

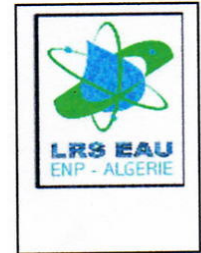
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département Hydraulique

Laboratoire LRS EAU



MEMOIRE DE MAGISTERE EN HYDRAULIQUE

De M^{me} Djani née Sayad sabiha

Ingénieur d'état ENP

THEME :

ÉTUDE DU REGIME TRANSITOIRE PAR LA METHODE DES
CARACTERISTIQUES AVEC ANALYSE D'ERREURS

Soutenu le 24/01/2008 devant le jury composé de :

M^f H.YAHI	Professeur	U.T.O	Président
M^f B.SALAH	Maître de C.	ENSH Blida	Directeurs de thèse
M^f A.KETTAB	Professeur	ENP	Examineur
M^f M.BILEK	Chargé de cours	ENP	Examineur
M^f K.O KHODJET	Chargé de cours	ENSH	Examineur
M^f Y.MOULOUDI	Chargé de cours	ENP	Examineur
M^f M.A.NAIT CHAALLAL	Subdivisionnaire	DHW B.	Invité

ENP 2008

المخلص:

إن الهدف من هذا البحث هو دراسة النظام الانتقالي باستعمال منهجية وصفية مع حساب الأخطاء. عمليا كل المدونات تؤكد بان النظام الانتقالي ظاهرة مضررة بالملحقات الري في حالة السيلان بالجاذبية عدة مناهج حسابية متفاوتة الصعوبة تعتمد على معادلات سان فنو استعملت لغرض دراسة هذه الظاهرة. في بحثنا هذا استعملنا منهجية وصفية نظرا لبساطتها وسهولتها في الحساب العددي. غير أن إلى حد الساعة هذه المنهجية استعملت دون اخذ الأخطاء الناجمة عنها بعين الاعتبار-عندما تكون الخطوط الوصفية لا تصل إلى نقاط التقاطعات- و من هذا المنصورفذلك لا يصف الحقيقة . في بحثنا هذا اخذنا هذه الأخطاء بعين الاعتبار و زيادة على ذلك عرضنا منهجية مثلى لصدمة الضغط باستعمال معادلات وصفية. وبهذا نكون قد حددنا وسيلة تسمح لانجاز قانون التشغيل لأي نوع أعضاء الضبط.

كلمات المفتاح: النظام الانتقالي- منهجية وصفية-صدمة الضغط المثلى-حساب الأخطاء

Résumé :

L'objectif de ce travail de recherche est l'étude du régime transitoire par la méthode des caractéristiques avec calcul d'erreurs.

La littérature montre que le régime transitoire est un phénomène pratiquement très nuisible pour les systèmes hydrauliques en charge. Différentes méthodes numériques plus ou moins compliquées, se basant sur les équations de Saint Venant, ont été utilisées pour l'étude de ce phénomène. Dans notre travail, il a été considéré la méthode des caractéristiques vu sa simplicité et sa maniabilité dans le calcul numérique. Néanmoins jusqu'à l'heure actuelle, cette méthode a été toujours étudiée en négligeant les erreurs qui en résultent (les pieds des caractéristiques n'aboutissent pas aux nœuds de calcul), ce qui ne reflète pas la réalité. Dans nos travaux de recherche non seulement le problème des erreurs a été considéré et résolu en plus il a été proposé une méthode d'optimisation du coup de bélier par manipulation des équations de la méthode des caractéristiques aboutissant ainsi à une piste permettant de mettre au point la conception d'une loi de manœuvre de n'importe quel type de robinet -vanne

Mots clés : écoulement transitoire- méthode des caractéristiques- Coup de bélier optimale- calcul d'erreurs

Abstract:

The purpose of this work is the study of transit flow by the method of characteristics with of error's calculation. literature shows that this phenomenal is harmful for the hydraulics systems. Many numerical methods used the equation of Saint Venant in order to study this phenomenal. In our work, we have chosen characteristics methods because of its simplicity in the numerical calculation. Nevertheless, up to now this method neglects the error resulted (when line characteristic don't pass by node of calculation), which doesn't reflect reality. In our work of research not only we take into consideration the problem of errors and solve them but we suggest a method of optimal water hammer with manipulating the results of the characteristic methods of equations we have, as well as way which enables to make a point at the conception of a

low to operate any type of lock gate's tap eywords: transistor flow – characteristic methods –optimal water hammer-calculating errors

Remerciements

Il m'est agréable d'exprimer mes sincères remerciements à mes directeurs de thèse :

-Monsieur le professeur A.Kettab, directeur du laboratoire de recherches des sciences de l'eau de m'avoir encourager, conseiller et de me soutenir durant tout mon travail.

-M Salah Boualem maître de conférence, ENSH Blida d'avoir guidé mes travaux de thèse, et de m'encourager durant mon travail, je lui adresse ma profonde gratitude et ma reconnaissance.

Je tiens à remercier M F.Massouh d'avoir répondu à mon courrier et de m'avoir orienter

J'adresse mes sincères remerciement également à :

M .H.Yahi ,Professeur ,U.de Tizi Ouzou qui m'a fait l'honneur de présider mon jury

Aux membre de jury : M M. Bilek

M K.O Khoudjet

M Y. Mouloudi

Sans oublier mon subdivisionnaire M M.A Naït Challal qui a été très compréhensif

Mes remerciements vont également à ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin

Dédicaces

*A tous ceux qui me sont chers
A une Algérie meilleure
A une Hydraulique prospère*

D.S. Sabiha

NOMENCLATURE

C	<i>Célérité de propagation d'onde</i>	<i>m/s</i>
C^-	<i>Caractéristique négative</i>	
C^+	<i>Caractéristique positive</i>	
C_0	<i>Vitesse du son dans le fluide</i>	<i>m/s</i>
C_d	<i>Coefficient de débit</i>	<i>m</i>
D	<i>Diamètre interne</i>	<i>m</i>
D_{disp}	<i>Dispersion numérique</i>	
e	<i>épaisseur de la conduite</i>	<i>m</i>
e_b	<i>épaisseur du béton</i>	<i>m</i>
e_m	<i>épaisseur du métal</i>	<i>m</i>
E	<i>Module de Young du matériau de la conduite</i>	<i>Pascal</i>
E_e	<i>Module de Young de l'eau</i>	<i>Pascal</i>
E_b	<i>Module de Young du béton</i>	<i>Pascal</i>
E_m	<i>Module de Young du matériau</i>	<i>Pascal</i>
E_r	<i>Module de Young de rocher</i>	<i>Pascal</i>
E_s	<i>Module de Young du sol</i>	<i>Pascal</i>
f	<i>caractéristique de l'installation</i>	
f_r	<i>force de frottement</i>	
g	<i>Accélération de la pesanteur</i>	<i>m/s²</i>
H	<i>Charge hydraulique</i>	<i>m</i>
i	<i>étape de fermeture du robinet-vanne</i>	
j	<i>Gradient hydraulique</i>	
j_k	<i>nombre d'intervalles Δx dans l'espace</i>	
K_e	<i>Module d'élasticité du fluide</i>	<i>Pascal</i>
K	<i>Coefficient d'ancrage</i>	
L	<i>Longueur de la conduite</i>	<i>m</i>
m	<i>masse de la tranche liquide</i>	<i>Kg</i>
P	<i>Pression interne</i>	<i>Pascal</i>
P_a	<i>la charge due au remblai du sol</i>	<i>m</i>
Q	<i>Débit</i>	<i>M³/s</i>
R	<i>Rayon extérieur</i>	<i>m</i>
r	<i>Rayon intérieur</i>	<i>m</i>
R_1	<i>Amortissement numérique</i>	

R_2	désigne l'angle de déphasage de la fonction Ψ .	
S	Section de la conduite	m^2
t	Le temps	seconde
T	Période de l'onde	
U	Vitesse d'écoulement	m/s
X	abscisse suivant l'axe de la conduite	
τ	effort tranchant	N/m^2
σ_1	Contrainte longitudinale	MPa
σ_2	Contrainte radiale	MPa
σ_a	Contrainte armature	MPa
σ_b	Contrainte béton	MPa
η	Rapport entre modules d'élasticité du métal et du béton	
ξ_1	déformation longitudinale	
ξ_2	Déformation radiale	
ν	Coefficient de poisson du matériau de la conduite	
ρ	Masse volumique de l'eau	Kg/m^3
ΔL	Variation de longueur de l'élément liquide	
ΔP	Perte de pression	
α	Angle entre l'axe de la conduite et l'horizontal	
β	Étant le coefficient de perte de charge linéaire.	
Ψ_1	Coefficient fonction de la nature du matériau	
λ	coefficient de frottement selon NIKURADSE.	
λ_1	valeur adimensionnelle du coup de bélier	
λ_2	caractéristique hydraaulique	

LISTE DES FIGURES

- Figure N°1.1 : force et contrainte radiale dans un tuyau
- Figure N°1.2 : déplacement d'un élément liquide
- Figure N°1.3 : force exercées sur une tranche liquide
- Figure N°2.1 : Coupe schématique d'une galerie en rocher revêtu
- Figure N°2.2 : Conduite ancré d'un seul côté
- Figure N°2.3 : Conduite ancré aux deux extrémité
- Figure N°2.4 : Conduite équipée de joint de dilatation
- Figure N°3.1 : Déplacement d'une onde
- Figure N°3.2 : schéma de la méthode des caractéristiques
- Figure N°3.3 : Schéma de lax et -Wendroff
- Figure N°3.4 : Plan X,t pour la méthode implicite
- Figure N°4.1 : Quatre étapes d'un cycle de variation de pression
- Figure N°4.2 : Elément général
- Figure N°4.3 : Transmission et réflexion d'onde à une jonction
- Figure N°4.4 : Evolution d'une courbe de pompe
- Figure N°5.1 : conduite écoulent un débit Q à une vitesse U
- Figure N°5.2 : Installation hydraulique à écoulement gravitaire
- Figure N°5.3 : Diagramme des vitesse (t,X)
- Figure N°5.4 : schéma d'un coup de bélier optimal
- Figure N°5.5 : Variation du paramètre λ_1 en fonction de n pour
une installation λ_2
- Figure N°5.6 : Variation du nombre d'étape de fermeture n en fonction de λ_2
pour un coup de bélier donné λ_1
- Figure N°6.1 : Représentation du maillage pour discrétisation des équations des
lignes des caractéristiques
- Figure N°6.2 : maillage pour discrétisation
- Figure N°6.3 : Maillage de discrétisation
- Figure N°6.4 : Interpolation entre deux points
- Figure N°6.5 : interpolation temporelle fonction exacte
- Figure N°6.6 : interpolation temporelle fonction approchée
- Figure N°6.7 : Amortissement numérique R_1 en fonction de ξ , $T=0,1$
 $sec, dt=0,025$
- Figure N°6.8 : Amortissement numérique R_1 en fonction de ξ , $T=0,125$
- Figure N°6.9 : Amortissement numérique en fonction de ξ , $T=0,01$
- Figure N°6.10: Amortissement numérique, en fonction de j_k , $m=1$
- Figure N°6.11: Amortissement numérique, en fonction de j_k , $m=4$

Figure N°6.12: Dispersion numérique pour m variable $\xi = 0,1$ m variable
 Figure N°6.13: Dispersion numérique pour m variable $m = 1$, ξ variable
 Figure N°6.14: Dispersion numérique pour m variable $\xi = 0,25$, m variable
 Figure N°6.15: Dispersion numérique pour m variable $\xi = 0,9$ m variable

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE 1 : PRESENTATION DU REGIME TRANSITOIRE

1.1 Généralité.....	04
1.2 Aperçu bibliographique sur le régime transitoire.....	05
1-3 Analyse du régime transitoire dans une conduite en charge :.....	08
1.3.1 Équation de continuité.....	09
1.4.1 Équation de mouvement.....	13
1.4 Conclusion.....	17

CHAPITRE 2 : CELERITE D'ONDE DE PRESSION DANS LES CONDUITES EN CHARGE.

2.1 Introduction.....	19
2.2 Aperçu bibliographique sur la célérité d'onde de pression.....	21
2.3 Travaux antérieurs sur les modes d'ancrage des conduites en charge	29
2.4 Calcul du coefficient de déformabilité.....	32
2.5 Célérité d'onde dans les conduites en polyéthylène	34
2.6 Conclusion.....	36

CHAPITRE 3 : METHODES DE SOLUTIONS DU REGIME TRANSITOIRE

3.1 Introduction.....	38
3.2 Solution généralisée du régime transitoire.....	39
3.3 Différentes méthodes.....	41
1. Méthode des caractéristiques.....	41
2. Méthodes des différences finies.....	44
3. Méthode des éléments finis.....	50
4. Conclusion.....	51

CHAPITRE 4 : MODELISATION DU COUP DE BELIER

4.1. Introduction.....	53
4.2. Phénomène du coup de bélier.....	54
4.2.1. Définition.....	54
4.2.2. Risques dus aux coups de bélier.....	55
4.3 Description du phénomène physique mis en jeux.....	56
1. Etat d'équilibre d'un système Hydraulique.....	56
2. Onde élastique et oscillation en masse Perturbation de l'équilibre.....	56
3. Perturbation de l'équilibre, effet sur les pressions.....	56
4.4. Processus de variation de la pression et de la vitesse dans une tuyauterie	
1. Cas d'arrêt brusque de la pompe.....	57
2. Cas d'une fermeture brusque d'une vanne placée à l'aval d'une conduite..	60
4.3 Aspects théoriques	61
1. Equation de base.....	62
2. Hypothèse de base.....	62
3. Calcul de la dépression maximale.....	63
4 Modélisation des composants d'un système hydraulique.....	64
1. Traitement d'un élément général.....	64
2. section de conduite.....	66
3. Elément passif	67
4. jonction.....	67
5. pompe.....	68
5 Conclusion.....	69

CHAPITRE 5: TRANSFORMATION DES EQUATIONS DE SAINT VENANT

5.1 Introduction.....	72
5.2 Equations des caractéristiques.....	72
1. Les conditions aux limites.....	74
2. Interprétation du terme jdX	75
3. Coup de bélier à l'extrémité aval de la conduite durant la variation du débit sans pertes de charge.....	77
4. Détermination des vitesses et du coup de bélier.....	81
5.3 Méthode d'optimisation du coup de bélier.....	84
5.4 Conclusion.....	88

CHAPITRE 6: INTERPOLATION DE LA METHODE DES CARACTERISYIQUE ET CALCUL D'ERREUR

6.1 Introduction	90
6.2 Equation de base.....	91
6.3 Interpolation numérique.....	93
1. Interpolation temporelle.....	97
2. Interpolation spatiale	102
6.3 Détermination de l'erreur due à l'interpolation temporelle.....	102
6.4 Amortissement numérique.....	103
6.5 La dispersion numérique.....	107
6.6 Conclusion	112
Conclusion générale.....	114
Annexe.....	113
Bibliographie.....	120

INTRODUCTION GENERALE :

Le bruit caractéristique que produit une canalisation dans une installation hydraulique, lors de la fermeture brusque d'un robinet est bien connu de tous. Il est dû à la surpression engendrée dans la conduite par le passage brusque de la vitesse de l'eau, de sa vitesse initiale à zéro c'est le coup de bélier. Cet exemple est à l'origine de l'appellation "Coup de Bélier " qui est donné par extension à tous les phénomènes de variation de pression dans une conduite due au changement de vitesse du liquide transporté .Dans le cadre de la gestion et de l'exploitation des systèmes hydrauliques en charge les gestionnaires sont confrontés au problème récurrent du coup de bélier, qui nuit au bon fonctionnement de ces systèmes.

La fermeture d'un mécanisme de contrôle du débit à l'extrémité de la conduite forcée peut engendrer des pressions transitoires importantes .Les équations gouvernants ce phénomène de débit instable, l'équation de continuité et de mouvement, sont résolues par la méthode des caractéristiques

Dans l'optique d'une meilleure compréhension du phénomène et des paramètres intrinsèques le caractérisant, on se propose dans le cadre de ce travail d'étudier le régime transitoire par la méthode des caractéristiques avec calcul d'erreurs et ceci sera présenté en six parties.

Dans la première partie on donne un aperçu bibliographique des différents travaux existants ainsi qu'une analyse du régime transitoire où l'on développe ainsi les équations régissant le phénomène en appliquant le théorème de conservation de la masse, et le théorème de la quantité de mouvement. Dans la deuxième partie on examinera la célérité de propagation d'onde, paramètre fondamental caractérisant le régime transitoire pour diverses considérations

La troisième partie traitera en premier les différentes méthodes d'analyse du coup de bélier et on choisira dans la quatrième partie la méthode des

caractéristiques qui est la méthode la plus adaptée pour modéliser le phénomène étudié.

En application on étudie le régime transitoire engendré par la manœuvre d'un robinet-vanne placé à l'extrémité aval d'une conduite à écoulement gravitaire en charge et ce ,après transformation des équations de Saint venant.

Enfin dans la dernière partie nous présenterons l'étude des erreurs dues à la méthode des caractéristiques et ce lorsque les caractéristiques n'aboutissent pas aux nœuds de calcul, et ce par interpolation mathématique où quelques exemples seront donnés.

CHAPITRE 1 :

Présentation du régime transitoire

Chapitre 1 : Présentation du régime transitoire

1-1 Généralités :

L'écoulement est dit transitoire lorsque les paramètres hydrauliques, caractérisant l'écoulement, à savoir la vitesse, la pression et les propriétés du fluide sont des fonctions du temps et de l'espace. à titre d'exemple, on peut écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial X} \neq 0, \frac{\partial U}{\partial X} \neq 0, \frac{\partial P}{\partial t} \neq 0, \frac{\partial U}{\partial t} \neq 0$$

Avec :

U : Vitesse d'écoulement dans la conduite

P : La pression. Interne régnant dans la conduite

ρ : masse volumique de l'eau à température constante

Le phénomène transitoire peut se manifester soit dans un canal à ciel ouvert ou bien dans une conduite en charge, par accroissement ou décroissement du débit. Il est défini comme étant un régime variable, qui peut se manifester entre deux régimes stationnaires. La variation des paramètres hydrauliques peut être subite ou lente en fonction de l'accroissement ou du décroissement du débit d'écoulement.

En pratique le régime transitoire est à l'origine de plusieurs causes couramment rencontrées en pratique à savoir :

-l'écoulement dans les réseaux d'alimentation en eau potable à la suite d'une manœuvre simultanée des robinets de prise d'eau.

- les démarrages et les arrêts inopinés des pompes refoulant dans un réseau.
- les écoulements dans les machines hydrauliques à puissances variables.
- le phénomène du coup de bélier qui est une phase du régime transitoire où les paramètres modificateurs (pression et vitesse) sont prépondérants.

1-2 Aperçu bibliographique sur le régime transitoire :

A travers l'aperçu bibliographique, plusieurs travaux antérieurs ont eu lieu et ont donné suite à des résultats appréciables où de nombreuses méthodes numériques ont fait l'objet d'application pour la résolution des systèmes d'équations différentielles régissant le phénomène transitoire d'une manière générale.

L'analyse des écoulements transitoires dans les tuyauteries, le but communément recherché est le contrôle des ondes de pression pour protéger les éléments des conduites contre les surpressions et les dépressions qui apparaissent. Dans l'analyse du phénomène transitoire, on peut considérer une variation lente du débit et de la pression dans la conduite en admettant que la loi d'évolution de l'écoulement est donnée d'une façon approchée par l'équation régissant les mouvements non permanents. Dans ce cas, le fluide est supposé incompressible et la conduite indéformable : Les paramètres hydrauliques tels que le débit, la vitesse, et les accélérations sont identiques en un instant donné en tout point de la conduite ; C'est le mouvement dit en masse qui est considéré par hypothèse lors des dimensionnements des cheminées d'équilibre [1], qui sont abandonnées à l'heure actuelle.

Couramment en pratique, dans les réseaux d'eau potable, on constate une variation rapide des écoulements, provoquant ainsi un gradient de débit ou de pression important. Dans cette situation, la déformation de l'enveloppe de la conduite et la compressibilité de l'eau sont à considérer nécessairement dans le temps et dans l'espace. Cette variation n'est pas constante et se présente sous

forme d'onde : on a donc affaire à un mouvement dit d'ondes (ou coup de bélier) qui peut être croissant ou décroissant suivant la loi de la manœuvre de la vanne

Dans toute forme, l'analyse du régime transitoire nécessite comme base d'étude commune :

-l'équation de continuité.

-l'équation du mouvement.

Dans ce travail, on s'intéresse au cas réel c'est-à-dire que la considération de la compressibilité de l'eau et la déformation de la continuité est loin d'être négligée.

Dans ce domaine, plusieurs chercheurs se sont penchés sur les problèmes instationnaires liés aux écoulements, ainsi qu'aux problèmes de propagation d'ondes. Au début du siècle, MANABREA (1858), JOUKOVSKI (1898), et par la suite ALLIEVI (1903), ont étudié les phénomènes du régime transitoire et plus particulièrement le coup de bélier dans les installations de pompage suite aux arrêts et aux démarrages des pompes. Plus tard, ALLIEVI (1928) et Quick (1927), ont publié des abaques, pour simplifier la détermination des surpressions produites dans une conduite par la fermeture d'un clapet. Ces travaux antérieurs ont permis par la suite à ANGUS (1935,1938) et Sch .BERGERON (1950) de mettre au point une méthode de résolution graphique .Une procédure numérique s'appuyant sur la méthode des caractéristiques a été élaboré par les contributions de PARMAKIAN (1963) et WYLIE et STREETER (1967) et (1993).

CARON (1986) a établi un modèle numérique en étudiant le diagnostic du coup de bélier sous l'effet des pertes de charge dues au clapet.

Cette procédure n'a cessé d'être élargie et consolidée pour rendre compte des divers phénomènes qui accompagnent le passage des ondes de coup de bélier dans les tuyauteries .Une étude du coup de bélier vise donc à déterminer si la

pression dans l'ensemble d'un système est à l'intérieur des limites prescrites suite à une perturbation de l'écoulement.

Cependant le calcul du coup de bélier a pour rôle de vérifier la tenue des conduites de caractéristiques choisies. Néanmoins, il n'existe pas de méthode directe permettant le dimensionnement des conduites tout en tenant compte du coup de bélier [2].

En effet, certains choix judicieux, à l'étape de dimensionnement préliminaire, peuvent minimiser l'étendue d'un éventuel problème de coup de bélier et donc réduire le coup du système anti-bélier.

La théorie du coup de bélier considère, jusqu'à maintenant que la poussée extérieure sur la conduite est nulle. Or en réalité, ce n'est pas toujours le cas pratiquement, vu que les réseaux d'eau sont enterrés, et où le régime transitoire est fréquent. Le comportement mécanique du sol agira certainement sur la déformabilité de l'enveloppe de la conduite et par conséquent la modification de la célérité d'onde (SALAH B.)2002 [3]

CUNGE et WEGNER [4], depuis 1965, avaient proposé l'artifice de la pente piézométrique, permettant d'effectuer le passage dans les deux sens entre un écoulement à surface libre et un écoulement en charge. Cet artifice ne permet pas toutefois, une fois l'écoulement complètement en charge, de résoudre des problèmes à fortes variations d'inertie, comme les coups de bélier. De plus dans le passage de l'écoulement en charge à l'écoulement à surface libre, cet artifice donne lieu parfois à des indéterminations nécessitant des altérations successives pour déterminer le niveau de la surface libre.

En analysant cet artifice, NGUEN TRIEU DONG[5] a proposé une méthode qui, en tenant compte de la compressibilité du fluide et de l'élasticité éventuelle de la conduite permet de calculer le passage local de l'écoulement à surface libre à l'écoulement en charge (ou vice versa) dans une conduite soit en écoulement partiellement à surface libre et partiellement en charge (une partie de la conduite est à surface libre, une partie est en écoulement en charge), soit

les ondulations de la surface libre quand l'écoulement est fluvial et complètement à surface libre , soit les ondes de coup de bélier quand l'écoulement est en charge .

Les recherches entamées par B .BAHRAR (1998) [6] sur la modélisation du coup de bélier avec prise en compte du comportement réel de la conduite, ont été menées avec un minimum d'hypothèses tant sur l'écoulement du fluide que sur le comportement de la paroi ou sont également prises en compte les déformations de flexion et de cisaillement ainsi que les effet dynamiques liés à l'inertie de la paroi.

L'analyse des écoulements transitoires en conduite est traditionnellement conduite par voie numérique .Dans ce cas, H.A.BASHA B.G.KASSAB (1996) présentant une solution analytique approchée du problème non linéaire des écoulements non permanent en conduite. Les équations de continuité et de quantité de mouvement sont combinées pour donner un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires hyperboliques dont une solution approchée est obtenue à partir d'une méthode de perturbations appelée « expansion delta ».

Dans ses travaux de thèse, E. HADJ .TAYEB (1977) [7] a élaboré un algorithme de calcul des écoulements transitoires en conduite dans les mélanges de liquide et de gaz et a montré que la méthode de Lax .Wendroff est la seule qui puisse être appliquée à tous les problèmes de régime transitoire de mélange, avec ou sans échange de masse, et que cette méthode est pratique et économique quand à son application. Dans le domaine de l'étude des régimes transitoires, G COMBES et J.ZAOUI [8] ,1967, ont étudiée l'analyse des erreurs introduites par l'utilisation pratique de la méthode des caractéristiques dans le calcul du coup de bélier.

1-3 Analyse du régime transitoire dans une conduite en charge :

En considérant, dans une conduite, deux variables dépendantes, le débit Q et la pression P fonction de l'espace X et du temps t , et les principes de

conservation de la masse et de la quantité de mouvement, il est possible de définir un système à deux équations aux dérivées partielles pour décrire le comportement physique du système eau-conduite. Ces équations dérivent à partir de l'application de deux lois principales à savoir : [9]

1-3-1. Equation de continuité :

Avant d'aborder le raisonnement, il est préférable de rappeler certains résultats de mécanique des matériaux et les utiliser pour déterminer les contraintes dans les tuyaux sous pression. Dans ce cas la loi de Hooke permet d'écrire :

$$\xi_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \quad 1.1$$

$$\xi_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \quad 1.2$$

σ_1 et σ_2 , désignent les contraintes longitudinale et radiale.

ξ_1 et ξ_2 , désignent les déformations correspondantes .

E , désigne le module de Young du matériau de la conduite.

ν , désigne le coefficient de Poisson du matériau de la conduite

On exprime les contraintes σ_1 et σ_2 .comme suit :

a-contrainte σ_2 :

On considère une conduite de diamètre interne « D » et d'épaisseur « e ». Au cours d'un écoulement en charge, la pression interne « P » qui règne, alors l'équilibre sur la demi –circonférence. (Figure N°1.1) donne

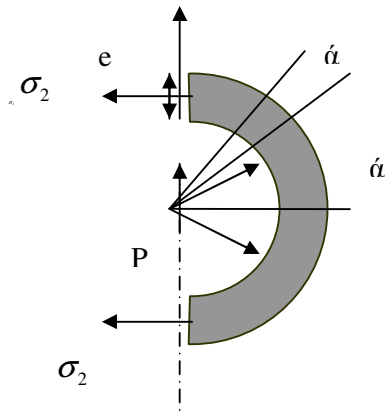


Figure N°1.1: forces et contraintes radiales dans un tuyau

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P \cdot \cos \alpha \, dS = 2 \cdot \sigma_2 \cdot L \cdot e \text{ , puisque } dS = L \cdot r \cdot d\alpha \text{ , on aura :}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P \cdot L \cdot r \cdot \cos \alpha \, d\alpha = 2 \cdot \sigma_2 \cdot L \cdot e \text{ en intégrant cette équation on obtient :}$$

$$\text{La contrainte engendrée } \sigma_2 = \frac{P D}{2 e} \quad 1.3$$

b- contrainte σ_1 :

Pour la détermination de cette contrainte, différents cas sont à considérer :

- Premier cas : Si la conduite a suffisamment de joints, c'est le cas pratique d'ailleurs on peut considérer qu'il n'y a ni contraintes, ni déformation longitudinales et que les éléments cylindriques successifs sont indépendants entre eux (donc $\xi_1 = 0$).

En remplaçant dans l'équation 1.1, on obtient, $\sigma_1 = 0$ et , $\sigma_2 = \frac{P D}{2 e}$: On aura

$\nu = 0$ Dans ce cas, ν n'est pas alors le module de Poisson du matériau proprement dit, mais son équivalent pour la canalisation globale.

Deuxième cas : La contrainte longitudinale doit être prise en compte. Elle dépend dans ce cas de la façon dont la conduite est ancrée aux extrémités.

