, nous définissons les stations de commande entre lesquelles la liaison d'échange doit être ajoutée. Cette liaison se caractérise par le bloc matriciel F_{ij} . Dans la seconde étape, nous cherchons à minimiser cet échange d'information lorsque les sous-systèmes i et j sont respectivement multi-entrées et multi-sorties. Le résultat est issu de la même idée que celle de ARMENTANO & SINGH mais les approches sont tout à fait différentes. La méthode est basée sur la caractérisation par l'algèbre de boole donnée par MOMEN & EVANS (1983a), (1983b) (voir CH. III).

Suite au résultat, nous développons un algorithme que nous appelons "ALGORITHME ELIM".

2.1 Elimination par échange d'information entre les stations de commande:

Considérons le système décentralisé donné par l'équation (1.CH II) et supposons qu'il est structuré et qu'il possède un mode structurellement fixe.

On définit les vecteurs booléens (voir CH III) comme suit:

Vecteur de commandabilité de la station I.

$$K_I = \begin{bmatrix} \hat{k}_I^1 & \hat{k}_I^2 & \dots & \hat{k}_I^n \end{bmatrix}$$

$I=1,2,\dots,N$

Vecteur de commandabilité par l'entrée u_h de la station I:

$$K_I^h = \begin{bmatrix} \hat{k}_I^{1h} & \hat{k}_I^{2h} & \dots & \hat{k}_I^{nh} \end{bmatrix} \quad .h \in \{1,2,\dots,p_I\}$$

$I=1,2,\dots,N$

Vecteur d'observabilité de la station J:

$$M_J^T = \begin{bmatrix} \hat{m}_J^1 & \hat{m}_J^2 & \dots & \hat{m}_J^n \end{bmatrix}^T$$

$J=1,2,\dots,N$

Vecteur d'observabilité de la sortie y_l de la station J. $J=1,2,\dots,N$:

$$M_J^{l,T} = \begin{bmatrix} \hat{m}_J^{1l} & \hat{m}_J^{2l} & \dots & \hat{m}_J^{nl} \end{bmatrix}^T \quad .l \in \{1,2,\dots,m_J\}$$

$J=1,2,\dots,N$

Vecteur caractérisant l'existence d'un mode structurellement fixe:

$$\sqrt{L}_I^* = L_s^* = \begin{bmatrix} 1_s^* & 2_s^* & \dots & n_s^* \end{bmatrix}^T$$

où p_I et m_J sont respectivement les dimensions du vecteur d'entrée de la station I et celui de sortie de la station J

n est la dimension de l'espace d'état

N le nombre de stations de commande

r désigne la transposée de la matrice.

Théorème 2:

Soit un système décentralisé avec N stations de commande. Un mode structurellement fixe, s'il existe, est éliminé par échange d'information entre les stations de commande si et seulement si, il existe au moins un i et un j pour lesquels le bloc matriciel F_{ij} ne contenant pas d'éléments nuls est ajouté à la matrice F .

Les indices i, j doivent être tels que :

$$k_{s_i}^* = 0, \quad k_{k_i}^{\approx} = 1 \quad \text{et} \quad k_{m_j}^{\approx} = 1 \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$i \neq j \quad i, j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Démonstration:

Si, dans la matrice de retour F , on ajoute le bloc F_{ij} (ayant tous les éléments non nuls) alors il existe un retour entre toutes les sorties du sous-système j et toutes les entrées du sous-système i . Sachant que la condition nécessaire de l'existence du mode structurellement fixe décentralisé est que; le système doit être complètement s -commandable et complètement s -observable, c'est à dire que :

$$\forall K_i = \text{vecteur unité et } \forall M_i^T = \text{vecteurs unité } i=1, 2, \dots, N$$

et puisque $k_{s_i}^* = 0$, le mode x_k est fixe et il est s -commandable par au moins une station i et s -observable par au moins une autre station j , le bloc F_{ij} introduit une liaison entre les sorties du sous-système j et les commandes du sous-systèmes i , ce qui rend le mode non fixe.

