

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
(E.N.S.P)

Département d'Hydraulique

Laboratoire de Recherches des Sciences de l'EAU
(LRS-EAU)



MEMOIRE DE MAGISTER EN SCIENCES DE L'EAU

Présenté par :
Mlle Kherbache Khadidja
Ingénieur d'Etat en Hydraulique ENSP



Titre :

**Elaboration d'un code de calcul
régissant les écoulements sur les
coursiers d'évacuateurs de crues**

Soutenue le 02 Novembre 2008 devant le jury :

| | | |
|--------------------------------------|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <u>Président :</u> | Pr. Ahmed Kettab | Professeur, ENSP d'Alger |
| <u>Directeur du mémoire :</u> | Dr. Saâdia Benmamar | Maître de Conférences, ENSP |
| <u>Examineurs :</u> | Dr. Amar Bilek Dr. Miloud Berkani Mr. Salim Benziada | Chargé de cours, ENSP d'Alger Chargé de cours, ENSP d'Alger Chargé de cours, ENSP d'Alger |
| <u>Invité :</u> | Mr. Abbas Saïd | Directeur, ANBT |

Année Universitaire 2007/2008

Remerciement

Sans l'aide du bon Dieu le tout puissant, ce travail n'aurait pu aboutir. Je le remercie très fort de m'avoir permis de me conduire jusque là. Tout d'abord parce que de lui que nous dépendrons tous, sans exception aucune et à lui que nous exposerons pour jugement dernier y compris la destinée de ce modeste travail. Quiconque a bien fait recevra un équivalent récompense et à l'inverse un équivalent châtiment. A mon humble conscience, je souhaite être par ce travail dans la première catégorie. Seulement ce fruit de nombreuses années de labeur ardu n'aurait pu naître que grâce à la contribution oh ! Combien précieuse de mon entourage, j'aimerais bien les remercier vivement tous.

Néanmoins, grâce à aux bonnes qualités qui sont les leurs, je réserve à la fin de ce travail bien accompli, des sentiments de remerciement très particuliers à un certains nombre de personnes qui m'ont investie par leur connaissance, persévérance, expérience, prodiguer du courage, de l'endurance de la vie tout court.

Nommément, je penserais en tout premier lieu à mes chers parents qui sont la cause de ma vie dans ce monde ci-bas. Aussi, pour m'avoir prodiguer de la bonne éducation, de m'avoir conduit sur le droit chemin et surtout de m'avoir soutenu inlassablement durant toutes mes années d'études. Je ne sais comment les remercier car je n'ai que des mots que j'espère qu'ils leurs font chauds au cœur comme ils l'ont fait pour moi de longues années durant.

A ma directrice de mémoire Mlle Benmamar S. Maître de conférences à l'Ecole Nationale Polytechnique, à qui je destine ici, particulièrement l'expression de mes sincères remerciements pour la confiance qu'elle m'a accordée en me proposant et en dirigeant ce sujet, pour nos discussions fructueuses tout au long des années, pour les orientations durant toute la réalisation de ce mémoire, pour son entière disponibilité, ainsi que son soutien moral et ses encouragements pendant toute la durée de ma post graduation, et pour son immense aide dans les moments difficiles, ainsi que les moments inoubliables de travail que nous avons passés ensemble. Elle a su parfaitement me mettre dans les bonnes conditions de travail.

Un grand merci de m'avoir donné la chance de réaliser ce travail et pour son suivi continu, qu'elle trouve ici l'expression de ma profonde estime.

Au même titre, je remercie intensément tout celui qui m'a fait apprendre quelque chose un jour et à cette occasion, je citerais indistinctement mes enseignants, pour leur interminable abnégation.

Ainsi, Je tiens à remercier très vivement Mr Kettab A. Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique pour l'honneur qu'il me fait de présider ce jour ci, le Jury de ma soutenance. Qu'il trouve ici l'expression de mes vifs remerciements.

Mes sincères remerciements vont à Mr Benziada S. chargé de cours à l'Ecole Nationale Polytechnique d'avoir accepter d'examiner ce modeste travail et d'apporter ses critiques fructueuses.

Mes remerciements sont adressés à Mr Berkani M., Docteur ingénieur de l'ENSEEIT de Toulouse, chargé de cours à l'Ecole Nationale Polytechnique qui a accepté d'examiner ce travail et de faire partie du Jury.

Egalement, mes remerciements vont à Mr Bilek A. Docteur, chargé de cours à l'Ecole Nationale Polytechnique d'avoir bien voulu accepter de juger ce travail et de faire partie du Jury.

J'adresse mes remerciements à Mr Abbas S., Directeur de ANBT d'avoir accepter d'être membre invité d'honneur du Jury.

Je tiens à exprimer toute ma profonde gratitude et ma reconnaissance à Madame Lamari pour toute l'aide matériel et son soutien moral qu'elle m'a apporté durant toute la période de préparation de ce travail pour la bonne réussite de ce modeste mémoire.

Je tiens également à mentionner et à témoigner à tous les enseignants du département Hydraulique, du département de Génie civil et à tous les membres de laboratoire LRS-EAU, pour leurs encouragements et leur gentillesse envers moi.

Sans oublier, mes vifs remerciements vont aussi envers mes amies intimes Hanan, Khawla, Radia, Ahlèm, Mesouda, Fadila, Zhor, Salima et à tous mes collègues étudiants.

Encore une fois, j'adresse mon grand amour à toute ma famille, particulièrement ma mère, mon père, mon frère Mustapha et mes sœurs Manel et Imen.

En fin, à tous ceux qui m'ont apporté une aussi infime contribution positive, matériel et immatériel, et n'ont ménagé aucun effort pour l'aboutissement de ce travail, aussi cher pour moi, je leurs dis simplement merci.

ملخص

يهدف هذا العمل المتواضع إلى إنجاز نموذج تدفق متنوع التهوية تدريجياً الواقع بعد نقطة البداية.

تم تطوير نموذج رياضي يحكم نموذج التدفق متنوع التهوية تدريجياً الواقع بعد نقطة البداية، الذي تحدده المعادلات الأساسية لميكانيكا الموائع.

تم تطوير نموذج عددي آخر الذي يمكن أن يتنبأ بخصائص التدفق متنوع التهوية تدريجياً الواقع بعد نقطة البداية في قناة ذات السطوح المدرجة وقد تم ذلك باستخدام طريقة الحجم المحدودة. وقد تم أرقام النمذجة الرياضي لرينولدز باستخدام مخطط لقانون السلطة لأرقام الفضاة والمخطط الوقي اللازمي كلياً لأرقام الوقت، وتم حلها عن طريق خوارزميه بتنكاغ وسبالدينج.

تمكننا التجربة الرقمية من تحديد تركيز الهواء، وموقع نقطة البداية، وعمق المياه، ملمح السرعة، الطاقة الحركية المضطربة و معدل تبديد الطاقة الحركية المضطربة.

المفاتيح

طريقة الحجم المحدودة، خوارزميه البسيطة، نقطة البداية، النمذجة الرياضي لرينولدز، قناة ذات السطوح المدرجة.

Résumé

Ce modeste travail a pour objectif de modéliser l'écoulement graduellement varié aéré situé en aval du point d'inception.

Un modèle mathématique régissant l'écoulement graduellement varié aéré en aval du point d'inception, décrit par les équations fondamentales de la mécanique des fluides a été développé.

Un autre modèle numérique qui permet de prévoir les caractéristiques d'écoulement graduellement varié aéré en aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers a été élaboré en utilisant la méthode des volumes finis. Ce modèle mathématique de Reynolds a été discrétisé en utilisant le schéma de la loi de puissance pour la discrétisation spatiale et le schéma totalement implicite pour la discrétisation temporelle, et il a été résolu par l'algorithme Simple développé par Patankar et Spalding.

L'expérimentation numérique nous a permis de déterminer la concentration d'air, la localisation du point d'inception, la profondeur d'eau, le profil de vitesse, l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.

Mots clés

Méthode des volumes finis, algorithme Simple, point d'inception, modèle mathématique de Reynolds, canal en marches d'escaliers.

Abstract

This modest work aims to model the ventilated gradually varied flow located downstream from the point of inception.

A mathematical model governing the ventilated gradually varied flow downstream from the point of inception, described by the fundamental equations of fluid mechanics was developed.

Another numerical model that can predict the characteristics of ventilated gradually varied flow downstream from the point of inception in a stepped canal was developed using the finite volumes method. This Reynolds mathematical model was discretized using the scheme of the power law for the discretization space and the fully implicit scheme for the temporary discretization, and it was solved by the simple algorithm developed by Patankar and Spalding.

The digital experimentation is enabling us to determine the concentration of air, the location of the point of inception, the depth of water, the speed profile, the turbulent kinetic energy and the rate of dissipation of the turbulent kinetic energy.

Key words

The finite volumes method, Simple algorithm, the point of inception, Reynolds mathematical model, stepped canal.

Notations principales

| Symboles | Signification | Unité |
|----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| ρ | : Masse volumique du mélange air - eau | [kg/m ³] |
| ρ_e | : La masse volumique de l'eau | [kg/m ³] |
| ρ_k | : Densité de la phase k | [kg/m ³] |
| ρ_{xx} | : Coefficient de Boussinesq | [-] |
| ρ_w, ρ_a | : Densité de l'eau et de l'air respectivement | [kg/m ³] |
| μ | : Viscosité moléculaire de l'air - eau | [kg/m.s] |
| μ_t | : Viscosité turbulente | [kg/m.s] |
| $\mu_{eff,m}$ | : Viscosité efficace du mélange | [kg/m.s] |
| μ_w, μ_a | : Viscosité moléculaire de l'eau et de l'air respectivement | [kg/m.s] |
| α | : Angle d'inclinaison du canal | [degrés] |
| α_w | : Fraction volumique de l'eau | [-] |
| α_a | : Fraction volumique de l'air | [-] |
| α_1 | : Coefficients de vitesse d'entrée | [-] |
| α_2 | : Coefficients de vitesse de sortie | [-] |
| α_k | : Fraction de volume de la phase k | [-] |
| σ_ε | : Nombre de Prandtl, dans le modèle des contraintes de Reynolds | [-] |
| $\sigma_\varepsilon, \sigma_k$ | : Constante de cisaillement | [-] |
| η | : Coefficient de frottement de l'écoulement aéré | [-] |
| Γ, β | : Coefficients calibrés de la limite de source advective de bulle d'air | [-] |
| τ_0 | : Effort de cisaillement à la paroi | [-] |
| τ_m, τ_{Dm} | : Les deux tenseurs des contraintes représentent respectivement l'effort visqueux moyen et l'effort de | [N/ m ²] |
| $\bar{\varepsilon}, \varepsilon$ | : Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente | [m ² /s ³] |
| κ | : Constante de Von Karman | [-] |

| | | |
|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| t | : Variable temps | [s] |
| g | : Accélération de la pesanteur | [m ² /s] |
| h | : Hauteur d'une marche | [m] |
| h_n | : Profondeur de l'écoulement uniforme aéré | [m] |
| h_e | : Hauteur de l'écoulement, | [m] |
| h^+ | : Hauteur adimensionnelle de l'écoulement | [-] |
| H_d | : Hauteur d'eau à l'amont d'un déversoir, | [m] |
| H_1 | : Profondeur de l'eau à l'entrée | [m] |
| H_2 | : Profondeur de l'eau à la sortie | [m] |
| H_0 | : Profondeur de l'eau d'entrée | [m] |
| Z_1 | : Côte verticale au pied aval du barrage | [m] |
| E_1, E_2 | : Représentant l'énergie totale en amont et en aval du ressaut, respectivement | [m] |
| U, V | : Composantes de vecteur vitesse suivant la direction x, y | [m/s] |
| \bar{U}, \bar{V} | : Valeurs moyennes des composantes U, V de la vitesse, respectivement | [m/s] |
| u, v | : Valeurs fluctuantes des composantes U, V de la vitesse, respectivement | [m/s] |
| U_i | : Composantes de vecteur vitesse suivant la direction x, y, z . | [m/s] |
| \bar{U}_i | : Vitesse moyenne indépendante du temps | [m/s] |
| U_r | : Vitesse limite d'ascension des bulles d'air | [m/s] |
| U_l | : Vitesse de l'écoulement libre | [m/s] |
| U^* | : Vitesse de frottement | [m/s] |
| $U_{90\%}$ | : Vitesse de référence définie pour $C = 90\%$ | [m/s] |
| U^+ | : Vitesse adimensionnelle | [-] |
| u_i | : Valeur fluctuante de la vitesse U_i | [m/s] |
| u_m | : Vitesse de mélange | [m/s] |
| u_{Mk} | : Vitesse de diffusion pour l'écoulement de mélange | [m/s] |
| u_{qk} | : Vitesse de glissement entre l'air et l'eau | [m/s] |
| u_b | : Vitesse d'interface | [m/s] |
| v_1 | : Vitesse moyenne d'entrée en amont | [m/s] |

| | | |
|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| v_2 | : Vitesse moyenne de sortie en aval | [m/s] |
| V_{90} | : Vitesse caractéristique où la concentration en air est 90 % | [m/s] |
| V_0 | : Vitesse d'écoulement uniforme | [m/s] |
| k_s | : Rugosité équivalente | [m ^{1/3} /s] |
| K_s | : Coefficient de Strickler | [-] |
| Q | : Débit Volumique | [m ³ /s] |
| q | : Débit par unité de largeur | [m ² /s] |
| x, y, x_i, y_i | : Variables indépendantes spatiales | [m] |
| $y_{90\%}$ | : Profondeur de référence définie pour C = 90% | [m] |
| y^+ | : Grandeur spatial adimensionnel | [-] |
| i | : Indice de maillage suivant la direction x | [-] |
| I | : Indice de maillage suivant la direction x | [-] |
| j | : Indice de maillage suivant la direction y | [-] |
| J | : Indice de maillage suivant la direction y | [-] |
| L | : Echelle de longueur de turbulence | [m] |
| L_I | : Distance séparant le point de l'ascension de la couche limite du point d'inception | [m] |
| d | : Profondeur d'écoulement | [m] |
| D_i | : Hauteur d'eau au point d'inception | [m] |
| F_r | : Nombre de Froude | [-] |
| C_{moy} | : Concentration en air moyenne | [-] |
| C_n | : Concentration d'air uniforme | [-] |
| P | : Pression | [Pa] |
| \bar{P} | : Valeur Moyenne de la pression | [Pa] |
| p | : Pression fluctuante | [Pa] |
| p' | : Pression modifiée | [Pa] |
| p_m | : Pression de l'écoulement de mélange | [Pa] |
| \bar{F}_x, \bar{F}_y | : Forces extérieurs de volumes suivant les directions x et y | [N] |
| F_i | : Forces extérieurs de volumes suivant les directions x, y | [N] |
| f | : Coefficient de frottement de l'écoulement non aéré | [-] |
| f_e | : Coefficient de frottement de l'écoulement aéré | [-] |

| | | |
|----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| \bar{k}, k | : Energie cinétique turbulente | [m ² /s ²] |
| C_μ | : Constante du modèle de turbulence | [-] |
| C_d | : Coefficient de débit | [-] |
| C_s | : Constante de l'équation des contraintes de Reynolds | [-] |
| C_{f1} | : Facteur de frottement de l'eau claire | [-] |
| C_{f2} | : Facteur de frottement de l'écoulement aéré | [-] |
| C_{fm} | : Facteur de frottement qui correspond au maximum du profil de vitesse | [-] |
| C_f | : Facteur de frottement | [-] |
| C_{sat} | : Concentration de saturation d'air en fonction de la pente du coursier, la rugosité | [-] |
| $C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}$ | : Constantes du modèle de turbulence | [-] |
| C_{1S}, C_{2S} | : Constantes de l'équation des contraintes de Reynolds | [-] |
| B | : Force extérieure | [N] |
| z_b | : Altitude locale de lit | [m] |
| n | : Coefficient de Manning | [-] |
| $\Delta x, \Delta y$ | : Pas de discrétisation suivant la direction x et y | [m] |
| $\delta x, \delta y$ | : Pas de discrétisation suivant la direction x et y | [m] |
| F_o^U, F_e^U | : Flux massique convectif par unité de surface | [kg/m.s] |
| F_s^U, F_n^U | : Flux massique convectif par unité de surface | [kg/m.s] |
| F_o^V, F_e^V | : Flux massique convectif par unité de surface | [kg/m.s] |
| F_s^V, F_n^V | : Flux massique convectif par unité de surface | [kg/m.s] |
| F_o^k, F_e^k | : Flux massique convectif par unité de surface | [kg/m.s] |
| F_s^k, F_n^k | : Flux massique convectif par unité de surface | [kg/m.s] |
| $F_o^\epsilon, F_e^\epsilon$ | : Flux massique convectif par unité de surface | [kg/m.s] |
| $F_s^\epsilon, F_n^\epsilon$ | : Flux massique convectif par unité de surface | [kg/m.s] |
| D_o^U, D_e^U | : Conductance de la diffusion | [kg/m.s] |
| D_s^U, D_n^U | : Conductance de la diffusion | [kg/m.s] |
| D_o^V, D_e^V | : Conductance de la diffusion | [kg/m.s] |
| D_s^V, D_n^V | : Conductance de la diffusion | [kg/m.s] |

| | | |
|--------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|------------------------|
| D_o^k, D_e^k | : Conductance de la diffusion | [kg/m.s] |
| D_s^k, D_n^k | : Conductance de la diffusion | [kg/m.s] |
| $D_o^\varepsilon, D_e^\varepsilon$ | : Conductance de la diffusion | [kg/m.s] |
| $D_s^\varepsilon, D_n^\varepsilon$ | : Conductance de la diffusion | [kg/m.s] |
| a_o^U, a_e^U, a_s^U | : Coefficients de l'équation de U | [-] |
| a_n^U, a_M^U, a_M^{U0} | : Coefficients de l'équation de U | [-] |
| a_o^V, a_e^V, a_s^V | : Coefficients de l'équation de V | [-] |
| a_n^V, a_M^V, a_M^{V0} | : Coefficients de l'équation de V | [-] |
| a_o^k, a_e^k, a_s^k | : Coefficients de l'équation de k | [-] |
| a_n^k, a_M^k, a_M^{k0} | : Coefficients de l'équation de k | [-] |
| $a_o^\varepsilon, a_e^\varepsilon, a_s^\varepsilon$ | : Coefficients de l'équation de ε | [-] |
| $a_n^\varepsilon, a_M^\varepsilon, a_M^{\varepsilon0}$ | : Coefficients de l'équation de ε | [-] |
| P_o^U, P_e^U | : Nombre de Peclet | [-] |
| P_s^U, P_n^U | : Nombre de Peclet | [-] |
| P_o^V, P_e^V | : Nombre de Peclet | [-] |
| P_s^V, P_n^V | : Nombre de Peclet | [-] |
| P_o^k, P_e^k | : Nombre de Peclet | [-] |
| P_s^k, P_n^k | : Nombre de Peclet | [-] |
| $P_o^\varepsilon, P_e^\varepsilon$ | : Nombre de Peclet | [-] |
| $P_s^\varepsilon, P_n^\varepsilon$ | : Nombre de Peclet | [-] |
| S_M^U, S_C^U | : Termes sources de l'équation U | [kg/m.s] |
| S_M^V, S_C^V | : Termes sources de l'équation V | [kg/m.s] |
| S_M^k, S_C^k | : Termes sources de l'équation k | [kg/m.s ³] |
| S_C^ε | : Termes sources de l'équation ε | [kg/m.s ⁴] |
| S_M^ε | : Termes sources de l'équation ε | [kg.s/m ³] |
| S_a | : Limite de la source d'air | [-] |

Sommaire des figures

| | | |
|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure I.1 | : Frontière du domaine de simulation (Chen et al, 2001). | 4 |
| Figure I.2 | : Surface libre de l'eau au-dessus du déversoir en marches d'escaliers (Chen et al, 2001). | 7 |
| Figure I.3 | : Vecteurs vitesse sur la marche N°7 (Chen et al, 2001). | 7 |
| Figure I.4 | : Les isolines de pression au-dessus du déversoir en marches d'escaliers (Chen et al, 2001). | 8 |
| Figure I.5 | : Profils de pressions sur la face horizontale de la marche N°5, N°9 et N°11 (Chen et al, 2001). | 8 |
| Figure I.6 | : Emplacement des piézomètres (Chen et al, 2002). | 9 |
| Figure I.7 | : Vecteurs vitesse de fluide sur le déversoir en marches d'escalier (Chen et al, 2002). | 10 |
| Figure I.8 | : Isolines de pression sur le déversoir en marches d'escalier (Pa) (Chen et al, 2002). | 11 |
| Figure I.9 | : Profils de pression sur la surface de la marche (Chen et al, 2002). | 11 |
| Figure I.10 | : Vecteurs vitesse dans le domaine de simulation (Chen et al, 2002). | 14 |
| Figure I.11 | : Vecteurs vitesse sur le déversoir en marches d'escalier (Chen et al, 2002). | 14 |
| Figure I.12 | : Profils des composantes de la vitesse le long de la bissectrice perpendiculaire à la face horizontale de la marche N°7 (Chen et al, 2002). | 15 |
| Figure I.13 | : Isolines de l'énergie cinétique turbulente k et du taux de dissipation ε (Chen et al, 2002). | 15 |
| Figure I.14 | : Mailles et états de frontière extérieurs du déversoir (Chen et al, 2004). | 17 |
| Figure I.15 | : Surface libre de l'eau dans le plan symétrique du déversoir (Chen et al, 2004). | 18 |

| | | |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure I.16 | : Vecteurs de vitesse dans le plan symétrique du déversoir (Chen et al, 2004). | 19 |
| Figure I.17 | : Lignes isobares dans le plan symétrique du déversoir (Chen et al, 2004). | 19 |
| Figure I.18 | : Le tracé de la surface de pression sur les deux faces horizontale et verticale de la marche N° 10 (Chen et al, 2004). | 19 |
| Figure I.19 | : Isolines de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation de l'énergie cinétiques de turbulence dans le plan symétrique du déversoir (Chen et al, 2004). | 20 |
| Figure I.20 | : Face du déversoir (Chen et al, 2005). | 23 |
| Figure I.21 | : Rapport de dissipation d'énergie η en fonction du débit unitaire q (Chen et al, 2005). | 24 |
| Figure I.22 | : Isolines de l'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) à différents débits unitaires (Chen et al, 2005). | 24 |
| Figure I.23 | : Isolines du taux de dissipation turbulent ε (m^2/s^2) à différents débits unitaires (Chen et al, 2005). | 25 |
| Figure I.24 | : Rapport de dissipation d'énergie η en fonction de l'inverse de la pente (Chen et al, 2005). | 26 |
| Figure I.25 | : Rapport de dissipation d'énergie η en fonction du rapport h/H pour différents débits unitaires (Chen et al, 2005). | 28 |
| Figure I.26 | : Isolines du taux de dissipation turbulent ε (m^2/s^3) au pied du déversoir (Chen et al, 2005). | 28 |
| Figure I.27 | : Conditions aux limites de domaine de calcul (Cheng et al, 2004). | 29 |
| Figure I.28 | : Définition de la section d'essai (Cheng et al, 2004). | 31 |
| Figure I.29 | : Vecteurs vitesse sur le déversoir en marches d'escaliers (Cheng et al, 2004). | 31 |
| Figure I.30 | : L'énergie cinétique turbulente sur les marches 6, 7 et 8 (Cheng et al, 2004). | 31 |

| | | |
|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure I.31 | : Variation de y/Y_{90} en fonction de C sur les marches 6 et 7 (Cheng et al, 2004). | 32 |
| Figure I.32 | : Variation de y/Y_{90} en fonction de C sur les marches 8 et 9 (Cheng et al, 2004). | 32 |
| Figure I.33 | : Variation de y/Y_{90} en fonction de v/v_{90} sur les marches 6 et 7 (Cheng et al, 2004). | 32 |
| Figure I.34 | : Variation de y/Y_{90} en fonction de v/v_{90} sur la marche 8 (Cheng et al, 2004). | 33 |
| Figure I.35 | : Variation de V en fonction de y (Cheng et al, 2004). | 33 |
| Figure I.36 | : Conditions aux limites de domaine de calcul (Cheng et al, 2006). | 34 |
| Figure I.37 | : Vitesses mesurée et calculée sur la marche N° 6, (a) Mesurée ; (b) simulée (Cheng et al, 2004). | 38 |
| Figure I.38 | : Distribution de vitesse sur les marches N°7 et N°9 (Cheng et al, 2004). | 38 |
| Figure I.39 | : Entraînement d'air sur le déversoir en marches d'escaliers. (a) Calculé ; (b) mesuré (Cheng et al, 2004). | 39 |
| Figure I.40 | : Profils de pression sur les faces des différentes marches (Cheng et al, 2004). | 40 |
| Figure I.41 | : Profils négatifs de pression sur les arêtes des marches (unité : Pa) (Cheng et al, 2004). | 41 |
| Figure I.42 | : Maillage du calcul d'écoulement extrêmement turbulent sur un canal en marches d'escaliers (Dong et al, 2006). | 43 |
| Figure I.43 | : Vecteur de vitesse de l'écoulement extrêmement turbulent à $Q=5.296L/s$, $\theta =10^\circ$ (Dong et al, 2006). | 44 |
| Figure I.44 | : Comparaisons entre les profondeurs calculées et mesurées de l'écoulement extrêmement turbulent dans un canal en marches d'escaliers ($\theta =10^\circ$. et $Q=11.69L/s$) (Dong et al, 2006). | 44 |
| Figure I.45 | : Comparaison entre les facteurs de frottement de l'écoulement extrêmement turbulent sur un canal en marches d'escaliers ($\theta =20^\circ$, $Q=11.69L/s$) (Dong et al, 2006). | 45 |

| | | |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure I.46 | : Comparaison entre le facteur de frottement C_{f1} de l'écoulement dans un canal en marches d'escaliers et le facteur de frottement de l'écoulement dans un canal lisse ($\theta = 20^\circ$, $Q=11.69L/s$) (Dong et al, 2006). | 46 |
| Figure I.47 | : Profil de vitesses sur la marche N°34 pour $\theta = 10^\circ$ et $Q=11.690L/s$ (Dong et al, 2006). | 46 |
| Figure I.48 | : La similitude de la concentration en air à la pente $\theta = 10^\circ$ et à $Q=11.690 l/s$ de l'écoulement extrêmement turbulent dans un canal en marches d'escaliers (Dong et al, 2006). | 47 |
| Figure I.49 | : Profils de vitesse pour un d'écoulement extrêmement turbulent dans un canal en marches d'escaliers à $\theta = 10^\circ$ et à $Q=11.690L/s$ (Dong et al, 2006). | 47 |
| Figure I.50 | : Pression statique dans l'écoulement extrêmement turbulent à $\theta=10^\circ$ et à $Q=5.296l/s$ (Dong et al, 2006). | 48 |
| Figure I.51 | : Comparaison de la concentration en air calculée avec les données de Straub et d'Anderson (1958) à $\theta = 7.5^\circ$ (Dong et al, 2006). | 48 |
| Figure I.52 | : Description schématique du (André et al, 2003): (a) Comportement d'écoulement extrêmement turbulent et (b) Illustration des profils de concentration en air et de la vitesse mesurés dans le canal en marches d'escaliers à la pente $\theta = 30^\circ$. | 50 |
| Figure I.53 | : Face des deux marches dans un canal en marches d'escaliers dans le code WOLF 2D (André et al, 2003). | 51 |
| Figure I.54 | : Profil de vitesse assumé pour représenter les cellules de recyclage à l'intérieur des marches dans les simulations numériques (André et al, 2003). | 54 |
| Figure I.55 | : Effet d'entraînement d'air (André et al, 2003): (a) sur l'écoulement extérieur dans la région uniforme ; (b) sur la variation longitudinale de C , pour $q_w = 0.12m^2/s$. | 55 |
| Figure I.56 | : Effet de ρ_{xx} sur les caractéristiques d'écoulement dans la région uniforme, pour $q_w = 0.12m^2/s$ (André et al, 2003). | 56 |
| Figure II.1 | : Entraînement d'air dans un écoulement extrêmement turbulent sur un évacuateur de crues en marches d'escaliers. | 59 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figure II.2 : Canal en marches d'escaliers. | 61 |
| Figure III.1 : Volume de contrôle (Patankar, 1980). | 83 |
| Figure III.2 : Volume de contrôle pour la composante U (Patankar, 1980). | 94 |
| Figure III.3 : Volume de contrôle pour la composante V (Patankar, 1980). | 97 |
| Figure III.4 : Maillage décalé utilisé pour la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction x (Patankar, 1980). | 103 |
| Figure III.5 : Maillage décalé utilisé pour la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction y (Patankar, 1980). | 104 |
| Figure III.6 : Maillage décalé utilisé pour la discrétisation des équations k et ε . | 105 |
| Figure IV.1 : Profils de la concentration et de la ligne d'eau pour $q = 9\text{m}^2/\text{s}$. | 122 |
| Figure IV.2 : Profils de la concentration et de la ligne d'eau pour les différents débits. | 122 |
| Figure IV.3 : Profils de vitesse pour $q=9\text{m}^2/\text{s}$ à $x=35\text{m}$ | 123 |
| Figure IV.4 : Profils de vitesse pour $q=9\text{m}^2/\text{s}$ à : (a) $x=30\text{m}$ et (b) $x = 6\text{m}$. | 124 |
| Figure IV.5 : Profils de vitesse pour $q=6\text{m}^2/\text{s}$ à : (a) $x=26\text{m}$ et (b) $x=30\text{m}$. | 124 |
| Figure IV.6 : Profils de vitesse pour $q = 6\text{m}^2/\text{s}$ à $x = 35\text{m}$. | 124 |
| Figure IV.7 : Profils de vitesse pour $q=11\text{m}^2/\text{s}$ à : (a) $x=26\text{m}$ et (b) $x=30\text{m}$. | 125 |
| Figure IV.8 : Profils de vitesse pour $q =11\text{m}^2/\text{s}$ à $x=35\text{m}$. | 125 |
| Figure IV.9 : Variation de : (a) l'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) et (b) taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε (m^2/s^3) pour $q=9\text{m}^2/\text{s}$ à $x =35 \text{ m}$. | 126 |
| Figure IV.10 : Variation de : (a) l'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) et (b) taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε (m^2/s^3) pour $q=9\text{m}^2/\text{s}$ à $x=30 \text{ m}$. | 126 |
| Figure IV.11: Variation de : (a) l'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) et (b) taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε | 126 |

(m^2/s^3) pour $q = 9\text{m}^2/\text{s}$ à $x = 26$ m.

Figure IV.12 : Variation de : (a) l'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) et 127
(b) taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε
(m^2/s^3) pour $q = 6\text{m}^2/\text{s}$ à $x = 26$ m.

Figure IV.13 : Variation de : (a) l'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) et 127
(b) taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε
(m^2/s^3) pour $q=6\text{m}^2/\text{s}$ à $x=30$ m.

Figure IV.14 : Variation de : (a) l'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) et 127
(b) taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε
(m^2/s^3) pour $q=6\text{m}^2/\text{s}$ à $x=35$ m.

Figure IV.15 : Variation de : (a) L'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) et 128
(b) taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε
(m^2/s^3) pour $q=11\text{m}^2/\text{s}$ à $x=26$ m.

Figure IV.16 : Variation de : (a) l'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) et 128
(b) taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε
(m^2/s^3) pour $q=11\text{m}^2/\text{s}$ à $x=30$ m.

Figure IV.17 : Variation de : (a) l'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) et 128
(b) taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε
(m^2/s^3) pour $q=11\text{m}^2/\text{s}$ à $x=35$ m.

Sommaire des tableaux

| | | |
|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tableau I-1 | : Valeurs des constantes empiriques (<i>Chassaing</i> , 2000). | 5 |
| Tableau I-2 | : Rapport de dissipation d'énergie pour différents débits unitaires avec ouvrage de Raccordement. | 23 |
| Tableau I-3 | : Rapport de dissipation d'énergie sur le déversoir en marches d'escalier à différentes pentes du coursier sans l'ouvrage de raccordement. | 25 |
| Tableau I-4 | : Rapport de dissipation d'énergie dans des déversoirs en marches d'escalier pour différentes dimensions des marches. | 27 |
| Tableau III-1 | : La fonction $A(P)$ pour différents schémas | 39 |
| Tableau III-2 | : Termes de flux massique convectif par unité de surface | 106 |
| Tableau III-3 | : Termes de conductance de la diffusion | 106 |
| Tableau III-4 | : Termes de nombre de Peclet | 107 |
| Tableau III-5 | : Termes des coefficients a_i^U , a_i^V , a_i^k , a_i^ε , a_M , a_M^0 et b des équations de transport. | 107 |
| Tableau IV-1 | : Localisation du point d'inception | 121 |

Sommaire

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introduction générale | 1 |
| Chapitre I : Synthèse bibliographique | 3 |
| I. Travaux de Qun Chen, Guangqing Dai et Haowu Liu (2001) | 4 |
| II. Travaux de Qun Chen, Guang-Qing Dai et Qing Yang, (2004) | 16 |
| III. Travaux de Qun Chen, Guang-Qing Dai, Fen-Qing et Zhu (2005) | 21 |
| IV. Travaux de Xiangju Cheng, Lin Luo, Wenqian Zhao et Ran Li, (2004) | 29 |
| V. Travaux Xiangju Cheng, Yongcan Chen & Lin Luo (2006) | 33 |
| VI. Travaux de Zhi-yong Dong, Joseph Hun-wei Lee (2006) | 40 |
| VII. Travaux de Andre S., Dewals B., Piroton M. et Schleiss A. J. (2003) | 49 |
| Conclusion | 58 |
| Chapitre II : Modélisation mathématique de l'écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers | 59 |
| I. Positionnement du problème | 59 |
| 1. Régime d'écoulement en nappe | 59 |
| 2. Régime d'écoulement extrêmement turbulent | 59 |
| II. Modélisation de l'écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers | 61 |
| 1. Equation de base | 61 |
| 2. Equations du mouvement moyen | 64 |
| 3. Equation des tensions de Reynolds | 68 |
| 4. Fermeture des équations régissant l'écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers | 48 |
| III. Traitement de la fonction de la paroi | 79 |
| IV. Conclusion | 80 |
| Chapitre III : Modélisation numérique d'un écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers | 81 |
| I. Modèle mathématique de l'écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers | 82 |
| II. Principe de la méthode des volumes finis | 83 |
| 1. Maillage et volume de contrôle | 84 |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2. Détermination de la forme algébrique de l'équation de conservation discrétisé par la méthode des volumes finis 3. Analyse des résultats | 85 |
| III. Discrétisation des équations régissant l'écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers | 94 |
| 1. Discrétisation de l'équation de continuité | 94 |
| 2. Equations du mouvement moyen | 95 |
| 3. Modèle k- ϵ | 100 |
| 4. Discrétisation des termes sources pour différentes équations de transport | 104 |
| IV. Algorithme de résolution (Algorithme Simple) | 110 |
| 1. Equations de correction des vitesses | 110 |
| 2. Equation de correction de la pression | 112 |
| 3. Procédure de résolution | 113 |
| 4. Organigramme de l'algorithme SIMPLE | 114 |
| V. Condition initiales et conditions aux limites | 115 |
| 1. Au niveau de la paroi | 115 |
| 2. A la surface libre | 116 |
| 3. Région de paroi | 116 |
| 4. Conditions initiales | 116 |
| VI. Conclusion | 116 |
| Chapitre IV : Expérimentations numériques | 117 |
| I. Caractéristiques de l'écoulement turbulent à l'aval du point d'inception | 117 |
| 1. Point d'inception | 118 |
| 2. Ecoulement uniforme aéré | 118 |
| 3. Ecoulement graduellement varié aéré | 120 |
| II. Calcul des paramètres hydrauliques de l'écoulement | 120 |
| 1. Epaisseur de la lame d'eau au seuil du coursier | 120 |
| 2. Hauteur d'eau normale | 121 |
| 3. Hauteur d'eau critique | 121 |
| 4. Vitesse de frottement | 121 |
| 5. Vitesse moyenne de l'écoulement | 121 |
| 6. Coefficient de frottement | |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| III. Présentation du coursier de l'évacuateur de crues du barrage de M'Bali | 121 |
| IV. Expérimentation numérique. | 122 |
| 1. Localisation du point d'inception | 122 |
| 2. Evaluation de la concentration moyenne en air C_{moy} et de la hauteur d'eau de l'eau pure | 122 |
| 3. Profil de vitesse | 124 |
| 4. Energie cinétique turbulente et taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente | 126 |
| V. Conclusion | 130 |
| Conclusion générale | 131 |
| Bibliographie | 133 |

Introduction générale

Introduction générale

Avec l'accroissement de la hauteur des barrages, les vitesses d'écoulements sur le coursier peuvent atteindre 50 m/s. Dans ces conditions, les dommages dus à l'érosion par cavitation sont très importants. Ce qui peut endommager le corps du barrage, le cours d'eau ou l'ouvrage lui-même. Des études ont montré que les dangers d'érosion par cavitation apparaissent pour des vitesses supérieures à 15m/s.

Pour prévenir ou ralentir cette érosion, il est possible d'utiliser des bétons spéciaux à haute résistance, des revêtements d'acier, ou des surfaçages en résine polymère. Ces solutions sont coûteuses et ne sont pas satisfaisantes pour des vitesses supérieures à 30 m/s. Il est donc nécessaire de définir un dispositif simple et optimal le long de l'ouvrage. Une méthode consiste à augmenter la compressibilité du fluide près de la surface du coursier en introduisant l'air dans l'écoulement.

Une des solutions possibles consiste en la construction de canaux en marches d'escaliers.

Le regain d'intérêt pour ce type de canaux est lié à l'introduction du béton compacté au rouleau (BCR). Cette technique présente une facilité dans son utilisation en couche mince, et dans l'organisation de l'énergie sur les marches, réduit ainsi les dimensions des ouvrages de dissipation au pied aval du barrage.

La quantité d'air entraînée est un paramètre essentiel pour le dimensionnement des canaux. L'air augmente le volume de l'écoulement par diminution de la masse spécifique, et ceci doit être pris en compte pour le calcul de la hauteur des murs latéraux.

L'objectif de notre travail est axé sur la simulation numérique de l'écoulement à l'aval du point de commencement du phénomène d'entraînement d'air dans un canal en marches d'escaliers à forte pente via la méthode des volumes finis.

Nous présentons dans le premier chapitre un bref aperçu sur les travaux de recherches. Ces derniers sont accés sur les expérimentations numériques basées sur des codes de calcul en volumes finis. Ces expérimentations sont calées avec des essais physiques sur des modèles réduits.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les différents régimes d'écoulements qui existent dans les canaux en marches d'escaliers. Nous définissons la problématique de cette étude en précisant la zone d'étude qui se situe à l'aval du point d'inception.

Ensuite, nous donnons dans le chapitre trois le modèle mathématique de l'écoulement graduellement varié à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers qui a été élaboré. Ce dernier est basé sur les équations fondamentales de la mécanique des fluides « Navier Stokes ».

Le troisième chapitre est consacré à l'élaboration de modèle numérique de l'écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers. Ce modèle a été établi en utilisant la méthode des volumes finis pour la discrétisation des équations différentielles et l'algorithme Simple pour la résolution numérique.

Nous présentons dans le dernier chapitre les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement à l'aval du point d'inception. Pour valider les résultats de la simulation numérique, nous avons comparé nos résultats à ceux de Benmamar (2006). Par la suite, nous avons présenté les essais numériques donnés par le modèle numérique élaboré appliqué sur le modèle réduit du barrage M'Bali.

Enfin, ce travail est terminé par une conclusion générale sur toute cette étude.

Chapitre I

Synthèse bibliographique

Chapitre I

Synthèse bibliographique

Les évacuateurs de crues en marches d'escalier sont devenus un concept courant pour évacuer les crues. Les seuils des marches augmentent considérablement la dissipation d'énergie le long du déversoir, et de ce fait, réduisent la dimension du bassin de dissipation en aval de l'évacuateur de crues. L'étude expérimentale du déversoir en marches d'escaliers a été réalisée depuis les années 70. Sorensen (1985), Stephenson (1991), Peyras (1992), Rice (1996), Pegram (1999) etc. ils ont réalisé l'essai sur un modèle réduit d'un déversoir en marches d'escalier, ont étudié les facteurs qui influencent sur le rapport de dissipation d'énergie, tel que le débit unitaire, la pente de canal, la dimension de la marche et le nombre des marches. En 1995, Liao Huasheng et Wu chigong (1995) ont employé la théorie « potentielle d'écoulement » pour déterminer la surface libre dans le cas de la submersion de déversoir en marches d'escalier.

Jusqu'à l'an 2000, aucune personne n'a étudié les problèmes complexes des écoulements turbulents dans les déversoirs en marches d'escaliers par la simulation numérique. La raison principale est que les conditions de frontière sont très complexes pour simuler ce type d'écoulement, et en outre la résolution de la surface libre incurvée de l'eau est un problème très difficile à aborder.

Récemment, certains chercheurs ont commencé les études sur la simulation numérique de l'écoulement turbulent sur les déversoirs en marches d'escaliers. Le travail numérique le plus récent en utilisant des modèles de turbulence était celui de Chen, Dai et al, qui ont utilisé le modèle de turbulence $k-\varepsilon$ pour simuler l'écoulement turbulent dans un déversoir en marches d'escalier.

Benmamar (2006) a développé un modèle numérique de la couche limite d'un écoulement bidimensionnelle dans un canal en marches d'escalier à forte pente via la méthode des différences finies avec un schéma implicite.

Cheng, Luo et Zhao (2006) ont simulé la fraction volumique de l'air-eau de l'écoulement diphasique sur un déversoir en marches d'escalier en utilisant des modèles de turbulence $k-\varepsilon$.

Dans ce chapitre, nous présentons quelques travaux de simulation numérique des écoulements turbulents dans les déversoirs en marches d'escaliers.

I. Travaux de Qun Chen, Guangqing Dai et Haowu Liu

En 2001, **Qun Chen** et ses collaborateurs ont développé un modèle numérique basé sur le modèle de turbulence $k-\varepsilon$ pour étudier l'écoulement turbulent sur les déversoirs en marches d'escaliers. Afin de traiter la frontière irrégulière, la grille non structurée est employée au prétraitement du programme. La méthode du volume de fluide (VOF) est introduite pour traiter les problèmes complexes de la surface libre.

La technique de volume de contrôle est employée pour transformer les équations qui régissent le phénomène en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement, ces équations sont linéarisées en utilisant un schéma implicite. Le domaine de calcul est divisé en volumes de contrôle discrets par une grille non structurée.

Le domaine de calcul est représenté dans la figure I.1. La section d'entrée est en amont du barrage et à une distance de 0.827m, qui comprend l'entrée de l'eau en bas et l'entrée d'air en haut. Les résultats de simulation sont comparés aux résultats expérimentaux.

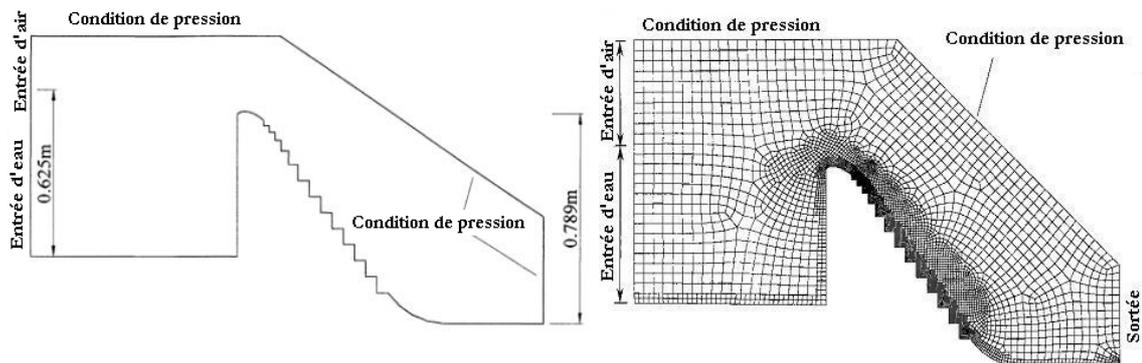


Figure I.1 : Frontière du domaine de simulation (Chen et al, 2001).

a. Modèle de VOF

Qun Chen et ses collaborateurs ont utilisé le modèle de VOF (volume of fluid) proposé par **Hirt et Nichols (1981)**. Les auteurs ont défini par :

α_w : Fraction volumique de l'eau ;

α_a : Fraction volumique de l'air ;

Si $\alpha_w = 1$, la maille est entièrement remplie d'eau ;

Si $\alpha_w = 0$, la maille contient exclusivement de l'air,

Si $0 < \alpha_w < 1$, la maille contient la surface libre.

La fraction de volume d'air α_a est déterminée par l'expression suivante :

$$\alpha_a = 1 - \alpha_w \quad (\text{I-1})$$

L'interface entre l'air et l'eau est déterminée par la résolution de l'équation de continuité ayant la forme suivante :

$$\frac{\partial \alpha_w}{\partial t} + U_i \frac{\partial \alpha_w}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{I-2})$$

où, t : Temps et U_i : Composantes de la vitesse.

Les équations de base pour un écoulement air -eau sont :

- Equation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{I-3})$$

- Equation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i U_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (\text{I-4})$$

- Equation du modèle $k - \varepsilon$

$$\frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_i k)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + G + \rho \varepsilon \quad (\text{I-5})$$

$$\frac{\partial (\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_i \varepsilon)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{I-6})$$

où, ρ : Densité moyenne déterminée par la méthode de la fraction volumique ; P : Pression; μ : Viscosité moléculaire du mélange air-eau; μ_t : viscosité turbulente donnée par :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{I-7})$$

avec, C_μ : Constante expérimentale. σ_k et σ_ε : Nombres de Prandtl de turbulence pour k et ε respectivement. $C_{\varepsilon 1}$ et $C_{\varepsilon 2}$: Constantes pour l'équation du taux de dissipation ε .