1/conduite ancrée aux deux extrémités : on a $\xi_1 = 0$ Par conséquent : $\sigma_1 = \nu\sigma_2$

2/conduite libre à une extrémité : La force qui s'exerce à l'extrémité de la conduite est égale à $\frac{P\pi D^2}{4}$, cette force s'exerce sur le périmètre entier du tuyau

πD , donc sur la surface πDe . La contrainte est donc $\sigma_1 = \frac{PD}{4e}$

qu'on peut écrire $\sigma_1 = \frac{\sigma_2}{2}$

Récapitulation :

- l'expression de la contrainte radiale : $\sigma_2 = \frac{PD}{2e}$
- l'expression de la contrainte longitudinale : $\sigma_1 = K\sigma_2$
- Le coefficient d'ancrage « K » peut avoir trois valeurs :

Cas (a) : conduite sans joints, libre à une extrémité $K = \frac{1}{2}$, $\sigma_2 = \frac{PD}{2e}$, $\sigma_1 = \frac{PD}{4e}$

Cas (b) : conduite sans joints, ancrée aux deux extrémités $K = \nu$, $\sigma_1 = K\sigma_2$, $\xi_1 = 0$

Cas (c) : conduite avec de nombreux joints $K = 0$, $\sigma_1 = 0$, $\xi_1 = 0$

On exprime l'équation de continuité en analysant les déformations à masse constante d'un volume de liquide entre les instants « t » et « t+dt » ; cette masse étant constante est égale à :

$$\rho V = \rho S dL \quad 1.4$$

Soit
$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{d(\Delta L)}{\Delta L} = 0 \quad 1.5$$

Avec ρ : La masse volumique du liquide

S : La section radiale

ΔL : La variation de longueur de l'élément liquide

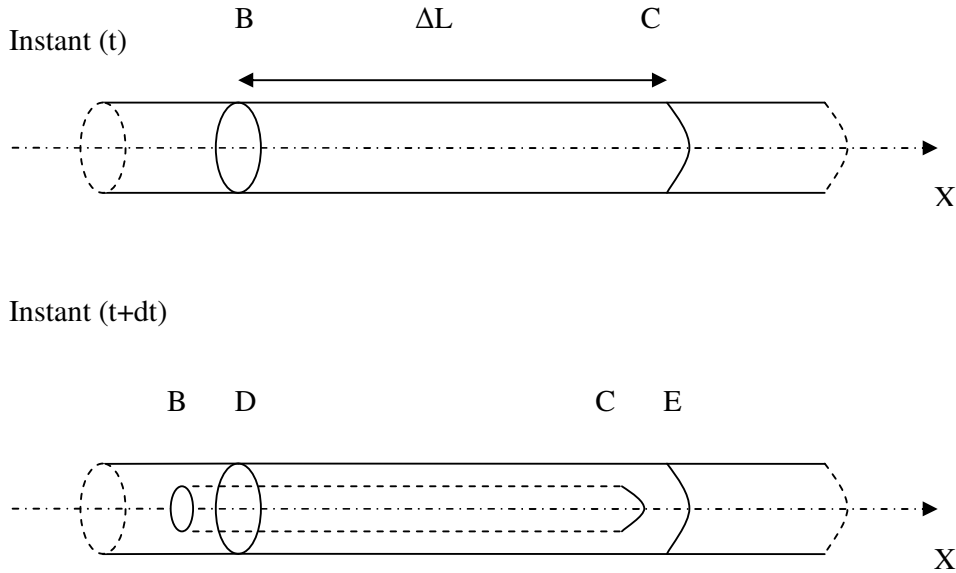


Figure N°1.2 : Déplacement d'un élément liquide.

En examinant la figure 1.2, on peut exprimer la variation de la longueur de l'élément du liquide :

$$\Delta L (t) = X_C - X_B \quad 1.6$$

$$\Delta L (t + dt) = X_E - X_D \quad 1.7$$

$$d (\Delta L) = (X_E - X_C) - (X_D - X_B) \quad 1.8$$

$$d (\Delta L) = U_C dt - U_B dt = (U_C - U_B) dt \quad 1.9$$

$$\text{D'où :} \quad d (\Delta L) = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \Delta L \cdot dt \quad 1.10$$

$$\text{et :} \quad \frac{d (\Delta L)}{\Delta L} = \frac{\partial U}{\partial x} dt \quad 1.11$$

Sachant que le module d'élasticité du fluide K_e est égal à $dP / \frac{d\rho}{\rho}$ on peut exprimer la variation de la masse volumique de l'élément liquide comme suit :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{K_e} \quad 1.12$$

On peut exprimer la variation de la section de l'élément liquide :

La section de l'écoulement liquide reste en permanence égale à celle de l'élément de la conduite qui l'entoure, on a donc :

$$\frac{dS}{S} = 2 \frac{dr}{r} = 2d\xi_2 = \frac{2}{E} (d\sigma_2 - \nu d\sigma_1) \quad 1.13$$

On a vu précédemment que: $\sigma_1 = K\sigma_2$

Si on pose $f = 1 - K\nu$ on obtient:

$$\frac{dS}{S} = 2 \frac{df}{f} \sigma_2 = \frac{D}{Ee} f dP \quad 1.14$$

Avec

S : la section de la conduite

En remplaçant chaque terme de l'équation (1.11), par leurs expressions données ci-dessus, on obtient l'équation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \left(\frac{1}{K_e} + \frac{D}{Ee} f \right) \frac{dP}{dt} = 0 \quad 1.15$$

On voit que le terme $\left(\frac{1}{K_e} + \frac{D}{Ee} f \right)$ dépend d'une part de la compressibilité de l'eau $\left(\frac{1}{K_e} \right)$, D'autre part des caractéristiques de la conduite $\left(\frac{D}{Ee} \right)$, et de la façon dont cette dernière est ancré f . Ce terme f est donc en général une caractéristique de l'installation sur laquelle on étudie le coup de bélier on pose donc :

$$\frac{1}{C} = \rho \left(\frac{1}{K_e} + \frac{D}{Ee} f \right) \quad 1.16$$

Ce qui donne comme nouvelle expression de l'équation de continuité

$$\rho \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{C^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial X} \right) = 0 \quad 1.17$$

L'équation (1.17) représente la première équation de Saint- Venant.

1-3-2 Equation dynamique :

Considérons un élément liquide de petit volume se déplaçant dans un cylindre
'voir figure N°1.3

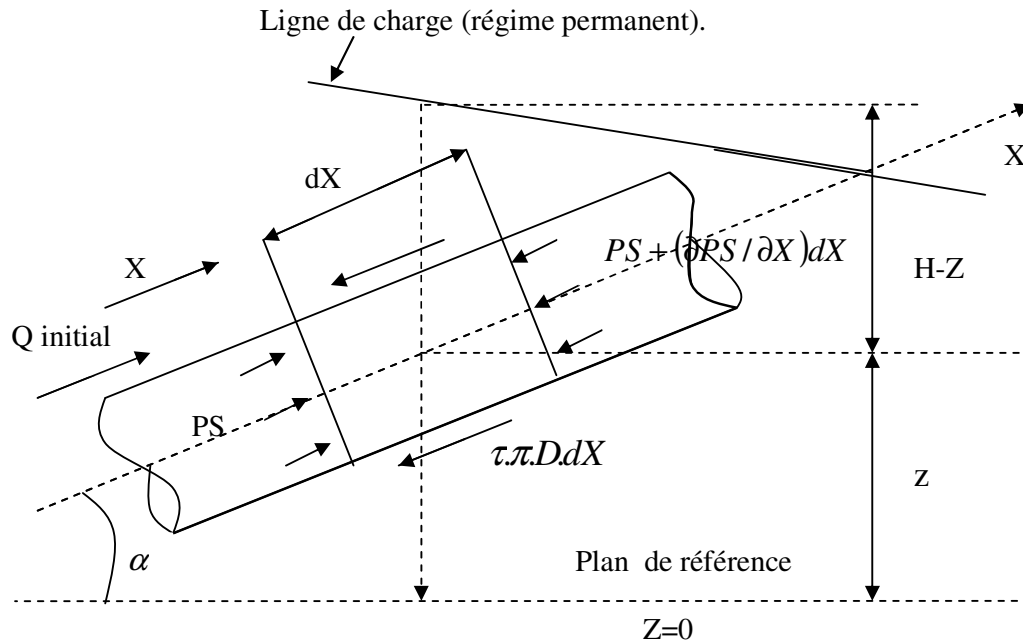


Figure N° 1.3 : forces exercées sur une tranche liquide.

On va suivre un petit élément de volume dans son mouvement et lui appliquer le théorème des quantités de mouvement :

$$\frac{d(mU)}{dt} = \sum F_{ex} \quad 1.18$$

Avec :

$\sum F_{ex}$ = Somme des forces extérieures

m = la masse de la tranche liquide

U = Vitesse d'écoulement

L'expression (1.18) indique que la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures appliquées à l'élément fluide.

$$\frac{d(mU)}{dt} = \frac{dm}{dt}U + m \frac{dU}{dt} \quad 1.19$$

La masse de l'élément liquide ne varie pas dans son déplacement on a : $\frac{dm}{dt} = 0$

Donc :

$$\frac{d(mU)}{dt} = m \frac{dU}{dt} = \rho S dX \frac{dU}{dt} \quad 1.20$$

Les forces extérieures appliquées et projetées sur l'axe de la conduite pour une couche d'eau d'épaisseur dx sont (Figure N° 1.3) ;

- La pression sur une face de la tranche dX : PS
- La pression sur l'autre face : $-(P + \frac{\partial P}{\partial X} dX)S$

La section S est supposée constante sur toute la longueur de la conduite donc, on néglige le terme $\frac{\partial S}{\partial X}$

- La composante du poids : $-\rho g S dX \sin \alpha$

Où α désigne l'angle entre l'axe de la conduite et l'horizontale

- Les frottements du liquide avec les parois de la conduite : $\tau \pi D dX$

τ : étant effort tranchant.

Notons que : $\frac{dZ}{dX} = \sin \alpha$ et $P = \rho g(H - Z)$

A partir de la figure N°1.3 et En négligeant l'énergie cinétique ($\frac{U^2}{2g}$)

on peut écrire :

$$\Sigma F_x = PS - (PS - dX \frac{\partial P}{\partial X} S) - \rho g S dX \sin \alpha - \tau \pi D dX \quad 1.21$$

On détermine d'abord le terme $\tau \pi D$

Les pertes de pression étant représentées par ΔP , données par l'expression suivante de Darcy Weisbach :

$$\Delta P = \rho g \lambda \frac{L U^2}{D 2g} \quad 1.22$$

Avec λ : Coefficient de frottement de Darcy Weisbach

Par conséquent la force de frottement peut être calculée par deux relations qui sont les suivantes :

$$f_r = \tau \pi D L \quad \text{Ou} \quad f_r = \Delta P \cdot \frac{\pi D^2}{4} \quad 1.23$$

D'où l'on déduit :

$$\tau \pi D = \frac{\pi D^2}{4} \rho g \frac{\lambda U^2}{2gD} = j \rho g S \quad 1.24$$

Avec $j = \frac{\lambda U^2}{2gD}$ qui est le gradient hydraulique

On injecte l'expression (1.24) dans l'équation (1.20) on obtient :

$$\Sigma F_{ex} = -\frac{\partial P}{\partial x} S dx - \rho \cdot g \cdot S \sin \alpha dx - j \rho g S dx \quad 1.25$$

En portant l'équation (1.25) dans l'équation (1.20), on obtient après simplification par : $\rho S dx$

$$\frac{dU}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = -g(\sin \alpha + j) \quad 1.26$$

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = -g(\sin \alpha + j) \quad 1.27$$

L'expression (1.27) représente la deuxième équation de Saint-Venant

On sait par ailleurs que :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial t} \cdot \frac{\partial U}{\partial X} \quad 1.28$$

ou bien

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial U}{\partial X} \quad 1.29$$

D'où on aura :

$$\frac{dU}{dt} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = -g(\sin \alpha + j)$$

Le système des équations de Saint Venant se résume ainsi comme :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial U}{\partial X} = -\frac{1}{C^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial X} \right) \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = -g(\sin \alpha + j) \end{cases} \quad 1.30$$

La première équation exprime le fait qu'une variation spatiale du débit entraîne une évolution temporelle de la pression; en effet, si, par exemple, il entre plus de débit dans un volume donné qu'il en sort, il faut que la pression augmente de façon à ce que le volume augmente s'il est élastique.

La deuxième équation est en fait l'expression de l'équilibre des forces selon la loi de Newton. Cet équilibre fait intervenir l'accélération du fluide par la variation temporelle du débit, les différences de pression sous forme de gradient et les forces de frottement causées par la vitesse du fluide sur les parois plus ou moins rugueuses de la conduite.

1-4 Conclusion :

Ce premier chapitre nous a permis de traiter un aperçu bibliographique sur les différents travaux antérieurs relatifs aux écoulements transitoires dans les conduites en charge. En se basant sur les équations de continuité et de mouvement, un raisonnement mathématique a permis d'étudier le phénomène transitoire en déduisant le système d'équations de Saint Venant. Ce dernier, ainsi établi, permet de traduire tous les mouvements transitoires.

Dans ce qui suit, ce système d'équations sera transformé pour obtenir des équations plus maniables et ayant un sens physique plus évident.

Néanmoins ces équations sont établies dans l'hypothèse que les calculs se font uniquement aux nœuds de calculs obtenus après discrétisation d'après l'étude bibliographique.

CHAPITRE 2:

**Célérité d'onde de pression
dans les conduites en charge.**

Chapitre 2 : Célérité d'onde de pression dans les conduites en charge.

1. Introduction :

La littérature montre que les ondes de pression diffèrent lorsqu'on se trouve dans un écoulement à surface libre ou dans une conduite en charge. Dans le premier cas, l'onde de pression se présente sous forme d'une déformation de la surface libre du liquide ; dans le deuxième cas, l'onde de pression est élastique et est générée par la déformation du système conduite-liquide. Ce dernier représente l'objectif de notre étude. Ce mouvement d'onde élastique peut être créé couramment soit par une manœuvre d'une vanne, un clapet anti-retour, ou par un arrêt et démarrage d'un groupe électro-pompe. Ainsi il se crée un régime transitoire qui se propage sous forme de tranches liquides. On remarque qu'au cours de ce phénomène, et de proche en proche, chaque tranche liquide va s'arrêter et provoquer le stoppage des tranches d'amont : on assiste à un mouvement dit d'accordéon. Ce phénomène de tranches liquides se déplace avec une certaine vitesse de l'organe perturbateur jusqu'à l'autre extrémité de la conduite. Il a été constaté que cette vitesse est beaucoup plus grande que celle créée dans le cas d'un régime transitoire à surface libre. Plusieurs auteurs se sont penchés sur l'étude de la célérité d'onde, et leur avis commun montre que ce paramètre dépend uniquement des caractéristiques du liquide et du matériau formant la canalisation. Ainsi ils ont déduit que la célérité d'onde dans les conduites en polyéthylène est plus faible que par rapport à celle engendrée dans les conduites d'autres matériaux. L'étude de la célérité des ondes de pression présente une utilité pratique importante notamment dans le dimensionnement mécanique des conduites (prise en compte de la pression instantanée), et de la commande à distance de la réserve d'incendie dans les réservoirs d'alimentation en eau potable.

2.2-Aperçu Bibliographique Sur La Célérité d'onde de pression :

La détermination de la célérité nous conduit à donner un aperçu bibliographique des travaux existants sur la détermination théorique de la célérité dans les conduites libres ensuite au cas de la célérité dans les conduites enterrées.

Vers les années 1808, Young [10] a estimé la vitesse de propagation d'une onde dans un tube élastique. Par la suite, en se basant sur l'idée de Young, Allievi [11] a étudié en 1903 et 1921, le coup de bélier à partir de la forme originale donnant la célérité de propagation de l'onde. Cette forme originale dépendant de la compressibilité du liquide et la déformabilité de la conduite ; s'annonce comme suit :

$$\frac{1}{C^2} = \rho \left(\frac{d\rho}{\rho dP} + \frac{dS}{S dP} \right) \quad 2.1$$

ρ : Masse volumique du liquide.

P : Pression interne du liquide.

S : Section droite de la conduite.

En supposant certaines hypothèses à savoir :

- Conduite à paroi mince et élastique, obéissant à la loi d'Hooke.
- conduite comportant plusieurs joints, avec les efforts longitudinaux considérés comme nuls.
- Température de l'eau supposée constante à 25 degré selçus

Allievi aboutit à travers son raisonnement à une expression plus compacte pour l'eau :

$$C = \frac{9900}{\sqrt{50 + \psi_1 \frac{D}{e}}} \quad 2.2$$

$\frac{D}{e}$: Rapport diamètre épaisseur.

ψ_1 : Coefficient qui tient compte de la nature du matériau formant la canalisation. On donne donc sa valeur pour différents matériaux dans le tableau N°2.1

Tableau N°2.1 : Valeur du coefficient ψ_1 en fonction de la nature du matériau

Matériaux	Coefficient (ψ_1)
Acier	0,5
Fonte	1
Amiante-ciment	4
Béton	5
Plomb	7
PVC (chlorure de polyvinyle)	35
PEHD (Polyéthylène haute densité)	70
PELD (Polyéthylène basse densité)	300

Joukovski [12] a utilisé sa théorie usuelle pour calculer la surpression et la célérité de propagation d'une onde qui s'appuie sur son travail précurseur publié dès 1898. Cette théorie prédit que les ondes de pression se propagent sans dispersion et sans dissipation à la vitesse constante :

$$C = \frac{C_0}{\sqrt{1 + \frac{K_e \cdot D}{E \cdot e}}} \quad 2.3$$

C_0 : exprime la vitesse du son dans le fluide.

K_e : exprime le module d'élasticité du fluide.

E : exprime le module de Young du matériau élastique de la conduite.

D : Diamètre intérieur de la conduite

e : Épaisseur de la conduite

Pour établir cette expression, Joukowski [12] avait supposé que la pression est uniforme, à chaque instant dans toutes les sections transversales de la conduite. Celle-ci subit un gonflement instantané représentant sa réponse statique aux variations de pression qui surviennent dans le fluide qu'elle véhicule.

Ces hypothèses négligent d'une part le mouvement radial du fluide et d'autre part l'inertie radiale, la flexion et la contrainte axiale dans l'épaisseur de la conduite.

Bien avant, Korteweg (1878) [13] avait étudié la propagation du train d'ondes sinusoïdales dans une conduite et, avait montré le caractère légèrement dispersif de ces ondes lorsqu'on prend en compte l'inertie radiale du fluide et la masse du tuyau.

L'expression de la célérité telle qu'elle est donnée par l'expression (2.3) ne peut être utilisée telle qu'elle en faisant tendre l'épaisseur « e » vers l'infini. Il faut alors revenir aux définitions des termes qui figurent dans la célérité, notamment utiliser la déformabilité de l'enveloppe sous la forme $\frac{dS}{SdP}$ et non $\frac{D}{E.e}$

Ainsi Jaeger, en considérant le cas d'une galerie en rocher brut,

on obtient l'expression de la célérité :

$$\frac{1}{C^2} = \rho \left(\frac{1}{K_e} + \frac{2(1+\nu)}{E} \right) \quad 2.4$$

ν : coefficient de Poisson du rocher.

Selon Jaeger, et tenant compte de la théorie des cylindres épais en résistance des matériaux, la célérité d'onde a été déterminée par considération de la déformation de la conduite en négligeant le coefficient de Poisson. Les efforts ont été négligés dans le sens longitudinal de la conduite. En rejoignant l'idée d'Allievi, Jaeger propose pour les conduites épaisses la relation suivante :

$$C = \left[\rho \left(\frac{1}{K_e} + \frac{2}{E} \cdot \frac{r^2 + R^2}{R^2 - r^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad 2.5$$

Halliwell[14] s'est intéressé pour le cas d'une galerie ayant deux revêtements le premier, interne, est une tôle d'épaisseur « e » et de module d'Young « E », le deuxième est un revêtement en béton, de module d'Young « E_b », qu'on considère cylindrique de rayon intérieur et extérieur « r » et « R », enfin du rocher d'épaisseur supposée infinie et de module d'Young « Er ».

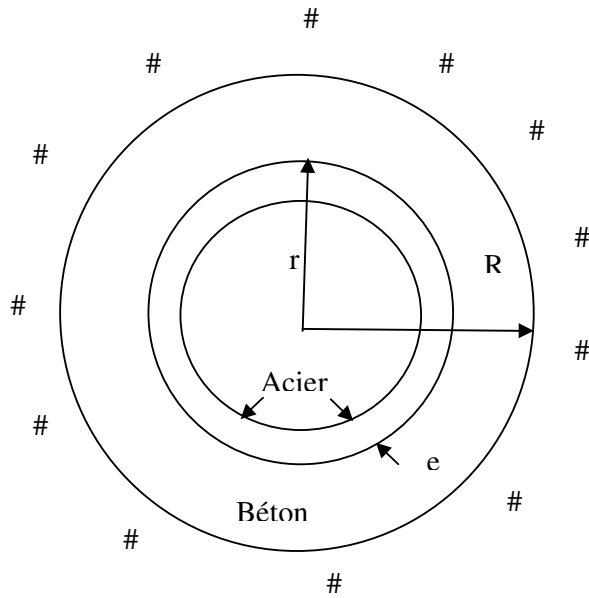


Figure N°2.1: Coupe schématique d'une galerie en rocher revêtu.

la célérité peut alors être mise sous la forme générale :

$$C = \left[\rho \left(\frac{1}{K_e} + \frac{2r}{Ee} f \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad 2.6$$

Avec f qui désigne le terme correctif $f = (1 - \nu^2)(1 - \lambda')$ 2.7

$$\text{et } \lambda^{\lambda} = \frac{(1-\nu)r}{(1-\nu)r + \frac{Ee}{E_b} \left[\frac{E_b(R^2+r^2(1-2\nu))+E_r(1-2\nu)(R^2-r^2)}{E_b(R^2-r^2)+E_r(r^2+R^2(1-2\nu))} \right]} \quad 2.8$$

On voit qu'il y a un seul coefficient de Poisson dans cette expression c'est en effet l'hypothèse faite par Halliwell pour établir ce résultat.

Jaeger lui n'a tenu compte que du module d'Young du rocher alors que Halliwell a introduit celui du béton.

Dans l'expression (2.7), on peut considérer deux hypothèses :

- Dans le cas d'un seul revêtement en acier, il suffit de faire $R = r$ dans l'expression (2.8) pour obtenir la valeur du terme « λ^{λ} » d'où on obtient :

$$f = \frac{(1-\nu^2)Ee}{E_r(1-\nu)r + Ee} \quad 2.9$$

Si on adopte pour E_r la valeur de E_b ce qui suppose le rocher amélioré par injection.

- Dans le cas d'un seul revêtement en béton, le même raisonnement que celui effectué dans le cas de deux revêtements conduit à l'expression suivante du terme correctif f :

$$f = \frac{(1+\nu)(R-r)}{r} \frac{E_b(R^2+r^2(1-2\nu))+E_r(1-2\nu)(R^2-r^2)}{E_b(R^2-r^2)+E_r(r^2+R^2(1-2\nu))} \quad 2.10$$

Dans la célérité d'onde dans les conduites en béton armé l'épaisseur est calculée en utilisant la méthode de l'épaisseur équivalente. Cette méthode sert à prendre une conduite simple équivalente en béton armé ou en acier à la place de la conduite de béton armé. L'expression de la célérité est celui d'une conduite simple, l'hypothèse considère que le béton et l'acier ont la même déformation. La force « F » provoquant une déformation ξ d'un élément de béton armé soumis à l'équilibre de la longueur unitaire et de section ($e_b + e_m$) sera donné par :

$$F = e_b \sigma_b + e_a \sigma_a \quad 2.11$$

Avec e_b : épaisseur du béton.

e_m : épaisseur du métal supposé uniformément répartie sur la longueur.

σ_b, σ_a : sont respectivement les contraintes dans le béton et dans l'armature.

Selon la loi de Hooke, on peut écrire :

$$F = \xi E_a (e_b + \eta e_a) = \sigma_b \cdot e_{eq}^b \quad 2.12$$

$$F = \xi E_a \left(e_a + \frac{e_b}{\eta} \right) = \sigma_a \cdot e_{eq}^a \quad 2.13$$

η désigne le rapport entre les modules d'élasticité du métal et du béton, varie entre 8 et 15.

E_a : module d'élasticité du métal.

On propose une solution approchée par détermination d'une épaisseur équivalente, puisqu'on a une conduite en béton avec des couches d'armatures :

- épaisseur équivalente en béton :

$$e_{eq}^b = e_b + \eta e_a \quad 2.14$$

- épaisseur équivalente en armature :

$$e_{eq}^a = e_a + \frac{e_b}{\eta} \quad 2.15$$

Jusqu'à maintenant le régime transitoire et plus particulièrement le coup de bélier dans les conduites en charge a été étudié en supposant que la charge externe exercée sur la conduite est nulle. Ce qui ne reflète pas la réalité, puisqu'en pratique les conduites sont toujours enterrées.

Il en résulte certainement une modification sur le comportement de la célérité d'onde de pression sous l'effet du sol, la source la plus disponible d'information est le travail de B. Salah (2002) qui a étudié les divers cas complexes qu'on rencontre en pratique. Nous allons ici donner simplement les résultats obtenus

par l'auteur en se basant sur deux hypothèses : hypothèse de la raideur du sol et hypothèse de la charge de la précontrainte.

- Hypothèse de la raideur du sol :

En analysant tous les travaux antérieurs sur la célérité d'onde, notamment ceux de Jaeger et Halliwell ; B. Salah [2] a mis au point un modèle mathématique permettant le calcul de la célérité d'onde dans les conduites enterrées moyennant cette hypothèse, en tenant compte des caractéristiques mécaniques du sol environnant. Ce modèle est à la fois valable pour les conduites simples et les conduites blindées.

Les résultats obtenus par l'auteur mettent en évidence l'effet du sol sur l'augmentation de la célérité de l'onde du coup de bélier. Le sol impose une raideur supplémentaire réduisant la déformabilité de la conduite et augmente ainsi la célérité. Le modèle présente l'avantage de la prise en compte du module de Poisson des différents matériaux (blindage, conduite, sol) ; ce n'est pas le cas dans les formules déjà existantes de Jaeger et Halliwell.

L'auteur a donné une expression générale qui est la suivante :

$$C = \left[\frac{\rho}{K_e} \left(1 + K_e \frac{2r(1-\nu_m^2)G}{(1+\nu_m)rE_c + E_m e_m G} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad 2.16$$

Avec :

$$G = \frac{E_c(1-\nu_c)(1-\nu_s)(R^2 + r^2(1-2\nu_c)) + E_s(1-\nu_c)^2(1-2\nu_c)(R^2 - r^2)}{E_c(R^2 - r^2)(1-\nu_m)(1-\nu_s) + E_s(1-\nu_c)(1-\nu_m)(r^2 + R^2(1-2\nu_c))}$$

r : rayon intérieur de la conduite.

R : rayon extérieur de la conduite.

E_b : Module d'Young du béton.

E_m : Module d'Young du métal.

E_s : Module d'Young du sol.

ν_c : Coefficient de Poisson du béton.

v_m : coefficient de Poisson du métal.

v_s : Coefficient de Poisson du sol.

e_m : Épaisseur du métal.

L'expression 2.16 permet de déterminer la célérité d'onde dans les conduites et les galeries rocheuses. Deux cas peuvent se présenter :

* Dans le cas d'une conduite simple enterrée et à paroi mince, il suffit de faire tendre R vers r dans l'expression 2.16 pour aboutir à la relation qui suit :

$$C = \left[\frac{\rho}{K_e} \left(1 + K_e \frac{2r(1-v_m^2)(1-v_s)}{(1-v_m^2)r.E_s + E_m e_m (1-v_s)} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad 2.17$$

Pour les conduites en PVC, il suffit de remplacer les caractéristiques du métal par celles du PVC dans l'expression (2.16).

* Dans le cas d'une conduite simple enterrée, mais à paroi épaisse, il suffit de Mettre $e_m = 0$ et $v_m = 0$ dans l'expression 2.16, et on aboutit à :

$$C = \left[\frac{\rho}{K_e} \left(1 + K_e \frac{2G}{E_c} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad 2.18$$

Avec :

$$G = \frac{E_c(1-v_s)(1-v_c)(R^2+r^2(1-2v_c)) + E_s(1-v_c)^2(1-2v_c)(R^2-r^2)}{E_c(1-v_s)(R^2-r^2) + E_s(1-v_c)(r^2+R^2(1-2v_c))} \quad 2.19$$

L'expression 2.16 est en principe plus précise que les formules existantes déjà proposées par Jaeger et Halliwell, comparativement aux hypothèses considérées par ces auteurs, l'expression 2.16 présente l'avantage de tenir compte du module de Poisson, le milieu externe et les différents matériaux constituant la paroi.

Rappelons que Jaeger considère uniquement le module de Poisson du milieu externe et néglige ceux de la conduite et du blindage. Ainsi Halliwell simplifie la formulation en prenant une valeur unique pour le module de Poisson pour les différents matériaux : $\nu = \nu_m = \nu_c = \nu_s$

- Hypothèse de la charge de précontrainte :

Dans cette hypothèse, B. Salah élabore un deuxième modèle mathématique donnant la célérité d'onde de pression en considérant l'effet du remblai à différentes épaisseurs du sol sur la conduite et trouve l'expression suivante :

$$\frac{1}{C^2} = \frac{\rho}{K_e} \left[1 + K_e (1 - \nu_m^2) \frac{2r}{E_m e_m} (1 + B(P - P_a)) \right] \quad 2.20$$

avec :

$$B = \frac{(1 + \nu_m^2) r^2}{E_m e_m^2} (1 - 2\nu_m)$$

P : pression hydrostatique

P_a : la charge due au remblai du sol.