Inversement si $F_{ij} = 0$, la matrice de retour décentralisé ne contient que des blocs sur la diagonale caractérisant les retours locaux. Sachant que le mode structurellement fixe est s -commandable par une station et s -observable par une autre station, il reste donc fixe tant qu'il n'y a pas de retour entre ces deux stations.



2.1 Elimination par échange d'information minimum entre les stations de commande:

Supposons que les sous-systèmes I et J, définis précédemment sont multivariables.

Par le corollaire suivant, nous donnons la condition d'élimination du mode structurellement fixe à l'aide d'un minimum d'échange d'information entre les stations de commande I, J.

Corollaire 2:

Soit un système décentralisé avec N stations de commande. La condition nécessaire et suffisante pour l'élimination du mode structurellement fixe à l'aide d'un minimum d'échange d'information entre les stations de commande I et J est qu'il existe au plus un élément non nul f_{hl}^{IJ} de la matrice F_{IJ} , définie dans le théorème 2.

h et l sont tels que:

$$k_{l_s}^* = 0, \quad k_{k_I}^h = 1 \text{ et } k_{m_J}^l = 1 \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$I \neq J \quad I, J \in \{1, 2, \dots, N\}$$

$$h \in \{1, 2, \dots, p_I\}, \quad l \in \{1, 2, \dots, m_J\}$$

Démonstration:

Si on prend un seul élément $f_{hl}^{IJ} \neq 0$ caractérisant une seule liaison entre la sortie y_J^l et l'entrée u_I^h , en respectant les conditions: $k_{l_s}^* = 0, \quad k_{k_I}^h = 1$ et $k_{m_J}^l = 1$, un retour de sortie est ajouté entre y_J^l et u_I^h . Puisque l'état x_k est s-observable et s-commandable par la sortie et l'entrée citées, le retour ajouté permet l'élimination du mode structurellement fixe.

Inversement, si la liaison entre u_I^h et y_J^l n'existe pas et puisque cette entrée et cette sortie n'appartiennent pas à la même station de commande, alors les liaisons locales du retour n'agissent pas sur le mode x_k . Ce dernier reste donc fixe. □

2.3 Algorithme pour la caractérisation et l'élimination du mode structurellement fixe décentralisé:

Considérons le système décentralisé donné par l'équation (1.CH II) et supposons qu'il est structuré.

En se basant sur les résultats donnés par le théorème 2 et le corollaire 2, nous développons l'algorithme suivant:

ALGORITHME ELIM:

Commande centralisée:

Etape 1:

Tester la commandabilité et l'observabilité structurelles centralisées du système.

Etape 2:

Si le système est s-commandable et s-observable, aller à l'étape suivante.

Sinon le système possède des modes structurellement fixes centralisés, stop.

Commande décentralisée:

Etape 3:

Calculer, pour chaque station de commande le vecteur de commandabilité K_I^h et celui de l'observabilité M_I^{lT} respectivement de chaque entrée et de chaque sortie

Avec: $I=1,2,\dots,N$, $h=1,2,\dots,p_I$ et $l=1,2,\dots,m_I$.

Etape 4:

Calculer les vecteurs $K_I = \sqrt{K_I^h}$ et $M_I^T = \sqrt{M_I^l}$.

Avec: $I=1, 2, \dots, N$, $h=1, 2, \dots, p_I$ et $l=1, 2, \dots, m_I$.

Etape 5:

En utilisant la méthode de MOMEN & EVANS, (1983) (voir CH III), calculer le vecteur de caractérisation du mode structurellement fixe décentralisé $L_s^* = \sqrt{L_I^*}$, $I=1, 2, \dots, N$.

Etape 6:

Si L_s^* contient un élément nul, il existe un mode fixe, passer à l'étape suivante.

Sinon le mode fixe n'existe pas, stop.

Elimination du mode fixe:

Etape 7:

Soit k_s^* l'élément nul de L_s^* $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

Chercher les indices i et j pour lesquels les vecteurs K_I et M_J contiennent respectivement les éléments $k_I^{\approx} = 1$ et $k_J^{\approx} = 1$.