C_μ , σ_k , σ_ε , $C_{\varepsilon 1}$ et $C_{\varepsilon 2}$ sont des constantes empiriques, définies dans le tableau suivant (tableau I.1).

Tableau I.1 : Valeurs des constantes empiriques (Chassaing, 2000).

| C_μ | $C_{\varepsilon 1}$ | $C_{\varepsilon 2}$ | σ_k | σ_ε |
|---------|---------------------|---------------------|------------|----------------------|
| 0.09 | 1.44 | 1.92 | 1.0 | 1.3 |

Soit G la production de l'énergie cinétique turbulente due aux gradients moyens de vitesse, définie par:

$$G = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (I-8)$$

La viscosité moléculaire μ et la masse volumique ρ sont déterminées par les expressions suivantes :

$$\mu = \alpha_w \mu_w + (1 - \alpha_w) \mu_a \quad (I-9)$$

$$\rho = \alpha_w \rho_w + (1 - \alpha_w) \rho_a \quad (I-10)$$

où, ρ_w et ρ_a : Densité de l'eau et de l'air respectivement. μ_w et μ_a : Viscosité moléculaire de l'eau et de l'air respectivement.

b. Etude Expérimentale

La crête du déversoir présente un profil standard de WES décrit par l'équation $y = 3.6326x^{1.85}$, reliée par une courbe de trois rayons se trouvant sur la verticale de la surface amont. La zone du profil lisse atteint la tangente de la face aval avec une pente de 1 : 0.75, accomplie par un raccordement au bassin avec un rayon de 0.28m.

La crête se situe à une hauteur de 0.789m au-dessus du pied aval, et la tête du déversoir $H_d = 0.097$ m .

Le déversoir est composé de treize (13) marches numérotées de 1, 2,...,13 à partir de la crête du déversoir jusqu'au pied aval du déversoir. Les cinq premières marches ont des dimensions variables ceux sont des marches de transition.

Les huit (8) dernières marches, ont des dimensions uniformes et constantes (de hauteur 0.06m et de longueur de 0.45m).

La largeur du déversoir est de 0.3m et sa longueur est de 3m. Le canal d'approche a été placé en amont de la crête. Au pied aval du déversoir, il y a un canal de queue avec un fond horizontal et sans la partie descendante. Le canal d'approche et le canal de queue ont la même largeur que le déversoir qui est de 0.3m.

Le débit d'essai est de $0.02\text{m}^3/\text{s}$, mesuré par un déversoir triangulaire installé à l'amont du canal d'approche. La vitesse d'écoulement sur la marche N°.7 a été mesurée en utilisant la vélocimétrie.

c. Résultats

- *Surface libre*

La surface libre de l'eau obtenue par la simulation et la mesure est montrée dans la figure I.2.

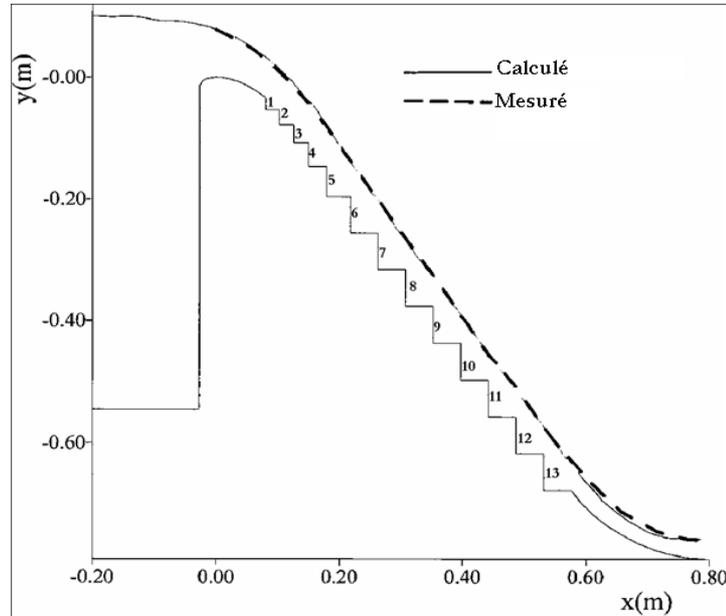


Figure I.2 : Surface libre de l'eau au-dessus du déversoir en marches d'escaliers (Chen et al, 2001).

La surface calculée confirme bien la surface mesurée particulièrement en haut du déversoir.

- *Champ de vitesse*

Les vecteurs vitesse sur la marche N°7 obtenus par la simulation et la mesure sont tracés sur les figures I.3.a et I.3.b respectivement.

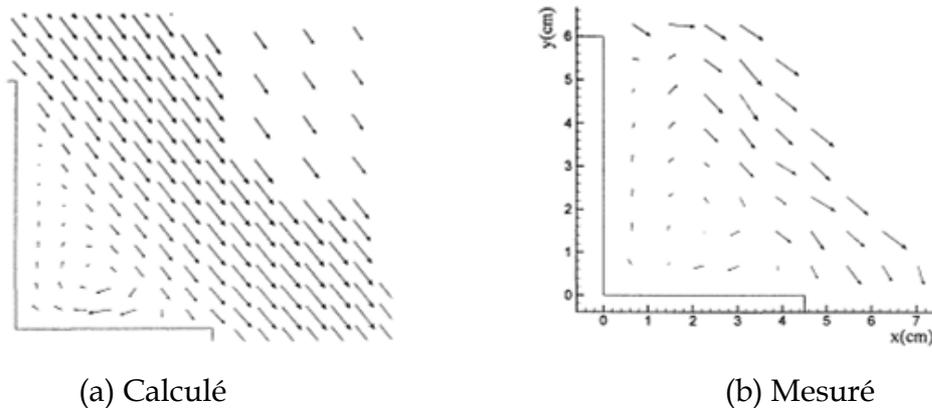


Figure I.3 : Vecteurs vitesse sur la marche N°7 (Chen et al, 2001).

Les auteurs ont remarqué que la direction et l'endroit de rotation des rouleaux de recirculations sur la marche N° 7 sont semblables avec les résultats expérimentaux.

- *Pression*

La figure I.4 représente les isolines de pression dans le domaine de l'eau obtenues par la simulation.

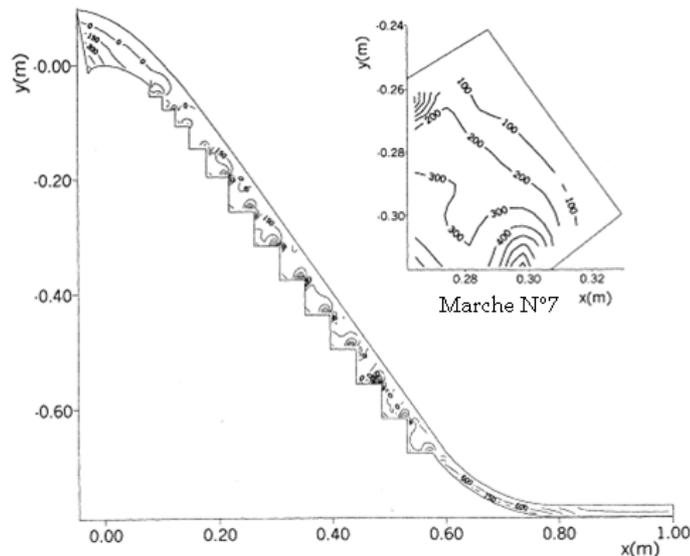


Figure I.4 : Les isolines de pression au-dessus du déversoir en marches d'escaliers (Chen et al, 2001).

Ces résultats prouvent que la distribution de pression sur chaque marche est très semblable.

La figure I.5 représente les profils de pression sur la face horizontale de la marche N°5, N°9 et N°11 respectivement.

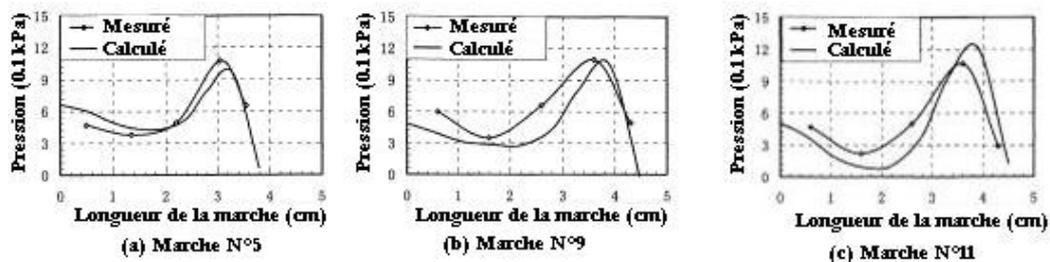


Figure I.5 : Profils de pressions sur la face horizontale de la marche N°5, N°9 et N°11 (Chen et al, 2001).

En 2002, **Qun Chen** et ses collaborateurs ont divisé leurs travaux en deux parties :

- ✓ Dans la première partie, ils ont utilisé le même modèle numérique que celui de leurs premiers travaux (2001), en tenant compte du terme de pression modifiée de l'équation de quantité de mouvement.

- ✓ Dans la deuxième partie, ils ont changé le modèle de turbulence, en considérant le modèle des contraintes de Reynolds.

A. Partie I

Pour le modèle de turbulence $k-\varepsilon$ donné par Launder et Spalding (1972), l'équation de continuité et les équations de k et ε sont données par les expressions (I-3), (I-5), (I-6), (I-7) et (I-8) respectivement. L'équation de quantité de mouvement est représentée par l'expression suivante :

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i U_j) = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (\text{I-11})$$

avec, p' : Pression modifiée, donnée par :
$$p' = P + \frac{2}{3} \rho k \quad (\text{I-12})$$

où, P est la Pression.

Pour valider leur modèle, **Qun Chen** et ses collaborateurs ont fait d'autres essais expérimentaux sur le modèle réduit qu'ils ont utilisé lors de leurs premiers travaux (2001).

Sur les faces horizontales et verticales des marches impaires (de la marche N° 5 à N° 13), cinq tubes piézométriques sont fixés, sur chaque face verticale et horizontale de la marche. Près des deux extrémités de la surface verticale de la marche, les deux piézomètres étaient de 5 et 9 mm à partir du dessus et du bas. Pour la face horizontale, les distances des extrémités gauches et droites étaient de 5 et 2 mm, respectivement. Au milieu, il y a un espacement égal entre deux piézomètres adjacents (figure I.6). Une mesure de point a été utilisée pour mesurer la profondeur de l'eau ou la surface libre le long du déversoir.

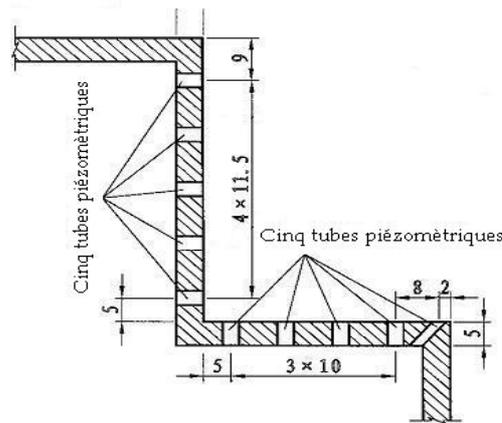


Figure I.6 : Emplacement des piézomètres (Chen et al, 2002).

b. Résultats

- *Surface libre*

Les auteurs ont trouvé les mêmes résultats pour la surface libre simulée et mesurée comparée à leurs premiers travaux (2001, figure I.2).

- *Champ de vitesse*

Sur la figure I.7, les vecteurs vitesse d'écoulement sont tracés.

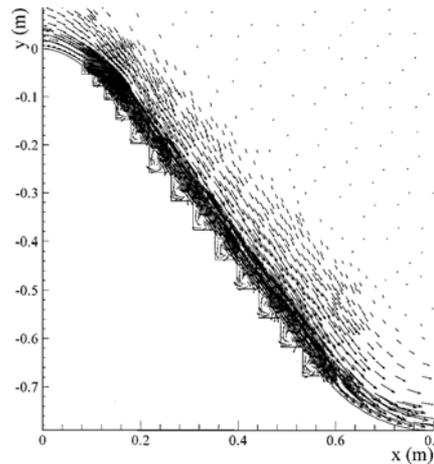


Figure I.7 : Vecteurs vitesse de fluide sur le déversoir en marches d'escalier (Chen et al, 2002).

Cette figure montre que le type d'écoulement sur le déversoir n'est pas un écoulement en nappe mais un écoulement extrêmement turbulent.

Les vecteurs vitesse sur la marche N°7 obtenus par la simulation et la mesure sont les mêmes que ceux obtenus par **Qun Chen** et ses collaborateurs (2001, figure I.3) lors de leurs premiers travaux.

- *Pression*

La figure I.8 représente les isolines de pression dans le domaine de l'eau obtenus par la simulation numérique.

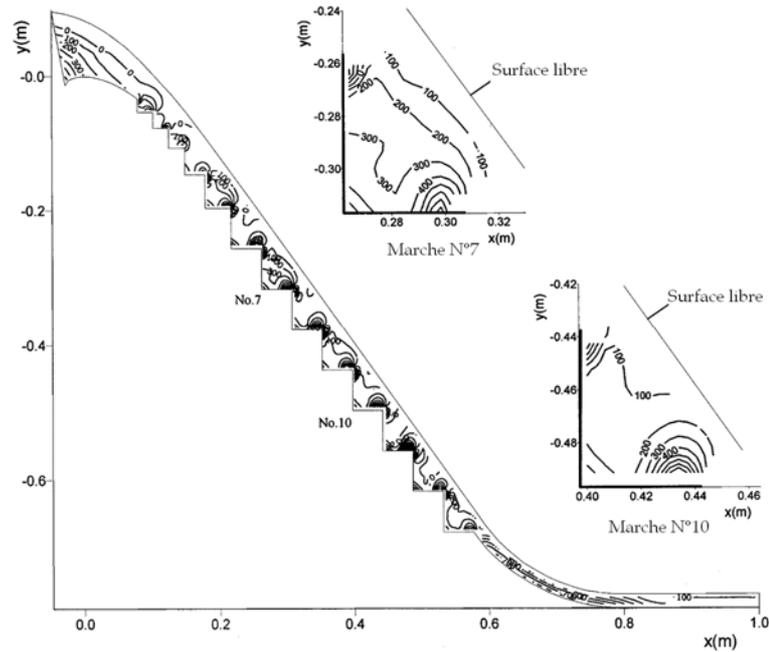


Figure I.8 : Isolines de pression sur le déversoir en marches d'escalier (Pa) (Chen et al, 2002).

La figure I.9 représente le profil de pression sur les faces horizontales et verticales des marches N°5, N°9, et N°13, respectivement.

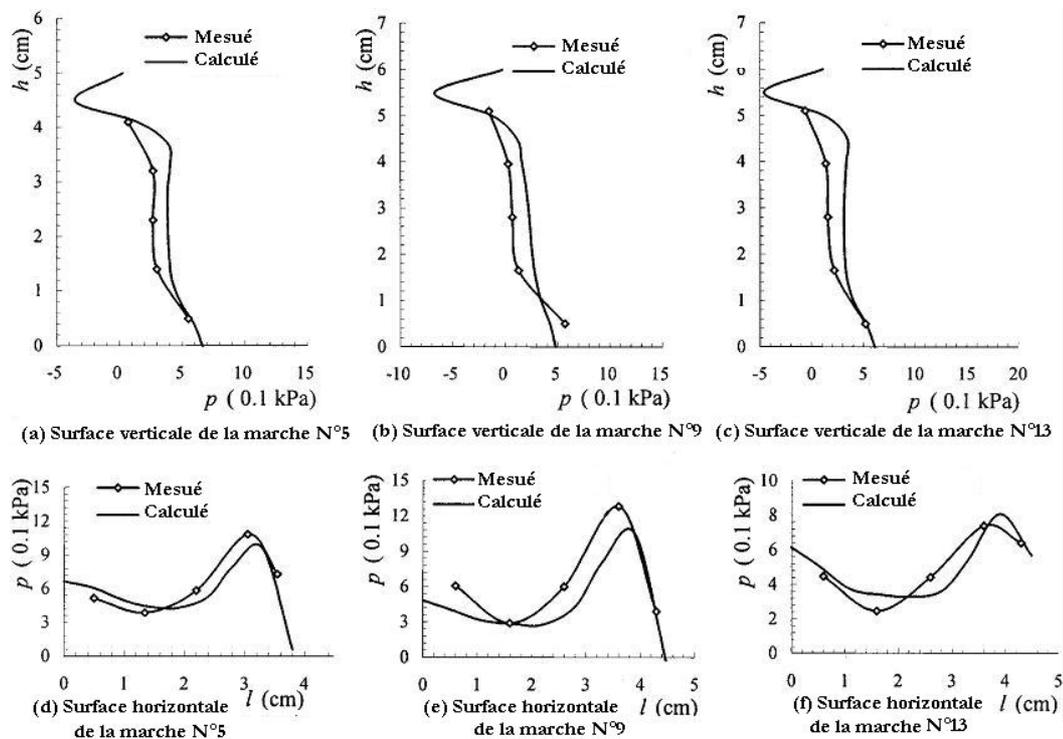


Figure I.9 : Profils de pression sur la surface de la marche (Chen et al, 2002).

On observe des pressions négatives au dessus de la face verticale dans les résultats de simulation.

B. Partie II

Le modèle de turbulence des contraintes de Reynolds est employé pour simuler les problèmes de la submersion des déversoirs en marches d'escaliers.

Les équations sont discrétisées par la méthode des volumes finies. Les termes de diffusion et d'advection étaient discrétisés en utilisant le schéma hybride.

L'algorithme **SIEMPLEC** a été employé pour la résolution de système d'équations discrétisées et pour corriger la pression et la vitesse.

a. **Modèle mathématique**

Pour un écoulement incompressible, les équations de continuité et de quantité de mouvement sont définies par les deux expressions suivantes:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (\text{I-13})$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mathbf{U}\mathbf{U} - \frac{\mu}{\rho} \nabla \mathbf{U} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla(\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}}) + \mathbf{B} \quad (\text{I-14})$$

où, \mathbf{U} : Vitesse moyenne d'écoulement ; P : Pression; t : Temps; μ : Viscosité moléculaire du l' air - eau ; ρ : Densité moléculaire du l'air - eau ; $\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}}$: contrainte de Reynolds et \mathbf{B} : Force extérieure.

Le modèle de turbulence des contraintes de Reynolds, ne fait pas appel à l'hypothèse de viscosité turbulente. Dans le modèle différentiel des contraintes de Reynolds, $\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}}$ satisfait l'équation suivante :

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{U}} - \nabla \cdot \left(\frac{C_s}{\sigma_{DS}} \frac{k}{\varepsilon} \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} (\nabla \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}})^T \right) = P_r + \phi - \frac{2}{3} \varepsilon \mathbf{I} \quad (\text{I-15})$$

avec, P_r : Tenseur de production des contraintes de cisaillement, donné par :

$$P_r = -\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} (\nabla \mathbf{U})^T - (\nabla \mathbf{U}) \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} \quad (\text{I-16})$$

et ϕ est la corrélation de contrainte de pression donnée par l'expression suivante :

$$\phi = -C_{1S} \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} - \frac{1}{3} k \mathbf{I} \right) - C_{2S} \left(P_r - \frac{2}{3} P_{rk} \mathbf{I} \right) \quad (\text{I-17})$$

où, k et ε sont l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente respectivement, C_{1S} et C_{2S} sont les constantes de l'équation des contraintes de Reynolds, $C_{1S} = 1.8$, $C_{2S} = 0.6$.

avec, $\mathbf{I} = 1$ si $i = j$ et $\mathbf{I} = 0$ si $i \neq j$.

P_{rk} : Production de l'énergie cinétique turbulente, où :

$$P_{rk} = \frac{1}{2} \text{trace} P_r = -\overline{uu} \nabla U \quad (\text{I-18})$$

Les composantes des contraintes de Reynolds sont déterminées par l'expression suivante :

$$\overline{k} = \frac{1}{2} \overline{u^2} \quad (\text{I-19})$$

L'équation du taux de dissipation, ε , est :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (U \varepsilon) - \nabla \cdot \left(\frac{C_s}{\sigma_\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon} \overline{uu} \nabla \varepsilon \right) = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_{rk} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{I-20})$$

où, $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ sont les constantes de l'équation du taux de dissipation, ε , $C_{\varepsilon 1} = 1.44$ et $C_{\varepsilon 2} = 1.92$.

C_s : Constante dans le modèle des contraintes de Reynolds, $C_s = 0.22$.

σ_ε : Nombre de Prandlt, dans le modèle des contraintes de Reynolds, $\sigma_\varepsilon = \frac{C_s}{0.16}$.

La résolution des équations (I-13), (I-14), (I-15), (I-19), et (I-20) permet de déterminer la vitesse, la pression et les différents composants des contraintes de Reynolds.

b. Conditions aux limites

• Frontière d'entrée

La section d'entrée est en amont du barrage. La vitesse à l'entrée est indiquée par la vitesse mesurée : $U_{in} = 0.103 \text{ m/s}$, $V_{in} = 0.0 \text{ m/s}$.

• Frontière de sortie

À la sortie, les gradients normaux de tous les scalaires sont égaux à zéro :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 ; \text{ où } \varphi = U, V, W, K, \varepsilon \text{ etc.}$$

• Surface libre

La surface libre a été traitée comme une frontière libre. La condition de frontière est que la pression relative est nulle : $P = 0$.

• États de frontière de paroi

Sur la surface de la paroi, les auteurs ont supposé que l'effet de glissement est négligeable $U = 0$. Sur les régions proche de la paroi, l'écoulement est indiqué par des fonctions de paroi.

c. Modèle d'essai

Qun Chen et ses collaborateurs ont fait d'autres essais expérimentaux sur le modèle réduit qu'ils ont utilisé dans leurs premiers travaux (2001).

Les pressions sur la surface verticale et horizontale des marches N°5, N°7, N°9, N°11, N°13 ont été mesurées avec cinquante tubes piézométriques fixés sur la surface de la marche.

d. Résultats

- *Champ de vitesse*

La figure I.10 représente les vecteurs vitesse d'écoulement dans le réservoir, sur le déversoir en marches d'escalier et sur l'ouvrage de raccordement.

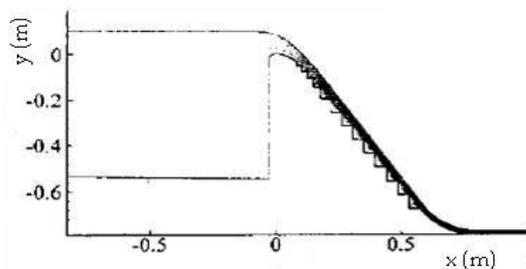


Figure I.10 : Vecteurs vitesse dans le domaine de simulation (Chen et al, 2002).

Sur la figure I.11, les vecteurs vitesse sur le déversoir et l'ouvrage de raccordement ont été tracés.

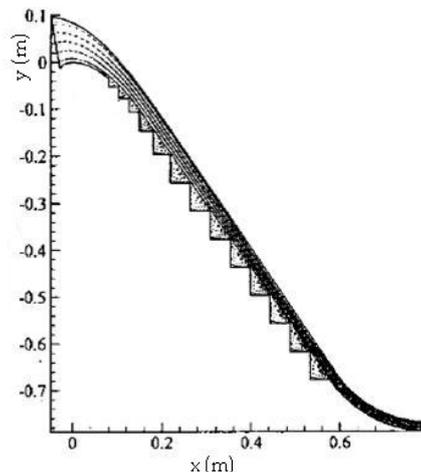
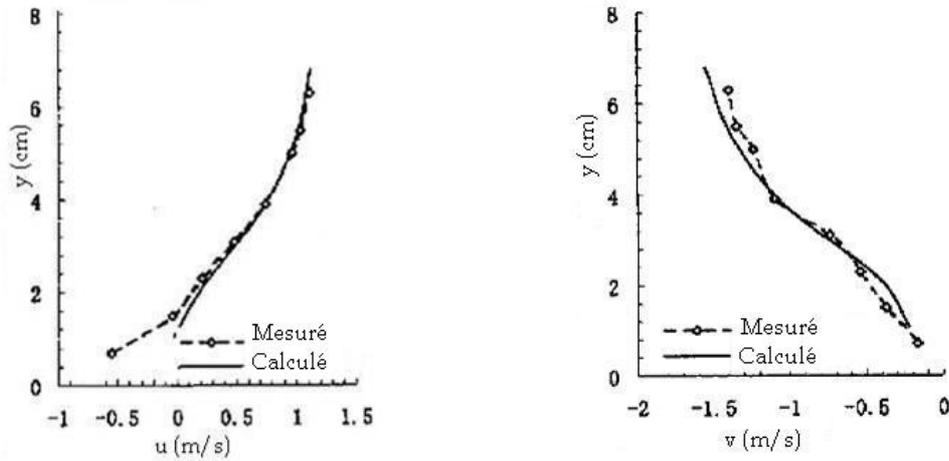


Figure I.11 : Vecteurs vitesse sur le déversoir en marches d'escalier (Chen et al, 2002).

Les vecteurs de vitesse sur la marche N°7 obtenus par la simulation et la mesure ont les mêmes valeurs que ceux obtenus par **Qun Chen** et ses collaborateurs (2001).

Les profils des vitesses U et V le long de la bissectrice perpendiculaire à la face horizontale de la marche ont été tracés sur la figure I.12.

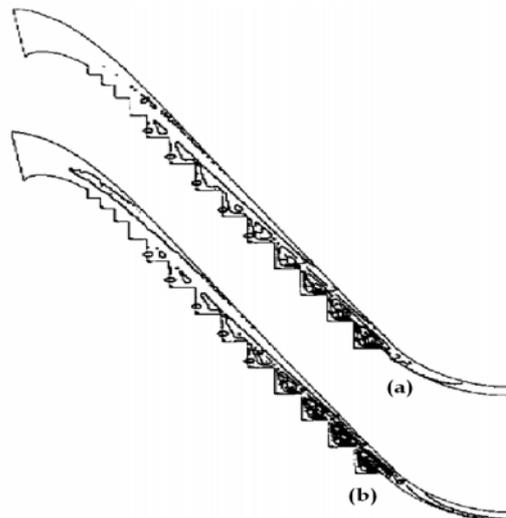


(a) Profils de la composante horizontale de la vitesse. (b) Profils de la composante verticale de la vitesse

Figure I.12 : Profils des composantes de la vitesse le long de la bissectrice perpendiculaire à la face horizontale de la marche N°7 (Chen et al, 2002).

- *Energie cinétiques turbulente et dissipation de l'énergie cinétique turbulente*

La figure I.13 représente les isolines de l'énergie cinétique turbulente k et du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulent ε .



(a): Isolines de l'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2). (b) : Isolines du taux de dissipation ε (m^2/s^3).

Figure I.13 : Isolines de l'énergie cinétique turbulente k et du taux de dissipation ε (Chen et al, 2002).

Conclusion

Le modèle de turbulence $k - \varepsilon$ et le modèle des contraintes de Reynolds avec la méthode de VOF et la grille non structurée peuvent simuler la submersion du déversoir en marches d'escaliers avec succès. Le modèle de VOF qui représente la phase air - eau permet de déterminer numériquement l'évolution de la surface libre au cours de temps.

La difficulté de traiter la frontière complexe du déversoir en marches d'escaliers a été surmontée en employant la grille non structurée pour discrétiser le domaine d'étude.

Selon les résultats de simulation, il est évident qu'il y a des rouleaux de recirculations dans le creux de chaque marche, ce qui est vérifiée par les mesures.

L'écoulement sur la marche peut être divisé en deux types d'écoulement : un écoulement extrêmement turbulent et les rouleaux de recirculations dans le creux de chaque marche.

La profondeur de l'eau le long du déversoir peut fournir la référence pour la conception de la dimension de la paroi latérale du déversoir. En outre, la vitesse à l'entrée et à l'extrémité du déversoir peut être employée pour estimer le rapport de dissipation d'énergie du déversoir en marches d'escalier. Le dissipateur d'énergie au-dessous du déversoir peut être conçu selon l'énergie résiduelle du déversoir en marches d'escalier. La pression minimum moyenne sur la surface de la marche est nécessaire pour évaluer le risque de cavitation.

II. Travaux de Qun Chen, Guang-Qing Dai et Qing Yang, (2004)

En 2004, **Qun Chen** et ses collaborateurs ont élaboré un modèle numérique tridimensionnel pour simuler les écoulements turbulents tridimensionnels sur les déversoirs en marches d'escaliers, et ils l'ont appliqué au réservoir du Yubeishan.

Afin de résoudre la surface libre incurvée de l'eau et manipuler les conditions de frontière complexes, le volume partiel du modèle liquide (VOF), applicable à la résolution de l'écoulement diphasique stratifié est introduit au modèle de turbulence $k-\varepsilon$.

La grille non structurée est adaptable à la discrétisation du domaine complexe. Elle est combinée avec la méthode des volumes finis, et employée pour la discrétisation du domaine de l'écoulement extrêmement turbulent sur le déversoir en marches d'escaliers. La méthode de la grille non structurée est utilisée dans la simulation par la méthode des volumes finis. Le code **FLUENT** est mis en oeuvre pour la simulation numérique.

Une comparaison entre le modèle de turbulence $k - \varepsilon$ et le modèle des contraintes de Reynolds de turbulence a été faite.

Dans cette étude le modèle mathématique régissant ce type d'écoulement est représenté par le système d'équations (I-1) ÷ (I-3) et (I-5) ÷ (I-12).

Les différents paramètres de système d'équations (I-1) ÷ (I-3) et (I-5) ÷ (I-12), sont définis dans le tableau I.1.

a. Modèle d'essais

Le déversoir en marches d'escaliers simulé dans cette étude est le réservoir de Yubeishan. Le plan horizontal est un trapèze isocèle dont les deux côtés ont un angle d'augmentation de 5° (la largeur de l'augmentation du déversoir ou la section du déversoir change le long de l'écoulement). Par conséquent, la simulation tridimensionnelle doit être employée.

Le déversoir en marches d'escaliers se compose d'un canal avec une pente douce à l'avant, un coursier en marches d'escaliers de décharge au milieu et un canal horizontal à l'extrémité.

Il y a 19 marches sur le coursier en marches d'escaliers numérotées de 1, 2, etc. à partir de la crête de déversoir jusqu'au pied aval.

Les trois premières marches sont des marches de transition de dimensions variables. Les 16 dernières marches sont des marches uniformes (de dimensions 6m par 2m). La géométrie et le domaine de simulation du déversoir en marches d'escaliers peuvent être présentés dans la figure I.14.

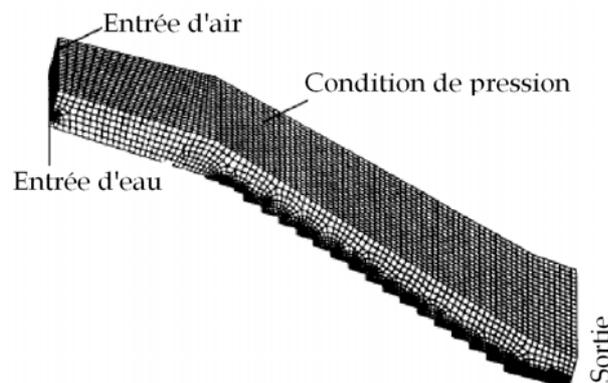


Figure I.14 : Maillages et états de frontière extérieurs du déversoir (Chen et al, 2004).

b. Conditions aux limites

Les conditions de frontière du domaine de simulation sont également montrées dans la figure I.14. L'entrée de l'eau est considérée comme frontière d'entrée de la

vitesse pour un débit $Q = 2800 \text{ m}^3 / \text{s}$ et une profondeur d'eau mesurée sur plusieurs sections dans un modèle réduit. La profondeur de l'eau à l'entrée est $h_e = 3.806 \text{ m}$ et la vitesse normale à l'entrée est $v_n = 15.547 \text{ m/s}$.

La sortie et toutes les frontières d'air sont données comme conditions de frontière libre : A la frontière, la pression est égale à la pression atmosphérique. Si la pression dans le domaine d'écoulement est inférieure à la pression atmosphérique, le fluide est entrant ; dans le cas contraire, le fluide est sortant. Le fond et les parois sont définis en tant qu'états de frontière de paroi (il y a aucun effet de glissement). La sous-couche visqueuse a été simulée par une fonction standard de paroi.

c. Résultats et analyse de simulation

• Surface libre de l'eau

L'interface entre l'eau et l'air dans le plan symétrique du déversoir est montrée dans la figure I.15. L'air est dans la partie supérieure et l'eau est dans la partie inférieure.

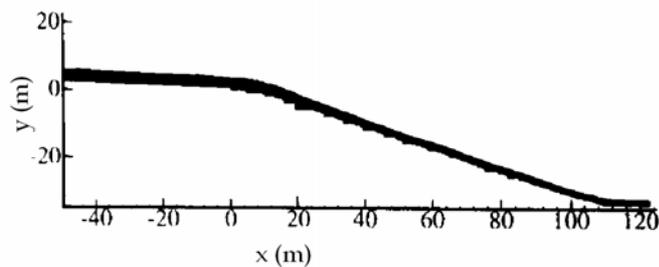


Figure I.15 : Surface libre de l'eau dans le plan symétrique du déversoir (Chen et al, 2004).

La profondeur de l'eau diminue le long du déversoir parce que la largeur du déversoir augmente graduellement. Il y a une zone d'entraînement d'air dans le creux de la marche dû à la concentration plus élevée d'aération.

• Champ de vitesse

Les vecteurs vitesse dans le plan symétrique du déversoir sont tracés dans la figure I.16.

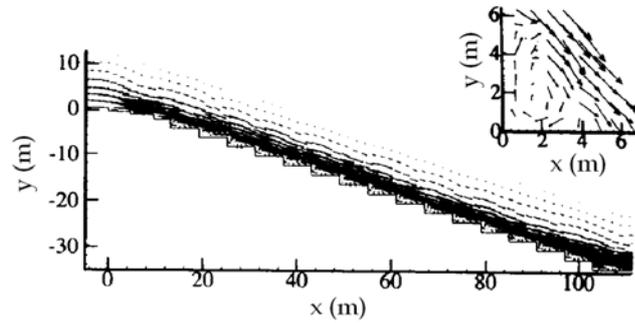


Figure I.16 : Vecteurs de vitesse dans le plan symétrique du déversoir (Chen et al, 2004).

- *Pression*

Les lignes isobares dans le plan symétrique du déversoir sont montrées dans la figure I.17.

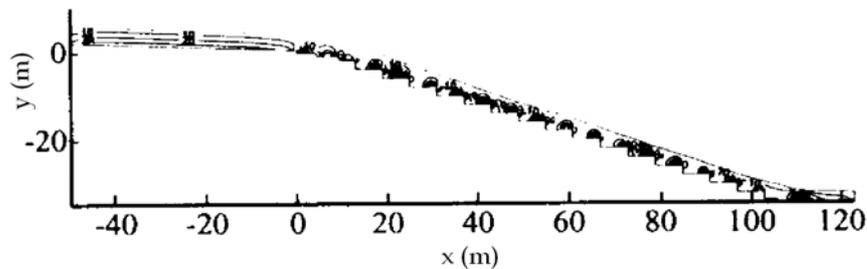
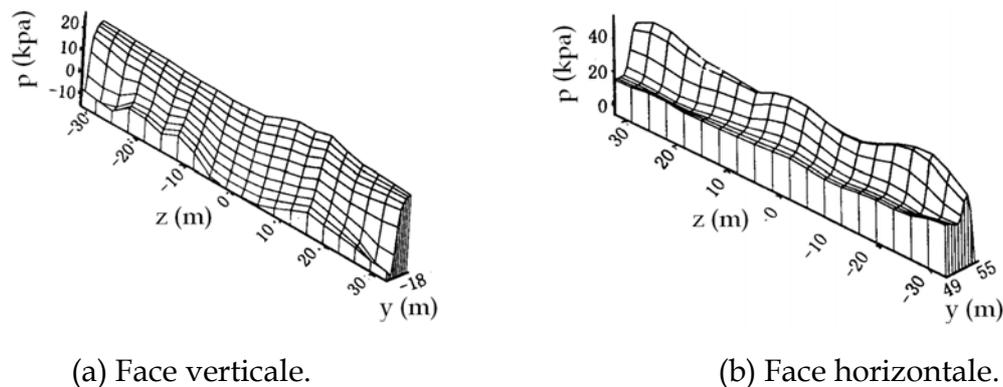


Figure I.17 : Lignes isobares dans le plan symétrique du déversoir (Chen et al, 2004).

La distribution des pressions sur chaque marche a une régularité semblable.

La figure I.18 représente le tracé de la surface de pression sur les deux faces horizontale et verticale de la marche N° 10.



(a) Face verticale.

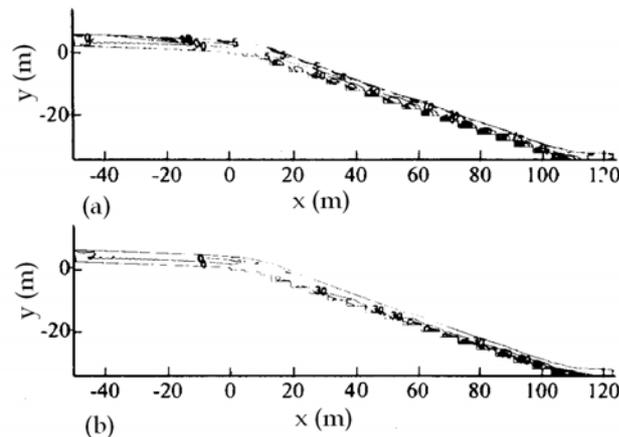
(b) Face horizontale.

Figure I.18 : Le tracé de la surface de pression sur les deux faces horizontale et verticale de la marche N° 10 (Chen et al, 2004).

Le long de la largeur du déversoir, la distribution de pression n'est pas uniforme

- *Energie turbulente et taux de dissipation de l'énergie cinétiques turbulente*

Les isolines de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation d'énergie cinétiques turbulent sur le plan symétrique du déversoir sont montrés dans la figure I.19.



(a) : Energie cinétique turbulente k (m²/s²).

(b) : Taux de dissipation ϵ (m²/s³).

Figure I.19 : Isolines de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation de l'énergie cinétiques de turbulence dans le plan symétrique du déversoir (Chen et al, 2004).

L'énergie turbulente et le taux de dissipation de l'énergie cinétiques turbulente du débordement de déversoir augmentent le long du déversoir.

Leurs valeurs maximum se produisent dans la zone interactive entre les rouleaux de recirculation et l'écoulement extrêmement turbulent, où la fluctuation turbulente est plus forte de sorte que l'énergie turbulente et le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente soient plus importants.

- *Rapport d'énergie de dissipation du déversoir*

Le rapport de dissipation d'énergie peut être réduit à 63.0 % basé sur les vitesses et la profondeur de l'eau à l'entrée et à la sortie du déversoir.

d. Conclusions

L'écoulement turbulent tridimensionnel sur le déversoir en marche d'escaliers du réservoir de Yubeishan est simulé avec succès en employant le modèle de turbulence de k - ϵ combiné avec la méthode de VOF et en utilisant la grille non structurée pour discrétiser le domaine de simulation. Le modèle de VOF est une

méthode efficace pour résoudre la surface libre fortement irrégulière et il peut très bien simuler la surface libre pour l'écoulement turbulent complexe sur le déversoir en marche d'escaliers.

La comparaison des résultats de simulation avec les données mesurées démontre que le modèle de k-ε pourrait être employé avec la méthode de VOF pour simuler l'écoulement extrêmement turbulent sur le déversoir en marches d'escaliers et il est meilleur que le modèle des contraintes de Reynolds avec la méthode de VOF.

L'utilisation de la grille non structurée rend la discrétisation du domaine irrégulier de simulation plus flexible, raisonnable et avec une convergence plus rapide. Selon les résultats de la simulation, les auteurs ont constaté qu'il y a des rouleaux de recirculation dans le sens des aiguilles d'une montre dans le creux des marches. L'écoulement sur la marche peut être divisé en deux parties, l'écoulement extrêmement turbulent et les rouleaux de recirculation dans les creux des marches. La pression maximum sur la face horizontale de la marche correspond à l'endroit où l'écoulement est extrêmement turbulent, et la pression minimum près de l'arête de la marche correspond à l'endroit où les rouleaux de recirculations séparent la face de la marche.

L'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente de débordement du déversoir montrent une régularité semblable de distribution.

Leurs valeurs maximales de l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente se produisent dans l'interactif sur la zone entre l'écoulement extrêmement turbulent et les rouleaux de recirculations dans le creux des marches, où l'intensité de turbulence est la plus importante.

III. Travaux de Qun Chen, Guang-Qing Dai, Fen-Qing et Zhu

En 2005, **Qun Chen** et ses collaborateurs ont basé leurs travaux sur la simulation numérique des écoulements turbulents sur les déversoirs en marches d'escaliers. Quelques facteurs principaux qui ont de l'influence sur le rapport de dissipation d'énergie des déversoirs en marches d'escalier, tels que le débit unitaire, la pente du coursier, les dimensions de la marche,..., etc. ont été étudiés. En outre, la mécanique de dissipation d'énergie a été analysée selon les caractéristiques de la turbulence sur la submersion du déversoir.

Le rapport de l'énergie de dissipation est déterminé par l'équation suivante :

$$\eta = \frac{\Delta E}{E_1} \times 100\% = \frac{E_1 - E_2}{E_1} \times 100\% \quad (\text{I-21})$$

où, E_1 et E_2 représentant l'énergie totale en amont et en aval du ressaut, respectivement. Ces deux paramètres sont déterminés par les expressions suivantes :

$$E_1 = Z_1 + H_1 + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \quad (I-22)$$

$$E_2 = H_2 + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \quad (I-23)$$

où, Z_1 : est la côte verticale au pied aval du barrage. H_1 : Profondeur de l'eau à l'entrée ; H_2 : Profondeur de l'eau à la sortie ; v_1 : Vitesse moyenne d'entrée en amont ; v_2 : Vitesse moyenne de sortie en aval.

α_1 et α_2 sont les coefficients de vitesse d'entrée et de la vitesse de sortie, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.0$ (les distributions de vitesse le long de la profondeur de l'eau sont uniforme à l'entrée et à la sortie).

a. Influence du débit unitaire

Afin d'étudier l'influence du débit unitaire sur la submersion du déversoir et particulièrement sur le rapport de dissipation d'énergie, un déversoir de hauteur 50 m avec une pente de 1: 0.75 a été étudié expérimentalement et numériquement en utilisant un débit unitaire différent. La crête du déversoir présente un profil standard de WES décrit par l'équation $y=0.0854x^{1.85}$. Il y a 39 marches sur le déversoir. Les six premières marches sont des marches de transition et les autres marches sont des marches uniformes de 0.75 m par 1m. Un ouvrage de raccordement avec un rayon de 21 m a suivi la dernière marche et est relié à un canal horizontal en aval, suivant les indications de la figure I.20.

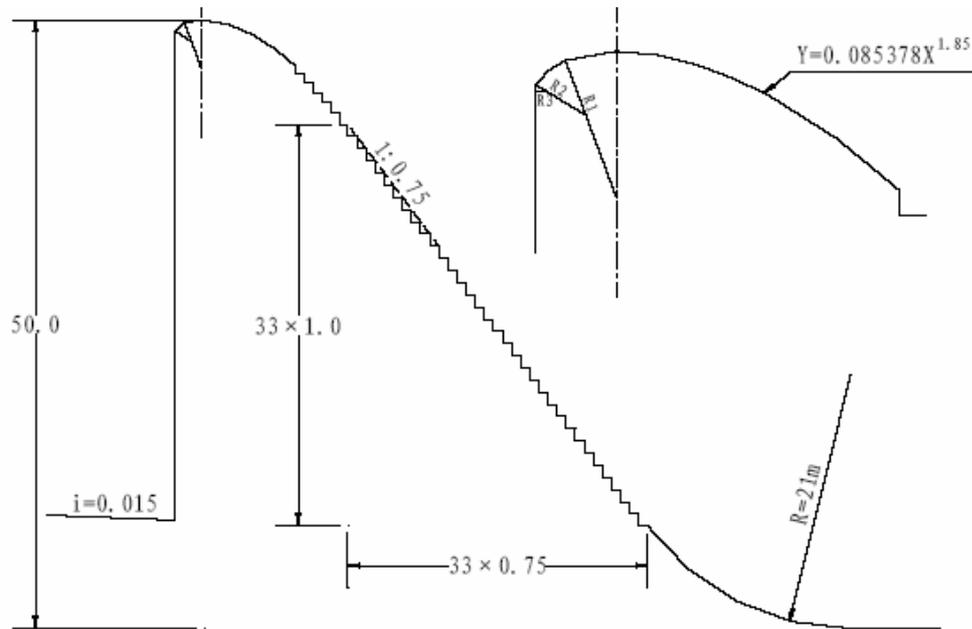


Figure I.20 : Face du déversoir (Chen et al, 2005).

Cinq différents débits unitaires ont été utilisés ($q = 10, 20, 30, 50, 70 \text{ m}^3/\text{sm}$).

Dans le tableau I.1 sont présentés les résultats numériques.