2.3 Travaux antérieurs sur les modes d'ancrage des conduites en charge:

Lorsqu'un phénomène de propagation d'onde se produit dans une conduite, il résulte des déformations de celle-ci qui sont beaucoup plus radiales que longitudinales. Dans ce cadre, on montre comment prendre en compte les déformations et l'ancrage au niveau de la conduite, question sur laquelle les avis des auteurs suivants sont partagés :

En pratique, on a affaire le plus souvent à des conduites avec des épaisseurs différentes et soumises à différents efforts qui influent sur la forme géométrique de la conduite et par conséquent la célérité.

Allievi considère dans sa formule, l'hypothèse du fait que la conduite est à paroi mince, élastique et ne subissant aucun effort longitudinal. Ce qui n'est pas toujours le cas rencontré en pratique notamment dans les adductions d'eau potable et les réseaux de distribution où le régime transitoire est couramment engendré.

En s'inspirant sur les travaux d'Allievi, une généralisation a été faite sur la détermination de la célérité d'onde. Ainsi Jaeger s'intéresse pour le cas d'une conduite épaisse en négligeant le coefficient de Poisson et par conséquent les

efforts longitudinaux de la conduite. En se basant sur les mêmes travaux ci-dessus.

Parmakian [15] étudie seulement le cas d'une conduite à paroi épaisse avec prise en compte de l'allongement. Néanmoins, la divergence entre les deux auteurs réside dans le cas des conduites équipées de joints de dilatation.

En prenant en considération l'allongement et malgré la confusion explicative, Streeter Wyllie et Halliwell convergent vers le même point de vue quant à la détermination de la célérité d'onde.

En analysant tous ces travaux, notamment les points de divergence entre les auteurs, Massouh (1984) [16] s'intéresse sur les conduites minces et épaisses, avec une prise en compte de l'allongement, et trouve une expression assez appréciable caractérisant l'ancrage de ces types de conduites.

En analysant tous ces travaux antérieurs, B. Salah a examiné le cas des conduites à paroi mince et épaisse par considération de l'ancrage mais dans le cas enterré.

Certains auteurs en analysant les modes d'ancrage, ont proposé diverses formules donnant la célérité d'onde. Néanmoins, certains d'entre eux, comme le montre le tableau N° 2.2 suivant présentant des avis divergents sur les modes d'ancrage et par conséquent les paramètres composant la formule donnant la célérité d'onde.

Tableau N°2.2 : Recapitulation et comparaison des formules de la célérité d'onde.

<i>Auteurs</i>	<i>Conduites considérées</i>	<i>Considération de l'ancrage</i>	<i>Formules donnant la célérité</i>
<i>Allievi</i>	Paroi mince	non considéré	$C = \left[\rho \left(\frac{\Delta \rho}{\rho \Delta P} + \frac{\Delta S}{S \Delta P} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$
<i>Jaeger</i>	Paroi mince et épaisse	non considéré	$C = \left[\rho \left(\frac{\Delta \rho}{\rho \Delta P} + \frac{\Delta S}{S \Delta P} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$
<i>Parmakian</i>	Paroi mince	Considééré	$C = \left[\rho \left(\frac{d\rho}{\rho \Delta P} + \frac{dS}{S dP} + \frac{dL}{L dP} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$
<i>Halliwell</i>	Paroi mince et épaisse	Considééré	$C = \left[\rho \left(\frac{\Delta \rho}{\rho \Delta P} + \frac{\Delta S}{S dP} + \frac{\Delta L}{L dP} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$
<i>Massouh</i>	Paroi mince et épaisse	Considééré	$C = \left[\rho \varphi \left(\frac{d\rho}{\rho dP} + \frac{dS}{S dP} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$
<i>Djemili</i>	Paroi mince	Considééré	$C = \left[\rho \left(\frac{d\rho}{\rho dP} + \frac{dS}{S dP} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$
<i>B.Salah</i>	Paroi mince et épaisse enterrée	Considééré	$C = \left[\rho \left(\frac{d\rho}{\rho dP} + \chi \frac{dS}{S dP} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$

Commentaire :

A partir du tableau N°2.1, on remarque que certains auteurs ont travaillé avec le terme dS/SdP comme expression qui tient compte de l'ancrage et les auteurs ont utilisé dL/LdP pour le même but. Cependant, il est à signaler que Allievi, Parmakian et Massouh considèrent que la déformabilité de la conduite se fait librement. Ce qui ne reflète pas la réalité.

Jaeger, Halliwell et B. Salah considèrent que la déformabilité radiale de la conduite se fait sous l'action de la poussée externe due au rocher divergent avec la considération ou non du coefficient de Poisson. A fin de s'approcher de la réalité, B. Salah considère les différents coefficients de Poisson et confirme la courbe expérimentale donnée par M. Meunier traduisant ainsi l'augmentation de la célérité d'onde du coup de bélier dans les conduites enterrées.

2.4- Calcul du coefficient de déformabilité « f » : [09][14]

L'aperçu bibliographique montre que Halliwell considère trois cas pour le calcul du coefficient de déformabilité. Pour une conduite élastique ce coefficient est en fonction du type d'ancrage :

- **Premier cas** : conduite ayant un déplacement libre dans le sens longitudinal fixé à l'extrémité opposée à celle où se produit l'onde :

$$f = (1 - \frac{\nu}{2}) \frac{D}{D+e} + 2(1+\nu) \frac{e}{D} \quad 2.21$$

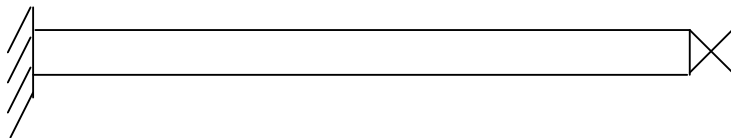


Fig. 2.2 : Conduite ancrée d'un seul coté.

- **Deuxième cas** : conduite ancrée aux deux extrémités, empêchant tout déplacement longitudinal.

$$f = (1 - \nu^2) \frac{D}{D + e} + 2(1 + \nu) \frac{e}{D} \quad 2.22$$

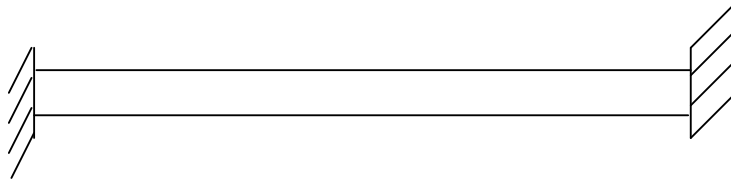


Fig. 2.3 : Conduite ancrée aux deux extrémités

- **Troisième cas** : conduite libre de se déplacer dans le sens longitudinal et équipée de joints de dilatation.

$$f = \frac{D}{D + e} + 2(1 + \nu) \frac{e}{D} \quad 2.23$$

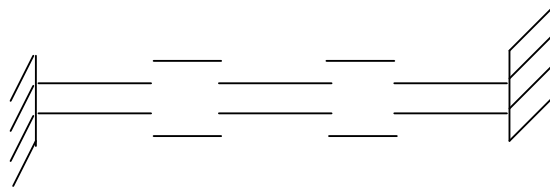


Fig. 2.4 : Conduite équipée de joints de dilatation.

La déformation de la conduite prend deux formes particulières extrêmes.

1- Pour une conduite à paroi mince où l'épaisseur « e » est beaucoup plus faible que le diamètre ($e \ll D$), le coefficient de déformabilité prend les valeurs suivantes ; d'après les relations précédentes :

$$1^{\text{er}} \text{ cas d'ancrage} : f = 1 - \frac{\nu}{2}$$

$$2^{\text{ème}} \text{ cas d'ancrage} : f = 1 - \nu^2$$

$$3^{\text{ème}} \text{ cas d'ancrage} : f = 1$$

D'une façon générale, on remarque que :

$$f = f_{\text{mince}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{e}{D}} + \frac{2e}{D}(1 + \nu) \quad 2.24$$

2- Pour le cas d'une conduite à paroi épaisse, comme exemple, une galerie rocheuse, la déformabilité ne dépend pas du coefficient de déformabilité.

Elle est liée directement au coefficient de Poisson, [17].

On peut écrire :

$$\frac{\Delta S}{S \Delta P} = 2 \cdot \frac{1 + \nu}{E} \quad 2.25$$

Et la célérité d'onde peut prendre la forme suivante :

$$C = \left[\rho \left(\frac{1}{K_e} + 2 \frac{1 + \nu}{E} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad 2.26$$

L'expression (2.25) montre que la célérité de propagation ne dépend que des propriétés mécaniques du matériau de la conduite et de celle du fluide.

2.5- Célérité d'onde dans les conduites polyéthylène :

Ces conduites sont plus utilisées, car elles résistent bien à la corrosion, avec une gamme de diamètres disponibles, et une perte de charge faible ; comme elles peuvent être fabriquées en grande longueur et montées sous forme de couronnes. L'étude de ces conduites dans le domaine du coup de bélier comporte des difficultés qui proviennent du comportement mécanique particulier de la section de ces conduites après leur stockage, on aura une section ovalisée de façon permanente, peu elliptique sous l'effet de la pression. D'autre part, la paroi manifeste un comportement mécanique complexe en raison de la viscoélasticité du polyéthylène. Pour les conduites en polyéthylène, le calcul de la célérité de propagation d'onde devient compliqué et incertain.

Donc, on est obligé de passer à l'utilisation de la méthode de gonflage pour mesurer la déformabilité de la conduite. La méthode du gonflage due à une idée de Comolet et expérimentée par Massouh pour le polyéthylène est donc très séduisante puisqu'elle ne nécessite qu'un simple manomètre.

En se basant sur la relation suivante :

$$C = \left[\rho \left(\frac{dP}{\rho dP} + \frac{dS}{S dP} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad 2.27$$

On considère une conduite de longueur "L" de section interne "S" remplie d'eau sous pression "P" et fermée aux extrémités, la masse d'eau dans la conduite est donc :

$$m = \rho SL \quad 2.28$$

Si l'on injecte ou on prélève une masse « Δm » supposée petite par rapport à « m », il se produit les variations suivantes :

$$\frac{\Delta m}{m \Delta P} = \frac{\Delta \rho}{\rho \Delta P} + \frac{\Delta L}{L \Delta P} + \frac{\Delta S}{S \Delta P} \quad 2.29$$

Pour les conduites ancrées, on néglige le terme $\frac{\Delta L}{L \Delta P}$ devant $\frac{\Delta S}{S \Delta P}$ dans ces conditions, on peut écrire l'expression de la célérité sous la forme approchée :

$$C = \left(\frac{\rho \Delta m}{m \Delta P} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad 2.30$$

Pour connaître la célérité de propagation dans la conduite, il suffit donc d'injecter ou de prélever des volumes d'eau de masse « Δm » connues et de mesurer la variation « ΔP » de pression qui en résulte.

Sur le plan pratique, on peut procéder de deux façons :

- Injection de la masse Δm appelée « méthode de gonflage ».
- Prélèvement de la masse Δm appelée « méthode de dégonflage ».

Afin de réduire l'erreur expérimentale due à la détermination de ΔP par différence entre deux valeurs mesurées, on construit la courbe (P, m) , la tangente de cette courbe permet de calculer « $\frac{\Delta m}{\Delta P}$ » par conséquent la célérité qui est donnée par l'expression (2.30).

Après l'injection de la masse « m », on enregistre par un capteur de pression placé aux extrémités du tuyau, l'onde de propagation pour pouvoir connaître la célérité réelle « C_{rl} » ainsi déterminée pour vérifier la célérité « C_0 » calculée à partir de la relation (2.30). Cette méthode n'est pas bien sûr utilisable pour les conduites comme l'amiante ciment qui ont des capacités d'absorption non négligeable.

2.6. Conclusion :

En établissant les différentes formules de la célérité d'onde nous avons montré les considérations prises par chaque auteur , telle que l'ancrage longitudinal le type de la conduite (mince ou épaisse , simple ou composé),ainsi que l'effet du remblai sur les conduites enterrées (l'augmentation de la célérité d'onde). On conclut que la célérité d'onde est donnée par l'expression (2.1) et que les autres formulations sont fonction des facteurs mis en jeu. Pour une meilleure estimation de la célérité, on introduit le terme $\frac{dL}{LdP}$ qui représente la déformabilité longitudinale. Ce dernier fait augmenter le coefficient de déformabilité, ainsi que d'autre facteurs (effet du remblai, influence des pièces spéciales...).

CHAPITRE 3:

Méthodes de solution du régime transitoire

Chapitre 3 : Méthodes de solution du régime transitoire

3.1 Introduction :

Dans ce chapitre on donne un aperçu descriptif de certaines méthodes décrivant le régime transitoire. Plusieurs méthodes numériques ont été développées, toutes basées sur les équations de Saint Venant qui forment un système d'équations différentielles partielles de 1^{er} ordre de type hyperbolique. Ces méthodes qu'elles soient graphiques, analytiques ou numériques, permettent toutes de quantifier le phénomène transitoire avec plus ou moins d'exactitude selon leurs hypothèses (les variations de pression et de débit dans le temps et dans l'espace) Parmi ces méthodes on peut citer :

Méthode arithmétique

Méthode graphique

Méthode algébrique

Méthode de différences finies

Méthode d'éléments finis

Méthode des caractéristiques

Pour les transitoires rapides des liquides engendrés dans une conduite, la méthode des caractéristiques est généralement considérée comme une méthode numérique jugée plus efficace et précise par rapport à d'autres.

Avant de décrire certaines méthodes on a jugé nécessaire de formuler la solution généralisée des équations du régime transitoire.

3.2 Solution généralisée du régime transitoire

Soit le schéma de la figure N°3.1 qui représente une conduite d'axe X soumise à un régime transitoire à l'intérieur. On désigne par F l'un des paramètres de l'écoulement (vitesse, pression, ...) portés par l'onde

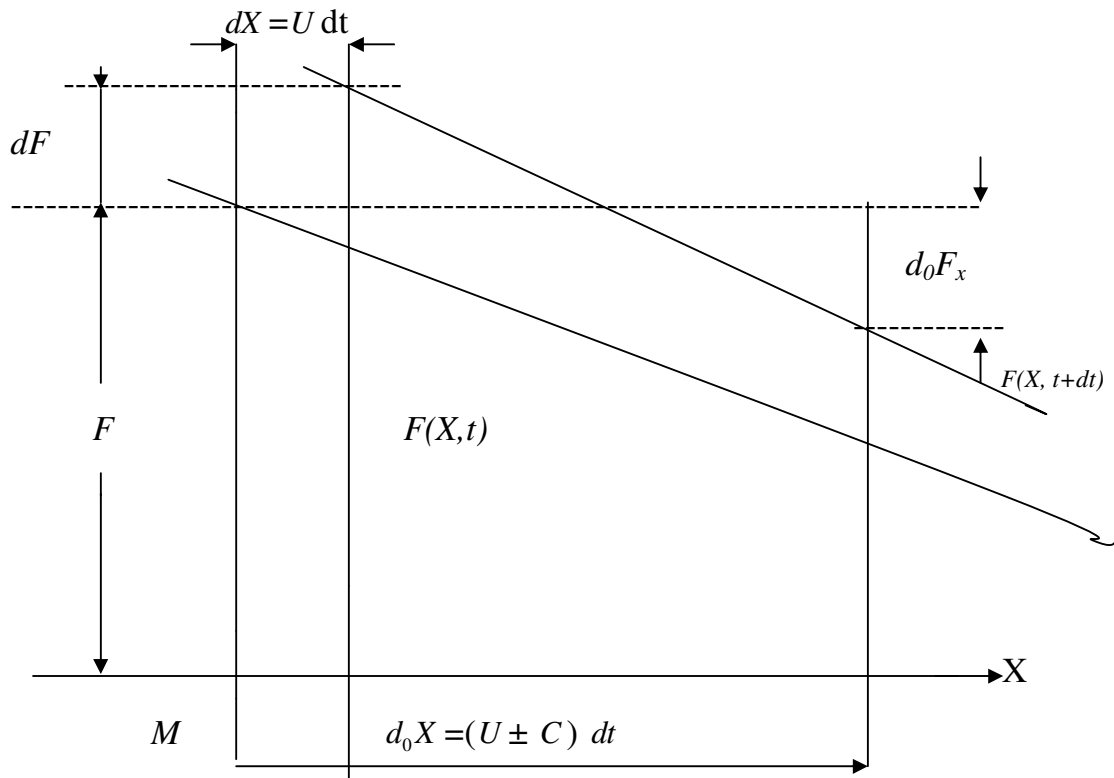


Figure N°3.1 : déplacement d'une onde

La répartition de F le long de la conduite à un instant t visualisée par la courbe $F(X, t)$, plus tard par la courbe $F(X, t+dt)$.

Par imagination, on dispose de plusieurs observateurs équipés d'appareils de mesure nécessaires et se propageant dans la conduite par leur propre célérité relative C mesurée par rapport à l'écoulement.

Si U est la vitesse absolue de l'écoulement, alors celle de l'observateur $U \pm C$, le signe + pour une propagation dans le sens de l'écoulement et le signe (-) pour le cas inverse .

Au point (X) et à l'instant t , la particule M du liquide se déplace à la vitesse U et possédant la quantité F du paramètre intéressé.

Et partant du point (X) à l'instant t l'observateur $C=0$ qui accompagne la particule M constatera une variation dF durant le temps dt et le déplacement $U dt$ soit

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + U \frac{\partial F}{\partial X} \right) dt \quad 3.9$$

Pour un observateur $C \neq 0$ durant le temps dt se déplace de ($U \pm C$) et constatera une variation d_oF soit

$$d_oF = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + (U \pm C) \frac{\partial F}{\partial X} \right) dt \quad 3.10$$

En retranchant ces deux équations on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \pm \frac{1}{C dt} (d_oF - dF) \quad 3.11$$

Ce qui permet de transformer les dérivées partielles en dérivées totales.

En appliquant cette équation aux paramètres, vitesse U et pression P , on obtient:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{1}{\pm C dt} (d_oU - dU) \quad 3.12$$

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{1}{\pm C dt} (d_oP - dP) \quad 3.13$$

La combinaison de l'équation 3.12 avec l'équation de continuité donne

$$d_oU - dU = \pm \frac{d\rho S}{\rho S} \quad 3.14$$

La combinaison de l'équation 3.13 avec l'équation dynamique donne.

$$dU = \frac{1}{\pm C \rho} (d_o P - dP) + g(\sin \alpha - i)dt \quad 3.15$$

En additionnant les équations 3.14 et 3.15 on trouve

$$d_o P \pm \rho C d_o U \pm \rho C g(\sin \alpha - i)dt = (1 \pm C \frac{d\rho S}{S dP})dP \quad 3.16$$

L'expression 3.16 représente l'équation différentielle aux dérivées totales.

3.4 Différentes méthodes

3.4.1 Méthode des caractéristiques [18]

Considérons l'équation de continuité et l'équation de mouvement sans frottement que nous multiplions par C/gS :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{C^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial X} = 0 \quad 3.17$$

$$\frac{C}{gS} \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + gS \frac{\partial H}{\partial X} \right] = 0 \quad 3.18$$

En combinant ces deux équations par addition et soustraction, nous obtenons:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[H \pm \frac{CQ}{gS} \right] \pm C \frac{\partial}{\partial X} \left[H \pm \frac{CQ}{gS} \right] = 0 \quad 3.19$$

Cette forme est égale à la dérivée totale par rapport au temps:

$$\frac{d}{dt} \left[H \pm \frac{CQ}{gS} \right] = 0 \quad 3.20$$

si :

$$\frac{dX}{dt} = \pm C \quad 3.21$$

Dans un plan X,t , l'équation 3.21 représente des courbes (ici des droites) sur lesquelles le système 3.20 est vérifié. L'intersection de deux de ces droites définit donc une solution du système d'équations (figure N°3.1).

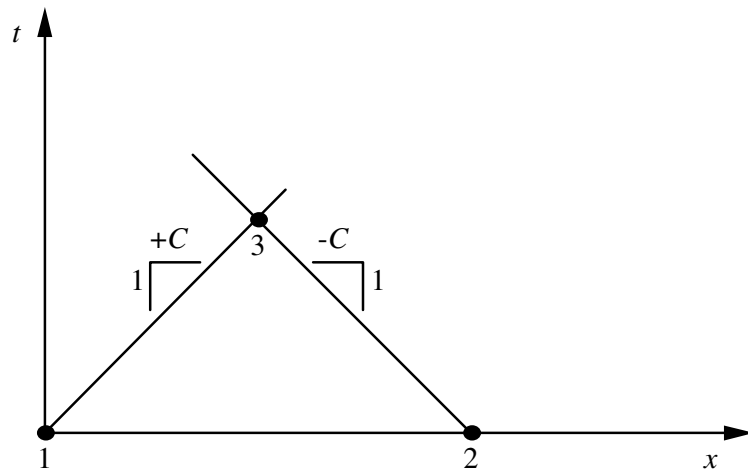


Figure N°3.2 :- Schéma de la méthode des caractéristiques.

Ainsi, si les points 1 et 2, situés au temps initial, représentent des positions où les valeurs des pressions et débits sont connus, alors il sera possible de calculer les valeurs au point 3, situé en $\frac{\Delta X}{2}$ et Δt en considérant une forme différentielle du système 3.20:

$$\frac{\Delta}{\Delta t} \left[H \pm \frac{CQ}{gS} \right] = 0 \quad 3.22$$

ce qui donne:entre les points 1 et 3:

$$H_3 + \frac{CQ_3}{gS} = H_1 + \frac{CQ_1}{gS} \quad 3.23$$

et entre les points 2 et 3:
$$H_3 - \frac{CQ_3}{gS} = H_2 + \frac{CQ_2}{gS} \quad 3.24$$

d'où:
$$H_3 = \frac{1}{2} \left[H_1 + H_2 + \frac{C}{gA} (Q_1 - Q_2) \right] \quad 3.25$$

et
$$Q_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{gS}{C} (H_1 - H_2) + (Q_1 + Q_2) \right] \quad 3.26$$

La méthode des caractéristiques ou plus exactement des équations aux caractéristiques déjà vu plus haut découle de l'équation de continuité et de l'équation de la dynamique. En effet les deux équations différentielles partielles régissant le phénomène transitoire sont transformées par la méthode des caractéristiques en quatre équations différentielles totales. Pour le calcul du coup de bélier par un programme informatique les équations aux caractéristiques sont exprimées en différences finies, pour un intervalle de temps spécifié. Toute fois l'analyse du coup de bélier par cette méthode peut se faire manuellement, néanmoins c'est une procédure de calcul extrêmement longue. Cette méthode présente certains avantages à savoir :

- Le critère de stabilité de la méthode est fermement établi, c'est à dire que la précision et l'exactitude des résultats sont assurées
 - les conditions aux limites sont facilement programmables.
 - les systèmes hydrauliques les plus complexes peuvent être manipulés facilement.(relativement à d'autres méthodes)
 - la programmation des équations est très aisée.
 - c'est une méthode assez détaillée qui permet d'avoir les caractéristiques de l'écoulement en n'importe quel point de la conduite et à n'importe quel temps
- D'autre part la méthode des caractéristiques nécessite l'emploi d'un schéma d'interpolation, lorsqu'un réseau multi-branches est composé de plusieurs conduites avec des propriétés très différentes, ou lorsque les termes non

linéaires des équations principales sont importants ou dans le cas des écoulements diphasiques.

3.4.2 Méthode des différences finies [18]

Cette méthode consiste à remplacer les opérateurs différentiels par des opérateurs basés sur des intervalles de temps et d'espace finis Δt et ΔX , puis à résoudre le système d'équations algébriques ainsi obtenu en tenant compte des conditions initiales et aux limites. Ainsi le système 3.17 et 3.18, devient:

$$\begin{aligned} \frac{H_i^{t+\Delta t} - H_i^t}{\Delta t} &= -\frac{C^2}{gS} \left(\frac{Q_{i+1}^t - Q_{i-1}^t}{2\Delta X} \right) \\ \frac{Q_i^{t+\Delta t} - Q_i^t}{\Delta t} &= -gS \left(\frac{H_{i+1}^t - H_{i-1}^t}{2\Delta X} \right) \end{aligned} \quad 3.28$$

Pour chaque position i sur l'axe X , on peut écrire ces deux équations en mettant en évidence les variables à évaluer au temps $t+\Delta t$. Il devient alors facile d'illustrer la méthode au moyen d'un chiffrier électronique. Cette méthode peut être utilisée pour résoudre n'importe quel problème d'écoulement non permanent. Elle est généralement appliquée dans les problèmes d'écoulement à surface libre non permanent, cependant elle peut servir pour résoudre les problèmes de coup de bélier (écoulement non permanent en charge).

Le domaine d'application de la méthode aux différences finies possède la possibilité de développer des schémas implicites aux différences finies centrées et explicites. Les schémas aux différences finies explicites admettent une interprétation par les équations caractéristiques (schéma de lax –Wendroff). on préfère le schéma explicite, puisque les équations qui interviennent sont non linéaires

Les schémas aux différences finies peuvent présenter des avantages certains lorsque la géométrie de problème est simple, l'inconvénient principal de ces schémas réside dans le fait de prendre en compte les conditions limites qui s'intègrent au contraire dans le cas de la méthode des éléments finis.

Ces schémas aux différences finies ont la réputation de dépendre du problème considéré si bien qu'il n'existe pas aujourd'hui de codes de calcul généraux utilisant le principe des différences finies. Le choix et la construction d'un schéma aux différences dépendent de plusieurs facteurs, telles que la précision, la stabilité et la meilleure incorporation d'importants principes physiques par exemple : les lois de conservation.

1/schéma explicite : [19]

Permettent de calculer les valeurs nouvelles de H et U en chaque point de calcul au temps $t + \Delta t$ en utilisant les valeurs connues au temps t des points de calcul situés dans le voisinage immédiat du point de calcul. a cet fin on évalue les valeur des dérivées $\partial U / \partial t$ et $\partial H / \partial t$ en calculant les valeurs des seconds membres des équations en ces différents points au temps t . pour un intervalle Δt de temps trop grand les résultats sont aberrants il s'agit donc la du phénomène d'instabilité numérique du schéma. Pour que les résultats soient corrects, il faut que la relation entre le pas d'espace et l'intervalle de temps en chaque point de calcul satisfasse à la conditions CFL du no de trois mathématicien : Courant, friedrichs et lewy exprimée en termes du nombre Courant :

$$C_r < 1$$

$$C_r = \frac{\Delta t (C + |U|)}{\Delta X}$$

$$C = \left(\frac{gS}{D} \right)^{\frac{1}{2}}$$

C_r : Nombre de Courant

C : Célérité des petites ondes

S : Surface

D : Diamètre

Soit la description synthétique du schéma de Lax. Wendroff :

Le système d'équation suivant :

Equation de continuité

$$\frac{\partial(S)}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial X} = 0 \quad 3.29$$

Équation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Q^2/S)}{\partial X} = 0 \quad 3.30$$

Les deux équations peuvent s'écrire synthétiquement :

$$\frac{\partial V_s}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial X} = 0 \quad 3.31$$

Où

- V_s est le vecteur solution $V_s = \begin{pmatrix} S \\ Q \end{pmatrix}$
- R , le vecteur des termes de flux : $R = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{S} + g \frac{S^2}{2} \end{pmatrix}$

R_h : rayon hydraulique au droit d'un profil.

La forme variationnelle du système 3.31 est donnée par :

$$W = \int_L \left(V_s^{t+\Delta t} - V_s^t \right) dX + \Delta t \int_L \left(\frac{\partial R}{\partial X} \Big|_{t+\frac{\Delta t}{2}} + G^t \right) dX = 0 \quad 3.33$$

avec

L : longueur du domaine étudié.

Le schéma de Lax- Wendroff comporte une étape de prédiction suivie d'une étape de correction. Ces deux étapes sont incluses dans une même boucle sur les éléments suivants le schéma de la figure N°3.1.

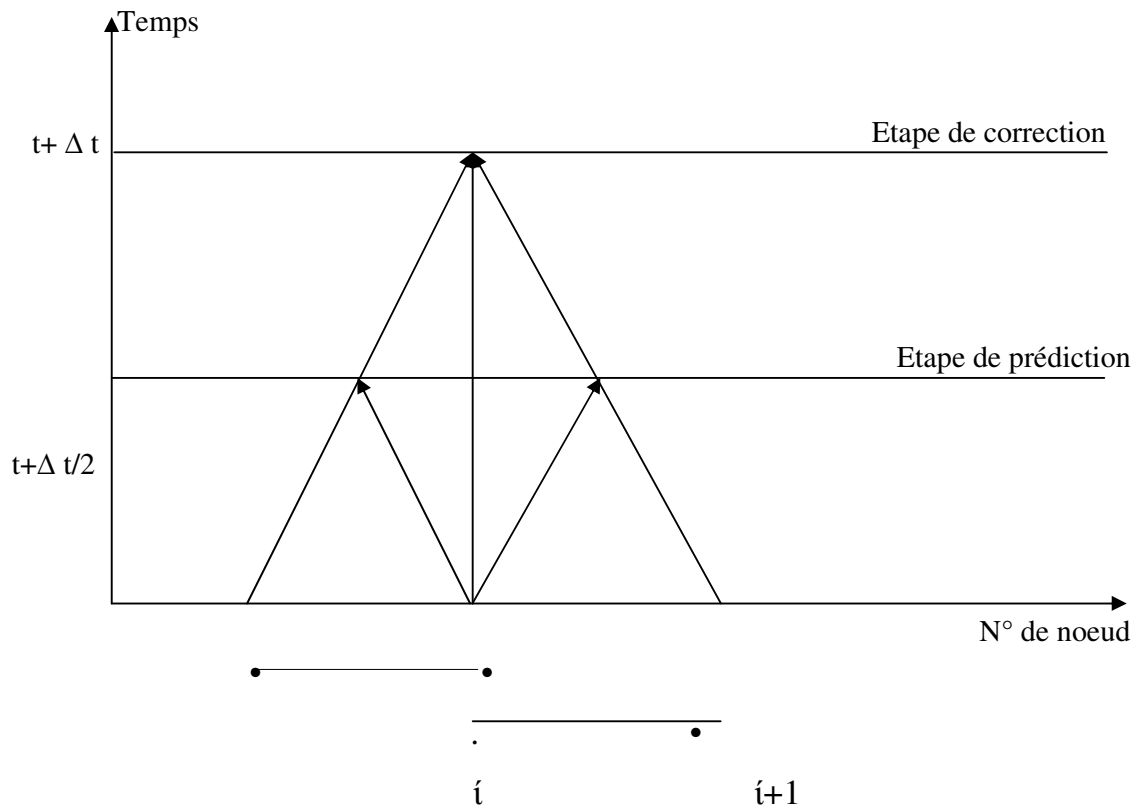


Figure N°3.3 : Schéma de Lax- Wendroff.