Etape 8:

Ajouter, dans la matrice de retour, le bloc F_{IJ} . Ce bloc ne doit contenir aucun élément nul.

La nouvelle matrice sera notée par \tilde{F} .

Etape 9:

Pour avoir un échange d'information minimum, chercher dans la station de commande i l'entrée u_i^h pour laquelle $k_I^{\approx h} = 1$ et dans la station de commande j la sortie y_j^l pour laquelle $k_J^{\approx l} = 1$.

Etape 10:

Mettre tous les éléments de F_{IJ} égaux à zéro sauf l'élément f_{hl}^{IJ} assurant l'échange d'information entre les stations i et j . Stop. Fin.

Exemple 2:

Cet exemple est donné pour atteindre un double objectif. Il sert pour l'illustration de la caractérisation des modes structurelle-

nt fixes par l'algèbre de Boole (CH III) ainsi que la méthode que nous avons proposé pour l'élimination de ces modes .

Considérons le système décentralisé structuré suivant:

$$\dot{x} = A_S x + \sum_{I=1}^N B_{sI} u_I$$

$$y_I = C_{sI} x_I$$

Avec la commande décentralisée:

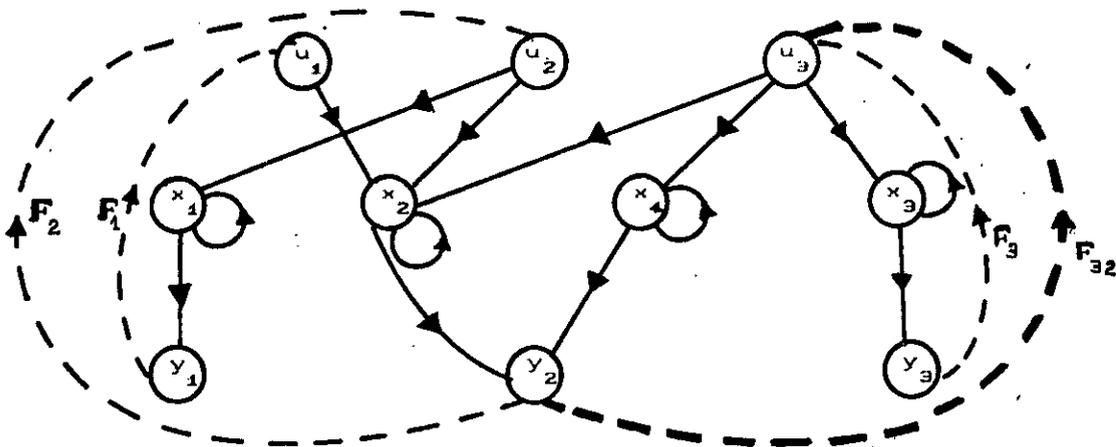
$$u_I = F_{I I} y_I \quad I=1,2,3$$

dont les matrices structurées sont:

$$A_s = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} ; B_{s1} = \begin{bmatrix} 0 \\ * \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; B_{s2} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; B_{s3} = \begin{bmatrix} 0 \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

$$C_{s1} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; C_{s2} = \begin{bmatrix} 0 & * & 0 & * \end{bmatrix} ; C_{s3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * & 0 \end{bmatrix}.$$

Le graphe associé à ce système est donné par la figure suivante:



Les matrices booléenne associées aux matrices structurées sont:

$$A_B, B_{B_i}, C_{B_i} \quad i=1,2,3$$

Commande centralisée:

Etape 1: Commandabilité et observabilité structurelle centralisée

a) Matrice d'atteignabilité des états:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Vecteur d'atteignabilité en entrées:

$$R_u = \vee_{col} R \wedge B_B \quad \text{où} \quad B_B = \begin{bmatrix} B_{B_1} & B_{B_2} & B_{B_3} \end{bmatrix}$$

$$R_u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \Rightarrow \text{tous les états sont atteignables}$$

c) Condition du rang terme:

$$\text{r.t. } \begin{bmatrix} A_B & B_B \end{bmatrix} = 4=n$$

Le système est s-commandable.

d) Atteignabilité en sorties:

$$R_y = \bigvee_{\text{lign}} / C_B \vee \wedge R \quad \text{où } C_B = \begin{bmatrix} C_{B1} \\ C_{B2} \\ C_{B3} \end{bmatrix}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \rightarrow \text{tous les états atteignent les sorties}$$

e) Condition du rang terme:

$$\text{r.t. } \begin{bmatrix} A_B \\ C_B \end{bmatrix} = 4=n$$

Le système est s-observable

Etape 2:

Le système n'a pas de modes structurellement fixes centralisés. On passe à l'étape 3.