Tableau I.2 : Rapport de dissipation d'énergie pour différents débits unitaires avec ouvrage de Raccordement.

| $q(\text{m}^3/\text{s m})$ | Z_1 (m) | H_1 (m) | v_1 (m/s) | E_1 (m) | H_2 (m) | v_2 (m/s) | E_2 (m) | η (%) |
|----------------------------|--------------|--------------|----------------|--------------|--------------|----------------|--------------|---------------|
| 10 | 10.721 | 42.008 | 0.338 | 52.727 | 0.590 | 16.949 | 15.232 | 71.11 |
| 20 | 10.721 | 43.609 | 0.459 | 54.336 | 0.960 | 20.833 | 23.082 | 57.52 |
| 30 | 10.721 | 44.951 | 0.667 | 55.690 | 1.271 | 23.603 | 29.667 | 46.73 |
| 50 | 10.721 | 47.251 | 1.058 | 58.024 | 1.816 | 27.533 | 40.454 | 30.28 |
| 70 | 10.721 | 49.254 | 1.421 | 60.073 | 2.299 | 30.448 | 49.551 | 17.52 |

La figure I.21 donne la relation entre le rapport de dissipation d'énergie η et le débit unitaire q .

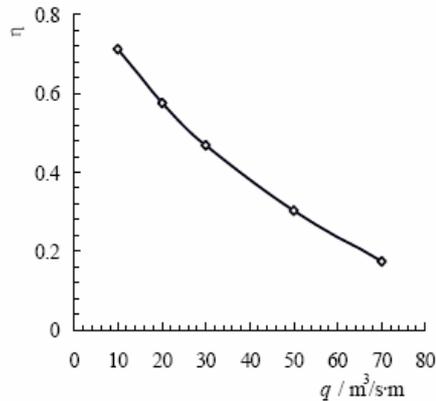


Figure I.21: Rapport de dissipation d'énergie η en fonction du débit unitaire q (Chen et al, 2005).

Les auteurs ont remarqué que le rapport de dissipation d'énergie diminue quant le débit unitaire augmente.

Quant l'écoulement est turbulent, l'énergie cinétique turbulente k et le taux de dissipation turbulent ε sont deux facteurs importants. Ainsi, les isolines de l'énergie cinétique turbulente k et le taux de dissipation turbulent ε à différents débits unitaires ont été tracés sur la figure I.22 et la figure I.23.

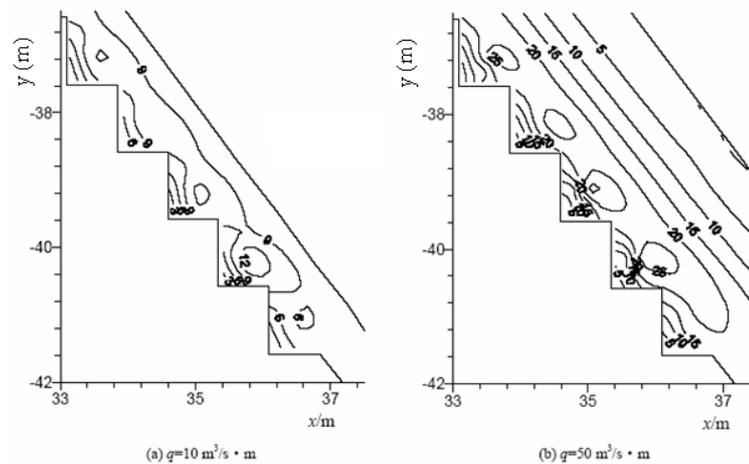


Figure I.22 : Isolines de l'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) à différents débits unitaires (Chen et al, 2005).

L'énergie cinétique turbulente, k , augmente avec l'augmentation du débit unitaire (figure I.22).

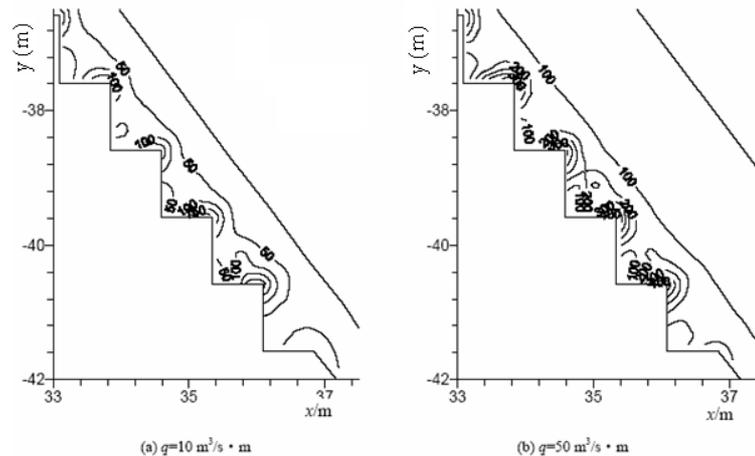


Figure I.23 : Isolines du taux de dissipation turbulent ε (m^2/s^2) à différents débits unitaires (Chen et al, 2005).

Bien que le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulents ε augmente également avec le débit unitaire, l'ampleur de son augmentation est beaucoup moins importante que celle de l'énergie cinétique turbulente (figure I.23).

b. Influence de la pente du coursier

Quatre déversoirs en marches d'escalier avec des pentes différentes 1: 0.7, 1: 0.75, 1: 0.8 et 1:1 ont été conçus pour étudier l'influence de la pente du coursier « i » sur le rapport de dissipation d'énergie.

Les points hauts du déversoir correspondent à celui de la figure I.20. Il y a 51 marches sur le déversoir, les onze premières marches sont des marches de transition et les autres sont des marches uniformes de hauteur 1 m. Pour ces quatre déversoirs en marches d'escaliers, le débit unitaire de simulation est égal à $50 \text{ m}^3/\text{s} \cdot \text{m}$.

La profondeur d'eau d'entrée H_1 et la vitesse moyenne v_1 , la profondeur d'eau de sortie H_2 et la vitesse moyenne v_2 sont obtenues par la simulation et le calcul du rapport de dissipation d'énergie sur ces quatre déversoirs en marches d'escalier avec différents pente du coursier ont été énumérées dans le tableau I.3.

Tableau I.3 : Rapport de dissipation d'énergie sur le déversoir en marches d'escalier à différentes pentes du coursier sans l'ouvrage de raccordement.

| Pente du coursier i | Z_1 (m) | H_1 (m) | v_1 (m/s) | E_1 (m) | H_2 (m) | v_2 (m/s) | E_2 (m) | η (%) |
|-----------------------|--------------|--------------|----------------|--------------|--------------|----------------|--------------|---------------|
| 1 : 0.7 | 10.721 | 47.251 | 1.058 | 58.024 | 2.003 | 24.963 | 33.763 | 41.8 |
| 1 : 0.75 | 10.721 | 47.251 | 1.058 | 58.024 | 2.022 | 24.728 | 33.188 | 42.8 |

| | | | | | | | | |
|---------|--------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|------|
| 1 : 0.8 | 10.721 | 47.251 | 1.058 | 58.024 | 2.042 | 24.486 | 32.600 | 43.8 |
| 1 : 1 | 10.721 | 47.251 | 1.058 | 58.024 | 2.107 | 23.730 | 30.809 | 46.9 |

La figure I.24 représente la relation entre le rapport de dissipation d'énergie η et de l'inverse de la pente $1/i$.

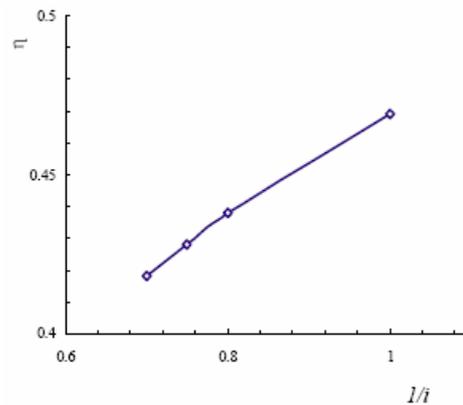


Figure I.24 : Rapport de dissipation d'énergie η en fonction de l'inverse de la pente (Chen et al, 2005).

Cette figure montre que l'augmentation du rapport de dissipation d'énergie est approximativement linéaire avec l'augmentation de l'inverse de la pente du coursier.

c. Influence de la dimension de la marche

Sans compter le déversoir en marches d'escalier avec des marches uniformes de hauteur de 1 m (figure I.20), quatre autres déversoirs avec des marches uniformes de hauteurs 1.5, 2, 2.5 et 3 m ont été conçus pour savoir si le changement de la dimension de la marche pourrait améliorer le rapport de dissipation d'énergie.

La crête du déversoir, l'ouvrage de raccordement, les cinq marches du déversoir et la pente de ce coursier sont représentés dans la figure I.20.

Basés sur la profondeur de l'eau à la sortie, H_2 , et la vitesse moyenne v_2 obtenue par la simulation selon la profondeur donnée de l'eau à l'entrée H_1 et la vitesse moyenne v_1 , les rapports de dissipation d'énergie ont été calculés et énumérés dans le tableau I.4.

Tableau I.4. : Rapport de dissipation d'énergie dans des déversoirs en marches d'escalier pour différents dimensions des marches.

| q (m ³ /s .m) | h (m) | Z ₁ (m) | H ₁ (m) | v ₁ (m/s) | E ₁ (m) | H ₂ (m) | V ₂ (m/s) | E ₂ (m) | η (%) |
|-----------------------------|----------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|----------|
| 20 | 1 | 10.721 | 47.251 | 0.459 | 54.336 | 0.960 | 20.833 | 23.082 | 57.5 |
| | 1.5 | | | | | 0.890 | 22.472 | 26.628 | 51.0 |
| | 2 | | | | | 0.868 | 23.041 | 27.928 | 48.6 |
| | 2.5 | | | | | 0.911 | 21.954 | 25.476 | 53.1 |
| | 3 | | | | | 0.932 | 21.459 | 24.403 | 55.1 |
| 30 | 1 | 10.721 | 47.251 | 0.667 | 55.690 | 1.271 | 23.603 | 29.667 | 46.7 |
| | 1.5 | | | | | 1.178 | 25.467 | 34.234 | 38.5 |
| | 2 | | | | | 1.151 | 26.064 | 35.776 | 35.8 |
| | 2.5 | | | | | 1.162 | 25.818 | 35.135 | 36.9 |
| | 3 | | | | | 1.204 | 24.917 | 32.848 | 41.0 |
| 50 | 1 | 10.721 | 47.251 | 1.058 | 58.024 | 1.816 | 27.533 | 40.454 | 30.3 |
| | 1.5 | | | | | 1.811 | 27.609 | 40.662 | 29.9 |
| | 2 | | | | | 1.859 | 26.896 | 38.730 | 33.3 |
| | 2.5 | | | | | 1.821 | 27.457 | 40.247 | 30.6 |
| | 3 | | | | | 1.831 | 27.307 | 39.838 | 31.3 |
| 70 | 1 | 10.721 | 49.254 | 1.421 | 60.073 | 2.229 | 30.448 | 49.551 | 17.5 |
| | 1.5 | | | | | 2.327 | 30.082 | 48.449 | 19.4 |
| | 2 | | | | | 2.348 | 29.813 | 47.648 | 20.7 |
| | 2.5 | | | | | 2.340 | 29.915 | 47.951 | 20.2 |
| | 3 | | | | | 2.344 | 29.863 | 47.799 | 20.4 |

Selon ces valeurs, la dimension de la marche a une certaine influence sur le rapport de dissipation d'énergie et la régularité de l'influence est différente avec le changement du débit unitaire.

Afin de voir plus clairement la variation du rapport de dissipation d'énergie avec la dimension de la marche, des courbes qui représentent la relation du rapport de dissipation d'énergie η et le rapport de la hauteur, h , de la marche et de la taille H du barrage (h/H) ont été montrés dans Figure I.25.

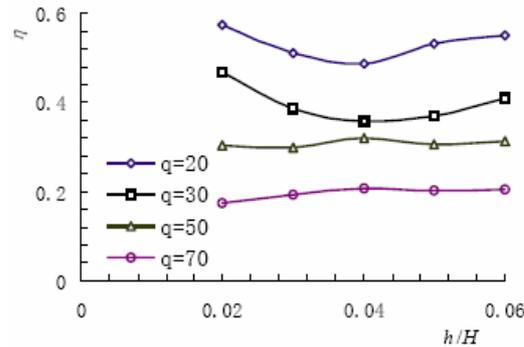


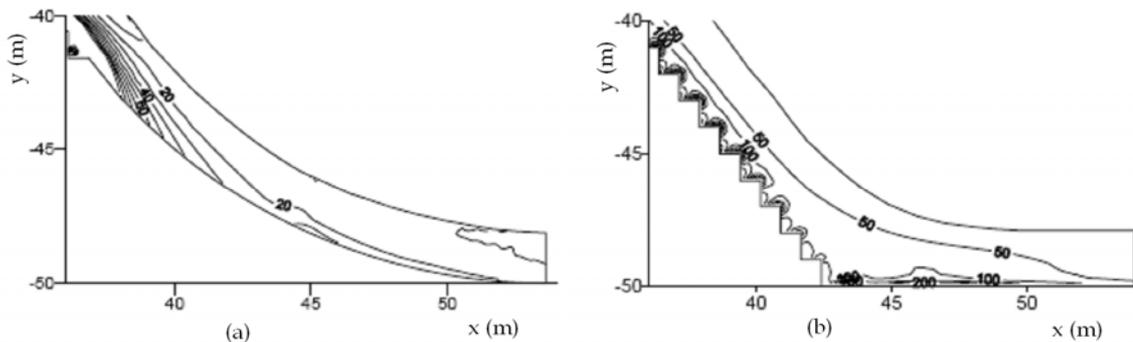
Figure I.25 : Rapport de dissipation d'énergie η en fonction du rapport h/H pour différents débits unitaires (Chen et al, 2005).

Pour les débits unitaires entre 20 et 30 m^3/sm , l'influence de la dimension de la marche sur le rapport de dissipation d'énergie est grande. Quand le débit unitaire devient plus important, entre 50 et 70 m^3/sm , l'influence de la dimension de la marche sur le rapport de dissipation d'énergie diminue.

d. Influence d'ouvrage de raccordement

Un ouvrage de raccordement avec un rayon de 21 m a été conçu au pied aval de déversoir en marches d'escalier. L'influence du débit unitaire sur le rapport de dissipation d'énergie et l'influence de la pente du coursier ont été étudiées.

Les isolines du taux de dissipation turbulent ε du déversoir en marches d'escalier avec et sans l'ouvrage de raccordement ont été tracés sur la figure I.26.



(a) : Avec ouvrage de raccordement.

(b) : Sans ouvrage de raccordement.

Figure I.26 : Isolines du taux de dissipation turbulent ε (m^2/s^3) au pied du déversoir (Chen et al, 2005).

Les auteurs ont remarqué que le taux de dissipation turbulent sur le canal horizontal sans ouvrage de raccordement est beaucoup plus important que celui avec l'ouvrage de raccordement. Ainsi, beaucoup plus d'énergie peut être absorbée sans l'ouvrage de raccordement.

Le taux de dissipation d'énergie dans un canal horizontal sans ouvrage de raccordement est plus important par rapport à celui dans un canal horizontal avec ouvrage de raccordement.

e. Conclusion

En conclusion, l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente doivent être plus important pour absorber plus d'énergie ; tandis que l'écoulement doit être régulier pour éviter la cavitation. Projeter dans la pratique, l'ouvrage de raccordement peut être conçu pour améliorer le rapport de dissipation d'énergie.

IV. Travaux de Xiangju Cheng, Lin Luo, Wenqian Zhao et Ran Li, (2004)

En 2004, **Cheng** et ses collaborateurs ont développé un modèle numérique qui traite les écoulements diphasique air - eau. Ce modèle utilise le modèle de turbulence $k - \epsilon$ pour calculer les variables caractéristiques de l'aération extérieure libre sur le déversoir en marches d'escaliers. La méthode de VOF est employée pour simuler la surface libre.

La méthode des volumes finis est adoptée pour transformer le modèle mathématique en système d'équation algébrique. La maille non structurée est mise en application pour adapter la forme complexe du domaine.

L'algorithme **PISO** est appliqué pour résoudre le système d'équations qui régit l'écoulement transitoire. Le schéma implicite est choisi pour la discrétisation temporelle.

Le système d'équations est représenté par les expressions (I-1) ÷ (I-10).

La comparaison entre les résultats simulés et les résultats expérimentaux a été faite.

a. Conditions aux limites

Le calcul numérique est basé sur les résultats expérimentaux de Chanson. Le domaine bidimensionnel est employé dans le calcul. Les conditions aux limites sont montrées dans la figure I.27.

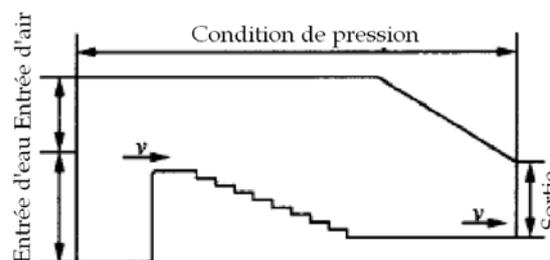


Figure I.27 : Conditions aux limites de domaine de calcul (Cheng et al, 2004).

- *Frontière d'entrée*

La frontière d'entrée de l'eau est placée en tant qu'un état d'entrée de vitesse. Dans le cas de l'expérience de Chanson, la vitesse d'entrée est égale à 0.12127 m/s. L'énergie cinétique de turbulence k et le taux de dissipation turbulent d'entrée ε sont calculés à partir des équations empiriques suivantes :

$$k = 0.00375 U_{in}^2 \quad (I-24)$$

$$\varepsilon = k^{1.5} / (0.4H_0) \quad (I-25)$$

avec, H_0 : Profondeur de l'eau d'entrée.

L'entrée du gaz est placée en tant qu'état d'entrée de pression. La pression atmosphérique est employée.

- *Frontière de sortie*

La condition de la surface libre est adoptée dans ce cas. La profondeur de l'eau à la sortie est flexible, et l'eau ne pourrait pas être séparée de l'air, ainsi l'état de sortie de pression est adopté.

Les gradients normaux de toutes variables sont placés à 0, $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$.

avec, φ : Représente u , v , k , et ε , respectivement.

- *Frontière de paroi*

Les auteurs ont supposé que l'effet de glissement est négligeable, c.-à-d. $U = 0$ et $V = 0$. La couche de viscosité près de la paroi est traitée avec la fonction de paroi.

b. Modèle d'essai

Les appareils expérimentaux et les résultats expérimentaux sont cités dans la référence (Chanson, 2004).

Les caractéristiques des variables des fluides air et eau sur les marches pour $Q = 0$. 182 m³/s sont montrées dans les figures I.28 à I.35.

Avec, C est le rapport du volume des bulles d'air dans un mélange air-eau du volume unitaire, y est la distance (m) de la pseudo base mesurée au fond (constitué par les arêtes de la marche) du poste de mesure, Y_{90} est le y (m) où la concentration en air est de 90 %, V est la vitesse en (m/s), V_{90} est la vitesse caractéristique (m/s) où la concentration en air est 90 %.

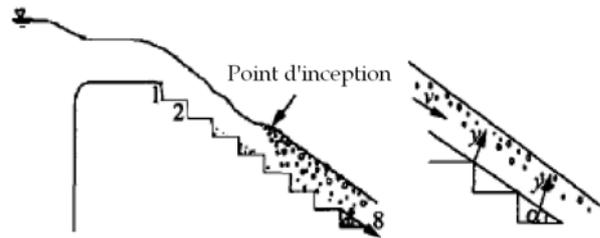


Figure I.28 : Définition de la section d'essai (Cheng et al, 2004).

c. Comparaison entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux

La forme et la dimension du domaine de calcul sont identiques à ceux de l'appareil expérimental utilisé dans les travaux de Chanson (2004).

La figure I.29 représente les vecteurs vitesse sur le déversoir en marches d'escaliers.

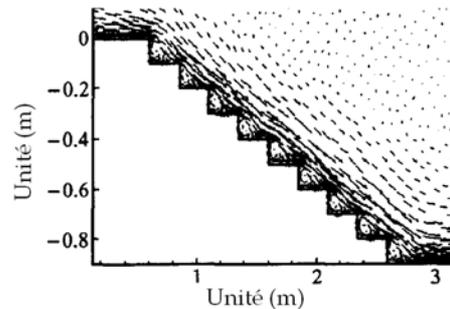


Figure I.29 : Vecteurs vitesse sur le déversoir en marches d'escaliers (Cheng et al, 2004).

La figure I.30 représente l'énergie cinétique de turbulence sur les marches 6, 7 et 8.

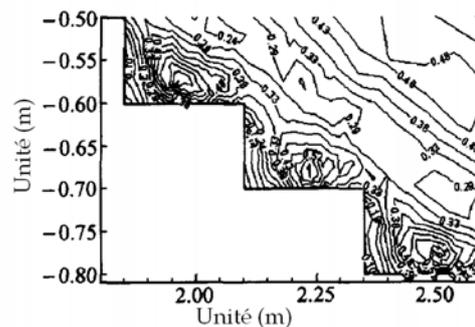


Figure I.30 : L'énergie cinétique turbulente sur les marches 6, 7 et 8 (Cheng et al, 2004).

Les relations entre la fraction vide C et y/Y_{90} sur les marches 6, 7 et 8 sont montrées dans les figures I.31 et I.32. Les relations entre v/v_{90} et y/Y_{90} sur les marches 6, 7 et 8 sont montrées dans les figures I.33 -I.35.

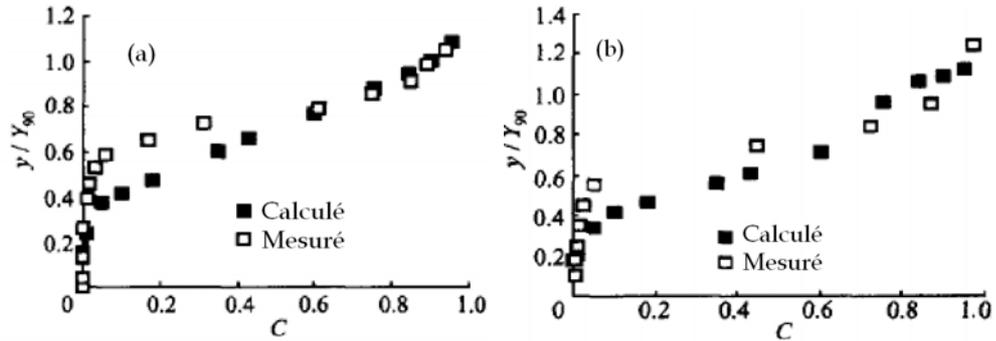


Figure I.31 : Variation de y/Y_{90} en fonction de C sur les marches 6 et 7 (Cheng et al, 2004).

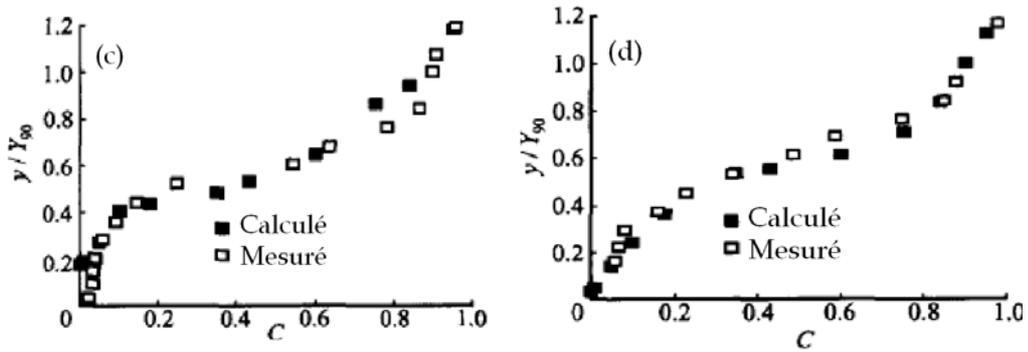


Figure I.32 : Variation de y/Y_{90} en fonction de C sur les marches 8 et 9 (Cheng et al, 2004).

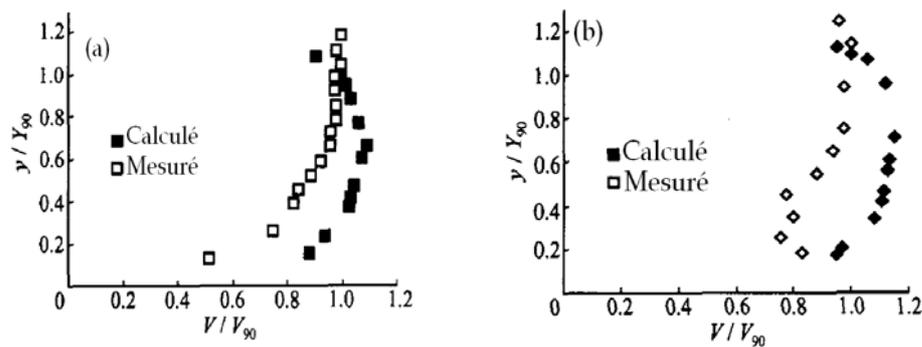


Figure I.33 : Variation de y/Y_{90} en fonction de v/v_{90} sur les marches 6 et 7 (Cheng et al, 2004).

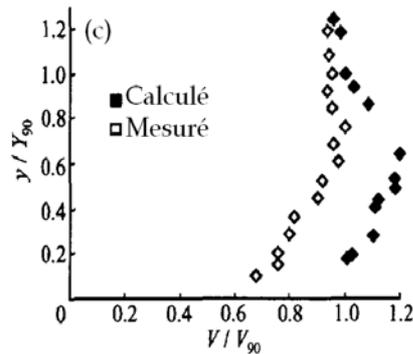


Figure I.34 : Variation de y/Y_{90} en fonction de v/v_{90} sur la marche 8. (Cheng et al, 2004).

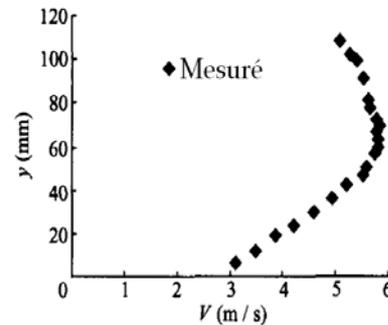


Figure I.35 : Variation de V en fonction de y . (Cheng et al, 2004).

d. Conclusion

Ces auteurs ont employé le modèle de turbulence $k-\varepsilon$ pour calculer les variables caractéristiques de l'aération extérieure libre sur un déversoir en marches d'escaliers. Les résultats calculés sont semblables avec les résultats expérimentaux. La simulation numérique a résolu le problème des variables caractéristiques d'auto-aération sur les déversoirs en marches d'escaliers.

Les auteurs ont constaté la présence de rouleaux de recirculations dans le creux de chaque marche.

V. Travaux Xiangju Cheng, Yongcan Chen & Lin Luo (2006)

En 2006, **Cheng** et ses collaborateurs ont utilisé « le module finite volume computational fluid dynamics du logiciel **FLUENT 6.2** » pour simuler les caractéristiques principales de l'écoulement. La technique basée sur les volumes de contrôle a été employée pour résoudre les équations régissant le phénomène. Le domaine de calcul a été divisé en volumes de contrôle discrets par une grille non structurée qui a une flexibilité élevée d'adapter la géométrie et la frontière complexes du déversoir en marches d'escaliers. Le flux de convection dans la fraction de volume, l'équation de quantité du mouvement et les équations moyens de fermeture de la turbulence ont été discrétisés en utilisant le schéma **upwind** de second ordre. Le modèle de mélange a été présenté pour étudier les écoulements de mélange air-eau, et l'algorithme **PISO** est employé pour résoudre le modèle numérique. Le modèle de RNG $k-\varepsilon$ a été employé pour calculer l'écoulement turbulent sur le déversoir en marches d'escaliers. Les résultats numériques sont comparés aux données expérimentales.

a. Modèle d'essai

Cheng et ses collaborateurs (2004) ont utilisé le dispositif expérimental proposé par **Chen (2001)**. Le débit d'essai est de 30 L/s, il a été mesuré par un déversoir orthogonal installé devant le canal d'approche.

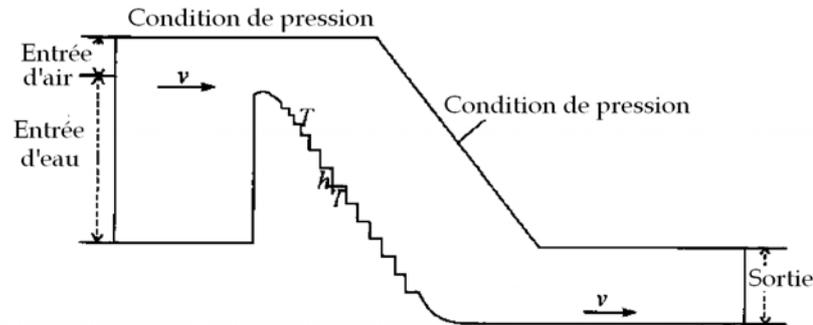


Figure I.36 : Conditions aux limites de domaine de calcul (Cheng et al, 2006).

b. Modèle de mélange d'écoulement diphasique air-eau

Le modèle de mélange diffère du modèle du volume liquide (VOF) à trois égards :

- i. Le modèle de mélange accorde les phases interpénétrer. Dans un volume de contrôle, les fractions de volume α_k et α_q peuvent être égales à n'importe quelle valeur entre 0 et 1, selon l'espace occupé par la phase k et la phase q.
- ii. Le modèle de mélange accorde les phases qui se déplacent à différentes vitesses, en utilisant le concept des vitesses de glissement.
- iii. Il y a interaction entre l'interphase de la masse, de la quantité de mouvement et le transfert d'énergie dans le modèle de mélange. Cependant, la méthode de VOF ne calcule pas la dynamique dans le vide ou dans les régions d'air. Ce travail prévoit que les bulles d'air sont distribuées dans l'eau uniformément, et le corps de l'eau ne peut pas être gazéifié.

Les équations du modèle de mélange sont exprimées par les relations suivantes (M. Ishii, 1975) :

- Equation de continuité pour l'écoulement de mélange

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}_m) = 0 \quad (\text{I-26})$$

où, la densité et la vitesse du mélange ρ_m , \mathbf{u}_m sont définies par les équations suivantes :

$$\rho_m = \sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k \quad (\text{I-27})$$

$$\mathbf{u}_m = \frac{1}{\rho_m} \sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k \quad (\text{I-28})$$

avec, α_k et ρ_k sont la fraction de volume et la densité de la phase k , respectivement. La vitesse de mélange \mathbf{u}_m représente la vitesse du centre de la masse de l'écoulement de mélange. Noter que ρ_m peut changer mais les composantes de la densité restent constantes.

- *Équation de quantité du mouvement pour l'écoulement de mélange*

En termes des variables de mélange, l'équation de quantité du mouvement prend la forme suivante:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_m \mathbf{u}_m + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m) = -\nabla p_m + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_m + \boldsymbol{\tau}_{Dm}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\mu}_{\text{eff}} \nabla \mathbf{u}_m) + \rho_m \mathbf{g} \quad (\text{I-29})$$

Les deux tenseurs des contraintes sont définis par:

$$\boldsymbol{\tau}_m = \sum_{k=1}^n \alpha_k \boldsymbol{\mu}_{\text{eff}} \nabla \mathbf{u}_k \quad (\text{I-30})$$

$$\boldsymbol{\tau}_{Dm} = -\sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_{Mk} \mathbf{u}_{Mk} \quad (\text{I-31})$$

avec, \mathbf{u}_{Mk} est la vitesse de diffusion pour l'écoulement de mélange. Les deux tenseurs des contraintes représentent respectivement l'effort visqueux moyen et l'effort de diffusion dû aux phases de glissement.

Dans l'équation (I-29) la pression de l'écoulement de mélange est définie par la relation suivante :

$$\nabla p_m = \sum_{k=1}^n \alpha_k \nabla p_k \quad (\text{I-32})$$

Dans la pratique, les phases de pression sont souvent prises d'être égales, *i.e.* $p_k = p_m$.

- *Équation de continuité pour la phase k*

À partir de l'équation de continuité pour la phase secondaire k , l'équation de la fraction de volume pour la phase secondaire k peut être obtenue par la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_m) = -\nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_{Mk}) \quad (\text{I-33})$$

- *La vitesse relative*

Avant de résoudre l'équation de continuité (I-33) pour la phase k et l'équation de quantité du mouvement (I-29) pour le mélange, la vitesse de diffusion \mathbf{u}_{Mk} doit être déterminée. La vitesse de diffusion d'une phase est habituellement provoquée

par les différences de densité, ayant pour résultat des forces sur les bulles différentes de celles sur le fluide. La force additionnelle est équilibrée par la force de résistance à l'avancement.

$$u_{Mk} = u_{qk} - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \rho_k}{\rho_m} u_{qk} \quad (I-34)$$

où, u_{qk} est la vitesse de glissement entre l'air et l'eau, définie comme vitesse d'air relativement à la vitesse de l'eau. Manninen et col. (1996), ont défini la vitesse u_{qk} par l'expression suivante:

$$u_{qk} = \frac{(\rho_m - \rho_k) d_k^2}{18 \mu_{eff,m} f_{drag}} \left[g - (u_m \cdot \nabla) u_m - \frac{\partial u_m}{\partial t} \right] \quad (I-35)$$

où, $\mu_{eff,m}$ est la viscosité efficace du mélange et d_k est le diamètre des particules (ou des bulles) de la phase secondaire k . Le diamètre de la bulle utilisé dans la simulation est de 5 mm. L'accord raisonnable avec les données expérimentales de Cummings (Cummings, Chanson, 1997) est obtenu en employant cette valeur de diamètre de la bulle. La fonction de dragage f_{drag} est pris (Clift, 1978) :

$$f_{drag} = \begin{cases} 1 + 0.15 Re^{0.687} & Re \leq 1000 \\ 0.0182 Re & Re > 1000 \end{cases} \quad (I-36)$$

- *Modèle de RNG k-ε pour l'écoulement de mélange*

Le modèle de turbulence RNG k-ε basé sur les équations instantané de Navier stokes décrivant l'écoulement de mélange est défini par les expressions suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m k) + \nabla \cdot (\rho_m u_m k) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_{eff,m}}{\sigma_k} \nabla k \right) + G_{k,m} - \rho_m \varepsilon \quad (I-37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho_m u_m \varepsilon) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_{eff,m}}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G_{k,m} - C_{2\varepsilon}^* \rho_m \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (I-38)$$

où, k est l'énergie cinétique turbulente, et ε est le taux de dissipation de k .

$$\mu_{eff,m} = \mu_m \left[1 + \sqrt{\frac{C_\mu}{\mu_m}} \frac{k}{\sqrt{\varepsilon}} \right]^2 \quad (I-39)$$

où, μ_m : Viscosité moléculaire du mélange et $G_{k,m}$: Représente la production de l'énergie cinétique turbulente due aux gradients moyens de vitesse, calculée par :

$$G_{k,m} = \mu_{t,m} \left[\nabla u_m + (\nabla u_m)^T \right] \nabla u_m \quad (I-40)$$

avec, $C_{2\varepsilon}^*$ est donné par l'expression suivante :

$$C_{2\varepsilon}^* \equiv C_{2\varepsilon} + \frac{C_\mu \rho \eta^3 \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0}\right)}{1 + \beta \eta^3} \quad (\text{I-41})$$

$\eta \equiv \frac{S k}{\varepsilon}$, $S = \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}}$ est le module du taux moyen de tenseur de contrainte exprimé par:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla u_m + (\nabla u_m)^T) \quad (\text{I-42})$$

Les valeurs des constantes des équations ci-dessus sont données par :

$$C_\mu = 0.0845, C_{1\varepsilon} = 1.42, C_{2\varepsilon} = 1.68, \sigma_k = \sigma_\varepsilon = 0.75, \eta_0 = 4.38, \beta = 0.012$$

c. Conditions aux limites

Les frontières sont montrées sur la figure I.36. La section d'entrée de l'eau est sur la partie inférieure et l'entrée d'air sur la partie supérieure en amont du barrage. La vitesse d'apport de l'eau peut être calculée selon le débit et la profondeur de l'eau à l'entrée de l'eau. La frontière d'air a été placée comme états d'entrée de pression sur lesquels la pression atmosphérique a été assurée. Puisque la frontière entre l'eau et l'air à la sortie descendante ne pourrait pas être déterminée, elle a été définie en tant qu'une frontière de pression, ou condition de l'écoulement à surface libre.

Cheng et ses collaborateurs ont supposé que l'effet de glissement est négligeable sur les parois. La couche visqueuse près de la paroi a été traitée avec une fonction standard de paroi. Initialement le champ d'écoulement est plein d'air.

c. Résultats

Les données expérimentales de Chen (Chen, 2001), ont été employées pour valider les résultats de la simulation numérique de l'écoulement de mélange air-eau. La comparaison inclut la distribution de la vitesse de mélange de l'air-eau, l'entraînement d'air et les profils de pression statique le long du déversoir en marches d'escaliers.

- *Distribution de vitesse de mélange de l'air-eau*

La figure I.37 montre les distributions des vecteurs vitesse mesurés et calculés sur la marche N° 6.

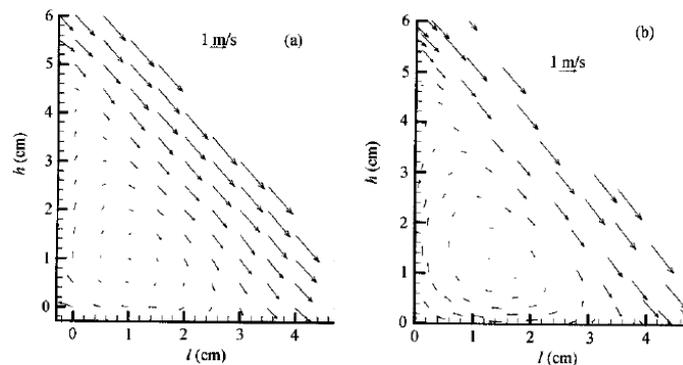


Figure I.37 : Vitesses mesurée et calculée sur la marche N° 6, (a) Mesurée ; (b) simulée (Cheng et al, 2006).

On voit dans la figure I.37, que les rouleaux de recirculation tournent dans le sens des aiguilles d'une montre.

La figure I.38 représente les résultats numériques et expérimentaux des distributions de vitesse à différentes sections de la marche N° 7 et N°9.

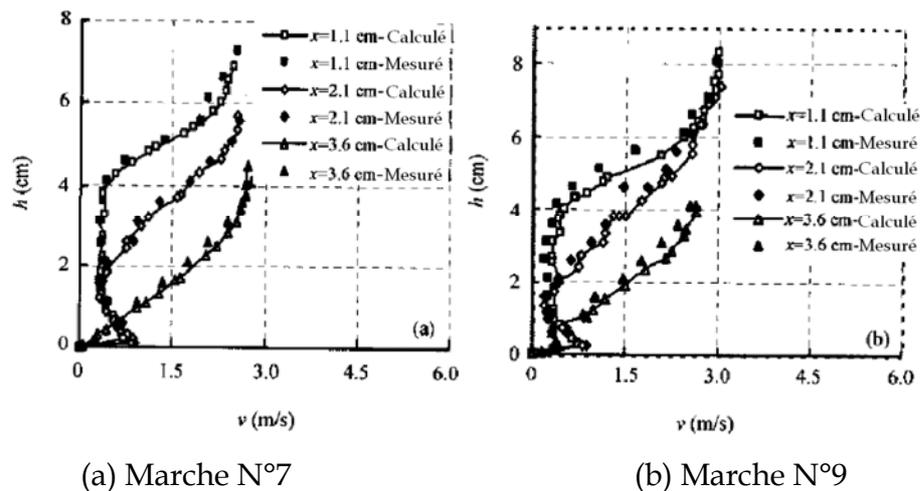


Figure I.38 : Distribution de vitesse sur les marches N°7 et N°9 (Cheng et al, 2006).

L'accord dans chaque section est excellent. La section où x du même rang est égal à 1.1 cm, à la couche visqueuse près sur la face horizontale, prouve que la vitesse est presque égale à zéro. Le long de la face verticale, on observe la diminution de la vitesse de mélange de l'air-eau sans interruption jusqu'à atteindre une valeur minimum à un point. Près de la surface de l'eau, la vitesse de mélange de l'air-eau atteint son niveau maximum.

- *L'entraînement d'air*

La figure I.39 représente les résultats numériques (simulés par le modèle du mélange) et expérimentaux de l'entraînement d'air.

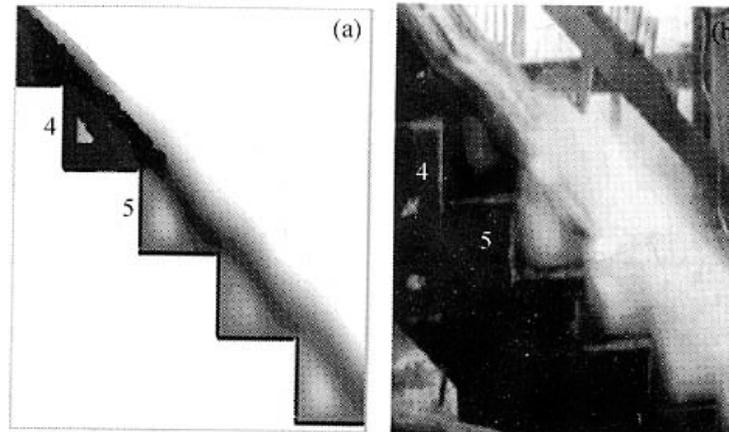


Figure I.39 : Entraînement d'air sur le déversoir en marches d'escaliers. (a) Calculé; (b) mesuré (Cheng et al, 2006).

Le résultat simulé (la figure I.39 (a)) reflète le modèle d'entraînement d'air comparé au résultat expérimental (la figure I.39 (b)).

Les données disponibles sur le commencement de l'entraînement d'air ont été analysées (Peterka, 1953). Ainsi l'endroit du point d'inception peut être exprimé comme fonctions du nombre de Froude contenant les dimensions de la marche, le débit unitaire et l'angle du coursier.

La figure I.39 donne que la position du point d'inception. Il est clairement montré que sur la marche N°5, la position du point d'inception simulé par des méthodes numériques est en accord avec la position du point d'inception mesuré expérimentalement.

Au point d'inception, le degré de turbulence était assez grand pour entraîner l'air dans l'écoulement d'eau noir.

Un avantage principal de l'aération le long des déversoirs en marches d'escaliers est la réduction du potentiel de risque de cavitation.

- *Les profils de pression*

La figure I.40 représente les profils de pression sur les faces horizontales et verticales des marches N°5, 7, 9 et 11, respectivement.

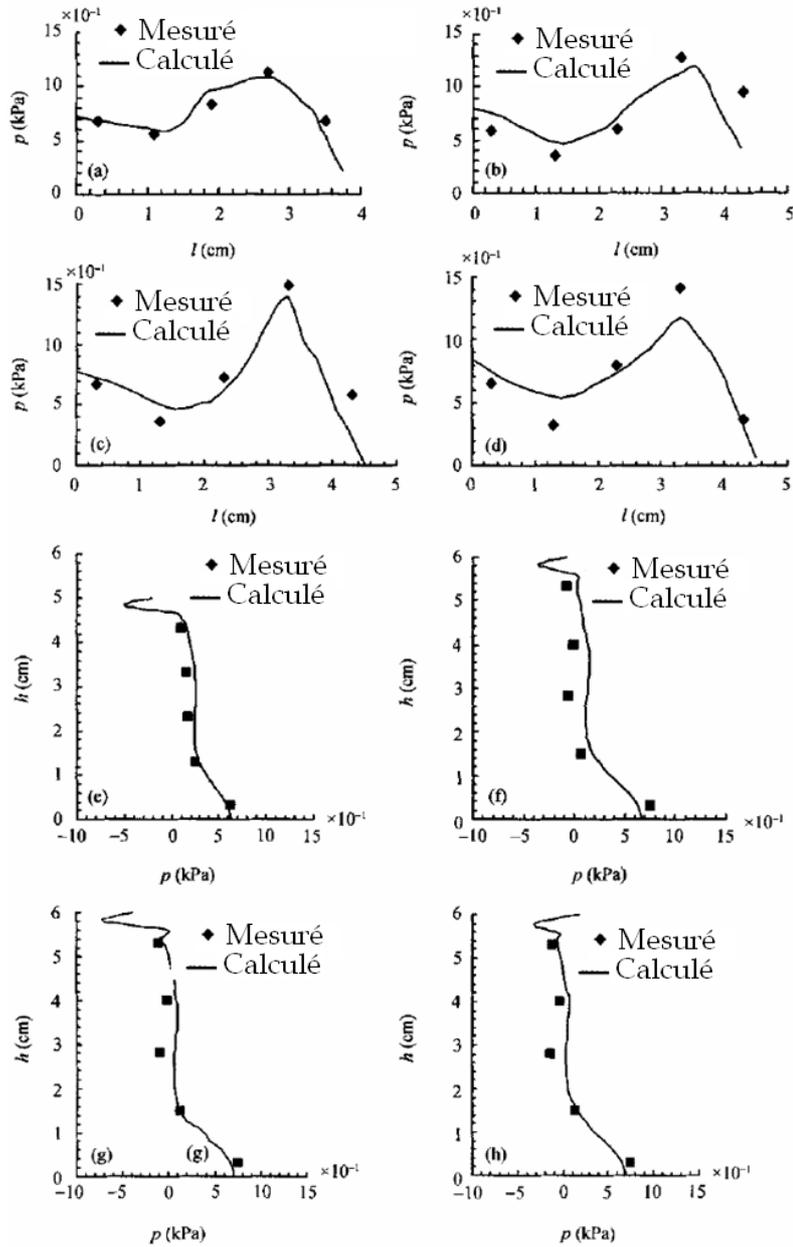


Figure I.40 : Profils de pression sur les faces des différentes marches (Cheng et al, 2006).