Etape de prédiction :

Les valeurs $v_s^{t+\frac{\Delta t}{2}}, R^{t+\frac{\Delta t}{2}}, G^{t+\frac{\Delta t}{2}}$ et sont moyennées par élément à l'instant $t+\frac{\Delta t}{2}$ comme suit, à partir des expressions 3.32 pour obtenir donc:

$$V_s^{t+\frac{\Delta t}{2}} = V_s^t - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial R^t}{\partial X} + Z^t \right)$$

Les termes de diffusion ne sont pas pris en compte à ce niveau.

Etape de correction :

La forme variationnelle faible de l'expression 3.33 est utilisée sur le domaine de longueur L :

$$W = \int_L \delta V_s \left(V_s^{t+\Delta t} - V_s^t \right) dX - \Delta t \int_L \frac{\partial \delta V_s}{\partial X} \left(V_s^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \bar{G}^t \right) dX + \left[\delta V_s \Delta t \left(\bar{G}^t + R^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right) \right]_{X=0}^{X=L} = 0$$

Avec $\bar{G}^t = S^t V^t \frac{(Q/S)}{\partial X}$ et δV_s la fonction de pondération de galerkine.

Les avantages que procure ce schéma sont :

- En premier lieu, les capacités de stockage nécessaire restent faibles puisque le schéma ne nécessite d'assembler que la seule matrice masse (devant le terme temporel) - par ailleurs, les deux premières étapes peuvent être assemblées dans une même boucle sur les éléments.

LAX et WENDROFF (1960) ont présenté un algorithme numérique à deux pas de précision d'onde permettant la résolution sur ordinateur de l'évolution transitoire des écoulements .L'établissement de cet algorithme est basé sur le caractère conservatif des équations aux dérivées partielles qui représentent l'écoulement ,ce qui présente l'avantage d'essayer de préserver les propriétés de conservation des quantités de masse de mouvement et d'énergie dans ces approximations aux différences .Ceci permet de minimiser l'erreur faite sur les

quantités de masse , de mouvement et d'énergie. Cependant si la procédure d'interpolation est performante à chaque maillage de points et pour chaque pas de temps sans se soucier si les distributions spatiales ont en besoins.

Les schémas explicites étudiés par M.H CHAUDRRY et M.Y.HUSSAINI sont représentés par la méthode de MAC –CORMACK (1971),le schéma de LAMBDA et le schéma de GABUTTI (1983).. Ces schémas sont introduits pour résoudre les équations différentielles, partielles hyperboliques quasi-linéaires décrivant le phénomène du coup de bélier en phase de fermeture dans une conduite.

2) schémas implicites :

Dans la méthode des différences finies, la conduite est divisée en tronçons et la résolution des équations se fait simultanément pour le système entier pour chaque pas de temps qui consiste à remplacer les dérivées partielles par des formules aux différences établies en des points intermédiaires entre le niveau de temps n et le niveau n+1.[20]

Le principe avantage de la méthode est que le pas de temps n'est pas limité au pas de temps courant pour la stabilité de la solution cependant ,la condition pas de temps –distance est un besoin dans la résolution de la majorité des écoulements transitoires à partir des équations de continuité et de mouvement :

$$H_x + \frac{Q_x}{gS} + \frac{\lambda Q^2}{2gDS^2} = 0$$

$$H_t + \frac{C^2}{gS} Q_x = 0$$

Si on applique le schéma implicite centré voir figure N°3.4

Les équations sont placées en différences finies, comme suit :

$$\frac{H_B' + H_B - H_A' - H_A}{2\Delta X} + \frac{Q_A' + Q_B' - Q_A - Q_B}{2gS\Delta t} + \frac{(Q_A + Q_B)^2}{8gDS^2} = 0$$

$$\frac{H_A' + H_B' - H_A - H_B}{2\Delta t} + \frac{C^2}{gS} \frac{Q_B' + Q_B - Q_A' - Q_A}{2\Delta X} = 0$$

Après réarrangement de ces équations on obtient

$$H_B' - H_A' + \frac{B}{C_r}(Q_A' + Q_B') = C_1$$

$$H_{B'} + H_{A'} + CrB(Q_{B'} - Q_{A'}) = C_2$$

Avec $B = \frac{C}{gS}$: impédance caractéristique

$$C_r = \frac{C\Delta t}{\Delta X} \quad \text{Nombre courant}$$

$$C_1 = -\frac{f\Delta X(Q_A + Q_B)^2}{4gDS^2} - (H_B - H_A) + \frac{B}{C_r}(Q_A + Q_B)$$

$$C_2 = H_A + H_B + C_r B(Q_A - Q_B)$$

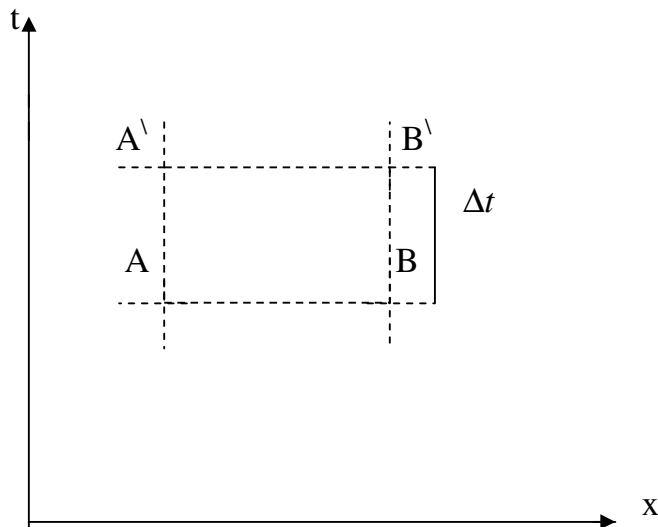


Figure N°3.4 : plan xt pour la méthode implicite

On suppose que les conditions aux points A et B sont connues le dernier est approximativement connu. Nous avons donc quatre inconnues pour les deux équations Deux équations sont valables pour chaque pas de temps en plus des conditions au limite.

3.4.5 Méthodes des éléments Finis : [20]

La méthode d'éléments finis a été trouvée largement acceptable dans différents problèmes d'écoulement, et a trouvé une large application dans le domaine des solides et les problèmes de mécanique des fluides cependant son succès dans l'informatique des transitoires dans les conduites n'est pas établi.

Il y a une motivation considérable d'utiliser cette méthode ; cependant, pour les applications utilisées prouvent une grande flexibilité des valeurs mesurées des différentes propriétés. La méthode des résidus mesurés doit être généralement utilisé. La fonction déterminée (fonction obtenue) est substituée normalement par l'équation différentielle qui n'est pas égale à la solution exacte ; la différence étant le reste. Ce résidu, multiplié par la fonction mesurée, égale au résidu mesuré. La méthode d'éléments finis essaye de tendre les résidus mesurés vers Zéro dans un sens large. La particularité de choisir la fonction de mesure prouve les différences des résidus mesurés.

Les fluides transitoires dans lesquels les écoulements variables sont continus et non sujets à un changement rapide doivent être complètement modélisés.

La méthode des éléments finis a été également considérée par J.P HUFFEUS et D. KHALETZKY (1984) pour résoudre les équations de Navier Stokes, en utilisant la méthode des caractéristiques.

3.5. Conclusion :

On peut dire que la méthode des caractéristiques est beaucoup plus maniable et efficace en ses avantages suscités bien qu'elle a ses faiblesses.

Pour la méthode de différences finies on peut citer les schémas de Lax-Wendroff –de Mac – Cormack , peu utilisés actuellement .

La méthode des différences finies est moins précise que la méthode des caractéristiques, du fait que son exactitude est conditionnée par la stabilité de ses schémas de calcul

La méthode des caractéristiques demeure actuellement très utilisée pour le calcul des écoulements non permanents dans des systèmes très complexes.

Les faiblesses de la méthode sont caractérisées par un cumul d'erreurs résultant de l'arrondissement des longueurs partielles entre les nœuds de calcul le long de la conduite

CHAPITRE : 4

Modélisation du coup de bélier

Chapitre 4 : Modélisation du coup de bélier

4.1 Introduction :

Un modèle mathématique est par définition, une conceptualisation de la réalité que nous nous créons une image incomplète et partielle, comprenant des caractéristiques, des attributs de la réalité qui nous intéressent en particulier ou que nous avons la chance ou la possibilité de connaître.

La modélisation mathématique est devenue une approche classique dans le domaine, qu'il s'agisse d'élaborer des projets d'installation ou de les gérer, une fois construites

Les applications classiques concernant des réseaux destinés à transporter l'eau (réseau d'irrigation, conduites forcées d'usine hydroélectrique, réseau d'eau potable). Ces réseaux peuvent être très complexes soit du point de vue topologique, soit du point de vue des éléments qu'ils contiennent.

Dans les systèmes hydrauliques en charge, les variations de pression causées par des changements de régime plus ou moins rapides, voire brusques, entraînent des contraintes sur le matériel qui dépassent largement celles du régime statique ou permanent. Le dimensionnement d'une ligne d'adduction gravitaire ou par refoulement se trouve donc affecté par ces valeurs extrêmes. C'est d'autant plus vrai dans le cas des stations de refoulement des eaux usées puisque leurs pompes sont fréquemment et périodiquement démarrées et arrêtées dans des conditions contrôlées. De plus, en situation d'urgence, ces systèmes sont soumis à des conditions extrêmes auxquelles ils doivent, dans la mesure du possible, résister.

Une analyse des différents régimes transitoires permettra de déterminer les conditions de dimensionnement ainsi que les mesures de protection pour les cas

exceptionnels. Compte tenu de la complexité du phénomène, il n'existe pas de solutions analytiques complètes permettant de résoudre le problème. Des méthodes approximatives, graphiques ou numériques, ont donc pris le relais pour permettre aux ingénieurs de quantifier ce type de phénomènes. La disponibilité croissante de la puissance de calcul des ordinateurs à un coût décroissant a permis de développer des outils numériques de simulation dont la précision et la fiabilité sont déjà fort acceptables en autant que l'on respecte les conditions d'utilisation.

Les objectifs de ce chapitre sont donc:

- a) examiner les concepts de base de la modélisation des transitoires hydrauliques,
- b) définir les conditions d'utilisation d'un tel modèle
- c) considérer l'exploitation surtout en matière de protection contre les effets néfastes des variations de pression.

4.2. Phénomène du coup de bélier

4.2.1. Définition

Le coup de bélier étant un cas particulier du régime transitoire, est un phénomène oscillatoire qui se manifeste dans les conduites en charge à écoulement gravitaire ou par refoulement.

On entend aussi sous le terme « coup de bélier » un écoulement non permanent du liquide accompagné des variations pratiquement sensibles de la pression qui peuvent devenir dangereuses pour la tuyauterie. Ces variations résultent d'une perturbation des conditions permanentes d'écoulement.

C'est le nom que l'on donne à une onde de choc hydraulique, lorsqu'un liquide non compressible comme l'eau, est stoppé net dans une canalisation.

Autrement dit, c'est l'arrêt brutal de la circulation de l'eau lorsqu'un robinet (ou tout autre appareil) se ferme.

4.2.2. Risques dus aux coups de bélier

Les conséquences du coup de bélier peuvent être néfastes elle deviennent de plus en plus dangereuses à mesure que les paramètres modificateurs deviennent importants (variation de pressions et de débits dans le temps).

Ces phénomènes se produisant dans une conduite en charge, peuvent provoquer des risques à la suite d'une dépression ou surpression engendrée par les manœuvres brusques. [18],

a. Cas de surpression

C'est une conséquence du coup de bélier engendrée par une pression importante se produisant à la suite d'une fermeture instantanée ou rapide d'une vanne de sectionnement ou bien à la suite d'une dépression causée par l'arrêt brusque d'une pompe. Si la pression totale c'est-à-dire la pression en régime permanent majorée de la valeur de surpression due au coup de bélier dépasse la pression maximale admissible des tuyaux il y a risques de rupture de ces derniers et déboîtement des joints (les anneaux d'étanchéité seront délogés).

b. Cas de dépression

C'est une conséquence du coup de bélier engendrée par l'apparition d'une pression relative négative, à la suite d'un arrêt brusque d'une pompe ou d'une ouverture instantanée d'une vanne de sectionnement. Si cette pression devient inférieure à 10m CE il se produit une poche de cavitation. Si le profil en long de la canalisation est déformable la canalisation peut être aplatie par implosion et les joints peuvent être aspirés. Le phénomène de cavitation une fois apparu peut provoquer la détérioration de la couche d'enduit intérieur du tuyau.

C. Fatigue de la canalisation

En régime transitoire les alternances des surpressions et dépressions qui sont une conséquence inévitable du phénomène provoquent la fatigue pour le matériau de la canalisation même si leur amplitude est faible.

4.3. Description des phénomènes physiques en jeu

4.3.1. État d'équilibre d'un système hydraulique

Les phénomènes transitoires hydrauliques apparaissent lorsque l'équilibre des forces agissant sur un système est modifié. Quand un liquide est en mouvement dans une conduite et que ce mouvement ne varie pas dans le temps, il y a un état d'équilibre permanent. En fait, il y a équilibre entre l'énergie disponible (ou potentielle) et les énergies dues au mouvement (cinétique) et perdues par le frottement. Ce qui définit un mouvement permanent. Cette vision est macroscopique car, à une échelle plus petite, on observe que les vitesses fluctuent constamment autour d'une valeur moyenne, c'est une manifestation de la turbulence. Pour les besoins de l'analyse que nous ferons ici, nous ne considérerons que les effets globaux, moyens dans le temps, de la turbulence, notamment en ce qui concerne l'évaluation des forces de frottement selon le régime d'écoulement.

4.3.2. Onde élastique et oscillation en masse

Les variations de régime dans un système sous pression peuvent adopter deux comportements différents. Si le système est fermé, c'est-à-dire qu'il ne contient pas d'endroit où il est possible d'accumuler de l'eau en grande quantité, on observe une variation locale importante de la pression; c'est le coup de bélier par onde élastique. Dans le cas où l'eau peut être accumulée dans un réservoir ou une cheminée d'équilibre on parle plutôt d'oscillation en masse. Dans ce qui suit, nous examinerons avec plus d'attention le phénomène d'onde élastique car il entraîne des effets plus contraignants sur le matériel que le phénomène, plus particulier aux cheminées d'équilibre, de l'oscillation en masse.

4.3.3. Perturbation de l'équilibre, effet sur les pressions

Si on considère la conduite dans laquelle coule un liquide en régime permanent, le niveau de la pression est fort raisonnable, soit inférieur à celui de

la pression hydrostatique dans des conditions d'écoulement nul. Qu'advient-il lorsque, pour une raison ou une autre, il y a une modification temporelle de l'écoulement par accélération ou décélération? La réponse du physicien se base sur les principes de la mécanique newtonienne. Il y aura un transfert d'énergie entre les énergies potentielle et cinétique pour chercher à atteindre un nouvel équilibre en tenant compte des pertes et sans transgresser le principe de conservation de l'énergie.

Cette réponse, toute rigoureuse qu'elle soit, peut nous paraître bien aride et nous pouvons nous demander comment cela peut s'appliquer au simple cas de la masse d'eau qui circule en régime permanent dans une conduite et qui voit son mouvement modifié. Partant des principes que, dans un fluide, l'énergie potentielle se traduit par une énergie de pression et que, d'autre part, l'eau n'est pas absolument incompressible et que la conduite admet des déformations élastiques.

4.4.Processus de variation de la pression et de la vitesse dans une tuyauterie

4.4.1. Cas d'arrêt brusque de la pompe

Considérons donc un système, analogue à une situation de refoulement, où l'eau écoule à une vitesse U_0 pour alimenter un réservoir dont le niveau est gardé constant. Le phénomène, illustré à la figure N°4.1, peut être décrit en quatre phases.

1) Au temps $t = 0$, le débit à travers la pompe est brusquement interrompu. La vanne clapet située à l'amont du système est fermée, immédiatement et à proximité de la vanne, la vitesse d'écoulement s'annule, donc l'énergie cinétique fait de même et doit être compensée par un gain d'énergie potentielle sous forme d'une dépression puisque le mouvement initial de l'eau a tendance à tirer sur la partie de la colonne d'eau qui est immobile. Cette énergie de dépression se traduit mécaniquement par une énergie de déformation qui tend à réduire le diamètre de la conduite. Ce phénomène se poursuit jusqu'à ce que toute la

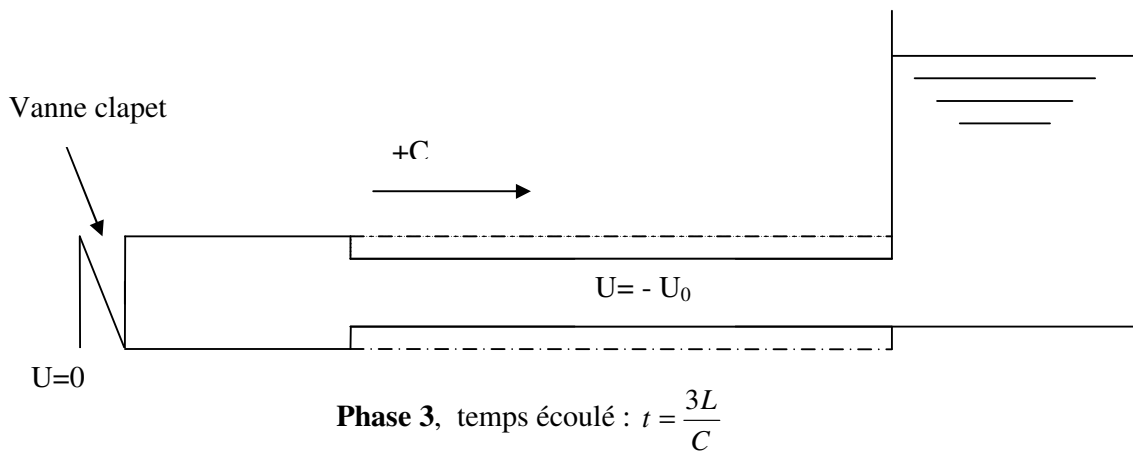
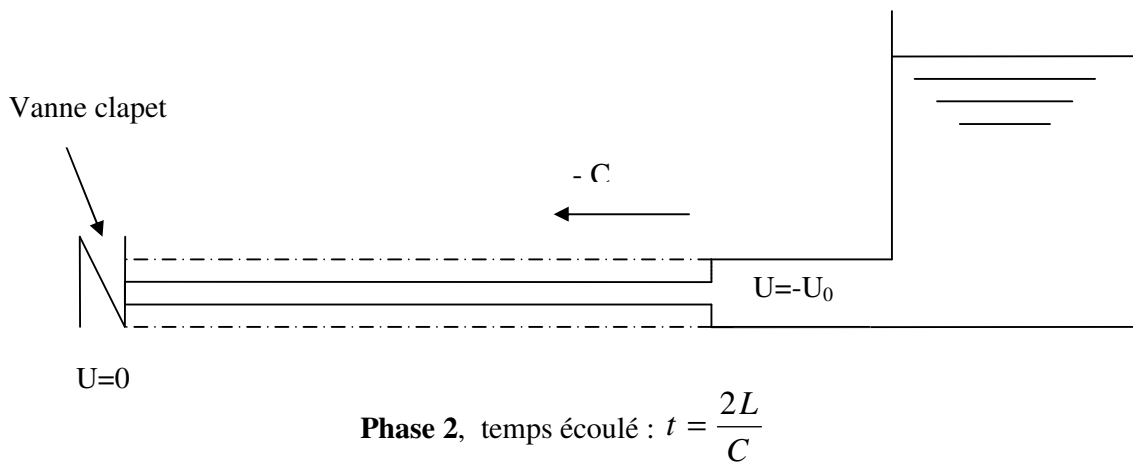
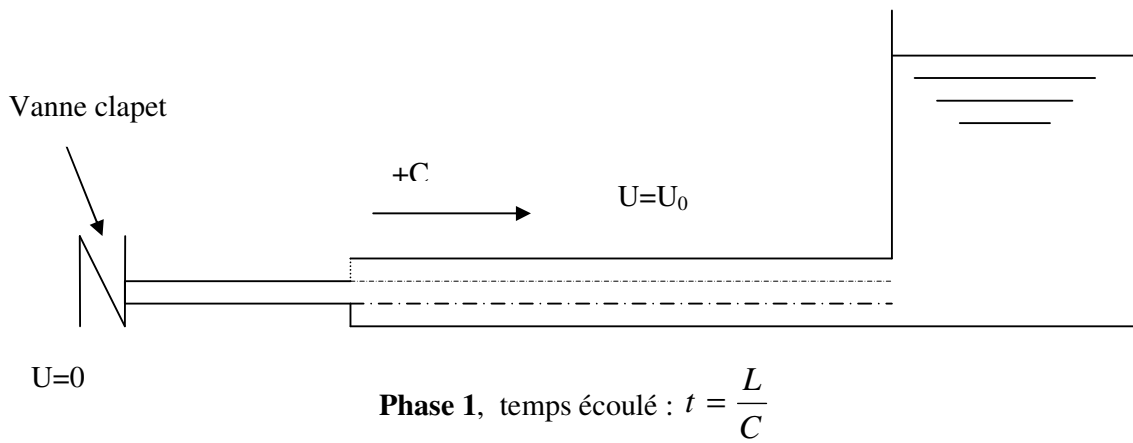
conduite soit mise en compression, ce qui prend un temps égal au rapport de la longueur ' L ' sur la célérité de l'onde de déformation ' C '.

2) Lorsque l'onde de dépression atteint le réservoir, celle-ci se dissipe puisqu'il règne à cet endroit une pression constante. À ce moment précis, plus rien ne retient la mise en compression de la conduite et elle commence à reprendre sa forme à proximité du réservoir. L'augmentation de volume ainsi créée, entraîne le remplissage de la conduite à une vitesse équivalente à la vitesse initiale du fluide puisque la déformation initiale de la conduite est directement liée à cette dernière. Ce phénomène a la même durée que celle de l'étape précédente.

3) Au moment où toute la conduite a repris sa forme, la vitesse de l'eau doit s'annuler en frappant la vanne fermée. Encore une fois, on doit avoir transformation de l'énergie cinétique en énergie potentielle par contre, cette fois, l'énergie de pression est positive puisque l'inertie de l'eau tend à comprimer la partie immobile de la colonne d'eau. Cette surpression met en tension la conduite qui se dilate. La vitesse de l'onde de déformation ' C ' étant constante, la durée de cette étape est identique à celle des précédentes.

4) Le surplus d'eau dû à l'augmentation du volume de la conduite commence à s'évacuer près du réservoir à une vitesse U_0 de façon à ce que la conduite reprenne son diamètre initial.

À la fin de cette étape, toute la conduite aura retrouvé les conditions initiales et l'étape 1 pourra recommencer. Ce cycle de période $T = 4L/C$ se répéterait indéfiniment, s'il n'y avait pas de frottement. Les effets du frottement agissent essentiellement sur l'amortissement de l'amplitude de la variation de pression.



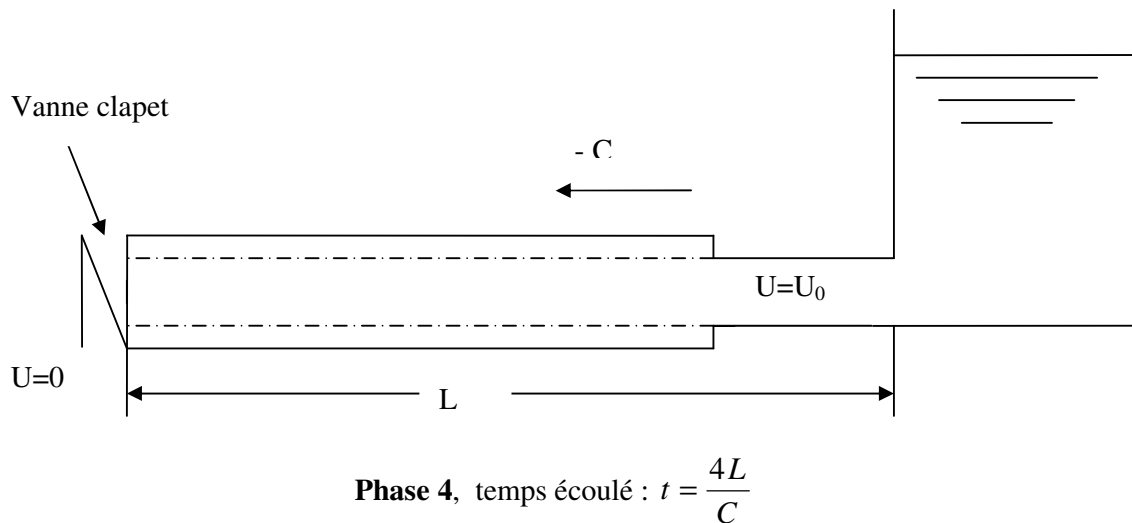


Figure N°4.1 : Les quatre étapes d'un cycle de variation de pression.

4.4.2. Cas d'une fermeture brusque d'une vanne placée à l'aval d'une conduite

Dans le cas de la fermeture brusque d'une vanne placée en aval d'une conduite, la manoeuvre d'une vanne à l'aval du système entraîne une surpression au voisinage de la vanne semblable à celle observée à l'étape 3 du cas précédent. Le phénomène suit alors les étapes 4, 1, et 2.

Au bout du temps $t = L/C$ serait engendrée dans le réservoir une onde d'équilibre qui se propagerait jusqu'à la vanne, où elle arriverait dans le temps $t = 2L/C$ (Phase 4).

À ce moment-là prendrait naissance une onde de dépression, qui atteindrait le réservoir dans le temps $t = 3L/C$ (phase 1), suivie d'une onde d'équilibre, qui attendrait la vanne dans le temps $t = 4L/C$ semblable à la phase 2, et le phénomène recommencerait s'il n'y avait pas de frottement.

4.5 Aspects théoriques [18]

4.3.1 Équations de bases

En considérant, dans une conduite, deux variables dépendantes, le débit Q et la pression H , fonction de l'espace X et du temps t , les principes de conservation de la masse et de conservation de la quantité de mouvement, il est possible de définir un système à deux équations aux dérivées partielles pour décrire le comportement physique du système eau-conduite.

-La conservation de la masse s'exprime sous forme de l'équation de continuité:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{C^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial X} = 0 \quad 4.1$$

Cette équation exprime le fait qu'une variation spatiale du débit entraîne une évolution temporelle de la pression; en effet, si, par exemple, il entre plus de débit dans un volume donné qu'il en sort, il faut que la pression augmente de façon à ce que le volume augmente s'il est élastique.

-La conservation de la quantité de mouvement permet d'écrire l'équation de mouvement:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{gS}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + f(Q) = 0 \quad 4.2$$

Équation qui exprime l'équilibre des forces selon la loi de Newton; cet équilibre fait intervenir l'accélération du fluide par la variation temporelle du débit, les différences de pression sous forme de gradient de pression et les forces de frottement causés par la vitesse du fluide sur les parois plus ou moins rugueuses de la conduite.

où:

P : Pression

ρ : désigne masse spécifique

Q :désigne le débit

S : désigne l'aire de la section de la conduite

g :désigne l'accélération gravitationnelle

C :désigne la célérité de l'onde de pression

$f(Q)$:désigne le terme de frottement

La célérité de l'onde de pression peut être assimilée à la vitesse de propagation du son dans le milieu eau-conduite. Elle s'exprime par:

$$\frac{1}{C^2} = \rho \left(\frac{1}{K} + \frac{D}{eE} \right) \quad 4.3$$

avec:

C célérité de l'onde élastique

ρ : masse spécifique, 1 000 kg/m³ pour l'eau

K : module d'élasticité de l'eau, 2,05 × 10⁹ N/m²

D : diamètre de la conduite

e : épaisseur de la paroi

E : module d'élasticité du matériau de la conduite

Le terme de frottement $f(Q)$ est tiré d'une relation d'écoulement en régime permanent uniforme telle que celle de Hazen-Williams.