Commande décentralisée:

Etape 3:

Puisque les stations de commande sont mono-variables, nous

aurons: $K_I^h = K_I$, $M_I^l = M_I^T$ et on passe directement à

l'étape 4

Etape 4:

a) Sous-espaces d'atteignabilité de chaque station:

$$R_{u_I} = R_{v_I} \wedge B_{BI} \quad ; \quad R_{y_I} = C_{BI} \vee \wedge R \quad I=1,2,3$$

$$R_{u_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{u_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r_{u_1} = 1$$

$$r_{u_2} = 2$$

$$r_{u_3} = 3$$

$$R_{y_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

$$R_{y_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T$$

$$R_{y_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

$$r_{y_1} = 1$$

$$r_{y_2} = 2$$

$$r_{y_3} = 1$$

b) Sous-espaces commandables et sous-espaces observables de chaque station:

Prenons $r.t \begin{bmatrix} A_{u_I} & B_{BI} \end{bmatrix} = r.t_{oI}$ et $r.t \begin{bmatrix} A_{y_I} \\ C_{BI} \end{bmatrix} = r.t_{oI} \quad I=1,2,3$
 nous vérifions que:

$$r.t_{oI} = r_{u_I} \rightarrow K_I = R_{u_I} \quad \text{et} \quad r.t_{oI} = r_{y_I} \rightarrow M_I = R_{y_I} \quad I=1,2,3$$

Etape 5: Calcul du vecteur de caractérisation L_s^* :

a) Sous-espaces d'atteignabilité élargies:

Nous avons:

$$R_{u_1} \wedge R_{y_2}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad ; \quad R_{u_1} \wedge R_{y_3}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad ; \quad R_{u_2} \wedge R_{y_3}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$R_{u_2} \wedge R_{y_1}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0 ; \quad R_{u_3} \wedge R_{y_2}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0 ; \quad R_{u_3} \wedge R_{y_1}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Nous aurons donc:

$$R_{u_1}^* = R_{u_1} \vee R_{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad R_{u_2}^* = R_{u_2} \vee R_{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad R_{u_3}^* = R_{u_3} \vee R_{u_2} \vee R_{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{y_1}^{*T} = R_{y_1}^T \vee R_{y_2}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad R_{y_2}^{*T} = R_{y_2}^T \vee R_{y_3}^T \vee R_{y_1}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad R_{y_3}^{*T} = R_{y_3}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Sous-espaces d'atteignabilité communs entre les entrées et les sorties de chaque station:

$$R_1^* = R_{u_1}^* \wedge R_{y_1}^{*T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad R_2^* = R_{u_2}^* \wedge R_{y_2}^{*T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad R_3^* = R_{u_3}^* \wedge R_{y_3}^{*T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$r_1^* = 2 ; \quad r_2^* = 2 ; \quad r_3^* = 1$$

c) Intersection des sous-espaces d'atteignabilité:

$$R_1^* \wedge R_2^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0 ; \quad R_1^* \wedge R_3^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 ; \quad R_2^* \wedge R_3^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

De là on peut déduire que:

$$K_{13}^* = K_1 \quad ; \quad K_{31}^* = K_3 \quad ; \quad K_{23}^* = K_2 \quad ; \quad K_{32}^* = K_3$$

$$M_{13}^* = M_1 \quad ; \quad M_{31}^* = M_3 \quad ; \quad M_{23}^* = M_2 \quad ; \quad M_{32}^* = M_3$$