(a), (b), (c) et (d) faces horizontales des marches N° 5, 7, 9 et 11 ;
 (e), (f), (G) et (h) faces verticales des marches N°5, 7, 9 et 11.

Les résultats de la simulation numérique de la pression sont en accords avec les résultats expérimentaux.

A partir de la simulation numérique, les auteurs ont remarqué qu'il y a des pressions négatives présentes au dessus de la face verticale.

La figure I.41 représente le profil négatif de pression simulée numériquement sur les arêtes des marches.

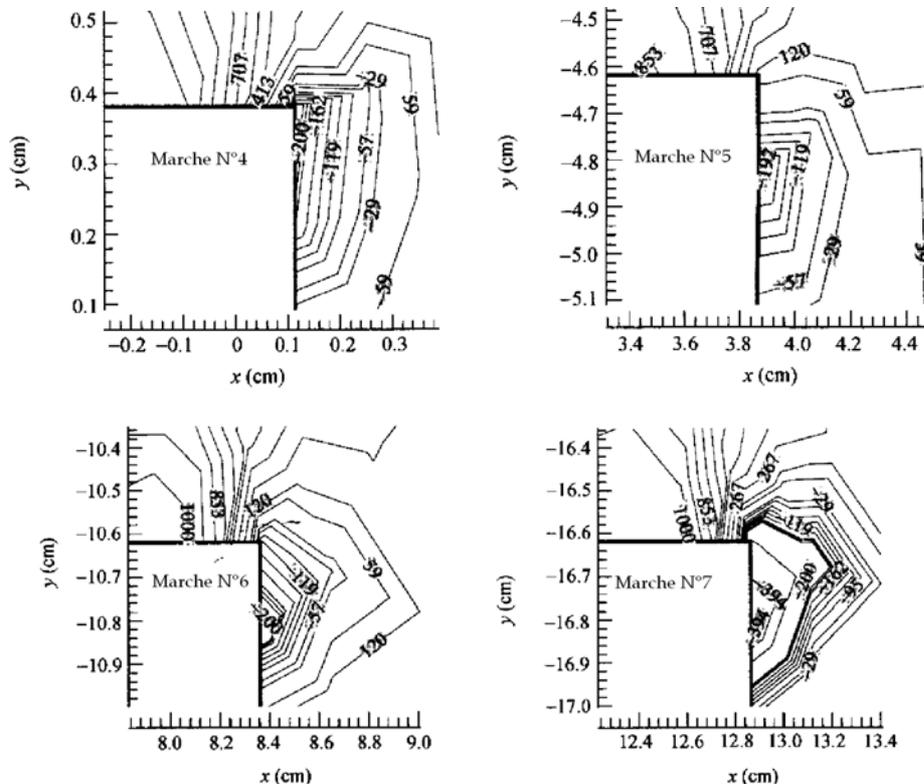


Figure I.41 : Profils négatifs de pression sur les arêtes des marches (unité : Pa)
(Cheng et al, 2006).

On voit qu'il y a des pressions négatives sur toutes les arêtes des marches. La pression négative est importante pour l'évaluation des cavitations potentielles. En fait, les arêtes de la marche seront probablement détruites en raison de la pression négative.

d. Conclusion

Le modèle de turbulence de RNG $k-\epsilon$ a été combiné avec le modèle de mélange pour l'écoulement de mélange air-eau pour simuler les caractéristiques d'écoulement extrêmement turbulent sur les déversoirs en marches d'escaliers.

Cette méthode, comparée à d'autres méthodes expérimentales, est plus avantageuse pour recueillir l'information sur les pressions négatives. Le modèle de mélange simule avec succès les interactions entre les bulles d'air et le recyclage entraînés de cavité dans le régime d'écoulement extrêmement turbulent et surmonte la limitation du modèle de VOF.

Selon les résultats simulés, le point de commencement d'entraînement d'air peut être trouvé. En aval de ce point, l'entraînement rapide d'air a lieu, et « l'eau

blanche » et les rouleaux de recirculation apparaissent dans les creux de chaque marche. La dissipation d'énergie se produit par transfert de quantité de mouvement entre le jet de l'écoulement extrêmement turbulent et les vortex.

Les profils de pression simulés sur les faces de marche fournissent la base de la théorie pour évaluer le risque de cavitations.

VI. Travaux de Zhi-yong Dong, Joseph Hun-wei Lee

En 2006, **Dong** et ses collaborateurs ont présenté la simulation numérique de l'écoulement dans un canal en marches d'escaliers, et ils ont utilisé des modèles de turbulence basés sur la technique de VOF (volume de fluide).

La simulation numérique de l'écoulement extrêmement turbulent dans un canal en marches d'escaliers a été effectuée dans cette étude, y compris les facteurs de frottement, les profils de concentration en air, le champ de vitesse, la surface libre de l'eau et les profondeurs d'écoulement, la pression statique etc...

L'écoulement uniforme a été également simulé pour comparer les caractéristiques hydrauliques entre un déversoir en marches d'escaliers et le déversoir lisse. Des comparaisons entre les résultats calculés et les résultats mesurés ont été faites.

En outre, la comparaison de la concentration calculée en air avec les résultats expérimentaux a été faite.

Le domaine de calcul à deux dimensions a été divisé en volumes de contrôle discrets par la grille non structurée. La méthode des volumes finis a été employée pour convertir les équations régissant le phénomène physique en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. Le logiciel fluent 6.1 a été utilisé pour la simulation numérique.

La maille non structurée est utilisée pour simuler l'écoulement extrêmement turbulent suivant les indications de la figure I.42.

a. Modèle de turbulence

L'équation de mouvement du fluide incompressible visqueux (équation de Navier Stokes) peut être écrite par :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (I-43)$$

Substituant $U_i = \bar{U}_i + u_i$, $P = \bar{P} + p$ dans l'équation (I-43), et en prenant la moyenne dans le temps, on obtient l'équation de Reynolds suivante :

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u_i u_j} \right) \quad (I-44)$$

où, $-\rho \overline{u_i u_j}$ représentent les tensions de Reynolds.

Le modèle standard de la turbulence $k-\varepsilon$ utilisé est le suivant :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - \varepsilon \quad (\text{I-45})$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{I-46})$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{I-47})$$

Les constantes empiriques du modèle standard $k-\varepsilon$ peuvent être prises selon le tableau I. 1.

b. Conditions initiales et aux limites

Dans cette étude, le canal en marches d'escalier est composé de 40 marches (AU M. Y. D, 1994). Les écoulements dans les canaux en marches d'escaliers et les canaux à profil lisse à pente $\theta = 10^\circ$ et 20° respectivement, sont simulés numériquement.

L'entrée a été placée selon les conditions expérimentales. La sortie a été définie comme une frontière libre. Toutes les frontières d'air sont définies comme frontières libres avec une pression relative nulle. La paroi a été placée en tant que stationnaire avec aucun glissement. La sous-couche visqueuse près de la paroi a été traitée par la fonction de paroi.

Initialement le champ d'écoulement sur le canal en marches d'escaliers est plein d'air. Au cours du temps, l'eau passera sur le canal en marches d'escaliers et formera la surface libre entre l'air et l'eau.

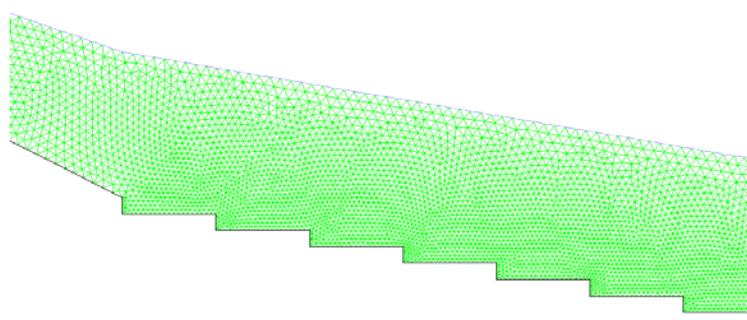


Figure I.42 : Maillage du calcul d'écoulement extrêmement turbulent sur un canal en marches d'escaliers (Dong et al, 2006).

c. Résultats et interprétation

- Régime d'écoulement extrêmement turbulent

La figure I.43 représente les vecteurs vitesse de l'écoulement extrêmement turbulent.

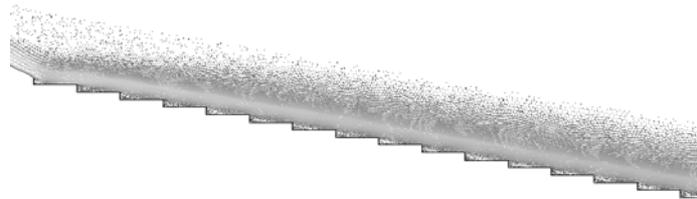


Figure I.43 : Vecteur de vitesse de l'écoulement extrêmement turbulent à $Q=5.296\text{L/s}$, $\theta = 10^\circ$ (Dong et al, 2006).

L'écoulement extrêmement turbulent se produit quand le débit est plus grand.

- Profondeur de l'eau claire

Des comparaisons entre les profondeurs calculées et les profondeurs mesurées pour un écoulement extrêmement turbulent sur un canal en marches d'escaliers sont montrées dans la figure I.44.

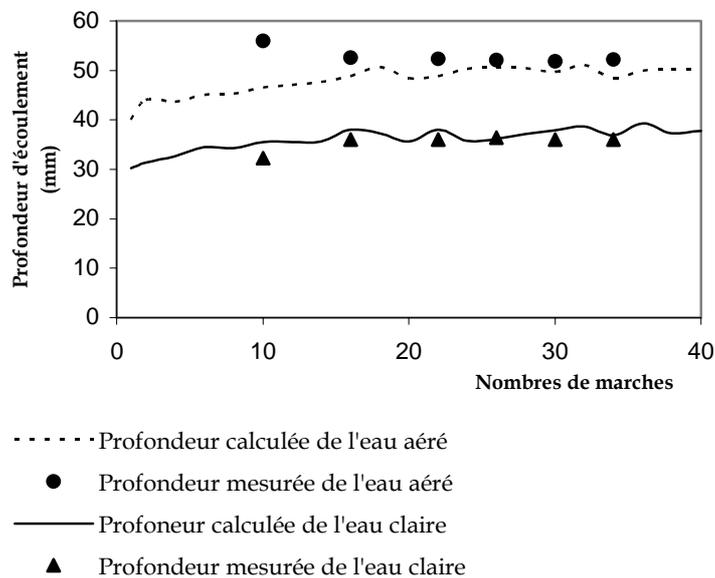


Figure I.44 : Comparaisons entre les profondeurs calculées et mesurées de l'écoulement extrêmement turbulent dans un canal en marches d'escaliers ($\theta = 10^\circ$. et $Q=11.69\text{L/s}$) (Dong et al, 2006).

Il découle de la figure I.44 que les profondeurs calculées sont semblables aux profondeurs mesurées.

- Facteurs de frottement

Selon l'état d'équilibre des forces pour l'écoulement uniforme, nous avons :

$$\tau_0 = \gamma R J = \gamma R i = \gamma R \sin \theta \quad (\text{I-48})$$

avec, τ_0 : L'effort de cisaillement à la paroi, R : Rayon hydraulique, J : Gradient d'énergie, i : Pente géométrique $i = \sin \theta$.

En posant, $\tau_0 / \frac{1}{2} \rho V_0^2 = C_f$, où C_f : est le facteur de frottement,

V_0 : La vitesse d'écoulement uniforme, puis :

$$\tau_0 = \frac{1}{2} C_f \rho V_0^2 \quad (\text{I-49})$$

En combinant l'équation (I-48) et (I-49), il en résulte :

$$C_f = \frac{R \sin \theta}{V_0^2 / 2g} \quad (\text{I-50})$$

Les auteurs ont défini trois facteurs de frottement : Facteur de frottement de l'eau claire, C_{f1} ; Facteur de frottement de l'écoulement aéré, C_{f2} ; Facteur de frottement C_{fm} qui correspond au maximum du profil de vitesse. Trois facteurs de frottement C_{f1} , C_{f2} et C_{fm} de l'écoulement extrêmement turbulent sur un canal en marches d'escaliers à $\theta = 20^\circ$ sont montrés dans la figure I.45.

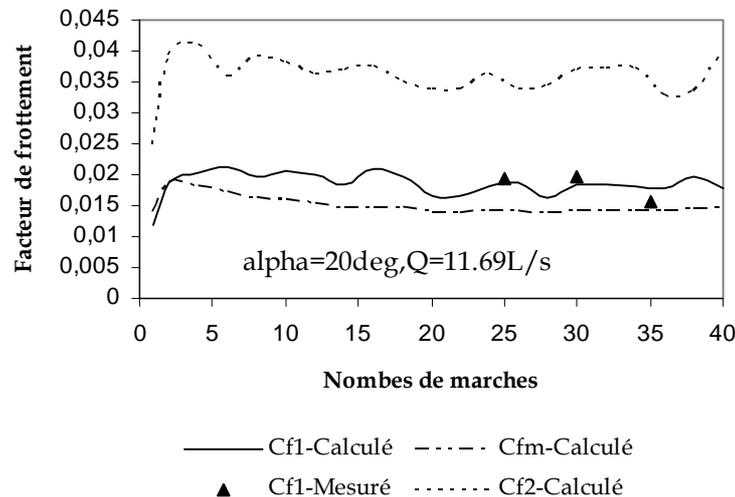


Figure I.45 : Comparaison entre les facteurs de frottement de l'écoulement extrêmement turbulent sur un canal en marches d'escaliers ($\theta = 20^\circ$, $Q = 11.69 \text{ L/s}$) (Dong et al, 2006).

La figure I.46 représente la comparaison entre les facteurs de frottement de l'écoulement dans les canaux en marches d'escaliers et les facteurs de frottement de l'écoulement dans les canaux lisses à pente $\theta = 20$ degrés.

Cette figure montre que le facteur de frottement dans les canaux en marches d'escaliers est considérablement plus grand que celui dans les canaux lisse.

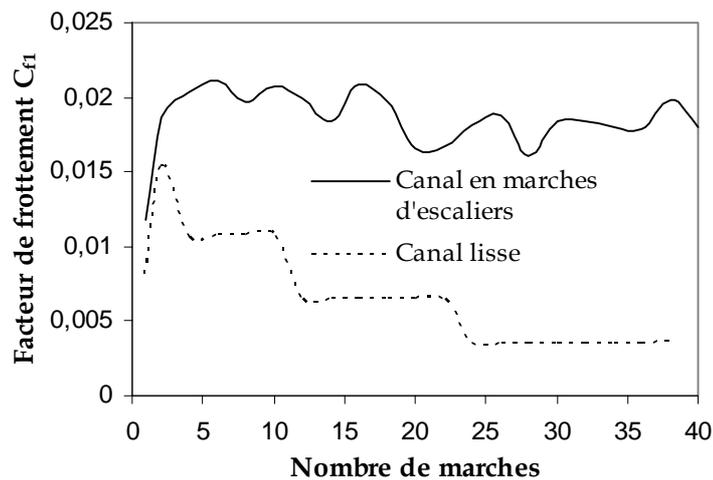


Figure I.46 : Comparaison entre le facteur de frottement C_{f1} de l'écoulement dans un canal en marches d'escaliers et le facteur de frottement de l'écoulement dans un canal lisse ($\theta = 20^\circ$, $Q=11.69L/s$) (Dong et al, 2006).

- *Comparaison des profils de vitesse*

Le profil de vitesse sur la marche N° 34 pour $\theta = 10^\circ$ et $Q=11.690 l/s$ est donné dans la figure I.47.

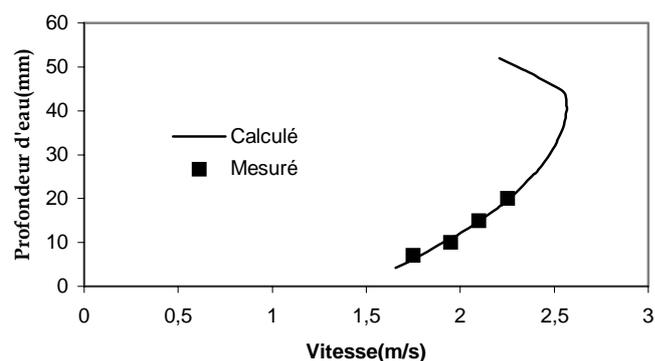


Figure I.47 : Profil de vitesses sur la marche N°34 pour $\theta = 10^\circ$ et $Q=11.690L/s$ (Dong et al, 2006).

Cette figure montre qu'il y a une bonne concordance entre les résultats calculés et mesurés.

- *Simulation de concentration en air*

Les profils de concentration en air sur les marches N°5, 10, 18, 26 et 34 sont montrés dans la figure I.48.

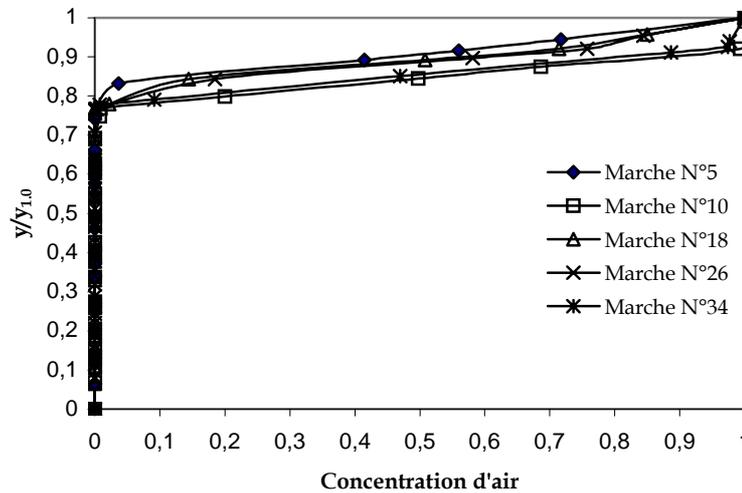


Figure I.48 : La similitude de la concentration en air à la pente $\theta = 10^\circ$ et à $Q=11.690$ l/s de l'écoulement extrêmement turbulent dans un canal en marches d'escaliers (Dong et al, 2006).

Les auteurs ont constaté que les profils montrent une bonne similitude.

- *Similitude des profils de vitesse d'écoulement aérés*

Des profils de vitesse le long du sens d'écoulement dans l'écoulement extrêmement turbulent sont tracés sur la figure I.49.

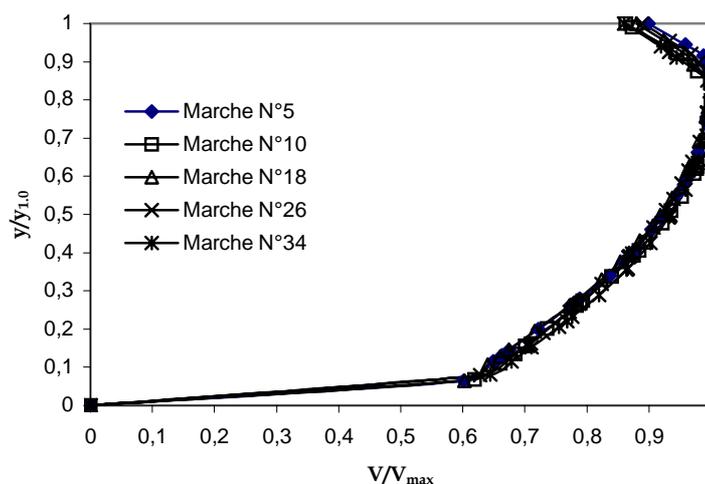


Figure I.49 : Profils de vitesse pour un d'écoulement extrêmement turbulent dans un canal en marches d'escaliers à $\theta = 10^\circ$ et à $Q=11.690$ L/s (Dong et al, 2006).

Il découle de cette figure que les profils de vitesse montrent une bonne similitude.

- *Découpes de pression statique*

Des découpes typiques de la pression statique dans l'écoulement extrêmement turbulent à la pente $\theta = 0^\circ$ et à $Q = 5.296 \text{ l/s}$ sont schématisées dans la figure I.50, qui montre des structures de découpe de pression statique sur les marches le long du sens d'écoulement. L'unité de la pression statique est exprimée en Pascal.

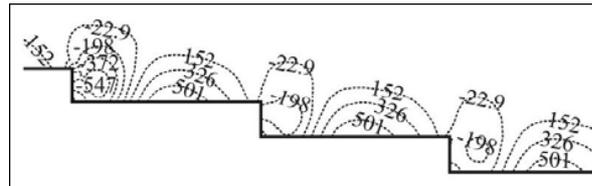


Figure I.50 : Pression statique dans l'écoulement extrêmement turbulent à $\theta=10^\circ$ et à $Q=5.296 \text{ l/s}$ (Dong et al, 2006).

- *Comparaison entre la concentration calculée en air avec les données de Straub et Anderson*

La figure I.51 représente la comparaison entre les valeurs calculées et les données de Straub et d'Anderson (1958) pour les profils de la concentration en air sur le déversoir lisse à $\theta = 7.5^\circ$.

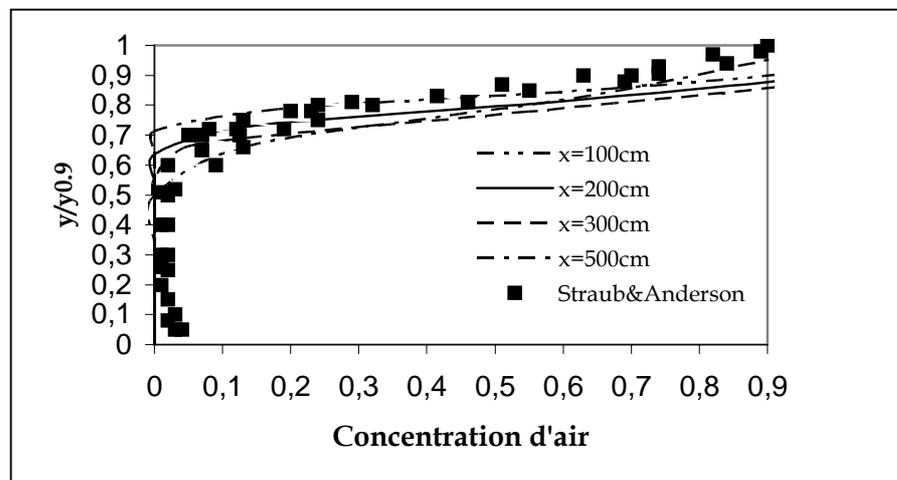


Figure I.51 : Comparaison de la concentration en air calculée avec les données de Straub et d'Anderson (1958) à $\theta = 7.5^\circ$ (Dong et al, 2006).

Il découle de cette figure que la concentration calculée en air est conforme raisonnablement aux données mesurées.

d. Conclusions

L'étude numérique de l'écoulement dans un canal en marches d'escaliers, permet de tirer quelques conclusions: Basé sur la technique de VOF, le modèle standard de turbulence $k-\varepsilon$ avec la maille non structurée peut simuler l'écoulement diphasique extrêmement turbulent de l'air-eau.

Les valeurs calculées du facteur de frottement et les profils de vitesse sont conformes également aux données mesurées dans la région de l'eau blanche (région inférieure).

Les résultats calculés ont indiqué que le facteur de frottement de l'écoulement dans un canal en marches d'escaliers est considérablement plus grand que celui de l'écoulement régulier ; et il y a de bonnes similitudes de concentration et de vitesse en air en écoulement extrêmement turbulent dans un canal en marches d'escaliers.

La pression statique calculée prouve que la pression négative se produit autour de la cavité de la marche, et la pression positive sur la crête de la marche, et le profil de concentration en air calculé est raisonnablement conforme aux données de Straub et d'Anderson (1958).

VII. Travaux de Andre S., Dewals B., Piroton M. et Schleiss A. J.

En 2003, **André Stéphanie** et ses collaborateurs ont élaboré un modèle numérique quasi bidimensionnel d'un écoulement diphasique air -eau sur un canal en marches d'escaliers.

Le modèle mathématique est représenté par les équations de Navier Stokes intégré sur la profondeur d'écoulement.

Les développements numériques sont inclus dans le code Wolf, qui a été développé pendant plusieurs années à HACH - ULG.

Le système d'équations mathématique intégrées sur la profondeur de l'écoulement est discrétisée en utilisant la méthode des volumes finis. La discrétisation temporelle est basé sur le schéma explicite.

L'algorithme de Runge - Kutta de trois étapes a été utilisé pour résoudre le système d'équations mathématiques.

Cette approche est validée par des essais expérimentaux qui ont été faits dans un canal en marches d'escaliers avec une pente $\theta = 30^\circ$ (André, 2001), en tenant compte du régime d'écoulement extrêmement turbulent et transitoire. Le domaine étudié est représenté dans la figure I.52.

La comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux est basée sur :

- La forme de la surface libre: vagues amplitude et phase de la surface de l'écoulement,
- Développement de la concentration en air le long du coursier,
- La vitesse moyenne longitudinale dans la région uniforme,
- La profondeur normale du mélange dans la région uniforme.

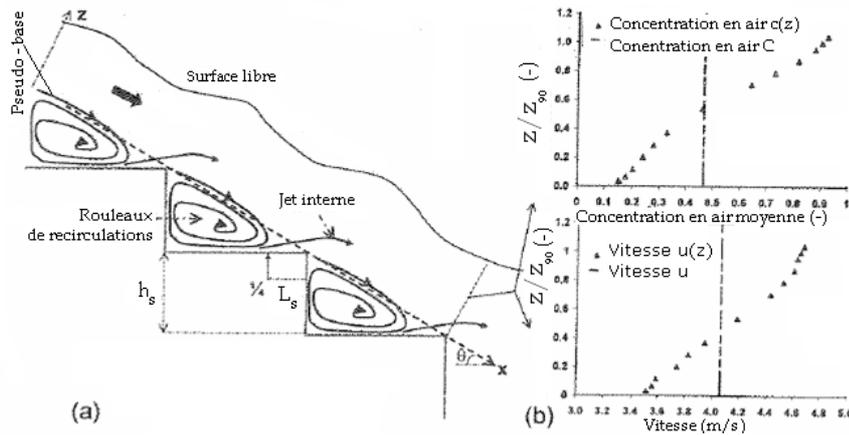


Figure I.52 : Description schématique du (André et al, 2003) :

- (a) Comportement d'écoulement extrêmement turbulent et
 (b) Illustration des profils de concentration en air et de la vitesse mesurés dans le canal en marches d'escaliers à la pente $\theta = 30^\circ$.

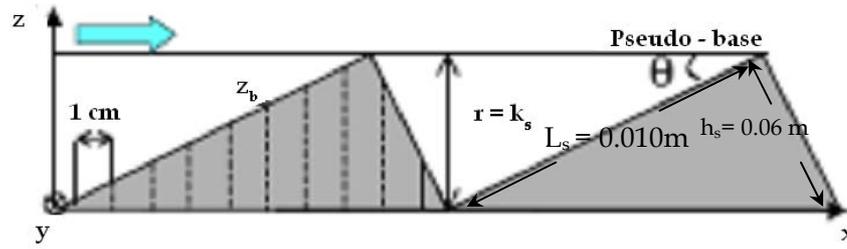
a. Modèle hydrodynamique

La face de la canalisation modélisée est schématisée sur la figure I.53. L'intégration en profondeur est effectuée le long de l'axe z .

Le modèle est basé sur la description du mélange air-eau comme fluide simple de densité moyenne :

$$\rho(x, t) = \rho_w(1 - C) + \rho_a C \approx \rho_w(1 - C) \quad (\text{I-51})$$

où, ρ_w et ρ_a représentent la densité de l'eau et de l'air respectivement, C : Concentration moyenne en air et h_e : profondeur de mélange transportée avec une vitesse longitudinale \bar{U} .



----- Centre de volume finie de longueur 1 cm.

$$\text{avec, } r = k_s = h_s \cos \alpha$$

Figure I.53 : Face des deux marches dans un canal en marches d'escaliers dans le code WOLF 2D (André et al, 2003).

- Equation de continuité intégrée sur la profondeur de l'écoulement

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h_e) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho h_e \bar{u}) = 0 \quad (\text{I-52})$$

- Equation de quantité de mouvement intégrée sur la profondeur de l'écoulement

André Stéphanie et ses collaborateurs ont supposé que :

- ✓ La vitesse longitudinale est parallèle au sens de l'écoulement.
- ✓ Le champ de pression s'avère presque hydrostatique.

L'équation de quantité de mouvement intégrée sur la profondeur de l'écoulement est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h_e \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho h_e \rho_{xx} \bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g}{2} \rho h_e^2 \cos \theta \right) + \rho g h \cos \theta \frac{\partial z_b}{\partial x} = \rho g h \sin \theta + \tau_{br} \quad (\text{I-53})$$

avec, g : Accélération de pesanteur ; θ : Pente moyenne du pseudo-fond ; z_b : Altitude locale de lit ; τ_{bx} : Limite de pertes et ρ_{xx} : Coefficient de Boussinesq qui prend en compte le profil inégal de vitesse le long de la profondeur de l'eau. Les contributions diffusives, qui ne sont pas explicitement incluses, peuvent être combinées avec la limite de pertes.

- Concentration en air

Sur la base des observations de laboratoire, il s'avère que le procédé d'aération le long d'un coursier peut être représenté par une équation de transport :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial C}{\partial x} = S_a \quad (\text{I-54})$$

avec, S_a : Limite de la source d'air.

Ce système d'équations permet de déterminer les trois inconnus h_e , \bar{U} et C .

b. Exécution numérique

Le système mathématique a été décrit en fonction des inconnus conservateurs $h_e(1-C)$, $h_e\bar{U}(1-C)$ et h_eC :

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f^+ + f^-) = S \quad (\text{I-55})$$

avec, d : Vecteur contenant les trois inconnues ; f^+ : Flux purement advectif ; f^- : Flux de pression et S : Limites de source ;

$$f^+ = \begin{pmatrix} h_e(1-C)\bar{U} \\ h_e(1-C)\rho_{xx}\bar{U}^2 \\ h_eC\bar{U} \end{pmatrix}; f^- = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2}(1-C)h_e^2 \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}; S = \begin{pmatrix} 0 \\ (1-C)gh_e \left(\sin\theta - \cos\theta \frac{\partial z_b}{\partial x} \right) + \frac{\tau_{bx}}{\rho_w} \\ hS_a \end{pmatrix} \quad (\text{I-56})$$

Une étude simple des vitesses caractéristiques c_i , du système (I-55) mène aux valeurs, indépendantes de la concentration en air :

$$c_i = [1 + (\rho_{xx} - 1)\varepsilon_i] \bar{U} + \varepsilon_i \sqrt{gh_e \cos\theta + (\rho_{xx} - 1)\rho_{xx}\bar{U}^2} \quad \varepsilon_i = -1, 0, 1 \quad (\text{I-57})$$

avec,

ρ_{xx} : Constante. Étudier le signe de l'expression (I-56) permet d'identifier le nombre d'états de frontière exigés à l'entrée et à la sortie.

Le schéma des volumes finis est appliqué pour la discrétisation spatiale. Ce schéma est basé, sur une approximation ascendante de f^+ et descendant pour f^- . La stabilité de ce schéma a été prouvée par une étude théorique du système mathématique. La discrétisation temporelle est réalisée avec un algorithme classique de Runge-Kutta de 3 étapes.

c. Modélisation des caractéristiques d'écoulement

- *Limite de source d'air*

S_a doit tenir en compte de l'entraînement d'air en fonction des conditions d'écoulement.

avec, $C=0$: en amont du point d'inception. C augmente le long du coursier jusqu'à ce qu'elle atteigne la valeur $C = C_{\text{sat}}$ dans la région uniforme.

où, C_{sat} : Concentration de saturation d'air en fonction de la pente du coursier, la rugosité, et le nombre de Froude $Fr^* = \frac{q_w}{\sqrt{g \sin \theta k^3}}$

avec, $k = h \cos \theta$ et q_w : débit d'eau.

La limite de source d'air S_a est exprimée par la relation suivante :

$$S_a = -\Gamma m \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2}^\beta (C - C_{\text{sat}}) - U_r C \sqrt{1 - C} \quad (\text{I-58})$$

où, Γ et β , coefficients calibrés de la limite de source advective de bulle d'air, U_r , la limite d'ascension des bulles d'air.

Si la variable $m = 0$ c'est-à-dire que la diffusion est en amont de point d'inception, et si $m = 1$, la diffusion est en aval du point d'inception.

• *Répartition verticale de la vitesse*

Le coefficient de Boussinesq ρ_{xx} est intégré dans le bilan de quantité de mouvement pour tenir compte l'irrégularité du profil vertical de vitesse, ainsi indirectement des structures macro-turbulentes de l'écoulement.

$$\rho_{xx} = \frac{A}{q_w^2} \iint_A u^2 dA \quad (\text{I-59})$$

- ✓ À l'intérieur de la marche, pour $z < r$ (figure I.53, I.54), dans une première approche, les cellules de recyclage sont caractérisées avec un profil triangulaire de vitesse.
- ✓ Au pseudo-fond (figure I.53, I.54), la vitesse d'interface u_b est donnée selon les résultats expérimentaux.
- ✓ Au-dessus du pseudo-fond (figure I.53, I.54), pour $z > r$, la vitesse de la couche extrême est non-uniforme, caractérisé par ρ_{edge} , le coefficient de distribution inégal calculé sur la base des mesures de profil de vitesse à l'arête de la marche.

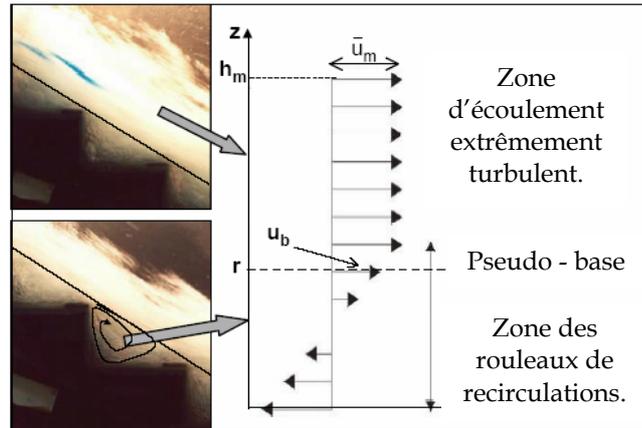


Figure I.54 : Profil de vitesse assumé pour représenter les cellules de recyclage à l'intérieur des marches dans les simulations numériques (André et al, 2003).

Sur cette base, la variation longitudinale de ρ_{xx} est donné par l'expression suivante:

$$\rho_{xx} = \frac{1}{3} \frac{hr}{(h-r)^2} \left(\frac{u_b}{\bar{U}} \right)^2 + \frac{h}{h-r} \rho_{edge} \quad (I-60)$$

- *Limite de frottement*

André Stéphanie et ses collaborateurs ont supposé que les pertes le long du coursier sont représentées par la relation de Manning, données par l'expression suivante :

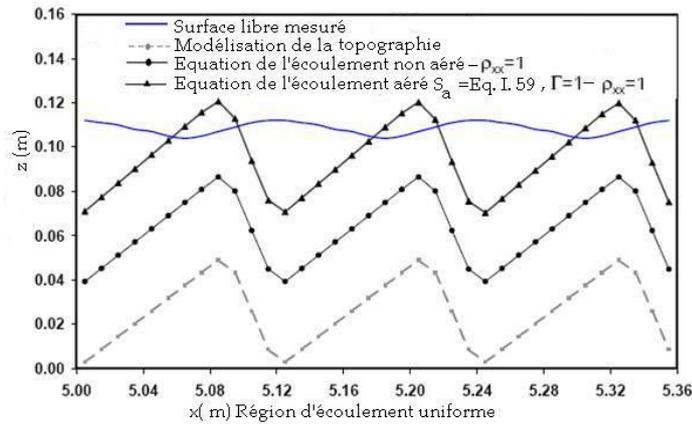
$$\tau_{bx} = gn^2 h (1-C) \bar{U} \frac{\sqrt{\rho_{xx} \bar{U}^2}}{h^{4/3}} \quad (I-61)$$

avec, n : Coefficient de Manning adapté selon les résultats expérimentaux.

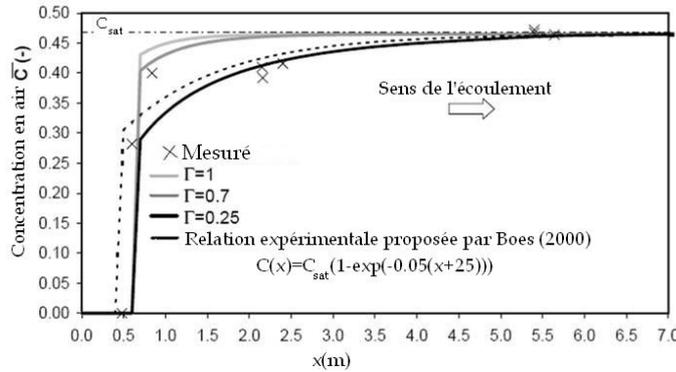
d. Résultats et comparaison avec les essais expérimentaux

- *Concentration d'air*

La figure I.55 (a) représente l'effet d'entraînement d'air sur la surface libre dans la région uniforme.



(a) Effet d'entraînement d'air sur l'écoulement extérieur dans la région uniforme.



(b) Effet d'entraînement d'air sur la variation longitudinale de C , pour $q_w = 0.12\text{m}^2/\text{s}$.

Figure I.55 : Effet d'entraînement d'air sur l'écoulement dans la région uniforme et sur la variation longitudinale de C , pour $q=0.12\text{m}^2/\text{s}$ (André et al, 2003).

Les auteurs ont remarqué que la concentration en air n'est pas assez élevée pour amortir l'effet de la topographie sur la surface libre qui suit exactement la forme des marches.

La représentation optimale du procédé d'auto-aération est donnée par la limite de source S_a :

$$S_a = -\Gamma m(C - C_{\text{sat}}) \tag{I-62}$$

La figure I.55 (b) représente la variation longitudinale de la concentration C , avec $\Gamma = 0.25$, en se basant sur les mesures et la relation expérimentale proposée par Boes (2000).

Les auteurs ont considéré la limite de diffusion $U_r C \sqrt{1-C}$ et le facteur

$$\beta \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2}$$

dans l'expression de la limite de source S_a .

Cette expression montre une variation incohérente de C le long de la pente sans atteindre la concentration uniforme en air C_{sat} .

- *Distribution verticale inégale de vitesse*

L'analyse de sensibilité des effets de ρ_{xx} dans le bilan de quantité de mouvement a été effectués :

- ✓ D'abord l'effet de la contribution du jet interne dans le cas où, $\rho_{xx} = \rho_{\text{edge}}$ a été étudié.
- ✓ En second lieu, avec la contribution des cellules de recyclage à l'intérieur de la marche avec $\rho_{xx} = \frac{h}{(h-r)^2} \left(h - \frac{2}{3}r \right)$.
- ✓ Enfin, en utilisant l'expression de ρ_{xx} donnée par la relation (I-60) (figure I.56).

D'après les essais qui ont été faits en se basant sur le coefficient de Boussinq, les auteurs ont constaté que, le coefficient de Boussinq contribue à l'élévation de la profondeur d'eau et il agit sur les amplitudes des vagues de la surface libre.

Les amplitudes des vagues diminuent de manière significative avec l'augmentation de débit.

En conclusion, le coefficient de distribution inégal optimisé de vitesse est indiqué par l'équation (I-60), avec $\frac{u_b}{u} \approx a$, avec $\rho_{\text{edge}} = bFr^* + c$, a , b et c étant obtenu à partir des résultats expérimentaux.

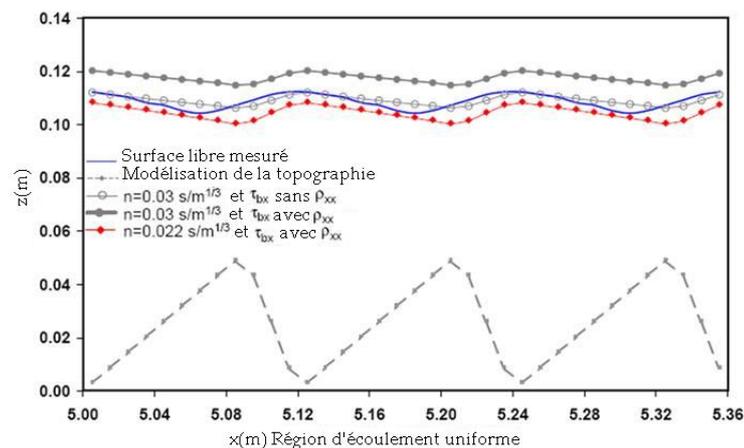


Figure I.56: Effet de ρ_{xx} sur les caractéristiques d'écoulement dans la région uniforme, pour $q_w = 0.12\text{m}^2/\text{s}$ (André et al, 2003).

- *Limite de frottement*

Sur la base des mesures dans la région uniforme, le coefficient de Manning diminue de $0.0227 \text{ s/m}^{1/3}$ pour $q_w = 0.06 \text{ m}^2/\text{s}$ à $0.0218 \text{ s/m}^{1/3}$ pour $q_w = 0.28$ (André et al.2002).

Sans considérer ρ_{xx} dans la limite de pertes τ_{bx} , la vitesse moyenne d'écoulement calculée est d'environ 25% plus grande que la vitesse mesurée. La considération de ρ_{xx} dans l'expression de τ_{bx} a eu comme conséquence un bon ajustement des caractéristiques d'écoulement mais seulement pour un coefficient de Manning de $0.024 \text{ s/m}^{1/3}$. Cela signifie que la relation du coefficient de Manning n'est pas bien adaptée pour modéliser le processus de dissipation d'énergie le long des marches.

e. Conclusion

Un modèle numérique a été développé en se basant sur le modèle de Navier Stokes intégré sur la profondeur de l'écoulement. Ce modèle a été appliqué sur un canal en marches d'escaliers avec une pente $\theta = 30^\circ$.

Les auteurs ont considéré les propriétés spécifiques d'écoulement avec le coefficient de distribution verticale inégale de vitesse et avec le facteur de frottement pour mesurer indirectement, dans une première étape, les structures macro-turbulentes de l'écoulement à l'intérieur de la marche et à l'arête de la marche (jet interne).

Cette première optimisation a eu comme conséquence un bon ajustement des caractéristiques d'écoulement (profondeur du mélange, vitesse moyenne et concentration) à l'arête de la marche qui sont tout à fait semblables aux mesures et à montrer une surface libre onduleuse réaliste.

D'ailleurs, une autre partie de ce travail peut encore être réalisé, en particulier par :

- ✓ La définition d'un écoulement efficace au-dessus du pseudo-fond représenté avec une rugosité spécifique, qui transporte efficacement la quantité de mouvement et la concentration en air.
- ✓ Une distribution non-hydrostatique de pression, associée à une composante verticale de la vitesse due aux structures macro-turbulentes de l'écoulement.
- ✓ Une force de dissipation, y compris une limite de frottement basée sur une approche de distribution de vitesse et une limite de drague, toutes les deux représentées par une rugosité efficace au pseudo-fond.

La validation de ce modèle numérique avec les mesures de laboratoire des caractéristiques d'écoulement permettra le développement d'une description plus générale, d'écoulement aéré au-dessus de la macro-rugosité.

Conclusion

A travers ces études, on conclut que :

L'écoulement dans les canaux en marches d'escaliers est divisé en deux types d'écoulements, l'écoulement extrêmement turbulent et les rouleaux de recirculations.

La profondeur de l'eau le long du déversoir peut fournir la référence pour la conception de la dimension de la paroi latérale du déversoir. En outre, la vitesse à l'entrée et à l'extrémité du déversoir peut être employée pour estimer le rapport de dissipation d'énergie du déversoir en marches d'escalier, et le dissipateur d'énergie au-dessous du déversoir peut être conçu selon l'énergie résiduelle du déversoir en marches d'escalier.

Les pics de la pression, négatif et positif sont nécessaires pour estimer le risque de cavitation et le débit maximal.

La détermination de la position où l'entraînement d'air commence « Point d'inception ».

En se basant sur les études présentées précédemment, la méthodologie de notre travail consiste en l'étude de l'écoulement turbulent bidimensionnel à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers. Et en considérant qu'une pseudo-base formée par les arrêtes des marches.

L'élaboration d'un modèle numérique adéquat basé sur les équations de Navier Stokes et du modèle de turbulence $k-\varepsilon$, permettra de déterminer les caractéristiques de l'écoulement de mélange air-eau, de la vitesse, de la distribution de la concentration de l'air, de la profondeur de l'eau pure et du point d'apparition de l'eau blanche.

Chapitre II

*Modélisation mathématique de
l'écoulement à l'aval du point
d'inception dans un canal en
marches d'escaliers*

Chapitre II

Modélisation mathématique de l'écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers

La technique des coursiers en marches d'escalier devient obsolète, durant la première moitié du vingtième siècle, avec le développement des bassins de dissipation d'énergie par des ressauts hydrauliques.

Les récents progrès scientifiques furent marqués, durant la période 1970-1992, par une ignorance quasi-complète des caractéristiques diphasiques des écoulements sur les coursiers à marches d'escaliers.

Il a fallu attendre les premières mesures de Ruff et Frizill en 1994 et l'analyse de Chanson en 1993 pour apprécier l'importance de l'entraînement d'air sur la conception hydraulique des cascades en marches d'escaliers. Hors l'entraînement d'air dans des écoulements supercritiques (c'est à dire « eau blanche ») est un paramètre essentiel, caractérisant l'augmentation du volume de l'écoulement, et donc le dimensionnement des parois latérales (Wood 1991, Chanson 1995 a). De plus la présence d'air dans les écoulements à grandes vitesses permet de réduire ou d'empêcher l'érosion par cavitation.