4.3.2Hypothèses de base

Avant de passer à la résolution des équations 4.1 et 4.2, il convient de considérer les hypothèses qui en ont permis la formulation:

- 1) La section d'écoulement S est considérée invariable dans le temps dans l'équation de continuité.

- 2) L'effet des non uniformités des sections d'écoulement est négligé dans l'équation de continuité.
- 3) L'équation de mouvement ne tient pas compte des effets d'inertie convective, c'est-à-dire, par exemple, des effets des accélérations des particules de fluide causé par un rétrécissement de la section d'écoulement.
- 4) Le terme de frottement est généralement considéré comme celui d'un écoulement turbulent rugueux permanent uniforme.

4.3.3 Calcul de la dépression maximale

Dans le cas d'une fermeture brusque il est possible en simplifiant le problème à l'extrême d'évaluer l'ordre de grandeur des variations de pression en évitant la résolution des équations 4.1 et 4.2.

Le temps de fermeture d'une vanne ou d'une pompe est considéré brusque lorsqu'il est inférieur au temps d'un aller et retour de l'onde de pression dans la conduite de longueur L , soit

$$t \leq \frac{2L}{C} \quad 4.4$$

Dans l'hypothèse d'une fermeture instantanée, nous déterminons la dépression maximale Δh par la relation suivante:

$$\Delta h = -\frac{C}{g} U_0 \quad 4.5$$

Avec U_0 , la vitesse d'écoulement dans la conduite avant la fermeture

La vitesse d'écoulement dans la conduite, en régime permanent, est calculée par un programme d'équilibre des débits et charges.

L'ordre de grandeur de la surpression serait semblable à celui de la dépression s'il n'y avait pas de rupture de veine liquide. La surpression causée par la fermeture de la cavité de vapeur à basse pression peut atteindre des valeurs supérieures à celles obtenues par suite du retour élastique de l'onde créée sans rupture.

4.4 Modélisation des composantes d'un système hydraulique

Dans les cas précédent, le frottement n'a pas été pris en considération, ce qui conduit à des modèles relativement simples. Cependant, afin de donner au modèle un niveau de réalisme élevé, il convient d'en considérer les effets. De façon plus générale, il est important de tenir compte des relations entre la charge hydraulique et le débit pour tous les composants d'un système hydraulique. [09]

4.4.1 Traitement d'un élément général

Le principe est basé sur la méthode des caractéristiques telle que étudiée au chapitre précédent. La différence fondamentale tient du fait qu'il nous faut tenir compte des relations entre la charge et le débit, généralement causée par le frottement. Or, l'expression du frottement est, dans la plupart des cas, fonction du carré du débit. Cette non linéarité a pour conséquence que les équations caractéristiques ne sont plus des droites comme dans le cas idéal, mais des courbes. Pour la relation différence de charge-débit, l'utilisation d'une équation générale du second degré satisfait la plupart des cas; elle s'écrit:

$$\Delta H = A(t) + B(t)|Q| + C(t)|Q|Q \quad 4.6$$

Les coefficients A, B et C peuvent être fonctions du temps selon que cette relation varie dans le temps comme dans le cas d'une vanne en cours de manipulation ou encore une pompe en régime transitoire. La variation temporelle de ces coefficients est présumée connue.

Considérons donc un élément quelconque connecté à ces deux extrémités, d'abord au temps t , soit avant d'être affecté par le passage d'ondes de pression, puis au temps $t+\Delta t$ selon les conventions de la figure N°4.1 où les indices 1 et 2 réfèrent respectivement à l'aval et l'amont de l'élément général au temps t et où les indices 3 et 4 correspondent à la même situation au temps $t+\Delta t$.

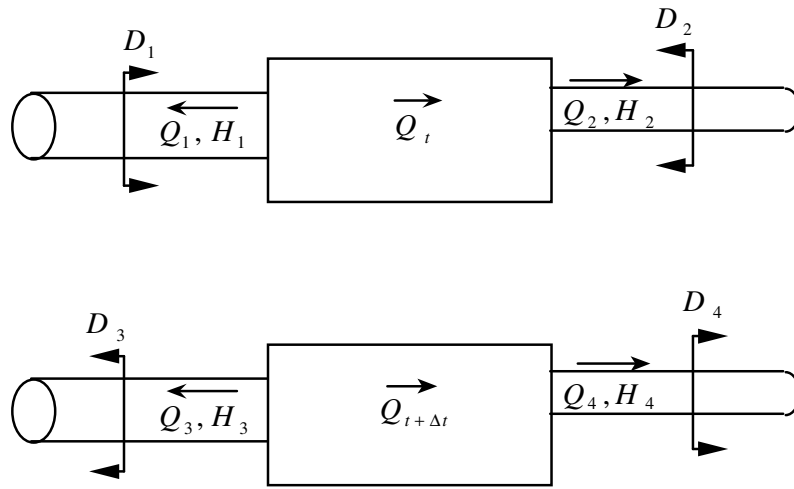


Figure N° 4.3 : Éléments généraux

Dans un premier temps, la méthode des caractéristiques permet d'écrire les relations suivantes:

$$D_3 = D_1 + F_1(Q_3 - Q_1) \quad 4.7$$

$$D_4 = D_2 + F_2(Q_4 - Q_2) \quad 4.8$$

où: $F_1 = \frac{C_1}{gS}$ et $F_2 = \frac{C_2}{gS}$

Les pressions de part et d'autre de l'éléments étant mis à jour par:

$$H_3 = H_1 + D_1 + D_3 \quad 4.9$$

$$H_4 = H_2 + D_2 + D_4 \quad 4.10$$

En écrivant que la variation de charge est liée au débit qui traverse l'élément par:

$$H_4 - H_2 = A(t) + B(t)|Q_{t+\Delta t}| + C(t)|Q_{t+\Delta t}|Q_{t+\Delta t} \quad 4.11$$

Considérant que, s'il n'y a pas de vapeur créée dans l'élément, on peut écrire:

$$Q_1 = -Q_t, \quad Q_2 = Q_t, \quad Q_3 = -Q_{t+\Delta t} \text{ et } Q_4 = Q_{t+\Delta t}$$

alors l'équation 4.11 peut être écrite en fonction du débit traversant l'élément au temps $t+\Delta t$ en y introduisant les relations 4.9 et 4.10 puis 4.7 et 4.8. Elle devient donc:

$$\begin{aligned} C(t)|Q_{t+\Delta t}|Q_{t+\Delta t} + B(t)|Q_{t+\Delta t}| - (F_1 + F_2)Q_{t+\Delta t} \\ + A(t) + H_1 - H_2 + 2(D_1 - D_2) + (F_1 + F_2)Q_t = 0 \end{aligned} \quad 4.12$$

Cette équation est résolue par itération par une méthode de Newton-Raphson initiée à partir de Q_t . Une fois la nouvelle valeur du débit connue, elle est introduite dans les équations 4.7 et 4.8, puis on évalue les pressions de part et d'autre de l'élément au temps $t+\Delta t$ grâce aux équations 4.9 et 4.10.

Si une des extrémités d'un élément est connecté à un réservoir à charge constante, les valeurs de F et D sont considérées nulles à cette extrémité.

4.4.2 Sections de conduites

Dans ce type d'élément, les coefficients de l'équation 4.6 sont:

$$A(t) = 0$$

$$B(t) = 0$$

$$C(t) = \frac{-fL}{2gDS^2}$$

où f : est le facteur de frottement adaptable en fonction du régime d'écoulement (diagramme de Moody ou formule de White-Colebrook),

L : la longueur du tronçon,

D : son diamètre

S : l'aire de sa section d'écoulement.

En général, on considère f constant équivalent à un coefficient d'Hazen-Williams.

4.4.3 Élément passif

Entre dans cette catégorie tous les éléments singuliers dont les caractéristiques sont considérées invariable dans le temps. les coefficients de l'équation 4.6 deviennent:

$$\begin{aligned}A(t) &= 0 \\B(t) &= 0 \\C(t) &= \frac{-1}{2gC_d^2S^2}\end{aligned}$$

Où C_d est le coefficient de débit et S l'aire de la section de référence.

4.4.4 Jonctions

Un principe de continuité du débit et de la pression est à la base de ce comportement. Selon le schéma de la figure 5, on affecte les ondes transmises et réfléchies d'un coefficient fonction du nombre de branche à la jonction. Le coefficient de transmission s'écrit:

$$T_i = \frac{2}{F_i \sum \left(\frac{1}{F_j} \right)}$$

et la réflexion:

$$R_i = T_i - 1$$

L'indice i est associé à la branche incidente alors que la somme sur j réfère à toutes les branches adjacentes à la jonction.

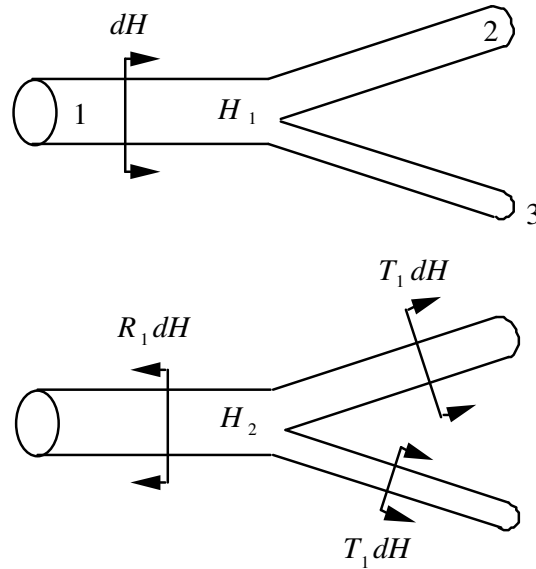


Fig. 4.5 - Transmission et réflexion d'onde à une jonction.

4.4.5 Pompes

Les pompes sont en général représentées par des équations quadratiques:

$$H_2 - H_1 = A_R a^2 + B_R a |Q| + C_R |Q|Q$$

où a représente le rapport de vitesse de la pompe par rapport à la vitesse nominale. La figure N°4.6 illustre comment cette courbe varie en fonction de ce rapport.

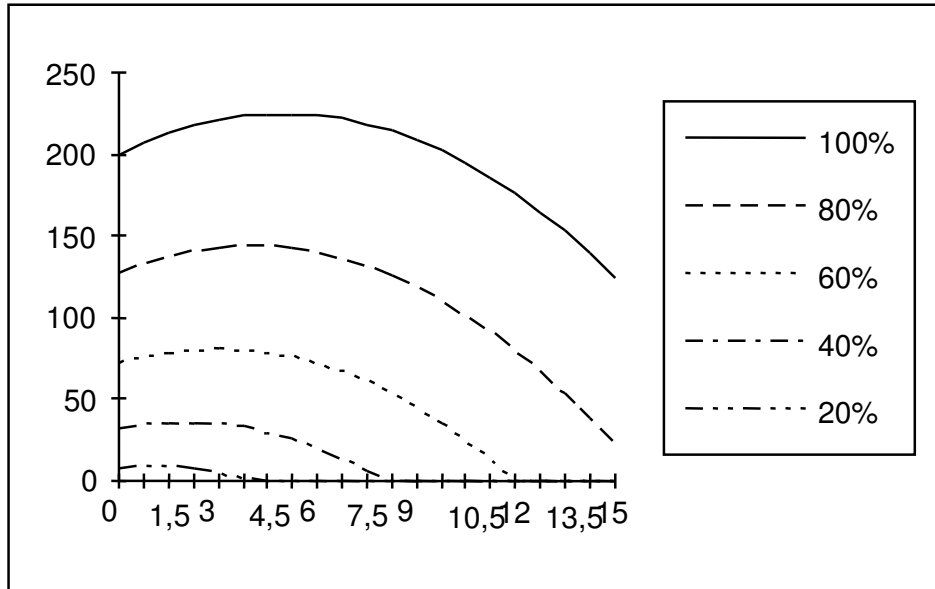


Figure N°4.6 : Évolution d'une courbe de pompe.

4.4.6 Vannes

Entre dans cette catégorie tous les éléments singuliers dont les caractéristiques sont considérés variable dans le temps. Ici, les coefficients de l'équation 11 deviennent:

$$A(t) = 0$$

$$B(t) = 0$$

$$C(t) = \frac{-1}{2gC_d^2(S(t))^2}$$

où C_d est le coefficient de débit

S : l'aire de la section de référence variable en fonction du temps et de la géométrie de la vanne.

4.5 Conclusion ;

Ce chapitre nous a permis de décrire les phénomènes physiques mis en jeu Et en utilisant la méthode des caractéristiques et quelques hypothèses simplificatrices nous avons présenté la modélisation des composantes d'un système hydraulique en tenant compte des relations entre la charge hydraulique et le débit pour tout les composants d'un système hydraulique

CHAPITRE : 5

Transformation des équations de saint venant

Chapitre 5 : Transformation des équations de Saint Venant

5.1 Introduction :

Le premier chapitre a permis d'établir les deux équations de saint venant qui permettent de traduire tous les mouvements transitoires. Dans ces équations apparaissent :

-deux variables indépendantes :la longueur (X) et le temps (t).

-deux variables dépendantes qui sont la vitesse U et la pression P

L'application du système d'équations ainsi établies (1.30) est très rigoureuse et délicate pour résoudre un problème transitoire occasionné dans une installation hydraulique. Le but de ce chapitre c'est de transformer ce système en un système d'équations plus maniable et ayant un sens physique plus évident afin de déterminer les paramètres prépondérants qui sont la vitesse U et la pression P .

5.2 Equation aux caractéristiques :

On rappelle le système d'équations de Saint venant (1.30) :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial X} = -\frac{1}{C^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial X} \right) \quad 1.30a$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = -g(\sin \alpha + j) \quad 1.30b$$

On considère l'équation 1.30a, en la multipliant par le rapport $\frac{C}{\rho}$, on

obtient :

$$C \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho C} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial X} \right) = 0 \quad 5.1$$

L'équation 1.30b est conservée :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = -g(\sin \alpha + j) \quad 5.2$$

Ou bien :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = g(i - j) \quad 5.2a$$

$i = -\frac{\partial H}{\partial X}$ Qui désigne la pente $\sin \alpha$ pour $P = P' + \rho g H$

j : désigne le gradient de perte d'énergie occasionné par l'écoulement dans la conduite.

Afin d'aboutir aux équations des caractéristiques, ajoutons d'abord les équations 5.1 et 5.2 on obtient :

$$C \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho C} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = g(i - j) \quad 5.3$$

Ou bien :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (C + U) \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho C} \left[\frac{\partial P}{\partial t} + (U + C) \frac{\partial P}{\partial X} \right] = g(i - j) \quad 5.4$$

On retranche maintenant l'équation 5.1 de 5.2a, on obtient aisément :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (C - U) \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{1}{\rho C} \left[\frac{\partial P}{\partial t} + (U - C) \frac{\partial P}{\partial X} \right] = g(i - j) \quad 5.5$$

Les équations 5.4 et 5.5 décrivent le régime transitoire qui suit une perturbation d'écoulement provoqué par la manœuvre d'un robinet-vanne, par exemple, placé au niveau d'une conduite longue.

De même, on signale que l'équation 5.4 montre que si un observateur se déplace sur un parcours tel que $\frac{\partial X}{\partial t} = U + C$, la grandeur $\frac{\partial U}{\partial t} + (C + U) \frac{\partial U}{\partial X}$ exprime sur ce parcours la dérivée totale par rapport au temps de la vitesse autrement dit de $\frac{\partial U}{\partial t}$; il est de même que la pression.

On peut donc écrire, en considérant que ce parcours a des caractéristiques uniques :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = U + C \quad 5.6$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho C} \frac{\partial P}{\partial t} = g(i - j) \quad 5.7$$

Et dans le sens contraire :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = U - C \quad 5.8$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{\rho C} \frac{\partial P}{\partial t} = g(i - j) \quad 5.9$$

Dans les conduites en charge, notamment les conduites non souples, (ou souples et enterrées) ; la vitesse d'écoulement est très faible par rapport à la célérité d'onde de propagation et les deux systèmes ci-dessus deviennent donc :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \pm C$$

Et en multipliant les équations 5.7 et 5.9 par $\frac{C}{g}$, on obtient après transformation :

$$\frac{C}{g} dU \pm \frac{1}{\rho g} dP = (i - j) C dt \quad 5.10$$

On constate que dans l'équation 5.10 ; $C dt = \pm dX$

et que $i dX = -dH$; en multiplication par ± 1 on trouve :

$$\pm \frac{C}{g} dU \pm \frac{1}{\rho g} dP + dH = -j dX \quad 5.11$$

D'où le système résultant finalement :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \pm C \\ dH \pm \frac{C}{g} dU = -j dX \end{cases} \quad 5.12$$

Dans ce système le paramètre 'H' représente la cote piézométrique puisque

$dH = \frac{1}{\rho g} dP + dh$, et que $dh = -i dX$ qui est la dénivelée.

5.2.1 Les conditions aux limites :

Si on considère l'origine des 'X' égale à zéro à l'extrémité amont de la conduite (sortie du réservoir) et l'origine temps ($t=0$) à l'extrémité aval de la conduite (au droit du robinet -vanne) ; on aura deux limites qui seront formulées par deux fonctions à savoir :

- Une fonction dépendant de la valeur du coup de bélier
- Une autre fonction dépendant de la vitesse

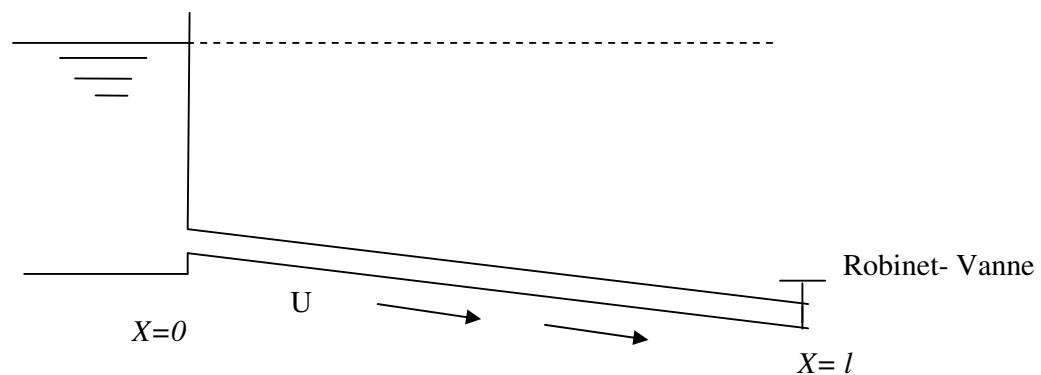


Figure N°5.1 : conduite écoulant un débit Q à une vitesse U

Habituellement, les équations aux caractéristiques, sont applicables par discrétisation à chaque section de la conduite .la distance entre deux section est de l'ordre de ΔX plus faible.

Néanmoins dans ce travail, le but recherché réside dans les valeurs prépondérantes (pression, vitesse) pour $X=l$. Ce point représente le cas défavorable dans le domaine pratique, puisqu'il s'agit d'une protection de la conduite contre le coup de bélier uniquement en agissant sur le robinet -vanne.

5.2.2 Interprétation du terme $j.dX$

Les équations de Saint venant montrent que dans un régime transitoire engendré dans une conduite en charge les paramètres hydrauliques prépondérants (Pression, vitesse) varient le long de la longueur (l) de la conduite.

Le mouvement de perturbation engendrant ces deux paramètres s'amortit dans le temps et dans l'espace. Cet amortissement est dû principalement à l'effet des pertes de charges linéaire ou singulières, tenant compte de la variation de la vitesse de la longueur de la conduite. Par ailleurs la littérature montre que l'équation de Darcy Weisbach est applicable pour le régime transitoire même à effet prépondérant [09] par considération de la vitesse constante à chaque section connue en régime permanent avant manipulation du robinet –vanne. C'est ce qui semble en contradiction avec la réalité.

Afin de cerner d'une façon approchée le problème nous pouvons supposer ce qui suit, que la variation de la vitesse est du type parabolique suivant la longueur (X) et obéit à la forme :

$$X = \chi U^2 \quad 5.13$$

On peut écrire que :

$$U = \sqrt{\frac{X}{\chi}} \quad 5.14$$

D'autre part, nous avons :

$$j = \beta.U^2$$

β Étant le coefficient de perte de charge linéaire.

La perte de charge pour une longueur dX sera :

$$dh_p = j.dX \quad 5.15$$

En intégrant entre deux sections de la conduite d'abscisses X_1 et X_2 , on obtient :

$$\Delta h_{p_{12}} = \int_{X_1}^{X_2} j \cdot dX = \int_{X_1}^{X_2} \beta U^2 dX \quad 5.16$$

Ou bien :
$$\Delta h_{p_{12}} = \beta \int_{X_1}^{X_2} \frac{X}{\chi} \cdot dX = \frac{\beta}{\chi} \int_{X_1}^{X_2} X dX = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{X^2}{2} \Big|_{X_1}^{X_2}$$

$$\Delta h_{p_{12}} = \frac{\beta}{2\alpha} (X_2^2 - X_1^2) \quad 5.17$$

Ou bien :
$$\Delta h_{p_{12}} = \frac{\beta}{2\chi} (X_2 - X_1)(X_2 + X_1) \quad 5.18$$

Au niveau des sections des sections de la conduite d'abscisse X_1 et X_2 nous avons :
$$X_2 = \chi U_2^2 \quad \text{et} \quad X_1 = \chi U_1^2 \quad 5.19$$

En remplaçant dans l'équation 5.18, on obtient :

$$\Delta h_{p_{12}} = \frac{\beta}{2\chi} (X_2 - X_1)(\chi U_2^2 + \chi U_1^2) = \frac{\beta}{2} (U_2^2 + U_1^2)(X_2 - X_1)$$

Le terme $(X_2 - X_1)$ représente la longueur d'un tronçon de la conduite ; on peut poser :

$$(X_2 - X_1) = l_{12}$$

Et par conséquent :

$$\Delta h_{p_{12}} = \frac{\beta}{2} l_{12} (U_2^2 + U_1^2) \quad 5.20$$

Le coefficient β ne pourra être que le terme physique $\frac{\lambda}{2gD}$ où λ représente le coefficient de frottement selon NIKURADSE.

Finalement on a :

$$\Delta h_{p_{12}} = \frac{\lambda l_{12}}{2gD} \left[\frac{U_2^2 + U_1^2}{2} \right] \quad 5.21$$

Dans la relation 5.21, on remarque que si $U_2 = U_1$ le régime est non transitoire (permanent) et on retrouve l'équation de Darcy W.

5.2.3 Coup de bélier à l'extrémité de la conduite durant la variation du débit sans perte de charge

En se basant sur le diagramme (t, X) ; traduisant le mouvement des perturbations de l'écoulement, nous appliquons le système 5.12 pour une installation hydraulique à écoulement gravitaire en charge. La conduite de longueur ' l ' et de caractéristique unique, comporte un robinet –vanne à son extrémité aval (figure N°6.2)

En négligeant les pertes de charge, et en supposant une fermeture lente, on détermine le coup de bélier H_i pour différents étapes (i) de fermeture du robinet-vanne pour $X = l$.

On suppose par hypothèse que la vitesse d'écoulement avant fermeture ($i = 0$) du robinet-vanne. U_0 est la même que celle U_{i0} à travers le robinet-vanne et la vitesse à la sortie du réservoir U_{00} . L'angle d'inclinaison de la conduite est supposée très faible.

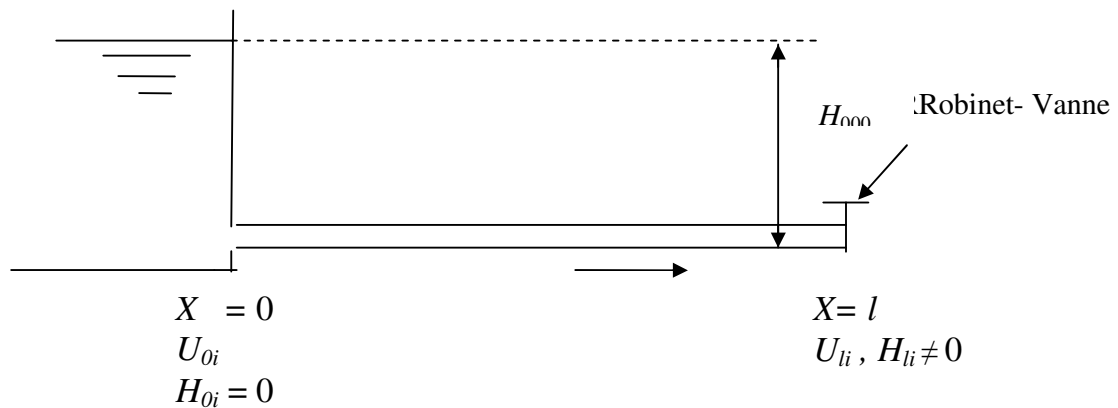


Figure N°5.2 : Installation hydraulique à écoulement gravitaire en charge

-On suppose par ailleurs que le pas de temps de calcul est $t_0 = \frac{2l}{C}$, c'est-à-dire que le coup de bélier au niveau du réservoir est considéré comme nul ($H_{0i} = 0$)

-L'indice 'i', désignant les étapes de fermeture, peut prendre des valeurs de 0, 1, 2, ..., n. Où n désigne le nombre total de pas de fermeture du robinet -vanne.

Le raisonnement de l'application se fait comme suit :

a/ 0.0 → l1

C'est le passage d'une perturbation de 00 à l1

$$dH + \frac{C}{g} dU = 0 \quad \Rightarrow \quad dH = -\frac{C}{g} dU$$

$$H_{l1} - H_{00} = -\frac{C}{g} (U_{l1} - U_{00})$$

$$H_{l1} = \frac{C}{g} (U_0 - U_{l1})$$

b/ l1 → 0.1

$$dH - \frac{C}{g} dU = 0 \quad \Rightarrow \quad dH = \frac{C}{g} dU$$

$$H_{01} - H_{l1} = \frac{C}{g} (U_{01} - U_{l1})$$

$$H_{l1} = \frac{C}{g} (U_{l1} - U_{01}) \quad \text{et}$$

$$U_{01} = U_{l1} - \frac{g}{C} H_{l1})$$

c/ 01 → l2

$$dH + \frac{C}{g} dU = 0 \quad \Rightarrow \quad dH = -\frac{C}{g} dU$$

$$H_{l2} - H_{01} = \frac{C}{g} (U_{01} - U_{l2}) \quad \text{avec} \quad H_{01} = 0$$

$$H_{l2} = \frac{C}{g} (U_{01} - U_{l2})$$

Tenant compte de b/, on obtient : $H_{12} = \frac{C}{g}(U_{11} - U_{12}) - H_{11}$

d/ $12 \longrightarrow 02$

$$dH - \frac{C}{g}dU = 0 \quad \Rightarrow \quad dH = \frac{C}{g}dU$$

$$H_{02} - H_{12} = \frac{C}{g}(U_{02} - U_{12})$$

$$H_{02} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{12} = \frac{C}{g}(U_{12} - U_{02})$$

$$\text{Ou bien} \quad U_{02} = U_{12} - \frac{g}{C}H_{12}$$

e/ $02 \longrightarrow 13$

$$dH + \frac{C}{g}dU = 0 \quad \Rightarrow \quad dH = -\frac{C}{g}dU$$

$$H_{13} - H_{02} = -\frac{C}{g}(U_{13} - U_{02})$$

$$H_{02} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{13} = \frac{C}{g}(U_{02} - U_{13})$$

Tenant compte de d/, on obtient :

$$H_{13} = \frac{C}{g}(U_{12} - \frac{g}{C}H_{12} - U_{13})$$

f/ $13 \longrightarrow 03$

$$dH - \frac{C}{g}dU = 0 \quad \Rightarrow \quad dH = \frac{C}{g}dU$$

$$H_{13} - H_{03} = \frac{C}{g}(U_{13} - U_{03})$$

$$H_{03} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{13} = \frac{C}{g}(U_{13} - U_{03}) \text{ et}$$

$$U_{03} = (U_{13} - \frac{g}{C}H_{13})$$

g/ $03 \longrightarrow 14$

$$dH + \frac{C}{g}dU = 0 \quad \Rightarrow \quad dH = -\frac{C}{g}dU$$

$$H_{l4} - H_{03} = -\frac{C}{g}(U_{l4} - U_{03})$$

$$H_{l4} = \frac{C}{g}(U_{03} - U_{l4})$$

Tenant compte de $f/$, on obtient :

$$H_{l4} = \frac{C}{g}(U_{l3} - \frac{g}{C}H_{l3} - U_{l4})$$

D'une façon générale, on peut écrire que la valeur du coup de bélier au niveau du robinet-vanne pour $X = l$ est :

$$H_{li} = \frac{C}{g}(U_{l,i-1} - U_{li}) - H_{l,i-1}$$

Etant donné que le coup de bélier est une succession de perturbation, on peut faire le cumul des valeurs précédentes jusqu'à l'étape $(i-1)$; ce qui donne :

$$H_{li} = \frac{C}{g}(U_0 - U_{li}) - 2 \sum_{k=0}^{i-1} H_{lk} \quad 5.22$$

En suivant le parcours des ondes entre les deux extrémités de la conduite, nous avons déterminé la valeur du coup de bélier à chaque étape (i) en fonction de la vitesse, tenant compte du cumul.