Ici on remarque que seules les stations 1 et 2 peuvent élargir leurs sous-espaces de commandabilité et d'observabilité qui se déterminent comme suit:

d) Sous-espace de commandabilité et d'observabilité de la station 1 élargies en coopération avec la station 2:

$$\text{r.t.} \begin{bmatrix} A_{B1}^* & B_{B1} \\ C_{B2} & 0 \end{bmatrix} = \text{r.t.}_{c12} = 3 \quad ; \quad \text{r.t.}_{c12} > r_1^* \Rightarrow \begin{cases} K_{12}^* = K_1 \vee K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ M_{12}^{*T} = M_1^T \vee M_2^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

e) Sous-espace de commandabilité et d'observabilité de la station 2 élargies en coopération avec la station 1:

$$\text{r.t.} \begin{bmatrix} A_{B2}^* & B_{B2} \\ C_{B1} & 0 \end{bmatrix} = \text{r.t.}_{c21} = 2 \quad ; \quad \text{r.t.}_{c21} = r_2^* \Rightarrow \begin{cases} K_{21}^* = K_2 \vee K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ M_{21}^{*T} = M_2^T \vee M_1^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

f) Sous-espaces de commandabilité et d'observabilité de chaque station en coopération avec toutes les autres stations:

i) Commandabilité:

$$K_1^* = K_{12}^* \vee K_{13}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; K_2^* = K_{21}^* \vee K_{23}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; K_3^* = K_{31}^* \vee K_{32}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ii) Observabilité:

$$M_1^{*T} = M_{12}^{*T} \vee M_{13}^{*T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; M_2^{*T} = M_{21}^{*T} \vee M_{23}^{*T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; M_3^{*T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

g) Sous-espaces élargies commun entre la s-commandabilité et la s-observabilité:

$$L_1^* = K_1^* \wedge M_1^{*T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; L_2^* = K_2^* \wedge M_2^{*T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; L_3^* = K_3^* \wedge M_3^{*T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

h) Vecteur de caractérisation du mode structurellement fixe:

$$L_3^* = L_1^* \vee L_2^* \vee L_3^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Etape 6:

Le vecteur booléen L_3^* contient le dernier élément égal à zéro. Le mode associé à l'état x_4 est donc un mode structurellement fixe.

Elimination du mode fixe:

Etape 7:

Nous avons $k=4$, $\tilde{k}_3=1$ et $\tilde{m}_2=1$.

d'où $r=3$ et $J=2$.

Etape 8:

La nouvelle matrice de retour aura la forme suivante:

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 \\ 0 & F_{32} & F_3 \end{bmatrix}$$

Remarque :

Puisque les sous-systèmes sont tous mono-variables, les étapes 9 et 10 sont inutiles.

Vérification:

Si on suppose qu'une réalisation admissible du système structuré considéré donne un système tel que:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

et les matrices B_I, C_I sont obtenues en remplaçant, dans B_B, C_B , les "uns" et les "zeros" logiques par des "uns" et des "zeros" numériques.

On vérifie que ce système possède un mode fixe en $S_0=3$

c'est à dire que les matrices $S_0 I - A$ et $S_0 I - (A + BFC)$ sont singulières.

En utilisant le résultat de l'algorithme on trouve que la matrice $S_0 I - (A + B\tilde{F}C)$ n'est pas singulière $\forall \tilde{F}$. Par conséquent le mode fixe est éliminé.

3. CONCLUSION:

Dans ce dernier chapitre, le problème de l'élimination des modes fixes a été abordé.

Dans une première étape, nous avons rappelé la méthode proposée par ARMENTANO & SINGH (1982). Cette méthode algébrique est consacrée aux systèmes interconnectés décentralisés à paramètres connus. Elle permet donc d'éliminer les modes fixes mais pas les modes structurellement fixes, et ce en utilisant l'échange d'information entre les stations de commande.

Dans une seconde étape et dans le souci de trouver une solution au problème de stabilisation décentralisée des systèmes structurés, nous avons proposé une autre méthode, tout à fait différente de la première, pour l'élimination des modes structurellement fixes décentralisés à l'aide d'un échange minimum d'information entre les stations de commande.