I. Positionnement du problème

Dans les canaux en marches d'escaliers, le régime d'écoulement peut être divisé en deux types d'écoulement : le régime d'écoulement en nappe et le régime d'écoulement extrêmement turbulent.

Le type de régime d'écoulement est fonction du débit, des dimensions de la marche et de la pente de canal.

1. Régime d'écoulement en nappe

L'écoulement en nappe est défini comme une succession de nappes en chutes libres, tel que l'eau bandit d'une marche à une autre d'une manière identique. Lors de l'écoulement, la lame d'eau déversante au niveau d'une marche frappe le giron de la marche inférieure totalement ou partiellement, selon les conditions d'écoulement.

La dissipation d'énergie se fera par la fragmentation du jet libre dans l'air, par l'impact du jet sur la marche et la formation d'un ressaut hydraulique sur la marche.

2. Régime d'écoulement extrêmement turbulent

Le long d'un canal en marches d'escaliers, pour des forts débits, l'eau s'écoule en un courant fort, cohérent et turbulent au-dessus des marches. Les bords

extrêmes de ces derniers forment ainsi une pseudo-base au dessous de laquelle se développent des rouleaux de recirculations occupant les zones entre l'écoulement et les marches.

Ces rouleaux d'eau sont maintenus par transmission de l'effort de cisaillement du fluide s'écoulant au delà des bords des marches.

Une grande partie de l'énergie dissipée de l'écoulement est causée par ces rouleaux de recirculations.

Cette étude a pour objectif, l'étude de l'écoulement extrêmement turbulent dans un canal en marches d'escalier.

A l'amont d'un écoulement sur le coursier de l'évacuateur de crues en marches d'escaliers, une couche limite turbulente se développe au long du coursier, et atteint la surface libre en un point. A partir de là, les vitesses de fluctuations turbulentes sont suffisamment importantes pour entraîner une certaine quantité d'air. Le point du début de l'entraînement d'air, est appelé point d'inception.

A l'aval de ce point, l'accroissement de la quantité d'air entraînée est graduel et continu. Les profils de concentrations en air et de vitesse se redistribuent lentement (régime d'écoulement graduellement varié), et tendent vers des profils d'équilibre dans la région d'écoulement uniforme, loin en aval (Wood, 1983).

Par conséquent, l'écoulement extrêmement turbulent dans un canal en marches d'escaliers est représenté par trois zones :

- La zone de l'écoulement d'eau claire ;
- La zone de l'écoulement graduellement varié aéré ;
- La zone de l'écoulement uniforme aéré.

La zone d'étude concerne la zone d'écoulement graduellement varié aéré, située à l'aval du point d'inception.

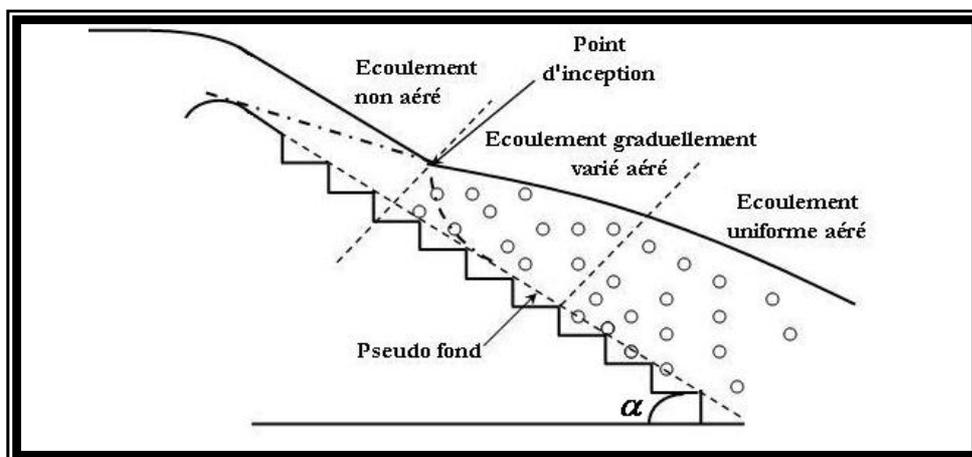


Figure II.1 : Entraînement d'air dans un écoulement extrêmement turbulent sur un évacuateur de crues en marches d'escaliers.

II. Modélisation de l'écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers

Ce chapitre est consacré à l'élaboration d'un modèle mathématique régissant l'écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers. Ce modèle est décrit par les équations fondamentales de la mécanique des fluides, ces équations sont exprimées par le système d'équations de Navier Stokes.

Pour étudier le phénomène de la turbulence, nous avons utilisé l'approche statistique en un point qui consiste à introduire la décomposition de Reynolds dans les équations de Navier Stokes. Les nouvelles équations obtenues sont dites « équations moyennées » où « équations de Reynolds ».

Ces équations décrivent un système d'équations où le nombre d'inconnues est supérieur aux nombres d'équations, pour former ce système d'équations nous avons introduit le modèle de turbulence $k-\varepsilon$.

Pour évaluer les paramètres des écoulements aérés, nous avons utilisé la théorie des écoulements homogènes. Elle est basée sur un modèle homogène qui fournit une technique simple d'analyse et qui exige à priori la détermination des paramètres moyens (tirant d'eau, vitesse, concentration en air...) afin de traiter le mélange air - eau comme un pseudo fluide obéissant aux équations usuelles d'un écoulement à une seule phase, en l'occurrence l'eau. C'est donc avec un modèle global que nous allons travailler et qui ne s'intéresse à aucune description détaillée de l'écoulement diphasique.

Pour élaborer le modèle mathématique régissant l'écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers, nous avons suivi les étapes suivantes.

1. Equations de base

La modélisation mathématique d'un écoulement turbulent est classiquement menée à l'aide de la résolution des équations différentielles aux dérivées partielles du type elliptique non linéaire. Ces équations expriment les principes de conservation de la masse, et de quantités de mouvement.

a. Equations de Navier Stokes

Equation de continuité

L'équation qui exprime la conservation de la masse est donnée par la relation suivante:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II-1})$$

U_i : Représente les composantes de vecteur vitesse suivant la direction x, y, z .

Equations de quantité de mouvement

Les équations de Navier Stokes régissant l'écoulement turbulent d'un fluide newtonien sont exprimées par la relation suivante :

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial \rho U_i}{\partial x_j} = \rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{II-2})$$

avec,

ρ : Masse volumique ; P : La pression ; F_i ($i=1,2,3$) : Représente les forces extérieures de volume ; μ : Viscosité dynamique de fluide.

b. Schéma du canal d'étude

Ce travail est consacré à étudier l'écoulement graduellement varié aéré à l'aval du point d'inception.

Le canal d'étude est représenté par un coursier d'évacuateur de crue à forte pente dont la géométrie du fond du canal est formée par des marches d'escaliers le long du canal.

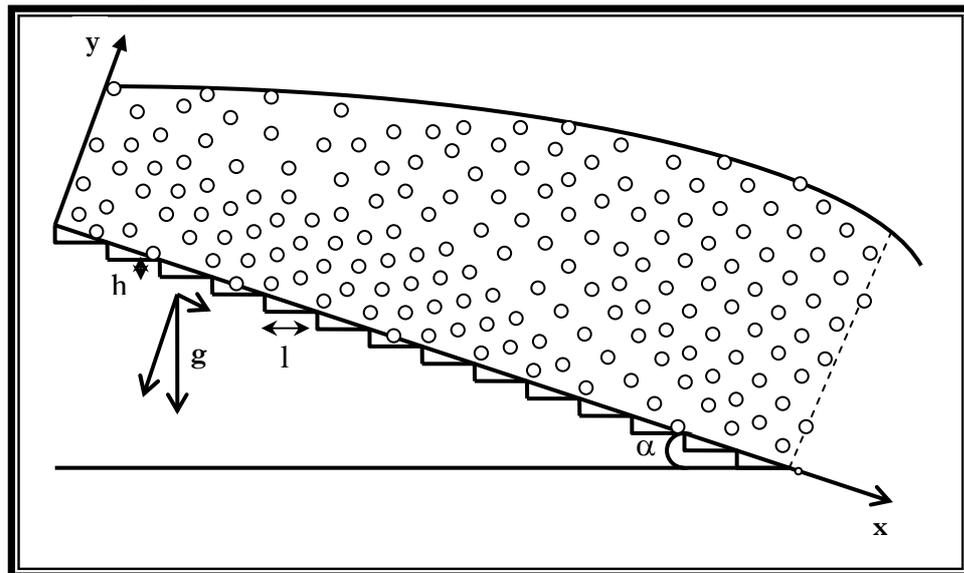


Figure II.2 : Canal en marches d'escaliers.

où, h : représente la hauteur de la marche et l : représente la longueur de la marche.

On considère une pseudo-base formée par les crêtes des marches.

Le repère orthogonal est représenté par :

- L'axe des abscisses (ox), parallèle à la pseudo-base et dans le sens de l'écoulement.
- L'axe des ordonnées (oy) perpendiculaire à l'axe des abscisses.

c. Hypothèses

La complexité d'élaborer le modèle mathématique régissant l'écoulement graduellement varié aéré dans un canal en marches d'escaliers, nous a imposé d'introduire des hypothèses, qui nous ont permis de négliger les effets secondaires du phénomène physique à étudier. Ces hypothèses sont exprimées comme suit :

- i. L'écoulement est bidimensionnel (La composante verticale de la vitesse W ainsi que ces variations spatiales et temporelles sont négligeables ;
- ii. Les variations verticales des deux composantes U et V sont négligeables ;
- iii. L'écoulement est turbulent ;
- iv. Le canal est suffisamment large pour que dans l'axe le phénomène soit peu modifié par la présence des parois latérales ;
- v. L'écoulement est graduellement varié aéré ;
- vi. La masse volumique considérée est celle du mélange air-eau, donnée par : $\rho = \rho_e (1 - C_{moy})$
avec, ρ_e : La masse volumique de l'eau ; C_{moy} : La concentration en air moyenne.
- vii. La distribution de la pression est hydrostatique. Elle est exprimée par : $P = \rho g \cos \alpha (d - y)$
- viii. Concernant les forces de volumes, nous considérons que les forces rotationnelles de Coriolis et centrifuge négligeables devant la force de gravité pour ne tenir compte que des forces gravitationnelles ;

En adaptant les deux hypothèses (i) et (ii), la projection des équations de Navier Stokes suivant les coordonnées cartésiennes x et y , est donnée par le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} = 0 \quad (\text{II-3})$$

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + U \frac{\partial \rho U}{\partial x} + V \frac{\partial \rho U}{\partial y} = \rho F_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II-4})$$

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t} + U \frac{\partial \rho V}{\partial x} + V \frac{\partial \rho V}{\partial y} = \rho F_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II-5})$$

avec,

F_x, F_y : Représentant les forces extérieures de volume suivant la direction x et y.

Le système d'équations (II-3) ÷ (II-5) représente les équations instantanées de Navier Stokes.

L'étude de l'écoulement pourrait se faire, de moins en principe, par résolution directe de ces équations.

Cette approche directe reste pour l'instant limitée à des écoulements à faible nombre de Reynolds et pour des configurations géométriques simple.

2. Equations du mouvement moyen

D'après l'hypothèse (iii), l'écoulement est turbulent. La solution des équations régissant ce type d'écoulement est généralement une solution compliquée non stationnaire, présente des fluctuations irrégulière dans l'espace et dans le temps.

La difficulté de calculer directement ces fluctuations nécessite le recours à des hypothèses simplificatrices. On est donc amené à emprunter une approche statistique qui nous conduit à la décomposition de Reynolds.

a. *Approche statistique en un point*

Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse principalement à la décomposition statistique en un point pour étudier le phénomène de turbulence.

Il nécessaire de choisir l'opérateur moyenne qui permettent à partir des équations instantanées du mouvement d'obtenir des équations moyennées.

Dans cette étude, on utilise la moyenne temporelle.

Cette moyenne est définie comme étant la limite statistique de la moyenne arithmétique prise à travers un certain nombre d'expériences réalisées dans les mêmes conditions générales d'écoulement. Cette opérateur moyenne vérifie les propriétés suivantes dite « règle de Reynolds ».

$$\overline{\overline{G}} = \overline{G} ; \overline{\alpha G} = \alpha \overline{G} ; \overline{G + F} = \overline{G} + \overline{F} ; \overline{G.F} = \overline{G}.\overline{F} ; \overline{g} = 0 ; \frac{\partial \overline{G}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{G}}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial \overline{G}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{G}}{\partial x}$$

où, G et F sont des variables quelconques (vitesse, pression,...) et α : est une constante.

A partir de cet opérateur de moyenne statistique, on définit la décomposition de Reynolds, cette décomposition consiste à considérer toute grandeur scalaire G comme la somme d'un terme moyen et d'un terme fluctuant.

$$G = \overline{G} + g$$

Les composantes de la vitesse U_i peuvent donc s'écrire (*Chassaing, 2000*). :

$$U_i = \overline{U}_i + u_i \quad (\text{II-6})$$

où, \bar{U}_i : Représente la vitesse moyenne indépendante du temps et u_i : représente la partie fluctuante de la vitesse.

$$\text{avec, } \bar{U}_i = \frac{1}{T} \int_0^T U_i dt \quad (\text{II-7})$$

$$\bar{u}_i = \frac{1}{T} \int_0^T u_i dt \quad (\text{II-8})$$

Le temps T représente un laps de temps suffisamment long pour que les valeurs moyennes soient indépendantes du temps.

Pour la pression, nous avons une définition analogue (*Chassaing*, 2000). :

$$P = \bar{P} + p \quad (\text{II-9})$$

\bar{P} : Pression moyennée dans le temps et p : Pression fluctuante ;

b. Equation de continuité

En introduisant la décomposition de Reynolds (II-6) dans l'équation de continuité (II-1), on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho (\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (\text{II-10})$$

L'équation (II-10) peut s'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II-11})$$

En prenant la moyenne temporelle de l'équation précédente, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i}} &= \overline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i}} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{II-12})$$

d'où :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II-13})$$

Par soustraction de cette équation à l'équation (II-11), on trouve :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II-14})$$

La partie moyenne et la partie fluctuante vérifie toutes les deux l'équation de continuité.

c. Equation de quantité de mouvement moyen

La condition d'incompressibilité implique :

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} \quad (\text{II-15})$$

L'équation (II-2) devient :

$$\underbrace{\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i U_j}{\partial x_j}}_{(a)} = \rho F_i - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x_i}}_{(b)} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{II-16})$$

En introduisant la décomposition de Reynolds dans le membre de gauche de l'équation (II-16), et en prenant la moyenne temporelle, on obtient :

$$\begin{aligned} (a) &= \overline{\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i U_j}{\partial x_j}} \\ &= \overline{\frac{\partial \rho U_i}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial \rho U_i U_j}{\partial x_j}} \\ &= \frac{\partial \overline{\rho U_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho U_i U_j}}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left[\frac{1}{T} \int_0^T U_i dt \right] \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho \left[\frac{1}{T} \int_0^T U_i U_j dt \right] \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left[\frac{1}{T} \int_0^T (\overline{U_i} + u_i) dt \right] \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho \left[\frac{1}{T} \int_0^T (\overline{U_i} + u_i)(\overline{U_j} + u_j) dt \right] \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left[\frac{1}{T} \int_0^T \overline{U_i} dt + \frac{1}{T} \int_0^T u_i dt \right] \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho \left[\frac{1}{T} \int_0^T (\overline{U_i} \overline{U_j} + u_i u_j + \overline{U_i} u_j + u_i \overline{U_j}) dt \right] \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \rho [\overline{\overline{U_i}} + \overline{u_i}] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho \left[\frac{1}{T} \int_0^T \overline{U_i} \overline{U_j} dt + \frac{1}{T} \int_0^T u_i u_j dt + \frac{1}{T} \int_0^T \overline{U_i} u_j dt + \frac{1}{T} \int_0^T u_i \overline{U_j} dt \right] \right] \\ &= \frac{\partial \overline{\rho U_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho [\overline{\overline{U_i} \overline{U_j}} + \overline{u_i u_j} + \overline{\overline{U_i} u_j} + \overline{u_i \overline{U_j}}] \\ &= \frac{\partial \overline{\rho U_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho [\overline{U_i} \overline{U_j} + \overline{u_i u_j} + \overline{U_i} \overline{u_j} + \overline{u_i} \overline{U_j}] \\ &= \frac{\partial \overline{\rho U_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho [\overline{U_i} \overline{U_j} + \overline{u_i u_j}] \end{aligned} \quad (\text{II-17})$$

En substituant la décomposition de Reynolds dans le membre de droite de l'équation (II-16), il en résulte :

$$\begin{aligned}
(b) &= \overline{\rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}} \\
&= \overline{\rho F_i} - \overline{\frac{\partial P}{\partial x_i}} + \mu \overline{\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}} \\
&= \rho \overline{F_i} - \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j \partial x_j} \\
&= \rho \overline{F_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{T} \int_0^T P dt \right] + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left[\frac{1}{T} \int_0^T U_i dt \right] \\
&= \rho \overline{F_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{T} \int_0^T (\overline{P} + p) dt \right] + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left[\frac{1}{T} \int_0^T (\overline{U_i} + u_i) dt \right] \\
&= \rho \overline{F_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \overline{P} dt + \frac{1}{T} \int_0^T p dt \right] + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \overline{U_i} dt + \frac{1}{T} \int_0^T u_i dt \right] \\
&= \rho \overline{F_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} [\overline{P} + \overline{p}] + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} [\overline{U_i} + \overline{u_i}] \\
&= \rho \overline{F_i} - \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j \partial x_j} \tag{II-18}
\end{aligned}$$

En moyennant les équations (II-1) et (II-2), en tenant compte les hypothèses simplificatrices, on obtient les deux expressions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{p}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \overline{U_i}}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2 \end{cases} \tag{II-19}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho \overline{U_i}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \overline{U_i U_j}}{\partial x_j} = \rho \overline{F_i} - \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{\rho u_i u_j}}{\partial x_j} \quad i, j = 1, 2 \end{cases} \tag{II-20}$$

Ce sont les équations du mouvement moyen (Système d'équations de Reynolds).

Ces nouvelles équations (II-19), (II-20) « système d'équations de Reynolds » ont la même forme générale que les équations de continuité et de Navier Stokes en régime instantané, mais dans la nouvelle équation de Navier Stokes moyennée, il apparaît une nouvelle inconnue $\overline{u_i u_j}$.

Ce terme $\overline{u_i u_j}$ est appelé tenseur de Reynolds. Ce dernier traduit l'effet de la turbulence sur l'évolution du mouvement moyen. Ce terme de corrélation double provient de la non linéarité des équations de Navier Stokes.

En coordonnées cartésiennes x, y , les équations régissant l'écoulement dans un canal en marches d'escaliers s'écrivent comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{V}}{\partial y} = 0 \quad (\text{II-21})$$

$$\frac{\partial \rho \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \rho \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \rho \bar{U}}{\partial y} = \rho \bar{F}_x - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial \rho \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{u} \bar{v}}{\partial y} \right) \quad (\text{II-22})$$

$$\frac{\partial \rho \bar{V}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \rho \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \rho \bar{V}}{\partial y} = \rho \bar{F}_y - \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial \rho \bar{v} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v}^2}{\partial y} \right) \quad (\text{II-23})$$

En tenant compte l'hypothèse (viii), en coordonnées cartésiennes, les forces extérieures de volume s'expriment par les deux relations suivantes :

$$\bar{F}_x = g \sin \alpha \quad (\text{II-24})$$

$$\bar{F}_y = -g \cos \alpha \quad (\text{II-25})$$

En introduisant ces deux relations (II-24), (II-25) dans les équations (II-22), (II-23), on obtient les deux expressions suivantes:

$$\frac{\partial \rho \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \rho \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \rho \bar{U}}{\partial y} = \rho g \sin \alpha - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial \rho \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{u} \bar{v}}{\partial y} \right) \quad (\text{II-26})$$

$$\frac{\partial \rho \bar{V}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \rho \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \rho \bar{V}}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha - \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial \rho \bar{v} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v}^2}{\partial y} \right) \quad (\text{II-27})$$

Le tenseur de Reynolds s'exprime comme suit :

$$\tau = \begin{bmatrix} \overline{\rho u^2} & \overline{\rho v u} \\ \overline{\rho u v} & \overline{\rho v^2} \end{bmatrix}$$

avec, τ : Tenseur de Reynolds.

Le système d'équations obtenue a plus d'inconnues que d'équations (trois équations, six inconnues, les deux composantes de vecteur vitesse moyenne \bar{U} et \bar{V} , le terme de pression moyenne \bar{P} et les contraintes de Reynolds $\overline{\rho u^2}$, $\overline{\rho v^2}$, $\overline{\rho u v}$).

Le système d'équations régissant l'écoulement dans un canal en marches d'escaliers est ouvert. La résolution de ce système impose la connaissance du tenseur de Reynolds.

3. Equation des tensions de Reynolds

Pour caractériser le tenseur de contraintes turbulentes $\overline{u_i u_j}$, il est nécessaire de connaître en chaque point et en chaque instant les propriétés du mouvement d'agitation. C'est là l'objet de nombreux travaux fondés sur des considérations statistiques.

En soustrayant l'équation (II-16) de l'équation (II-20), nous trouvons :

$$\frac{\partial \rho(U_i - \bar{U}_i)}{\partial t} + U_j \frac{\partial \rho U_i}{\partial x_j} - \bar{U}_j \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial (P - \bar{P})}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 (U_i - \bar{U}_i)}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \overline{\rho u_i u_j}}{\partial x_j} \quad (\text{II-28})$$

En tenant compte la décomposition de Reynolds, l'équation (II-28) devient :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial \rho U_i}{\partial x_j} - \bar{U}_j \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \overline{\rho u_i u_j}}{\partial x_j} \quad (\text{II-29})$$

En adaptant l'approche statistique de Reynolds dans le deuxième terme du membre de gauche de l'équation (II-29), on trouve:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + (\bar{U}_j + u_j) \frac{\partial \rho (\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_j} - \bar{U}_j \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \overline{\rho u_i u_j}}{\partial x_j} \quad (\text{II-30})$$

Cette équation est équivalent à :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} - \bar{U}_j \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \overline{\rho u_i u_j}}{\partial x_j} \quad (\text{II-31})$$

En arrangeant l'équation (II-31), on obtient :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \overline{\rho u_i u_j}}{\partial x_j} \quad (\text{II-32})$$

L'équation (II-32) s'écrit pour les indice i, k comme suit :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial \overline{\rho u_i u_k}}{\partial x_k} \quad (\text{II-33})$$

L'équation (II-32) s'écrit pour les indice j, k comme suit :

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \rho \bar{U}_j}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial \overline{\rho u_j u_k}}{\partial x_k} \quad (\text{II-34})$$

En multipliant l'équation (II-33) par u_j et l'équation (II-34) par u_i , on obtient le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_j \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + u_j \bar{U}_k \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k} + u_j u_k \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_k} + u_j u_k \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k} = -u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + u_j \frac{\partial \overline{\rho u_i u_k}}{\partial x_k} \end{array} \right. \quad (\text{II-35})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + u_i \bar{U}_k \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial \rho \bar{U}_j}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_k} = -u_i \frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} + u_i \frac{\partial \overline{\rho u_j u_k}}{\partial x_k} \end{array} \right. \quad (\text{II-36})$$

On somme les deux équations (II-35) et (II-36) et en appliquant la moyenne temporelle, à l'équation obtenue, il en résulte :

$$\begin{aligned}
& \left(\overline{u_j \frac{\partial \rho u_i}{\partial t}} + \overline{u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial t}} \right) + \left(\overline{U_k u_j \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k}} + \overline{U_k u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_k}} \right) + \left(\overline{u_k u_j \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_k}} + \overline{u_k u_i \frac{\partial \rho \bar{U}_j}{\partial x_k}} \right) \\
& + \left(\overline{u_k u_j \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k}} + \overline{u_k u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_k}} \right) = - \left(\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} \right) + \mu \left(\overline{u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}} + \overline{u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}} \right) \\
& + \left(\overline{u_j \frac{\partial \rho u_i u_k}{\partial x_k}} + \overline{u_i \frac{\partial \rho u_j u_k}{\partial x_k}} \right) \tag{II-37}
\end{aligned}$$

On définit les deux expressions suivantes :

$$\frac{\partial \overline{\rho u_i u_j}}{\partial t} = \overline{u_j \frac{\partial \rho u_i}{\partial t}} + \overline{u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial t}} \tag{II-38}$$

$$\overline{u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}} + \overline{u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}} = \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k} - 2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \tag{II-39}$$

En introduisant ces deux expressions dans l'équation (II-37) et après réorganisation de certains termes, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{\rho u_i u_j}}{\partial t} + \overline{U_k \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_k}} &= - \left(\overline{u_j u_k \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_k}} + \overline{u_i u_k \frac{\partial \rho \bar{U}_j}{\partial x_k}} \right) : \text{Couplage avec le mouvement} \\
& \hspace{15em} \text{moyen (terme de production);} \\
& - \frac{\partial \overline{\rho u_i u_j u_k}}{\partial x_k} : \text{Diffusion par agitation turbulente;} \\
& - \left(\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} \right) : \text{Corrélation avec la fluctuation de} \\
& \hspace{15em} \text{pression;} \\
& + \mu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k} : \text{Diffusion par agitation moléculaire;} \\
& - 2\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) : \text{Pseudo dissipation.} \tag{II-40}
\end{aligned}$$

Cette équation est appelée équation des tensions de Reynolds ou équation de transport des tensions de Reynolds.

On a donc introduit des équations supplémentaires pour les contraintes de Reynolds $\overline{\rho u_i u_j}$. Le nombre d'inconnues est toujours supérieur aux nombres

d'équations disponibles. Le système d'équations (II-21), (II-26) et (II-27) n'est toujours pas fermé. En effet, l'équation (II-40) fait apparaître des nouvelles inconnues :

- ✓ Corrélations triples : $\overline{u_i u_j u_k}$;
- ✓ Corrélation pression vitesse : $u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}$;
- ✓ Corrélation gradient de vitesse : $\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)}$.

Par conséquent, on a aboutit de cette manière à une expression impliquant les corrélations triples $\overline{u_i u_j u_k}$. De même, l'équation pour les corrélations triples implique les corrélations quadruples, et ainsi de suite. Ce problème, dit de *fermeture statistique*, est inhérent à la non linéarité des équations de l'hydrodynamique. Ceci signifie qu'une information supplémentaire, sur la nature de la solution turbulente de ces équations, est nécessaire pour décrire les contraintes de Reynolds avec un nombre fini de paramètres (macroscopiques).

Il est donc nécessaire de modéliser les inconnues supplémentaires à l'aide des lois complémentaires qui n'introduisent pas de nouvelles inconnues.

4. Fermeture des équations régissant l'écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers

Le fait de prendre la moyenne d'une équation instantanée conduit à une perte d'information qu'il faudra réintroduire sous forme d'hypothèses physiques : c'est le problème de fermeture.

L'introduction d'hypothèses de fermeture qui traduisent le comportement du milieu turbulent permet alors d'obtenir un nombre d'équations égales à celui des inconnues et ces équations peuvent ensuite être résolues par voie numérique.

a. Modèle de turbulence

Si le problème des écoulements laminaires est relativement simple à résoudre le calcul des écoulements des fluides turbulents par les équations de Navier Stokes et celles de tensions de Reynolds fait encore l'objet de nombreuses recherches.

Pour calculer les tensions de Reynolds, deux possibilités sont envisageables:

D'une part, on peut obtenir les équations de transport des tensions de Reynolds, mais dans ces nouvelles équations, interviennent des termes de corrélations triples qu'il faut à nouveau modéliser.

D'autres part, il existe d'autres modèles, se distinguant par leur degré de complexité, c'est-à-dire par le nombre d'équations de transport supplémentaires introduites pour les quantités turbulentes pour fermer le problème:

- ✓ Modèle à zéro équation de transport;
- ✓ Modèle à une équation de transport;
- ✓ Modèle à deux équations de transport.

On dit qu'un tel ou tel modèle est bon, s'il vérifie les critères suivants:

- ✓ Fermeture du système d'équations;
- ✓ Contenir un minimum de constantes ou fonction empiriques;
- ✓ Présente un degré d'universalité maximum;
- ✓ Être simple et rapide dans la résolution numérique;
- ✓ Donne des résultats précis.

Le but des modèles de turbulence est pratique, c'est la prévision numérique des écoulements turbulents, il n'est pas d'expliquer la turbulence.

Les modèles de turbulence ne peuvent donner qu'une description approchée et ils ne sont applicables qu'à une certaine classe d'écoulement.

Les modèles de turbulence les plus utilisés sont les modèles à deux équations de transport, et plus particulièrement le modèle de turbulence $k - \varepsilon$ qui est de loin le plus répandu.

b. Modèle $k - \varepsilon$

Le modèle $k - \varepsilon$ est un modèle semi empirique basé sur les équations de transport de l'énergie cinétique turbulente k et de sa dissipation ε .

Les avantages et les inconvénients de ce modèle sont:

• *Avantage*

- ✓ Modèle largement répondu;
- ✓ Relative simplicité de mise en œuvre;
- ✓ Modèle qui est généralement très utilisé dans des codes de simulation des écoulements;
- ✓ Le plus utilisé pour les applications industrielles.

• *Inconvénient*

Le modèle $k - \varepsilon$ permet d'étudier de façon satisfaisante un certain nombre d'écoulements mais n'est applicable qu'assez loin des parois. C'est pourquoi, il est souvent associé à une loi de paroi qui permet de ne pas mener la résolution des équations de bilan jusqu'à cette paroi.

• *Concept de la viscosité turbulente*

Le concept de viscosité turbulente permet d'exprimer les contraintes de Reynolds en fonction des gradients de vitesse moyenne de l'écoulement.

Ce concept est apparu tout d'abord par l'hypothèse de Boussinesq en 1877, qui s'écrit selon la relation suivante : $-\overline{\rho u_i u_j} = \mu_t \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}$ (II-41)

La généralisation du même concept au niveau tensoriel par Reynolds a conduit à : $-\overline{\rho u_i u_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right)$ (II-42)

Puis :

$$-\overline{\rho u_i u_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho \bar{k} \quad (\text{II-43})$$

μ_t : Viscosité turbulente; k : Energie cinétique turbulente: $\bar{k} = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$; δ_{ij} :

Symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

• Modélisation de la viscosité turbulente

Ce modèle calcule la viscosité turbulente en faisant intervenir l'énergie cinétique turbulente k et le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε .

La viscosité turbulente μ_t est calculée comme suit (Schiestel, 1998):

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\varepsilon} \quad (\text{II-44})$$

• Equation de l'énergie cinétique turbulente

En contractant les indices dans l'équation des tensions de Reynolds (II-40), on obtient l'équation pour l'énergie cinétique turbulente k :

$$\frac{\partial \rho \bar{k}}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \rho \bar{k}}{\partial x_k} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{\rho u_i u_i u_k}}{\partial x_k} - \overline{u_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial x_k \partial x_k} - \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (\text{II-45})$$

La modélisation de certains termes de l'équation (II-45), est nécessaire pour fermer les équations.

- En introduisant l'hypothèse de Boussinesq, le terme de production s'écrit:

$$-\overline{u_i u_k} \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_k} = \left[\mu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_k} \quad (\text{II-46})$$

- Les termes de diffusion turbulente et de couplage avec la pression fluctuante de k , sont modélisés par une hypothèse de diffusion en gradient (Gasse, Schestel).

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{\rho u_i u_i u_k}}{\partial x_k} + \overline{u_i} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \overline{k}}{\partial x_k} \right) \quad (\text{II-47})$$

avec, σ_k : Constante empirique.

- En introduisant l'hypothèse du grand nombre de Reynolds dans l'équation (II - 45), le terme de diffusion moléculaire $\mu \frac{\partial^2 k}{\partial x_k \partial x_k}$ peut être négligé.
- Le terme de dissipation de l'équation (II-45), s'écrit:

$$\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \rho \overline{\varepsilon} \quad (\text{II-48})$$

En tenant compte les hypothèses précédentes, l'équation (II-45) devient:

$$\frac{\partial \overline{\rho k}}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \overline{\rho k}}{\partial x_k} = \mu_t \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \overline{k}}{\partial x_k} \right) - \rho \overline{\varepsilon} \quad (\text{II-49})$$

• Equation de taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente

En multipliant l'équation $\frac{\partial}{\partial x_j}$ (II - 33) par $2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, on obtient:

$$\begin{aligned} & \underbrace{2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} \right)}_{(a)} + \underbrace{2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{U_k} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k} \right)}_{(b)} + \underbrace{2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_k \frac{\partial \rho \overline{U_i}}{\partial x_k} \right)}_{(c)} + \underbrace{2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_k \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k} \right)}_{(d)} \\ & = - \underbrace{2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)}_{(e)} + \underbrace{2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right)}_{(f)} + \underbrace{2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{\rho u_i u_k}}{\partial x_k} \right)}_{(g)} \end{aligned} \quad (\text{II-50})$$

En décomposant le membre de droite de cette équation en quatre termes et en appliquant la moyenne temporelle, on trouve:

$$\begin{aligned} (a) &= 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} \right)} \\ &= 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} \right)} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} \left[\overline{v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} \right] \\ &= \frac{\partial \rho \overline{\varepsilon}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II-51})$$

Le deuxième terme du membre de droite de l'équation (II-50), est égal à :

$$\begin{aligned}
(b) &= 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{U}_k \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k} \right)} \\
&= 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \overline{U}_k}{\partial x_j} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k} + \overline{U}_k \frac{\partial^2 \rho u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right]} \\
&= 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{U}_k}{\partial x_j} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k}} + 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \overline{U}_k \frac{\partial^2 \rho u_i}{\partial x_j \partial x_k}} \\
&= 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{U}_k}{\partial x_j}} + 2v \overline{\overline{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \rho u_i}{\partial x_j \partial x_k}} \\
&= 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{U}_k}{\partial x_j}} + 2v \overline{\overline{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} \\
&= 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{U}_k}{\partial x_j}} + \overline{\overline{U}_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \left[v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right]} \\
&= 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{U}_k}{\partial x_j}} + \overline{\overline{U}_k \frac{\partial \rho \bar{\varepsilon}}{\partial x_k}} \tag{II-52}
\end{aligned}$$

Le troisième terme du membre de droite de l'équation (II-50), est égal à :

$$\begin{aligned}
(c) &= 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_k \frac{\partial \rho \overline{U}_i}{\partial x_k} \right)} \\
&= 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \rho \overline{U}_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial^2 \rho \overline{U}_i}{\partial x_j \partial x_k} \right]} \\
&= 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \rho \overline{U}_i}{\partial x_k}} + 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_k \frac{\partial^2 \rho \overline{U}_i}{\partial x_j \partial x_k}} \\
&= 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \rho \overline{U}_i}{\partial x_k}} + 2v \overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \rho \overline{U}_i}{\partial x_j \partial x_k}} \tag{II-53}
\end{aligned}$$

Le dernier terme du membre de droite de l'équation (II-50), est égal à :

$$\begin{aligned}
(d) &= 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_k \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k} \right)} \\
&= 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial^2 \rho u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k}} + 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_k \frac{\partial^2 \rho u_i}{\partial x_j \partial x_k}} \\
&= 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k}} + 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} \\
&= 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k}} + v \overline{\frac{\partial \rho}{\partial x_k} \left[u_k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right]} \tag{II-54}
\end{aligned}$$

On décompose le membre de gauche de l'équation (II-50) en trois termes et en appliquant la moyenne temporelle, il en résulte:

$$\begin{aligned}
(e) &= -2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)} \\
(e) &= -2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_i}} \tag{II-55}
\end{aligned}$$

Le deuxième terme du membre de droite de l'équation (II-50), est égal à:

$$\begin{aligned}
(f) &= 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right)} = 2v \mu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_k}} = 2v \mu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)} \\
&= 2v \mu \overline{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \right) \right]} - 2v \mu \overline{\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} \\
&= 2v \mu \overline{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right]} - 2 \overline{\frac{\mu^2}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} \\
&= \mu \overline{\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left[v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right]} - \overline{\frac{2}{\rho} \left(\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} \\
&= \mu \overline{\frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}}{\partial x_k \partial x_k}} - \frac{2}{\rho} \overline{\left(\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} \tag{II-56}
\end{aligned}$$

Le troisième terme du membre de droite de l'équation (II-50), est égal à:

$$(g) = 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \rho u_i u_k}{\partial x_k} \right)} = 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \rho u_i u_k}{\partial x_k} \right)} = 0 \tag{II-57}$$

L'équation (II-50) devient:

$$\frac{\partial \rho \bar{\varepsilon}}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \rho \bar{\varepsilon}}{\partial x_k} = - \underbrace{2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j}}}_{(a)} - \underbrace{2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_k}}}_{(b)} - 2v \overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \rho \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_k}}$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{-2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k}}_{(c)} - \underbrace{\nu \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \left[u_k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right]}_{(d)} - \underbrace{2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_i}}_{(e)} \\
& + \underbrace{\mu \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}}{\partial x_k \partial x_k}}_{(f)} - \underbrace{\frac{2}{\rho} \left(\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2}_{(g)} \quad (II-58)
\end{aligned}$$

La modélisation de certains termes de l'équation (II-58), est nécessaire pour fermer le système.

- En utilisant l'hypothèse des grands nombres de Reynolds, on peut négliger les termes (a), (b), (e), (f) du membre de droite de l'équation (II-58).
- Le quatrième terme (d) de l'équation (II-58) est modélisé à l'aide de l'hypothèse de diffusion en gradient :

$$\nu \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \left[u_k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right] = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_k} \right) \quad (II-59)$$

- La modélisation des termes (c) et (g) est celle proposée par Launder, Reece et Rodi, qui donne:

$$-2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k} - \frac{2}{\rho} \left(\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 = C_{\varepsilon_1} \frac{\bar{\varepsilon}}{k} \mu_t \left[\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \right] - C_{\varepsilon_2} \rho \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} \quad (II-60)$$

Après arrangement et modélisation, l'équation de taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente devient :

$$\frac{\partial \rho \bar{\varepsilon}}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \rho \bar{\varepsilon}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_k} \right) + C_{\varepsilon_1} \frac{\bar{\varepsilon}}{k} \mu_t \left[\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \right] - C_{\varepsilon_2} \rho \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} \quad (II-61)$$

Les valeurs des cinq constantes ($C_\mu, C_{\varepsilon_1}, C_{\varepsilon_2}, \sigma_k, \sigma_\varepsilon$) seront qualifiées par la suite de « valeurs standards ». Elles ont été fixées, pour certaines d'entre elles par Jones et Launder (1972), les constantes les plus couramment utilisées sont:

$$C_\mu = 0.09, C_{\varepsilon_1} = 1.44, C_{\varepsilon_2} = 1.92, \sigma_k = 1, \sigma_\varepsilon = 1.3.$$

En adopte l'hypothèse de Boussinesq dans l'équation (II-20), il en résulte:

$$\frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_j} = \rho \bar{F}_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_t \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta_{ij} \rho \bar{k}) \quad (II-62)$$

Les équations régissant l'écoulement graduellement varié aéré dans un canal en marches d'escaliers sont exprimées par :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\varepsilon} \quad (\text{II-63})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II-64})$$

$$\frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \rho \bar{U}_i}{\partial x_j} = \rho \bar{F}_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_t \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta_{ij} \rho \bar{k}) \quad (\text{II-65})$$

$$\frac{\partial \rho \bar{k}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \rho \bar{k}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + \mu_t \left[\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right] - \rho \bar{\varepsilon} \quad (\text{II-66})$$

$$\frac{\partial \rho \bar{\varepsilon}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \rho \bar{\varepsilon}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon_1} C_\mu \rho k \left[\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right] - C_{\varepsilon_2} \rho \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} \quad (\text{II-67})$$

avec $i, j = 1, 2$

Par la suite, pour simplifier l'écriture la barre ($\bar{\quad}$) sera omise.

En projection en coordonnées cartésiennes, le modèle mathématique de l'écoulement graduellement varié aéré est représenté par le système d'équations suivant :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{II-68})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} = 0 \quad (\text{II-69})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho U}{\partial t} + U \frac{\partial \rho U}{\partial x} + V \frac{\partial \rho U}{\partial y} = \rho g \sin \alpha - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + 2\mu_t) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_t \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] \\ - \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{II-70})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho V}{\partial t} + U \frac{\partial \rho V}{\partial x} + V \frac{\partial \rho V}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + 2\mu_t) \frac{\partial V}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] \\ - \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{II-71})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho k}{\partial t} + U \frac{\partial \rho k}{\partial x} + V \frac{\partial \rho k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \mu_t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] \\ - \rho \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{II-72})$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_{\varepsilon_1} C_{\mu} \rho k \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] - C_{\varepsilon_2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{II-73})$$

Nous avons élaboré les équations régissant l'écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers, est appliqué loin de la paroi (dans le cas où le nombre de Reynolds est élevé). Donc le point faible des fermetures statistiques, le traitement de la paroi.

III. Traitement de la fonction de la paroi

L'hypothèse d'isotropie de la turbulence n'est plus valable au voisinage des parois. L'observation expérimentale montre l'existence au voisinage de la paroi d'une couche limite dans laquelle l'effet de la viscosité moléculaire devient prépondérant devant celui de la turbulence : c'est la sous couche laminaire ou sous couche visqueuse. Dans cette couche, la contrainte de cisaillement totale se limite à la contrainte due à la viscosité, et le profil de vitesse longitudinale est linéaire.

A mesure que la distance à la paroi augmente, les contraintes dues à la viscosité moléculaire deviennent négligeables devant celles liées à la turbulence. Les équations (II-68) ÷ (II-73) ne sont donc plus valables aux voisinages des parois. Une solution de remplacement est adoptée, qui consiste à faire l'hypothèse que la mince couche de fluide en contact avec le mur est une zone d'équilibre local, et à courir à une loi dite « loi de paroi », qui donne le profil de la vitesse au voisinage de paroi.

Le profil de vitesse adimensionnel est égal à :

$$U^+ = \frac{U}{U_*} \quad (\text{II-74})$$

La grandeur spatial adimensionnel est égal à :

$$y^+ = \frac{y U_*}{\nu} \quad (\text{II-75})$$

1. Fonction de la paroi pour la vitesse

En écoulement en canal sur une paroi lisse, on distingue quatre zones dans le profil de vitesse U :

a. La sous couche visqueuse

$0 < y^+ < 7$ dans la quelle $U^+ = y^+$

b. La zone tampon

c. La zone logarithmique

$20 \leq y^+ \leq 0.2h^+$ dans la quelle $U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + 5.5$

où, κ : Constante de Von Karman ; $h^+ = \frac{hU_*}{\nu}$: Hauteur adimensionnelle de l'écoulement.

d. La zone externe

$0.2h^+ \leq y^+$

Lorsque la paroi du canal est rugueuse, on distingue trois cas :

- La rugosité k est inférieur à l'épaisseur de la sous couche visqueuse $k^+ < 5$, le profil de vitesse U est non modifié, le régime est hydrauliquement lisse.
- La rugosité est nettement plus grande que l'épaisseur de la sous couche visqueuse $k^+ > 70$, alors :

Le régime est dite rugueux, il n'y a plus de profil simple de la sous couche visqueuse.

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + 8.5 \quad (\text{II-76})$$

- Dans le cas intermédiaire $5 < k^+ < 70$, le profil dépend de la rugosité. C'est la région de transition, pour la quelle $U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + \phi(k^+)$

$$\text{avec, } k^+ = \frac{k_s U_*}{\nu}; \quad k_s = h \cos \alpha.$$

2. Fonction de la paroi pour k - ε

$$\text{Pour } k : \quad k = \frac{U_*^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (\text{II-77})$$

$$\text{Pour } \varepsilon : \quad \varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} \quad (\text{II-78})$$

IV. Conclusion

Un modèle mathématique régissant l'écoulement turbulent dans un canal en marches d'escaliers a été élaboré. Pour établir ce modèle mathématique, nous avons utilisé l'approche statistique en un point qui rend le système d'équations ouvert.

La fermeture de ce système d'équations a été établie en faisant appel à d'autres équations, élaborées sous forme de modèles dits « modèles de turbulence ».

Parmi les modèles de turbulence qui existe, nous avons opté pour le modèle $k-\varepsilon$.

Le modèle mathématique régissant l'écoulement à l'aval du point d'inception est données par les relations (II-68) ÷ (II-73).

Les équations régissant l'écoulement turbulent à l'aval du point d'inception proche de la paroi, sont exprimées par les relations (II-74) ÷ (II-78).

Le système d'équations obtenues est représenté par des équations différentielles non linéaires, ce qui nécessite le recoure à des méthodes numériques.

Chapitre III

*Modélisation numérique d'un
écoulement à l'aval du point
d'inception dans un canal en
marches d'escaliers*

Chapitre III

Modélisation numérique d'un écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers

Nous avons présenté dans le chapitre II, la méthodologie à suivre pour déterminer le modèle mathématique de l'écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers. Le comportement de ce modèle mathématique est représenté par un système d'équations différentielles non linéaires. La complexité de ces équations ne permet pas de les résoudre analytiquement, on est amené à la résolution numérique. A cette étape, intervient le concept de la discrétisation.

Le résultat de la discrétisation de ces équations différentielles est un système d'équations algébriques non linéaires. Ces équations décrivent les propriétés discrètes du fluide aux nœuds dans le domaine de solution.

Il existe plusieurs méthodes numériques de discrétisation des équations différentielles aux dérivées partielles, à savoir :

- ✓ Méthode des différences finies,
- ✓ Méthode des éléments finis ;
- ✓ Méthode des volumes finis.