Le même raisonnement nous conduit à déterminer la relation donnant la vitesse au niveau du robinet vanne qui est comme suit :

$$U_{li} = U_0 - \frac{g}{C}H_{li} - \frac{2g}{C} \sum_{k=0}^{i-1} H_{lk} \quad 5.23$$

5.2.4 Détermination des vitesses et du coup de bélier au niveau du robinet-vanne tenant compte des pertes de charge

On applique le système 5.12 cette fois-ci tenant compte des pertes d'énergie (Δh) qui ont pour rôle d'atténuer le coup de bélier soit en phase de surpression ou en phase de dépression. On rappelle le système qui est de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \pm C \\ dH \pm \frac{C}{g} dU + \Delta h_p \end{cases}$$

En appliquant le diagramme de la figure N°5.3 .et avec le même raisonnement que précédemment

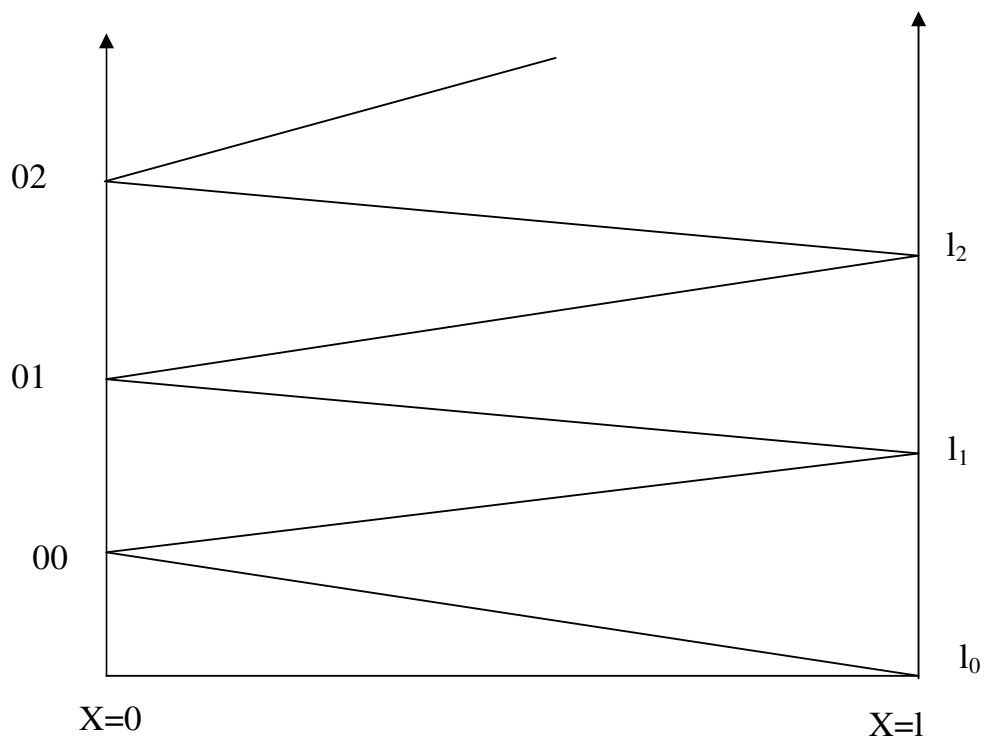


Figure N°5.3 : Diagramme des vitesses du coup de bélier

a/ $l_0 \longrightarrow 00$

$$H_{l_0} - H_{00} - \frac{C}{g}(U_{l_0} - U_{00}) + \Delta h_{00,l_0}$$

Ou bien
$$U_{00} = U_{l_0} - \frac{g}{C}(H_{l_0} - H_{00}) - \frac{g}{C}\Delta h_{00,l_0}$$

b/ $00 \longrightarrow l_1$

$$dH + \frac{C}{g}dU + \Delta h = 0$$

$$dH = -\frac{C}{g}dU - \Delta h$$

Ou bien
$$U_{l_1} = U_{00} - \frac{g}{C}(H_{l_1} - H_{00}) - \frac{g}{C}\Delta h_{l_1,00}$$

Tenant compte de a/ :

$$U_{l_1} = U_{l_0} - \frac{g}{C}(H_{l_1} - H_{l_0} - 2H_{00}) - \frac{g}{C}(\Delta h_{l_0,00} + \Delta h_{l_1,00})$$

c/ $l_1 \longrightarrow 01$

Directement on obtient :

$$U_{01} = U_{l_1} + \frac{g}{C}(H_{01} - H_{l_1} - \Delta h_{l_1,01})$$

En remplaçant U_{l_1} par sa relation on obtient :

$$U_{01} = U_{l_0} - \frac{g}{C}(H_{l_1} + H_{l_0} - 2H_{00}) - \frac{g}{C}(\Delta h_{l_1,00} + \Delta h_{l_0,00}) + \frac{g}{C}(H_{01} - H_{l_1}) - \frac{g}{C}\Delta h_{l_1,01}$$

Ou bien

$$U_{01} = U_{l_0} - \frac{g}{C}(2H_{l_1} + H_{l_0} - 2H_{00} - H_{01}) - \frac{g}{C}(\Delta h_{l_0,00} + \Delta h_{l_1,00} + \Delta h_{l_1,01})$$

d/ $01 \longrightarrow l_2$

$$dH + \frac{C}{g}dU + \Delta h = 0$$

$$H_{12} - H_{01} = -\frac{C}{g}(U_{12} - U_{01}) - \Delta h_{12,01}$$

$$U_{12} = U_{01} - \frac{g}{C}(H_{12} - H_{01} + \Delta h_{12,01}) = U_{01} - \frac{g}{C}(H_{12} - H_{01}) - \frac{g}{2}\Delta h_{12,01}$$

Tenant compte de $c/$:

$$U_{12} = U_{10} - \frac{g}{C}(2H_{11} + H_{10} + H_{12} - 2H_{00} - 2H_{01}) - \frac{g}{C}(\Delta h_{10,00} + \Delta h_{11,00} + \Delta h_{11,01} + \Delta h_{12,01})$$

En remplaçant les termes Δh par la relation 2.21

$$\Delta h_{12} = \frac{\lambda_{12}}{2gD} \left(\frac{U_2^2 + U_1^2}{2} \right)$$

Dans notre exemple le terme l_{12} n'est autre que la longueur de la conduite considérée par la figure N° 5.2 on peut écrire :

$$\Delta h_{12} = \beta l \left(\frac{U_2^2 + U_1^2}{2} \right)$$

on peut poser :

$$\Delta h_{10,00} = \frac{\beta l}{2}(U_{10}^2 + U_{00}^2)$$

$$\Delta h_{11,00} = \frac{\beta l}{2}(U_{11}^2 + U_{00}^2)$$

$$\Delta h_{11,01} = \frac{\beta l}{2}(U_{11}^2 + U_{01}^2)$$

$$\Delta h_{12,01} = \frac{\beta l}{2}(U_{12}^2 + U_{01}^2)$$

En faisant la somme, on obtient :

$$\sum \Delta h = \frac{\beta l}{2}(U_{10}^2 + U_{00}^2 + U_{11}^2 + U_{00}^2 + U_{11}^2 + U_{01}^2 + U_{12}^2 + U_{01}^2)$$

$$\sum \Delta h = \frac{\beta l}{2}(U_{10}^2 + 2U_{00}^2 + 2U_{11}^2 + 2U_{01}^2 + U_{12}^2)$$

$$\sum \Delta h = \frac{\beta l}{2} \left[U_{10}^2 + U_{1i}^2 + 2 \sum_{i=0}^{i-1} U_{0i}^2 + 2 \sum_{i=0}^{i-1} U_{1i}^2 \right]$$

$$U_{li} = U_0 - \frac{g}{C} \left[\sum_{i=0}^{i-1} H_{li} - \sum_{i=0}^{i-1} H_{0i} + H_{l0} + H_{li} \right] - \frac{g}{C} \frac{\beta l}{2} \left[U_{l0}^2 + U_{li}^2 + 2 \sum_{i=0}^{i-1} U_{0i}^2 + 2 \sum_{i=0}^{i-1} U_{li}^2 \right]$$

On sait par Hypothèse que $H_{0i} = 0$ et $H_{l0} = H_0 = 0$

$$U_{li} = U_0 - \frac{g}{C} \left[\sum_{i=0}^{i-1} H_{li} + H_{li} \right] - \frac{g}{C} \beta l \left[\frac{U_{l0}^2}{2} + \frac{U_{li}^2}{2} + \sum_{i=0}^{i-1} U_{0i}^2 + \sum_{i=0}^{i-1} U_{li}^2 \right] \quad 5.23$$

En se basant toujours sur le diagramme (t, X) , et avec le même raisonnement, on aboutit à la détermination des valeurs du coup de bélier H_{li} au niveau du robinet –vanne .on obtient :

$$H_{li} = \frac{C}{g} U_0 - \frac{C}{g} U_{li} - \sum_{i=0}^{i-1} H_{li} - \beta l \left[\frac{U_{l0}^2 + U_{li}^2}{2} + \sum_{i=0}^{i-1} U_{0i}^2 + \sum_{i=0}^{i-1} U_{li}^2 \right] \quad 5.24$$

5.3 Méthode d'optimisation du coup de bélier :

Dans le domaine pratique, la fatigue de la conduite est due principalement à la succession des surpressions et des dépressions causées par une manœuvre d'un robinet –vanne.

Par ailleurs, il a été constaté qu'en pratique, il existe deux formes de coup de bélier :

- Un coup de bélier croissant caractérisé par un accroissement de la surpression au fur et à mesure de la fermeture
- Un coup de bélier décroissant caractérisé par une surpression importante au début puis décroissement par la suite.

Ces deux formes ne sont pas bénéfique pour la tenue de la conduite et par conséquent peuvent endommagé la canalisation .On désire avoir, dès la fermeture du robinet-vanne, un coup de bélier qui augmente pendant la première phase de fermeture ($i=1$) et demeure constant durant les autres phases de fermeture.

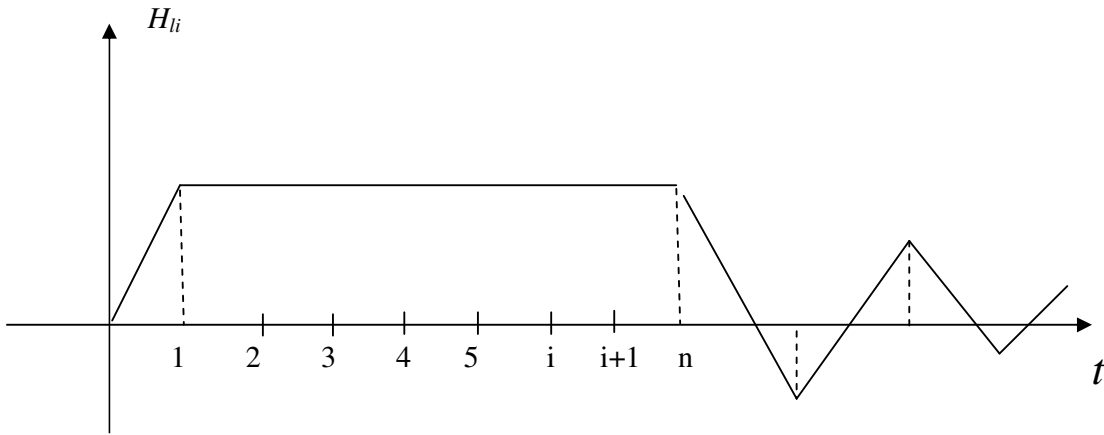


Figure N°5.4 : Coup de bélier optimale

En prenant la relation 5.22 qui est comme suit : $H_{li} = \frac{C}{g}(U_0 - U_{li}) - 2 \sum_{k=0}^{i-1} H_{lk}$

Qui devient : $H_{li} = \frac{C}{g}(U_0 - U_{li}) - 2(i-1)H_{li}$

Ou bien : $H_{li} = \frac{C}{g}(U_0 - U_{li}) - 2(i-1)H_{li}$

Ce qui donne :

$$U_{li} = U_0 - \frac{g}{C} H_{li} - 2 \frac{g}{C} (i-1) H_{li}$$

Ou bien :
$$U_{li} = U_0 - \frac{g}{C} (2i-1) H_{li} \tag{5.25}$$

La relation 2.25 donne la vitesse U_{li} à chaque étape i au niveau du robinet-vanne avec un coup de bélier constant.

Ces conditions garantissent la stabilité de la pression jusqu'à la fin de la manœuvre de fermeture. Au de la du temps de manœuvre Il faut voir qu'en réalité, à cause des pertes de charge, la pression diminue ; et les oscillations seront d'une amplitude nettement inférieure aux primitives (en période de fermeture).

Si l'on désigne par n le nombre d'étapes de fermeture complète ; nous avons pour

$i = n$ la vitesse $U_{i_n} = 0$, et la relation 5.25 devient :

$$U_{i_n} = U_0 - \frac{g}{C}(2n-1)H_{i_1} = 0 \quad 5.26$$

$$\text{Et} \quad H_{i_1} = \frac{CU_0}{g(2n-1)} \quad 5.27$$

En divisant par la hauteur géométrique H_g (dénivelée) entre le plan d'eau du réservoir et le robinets –vanne on obtient :

$$\frac{H_{i_1}}{H_g} = \frac{CU_0}{gH_g} \cdot \frac{1}{(2n-1)}$$

En posant : $\lambda_1 = \frac{H_{i_1}}{H_g}$ valeur adimensionnelle du coup de bélier

Et $\lambda_2 = \frac{CU_0}{gH_g}$ caractéristique hydraulique, on obtient

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_2}{2n-1} \quad 5.28$$

Interprétation :

La relation 5.28 indique une interprétation du coup de bélier sans tenir compte des pertes de charge, en valeurs addimensionnelle.

En pratique deux questions peuvent se poser :

1-Quelle est l'influence de la durée de fermeture du robinet-vanne n sur le coup de bélier λ_1

2-Quelle est l'influence d'une surpression donnée sur le temps de fermeture
Pour répondre à la première question, des courbes seront présentées, montrant la fonction $\lambda_1 = \frac{H_{i_1}}{H_g} = f(x)$ pour une installation donnée c'est-à-dire λ_2 constante.

cependant pour répondre à la deuxième question, la relation 5.28 devient :

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_2}{2n-1} \Rightarrow \lambda_1(2n-1) = \lambda_2 \text{ et } n = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 1 \right) \quad 5.29$$

La relation 5.29 permet de déterminer le temps de fermeture du robinet-vanne pour une installation donnée λ_2 et pour un coup de bélier λ_1 demandé.

Représentation graphique :

Pour répondre aux questions posées ci-dessus, on représente graphiquement la fonction 5.28 pour voir la variation du coup de bélier λ_1 en fonction du nombre d'étape de fermeture n pour une installation donnée caractérisée par le

paramètre λ_2 $f(n) = \lambda_1 = \left(\frac{\lambda_2}{2n-1} \right)$
 λ_1

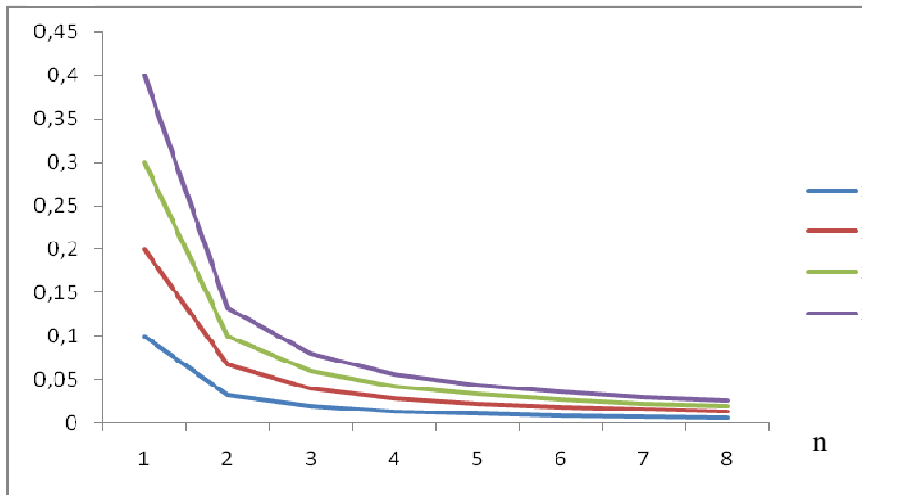


Figure N° 5.5 Variation du paramètre λ_1 en fonction de n pour une installation λ_2

$$n=f(\lambda_2)=0.5\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}+1\right)$$

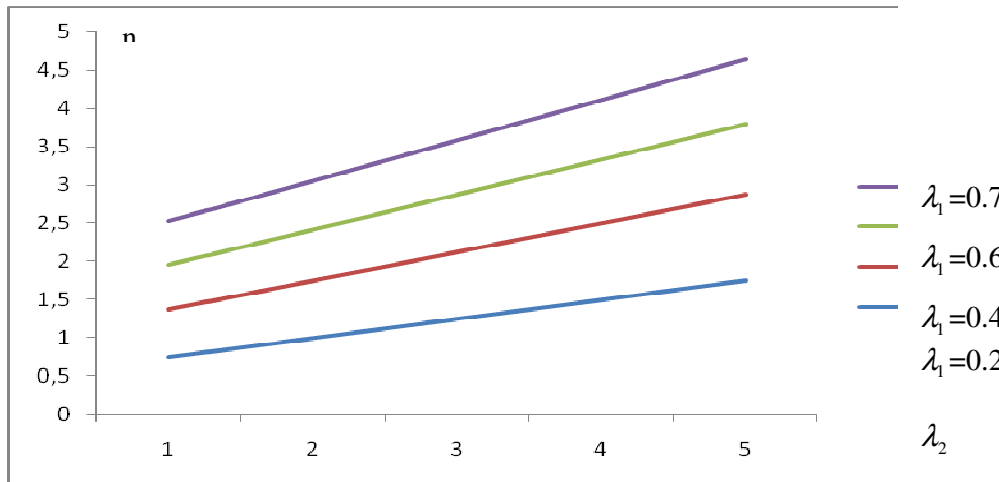


Figure 5.6 Variation de nombre d'étape de fermeture n en fonction de λ_2 pour un coup de bélier donné λ_1

5.3. Conclusion :

La transformation des équations de Saint venant nous ont permis d'aboutir aux équations aux caractéristiques facilement maniable pour pouvoir étudier le régime transitoire engendré par la manœuvre d'un robinet vanne placé à l'extrémité aval d'une conduite à écoulement gravitaire en charge .A la base des équations aux caractéristiques, un raisonnement a été proposé en vue d'optimiser le coup de bélier durant la période de fermeture de robinet-vanne. Pour une installation donnée, ces équations nous ont permis de voir également comment varie le coup de bélier en fonction du nombre d'étape de fermeture du robinet –vanne .Dans le domaine pratique, cette idée est très intéressante pour le choix du robinet-vanne à installer à l'extrémité aval de la conduite pour répondre à la relation 5.28, autrement dit à déterminer la loi de manœuvre y correspondante

CHAPITRE : 6

Interpolation de la méthode des Caractéristiques et analyse d'erreurs

Chapitre 6 : Interpolation de la méthode des Caractéristiques et analyse d'erreurs

6.1 Introduction :

Pour la modélisation du phénomène de propagation d'onde on utilise le plus souvent la méthode des caractéristiques. Les équations aux dérivées partielles issues des équations différentielles de base formulées au chapitre 1 sont facile à manipuler et reflètent l'aspect physique de l'écoulement. Néanmoins cette méthode présente ses inconvénients lorsque elle impose un pas de temps commun, limité par le critère de stabilité de la méthode, restreignant la relation entre les paramètres de temps et d'espace.

Les découpages grossiers en éléments de Bergeron peuvent provoquer des erreurs importantes, sur les variations de pression dues au coup de bélier. Il faut donc attacher un soin tout particulier à ce point lorsque des résultats précis sont nécessaires.

Le processus d'interpolation ou d'extrapolation utilisé dans certains laboratoires de calcul est bien un moyen d'éliminer l'erreur due au découpage des éléments de Bergeron.

Une procédure d'interpolation est nécessaire dans la méthode d'intervalles de temps spécifiés. L'interpolation est aussi nécessaire s'il y a une vitesse d'onde variable due aux propriétés des fluides variables, une vitesse dépendante de la pression, ou des propriétés variables des matériaux constituant la paroi. Additionnellement, les interpolations peuvent être utiles pour maintenir une marche de temps commune dans le système à multiples conduites. Cependant, il y a un désavantage majeur dans l'utilisation d'interpolation puisque l'amortissement artificiel et numérique est introduit dans les résultats. Il est plus critique dans les composants de l'amortissement à haute fréquence dans les

transitoires où des changements se produisent dans une marche de temps unique. [20]

Il est évident que la connaissance même approximative des erreurs serait très utiles. L'analyse des erreurs introduites par l'utilisation de la méthode des caractéristiques a été également étudiée par **COMBES** et **ZAOUÏ** [08] (1967) en considérant le cas très simple d'une conduite constituée de deux tronçons de caractéristiques différentes. Ainsi ils ont essayé de trouver comment varie l'erreur faite entre le calcul avec le pas Δt correspondant au plus grand commun diviseur réel des temps l_i/c_i , et un calcul fait avec un pas de temps Δt plus grand correspondant à une disposition un peu différente des deux tronçons.

Deux études ont été faites dans un domaine très voisin et qui ont trait à l'appréciation de deux autres sortes d'erreurs dans les épures du coup de bélier :

- Mme **E. BIRO**, lors du IX^{ème} congrès de l'ANRH (Dubrovnik, septembre 1961), a présenté le cas de l'erreur introduite par l'approximation de la pente moyenne pondérée des droites de Bergeron.

- Lors de sa communication au congrès de Barcelone de l'AIDE, **M. CHAPPEY** (1965) a présenté le cas d'erreur introduite par la présentation de la perte de charge linéaire sous forme de diaphragme.

6.2 Equations de base :

Les équations simplifiées de continuité et de mouvement lors d'un régime transitoire, dans le cas d'un fluide parfait peuvent s'écrire de la façon suivante :

- **Conservation de la masse :**

$$\frac{dH}{dt} + \frac{C^2}{g} \cdot \frac{dU}{dX} = 0 \quad 6.1$$

- **Conservation de la quantité de mouvement :**

$$\frac{dU}{dt} + g \cdot \frac{dH}{dX} = 0 \quad 6.2$$

où : H : la hauteur piézométrique

U : la vitesse d'écoulement du fluide

X : abscisse le long de la conduite

t : le temps.

En appliquant la méthode des caractéristiques à ces équations, on obtient les quatre équations différentielles suivantes, [21], [22] .

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} \pm \frac{C}{g} \cdot \frac{dU}{dt} = 0 \\ \frac{dX}{dt} = \pm C \end{cases} \quad 6.3$$

On peut discrétiser ces équations par des différences finies en utilisant un maillage rectangulaire en espace- temps. (Figure N°6.1)

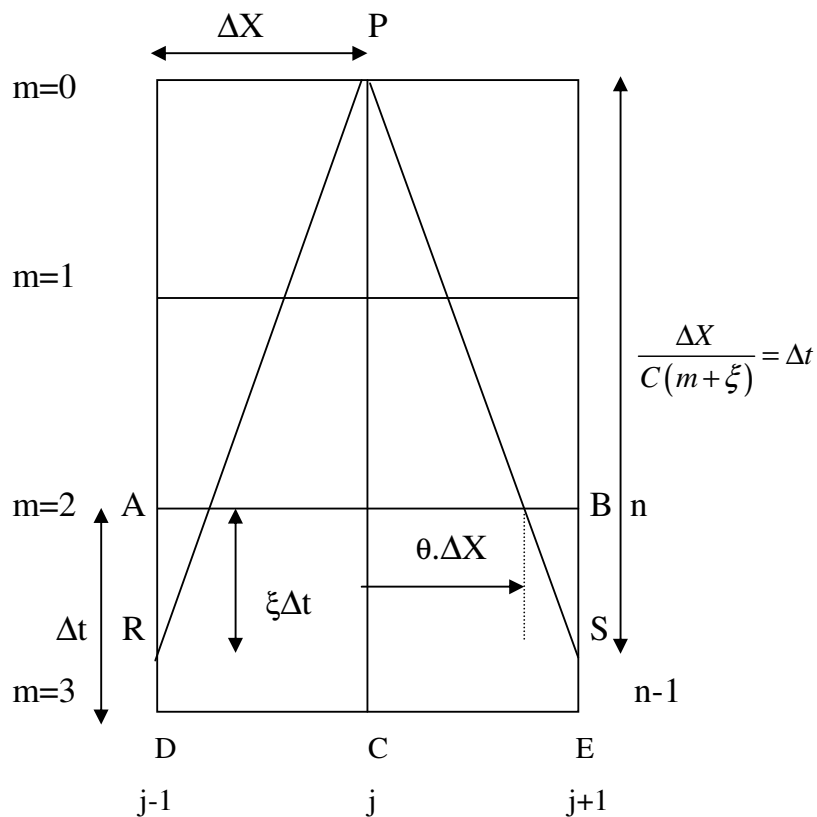


Figure N°6.1 : Représentation du maillage pour discrétisation des équations des lignes caractéristiques.

Les équations 6.3 peuvent donc s'écrire ainsi :

- pour la caractéristique C+ :

$$H_p - H_R = -\frac{C}{g}(U_p - U_R) \quad 6.4$$

- pour la caractéristique C- :

$$H_p - H_S = \frac{C}{g}(U_p - U_S) \quad 6.5$$

6.3. Interpolation numérique :

La procédure de la méthode d'interpolation est nécessaire pour définir la position des points inter nodaux. On se sert de l'interpolation linéaire dans le temps qu'on l'applique pour le cas de la figure N°6.1

Dans la figure N°6.1, les points R et S ne sont pas des nœuds du maillage et leurs valeurs ne sont donc pas connues. Ainsi, on peut se donner une fonction ϕ comme étant la variable (H ou U) et l'interpoler.

en effectuant un développement de Taylor: $\phi_{j-1}^m = \phi_R - \xi \Delta t \frac{d\phi_R}{dt}$

ou tout simplement :
$$\phi_{j-1}^{m+1} = \phi_R + (1 - \xi) \Delta t \frac{d\phi_R}{dt} \quad 6.6$$

où $\xi \Delta t$ est le temps qui sépare les points A et R comme les points B et S. Le paramètre ξ varie entre 0 et 1, et a une grande importance pour le calcul de l'amortissement comme on le voit un peu plus loin.

On trouve ainsi :

$$\phi_R = (1 - \xi) \phi_{j-1}^m + \xi \phi_{j-1}^{m+1} \quad 6.7$$

En effectuant ce même raisonnement sur l'autre droite caractéristique, on obtient :

$$\phi_S = (1 - \xi)\phi_{j+1}^m + \xi\phi_{j+1}^{m+1} \quad 6.8$$

En injectant 6.7 et 6.8 dans les relations 6.4 et 6.5, on trouve le système :

$$H_p - \frac{1}{2}(1 - \xi)(H_A + H_B) - \frac{1}{2}\xi(H_D + H_E) + \frac{C}{2g}[(1 - \xi)(U_B - U_A) + \xi(U_E - U_D)] = 0 \quad 6.9$$

$$U_p - \frac{1}{2}(1 - \xi)(U_A + U_B) - \frac{1}{2}\xi(U_D + U_E) + \frac{g}{2C}[(1 - \xi)(H_A - H_B) + \xi(H_E - H_D)] = 0 \quad 6.10$$

La solution de ce système peut se mettre sous la forme d'une série de Fourier,[26] :

$$\phi(X, t) = \phi(j\Delta X, m\Delta t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \exp[i(\sigma_k X + \beta_k t)] \quad 6.11$$

avec :

$$\sigma_k = \frac{k\pi}{L_k}$$

$$\beta_k = \frac{k\pi}{T}$$

σ_k et β_k : désignent les coefficients dans la série de Fourier.