La méthode proposée constitue un moyen relativement simple et efficace pour résoudre le problème de la commande décentralisée. Sa simplicité réside dans le fait que l'approche utilisée est purement structurelle ne nécessitant que des calculs de nature booléenne. Son efficacité s'interprète par l'absence d'erreurs numériques de calcul.

Par rapport à celle d'ARMENTANO & SINGH (1982), la méthode présente les avantages suivants:

- Elle permet de déterminer les indices i et j des sous-systèmes entre lesquels la liaison d'échange d'information doit être ajoutée, alors que la première méthode ne peut donner que l'indice i .

-L'échange d'information peut être minimisé et peut se ramener à une seule liaison caractérisée par un seul élément du bloc matriciel F_{ij} .

-Elle peut être utilisée pour les systèmes multivariables décentralisés et multivariables interconnectés décentralisés.

-L'approche utilisée peut également servir pour la décentralisation convenable de la commande d'un système.

-La nature binaire des variables manipulées, lui donne l'avantage d'être implémentable sur calculateur numérique et assure l'exactitude des résultats même pour les système de grande dimension.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE:

Le travail présenté dans cette thèse concerne la commande décentralisée des systèmes structurés.

Dans une première partie, une étude bibliographique a été faite sur les bases mathématiques nécessaires à l'étude des systèmes structurés, où nous avons donné des interprétations graphiques du rang structurel. Cette partie se termine par l'étude des notions de commandabilité et d'observabilité classiques et structurelles des systèmes centralisés. Le passage par ces deux notions nous a été obligatoire pour les deux raisons suivantes:

-D'une part, pour mettre en évidence leur aspect structurel qui est nouveau pour un grand nombre d'automaticiens.

-D'autre part, pour préparer le chemin à l'étude de la commande décentralisée, puisqu'elles constituent des conditions nécessaires pour la commandabilité et l'observabilité décentralisées.

Dans une deuxième partie, nous avons abordé le problème de la commande décentralisée dont l'élément essentiel est celui du mode fixe. Des caractérisations de ce dernier ont été données par différentes approches allant de la représentation d'état à la représentation par matrice de transfert.

Lors de l'étude, nous avons constaté que les caractérisations basées sur le test du rang des matrices ne peuvent pas être utilisées pour l'évaluation du mode fixe. Une autre démonstration du théorème principal d'ANDERSON a été également donnée.

Dans la troisième partie, nous nous sommes particulièrement intéressé à l'aspect structurel du problème de la commande décentralisée.

Le problème de la caractérisation des modes structurellement fixes décentralisés a été abordé par l'algèbre linéaire, l'algèbre booléenne et par la théorie des graphes. La représentation d'un système par les graphes permet de mettre en relief la structure

interne et les liaisons entre les différentes variables du processus. Les techniques basées sur l'algèbre de Boole, que nous avons présenté ont le grand avantage d'être implémentable sur calculateur numérique et de ne pas avoir des erreurs de calcul. Les vecteurs booléens utilisés pour caractériser la commandabilité et l'observabilité décentralisées, expriment d'une manière très explicite les sous-espaces d'état commandables et observables ce qui facilite la détermination de la commande et de l'observation par un minimum, respectivement, d'entrées et de sorties.

Les caractérisations par les graphes des modes structurellement fixes ont été présentées par deux méthodes. La première est fondée sur la caractérisation par l'algèbre linéaire [PICHAI & SEZER(1984)] et la seconde sur l'interprétation par graphes des coefficients du polynôme caractéristique du système en boucle fermée [REINCHKE (1984)]. L'analyse de ces deux méthodes a permis de relever un certain nombre de remarques, à savoir;

-La première méthode présente un caractère purement structurel donné par les conditions d'atteignabilité et du rang structurel exprimées graphiquement, ces derniers ne nécessitent pas la connaissance des valeurs numériques des paramètres du système.

-Par contre dans la seconde méthode, et pour un mode non nul, la condition a un caractère numérique puisqu'elle est basée sur la connaissance de la valeur numérique du mode fixe.