Pour notre étude, nous nous sommes limité à la méthode des volumes finis. Cette méthode consiste à intégrer, sur des volumes élémentaires, les équations écrites sous forme intégrale. C'est une méthode particulièrement bien adaptée à la discrétisation spatiale des lois de conservation, contrairement à la méthode des Eléments Finis, et est ainsi très utilisée en mécanique des fluides.

Sa mise en oeuvre est simple si les volumes élémentaires ou « volumes de contrôle » sont des rectangles en 2D ou des parallélépipèdes en 3D. Cependant, la méthode des Volumes Finis permet d'utiliser des volumes de forme quelconque et donc de traiter des géométries complexes, contrairement à la méthode des Différences Finies.

De nombreux codes de simulation numérique en mécanique des fluides reposent sur cette méthode : Fluent, StarCD, CFX, FineTurbo, elsA...

I. Modèle mathématique de l'écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers

En réarrangeant les équations (II-69) ÷ (II-73), le modèle mathématique de l'écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers est exprimé par les relations suivantes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} = 0 \quad (\text{III-1})$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho U}{\partial t}}_{(a)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho U U - (\mu + 2\mu_t) \frac{\partial U}{\partial x} \right]}_{(b)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[\rho V U - (\mu + \mu_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right]}_{(c)} = \underbrace{\rho g \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_t \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \right]}_{(d)} - \underbrace{\frac{2}{3} \frac{\partial \rho k}{\partial x}}_{(e)}$$

$$- \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{III-2})$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho V}{\partial t}}_{(a)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho U V - (\mu + \mu_t) \frac{\partial V}{\partial x} \right]}_{(b)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[\rho V V - (\mu + 2\mu_t) \frac{\partial V}{\partial y} \right]}_{(c)} = \underbrace{-\rho g \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \right]}_{(d)} - \underbrace{\frac{2}{3} \frac{\partial \rho k}{\partial y}}_{(e)}$$

$$- \frac{\partial P}{\partial y} \quad (\text{III-3})$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho k}{\partial t}}_{(a)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho U k - \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right]}_{(b)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[\rho V k - \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right]}_{(c)} = \underbrace{\mu_t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right]}_{(d)} - \rho \epsilon$$

$$(\text{III-4})$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t}}_{(a)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho U \epsilon - \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right]}_{(b)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[\rho V \epsilon - \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right]}_{(c)}$$

$$= \underbrace{C_{\epsilon_1} C_\mu \rho k \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right]}_{(d)} - C_{\epsilon_2} \rho \epsilon \frac{\epsilon}{k} \quad (\text{III-5})$$

où, (a) : Terme de variation temporelle ; (b), (c) : Termes de convection et diffusion (moléculaire et turbulente) ; (d) : Terme source ; (e) : Terme du force de pression.

avec, $\mu_t = \rho C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\epsilon}$, $C_\mu = 0.09$, $C_{\epsilon_1} = 1.44$, $C_{\epsilon_2} = 1.92$, $\sigma_k = 1$, $\sigma_\epsilon = 1.3$.

Ce système d'équations représente un problème de convection diffusion pour une géométrie bidimensionnelle et un régime d'écoulement non permanent.

II. Principe de la méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis consiste à partager le domaine de calcul en plusieurs volumes, où chaque volume « volumes de contrôle » entoure un nœud « nœud principal ». Elle facilite la linéarisation des termes non linéaires dans les équations de conservation tel que le terme source.

En utilisant différents schémas d'approximation, on peut intégrer les termes des équations différentielles modélisantes sur chaque volume de contrôle, où les valeurs et les quantités sont stockées aux nœuds du volume de contrôle.

Son principe repose sur le théorème de la divergence qui consiste à exprimer la conservation des flux d'un variable dans son volume de contrôle (V) délimité par sa surface (S), et contenant un point de discrétisation de l'inconnue ϕ et sur ce volume de contrôle les équations de transport sont intégrées. Cette formulation intégrale repose sur le théorème de la divergence de Gauss, pour une variable ϕ , on a :

$$\int_V \text{div } \phi \, dv = \oint_{\partial V} \phi_s \, dS$$

où, ∂V désigne la frontière du domaine (V), $\partial V = \partial x \partial y \partial z$.

La méthode des volumes finis, comporte essentiellement :

- ✓ La discrétisation du domaine considéré en volume de contrôle ;
- ✓ Intégration des équations différentielles aux dérivées partielles ;
- ✓ Le choix d'un schéma représentant la variation de la quantité physique et l'assemblage des diverses équations ;
- ✓ Le modèle doit être stable et convergent.

1. Maillage et volume de contrôle

Dans la méthode des volumes finis, le domaine du calcul est divisé en volumes de contrôle. Le centre de chaque volume forme un nœud du maillage qui conserve la moyenne de la propriété de ce volume (Patankar, 1980).

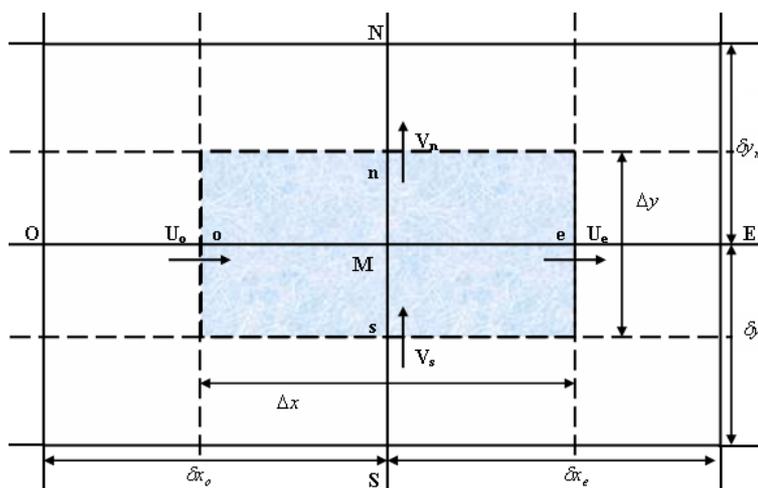


Figure III.1 : Volume de contrôle (Patankar, 1980).

Le volume de contrôle sur le quel on intègre les équations régissant l'écoulement dans un canal en marches d'escaliers est représenté par la figure III.1. Pour un nœud principal M, les points E et O (Est et Ouest) sont ses voisins dans la direction x, et les points N et S (Nord et Sud) sont ses voisins dans la direction y. Le volume de contrôle entourant M, est délimité par les interfaces

représentées par les lettres minuscules (o,e) dans la direction des x, et (n,s) dans la direction y, les points des interfaces (n,s,o,e) se situent aux milieux des distances (MN, MS, MO, ME). La surface du volume de contrôle est $\Delta x \Delta y$.

En volume fini, pour remédier au problème provoqué lors du couplage entre la vitesse et la pression lorsqu'ils sont placés au même nœud de calcul, Patankar a utilisé le schéma à maillage décalé pour les deux composantes de la vitesse (Patankar, 1980).

Les avantages d'un maillage décalé sont :

- ✓ Permet une interprétation physique des termes qui interviennent lors de la discrétisation des équations.
- ✓ La spécification des valeurs de la pression dans les frontières n'est pas nécessaire (car on fait coïncider les frontières du domaine de calcul avec les nœuds où on calcule la vitesse).
- ✓ Une meilleure évaluation des gradients de pression.
- ✓ Permet une bonne approximation des flux convectifs.
- ✓ Permet une stabilisation numérique de la solution.

2. Détermination de la forme algébrique de l'équation de conservation discrétisé par la méthode des volumes finis

Ce travail est consacré à étudier un problème de convection diffusion pour une géométrie bidimensionnelle et pour un régime d'écoulement non permanent.

Les effets de convection diffusion ont une influence importante, sur l'étude des écoulements à surface libre.

L'équation générale de conservation qui gouverne ce phénomène s'écrit sous la forme (Patankar, 1980) :

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}}_{(a)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho U \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]}_{(b)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[\rho V \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]}_{(c)} = \underbrace{S}_{(d)} \quad (\text{III-6})$$

où, φ : Variable qui peut être U, V, k et ε ; Γ : Coefficient de diffusion, dépend de la variable φ ; U, V : Composantes de vecteur vitesse suivant les deux directions x et y ; S : Terme source.

avec,

(a) : Terme transitoire ; (b), (c) : Termes de convection diffusion; (d) : Terme source.

Dans cette partie, on suppose que le champ de vitesse est constant, et on cherche à trouver la variable φ .

La technique des volumes finis consiste à discrétiser la forme intégrale des équations de transport plutôt que leurs formes différentielles.

En intégrant l'équation (III-6) sur le volume de contrôle dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^{s_e} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dx dy dt}_{(a)} + \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^{s_e} \left[\frac{\partial(\rho U\phi)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \right] dx dy dt}_{(b)} + \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^{s_e} \left[\frac{\partial(\rho V\phi)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \right] dx dy dt}_{(c)} \\ & = \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^{s_e} S dx dy dt}_{(d)} \end{aligned} \quad (III-7)$$

Pour pouvoir approximer l'équation sous forme algébrique, on considère les hypothèses suivantes :

1. La variable généralisée ϕ varie linéairement entre les nœuds principaux dans les deux directions ;
2. Les termes convectifs et diffusifs sont uniformes à travers les faces correspondantes ;
3. Le terme source est uniforme sur le volume de contrôle.

Commençons par l'intégration du terme de variation temporelle.

a. Intégration du terme de variation temporelle

$$(a) = \int_{s_o}^{s_e} \left(\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) dt \right) dx dy = \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) dt \int_o^e dx \int_s^n dy = [\rho\phi]_t^{t+\Delta t} (x_e - x_o)(y_n - y_s) \quad (III-8)$$

On définit à l'instant t la variable ϕ_p^0 , et à l'instant $t + \Delta t$ la variable ϕ_p^1 .

L'intégration du terme de variation temporelle sur le volume de contrôle et dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ donne :

$$(a) = [(\rho\phi)_M^1 - (\rho\phi)_M^0] \Delta x \Delta y \quad (III-9)$$

b. Intégration du terme de convection diffusion

L'intégration du terme (b) de l'équation (III-7) sur le volume de contrôle dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ est:

$$\begin{aligned} (b) &= \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \left(\int_o^e \frac{\partial}{\partial x} (\rho U\phi) dx \right) dy dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \left(\int_o^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) dx \right) dy dt \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_o^e \frac{\partial}{\partial x} (\rho U\phi) dx \int_s^n dy \right] dt - \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_o^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) dx \int_s^n dy \right] dt \\ &= \int_t^{t+\Delta t} [(\rho U\phi)_o^e (y_n - y_s)] dt - \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_o^e (y_n - y_s) \right] dt \\ &= \int_t^{t+\Delta t} [((\rho U\phi)_e - (\rho U\phi)_o) \Delta y] dt - \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_o \right) \Delta y \right] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_t^{t+\Delta t} [(\rho U)_e \varphi_e - (\rho U)_o \varphi_o] \Delta y \, dt - \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_o \right] \Delta y \, dt \\
&= \int_t^{t+\Delta t} \left[\left((\rho U)_e \varphi_e - \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_e \right) \Delta y - \left((\rho U)_o \varphi_o - \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_o \right) \Delta y \right] dt \quad \text{(III-10)}
\end{aligned}$$

Pour le calcul du gradient aux facettes du volume de contrôle, il va falloir utiliser une distribution approximative des propriétés mises en jeu entre les nœuds.

Pour commencer, nous choisissons la plus simple des approximations qui est l'approximation linéaire. Cette pratique est dénommée « différentiation centrale ».

$$\varphi_e = \frac{1}{2}(\varphi_E + \varphi_M) \quad \text{(III-11)}$$

$$\varphi_o = \frac{1}{2}(\varphi_M + \varphi_O) \quad \text{(III-12)}$$

$$\varphi_n = \frac{1}{2}(\varphi_N + \varphi_M) \quad \text{(III-13)}$$

$$\varphi_s = \frac{1}{2}(\varphi_M + \varphi_S) \quad \text{(III-14)}$$

$$\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_e = \Gamma_e \frac{\varphi_E - \varphi_M}{(\delta x)_e} \quad \text{(III-15)}$$

$$\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_o = \Gamma_o \frac{\varphi_M - \varphi_O}{(\delta x)_o} \quad \text{(III-16)}$$

$$\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_n = \Gamma_n \frac{\varphi_N - \varphi_M}{(\delta y)_n} \quad \text{(III-17)}$$

$$\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_s = \Gamma_s \frac{\varphi_M - \varphi_S}{(\delta y)_s} \quad \text{(III-18)}$$

En injectant les expressions (III-11), (III-12), (III-15) et (III-16) dans l'expression (III-10), nous aboutissons à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\text{(b)} &= \int_t^{t+\Delta t} \left[\left((\rho U)_e \left(\frac{1}{2}(\varphi_E + \varphi_M) \right) - \left(\Gamma_e \frac{(\varphi_E - \varphi_M)}{(\delta x)_e} \right) \right) \Delta y - \left((\rho U)_o \left(\frac{1}{2}(\varphi_M + \varphi_O) \right) - \left(\Gamma_o \frac{(\varphi_M - \varphi_O)}{(\delta x)_o} \right) \right) \Delta y \right] dt \\
&= \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{1}{2}(\rho U)_e (\varphi_E + \varphi_M) - \left(\Gamma_e \frac{(\varphi_E - \varphi_M)}{(\delta x)_e} \right) \right) \Delta y - \left(\frac{1}{2}(\rho U)_o (\varphi_M + \varphi_O) - \left(\Gamma_o \frac{(\varphi_M - \varphi_O)}{(\delta x)_o} \right) \right) \Delta y \right] dt \quad \text{(III-19)}
\end{aligned}$$

Pour intégrer ce terme dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, une discrétisation temporelle est réalisée.

Plusieurs hypothèses sont possible pour définir comment varient les termes φ_M , φ_E , φ_O , φ_N et φ_S en fonction du temps dans l'intervalle $[t, t + \Delta t]$. Ils sont généralisés comme suit (Patankar, 1980) :

$$\int_t^{t+\Delta t} \varphi_M dt = [f \varphi_M^1 + (1-f) \varphi_M^0] \Delta t \quad (\text{III-20})$$

où, f est un facteur compris entre 0 et 1.

Il existe trois schémas de discrétisation temporelle (Patankar, 1980) :

- ✓ Schéma explicite ($f = 0$).
- ✓ Schéma de Crank-Nicholson ($f = 0.5$).
- ✓ Schéma implicite ($f = 1$).

L'intégration de l'équation (III-19) entre t et $t + \Delta t$ donne :

$$\begin{aligned} (b) = & f \left[\left(\frac{1}{2} (\rho U)_e (\varphi_E^1 + \varphi_M^1) - \left(\Gamma_e \frac{(\varphi_E^1 - \varphi_M^1)}{(\delta x)_e} \right) \right) \Delta y - \left(\frac{1}{2} (\rho U)_o (\varphi_M^1 + \varphi_O^1) - \left(\Gamma_o \frac{(\varphi_M^1 - \varphi_O^1)}{(\delta x)_o} \right) \right) \Delta y \right] \Delta t \\ & + (1-f) \left[\left(\frac{1}{2} (\rho U)_e (\varphi_E^0 + \varphi_M^0) - \left(\Gamma_e \frac{(\varphi_E^0 - \varphi_M^0)}{(\delta x)_e} \right) \right) \Delta y - \left(\frac{1}{2} (\rho U)_o (\varphi_M^0 + \varphi_O^0) - \left(\Gamma_o \frac{(\varphi_M^0 - \varphi_O^0)}{(\delta x)_o} \right) \right) \Delta y \right] \Delta t \end{aligned} \quad (\text{III-21})$$

L'intégration du terme de convection diffusion (c) de l'équation (III-7) sur le volume de contrôle dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ donne :

$$\begin{aligned} (c) = & \int_t^{t+\Delta t} \int_o^e \left(\int_s^n \frac{\partial}{\partial y} (\rho V \varphi) dy \right) dx dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_o^e \left(\int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dy \right) dx dt \\ = & \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_s^n \frac{\partial}{\partial y} (\rho V \varphi) dy \int_o^e dx \right] dt - \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dy \int_o^e dx \right] dt \\ = & \int_t^{t+\Delta t} [(\rho V \varphi)_s^n (x_e - x_o)] dt - \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_s^n (x_e - x_o) \right] dt \\ = & \int_t^{t+\Delta t} [((\rho V \varphi)_n - (\rho V \varphi)_s) \Delta x] dt - \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_s \right) \Delta x \right] dt \\ = & \int_t^{t+\Delta t} [((\rho V)_n \varphi_n - (\rho V)_s \varphi_s) \Delta x] dt - \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_s \right) \Delta x \right] dt \\ = & \int_t^{t+\Delta t} \left[\left((\rho V)_n \varphi_n - \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_n \right) \Delta x - \left((\rho V)_s \varphi_s - \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_s \right) \Delta x \right] dt \end{aligned} \quad (\text{III-22})$$

En introduisant les expressions (III-13), (III-14), (III-17) et (III-18) dans l'expression (III-22), on obtient:

$$(c) = \int_t^{t+\Delta t} \left[\left((\rho V)_n \left(\frac{1}{2} (\varphi_N + \varphi_M) \right) - \left(\Gamma_n \frac{(\varphi_N - \varphi_M)}{(\delta y)_n} \right) \right) \Delta x - \left((\rho V)_s \left(\frac{1}{2} (\varphi_M + \varphi_S) \right) - \left(\Gamma_s \frac{(\varphi_M - \varphi_S)}{(\delta y)_s} \right) \right) \Delta x \right] dt$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{1}{2} (\rho V)_n (\varphi_N + \varphi_M) - \left(\Gamma_n \frac{(\varphi_N - \varphi_M)}{(\delta y)_n} \right) \right) \Delta x - \left(\frac{1}{2} (\rho V)_s (\varphi_M + \varphi_S) - \left(\Gamma_s \frac{(\varphi_M - \varphi_S)}{(\delta y)_s} \right) \right) \Delta x \right] dt$$
(III-23)

L'intégration de l'équation (III-23) entre t et t + Δt donne :

$$(c) = f \left[\left(\frac{1}{2} (\rho V)_n (\varphi_N^1 + \varphi_M^1) - \left(\Gamma_n \frac{(\varphi_N^1 - \varphi_M^1)}{(\delta y)_n} \right) \right) \Delta x - \left(\frac{1}{2} (\rho V)_s (\varphi_M^1 + \varphi_S^1) - \left(\Gamma_s \frac{(\varphi_M^1 - \varphi_S^1)}{(\delta y)_s} \right) \right) \Delta x \right] \Delta t$$

$$+ (1-f) \left[\left(\frac{1}{2} (\rho V)_n (\varphi_N^0 + \varphi_M^0) - \left(\Gamma_n \frac{(\varphi_N^0 - \varphi_M^0)}{(\delta y)_n} \right) \right) \Delta x - \left(\frac{1}{2} (\rho V)_s (\varphi_M^0 + \varphi_S^0) - \left(\Gamma_s \frac{(\varphi_M^0 - \varphi_S^0)}{(\delta y)_s} \right) \right) \Delta x \right] \Delta t$$
(III-24)

c. Intégration du terme source

L'intégration du terme source (d) de l'équation (III-7) sur le volume de contrôle dans l'intervalle de temps [t, t + Δt] est :

$$(d) = \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^{n_e} \int S dx dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_{s_o}^{n_e} S dx dy \right] dt$$
(III-25)

En utilisant la troisième supposition, on peut écrire :

$$(d) = \int_t^{t+\Delta t} [\bar{S} \Delta x \Delta y] dt$$
(III-26)

avec, \bar{S} : La moyenne de la source S tout le long du volume de contrôle (Patankar, 1980).

La formule de linéarisation peut s'écrire alors (Patankar, 1980) :

$$\bar{S} = S_C + S_M \varphi_M$$
(III-27)

où, S_M : Coefficient de φ_M et S_C : La partie de S qui ne dépend pas explicitement de φ_M .

Il est nécessaire lors de la linéarisation que S_M soit négatif, car un S_M positif peut causer une divergence.

$$(d) = \int_t^{t+\Delta t} [(S_C + S_M \varphi_M) \Delta x \Delta y] dt$$
(III-28)

En intégrant l'expression (III-28) sur le volume de contrôle entre t et t + Δt, on trouve :

$$(d) = [f(S_M \varphi_M^1) + (1-f)(S_M \varphi_M^0) + S_C] \Delta x \Delta y \Delta t \quad (\text{III-29})$$

L'intégration des différents termes de l'équation (III-7) sur le volume de contrôle dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ donne :

$$\begin{aligned} & [(\rho\varphi)_M^1 - (\rho\varphi)_M^0] \Delta x \Delta y \\ & + f \left[\left(\frac{1}{2} (\rho U)_e (\varphi_E^1 + \varphi_M^1) - \left(\Gamma_e \frac{(\varphi_E^1 - \varphi_M^1)}{(\delta x)_e} \right) \right) \Delta y - \left(\frac{1}{2} (\rho U)_o (\varphi_M^1 + \varphi_O^1) - \left(\Gamma_o \frac{(\varphi_M^1 - \varphi_O^1)}{(\delta x)_o} \right) \right) \Delta y \right] \Delta t \\ & + (1-f) \left[\left(\frac{1}{2} (\rho U)_e (\varphi_E^0 + \varphi_M^0) - \left(\Gamma_e \frac{(\varphi_E^0 - \varphi_M^0)}{(\delta x)_e} \right) \right) \Delta y - \left(\frac{1}{2} (\rho U)_o (\varphi_M^0 + \varphi_O^0) - \left(\Gamma_o \frac{(\varphi_M^0 - \varphi_O^0)}{(\delta x)_o} \right) \right) \Delta y \right] \Delta t \\ & + f \left[\left(\frac{1}{2} (\rho V)_n (\varphi_N^1 + \varphi_M^1) - \left(\Gamma_n \frac{(\varphi_N^1 - \varphi_M^1)}{(\delta y)_n} \right) \right) \Delta x - \left(\frac{1}{2} (\rho V)_s (\varphi_M^1 + \varphi_S^1) - \left(\Gamma_s \frac{(\varphi_M^1 - \varphi_S^1)}{(\delta y)_s} \right) \right) \Delta x \right] \Delta t \\ & + (1-f) \left[\left(\frac{1}{2} (\rho V)_n (\varphi_N^0 + \varphi_M^0) - \left(\Gamma_n \frac{(\varphi_N^0 - \varphi_M^0)}{(\delta y)_n} \right) \right) \Delta x - \left(\frac{1}{2} (\rho V)_s (\varphi_M^0 + \varphi_S^0) - \left(\Gamma_s \frac{(\varphi_M^0 - \varphi_S^0)}{(\delta y)_s} \right) \right) \Delta x \right] \Delta t \\ & = [f(S_M \varphi_M^1) + (1-f)(S_M \varphi_M^0) + S_C] \Delta x \Delta y \Delta t \quad (\text{III-30}) \end{aligned}$$

Dans notre étude, nous choisissons le schéma implicite.

L'équation (III-30) se réduit à :

$$\begin{aligned} & [(\rho\varphi)_M^1 - (\rho\varphi)_M^0] \Delta x \Delta y \\ & + \left[\left(\frac{1}{2} (\rho U)_e (\varphi_E^1 + \varphi_M^1) - \left(\Gamma_e \frac{(\varphi_E^1 - \varphi_M^1)}{(\delta x)_e} \right) \right) \Delta y - \left(\frac{1}{2} (\rho U)_o (\varphi_M^1 + \varphi_O^1) - \left(\Gamma_o \frac{(\varphi_M^1 - \varphi_O^1)}{(\delta x)_o} \right) \right) \Delta y \right] \Delta t \\ & + \left[\left(\frac{1}{2} (\rho V)_n (\varphi_N^1 + \varphi_M^1) - \left(\Gamma_n \frac{(\varphi_N^1 - \varphi_M^1)}{(\delta y)_n} \right) \right) \Delta x - \left(\frac{1}{2} (\rho V)_s (\varphi_M^1 + \varphi_S^1) - \left(\Gamma_s \frac{(\varphi_M^1 - \varphi_S^1)}{(\delta y)_s} \right) \right) \Delta x \right] \Delta t \\ & = [(S_M \varphi_M^1) + S_C] \Delta x \Delta y \Delta t \quad (\text{III-31}) \end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture, l'exposant 1 sera omis, on obtient :

$$\begin{aligned} & [(\rho\varphi)_M - (\rho\varphi)_M^0] \Delta x \Delta y \\ & + \left[\left(\frac{1}{2} (\rho U)_e (\varphi_E + \varphi_M) - \left(\Gamma_e \frac{(\varphi_E - \varphi_M)}{(\delta x)_e} \right) \right) \Delta y - \left(\frac{1}{2} (\rho U)_o (\varphi_M + \varphi_O) - \left(\Gamma_o \frac{(\varphi_M - \varphi_O)}{(\delta x)_o} \right) \right) \Delta y \right] \Delta t \\ & + \left[\left(\frac{1}{2} (\rho V)_n (\varphi_N + \varphi_M) - \left(\Gamma_n \frac{(\varphi_N - \varphi_M)}{(\delta y)_n} \right) \right) \Delta x - \left(\frac{1}{2} (\rho V)_s (\varphi_M + \varphi_S) - \left(\Gamma_s \frac{(\varphi_M - \varphi_S)}{(\delta y)_s} \right) \right) \Delta x \right] \Delta t \\ & = [(S_M \varphi_M) + S_C] \Delta x \Delta y \Delta t \quad (\text{III-32}) \end{aligned}$$

En réarrangeant l'équation (III-32), on trouve :

$$\begin{aligned}
& [(\rho\varphi)_M - (\rho\varphi)_M^0] \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \left[\frac{1}{2} (\rho U)_e \Delta y - \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e} \Delta y \right] \varphi_E - \left[\frac{1}{2} (\rho U)_o \Delta y + \frac{\Gamma_o}{(\delta x)_o} \Delta y \right] \varphi_O \\
& + \left[\frac{1}{2} (\rho V)_n \Delta x - \frac{\Gamma_n}{(\delta y)_n} \Delta x \right] \varphi_N - \left[\frac{1}{2} (\rho V)_s \Delta x + \frac{\Gamma_s}{(\delta y)_s} \Delta x \right] \varphi_S \\
& + \left[\left(\frac{1}{2} (\rho U)_e \Delta y + \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e} \Delta y \right) - \left(\frac{1}{2} (\rho U)_o \Delta y - \frac{\Gamma_o}{(\delta x)_o} \Delta y \right) \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{2} (\rho V)_n \Delta x + \frac{\Gamma_n}{(\delta y)_n} \Delta x \right) - \left(\frac{1}{2} (\rho V)_s \Delta x - \frac{\Gamma_s}{(\delta y)_s} \Delta x \right) \right] \varphi_M = [(S_M \varphi_M) + S_C] \Delta x \Delta y \quad (\text{III-33})
\end{aligned}$$

On définit les variables F et D représentant respectivement le flux massique convectif par unité de surface et la conductance de la diffusion (Patankar, 1980):

$$F_e = (\rho U)_e \Delta y \quad (\text{III-34})$$

$$F_o = (\rho U)_o \Delta y \quad (\text{III-35})$$

$$F_n = (\rho V)_n \Delta x \quad (\text{III-36})$$

$$F_s = (\rho V)_s \Delta x \quad (\text{III-37})$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e} \Delta y \quad (\text{III-38})$$

$$D_o = \frac{\Gamma_o}{(\delta x)_o} \Delta y \quad (\text{III-39})$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n}{(\delta y)_n} \Delta x \quad (\text{III-40})$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s}{(\delta y)_s} \Delta x \quad (\text{III-41})$$

En injectant ces expressions dans l'équation (III-33), on trouve :

$$\begin{aligned}
& [(\rho\varphi)_M - (\rho\varphi)_M^0] \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \left(\frac{F_e}{2} - D_e \right) \varphi_E - \left(\frac{F_o}{2} + D_o \right) \varphi_O + \left(\frac{F_n}{2} - D_n \right) \varphi_N - \left(\frac{F_s}{2} + D_s \right) \varphi_S \\
& + \left[\left(\frac{F_e}{2} + D_e \right) - \left(\frac{F_o}{2} - D_o \right) + \left(\frac{F_n}{2} + D_n \right) - \left(\frac{F_s}{2} - D_s \right) \right] \varphi_M = [(S_M \varphi_M) + S_C] \Delta x \Delta y \quad (\text{III-42})
\end{aligned}$$

Cette équation est équivalente à :

$$\begin{aligned}
& [(\rho\varphi)_M - (\rho\varphi)_M^0 + \rho_M^0 \varphi_M - \rho_M^0 \varphi_M] \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} - \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \varphi_E - \left(D_o + \frac{F_o}{2} \right) \varphi_O - \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right) \varphi_N \\
& - \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right) \varphi_S + \left[\left(D_e + \frac{F_e}{2} + F_e - F_e \right) + \left(D_o - \frac{F_o}{2} + F_o - F_o \right) + \left(D_n + \frac{F_n}{2} + F_n - F_n \right) \right.
\end{aligned}$$

$$+ \left(D_s - \frac{F_s}{2} + F_s - F_s \right) \left] \varphi_M = [(S_M \varphi_M) + S_C] \Delta x \Delta y \quad (\text{III-43})$$

En réarrangeant l'équation (III-44), il en résulte :

$$\begin{aligned} & \left[\rho_M^0 \varphi_M - (\rho \varphi)_M^0 \right] \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} - \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \varphi_E - \left(D_o + \frac{F_o}{2} \right) \varphi_O - \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right) \varphi_N \\ & - \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right) \varphi_S + \left[\left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) + \left(D_o + \frac{F_o}{2} \right) + \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right) + \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right) \right. \\ & \left. + \left(\rho_M - \rho_M^0 \right) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + F_e - F_o + F_n - F_s \right] \varphi_M = (S_M \varphi_M + S_C) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (\text{III-44})$$

On suppose :

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \quad (\text{III-45})$$

$$a_O = D_o + \frac{F_o}{2} \quad (\text{III-46})$$

$$a_N = D_n - \frac{F_n}{2} \quad (\text{III-47})$$

$$a_S = D_s + \frac{F_s}{2} \quad (\text{III-48})$$

En substituant les expressions (III-45) ÷ (III-48) dans l'équation (III-44), on trouve la relation suivante :

$$\begin{aligned} & \left[\rho_M^0 \varphi_M - (\rho \varphi)_M^0 \right] \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} - a_E \varphi_E - a_O \varphi_O - a_N \varphi_N - a_S \varphi_S \\ & + \left[a_E + a_O + a_N + a_S + \left(\rho_M - \rho_M^0 \right) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + F_e - F_o + F_n - F_s \right] \varphi_M = (S_M \varphi_M + S_C) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (\text{III-49})$$

En réarrangeant l'équation (III-49), il en résulte :

$$\begin{aligned} & \left[a_E + a_O + a_N + a_S + \rho_M^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} - S_M \Delta x \Delta y + \left(\rho_M - \rho_M^0 \right) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + F_e - F_o + F_n - F_s \right] \varphi_M \\ & = a_E \varphi_E + a_O \varphi_O + a_N \varphi_N + a_S \varphi_S + S_C \Delta x \Delta y + \rho_M^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \varphi_M^0 \end{aligned} \quad (\text{III-50})$$

On définit par :

$$a_M^0 = \rho_M^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (\text{III-51})$$

$$b = S_C \Delta x \Delta y + a_M^0 \varphi_M^0 \quad (\text{III-52})$$

$$a_M = a_E + a_O + a_N + a_S + a_M^0 - S_M \Delta x \Delta y + \left((\rho_M - \rho_M^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + F_e - F_o + F_n - F_s \right) \quad (\text{III-53})$$

En introduisant les relations (III-51), (III-52) et (III-53) dans l'expression (III-50), on trouve l'équation algébrique discrétisée par la méthode des volumes finis :

$$a_M \phi_M = a_E \phi_E + a_O \phi_O + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (\text{III-54})$$

Nous avons adopté la forme standard de l'équation (III-7) discrétisée par la méthode des volumes finis qui gouverne le phénomène de convection diffusion pour une géométrie bidimensionnelle et pour un régime d'écoulement non permanent.

Les coefficients a_M^0 , b et a_M sont exprimés par les relations (III-51), (III-52) et (III-53) respectivement.

Les coefficients a_E , a_O , a_N et a_S sont exprimés en fonction de nombre de Peclet par les expressions suivantes (Patankar, 1980):

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \max[-F_e, 0] \quad (\text{III-55})$$

$$a_O = D_o A(|P_o|) + \max[F_o, 0] \quad (\text{III-56})$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + \max[-F_n, 0] \quad (\text{III-57})$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + \max[F_s, 0] \quad (\text{III-58})$$

P_e, P_o, P_n et P_s : nombres de Peclet qui représentent le rapport local de la convection à la diffusion (Patankar, 1980).

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} = \frac{(\rho U)_e}{\frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e}} \quad (\text{III-59})$$

$$P_o = \frac{F_o}{D_o} = \frac{(\rho U)_o}{\frac{\Gamma_o}{(\delta x)_o}} \quad (\text{III-60})$$

$$P_n = \frac{F_n}{D_n} = \frac{(\rho V)_n}{\frac{\Gamma_n}{(\delta y)_n}} \quad (\text{III-61})$$

$$P_s = \frac{F_s}{D_s} = \frac{(\rho V)_s}{\frac{\Gamma_s}{(\delta y)_s}} \quad (\text{III-62})$$

Pour la détermination des différents coefficients aux interfaces, il y a lieu d'utiliser un schéma d'interpolation.

Les différents schémas d'interpolations sont exprimés en fonction de $A(|P|)$ dans le tableau suivant (Patankar, 1980) :

Tableau III.1 : La fonction A(|P|) pour différents schémas.

| | La fonction A(P) |
|--------------------------------|---------------------------|
| Schéma de différences centrées | $1-0.5 P $ |
| Schéma upwind | 1 |
| Schéma hybride | $\max[0, (1 - 0.5 P)]$ |
| Schéma de la loi de puissance | $\max[0, (1 - 0.1 P)^5]$ |

Le but de la partie suivante consiste à transformer le système d'équations différentielles (III-1) ÷ (III-5) en un système d'équations algébriques, qui sera représenté par l'équation algébrique standard (III-54).

III. Discrétisation des équations régissant l'écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers

1. Discrétisation de l'équation de continuité

En intégrant l'équation de continuité (III-1) sur le volume de contrôle, on trouve:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_o^e \int_s^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} \right) dz dy dx dt = 0 \quad (III-63)$$

En arrangeant l'équation (III-63), il en résulte :

$$\int_o^e \left[\int_s^n \left(\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dy \right] dx + \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_s^n \left(\int_o^e \frac{\partial \rho U}{\partial x} dx \right) dy \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_o^e \left(\int_s^n \frac{\partial \rho V}{\partial y} dy \right) dx \right] dt = 0 \quad (III-64)$$

L'équation (III-64), devient :

$$(\rho_M - \rho_M^0) \Delta t \int_s^n dy \int_o^e dx + \int_t^{t+\Delta t} \left[((\rho U)_e - (\rho U)_o) \int_s^n dy + ((\rho V)_n - (\rho V)_s) \int_o^e dx \right] dt = 0 \quad (III-65)$$

Par la suite, on a :

$$(\rho_M - \rho_M^0) \Delta y \Delta x + \int_t^{t+\Delta t} [((\rho U)_e - (\rho U)_o) \Delta y + ((\rho V)_n - (\rho V)_s) \Delta x] dt = 0 \quad (III-66)$$

L'intégration de différents termes de l'équation (III-66) sur le volume de contrôle conduit à :

$$(\rho_M - \rho_M^0) \Delta y \Delta x + [(\rho U)_e \Delta y - (\rho U)_o \Delta y + (\rho V)_n \Delta x - (\rho V)_s \Delta x] \Delta t = 0 \quad (III-67)$$

Après réarrangement de l'équation (III-67), on obtient :

$$(\rho_M - \rho_M^0) \frac{\Delta y \Delta x}{\Delta t} + (\rho U)_e \Delta y - (\rho U)_o \Delta y + (\rho V)_n \Delta x - (\rho V)_s \Delta x = 0 \quad (III-68)$$

En injectant les expressions (III-34) ÷ (III-37) dans l'équation (III-68), on trouve :

$$(\rho_M - \rho_M^0) \frac{\Delta y \Delta x}{\Delta t} + F_e - F_o + F_n - F_s = 0 \quad (\text{III-69})$$

En multipliant l'équation (III-69) par φ_M , on aboutit à l'expression suivante :

$$(\rho_M \varphi_M - \rho_M^0 \varphi_M) \frac{\Delta y \Delta x}{\Delta t} + F_e \varphi_M - F_o \varphi_M + F_n \varphi_M - F_s \varphi_M = 0 \quad (\text{III-70})$$

En tenant compte l'équation de continuité discrétisée par la méthode des volumes finis, le terme a_M de l'équation algébrique (III-54) devient :

$$a_M = a_E + a_O + a_N + a_S + a_M^0 - S_M \Delta x \Delta y \quad (\text{III-71})$$

2. Equations du mouvement moyen

Considérons une variable φ pouvant prendre soit les valeurs U , V , k et ε .

a. Suivant la direction x

Dans la direction x , la vitesse U est calculée au milieu des faces normales de la direction x (Figure III.2). Le volume de contrôle de la composante longitudinale U est décalé suivant la direction x par rapport au volume de contrôle principale. Ce volume de contrôle est montré dans la figure III.2 (Patankar, 1980).

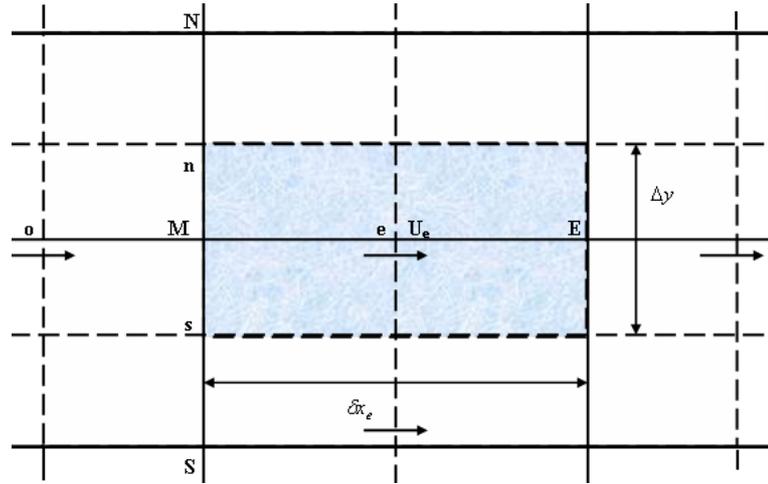


Figure III.2 : Volume de contrôle pour la composante U (Patankar, 1980).

Si on remplace U par φ dans l'équation (III-2), on trouve :

$$\frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho U \varphi - (\mu + 2\mu_t) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho V \varphi - (\mu + \mu_t) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_t \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k}{\partial x} \quad (\text{III-72})$$

On introduit les expressions suivantes :

$$J_x^U = \rho U \varphi - (\mu + 2\mu_t) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{III-73})$$

$$J_y^U = \rho V \varphi - (\mu + \mu_t) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (\text{III-74})$$

$$S^U = \rho g \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_t \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k}{\partial x} \quad (\text{III-75})$$

où, J_x^U, J_y^U : Sont les flux totaux de convection et de diffusion dans la direction x et y et S^U : Terme de source.

En remplaçant les expressions (III-73), (III-74) et (III-75) dans l'équation (III-72), on aboutit à :

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial J_x^U}{\partial x} + \frac{\partial J_y^U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + S^U \quad (\text{III-76})$$

On intègre l'équation (III-76) sur le volume de contrôle et entre t et $t + \Delta t$, on obtient :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^{n_e} \left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial J_x^U}{\partial x} + \frac{\partial J_y^U}{\partial y} \right) dx dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^{n_e} \left(-\frac{\partial P}{\partial x} + S^U \right) dx dy dt \quad (\text{III-77})$$

En arrangeant l'équation (III-77), on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{s_o}^{n_e} \left(\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dt \right) dx dy + \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_{s_o}^{n_e} \left(\frac{\partial J_x^U}{\partial x} \right) dx \right] dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_{s_o}^{n_e} \left(\frac{\partial J_y^U}{\partial y} \right) dy \right] dx dt \\ & = \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_{s_o}^{n_e} -\frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^{n_e} S^U dx dy dt \end{aligned} \quad (\text{III-78})$$

L'équation (III-78) sera de la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \left((\rho \phi)_M - (\rho \phi)_M^0 \right) \int_{s_o}^{n_e} dx \int dy + \int_t^{t+\Delta t} \left[\left((J_x^U)_e - (J_x^U)_o \right) \int_{s_o}^{n_e} dy \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[\left((J_y^U)_n - (J_y^U)_s \right) \int_{s_o}^{n_e} dx \right] dt \\ & = \int_t^{t+\Delta t} \left[- (P_e - P_o) \int_{s_o}^{n_e} dy \right] + S^U \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^{n_e} dx dy dt \end{aligned} \quad (\text{III-79})$$

D'après la relation (III-27), le terme source est donnée par l'expression suivante :

$$S^U = S_M^U \phi_M + S_C^U \quad (\text{III-80})$$

On remplace le terme source par leur expression (III-80) dans l'équation (III-79), on trouve :

$$\begin{aligned} & \left((\rho \phi)_M - (\rho \phi)_M^0 \right) \Delta x \Delta y + \left((J_x^U)_e \Delta y - (J_x^U)_o \Delta y \right) \Delta t + \left((J_y^U)_n \Delta x - (J_y^U)_s \Delta x \right) \Delta t = - (P_e - P_o) \Delta y \Delta t \\ & + \left(S_M^U \phi_M + S_C^U \right) \Delta x \Delta y \Delta t \end{aligned} \quad (\text{III-81})$$

En posant que (Patankar, 1980) :

$$J_e^U = (J_x^U)_e \Delta y \quad (\text{III-82})$$

$$J_o^U = (J_x^U)_o \Delta y \quad (\text{III-83})$$

$$J_n^U = \left(J_y^U \right)_n \Delta x \quad (\text{III-84})$$

$$J_s^U = \left(J_y^U \right)_s \Delta x \quad (\text{III-85})$$

En remplaçant les formules (III-82) ÷ (III-85) dans l'équation (III-81), il en résulte:

$$\left((\rho\varphi)_M - (\rho\varphi)_M^0 \right) \Delta x \Delta y + \left(J_e^U - J_o^U \right) \Delta t + \left(J_n^U - J_s^U \right) \Delta t = -(P_e - P_o) \Delta y \Delta t + \left(S_M^U \varphi_M + S_C^U \right) \Delta x \Delta y \Delta t \quad (\text{III-86})$$

En multipliant l'équation (III-86) par $\frac{1}{\Delta t}$, on trouve :

$$\left((\rho\varphi)_M - (\rho\varphi)_M^0 \right) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \left(J_e^U - J_o^U \right) + \left(J_n^U - J_s^U \right) = -(P_e - P_o) \Delta y + \left(S_M^U \varphi_M + S_C^U \right) \Delta x \Delta y \quad (\text{III-87})$$

On retranche l'équation (III-70) de l'équation (III-87), on obtient :

$$\left(\rho_M^0 \varphi_M - (\rho\varphi)_M^0 \right) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \left(J_e^U - F_e \varphi_M \right) - \left(J_o^U - F_o \varphi_M \right) + \left(J_n^U - F_n \varphi_M \right) - \left(J_s^U - F_s \varphi_M \right) = -(P_e - P_o) \Delta y + \left(S_M^U \varphi_M + S_C^U \right) \Delta x \Delta y \quad (\text{III-88})$$

On définit selon Patankar les relations suivantes (Patankar, 1980) :

$$\left(J_e^U - F_e \varphi_M \right) = a_E^U (\varphi_M - \varphi_E) \quad (\text{III-89})$$

$$\left(J_o^U - F_o \varphi_M \right) = a_O^U (\varphi_O - \varphi_M) \quad (\text{III-90})$$

$$\left(J_n^U - F_n \varphi_M \right) = a_N^U (\varphi_M - \varphi_N) \quad (\text{III-91})$$

$$\left(J_s^U - F_s \varphi_M \right) = a_S^U (\varphi_S - \varphi_M) \quad (\text{III-92})$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation (III-88), on aboutit à :

$$\left(\rho_M^0 \varphi_M - (\rho\varphi)_M^0 \right) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + a_E^U (\varphi_M - \varphi_E) - a_O^U (\varphi_O - \varphi_M) + a_N^U (\varphi_M - \varphi_N) - a_S^U (\varphi_S - \varphi_M) = -(P_e - P_o) \Delta y + \left(S_M^U \varphi_M + S_C^U \right) \Delta x \Delta y \quad (\text{III-93})$$

Après réarrangement de l'équation (III-93), on obtient la relation suivante :

$$\left(\rho_M^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + a_E^U + a_O^U + a_N^U + a_S^U - S_M^U \Delta x \Delta y \right) \varphi_M = a_E^U \varphi_E + a_O^U \varphi_O + a_N^U \varphi_N + a_S^U \varphi_S + S_C^U \Delta x \Delta y + \rho_M^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \varphi_M^0 - (P_e - P_o) \Delta y \quad (\text{III-94})$$

En tenant compte les relations (III-51), (III-52) et (III-71), on définit les relations suivantes :

$$a_M^{U0} = \rho_M^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (\text{III-95})$$

$$a_M^U = a_M^{U0} + a_E^U + a_O^U + a_N^U + a_S^U - S_M^U \Delta x \Delta y \quad (\text{III-96})$$

$$b^U = S_C^U \Delta x \Delta y + \phi_M^0 a_M^U \quad (\text{III-97})$$

Par suite, l'équation de quantité de mouvement suivant la direction x devient :

$$a_M^U \phi_M = a_E^U \phi_E + a_O^U \phi_O + a_N^U \phi_N + a_S^U \phi_S + b^U + (P_o - P_e) \Delta y \quad (\text{III-98})$$

b. Suivant la direction y

Dans la direction y, la vitesse V est calculée au milieu des faces transversales de la direction y (Figure III.3). Le volume de contrôle de la composante transversale V est décalé suivant la direction y par rapport au volume de contrôle principale. Ce volume de contrôle est montré dans la figure III.3 (Patankar, 1980).