T : désigne la période de l'onde

L_k : longueur d'onde au $k^{\text{ième}}$ harmonique

En s'intéressant au $k^{\text{ième}}$ terme, on peut écrire :

$$\phi_A(X, t) = \phi((j-1)\Delta X, m\Delta t) = \phi_k \exp[i(\sigma_k (j-1)\Delta X + \beta_k m\Delta t)] \quad 6.12$$

$$\phi_B(X, t) = \phi((j-1)\Delta X, m\Delta t) = \phi_k \cdot \exp[i(\sigma_k (j+1)\Delta X + \beta_k \cdot m\Delta t)] \quad 6.13$$

$$\phi_D(X, t) = \phi((j-1)\Delta X, (m+1)\Delta t) = \phi_k \cdot \exp[i(\sigma_k (j-1)\Delta x + \beta_k (m+1)\Delta t)] \quad 1.14$$

$$\phi_E(X, t) = \phi((j+1)\Delta X, (m+1)\Delta t) = \phi_k \exp[i(\sigma_k (j+1)\Delta X + \beta_k (m+1)\Delta t)] \quad 6.15$$

$$\phi_p(X,t) = \phi(j\Delta X, 0) = \phi_k \cdot \exp[i(\sigma_k j\Delta X)], \quad 6.16$$

ou bien :

$$\phi_p(X,t) = \phi(j\Delta X, (m+n)\Delta t) = \phi_k \exp[i(\sigma_k j\Delta X + \beta_k (m+n)\Delta t)] \quad 6.17$$

En particulier pour le choix, les coordonnées en espace – temps se comprennent d’autant mieux en regardant la figure N°6.2

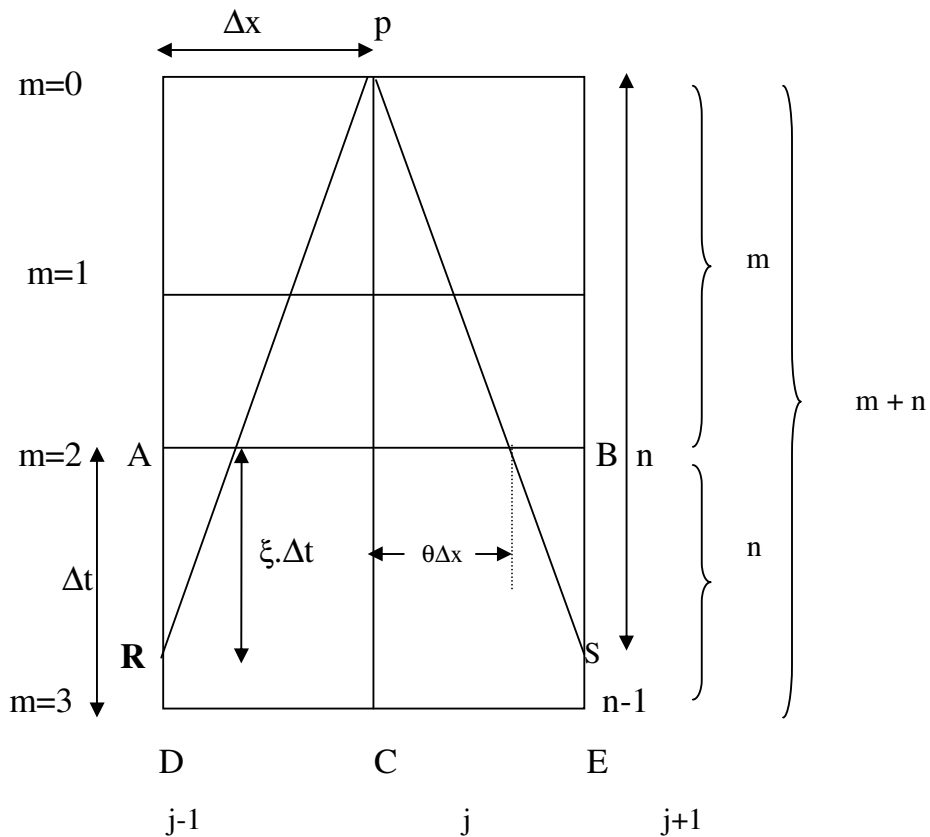


Figure N°6.2 : maillage de discrétisation.

Les paramètres m et n désignent respectivement le coefficient de remontée dans le temps, et le nombre de pas de temps. Ainsi exprimées, on peut donc

injecter les nouvelles valeurs de ϕ_A , ϕ_B , ϕ_D , ϕ_E et ϕ_P dans l'équation 6.9 et 6.10

On procède aux calculs intermédiaires.

En tenant compte que [23] et [24] :

$$\cos(\sigma_k \Delta X) = \frac{\exp(i\sigma_k \Delta X) + \exp(-i\sigma_k \Delta X)}{2} \text{ et,}$$

$$\sin(\sigma_k \Delta X) = \frac{\exp(i\sigma_k \Delta X) - \exp(-i\sigma_k \Delta X)}{2i} \quad 6.18$$

on obtient après arrangement :

$$\phi_B + \phi_A = \phi_K 2 \cos(\sigma_k \Delta X) \exp(i(\beta_k m \Delta t + \sigma_k j \Delta X)) \quad 6.19$$

$$\phi_E + \phi_D = \phi_K 2 \cos(\sigma_k \Delta X) \exp(i(\beta_k (m+1) \Delta t + \sigma_k j \Delta X)) \quad 6.20$$

$$\phi_B - \phi_A = \phi_K 2i \sin(\sigma_k \Delta X) \exp(i(\beta_k m \Delta t + \sigma_k j \Delta X)) \quad 6.21$$

$$\phi_E - \phi_D = \phi_K 2i \sin(\sigma_k \Delta X) \exp(i(\beta_k (m+1) \Delta t + \sigma_k j \Delta X)) \quad 6.22$$

Après simplification par $\exp[i(\beta_k m \Delta t + \sigma_k j \Delta X)]$, on trouve :

$$H_k \left\{ e^{i\beta_k m \Delta t} - \cos(\sigma_k \Delta X) [1 - \xi + \xi e^{-i\beta_k \Delta t}] \right\} + \frac{c}{g} U_k i \sin(\sigma_k \Delta X) [1 - \xi + \xi e^{-i\beta_k \Delta t}] = 0 \quad 6.23$$

$$U_k \left\{ e^{i\beta_k m \Delta t} - \cos(\sigma_k \Delta X) [1 - \xi + \xi e^{-i\beta_k \Delta t}] \right\} + \frac{g}{c} H_k i \sin(\sigma_k \Delta X) [1 - \xi + \xi e^{-i\beta_k \Delta t}] = 0 \quad 6.24$$

On pose $\Psi = e^{i\beta_k \Delta t}$ qui représente un facteur complexe d'amplification dépendant de la stabilité et de la dispersion du schéma numérique. On peut mettre ce système d'équations sous la forme suivante :

$$\alpha_1 = \Psi^{m+1} - \cos(\sigma_k \Delta X) [(1 - \xi) \Psi + \xi] \quad 6.25$$

$$\beta_1 = \sin(\sigma_k \Delta X) [(1 - \xi) \Psi + \xi] \quad 6.26$$

L'étude des valeurs propres d'un tel système donne :

$$\lambda_1^l = \alpha_1 \pm i\beta_1 \quad 6.27$$

donc on trouve :

$$\Psi^{m+1} - [\Psi(1 - \xi) + \xi] e^{\pm i\sigma_k \Delta x} = 0 \quad 6.28$$

On peut définir l'amortissement R_1 comme le module du rapport complexe entre la solution numérique et la solution réelle après un temps précis de parcours de l'onde. C'est la mesure de l'amortissement introduit numériquement, [19].

$$R_1 = |\Psi| e^{j_k(m+\xi)} \quad 6.29$$

On peut définir la dispersion D comme le module du rapport de la vitesse de propagation de la solution numérique et de la vitesse de propagation de la solution réelle. C'est la mesure du degré de dispersion introduit numériquement [25].

$$D = \frac{R'_2 j_k (m + \xi)}{2\pi \xi} \quad 6.30$$

avec :
$$j_k = \frac{L_k}{\Delta x}$$

où : j_k - représente le nombre d'intervalles Δx dans l'espace.

R_2 désigne l'angle de déphasage de la fonction Ψ .

Ces différentes expressions de l'amortissement et de la dispersion se trouvent fréquemment dans la littérature [26],[19],et[21], mais cette présentation n'explique pas leur développement avec les paramètres qui les composent.

Différents calculs numériques permettent d'observer que plus la remontée dans le temps est importante, c'est à dire plus m augmente, moins l'amortissement numérique est important, [19].

Afin de mieux analyser l'interpolation numérique, l'expression 6.28 sera développée et explicitée dans un plan complexe des paramètres β_k et σ_k pour la $k^{\text{ième}}$ harmonique, à chaque point de singularité, [23]et [24]. La représentation graphique en fonction des paramètres variables m , ξ , et j_k , nécessite un choix de pas de temps. L'étude a été envisagée d'abord pour le cas sans discrétisation, où la longueur entière de la conduite a été considérée. A travers ces figures, on remarque clairement que lorsque le coefficient m de remontée dans le temps augmente, la fonction d'interpolation tend vers la fonction créneau. L'erreur, représentée par la différence entre la fonction approchée et la fonction exacte, diminue avec l'augmentation du temps et du coefficient m de remontée dans le temps.

6.3.1 Interpolation temporelle :

On envisage l'interpolation entre deux points du maillage par rapport au facteur temps (t). Par ailleurs, on désigne par $U_{ex}(t)$, la fonction exacte passant par les nœuds du maillage, et $U_{app}(t)$, la fonction approchée. Il en résulte donc une certaine erreur entre ces deux fonctions. On propose le développement de Taylor et on essaye d'explicitier ces deux fonctions par rapport à la variable temps, entre deux points

(figure N6°3) ,[26].

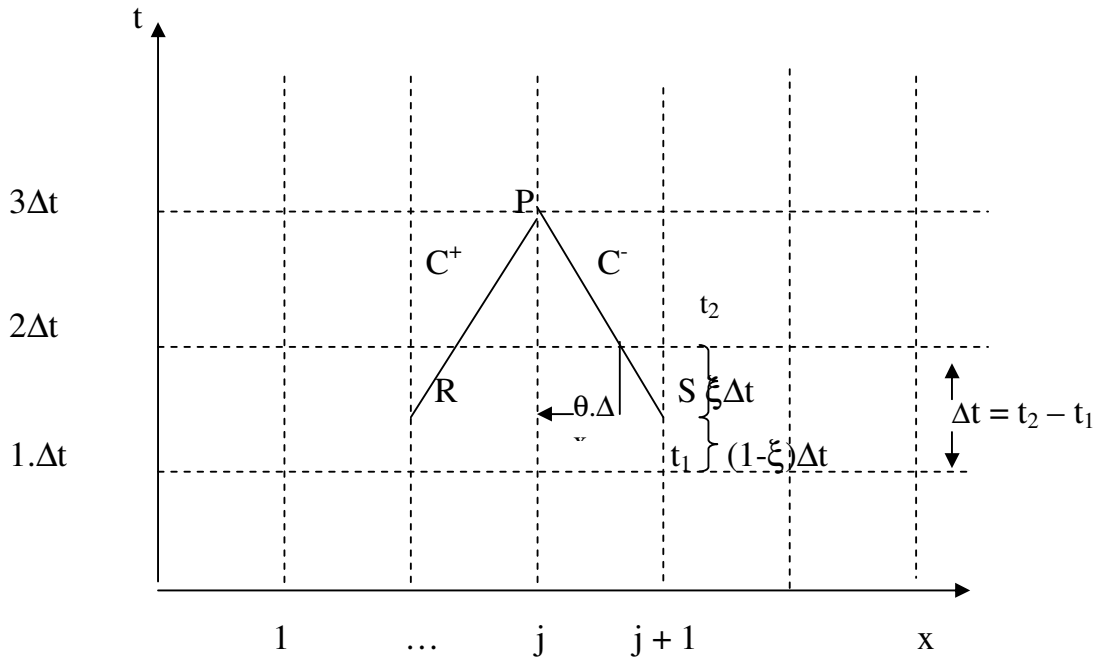


Figure N°6.3 : Interpolation entre deux points

On peut donc écrire :

$$U_{app}(t) = \sum N_i \cdot U_{ex}(t) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left[\sum N_i (t_i - t)^{n-1} \right] \cdot \frac{\partial^{n-1} \cdot U_{ex}}{\partial t^{n-1}} + \frac{1}{n!} \cdot \sum N_i \cdot (t_i - t)^n \cdot M_i \quad 6.31$$

Avec :

$$M_i = \frac{\partial^n U_{ex}}{\partial t^n}$$

N_i –représente le polynôme d'interpolation linéaire.

Dans ce raisonnement, on suppose par hypothèse que : $M_1 = M_2$.

Par application entre deux points ($n=2$), on obtient :

$$N_1 = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \text{ et } N_2 = \frac{t_1 - t}{t_2 - t_1} \quad 6.32$$

On pose : $t_2 - t_1 = \Delta t$; $t_2 - t = \xi \cdot \Delta t$ et $t_1 - t = (1 - \xi) \Delta t$.

Après remplacement, et arrangement, on obtient :

$$U(t) = U_{ex} + 2 \cdot \xi \cdot \Delta t \cdot (1 - \xi) U'_{ex} + \frac{1}{2} \cdot \Delta t^2 \cdot \xi \cdot (1 - \xi) U''_{ex} \quad 6.33$$

$$\text{On pose : } U_{ex} = e^{kt}, U'_{ex} = k' e^{kt}, U''_{ex} = k'^2 e^{kt} \quad 6.34$$

k' - désigne une constante.

On obtient une équation du second degré en k' , [20] :

$$U(t) = e^{kt} \left[\frac{1}{2} \Delta t^2 \xi (1 - \xi) k'^2 + 2 \xi \Delta t (1 - \xi) k' + 1 \right] \quad 6.35$$

le discriminant de cette équation est négatif pour $0 < \xi < 1$:

La relation 6.35 admet des racines complexes de la forme :

$$k'_{1,2} = \alpha \pm i\beta' \quad 6.36$$

$$\text{avec : } \alpha = -\frac{2}{\Delta t}$$

et la solution sera de la forme :

$$U(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta' t) \quad 6.37$$

$$\text{avec : } \beta' = \frac{2\pi}{T}, \text{ et } \Delta X = c \Delta t (m + \xi)$$

Par conséquent la fonction approchée sera :

$$U_{app}(t) = H e^{-\frac{2t}{\Delta t(m+\xi)}} \cdot \sin \beta' t \quad 6.38$$

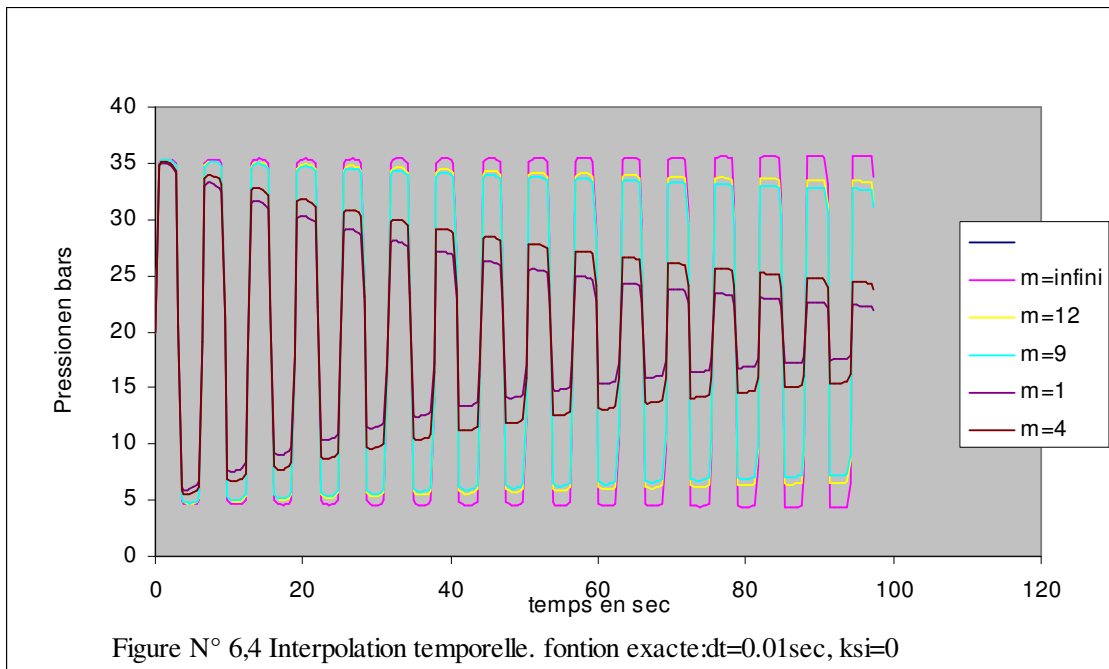
La fonction exacte s'obtient pour $\xi = 0$, les pieds des caractéristiques aboutissent aux nœuds du maillage :

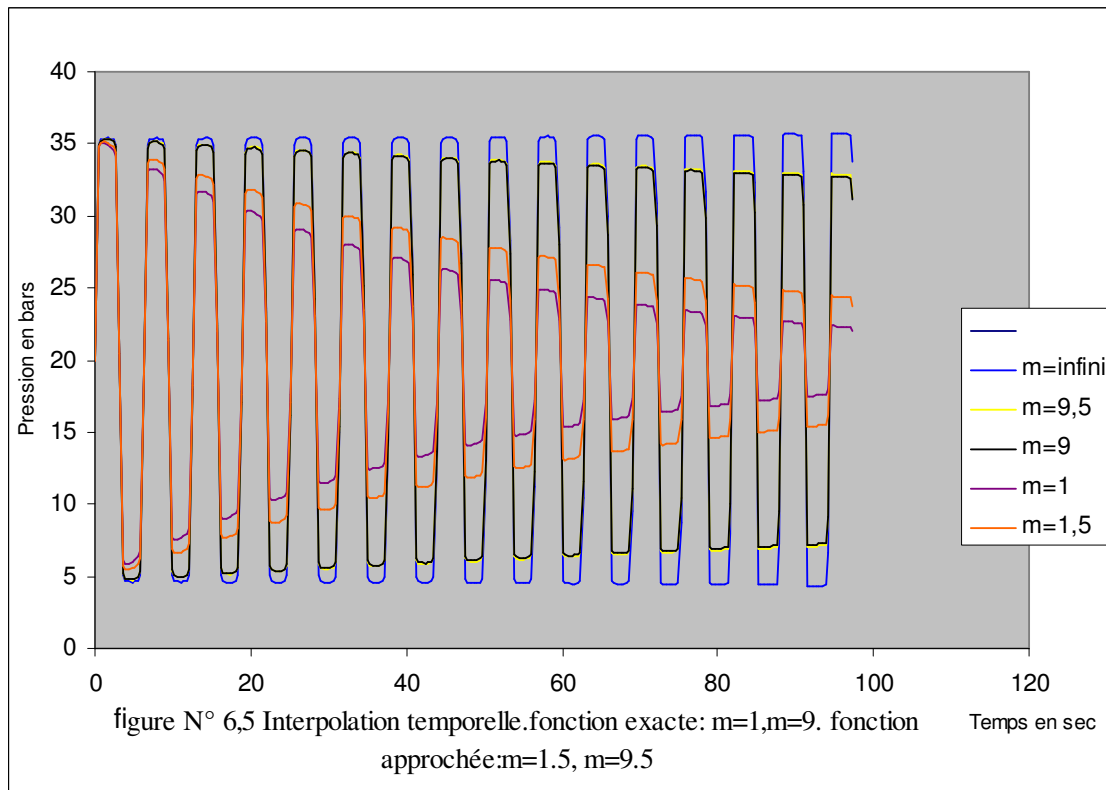
$$U_{ex}(t) = e^{-\frac{2t}{m\Delta t}} \cdot H \sin \frac{2\pi t}{T} \quad 6.39$$

On remarque que lorsque le nombre de pas (m) tend vers l'infini, la fonction exacte $U_{ex}(t)$ et la fonction approchée $U_{app}(t)$ tendent vers la relation :

$$U_{ex}(t) = U_{app}(t) = H \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t \quad 6.40$$

Afin d'illustrer cette étude, on représente graphiquement les fonctions (6.38), (6.39) et (6.40) pour différentes valeurs de m et ξ . (Figures N°6.4 et Figure N° 6.5)





6.3.2 Interpolation spatiale :

Le même raisonnement s'opère pour une interpolation spatiale en remplaçant t par X , m par j et ξ par θ . on obtient ainsi :

La fonction exacte :

$$U_{ex}(t) = e^{-\frac{2X}{j\Delta X}} \cdot H \sin \frac{2\pi X}{L} \quad 6.41$$

La fonction approchée :

$$U_{app}(t) = e^{-\frac{2X}{(j+\theta)\Delta X}} \cdot H \sin \frac{2\pi X}{L} \quad 6.42$$

Pour une longueur d'onde donnée, si l'intervalle d'espace augmente, la fonction exacte $U_{ex}(X)$ tend vers la fonction approchée $U_{app}(X)$, et l'erreur tend vers zéro.

On peut écrire donc :

$$U_{ex}(X) = U_{app}(X) = H \sin \frac{2\pi}{L_k} X \quad 6.43$$

6.4 Détermination de l'erreur due à l'interpolation temporelle :

La théorie de calcul des erreurs dues à l'interpolation permet de donner la fonction erreur qui sera déduite à partir des relations (6.38) et (6.39) comme étant la différence entre la fonction exacte et la fonction approchée,[23]et[26].

$$\text{Ou bien : } E_{er}(t) = H e^{-\frac{2t}{\Delta t(m+\xi)}} \cdot \sin \beta t - e^{-\frac{2t}{m\Delta t}} \cdot H \sin \frac{2\pi t}{T} \quad 6.44$$

Dans l'expression (6.44), on remarque que lorsque le paramètre ξ d'interpolation est égal à la valeur 0, l'erreur est nulle ; et par conséquent la fonction approchée sera égale à la fonction exacte, avec aboutissement des pieds des caractéristiques aux nœuds de calcul. De même, on constate que pour des

valeurs données des paramètres m et ξ , il y a amortissement de l'erreur dans le temps ; et pour un accroissement du coefficient (m) de remontée dans le temps l'erreur tendra très faiblement vers zéro. Dans tous les cas , l'erreur diminue lorsque la valeur de epsilon diminue.

6.5 Amortissement numérique :

On va à présent développer le facteur d'amortissement R_1 , en étudiant sa variation en fonction des paramètres $m, \xi, \text{ et } j_k$, à travers des courbes.

L'amortissement dépend des paramètres physiques et numériques du système, c'est à dire de la période de l'onde T , de l'intervalle de temps Δt , du facteur de remontée dans le temps m , et du degré de l'interpolation ξ .

En calculant le module de l'expression (28), on trouve :

$$|\Psi^{m+1}| = \left| \Psi(1-\xi) + \xi e^{\pm i\sigma_k \Delta t} \right| \quad 6.45$$

$$|\Psi^{m+1}| = \left| (1-\xi) \cos(\beta_k \Delta t) + \xi + i(1-\xi) \sin(\beta_k \Delta t) \right|$$

$$|\Psi^{m+1}| = \left[\xi^2 + (1-\xi)^2 + 2\xi(1-\xi) \cos(\beta_k \Delta t) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|\Psi^{m+1}| = \left[1 - 2\xi(1-\xi)(1 - \cos(\beta_k \Delta t)) \right]^{\frac{1}{2}} \quad 6.46$$

on pose donc : $R_1 = \left[1 - 2\xi(1-\xi)(1 - \cos(\beta_k \Delta t)) \right]^{\frac{1}{2(m+1)}} \quad 6.47$

La dépendance de l'amortissement par rapport à m , ξ et, $\beta_k \Delta t$ est mise en évidence grâce aux courbes données par les figures N°6.06, 07,08,09 et 10 qui représentent l'amortissement en fonction de ξ à différentes valeurs de m fixées. Ces courbes montrent bien les propriétés de convergence et de stabilité du schéma. En effet, la stabilité est obtenue car R_1 est partout inférieur ou égal à 1 en particulier aux points $\xi = 0$ et $\xi = 1$, c'est à dire sur les nœuds du maillage.

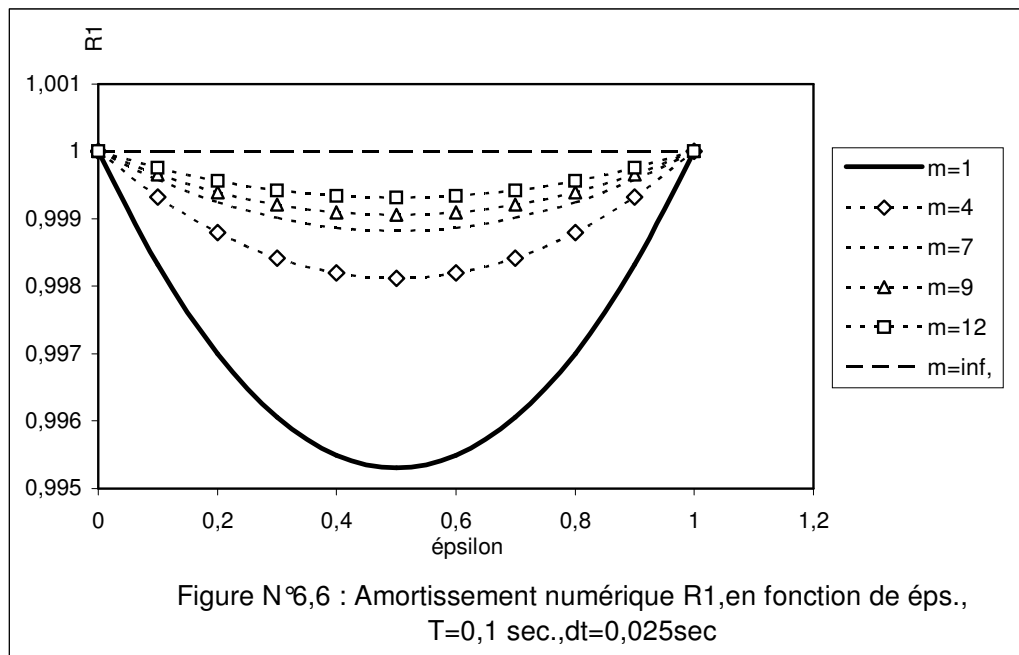
On remarque, à travers ces figures, quand le paramètre m augmente, les courbes caractérisant l'amortissement, s'approchent de l'horizontale passant par la valeur 1. C'est ce qui montre que le coefficient R_1 d'amortissement diminue. Cette diminution est également constatée lorsque la période T de l'onde augmente. Cependant pour une même période T , et avec un nombre m constant de pas de remontée, le coefficient d'amortissement R_1 diminue jusqu'à une valeur correspondant à $\xi=0,5$, puis augmente jusqu'à 1. Ce qui permet de dire que l'utilisation de ce coefficient montre bien sa validité dans la modélisation numérique. A la base de la figure (6.10), on peut écrire, pour $\xi = 0$, que :

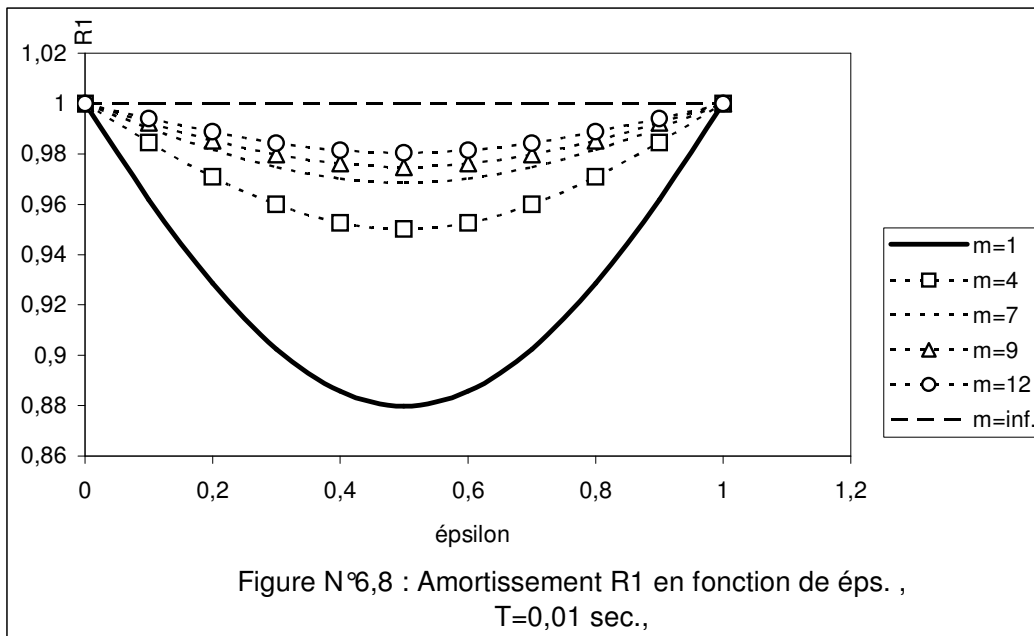
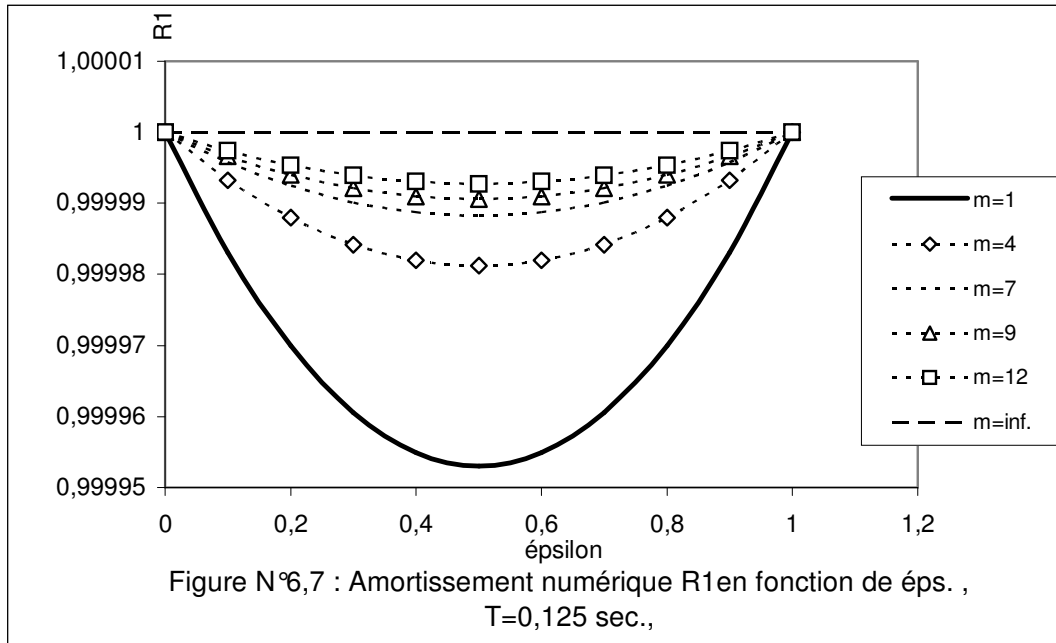
$$\frac{\Delta X}{m.C} = \Delta t \quad 6.48$$

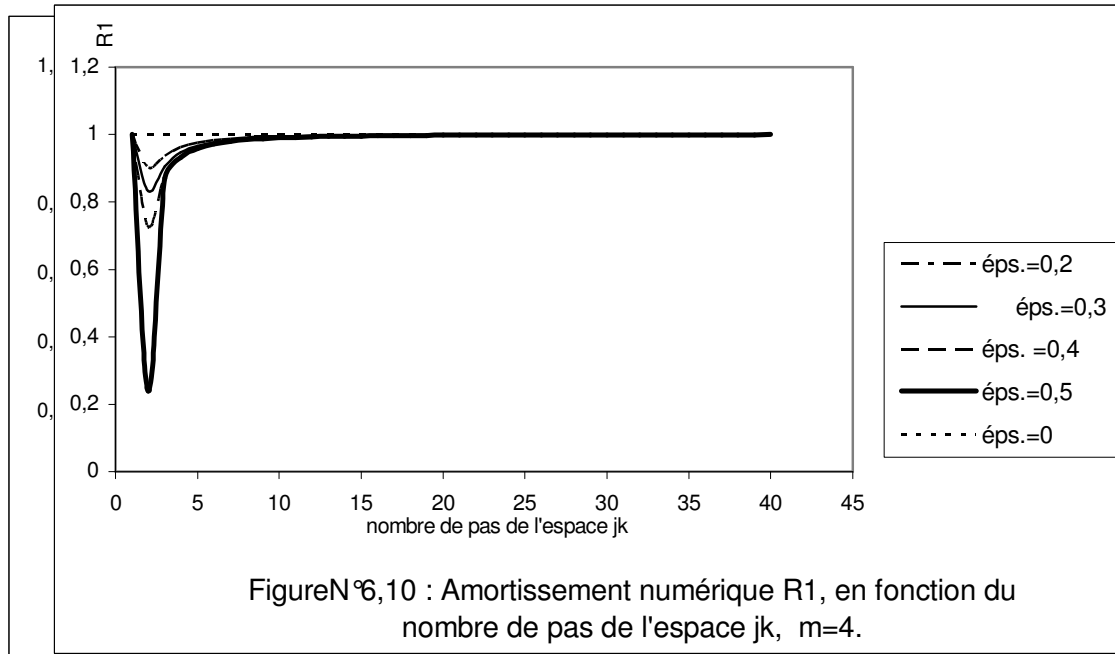
et tenant compte que $j_k = \frac{L_k}{\Delta X}$, l'expression (47) devient :

$$R_1 = [1 - 2\xi \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \cos(\frac{2\pi}{j_k}))]^{\frac{1}{2(m+1)}} \quad 6.49$$

L'expression 6.49 montre, cette fois-ci, la dépendance entre le coefficient d'amortissement R_1 , le nombre j_k de pas de l'espace, le degré d'interpolation temporelle ξ , et le paramètre m . Comme le paramètre R_1 tend vers l'unité, Lorsque le facteur j_k augmente, la convergence est démontrée. Ces courbes sont fonctions de ξ , et on observe que plus on utilise des valeurs proches des nœuds, plus l'amortissement est rapide : En effet, la solution au point $\xi = 0,5$ est moins précise que celles proches des nœuds, et donc moins amortie.