Dans la quatrième et dernière partie, le problème de l'élimination des modes fixes décentralisés a été abordé et une méthode structurelle, fondée sur les caractérisations par l'algèbre de Boole, a été proposée ainsi qu'un algorithme pour l'élimination des modes structurellement fixes. L'interprétation par graphes des résultats obtenus reste un problème ouvert.

D'autres caractérisations des modes fixes décentralisés pourront, à notre avis, constituer la suite de cette étude, en exploitant d'autres types de graphes tels que les graphes bipartis présentés au chapitre 1, ainsi que des caractérisations en terme de zéros multivariables.

Le problème du rejet de perturbation des systèmes structurés décentralisés peut aussi être abordé. Des travaux dans ce sens ont été entrepris par plusieurs chercheurs; [SCHIZAS & EVANS (1981), COUMMAULT , DION & PEREZ (1991)] mais pour des systèmes centralisés.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

ANDERSON B. D. O & MOORE J. B, (1981)

Time-varying feedback laws for decentralized control.

IEEE TAC, VOL AC-26, N°5, October

ANDERSON B. D. O, (1982)

Transfer function matrix description of decentralized fixed modes.

IEEE TAC, VOL AC-27, N°6, December

ANDERSON B. D. O & CLEMENT DAVID, (1981)

Algebraic characterization of fixed modes in decentralized control.

AUTOMATICA, VOL 17, N°5, pp 703-712

ARMENTANO V. A & SINGH M. G, (1982)

A procedure to eliminate decentralized fixed modes with reduced information exchange.

IEEE TAC, VOL AC-27, N°1, February

BELMEHDI A, (1987)

Sur la stabilisation et le découplage structurel des systèmes linéaires.

Thèse de Docteur ingénieur, I. N. Grenoble Mars 1987

BERGE C, (1970)

Graphes et hypergraphes.

DUNOD, Paris

BOUKHETALA D, (1991a)

Caractérisation des modes fixes dans les systèmes décentralisés.

Rapport de recherche n°1, Avril, ENP. ALGER

BOUKHETALA D, (1991b)

Caractérisation des modes structurellement fixes dans les systèmes décentralisés.

Rapport de recherche n°2, Septembre, ENP. ALGER

BOUKHETALA D, (1992a)

Elimination des modes structurellement fixes par échange d'information.

Rapport de recherche n°3, Février, ENP. ALGER

BOUKHETALA D & BELMEHDI A, (1992b)

Commande décentralisée des systèmes structurés.

Seminaire National sur les Signaux, Systèmes et Automatismes (SSA92), Blida 13-15 Décembre 1992.

BOUKHETALA D & BELMEHDI A, (1993)

Caractérisations des modes fixes dans la commande décentralisée des grands systèmes.

Colloque Magrebin de l'Automatique et de l'Electronique Industrielle (COMAEI'93), Djelfa 11-13 Mai 1993.

COMMAULT C, DION J.M, BELMEHDI, (1987)

Structured systems within the transfer matrix approach.

Syst. and Contr. Lett., Vol.9, pp.335-339.

COMMAULT C, DION J.M, PEREZ A, (1991)

Disturbance rejection for structured systems

IEEE TAC, VOL AC-37, N°7, July

CORFMAT J.P & MORSE A.S, (1976)

Decentralized control of linear multivariable systems.

AUTOMATICA, VOL 12, pp 479-495

DAVISON E.J & TIMOTHY.N.CHANG, (1990)

Decentralized stabilization and pole assignment for general proper systems.