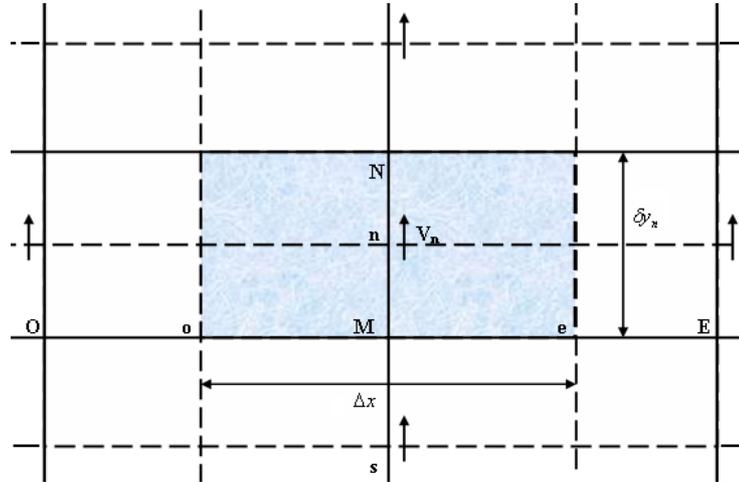


Figure III.3 : Volume de contrôle pour la composante V (Patankar, 1980).

Remplaçons dans l'équation (III-3) V par ϕ , ce qui donne :

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho U \phi - (\mu + \mu_t) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho V \phi - (\mu + 2\mu_t) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_t \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k}{\partial y} \quad (\text{III-99})$$

On définit le flux total de convection et de diffusion suivant les deux directions x et y, par les expressions suivantes :

$$J_x^V = \rho U \phi - (\mu + \mu_t) \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (\text{III-100})$$

$$J_y^V = \rho V \phi - (\mu + 2\mu_t) \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (\text{III-101})$$

On définit le terme de source par la relation suivante :

$$S^V = -\rho g \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_t \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k}{\partial y} \quad (\text{III-102})$$

En remplaçant J_x^V , J_y^V et S^V par leurs formules (III-100), (III-101) et (III-102) dans l'équation (III-99), on aboutit à :

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial J_x^V}{\partial x} + \frac{\partial J_y^V}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + S^V \quad (\text{III-103})$$

En intégrant l'équation (III-103) sur le volume de contrôle, on obtient :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^n \int \left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial J_x^V}{\partial x} + \frac{\partial J_y^V}{\partial y} \right) dx dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^n \int \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + S^V \right) dx dy dt \quad (\text{III-104})$$

D'après la relation (III-27), le terme source est exprimé par :

$$S^V = S_M^V \phi_M + S_C^V \quad (\text{III-105})$$

En remplaçant S^V par leur expression dans l'équation (III-104), après réarrangement de cette équation, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^n \left(\int \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dt \right) dx dy + \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_{s_o}^n \left(\int \frac{\partial J_x^V}{\partial x} dx \right) dy \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_{s_o}^n \left(\int \frac{\partial J_y^V}{\partial y} dy \right) dx \right] dt \\ & = \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^n \left(\int -\frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^n \left(S_M^V \phi_M + S_C^V \right) dx dy dt \end{aligned} \quad (\text{III-106})$$

Par la suite, on a :

$$\begin{aligned} & \left((\rho \phi)_M - (\rho \phi)_M^0 \right) \int_{s_o}^n dx \int dy + \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(J_x^V \right)_e - \left(J_x^V \right)_o \right] \int dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(J_y^V \right)_n - \left(J_y^V \right)_s \right] \int dx dt \\ & = \int_t^{t+\Delta t} \left[- (P_n - P_s) \int_{s_o}^n dx \right] dt \\ & + \left(S_M^V \phi_M + S_C^V \right) \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^n dx dy dt \end{aligned} \quad (\text{III-107})$$

L'intégration de cette équation sur le volume de contrôle conduit à :

$$\begin{aligned} & \left((\rho \phi)_M - (\rho \phi)_M^0 \right) \Delta x \Delta y + \left(\left(J_x^V \right)_e \Delta y - \left(J_x^V \right)_o \Delta y \right) \Delta t + \left(\left(J_y^V \right)_n \Delta x - \left(J_y^V \right)_s \Delta x \right) \Delta t = - (P_n - P_s) \Delta x \Delta t \\ & + \left(S_M^V \phi_M + S_C^V \right) \Delta x \Delta y \Delta t \end{aligned} \quad (\text{III-108})$$

En posant que (Patankar, 1980) :

$$J_e^V = \left(J_x^V \right)_e \Delta y \quad (\text{III-109})$$

$$J_o^V = \left(J_x^V \right)_o \Delta y \quad (\text{III-110})$$

$$J_n^V = \left(J_y^V \right)_n \Delta x \quad (\text{III-111})$$

$$J_s^V = \left(J_y^V \right)_s \Delta x \quad (\text{III-112})$$

On injecte les expressions (III-109), (III-110), (III-111) et (III-112) dans l'équation (III-108), il en résulte :

$$\begin{aligned} & \left((\rho \phi)_M - (\rho \phi)_M^0 \right) \Delta x \Delta y + \left(J_e^V - J_o^V \right) \Delta t + \left(J_n^V - J_s^V \right) \Delta t = - (P_n - P_s) \Delta x \Delta t + \left(S_M^V \phi_M + S_C^V \right) \Delta x \Delta y \Delta t \end{aligned} \quad (\text{III-113})$$

En soustrayant l'équation (III-70) de l'équation (III-113), on trouve :

$$\begin{aligned} & (\rho_M^0 \varphi_M - \rho_M^0 \varphi_M^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + (J_e^V - F_e \varphi_M) - (J_o^V - F_o \varphi_M) + (J_n^V - F_n \varphi_M) - (J_s^V - F_s \varphi_M) = -(P_n - P_s) \Delta x \\ & + (S_M^V \varphi_M + S_C^V) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (III-114)$$

On définit selon Patankar les relations suivantes (Patankar, 1989) :

$$(J_e^V - F_e \varphi_M) = a_E^V (\varphi_M - \varphi_E) \quad (III-115)$$

$$(J_o^V - F_o \varphi_M) = a_O^V (\varphi_O - \varphi_M) \quad (III-116)$$

$$(J_n^V - F_n \varphi_M) = a_N^V (\varphi_M - \varphi_N) \quad (III-117)$$

$$(J_s^V - F_s \varphi_M) = a_S^V (\varphi_S - \varphi_M) \quad (III-118)$$

On remplace les expressions (III-115), (III-116), (III-117) et (III-118) dans l'expression (III-114), on obtient :

$$\begin{aligned} & (\rho_M^0 \varphi_M - \rho_M^0 \varphi_M^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + a_E^V (\varphi_M - \varphi_E) - a_O^V (\varphi_O - \varphi_M) + a_N^V (\varphi_M - \varphi_N) - a_S^V (\varphi_S - \varphi_M) \\ & = -(P_n - P_s) \Delta x + (S_M^V \varphi_M + S_C^V) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (III-119)$$

On arrangeant cette équation, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(\rho_M^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + a_E^V + a_O^V + a_N^V + a_S^V - S_M^V \Delta x \Delta y \right) \varphi_M = a_E^V \varphi_E + a_O^V \varphi_O + a_N^V \varphi_N + a_S^V \varphi_S + S_C^V \Delta x \Delta y \\ & + \varphi_M^0 \rho_M^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} - (P_n - P_s) \Delta x \end{aligned} \quad (III-120)$$

En tenant compte les relations (III-51), (III-52) et (III-71), on définit les expressions suivantes :

$$a_M^{V0} = \rho_M^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (III-121)$$

$$a_M^V = a_M^{V0} + a_E^V + a_O^V + a_N^V + a_S^V - S_M^V \Delta x \Delta y$$

$$b^V = S_C^V \Delta x \Delta y + \varphi_M^0 a_M^{V0} \quad (III-122)$$

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction y sur le volume de contrôle conduit à :

$$a_M^V \varphi_M = a_E^V \varphi_E + a_O^V \varphi_O + a_N^V \varphi_N + a_S^V \varphi_S + b^V + (P_s - P_n) \Delta x \quad (III-123)$$

3. Modèle k-ε

Le volume de contrôle est représenté par la figure III.1.

a. Equation de l'énergie cinétique turbulente k

On remplace dans l'équation (III-4) k par φ, on aboutit à :

$$\frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho U \varphi - \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho V \varphi - \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = \mu_t \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] - \rho \varepsilon \quad (\text{III-124})$$

On définit le flux total de convection et de diffusion par les relations suivantes :

$$J_x^k = \rho U \varphi - \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{III-125})$$

$$J_y^k = \rho V \varphi - \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (\text{III-126})$$

Le terme de source est donné par l'expression suivante :

$$S^k = \mu_t \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] - \rho \varepsilon \quad (\text{III-127})$$

L'équation (III-124) se simplifie et s'écrit à :

$$\frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \frac{\partial J_x^k}{\partial x} + \frac{\partial J_y^k}{\partial y} = S^k \quad (\text{III-128})$$

En intégrant l'équation (III-128) sur le volume de contrôle, on trouve :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^{n_e} \left(\frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \frac{\partial J_x^k}{\partial x} + \frac{\partial J_y^k}{\partial y} \right) dx dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^{n_e} (S^k) dx dy dt \quad (\text{III-129})$$

D'après la relation (III-27), le terme source est exprimé par :

$$S^k = S_M^k \varphi_M + S_C^k \quad (\text{III-130})$$

Après réarrangement de cette équation, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{s_o}^{n_e} \left(\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} dt \right) dx dy + \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_{s_o}^{n_e} \left(\int_o^n \frac{\partial J_x^k}{\partial x} dx \right) dy \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_o^n \left(\int_{s_o}^e \frac{\partial J_y^k}{\partial y} dy \right) dx \right] dt \\ & = \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^{n_e} (S_M^k \varphi_M + S_C^k) dx dy dt \end{aligned} \quad (\text{III-131})$$

L'équation (III-131) devient :

$$\begin{aligned} & ((\rho \varphi)_M - (\rho \varphi)_M^0) \int_o^n dx \int_s^e dy + \int_t^{t+\Delta t} \left[\left((J_x^k)_e - (J_x^k)_o \right) \int_s^n dy \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[\left((J_y^k)_n - (J_y^k)_s \right) \int_o^e dx \right] dt \\ & + (S_M^k \varphi_M + S_C^k) \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_o^e dy dx \end{aligned} \quad (\text{III-132})$$

L'équation (III-132) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left((\rho\varphi)_M - (\rho\varphi)_M^0\right)\Delta x\Delta y + \left(\left(J_x^k\right)_e \Delta y - \left(J_x^k\right)_o \Delta y\right)\Delta t + \left(\left(J_y^k\right)_n \Delta x - \left(J_y^k\right)_s \Delta x\right)\Delta t = \left(S_M^k\varphi_M + S_C^k\right)\Delta x\Delta y\Delta t \quad (\text{III-133})$$

En posant que (Patankar, 1980) :

$$J_e^k = \left(J_x^k\right)_e \Delta y \quad (\text{III-134})$$

$$J_o^k = \left(J_x^k\right)_o \Delta y \quad (\text{III-135})$$

$$J_n^k = \left(J_y^k\right)_n \Delta x \quad (\text{III-136})$$

$$J_s^k = \left(J_y^k\right)_s \Delta x \quad (\text{III-137})$$

En remplaçant les relations (III-134), (III-135), (III-136) et (III-137) dans l'équation (III-133), on trouve :

$$\left((\rho\varphi)_M - (\rho\varphi)_M^0\right)\Delta x\Delta y + \left(J_e^k - J_o^k\right)\Delta t + \left(J_n^k - J_s^k\right)\Delta t = \left(S_M^k\varphi_M + S_C^k\right)\Delta x\Delta y\Delta t \quad (\text{III-138})$$

En multipliant l'équation (III-138) par $\frac{1}{\Delta t}$, il en résulte :

$$\left((\rho\varphi)_M - (\rho\varphi)_M^0\right)\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t} + \left(J_e^k - J_o^k\right) + \left(J_n^k - J_s^k\right) = \left(S_M^k\varphi_M + S_C^k\right)\Delta x\Delta y \quad (\text{III-139})$$

En soustrayant l'équation (III-70) de l'équation (III-139), on aboutit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & \left(\rho_M^0\varphi_M - \rho_M^0\varphi_M^0\right)\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t} + \left(J_e^k - F_e\varphi_M\right) - \left(J_o^k - F_o\varphi_M\right) + \left(J_n^k - F_n\varphi_M\right) - \left(J_s^k - F_s\varphi_M\right) \\ & = \left(S_M^k\varphi_M + S_C^k\right)\Delta x\Delta y \end{aligned} \quad (\text{III-140})$$

On définit selon Patankar les relations suivantes (Patankar, 1980) :

$$\left(J_e^k - F_e\varphi_M\right) = a_E^k(\varphi_M - \varphi_E) \quad (\text{III-141})$$

$$\left(J_o^k - F_o\varphi_M\right) = a_O^k(\varphi_O - \varphi_M) \quad (\text{III-142})$$

$$\left(J_n^k - F_n\varphi_M\right) = a_N^k(\varphi_M - \varphi_N) \quad (\text{III-143})$$

$$\left(J_s^k - F_s\varphi_M\right) = a_S^k(\varphi_S - \varphi_M) \quad (\text{III-144})$$

On injecte les expressions (III-141), (III-142), (III-143) et (III-144) dans l'équation (III-140), on trouve (Patankar, 1980) :

$$\begin{aligned} & \left(\rho_M^0\varphi_M - \rho_M^0\varphi_M^0\right)\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t} + a_E^k(\varphi_M - \varphi_E) - a_O^k(\varphi_O - \varphi_M) + a_N^k(\varphi_M - \varphi_N) - a_S^k(\varphi_S - \varphi_M) \\ & = \left(S_M^k\varphi_M + S_C^k\right)\Delta x\Delta y \end{aligned} \quad (\text{III-145})$$

En arrangeant cette équation, on obtient l'expression suivante :

$$\left(\rho_M^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + a_E^k + a_O^k + a_N^k + a_S^k - S_M^k \Delta x \Delta y \right) \varphi_M = a_E^k \varphi_E + a_O^k \varphi_O + a_N^k \varphi_N + a_S^k \varphi_S + S_C^k \Delta x \Delta y + \varphi_M^0 \rho_M^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (\text{III-146})$$

En tenant compte les relations (III-51), (III-52) et (III-71), on présente les expressions suivantes :

$$a_M^{k0} = \rho_M^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (\text{III-147})$$

$$a_M^k = a_M^{k0} + a_E^k + a_O^k + a_N^k + a_S^k - S_M^k \Delta x \Delta y \quad (\text{III-148})$$

$$b^k = S_C^k \Delta x \Delta y + \varphi_M^0 a_M^{k0} \quad (\text{III-149})$$

L'équation (III-146) se simplifier à (Patankar, 1980):

$$a_M^k \varphi_M = a_E^k \varphi_E + a_O^k \varphi_O + a_N^k \varphi_N + a_S^k \varphi_S + b^k \quad (\text{III-150})$$

b. Equation de taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente

Remplaçons dans l'équation (III-5) ε par φ , on obtient :

$$\frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho U \varphi - \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho V \varphi - \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = C_{\varepsilon 1} C_\mu \rho k \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{III-151})$$

On introduit les expressions suivantes :

$$J_x^\varepsilon = \rho U \varphi - \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{III-152})$$

$$J_y^\varepsilon = \rho V \varphi - \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (\text{III-153})$$

$$S^\varepsilon = C_{\varepsilon 1} C_\mu \rho k \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{III-154})$$

On injecte ces relations dans l'équation (III-151), on trouve :

$$\frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \frac{\partial J_x^\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial J_y^\varepsilon}{\partial y} = S^\varepsilon \quad (\text{III-155})$$

On suit les mêmes démarches que pour l'équation (III-128), on trouve :

$$a_M^\varepsilon \varphi_M = a_E^\varepsilon \varphi_E + a_O^\varepsilon \varphi_O + a_N^\varepsilon \varphi_N + a_S^\varepsilon \varphi_S + b^\varepsilon \quad (\text{III-156})$$

En tenant compte les relations (III-51), (III-52) et (III-70), on présente les relations suivantes :

$$a_M^{\varepsilon 0} = \rho_M^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (\text{III-157})$$

$$a_M^\varepsilon = a_M^{\varepsilon 0} + a_E^\varepsilon + a_O^\varepsilon + a_N^\varepsilon + a_S^\varepsilon - S_M^\varepsilon \Delta x \Delta y \quad (\text{III-158})$$

$$b^\varepsilon = S_C^\varepsilon \Delta x \Delta y + \varphi_M^0 a_M^{\varepsilon 0} \quad (\text{III-159})$$

4. Discrétisation des termes sources pour différentes équations de transport

a. Equation du mouvement moyen

- *Suivant la direction x*

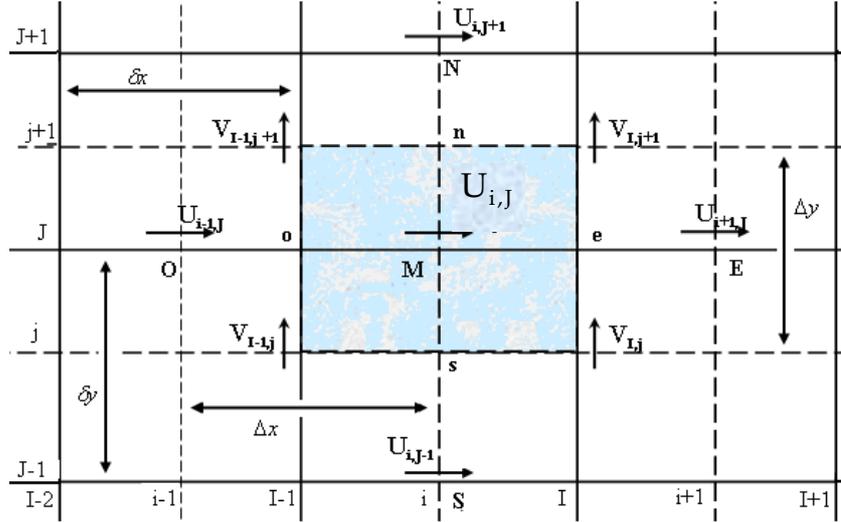


Figure III.4 : Maillage décalé utilisé pour la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction x (Patankar, 1980).

$$S_M^U = \rho g \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_t \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k}{\partial x} = S_M^U \varphi_M + S_C^U \quad (\text{avec } \varphi_M = U)$$

$$S_M^U = 0$$

$$S_C^U = \rho g \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_t \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k}{\partial x}$$

$$S_C^U = \rho g \sin \alpha + \frac{\left[\mu_t \frac{\partial V}{\partial x} \right]_{\text{face-n}} - \left[\mu_t \frac{\partial V}{\partial x} \right]_{\text{face-s}}}{\Delta y} - \frac{2}{3} \frac{(\rho k)_e - (\rho k)_o}{\delta x}$$

$$S_C^U = \rho g \sin \alpha + \frac{\left[(\mu_t)_{\text{face-n}} \left(\frac{V_{I,j+1} - V_{I-1,j+1}}{\delta x} \right) \right] - \left[(\mu_t)_{\text{face-s}} \left(\frac{V_{I,j} - V_{I-1,j}}{\delta x} \right) \right]}{\Delta y} - \frac{2}{3} \frac{\rho_{I-1,J} k_{I-1,J} - \rho_{I,J} k_{I,J}}{\delta x}$$

(III-160)

- Suivant la direction y

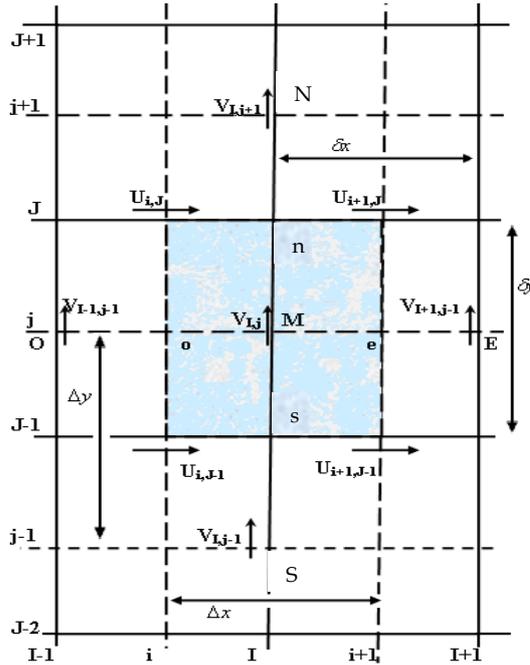


Figure III.5 : Maillage décalé utilisé pour la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction y (Patankar, 1980).

$$S^V = -\rho g \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_t \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k}{\partial y} = S_M^V \phi_M + S_C^V \quad (\text{avec } \phi_M = V)$$

$$S_M^V = 0$$

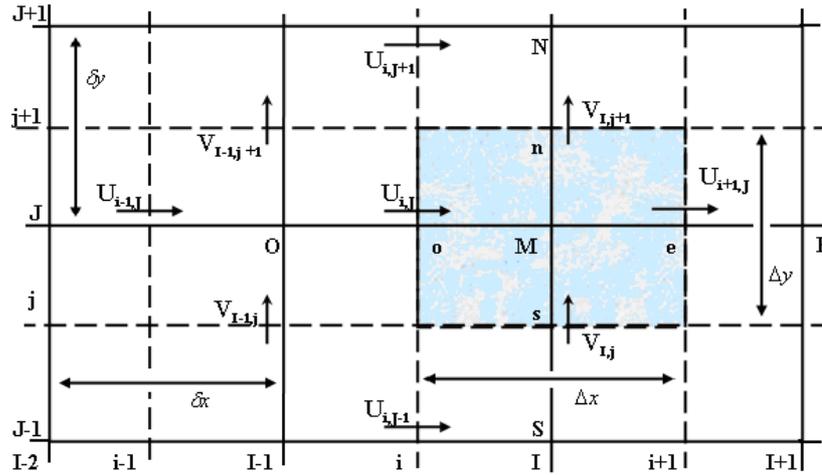
$$S_C^V = -\rho g \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_t \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k}{\partial y}$$

$$S_C^V = -\rho g \cos \alpha + \frac{\left(\mu_t \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{\text{face-e}} - \left(\mu_t \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{\text{face-o}}}{\Delta x} - \frac{2}{3} \frac{((\rho k)_n - (\rho k)_s)}{\delta y}$$

$$S_C^V = -\rho g \cos \alpha + \frac{\left[(\mu_t)_{\text{face-e}} \left(\frac{U_{i+1,J} - U_{i+1,J-1}}{\delta y} \right) \right] - \left[(\mu_t)_{\text{face-o}} \left(\frac{U_{i,J} - U_{i,J-1}}{\delta y} \right) \right]}{\Delta x} - \frac{2}{3} \frac{(\rho k)_n - (\rho k)_s}{\delta y}$$

$$S_C^V = -\rho g \cos \alpha + \frac{\left[(\mu_t)_{\text{face-e}} \left(\frac{U_{i+1,J} - U_{i+1,J-1}}{\delta y} \right) \right] - \left[(\mu_t)_{\text{face-o}} \left(\frac{U_{i,J} - U_{i,J-1}}{\delta y} \right) \right]}{\Delta x} - \frac{2}{3} \frac{\rho_{1,J} k_{1,J} - \rho_{1,J-1} k_{1,J-1}}{\delta y}$$

(III-161)

b. Modèle $k-\varepsilon$ **Figure III.6 :** Maillage décalé utilisé pour la discrétisation des équations k et ε .• *Equation de k*

$$S^k = \mu_t \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] - \rho \varepsilon = S_M^k \varphi_M + S_C^k \quad (\text{avec } \varphi_M = k)$$

$$S_M^k = 0$$

$$S_C^k = \mu_t \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] - \rho \varepsilon$$

$$S_C^k = (\mu_t)_{I,J} \left[2 \left(\frac{U_{i+1,J} - U_{i,J}}{\Delta x} \right)^2 + 2 \left(\frac{V_{I,j+1} - V_{I,j}}{\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{U_{i,J+1} - U_{i,J-1}}{2(\delta y)} + \frac{V_{I+1,j} - V_{I-1,j}}{2(\delta x)} \right)^2 \right] - \rho_{I,J} \varepsilon_{I,J} \quad (\text{III-162})$$

• *Equation de ε*

$$S^\varepsilon = C_{\varepsilon 1} C_\mu \rho k \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] - \left(C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon}{k} \right) \varepsilon = S_M^\varepsilon \varphi_M + S_C^\varepsilon$$

(avec $\varphi_M = \varepsilon$)

$$S_M^\varepsilon = -C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon_{I,J}}{k_{I,J}}$$

$$S_C^\varepsilon = C_{\varepsilon 1} C_\mu \rho k_{I,J} \left[2 \left(\frac{U_{i+1,J} - U_{i,J}}{\Delta x} \right)^2 + 2 \left(\frac{V_{I,j+1} - V_{I,j}}{\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{U_{i,J+1} - U_{i,J-1}}{2(\delta y)} + \frac{V_{I+1,j} - V_{I-1,j}}{2(\delta x)} \right)^2 \right]$$

(III-163)

Le modèle numérique de l'écoulement turbulent à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers est donné par les relations suivantes :

$$\left(\rho_M - \rho_M^0 \right) \frac{\Delta y \Delta x}{\Delta t} + (\rho U)_e \Delta y - (\rho U)_o \Delta y + (\rho V)_n \Delta x - (\rho V)_s \Delta x = 0 \quad \text{(III-164)}$$

$$a_M^U U_M = a_E^U U_E + a_O^U U_O + a_N^U U_N + a_S^U U_S + b^U + (P_o - P_e) \Delta y \quad \text{(III-165)}$$

$$a_M^V V_M = a_E^V V_E + a_O^V V_O + a_N^V V_N + a_S^V V_S + b^V + (P_s - P_n) \Delta x \quad \text{(III-166)}$$

$$a_M^k k_M = a_E^k k_E + a_O^k k_O + a_N^k k_N + a_S^k k_S + b^k \quad \text{(III-167)}$$

$$a_M^\varepsilon \varepsilon_M = a_E^\varepsilon \varepsilon_E + a_O^\varepsilon \varepsilon_O + a_N^\varepsilon \varepsilon_N + a_S^\varepsilon \varepsilon_S + b^\varepsilon \quad \text{(III-168)}$$

On définit le flux massique convectif par unité de surface par les relations dans le tableau suivant :

Tableau III.2 : Termes de flux massique convectif par unité de surface

| Equation du mouvement moyen | | | | |
|-----------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|
| Suivant la direction x | $F_o^U = (\rho U \Delta y)_o$ | $F_e^U = (\rho U \Delta y)_e$ | $F_s^U = (\rho V \delta x)_s$ | $F_n^U = (\rho V \delta x)_n$ |
| Suivant la direction y | $F_o^V = (\rho U \delta y)_o$ | $F_e^V = (\rho U \delta y)_e$ | $F_s^V = (\rho V \Delta x)_s$ | $F_n^V = (\rho V \Delta x)_n$ |
| Modèle de k-ε | | | | |
| Equation de k | $F_o^k = (\rho U \Delta y)_o$ | $F_e^k = (\rho U \Delta y)_e$ | $F_s^k = (\rho V \Delta x)_s$ | $F_n^k = (\rho V \Delta x)_n$ |
| Equation de ε | $F_o^\varepsilon = (\rho U \Delta y)_o$ | $F_e^\varepsilon = (\rho U \Delta y)_e$ | $F_s^\varepsilon = (\rho V \Delta x)_s$ | $F_n^\varepsilon = (\rho V \Delta x)_n$ |

On définit les conductances de la diffusion par les expressions dans le tableau suivant :

Tableau III.3 : Termes de conductance de la diffusion.

| Equation du mouvement moyen suivant la direction x | | | |
|---------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $D_o^U = \left((\mu + 2\mu_t) \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_o$ | $D_e^U = \left((\mu + 2\mu_t) \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_e$ | $D_s^U = \left((\mu + \mu_t) \frac{\delta x}{\delta y} \right)_s$ | $D_n^U = \left((\mu + \mu_t) \frac{\delta x}{\delta y} \right)_n$ |
| Equation du mouvement moyen suivant la direction y | | | |
| $D_o^V = \left((\mu + \mu_t) \frac{\delta y}{\delta x} \right)_o$ | $D_e^V = \left((\mu + \mu_t) \frac{\delta y}{\delta x} \right)_e$ | $D_s^V = \left((\mu + 2\mu_t) \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)_s$ | $D_n^V = \left((\mu + 2\mu_t) \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)_n$ |
| Equation de k | | | |

| | | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| $D_o^k = \left(\frac{\mu_t \Delta y}{\sigma_k \delta x} \right)_o$ | $D_e^k = \left(\frac{\mu_t \Delta y}{\sigma_k \delta x} \right)_e$ | $D_s^k = \left(\frac{\mu_t \Delta x}{\sigma_k \delta y} \right)_s$ | $D_n^k = \left(\frac{\mu_t \Delta x}{\sigma_k \delta y} \right)_n$ |
| Equation de ε | | | |
| $D_o^\varepsilon = \left(\frac{\mu_t \Delta y}{\sigma_\varepsilon \delta x} \right)_o$ | $D_e^\varepsilon = \left(\frac{\mu_t \Delta y}{\sigma_\varepsilon \delta x} \right)_e$ | $D_s^\varepsilon = \left(\frac{\mu_t \Delta x}{\sigma_\varepsilon \delta y} \right)_s$ | $D_n^\varepsilon = \left(\frac{\mu_t \Delta x}{\sigma_\varepsilon \delta y} \right)_n$ |

On définit les termes de nombre de Peclet qui représente le rapport local de la convection à la diffusion par les relations suivantes dans le tableau suivant :

Tableau III.4 : Termes de nombre de Peclet.

| | | | |
|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| Equation du mouvement moyen suivant la direction x | | | |
| $P_o^U = \left(\frac{\rho U \Delta x}{(\mu + 2\mu_t)} \right)_o$ | $P_e^U = \left(\frac{\rho U \Delta x}{(\mu + 2\mu_t)} \right)_e$ | $P_s^U = \left(\frac{\rho V \delta y}{(\mu + \mu_t)} \right)_s$ | $P_n^U = \left(\frac{\rho V \delta y}{(\mu + \mu_t)} \right)_n$ |
| Equation du mouvement moyen suivant la direction y | | | |
| $P_o^V = \left(\frac{\rho U \delta x}{(\mu + \mu_t)} \right)_o$ | $P_e^V = \left(\frac{\rho U \delta x}{(\mu + \mu_t)} \right)_e$ | $P_s^V = \left(\frac{\rho V \Delta y}{(\mu + 2\mu_t)} \right)_s$ | $P_n^V = \left(\frac{\rho V \Delta y}{(\mu + 2\mu_t)} \right)_n$ |
| Equation de k | | | |
| $P_o^k = \sigma_k \left(\frac{\rho U \delta x}{\mu_t} \right)_o$ | $P_e^k = \sigma_k \left(\frac{\rho U \delta x}{\mu_t} \right)_e$ | $P_s^k = \sigma_k \left(\frac{\rho V \delta y}{\mu_t} \right)_s$ | $P_n^k = \sigma_k \left(\frac{\rho V \delta y}{\mu_t} \right)_n$ |
| Equation de ε | | | |
| $P_o^\varepsilon = \sigma_\varepsilon \left(\frac{\rho U \delta x}{\mu_t} \right)_o$ | $P_e^\varepsilon = \sigma_\varepsilon \left(\frac{\rho U \delta x}{\mu_t} \right)_e$ | $P_s^\varepsilon = \sigma_\varepsilon \left(\frac{\rho V \delta y}{\mu_t} \right)_s$ | $P_n^\varepsilon = \sigma_\varepsilon \left(\frac{\rho V \delta y}{\mu_t} \right)_n$ |

Les coefficients a_i^U, a_i^V, a_i^k et a_i^ε sont exprimés en fonction de nombre de Peclet par les relations suivantes :

avec, $i=O, E, N, S$.

Tableau III.5 : Termes des coefficients $a_i^U, a_i^V, a_i^k, a_i^\varepsilon, a_M, a_M^0$ et b des équations de transport.

| | |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------|
| Equation du mouvement moyen | |
| Suivant la direction x | Suivant la direction x |
| $a_E^U = D_e^U A(P_e^U) + \max[-F_e^U, 0]$ | $a_E^V = D_e^V A(P_e^V) + \max[-F_e^V, 0]$ |
| $a_O^U = D_o^U A(P_o^U) + \max[F_o^U, 0]$ | $a_O^V = D_o^V A(P_o^V) + \max[F_o^V, 0]$ |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a_N^U = D_n^U A(P_n^U) + \max[-F_n^U, 0]$ | $a_N^V = D_n^V A(P_n^V) + \max[-F_n^V, 0]$ |
| $a_S^U = D_s^U A(P_s^U) + \max[F_s^U, 0]$ | $a_S^V = D_s^V A(P_s^V) + \max[F_s^V, 0]$ |
| $a_M^U = a_M^{U0} + a_E^U + a_O^U + a_N^U + a_S^U - S_M^U \delta x \Delta y$ | $a_M^V = a_M^{V0} + a_E^V + a_O^V + a_N^V + a_S^V - S_M^V \delta y \Delta x$ |
| $a_M^{U0} = \rho \frac{\delta x \Delta y}{\Delta t}$ | $a_M^{V0} = \rho \frac{\delta y \Delta x}{\Delta t}$ |
| $b^U = S_C^U \delta x \Delta y + U_M^0 a_M^{U0}$ | $b^V = S_C^V \delta y \Delta x + V_M^0 a_M^{V0}$ |
| Equation de k-ε | |
| Equation de k | Equation de ε |
| $a_E^k = D_e^k A(P_e^k) + \max[-F_e^k, 0]$ | $a_E^\varepsilon = D_e^\varepsilon A(P_e^\varepsilon) + \max[-F_e^\varepsilon, 0]$ |
| $a_O^k = D_o^k A(P_o^k) + \max[F_o^k, 0]$ | $a_O^\varepsilon = D_o^\varepsilon A(P_o^\varepsilon) + \max[F_o^\varepsilon, 0]$ |
| $a_N^k = D_n^k A(P_n^k) + \max[-F_n^k, 0]$ | $a_N^\varepsilon = D_n^\varepsilon A(P_n^\varepsilon) + \max[-F_n^\varepsilon, 0]$ |
| $a_S^k = D_s^k A(P_s^k) + \max[F_s^k, 0]$ | $a_S^\varepsilon = D_s^\varepsilon A(P_s^\varepsilon) + \max[F_s^\varepsilon, 0]$ |
| $a_M^k = a_M^{k0} + a_E^k + a_O^k + a_N^k + a_S^k - S_M^k \Delta x \Delta y$ | $a_M^\varepsilon = a_M^{\varepsilon0} + a_E^\varepsilon + a_O^\varepsilon + a_N^\varepsilon + a_S^\varepsilon - S_M^\varepsilon \Delta x \Delta y$ |
| $a_M^{k0} = \rho \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}$ | $a_M^{\varepsilon0} = \rho \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}$ |
| $b^k = S_C^k \Delta x \Delta y + k_M^0 a_M^{k0}$ | $b^\varepsilon = S_C^\varepsilon \Delta x \Delta y + \varepsilon_M^0 a_M^{\varepsilon0}$ |

Avec $A(P_i^j)$ est représenté par le schéma de la loi de puissance :

$$A(P_i^j) = \max\left[0, (1 - 0.1|P_i^j|)^5\right].$$

avec, $i=O, E, N, S$; $j=U, V, K, \varepsilon$.

Une fois le système d'équations algébriques (III-164)-(III-168) de l'écoulement graduellement varié aéré est élaboré, la suite de ce travail consiste à résoudre ce système d'équations à chaque pas de temps.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le modèle mathématique régissant l'écoulement graduellement varié aéré est représenté par un système d'équations non linéaires, et les vitesses apparaissant sous forme de produit, ce qui empêche la résolution directe de ces équations.

Les coefficients de chaque équation discrétisée par la méthode des volumes finis dépendant des variables du problème étudié, ce qui nous conduit à utiliser une méthode itérative.

Dans les équations algébriques (III-165) et (III-166), apparaît le terme de gradient de pression qui constitue un terme source majeurs de ces deux équations.

Si le champ de pression est connue ou estimée, on peut escompter qu'une procédure itérative, ce qui nous permette d'accéder au champ de vitesse. Mais la pression est inconnue, et on ne dispose pas d'une équation évidente pour sa détermination. Donc, on doit formuler une équation de transport pour la pression.

Plusieurs algorithmes sont utilisés pour résoudre ce type de problème, ils ont été mis au point par Patankar et Spalding dans les années 70. Parmi ces algorithmes. On cite : l'algorithme Simple, Simpler, Piso et Simplec.

Ces algorithmes se basent sur l'idée que lorsque le champ de pression correct est injecté dans les deux équations de quantité de mouvement (III-165) et (III-166), le champ de vitesse résultant doit satisfaire l'équation de continuité.

Dans cette étude, nous avons porté notre choix sur l'algorithme Simple.

IV. Algorithme de résolution (Algorithme Simple)

L'algorithme SIMPLE (Semi-Implicit-Method for pressure-Linked Equation) a été créé par Patankar et Spalding (1972). Le principe de cet algorithme est de partir d'un champ de pression P^* , qui par le biais des équations de conservation de quantité de mouvement (III-165), (III-166), conduit à un champ de vitesse approchée (U^*, V^*) .

Des corrections successives sont ensuite apportées à l'un et à l'autre de façon à se rapprocher petit à petit d'une solution qui satisfasse de mieux en mieux l'équation de continuité.

Les différentes étapes sont répétées jusqu'à ce que l'erreur sur chaque équation de conservation, sur chaque volume de contrôle, soit inférieure à une valeur définie au préalable.

L'algorithme Simple impose d'exprimer les équations de correction de la pression et de champ de vitesse.

On note les valeurs choisies par $(^*)$, et les valeurs corrigées par $(^{\prime})$.

1. Equations de correction des vitesses

Les équations de U , V sont exprimées par les relations (III-165) et (III-166).

On pose :

$$\sum a_{nb} U_{nb} = a_E^U U_E + a_O^U U_O + a_N^U U_N + a_S^U U_S \quad (\text{III-169})$$

$$\sum a_{nb} V_{nb} = a_E^V V_E + a_O^V V_O + a_N^V V_N + a_S^V V_S \quad (\text{III-170})$$

En substituant les expressions (III-169) et (III-170) dans le système d'équations (III-165), (III-166), on obtient :

$$a_M^U U_M = \sum a_{nb} U_{nb} + b^U + (P_o - P_e) \Delta y \quad (III-171)$$

$$a_M^V V_M = \sum a_{nb} V_{nb} + b^V + (P_s - P_n) \Delta x \quad (III-172)$$

On doit établir une estimation sur la pression, on pose $P = P^*$, ce qui permet d'estimer les vitesses suivant les deux direction x et y par les quantités U^*, V^* , tel que : $U = U^*$ et $V = V^*$.

On remplace dans les équations (III-171) et (III-172) U, V et P par U^*, V^* et P^* :

$$a_M^U U_M^* = \sum a_{nb} U_{nb}^* + b^U + (P_o^* - P_e^*) \Delta y \quad (III-173)$$

$$a_M^V V_M^* = \sum a_{nb} V_{nb}^* + b^V + (P_s^* - P_n^*) \Delta x \quad (III-174)$$

Les vitesses précédentes ne satisfont pas l'équation de continuité (III-164), donc on doit corriger la pression par la quantité P' qui est égal à la différence entre la pression correcte P et la pression estimée P^* :

$$P = P^* + P' \quad (III-175)$$

La correction de la pression induit une correction sur les vitesses U' et V' qui est égal à la différence entre les vitesses correctes U, V et les vitesses estimées U^*, V^* :

$$U = U^* + U' \quad (III-176)$$

$$V = V^* + V' \quad (III-177)$$

En soustrayant membre à membre l'équation (III-173) de l'équation (III-171), et l'équation (III-174) de l'équation (III-172), il vient

$$a_M^U (U_M - U_M^*) = \sum a_{nb} (U_{nb} - U_{nb}^*) + [(P_o - P_o^*) - (P_e - P_e^*)] \Delta y \quad (III-178)$$

$$a_M^V (V_M - V_M^*) = \sum a_{nb} (V_{nb} - V_{nb}^*) + [(P_s - P_s^*) - (P_n - P_n^*)] \Delta x \quad (III-179)$$

En substituant les formules de correction (III-175), (III-176) et (III-177), les équations (III-178) et (III-179) peuvent être réécrites ainsi :

$$a_M^U U_M' = \sum a_{nb} U_{nb}' + (P_o' - P_e') \Delta y \quad (III-180)$$

$$a_M^V V_M' = \sum a_{nb} V_{nb}' + (P_s' - P_n') \Delta x \quad (III-181)$$

Nous avons établi les équations de correction des vitesses U', V' . A ce niveau, il est nécessaire d'introduire l'approximation principale de l'algorithme Simple, qui consiste à négliger les sommes dans les équations précédentes :

$$\sum a_{nb} U_{nb}' = 0 \quad (III-182)$$

$$\sum a_{nb} V'_{nb} = 0 \quad (\text{III-183})$$

En tenant compte de cette approximation de l'algorithme Simple, les deux équations (III-180) et (III-181) s'écrivent :

$$U'_M = \left(P'_o - P'_e \right) \frac{\Delta y}{a_M} \quad (\text{III-184})$$

$$V'_M = \left(P'_s - P'_n \right) \frac{\Delta x}{a_M} \quad (\text{III-185})$$

On pose :

$$d_M^U = \frac{\Delta y}{a_M} \quad (\text{III-186})$$

$$d_M^V = \frac{\Delta x}{a_M} \quad (\text{III-187})$$

En remplaçant les deux expressions (III-186) et (III-187) dans les équations (III-184) et (III-185), et en tenant compte des relations (III-176) et (III-177), les équations qui décrivent les corrections des vitesses sont données par les deux expressions suivante :

$$U_M = U_M^* + \left(P'_o - P'_e \right) d_M^U \quad (\text{III-188})$$

$$V_M = V_M^* + \left(P'_s - P'_n \right) d_M^V \quad (\text{III-189})$$

Nous avons déterminé les deux expressions de correction des vitesses U et V, il reste donc d'établir l'équation de correction de pression.

2. Equation de correction de la pression

L'équation de la conservation de la masse discrétisée par la méthode des volumes finis est donnée par la relation (III-164).

Pour élaborer l'équation de correction de la pression, on doit déterminer les expressions de U_o, U_e, V_n et V_s en utilisant le maillage décalé.

D'après les équations de correction des vitesses (III-188) et (III-189), on définit les relations suivantes :

$$U_e = U_e^* + \left(P'_M - P'_E \right) d_e \quad (\text{III-190})$$

$$U_o = U_o^* + \left(P'_O - P'_M \right) d_o \quad (\text{III-191})$$

$$V_n = V_n^* + \left(P'_M - P'_N \right) d_n \quad (\text{III-192})$$

$$V_s = V_s^* + \left(P'_S - P'_M \right) d_s \quad (\text{III-193})$$

La substitution des équations corrigées (III-190), (III-191), (III-192) et (III-193) dans l'équation (III-164) donne :

$$\begin{aligned} & (\rho_M - \rho_M^0) \frac{\Delta y \Delta x}{\Delta t} + \rho_e [U_e^* + (P'_M - P'_E) d_e] \Delta y - \rho_o [U_o^* + (P'_O - P'_M) d_o] \Delta y + \rho_n [V_n^* + (P'_M - P'_N) d_n] \Delta x \\ & - \rho_s [V_s^* + (P'_S - P'_M) d_s] \Delta x = 0 \end{aligned} \quad (III-194)$$

En regroupant les termes de cette équation, on obtient :

$$\begin{aligned} & (\rho_o d_o \Delta y + \rho_e d_e \Delta y + \rho_n d_n \Delta x + \rho_s d_s \Delta x) P'_M = \rho_o d_o \Delta y P'_O + \rho_e d_e \Delta y P'_E + \rho_n d_n \Delta x P'_N + \rho_s d_s \Delta x P'_S \\ & - \left[(\rho_M - \rho_M^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \rho_e U_e^* \Delta y - \rho_o U_o^* \Delta y + \rho_n V_n^* \Delta x - \rho_s V_s^* \Delta x \right] \end{aligned} \quad (III-195)$$

avec,

$$a_M^P = a_O^P + a_E^P + a_N^P + a_S^P \quad (III-196)$$

$$a_O^P = \rho_o d_o \Delta y \quad (III-197)$$

$$a_E^P = \rho_e d_e \Delta y \quad (III-198)$$

$$a_N^P = \rho_n d_n \Delta x \quad (III-199)$$

$$a_S^P = \rho_s d_s \Delta x \quad (III-200)$$

$$b^P = - \left[(\rho_M - \rho_M^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \rho_e U_e^* \Delta y - \rho_o U_o^* \Delta y + \rho_n V_n^* \Delta x - \rho_s V_s^* \Delta x \right] \quad (III-201)$$

En identifiant les coefficients de la correction de pression P' , l'équation (III-195) peut être réécrite sous la forme générale suivante :

$$a_M^P P'_M = a_O^P P'_O + a_E^P P'_E + a_N^P P'_N + a_S^P P'_S + b^P \quad (III-202)$$

Nous avons établi finalement l'équation de la correction de la pression. Le terme source b^P apparaît à cause du fait qu'on utilise un champ de vitesse incorrect U^* et V^* . L'étape suivante consiste à suivre les procédures de l'algorithme Simple.