6.6 La dispersion numérique :

Le facteur de dispersion est défini comme étant le rapport de la vitesse de l'onde numérique sur la vitesse de la solution analytique [19]et [26].

On considère la partie réelle de l'expression (6.45), soit

$$\psi^{m+1} - [(1-\xi)\psi + \xi] \cos \sigma_K \cdot \Delta X = 0 \quad 6.50$$

qui peut aboutir à :

$$\psi^{m+1} = [(1-\xi)\psi + \xi] \cos \sigma_K \cdot \Delta X \quad 6.51$$

ou bien :

$$\psi^m = [(1-\xi) + \xi \psi^{-1}] \cos \sigma_K \cdot \Delta X \quad 6.52$$

avec :
$$\psi = e^{i\beta\Delta t} = \cos \beta\Delta t + i \sin \beta\Delta t \quad 6.53$$

En remplaçant ψ par sa valeur dans le second membre, on trouve :

$$\psi^m = \left[(1-\xi) \cos \sigma_k \Delta X + \xi \cdot \cos \sigma_k \Delta X (\cos \beta\Delta t - i \sin \beta\Delta t) \right] \quad 6.54$$

Si l'on pose que :

$$\sigma_k = \frac{2\pi}{L_k} \quad \text{et} \quad \Delta X = \frac{X}{j_k} \quad 6.55$$

On peut écrire :

$$\psi^m = \left[(1-\xi) \cos \frac{2\pi}{L_k} \cdot \frac{X}{j_k} + \xi \cdot \cos \frac{2\pi}{L_k} \frac{X}{j_k} (\cos \beta\Delta t - i \sin \beta\Delta t) \right] \quad 6.56$$

Pour $x=0$, au droit de la vanne :

$$\psi^m = \left[(1-\xi) + \xi (\cos \beta\Delta t - i \sin \beta\Delta t) \right] \quad 6.57$$

$$\psi^m = \left[(1-\xi) + \xi \cos \beta\Delta t - i \xi \sin \beta\Delta t \right] \quad 6.58$$

L'argument de l'expression (8.59) sera défini par :

$$\theta = \text{artg} \left[\frac{\xi \cdot \sin \beta\Delta t}{1 - \xi + \xi \cos \beta\Delta t} \right] \quad 6.59$$

On a d'autre part :

$$\frac{C\Delta t}{\Delta X} = \frac{1}{m + \xi} \quad 6.60$$

ou bien :
$$\Delta t = \frac{\Delta X}{c(m + \xi)} \quad 6.61$$

Tenant compte que :

$$\beta' = \frac{2\pi}{T}; \quad \text{et} \quad j_k = \frac{L_k}{\Delta X} \quad 6.62$$

on obtient :

$$\beta' \Delta t = \frac{2\pi}{j_k (m + \xi)} \quad 6.63$$

Et par conséquent :

$$\theta = \text{artg} \left[\frac{\xi \sin \left[\frac{2\pi}{j_k (m + \xi)} \right]}{1 - \xi + \xi \cos \left[\frac{2\pi}{j_k (m + \xi)} \right]} \right] \quad 6.64$$

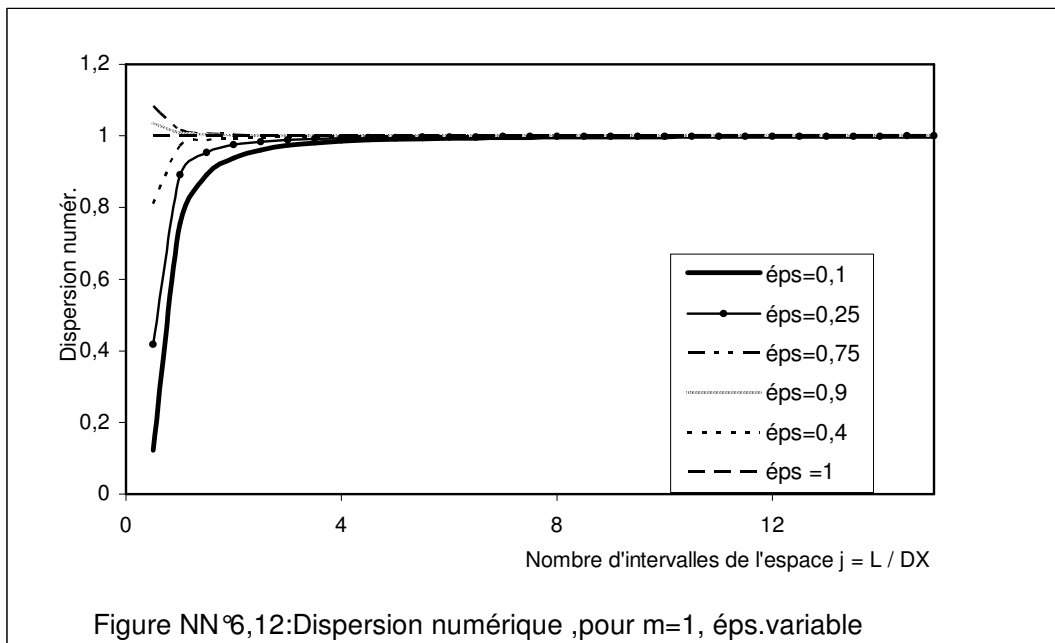
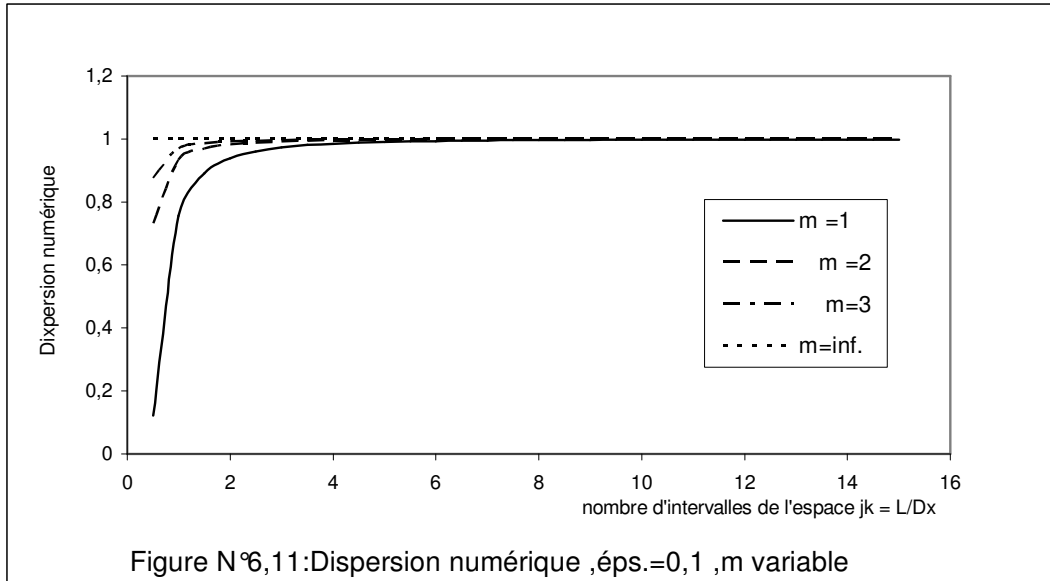
Tenant compte de la définition, on peut écrire la relation donnant la dispersion D_{disp} :

$$D_{\text{disp}} = \frac{j_k (m + \xi)}{2\pi \cdot \xi} \cdot \text{arctg} \left[\frac{\xi \cdot \sin \left[\frac{2\pi}{j_k (m + \xi)} \right]}{1 - \xi + \xi \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{j_k (m + \xi)} \right]} \right] \quad 6.65$$

On rappelle que : L_k représente la longueur d'onde de la k- ième harmonique et j_k le nombre d'intervalles d'espace dans cette longueur d'onde .

On remarque que pour des longueurs d'onde faibles, ou pour un nombre d'intervalles faible, la dispersion de la solution numérique évolue avec ce dernier. En effet, on peut constater que l'atténuation et la dispersion numérique sont minimales lorsque les paramètres ξ et j_k sont maximaux. Il est donc nécessaire de choisir $\xi = 1$ (ou $\xi=0$), et un pas spatial suffisamment petit pour éliminer ces erreurs numériques. Les représentations graphiques (figures N°6.11 12, 13 , 14, et 15) montrent la variation de la dispersion numérique en fonction

du nombre j_k d'intervalles d'espace , à différents nombres m de pas de remontée dans le temps pour un ξ (éps.) constant .



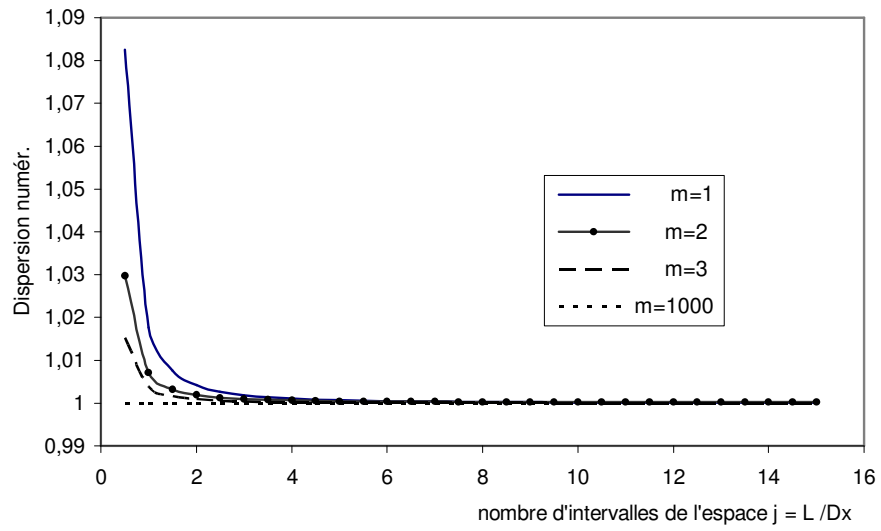


Figure N°13 :Dispersion numérique ,pour $\epsilon=0,75$, m variable

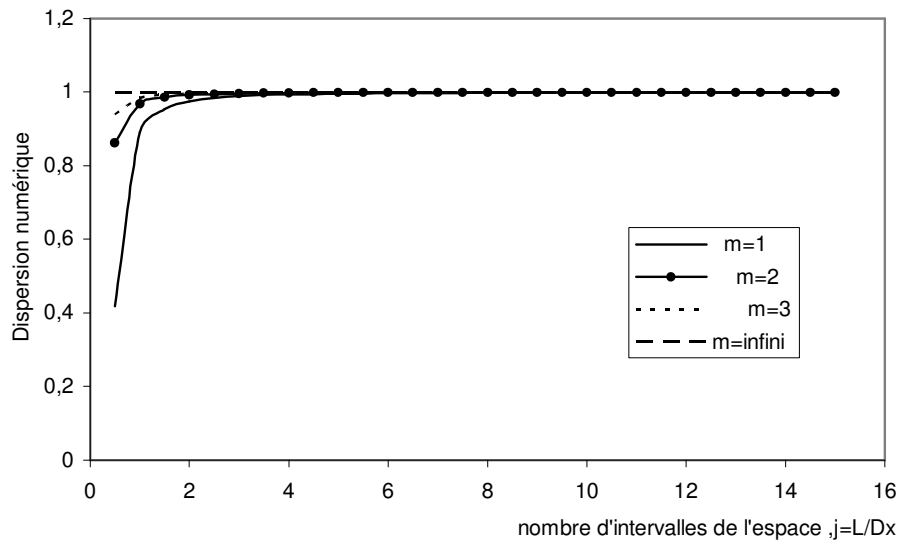
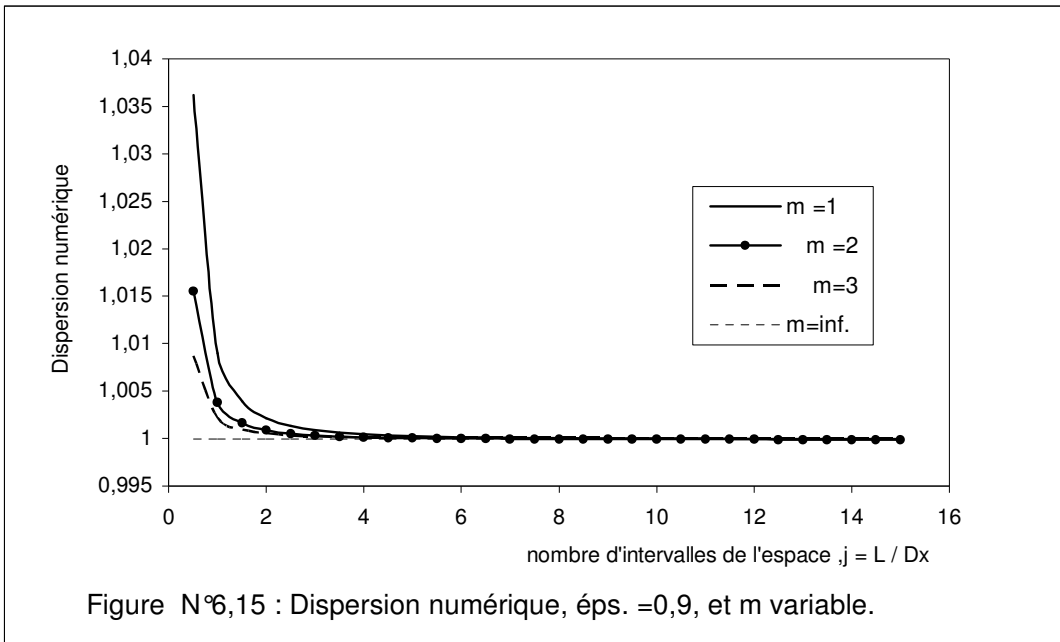


Figure N°14:Dispersion numérique ,pour $\epsilon=0,25$,et m variable



6.7 Conclusion :

Dans le domaine du régime transitoire, habituellement la méthode des caractéristiques considère le maillage de discrétisation à pas constants. Son utilisation considère toujours les pieds des caractéristiques aboutissant aux nœuds de calcul.

Le calcul aux nœuds n'est pas pris en considération dans cette variante. Il a été constaté que ces erreurs sont temporelles et spatiales. Afin de quantifier ces dernières, l'utilisation des séries de Fourier, le développement de Taylor, et la méthode de l'interpolation linéaire entre deux nœuds, ont été utilisés. A travers ce raisonnement, deux fonctions numériques exactes et approchées ont été développées et présentées graphiquement. L'analyse numérique de ces fonctions a permis la déduction de deux coefficients numériques qui dépendent du nombre de pas de remontée dans le temps et dans l'espace. Représentés graphiquement, ces deux paramètres numériques convergent vers l'unité, dans le temps et dans

l'espace. C'est ce qui montre bien la stabilité des schémas étudiés, quelque soit la période considérée.

CONCLUSION GENERALE.

Nous avons abordé ce travail par un aperçu bibliographique en décrivant les travaux antérieurs sur le régime transitoire. Il a été remarqué que le paramètre fondamental, qui est la célérité d'onde, a été amplement étudié par les auteurs notamment dans le cas où la conduite est enterrée, chose très utile pour les gestionnaires des systèmes d'eau potable. Différentes méthodes numériques ont été citées et décrites où le privilège réside dans la méthode des équations aux caractéristiques. Il a été constaté que cette dernière est d'une manipulation numérique très aisée. Dans ce travail en se basant sur la méthode des caractéristiques, nous avons procédé à deux étapes d'études :

- Optimiser le coup de bélier dans une conduite durant la période de fermeture sans tenir compte du coup de bélier
- Envisager le cas des caractéristiques entre les nœuds de calcul et donner en conséquence une estimation sur l'évaluation de l'erreur commise par la méthode des caractéristiques

Dans cette étape, nous avons également abordé le problème de la dispersion et l'amortissement numérique qui restent toujours pour nous une initiation à la recherche. Cette étude présente un intérêt d'ordre pratique très bénéfique pour les ingénieurs Hydrauliciens, en vue de la protection de la canalisation. Le problème se pose maintenant comment détermine-t-on la

caractéristique de la vanne pour pouvoir répondre à la première étape ça
ferra l'objet d'une suite de recherche.

ANNEXE

RAPPELS MATHÉMATIQUES :

3.1 Généralité :

3.1.1 Approximation nodale : [27]

Un modèle mathématique d'un système physique fait intervenir plusieurs variables ou fonction dites exactes $U_{ex}(X)$, celles-ci sont représentées par des fonctions approchées $U(X)$ telles que la différence :

$$e(X) = U(X) - U_{ex}(X) \quad (1)$$

Soit assez petite pour l'objectif visé.

Pour construire une fonction approchée :

- On choisit un ensemble fini de fonctions dépendant de n paramètres a_i :

$$U(X, a_1, a_2, \dots, a_n)$$

- Déterminer les paramètres a_1, a_2, \dots, a_n pour satisfaire la condition (1) par exemple en faisant coïncider $U_{ex}(X)$ et $U(X)$ en n points X_1, X_2, \dots, X_n

La fonction approchée U est le plus souvent linéaire en a_i :

$$U(X) = P_1(X)a_1 + P_2(X)a_2 + \dots + P_n(X)a_n \quad (2)$$

P_1, P_2, \dots, P_n Sont des fonctions connues linéairement indépendantes telles que des polynômes ou des fonctions trigonométriques (chaque fonction ne peut pas être construite par combinaison linéaire des autres fonctions)

a_1, a_2, \dots, a_n sont les paramètres de l'approximation

$$U(X_1) = U_{ex}(X_1) = U_1$$

$$U(X_2) = U_{ex}(X_2) = U_2$$

$$U(X_n) = U_{ex}(X_n) = U_n$$

La fonction approchée (2) s'écrit alors :

$$U(X) = N_1(X)U_1 + N_2(X)U_2 + \dots + N_n(X)U_n \quad (3)$$

Définition :

- Les paramètres a_i sont les paramètres généraux de l'approximation
- les paramètres U_i sont les paramètres nodaux ou variables nodales de l'approximation
- La relation (3) définit une approximation nodale
- $P(X)$ sont les fonctions de base de l'approximation
- Les fonctions $N(X)$ sont les fonctions d'interpolation

L'approximation nodale possède deux propriétés fondamentales

a/ $U(X_i) = U_i$ les fonctions N_i vérifient $N_j(X_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

b/L'erreur d'approximation définie par $e(x) = U(X) - U_{ex(x)}$ s'annule en tous les nœuds X_i $e(X_i) = 0$

3.2 Expression de la fonction approchée :

Choisissons le domaine V un ensemble de n nœuds d'interpolation de coordonnée X_i sur chaque élément V^e (sous domaine de V)

Nous établissons une approximation nodale de type (3)

$$U_{ex}(X) \approx U(X) = N_1(X)U_1 + N_2(X)U_2 + \dots + N_n(X)U_n$$

X appartient à V^e .

U_1, U_2, \dots, U_n sont les valeurs de U_{ex} au $n^{\text{ième}}$ d'interpolation de l'élément u variable nodales, $N(X)$ sont les fonction d'interpolation sur l'élément réel.

L'approximation sur l'élément réel par l'approximation correspondante sur l'élément de référence

$$U_{ex}(\xi) \approx U(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{U_n\}$$

3.3 Erreurs d'approximation sur un élément :

3.3.1 Notion d'erreur d'approximation :

L'erreur d'approximation en tout point de l'élément réel V^e est définie par

$$e(X) = U(X) - U_{ex}(X)$$

L'erreur au point ξ de l'élément de référence est $e(\xi) = U(\xi) - U_{ex}(\xi)$

En deux point X et ξ qui se correspondent dans la transformation les erreurs

$e(X)$ et $e(\xi)$ prennent la même valeur

Pour caractériser l'erreur maximale sur l'élément nous utilisons la norme du maximum de la fonction $e(X)$:

$$|e| = \text{Maximum sur } V^e \text{ de } |e(X)|$$

Pour évaluer l'erreur $e(\xi)$ nous développons en série de Taylor la fonction au voisinage du point ξ . Dans le cas d'une dimension

$$U_{ex}(\xi + h) = U_{ex}(\xi) + h \frac{\partial U_{ex}}{\partial \xi} \Big|_{\xi} + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} U_{ex}}{\partial \xi^{n-1}} \Big|_{\xi} + \frac{h^n}{n!} R_n$$

$$R_n = \frac{\partial^n U_{ex}}{\partial \xi^n} \Big|_{\xi} \text{ sur } [\xi, \xi+h]$$

Supposons que l'élément possède n nœud d'interpolation de coordonnées $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ en choisissant $h = \xi_i - \xi$ l'expression précédente prend la forme

$$U_{ex}(\xi_n) = U_i = U_{ex}(\xi) + (\xi_i - \xi) \frac{\partial U_{ex}}{\partial \xi} \Big|_{\xi} + \dots + (\xi_i - \xi)^{n-1} \frac{\partial^{n-1} U_{ex}}{\partial \xi^{n-1}} \Big|_{\xi} + \frac{h^n}{n!} R_n$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1]-Carlier M. "Hydraulique générale et appliquée, ed.Eyrolles, St Germain Paris 5° 1972
- [2]-F.MASSOUH "Célérité des ondes de coups de Béliér dans les conduites avec prise en compte des contraintes longitudinales ",Revista Pesquisa technologie FEI,Sao paulo-Brasil, Décembre 1983.
- [3]-B.SALAH, Célérité d'onde du coup de bélier dans les conduites en charge enterrée, Thèse de doctorat d'état ENP, 2002
- [4]-Cunge et Wegner [1965], "intégration numérique des équations d'écoulement de Barré de Saint Venant par un schéma implicite des différences finies application au cas d'une galerie tantôt en charge tantôt à surface libre HB N°,1964
- [5]-Nguen Trieu Dong (1990) une méthode numérique de calcul des écoulement non permanents soit à surface libre,soit en charge soit partielles à SL et partiellement EC HB N°2 1990
- [6]-B.Bahrar, E.Rieutord, R.Morel, Modelisation du phénomène du coup de bélier avec prise en compte du comportement réel de la conduite.
- [7]-E.HADJ-TAYEB ", Elaboration d'algorithmes de calcul des écoulement transitoires en conduites dans les mélanges de liquides et de gaz", Thèse de docteur ingénieur INP de Toulouse, 1977
- [8]-G.COMBE, J.ZAOUI, «Analyse des erreurs introduites par l'utilisation de la méthode des caractéristiques dans le calcul du coup de bélier "pp.195-202, revue la houille Blanche n°2,1967.
- [9]-M. MEUNIER,"Les Coups de bélier et la protection des réseaux d'eau sous pression ", ENGREF, pp.67-103, Paris, Décembre 1980.

- [10]-YOUNG Thomas ,''Propagation of Impulse Trough an Elastic '' ,Trans .Royal Society of London,vol.98,pp.164-186,1808
- [11]- ALLIEVI LORENZO, ''General Theory of Perturbed of Water in conduits'' Milan, 1903.
- [12]-N.JOUKOWSKY, ''Water Hammer '' , Proceedings American Water Works Association, P.341, 1900.
- [13]-KORTEWEG D.J.,''Uber die fortpflanzungsgschwindigkeit des shalles in elastisches rohren'', Annalen der physik und chemie, floges 9, Band 5, pp525-542, 1878
- [14]-A.R.HALLIWELL, ''Velocity of Water Hammer wave in an elastic pipe'', journal of hydraulic division, ASCE, Vol.89, pp.1-21, July 1963.
- [15]-J.Parmakiane ''Water Hammer Analysis '' , Dover Publications PP.19-24 New-York,1963
- [16]-F.MASSOUH ''Ondes de pression dans les conduites élastiques et viscoélastiques .Comportement des section circulaire et elliptique ''Thèse d'état de l'université de, Paris VI, 1984
- [17]-F.MASSOUH ''célérité des ondes de coup de bélier dans les conduites avec prise en compte des contraintes longitudinales'', Revista Pesquisa etecnologie FEI,Sao paulo-Brasil,Décembre 1984
- [18]-JEAN LOUP ROBERT, ''Système hydrauliques '' GC 1999 Paris VI, 1984-[18] Bulletin des laboratoires des ponts et chaussées Mai Juin 2001-REF.4364.PP.85.97
- [20]-E.B.WYLIE, V.L., STREETER, et LISHENG SUO, ''Fluid transients in systems'' Prentice-HALL, Englewood Cliffs, pp3-80, New Jersey, 1993.
- [21]-CHINTU LAI, '' Comprehensive method of characteristics models for flows simulation '' , journal of hydraulics engineering, vol.114, n°9, Septembers 1988.

- [22]-G.EVANGELLISTI, M.BOARI, P.GUERRINI, R.ROSSI, 44Some applications of water hammer analysis by the method of characteristics ’’, l’energia electrican°1, 1973.
- [23]-JINN-CHUANG YANG, and EUAN-LUNG,’ on the use of the reach-beak characteristics, method for calculation of dispersion ‘International journal for Numerical methods in fluids,vol.12pp225-235,1991
- [24]-GOURI DHATT,GILBERT TOUZOT,’’Une présentation de la méthode des éléments finis’’,pp12-40,collection université de Compiègne,1981
- [25]-KHAMLICHI ABDELATIF, ‘‘Ondes élasto - plastiques de coups de bélier dans les tuyauteries’’, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1992.
- [26]-I.ZELDOVITCH,A.MYCHKIS,’’Eléments de mathématiques appliquées ,pp90-105,édition Mir Moscou,1974
- [27]-M.VYGODSKI,’’Aide –Mémoire de mathématiques supérieures ‘’, pp721-747,édition Mir,Moscou,1975.