IEEE TAC, VOL AC-35, N°6, pp 652-664

- DAVISON E. J & WANG S. H, (1985)
A characterization of decentralized fixed modes in terms of transmission zeros.
IEEE TAC, VOL AC-30, N°5, October
- DAVISON E. J & OZGÜNER. U, (1981)
Characterization of fixed modes for interconnected systems.
AUTOMATICA, Vol 19 N°2, pp 169-182
- EVANS F. J & MARTIN LARSEN P., (1983)
Structural design of control systems
Lecture notes
Electric power engineering department technical university of Denmark, August
- FOSSARD A & GUENGUEN C, (1972)
Commande des systèmes multidimensionnels
Dunod Paris
- GANTMACHER F. R, (1959)
Théorie des matrices.
Chelsea , New York
- GILLE J. C & CLIQUE M, (1975)
La représentation d'état pour l'étude des systèmes dynamiques .
Tome 2 Eyrolles Paris.
- GLOVER K & SILVERMAN L. M, (1976)
Characterization of structural controllability.
IEEE TAC, VOL. -AC 21, N°4, pp 534-537
- GODRAN M & MINOUX M, (1979).
Graphes et algorithmes
Collection de la direction des études et recherche d'électricité de France. Eyrolles. Paris

KAILATH T, (1980)

Linear systems

Prentice-Hall.

LIN C T, (1974)

Structural controllability

IEEE TAC , VOL. AC-19, N°3, pp 201-208

LINNEMAN A, (1981)

Decoupling of structured systems.

Syst. Control Lett. 1, pp. 79-86.

MOMEN .S & EVANS F.J, (1983 a)

Structurally fixed modes in decentralized systems.

Pt 1. two. Control station

IEE PROCEEDINGS, VOL 130, pt.D, N°6, November

MOMEN .S & EVANS F.J, (1983 b)

Structurally fixed modes in decentralized systems.

Pt 2. General case.

IEE PROCEEDINGS, VOL 130, pt.D, N°6, November

MARIA P.F, BRUNO M. & BIAGIO T., (1983)

Structurally fixed modes of systems described by

Rosenbrock's polynomial matrices.

INT. J. Control, VOL 48, N°5, pp 1947-1965

MUROTA, (1987)

*Systems analysis by graphs and matroids-structural
solvability and controllability*

Algorithms and combinatorics 3

Springer Verlag

PATEL & MISRA, (1991)

Numerical computation of decentralized fixed modes

AUTOMATICA, VOL. 27, N°2, pp 375-382

PERSIANO .M & VARAIYA .P.P, (1972)

Decentralized information and control: A network flow example

IEEE TAC, VOL AC-17, pp. 446-473 ry

PICHAJ .V , SEZER M.E & SILJAK D.D, (1984)

A graph theoretic characterization of structurally fixed modes.

AUTOMATICA, VOL 20, N°2, pp 247-250

REINSCHKE .K, (1984)

Graph theoretic characterization of fixed modes in centralized and decentralized control.

INT. J. CONTROL, VOL 39, N°4, pp 715-729

REINSCHKE .K (1983)

Multivariable Control

A graph-theoretic Approach

Springer Verlag

RECH .C (1988)

Commandabilité et observabilité structurelle des systèmes interconnectés

Thèse de Docteur de l'U.S.T.Lille préparée au L.A.G

ROSENBROCK .H.H (1970)

State space and multivariable theory

Nelson, London

SCHIZAS C & EVANS F.J, (1981)

A graph theoretic approach to multivariable control system design.

AUTOMATICA, VOL.17, N°2 pp, 371-377

SEZER .M.E & SILJAK .D.D (1981)

Structurally fixed modes

Syst. Contr. Lett., VOL.1, N°1 pp, 60-64

WANG S. H & DAVISON E. J (1973)

On stabilization of decentralized control systems

IEEE VOL. AC-18, N°5 ,pp 473-478 October

WANG X. , MARTIN C.F. , GILLIAM D. & BYRNES C.I. , (1992)

Decentralized-feedback pole placement of linear systems

INT. J. CONTROL, VOL. 55, N°2, pp 511-518

WILLEMS J.L , (1985)

Decentralized control system stabilization: Time invariant and time varying feedback strategies

IMA conf. on control theory, pp 3-23 Academic press Lon

WILLEMS J.L , (1988)

Elimination of fixed modes in decentralized systems by means of sampling

Syst. Contr. Lett. , VOL. 10, pp 1-8

WILLEMS J.L, (1989)

Time varying feedback for stabilization of fixed modes in the decentralized control systems

AUTOMATICA, VOL 25, N°1, pp 127-131

WOLOVICH W. A. , (1974)

Linear multivariable systems

Springer Verlag, New York