3. Procédure de résolution

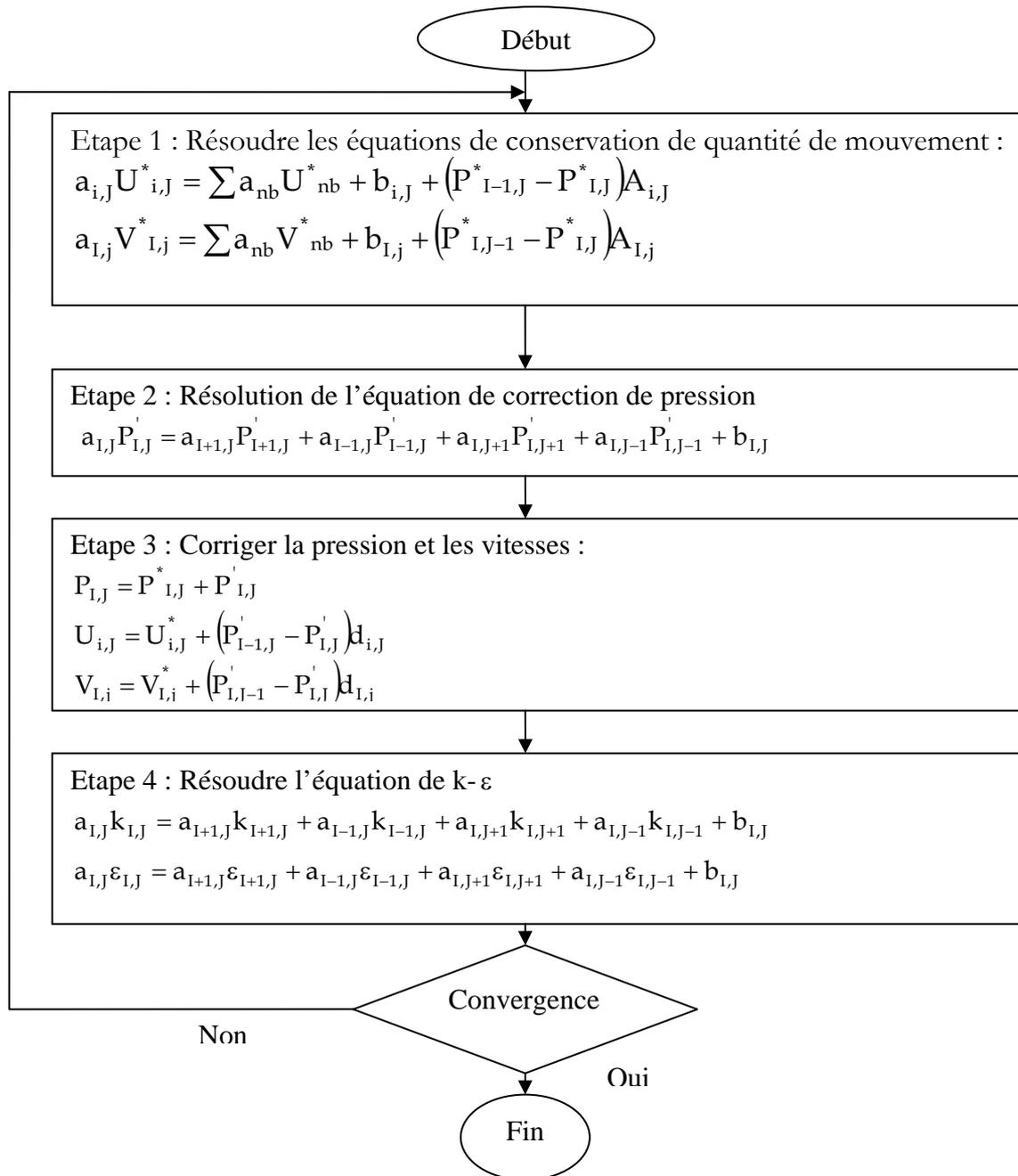
L'algorithme SIMPLE peut donc s'énoncer ainsi :

- 1- Estimation du champ de pression P^* .
- 2- Résolution des équations de quantité de mouvement (III-173) et (III-174) et détermination de champ de vitesse (U^*, V^*) .
- 3- Résolution de l'équation de la correction de pression (III-202) et détermination de P' .
- 4- Calcul de la nouvelle valeur de la pression P , tel que : $P = P^* + P'$

- 5- Déterminations des nouvelles valeurs U et V , en utilisant les deux expressions (III-188) et (III-189), à partir de la nouvelle valeur de la pression.
- 6- Résolution de l'équation de l'énergie cinétique turbulente (III-167).
- 7- Résolution de l'équation de taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente (III-168).
- 8- Prendre ces nouvelles valeurs de U , V et P comme nouveau choix initial, tel que : $P^* = P$, $U^* = U$ et $V^* = V$, et retourne à l'étape 2.
- 9- Répéter le processus jusqu'à convergence (Vérification de l'équation de continuité par U^* , V^*).

4. Organigramme de l'algorithme SIMPLE

On peut présenter l'organigramme de l'algorithme SIMPLE par le schéma qui suit :



V. Condition initiales et conditions aux limites

1. Au niveau de la paroi

Au niveau de la paroi, la vitesse moyenne de l'écoulement est donnée par :

$$U = U_* , V = 0$$

avec, U_* : Vitesse de frottement donnée par : $U_* = \sqrt{fU_1^2/8}$; f : Coefficient de frottement pour un écoulement non aéré ; U_1 : Vitesse moyenne d'écoulement

$$\text{donnée par : } U_1 = \frac{q}{d}.$$

2. A la surface libre : $U = U_1$, $\frac{\partial k}{\partial y} = 0$ et $\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{0.43d}$

3. Région de paroi

Les formulations choisies pour caractériser cette région sont :

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{k_s} \right) + 8.5, \quad k = \frac{U_*^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} \quad \text{où, } \kappa : \text{ Constante de Von Karman,}$$

$\kappa = 0.41$.

4. Conditions initiales

Dans un canal en marches d'escaliers, les conditions initiales sont exprimées

par les relations suivantes : $\frac{U}{U_1} = \left(\frac{y}{d} \right)^{\frac{1}{N}}$, $k = 0.08 U_1^2 \left(1 - \frac{y}{d} \right)$

La dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε , est fonction de l'échelle de longueur de turbulence, L déterminé par la relation suivante :

$$\begin{cases} L = \kappa y & 0 < y \leq \frac{C_\mu d}{\kappa} \\ L = 0.09d & y > \frac{C_\mu d}{\kappa} \end{cases} \quad \text{D'où, } \varepsilon = \frac{C_\mu k^{\frac{3}{2}}}{L}.$$

VI. Conclusion

Dans le présent chapitre nous avons présenté la procédure numérique pour élaborer le modèle numérique de l'écoulement turbulent à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers, tel que le système d'équations différentielles a été traduit à un système d'équations algébrique en utilisant la méthode des volumes finis.

Nous avons adopté le schéma de la loi de puissance qui donne une bonne approximation polynomiale de la solution exacte, ainsi une bonne caractéristique de stabilité et de précision des autres schémas.

L'algorithme Simple a été retenu pour résoudre les équations algébriques de l'écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers et traiter le couplage pression-vitesse.

Un programme de calcul en Fortran a été élaboré. Dans le prochain chapitre nous allons valider le programme de calcul et discuter les différents résultats obtenus.

Chapitre IV

Expérimentations numériques

Chapitre IV

Expérimentations numériques

Nous avons présenté dans le chapitre précédent, les démarches à suivre pour établir le modèle numérique régissant l'écoulement graduellement varié aéré à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers. Par la suite, un programme de calcul a été élaboré, ce dernier permettant de déterminer toutes les caractéristiques de l'écoulement graduellement varié aéré, l'écoulement uniforme aéré, la masse volumique du mélange air- eau, la concentration moyenne de l'air, la profondeur d'eau pure, le profil de vitesse, l'énergie cinétique turbulente, le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente et le point d'apparition de l'eau blanche.

Nous avons vu dans le chapitre II que l'écoulement extrêmement turbulent dans un canal en marches d'escaliers est représenté par trois zones, la zone d'écoulement lisse, la zone d'écoulement graduellement varié aéré et la zone d'écoulement uniforme aéré. Les deux premières zones sont départagées par le point d'inception.

Ce travail est consacré à étudier l'écoulement situé à l'aval du point d'inception.

Avant de commencer nos essais numériques, nous présentons les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement turbulent à l'aval du point d'inception.

L'étape suivante sera consacrée à l'expérimentation numérique. Tout d'abord, nous devons valider les résultats numériques par rapport aux essais physique sur des modèles réduits, des observations sur des ouvrages réels, ou des codes de calcul déjà validés.

Les résultats de nos essais de simulation numérique sont comparés avec les résultats numériques obtenus par Benmamar (Benmamar, 2006).

Après validation, nous présentons nos essais numérique en appliquant le modèle numérique régissant l'écoulement à l'écoulement à l'aval du point d'inception, sur le modèle réduit du barrage M'Bali.

I. Caractéristiques de l'écoulement turbulent à l'aval du point d'inception

L'écoulement turbulent à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers est caractérisé par un écoulement graduellement varié aéré et un écoulement uniforme aéré.

1. Point d'inception

L'étude de l'écoulement du mélange air-eau, dans un canal en marches d'escaliers, nous impose de connaître le point où l'entraînement d'air commence.

La position du point de d'inception dépend de la géométrie et de la dimension de la marche, du débit de l'écoulement, de la rugosité du fond, et du profil du déversoir.

D'après Chanson, les coordonnées de ce point sont exprimées par les deux relations suivantes (Chanson, 1993) :

$$\frac{L_I}{k_s} = 9,72 (\sin \alpha)^{0,08} (F_r)^{0,71} \quad (\text{IV-1})$$

$$\frac{d_I}{k_s} = \frac{0,40}{(\sin \alpha)^{0,04}} (F_r)^{0,6} \quad (\text{IV-2})$$

avec, $27^\circ < \alpha < 53^\circ$; α : L'angle d'inclinaison du coursier de l'évacuateur,

k_s : La rugosité donnée par l'expression $k_s = h \cos \alpha$, $F_r = \frac{q}{\sqrt{g \sin \alpha k_s^3}}$ est le

nombre de Froude.

2. Ecoulement uniforme aéré

Si l'évacuateur en marches d'escaliers est assez long, les conditions d'un écoulement uniforme sont atteintes avant le pied de celui-ci.

a. Concentration en air moyenne

Straub et Anderson, ont montré que la concentration en air moyenne C_n pour les écoulements uniformes est indépendante du débit, du nombre de Froude, et que C_n est fonction de la pente du canal uniquement.

$$C_n = 0,9 \sin \alpha \quad \text{pour } \alpha < 50^\circ \quad (\text{IV-3})$$

En 1970, Hartung et Scheuerlein, ont effectué des mesures sur des écoulements avec des rugosités importantes ($0,1 < k_s < 0,35\text{m}$), avec des pentes de 6° à 34° . Ces rugosités induisent un écoulement fortement turbulent, avec entraînement d'air.

Knauss (1979) indique que le taux d'aération exprimée en terme de concentration moyenne est :

$$C_n = 1,44 \sin \alpha - 0,08 \quad (\text{IV-4})$$

b. Coefficient de perte de charge

Une analyse détaillée de ces mesures indique que le rapport $\frac{f_e}{f}$ dépend peu de la rugosité pour des expérimentations $5.10^{-4} < k_s/D_H < 5.10^{-2}$. Comptée par les mesures obtenus par Hartung et Scheuerlein (1970) ; avec des canaux à grande rugosité $0.02 < k_s/D_H < 0.2$, l'analyse de ces résultats fournit la relation suivante :

$$\frac{f_e}{f} = \frac{1}{(1 - 3,2 \sqrt{f} \text{Log}_{10}(1 - C_n))^2} \quad (\text{IV-5})$$

c. Profondeur de l'écoulement uniforme aéré

La profondeur de l'écoulement uniforme aéré est donnée par l'expression suivante :

$$h_n = \left(\frac{q^2 f_e}{8g \sin \alpha} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{IV-6})$$

d. Profil de vitesse et profondeur de référence

Cain (1978) a mesuré les profils de vitesses sur l'évacuateur de crues du barrage d'Avimore (Nouvelle Zélande), avec une pente de 45° , et de la concentration en air moyennes variant de 0 à 50%. Cain et Wood (1981) ont montré que la distribution des vitesses peut être écrite sous forme adimensionnelle :

$$\frac{U}{U_{90}} = \left(\frac{y}{y_{90}} \right)^{1/N} \quad (\text{IV-7})$$

avec, N : exposant de la loi de vitesse estimé égal à 6 pour les données de Cain.

On définit la profondeur de référence, d, comme :

$$q = \int_0^{y_{90}} (1 - C) U dy \quad (\text{IV-8})$$

où, y est mesuré perpendiculairement à la surface du coursier. On définit une autre profondeur de référence y_{90} comme celle où $C = 90\%$. La concentration en air moyenne C, dans une section transversale à l'écoulement, est définie par :

$$(1 - C)y_{90} = d \quad (\text{IV-9})$$

La vitesse de référence U_{90} est exprimée par la relation suivante (Chanson, 1997) :

$$\frac{q}{U_{90} y_{90}} = -0,883 C_n + 0,835 \quad (\text{IV-10})$$

q : étant le débit d'écoulement d'eau par unité de largeur (m^2/s).

La profondeur de référence est donnée par l'expression suivante :

$$y_{90} = \frac{d}{1 - C_n} \quad (\text{IV-11})$$

3. Écoulement graduellement varié aéré

a. Equation de la concentration en air moyenne

Pour un canal de largeur constante, l'équation basé sur le principe de la conservation de la masse pour l'air, qui permet de calculer en tout point, la concentration en air moyenne, indépendamment de la vitesse, de la rugosité et de la profondeur est :

$$C_{\text{moy}}(i) = C_{\text{moy}}(i-1) + \Delta x \left[(1 - C_{\text{moy}}(i-1))^2 \left(C_n - C_{\text{moy}}(i-1) \right) \frac{u_r \cos \alpha}{q} \right] \quad (\text{IV-12})$$

La résolution de cette équation nécessite la connaissance de la concentration au point d'inception qui est égale à zéro $C_{\text{moy}}(x=0) = C_*$, et la concentration dans la région d'écoulement uniforme qui est égal à : $C_{\text{moy}}(x=x_{\text{unif}}) = C_n$.

b. Coefficient de perte de charge

Les pertes de charge sont exprimées par la relation suivante :

$$\left(\frac{f_e}{f} \right)_i = \frac{1}{(1 - 3,2 \sqrt{f} \text{Log}_{10}(1 - C_{\text{moy}}(i)))^2} \quad (\text{IV-13})$$

c. Equation de la profondeur de l'écoulement

L'équation basée sur le principe de la conservation de l'énergie fournit l'expression suivante qui permet de déterminer en tout point la profondeur de l'écoulement :

$$d_i = d_{i-1} + \Delta x \frac{\sin \alpha d_{i-1}^3 - f(q^2/8g)(f_e/f)_i}{\cos \alpha d_{i-1}^3 - 1,05(q^2/g)} \quad (\text{IV-14})$$

La résolution de cette équation nécessite la connaissance de la profondeur de l'écoulement au point d'inception qui est égal à $d(x=0) = d_1$, et la profondeur de l'écoulement dans la région d'écoulement uniforme qui est égale à : $d(x=x_{\text{unif}}) = d_n$.

II. Calcul des paramètres hydrauliques de l'écoulement

L'élaboration de ce modèle numérique nécessite, de reconnaître certains paramètres hydrauliques qui caractérisent l'écoulement.

1. Épaisseur de la lame d'eau au seuil du coursier

L'épaisseur de la lame d'eau au seuil du coursier est donnée par l'expression suivante :

$$h_e = \sqrt[3]{\frac{q^2}{2g C_d^2}} \quad (IV-15)$$

avec, q : débit unitaire, C_d : coefficient de débit.

2. Hauteur d'eau normale

La hauteur d'eau normale est exprimée par :

$$h_n = \left(\frac{q^2}{K_s^2 \operatorname{tg} \alpha} \right)^{3/10} \quad (IV-16)$$

où, K_s : est le coefficient de rugosité de Strickler ; α : pente du canal ; q : débit unitaire.

3. Hauteur d'eau critique

L'expression de la hauteur d'eau critique dans un canal rectangulaire est donnée par la relation suivante :

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (IV-17)$$

4. Vitesse de frottement

La relation qui permet de déterminer la vitesse de frottement est :

$$U_* = \sqrt{f \frac{U_1^2}{8}} \quad (IV-18)$$

où, f : coefficient de frottement de l'écoulement non aéré, U_1 : vitesse de l'écoulement libre.

5. Vitesse moyenne de l'écoulement

La vitesse moyenne de l'écoulement est donnée par la relation suivante :

$$U_1 = \frac{q}{d} \quad (IV-19)$$

6. Coefficient de frottement

Pour un écoulement non aéré, dans un coursier en marches d'escalier, Rajaratnam propose pour le calcul du coefficient de frottement l'expression suivante :

$$f = \frac{8g \sin \alpha h_n^3}{q^2} \quad (IV-20)$$

III. Présentation du coursier de l'évacuateur de crues du barrage de M'Bali

Nous avons étudié l'écoulement sur le coursier de l'évacuateur de crues en marches d'escaliers du barrage de M'Bali.

Ce barrage est caractérisé par :

- La pente du coursier est : $\alpha = 51.34^\circ$;
- Le coefficient de Strickler est $K_s = 50$;
- Le profil du déversoir est du type Greager, caractérisé par un coefficient de débit $C_d = 0.52$;
- La largeur du coursier est égale à 60m ;
- La longueur totale du coursier est de 37m ;
- Le nombre de marches est de 36 ;
- La hauteur de la marche est : $h = 0.8\text{m}$.

IV. Expérimentation numérique

1. Localisation du point d'inception

La position du point d'inception dans le cas où l'entraînement d'air commence pour différents débits ($q = 6\text{ m}^2/\text{s}$, $q = 9\text{ m}^2/\text{s}$, $q = 11\text{ m}^2/\text{s}$, $q = 15\text{ m}^2/\text{s}$, $q = 18\text{ m}^2/\text{s}$ et $q = 21\text{ m}^2/\text{s}$) est présenté dans le tableau IV.1.

Tableau IV.1 : Localisation du point d'inception

| q | $6\text{ m}^2/\text{s}$ | $9\text{ m}^2/\text{s}$ | $11\text{ m}^2/\text{s}$ | $15\text{ m}^2/\text{s}$ | $18\text{ m}^2/\text{s}$ | $21\text{ m}^2/\text{s}$ |
|----------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| d_I | 0.609 | 0.777 | 0.877 | 1.056 | 1.178 | 1.292 |
| L_I | 17.37 | 23.17 | 26.72 | 33.298 | 37.900 | 42.283 |

Pour des faibles débits le point d'inception est plus proche de la crête du déversoir, et il s'éloigne par rapport à la crête avec l'augmentation des débits.

2. Evaluation de la concentration moyenne en air C_{moy} et de la hauteur d'eau de l'eau pure

• Validation

Sur la figure (IV.1), nous représentons la comparaison entre la concentration moyenne en air et la hauteur d'eau calculées et la concentration moyenne en air et la hauteur d'eau obtenus dans les travaux de Benmamar (2006) pour $q = 9\text{ m}^2/\text{s}$.

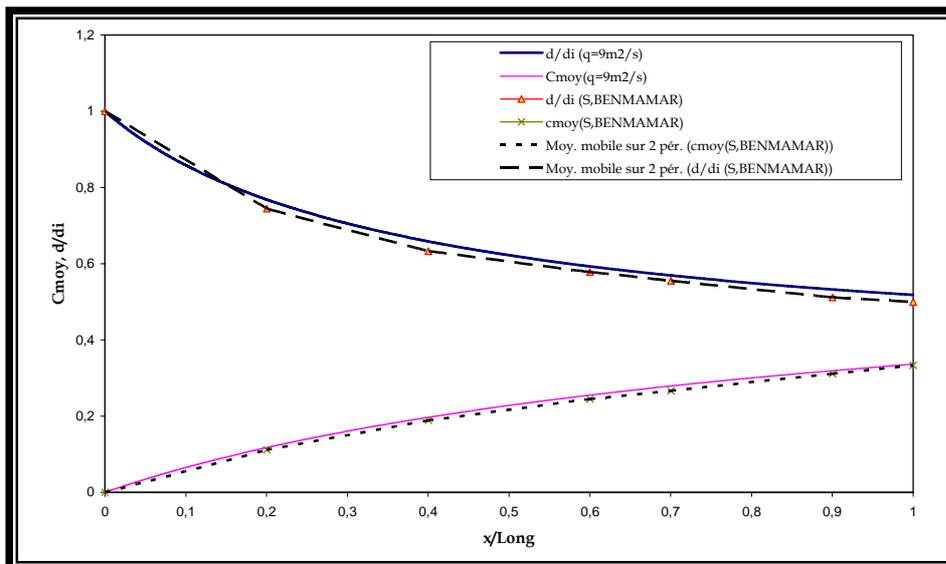


Figure IV.1 : Profils de la concentration et de la ligne d'eau pour $q = 9\text{m}^2/\text{s}$.

La figure IV.1 montre que les profils de concentration et de la surface libre sont les mêmes que ceux obtenus par Benmamar (2006).

- Variation de la concentration et de la profondeur d'eau pour différents débits

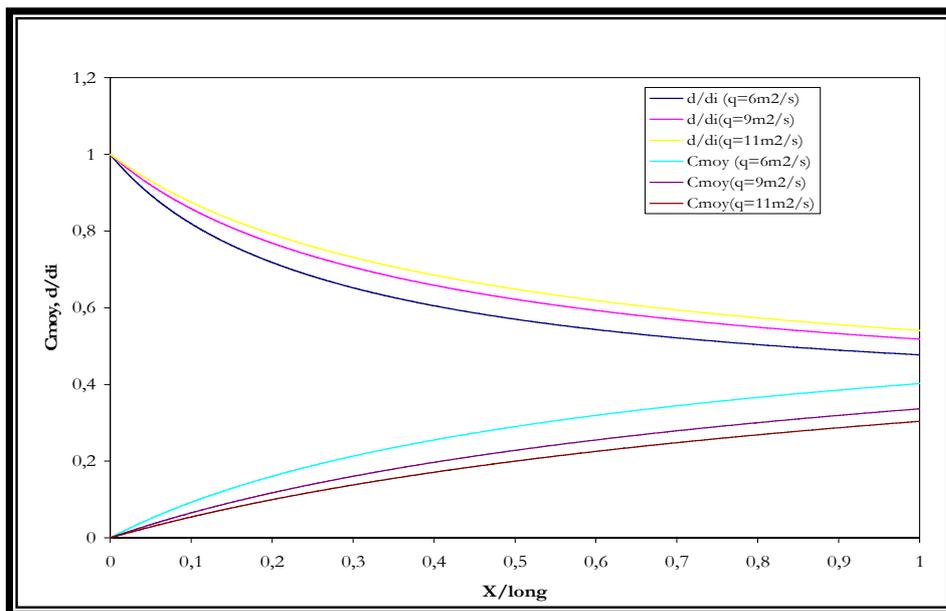


Figure IV.2 : Profils de la concentration et de la ligne d'eau pour les différents débits.

On remarque d'après les figures IV.1 à IV.2 que :

Quant la concentration d'air augmente la profondeur de l'écoulement diminue.

La variation de la concentration moyenne en air est plus importante au voisinage du point d'inception et s'équilibre en s'approchant de la région d'écoulement uniforme.

Pour les trois débits la concentration moyenne d'air n'atteint pas la concentration uniforme, de faite que la longueur du coursier n'est pas importante.

La concentration d'air diminue le long du coursier quant le débit unitaire augmente, par contre la profondeur de l'eau pure augmente le long du coursier avec l'augmentation de débit unitaire.

3. Profil de vitesse

- Validation

La figure (IV.3) représente la comparaison entre les profils de vitesse calculée et les profils de vitesse obtenus par les travaux de Benmamar (2006).

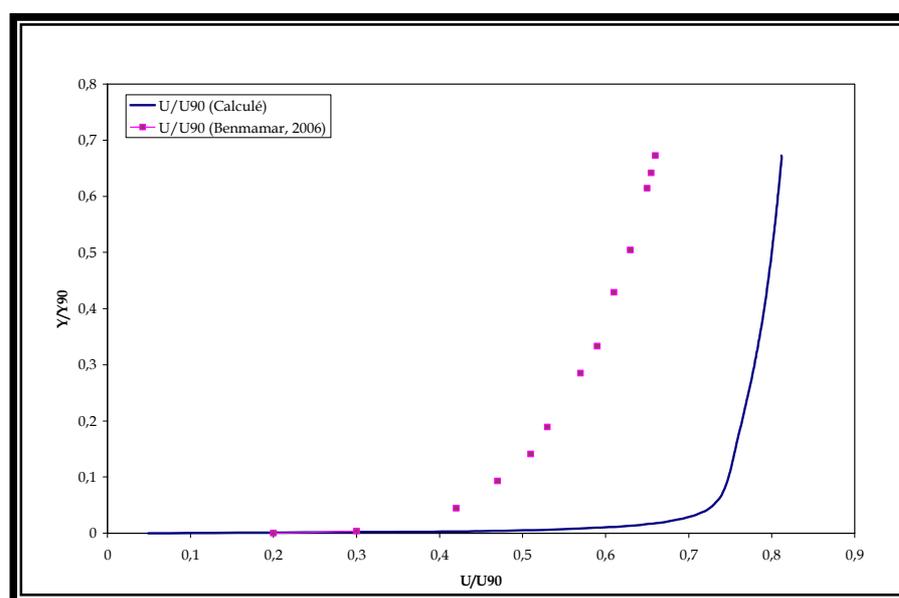


Figure IV.3 : Profils de vitesse pour $q=9\text{m}^2/\text{s}$ à $x=35\text{m}$

La comparaison entre les résultats calculés à ceux obtenu par Benmamar (2006) dans la figure (IV.3) montre que les profils des vitesses sont assez proches.

- Profil de vitesse

Sur la figure (IV.4) nous avons présenté les profils des vitesses pour le débit $q=9\text{m}^2/\text{s}$ et à $x=26\text{m}$, $x=30\text{m}$.

Sur les figures (IV.5) à (IV.6) nous avons présenté les profil des vitesses pour le débit $q=6\text{m}^2/\text{s}$ et à $x=26\text{m}$, $x=30\text{m}$ et $x=35\text{m}$.

Sur les figures (IV.7) à (IV.8) nous avons tracé les profil des vitesses pour le débit $q=11\text{m}^2/\text{s}$ et à $x=26\text{m}$, $x=30\text{m}$ et $x=35\text{m}$.

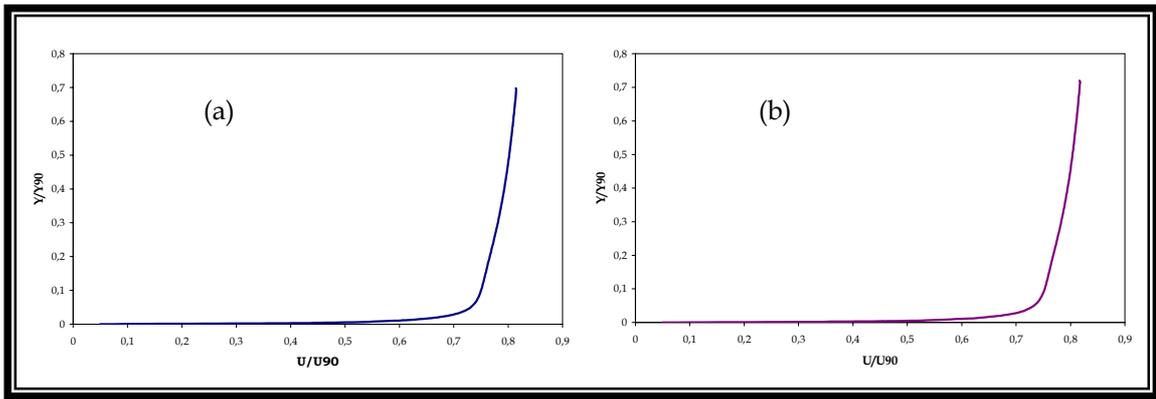


Figure IV. 4 : Profils de vitesse pour $q=9\text{m}^2/\text{s}$ à : (a) $x=30\text{m}$ et (b) $x = 26\text{m}$.

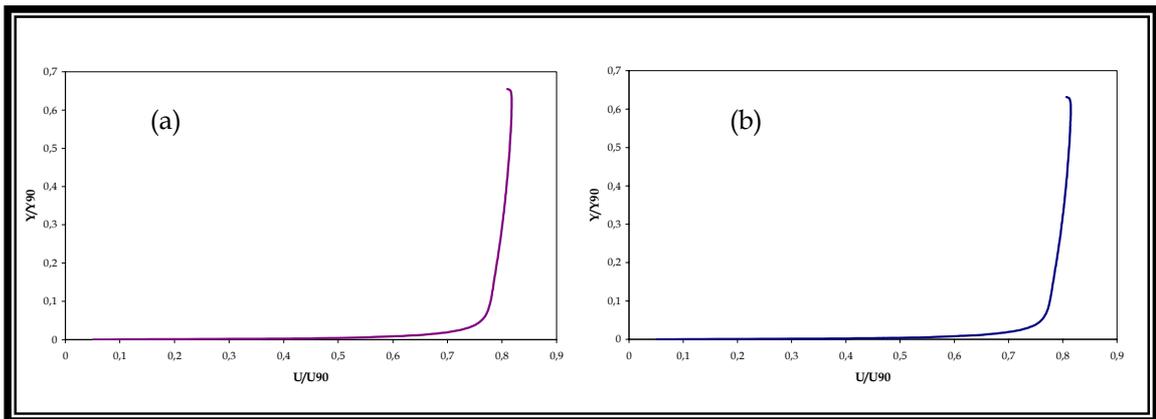


Figure IV. 5 : Profils de vitesse pour $q=6\text{m}^2/\text{s}$ à : (a) $x=26\text{m}$ et (b) $x=30\text{m}$.

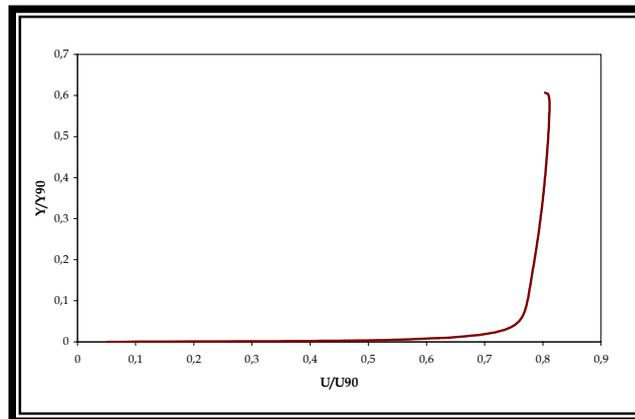


Figure IV. 6 : Profils de vitesse pour $q = 6\text{m}^2/\text{s}$ à $x = 35\text{m}$.

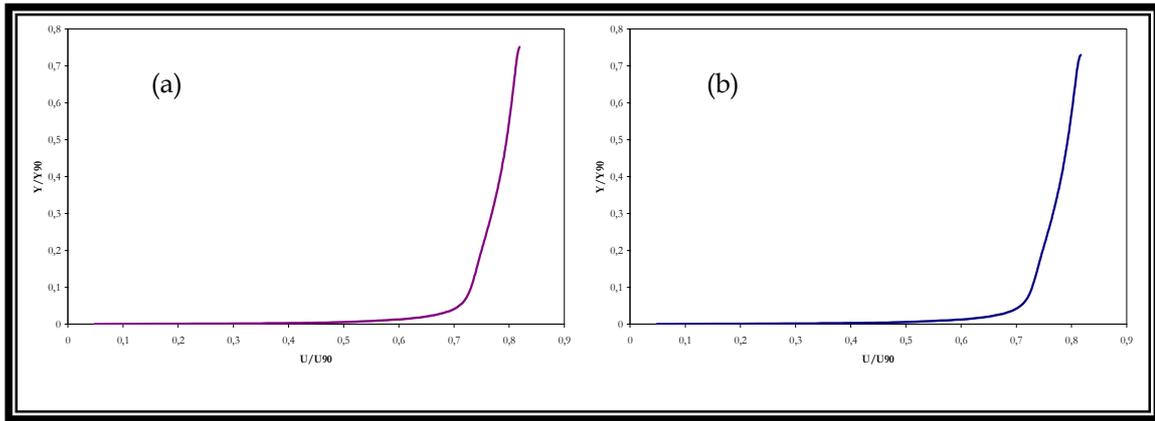


Figure IV.7 : Profils de vitesse pour $q=11\text{m}^2/\text{s}$ à : (a) $x=26\text{m}$ et (b) $x=30\text{m}$.

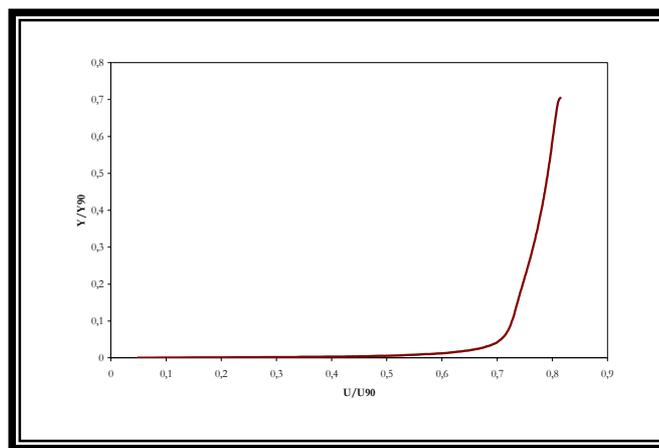


Figure IV. 8 : Profils de vitesse pour $q = 11\text{m}^2/\text{s}$ à $x=35\text{m}$.

Les figures (IV.3) à (IV.8) montrent que les profils de la vitesse suivent une loi de puissance type :

$$\frac{U}{U_{90}} = a \left(\frac{y}{y_{90}} \right)^{\frac{1}{N}}.$$

4. Energie cinétique turbulente et taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente

Les figures (IV. 9) à (IV.11) représentent la variation de l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente pour $q = 9\text{m}^2/\text{s}$ et à $x = 35\text{m}$, $x = 30\text{m}$, et $x = 26\text{m}$.

Nous avons représenté sur les figures (IV. 12) à (IV.14), la variation de l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente pour $q = 6\text{m}^2/\text{s}$ et à $x = 35\text{m}$, $x = 30\text{m}$, et $x = 26\text{m}$.

Nous avons tracé sur les figures (IV. 15) à (IV.17), la variation de l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente pour $q = 11\text{m}^2/\text{s}$ et à $x = 35\text{m}$, $x = 30\text{m}$, et $x = 26\text{m}$.

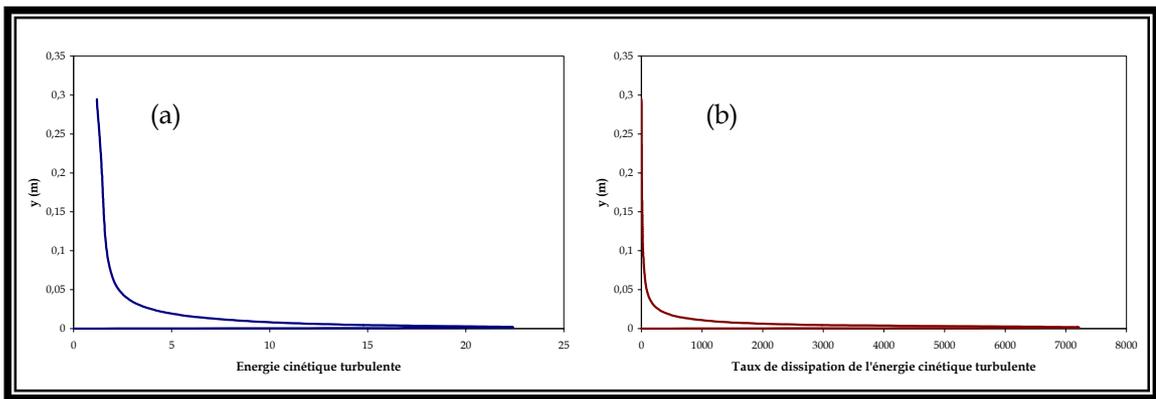


Figure IV.9 : Variation de : (a) l'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) et (b) taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ϵ (m^2/s^3) pour $q=9m^2/s$ à $x =35$ m.

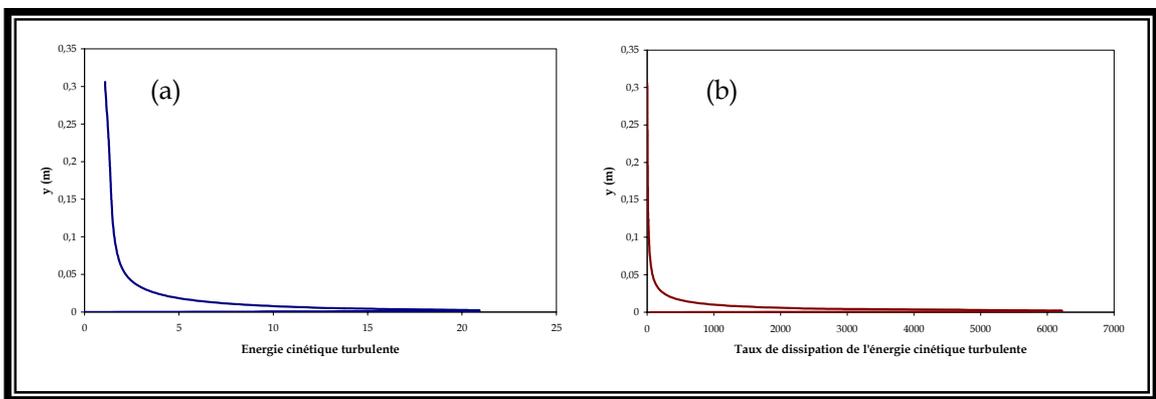


Figure IV.10 : Variation de : (a) l'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) et (b) taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ϵ (m^2/s^3) pour $q=9m^2/s$ à $x=30$ m.

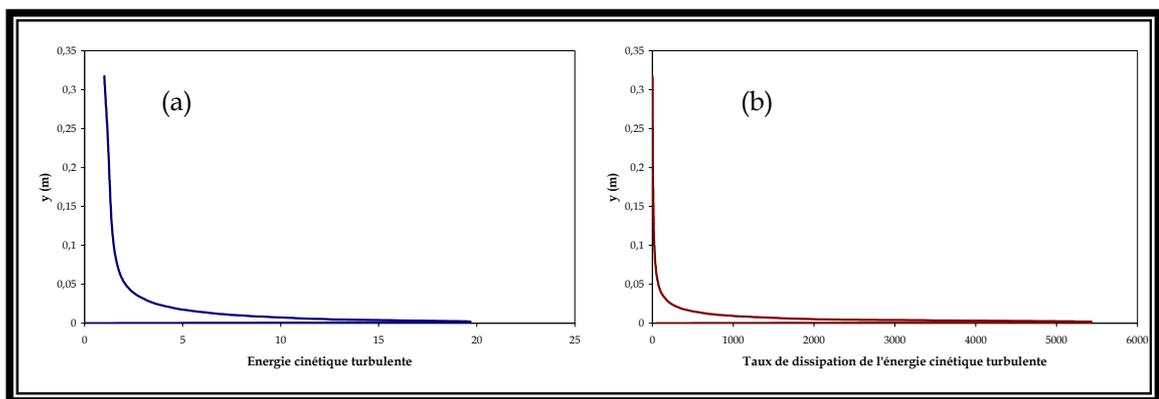


Figure IV.11 : Variation de : (a) l'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) et (b) taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ϵ (m^2/s^3) pour $q = 9m^2/s$ à $x =26$ m.

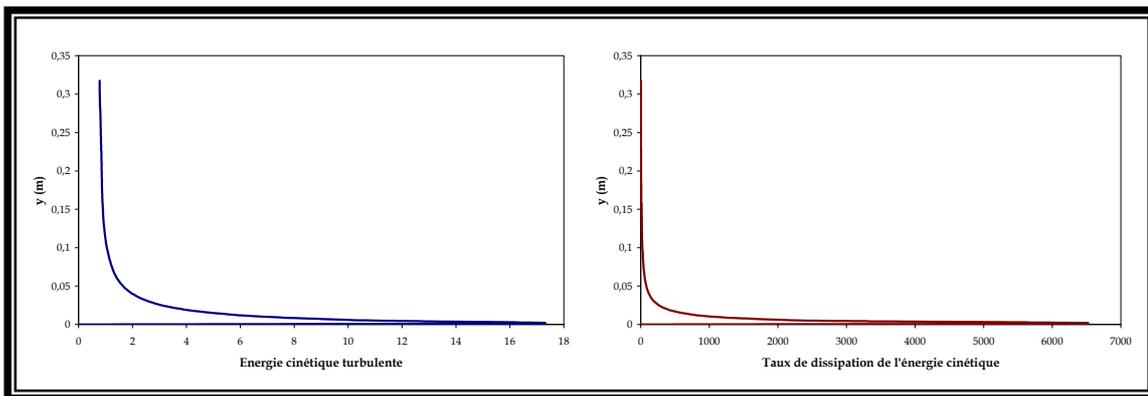


Figure IV.12 : Variation de : (a) l'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) et (b) taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ϵ (m^2/s^3) pour $q = 6m^2/s$ à $x = 26$ m.

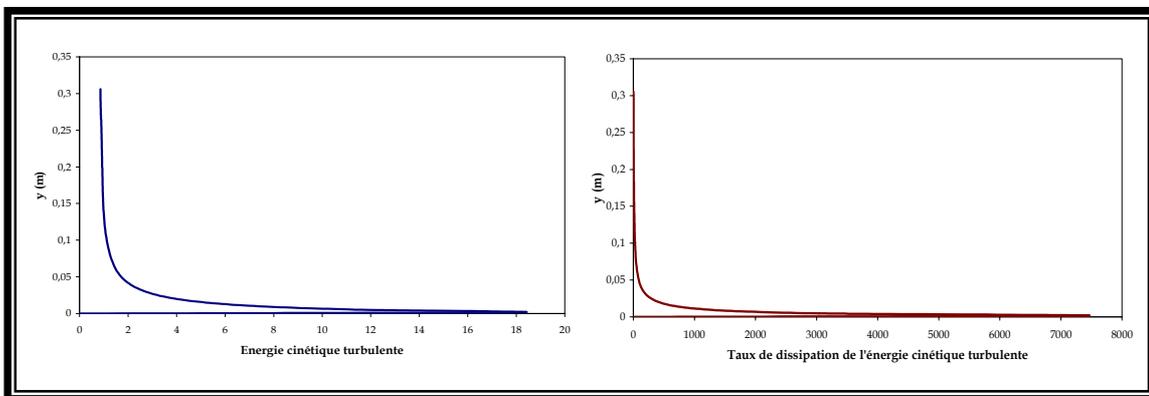


Figure IV.13 : Variation de : (a) l'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) et (b) taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ϵ (m^2/s^3) pour $q=6m^2/s$ à $x=30$ m.

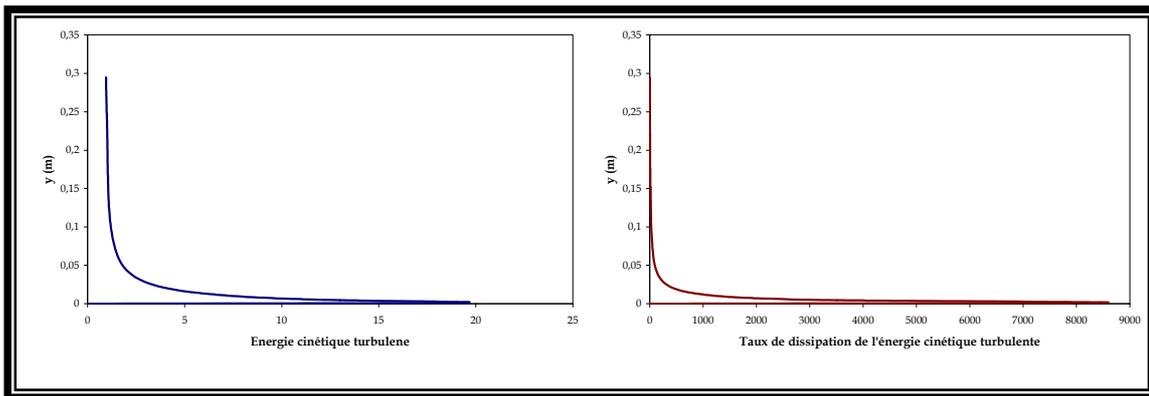


Figure IV.14 : Variation de : (a) l'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) et (b) taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ϵ (m^2/s^3) pour $q=6m^2/s$ à $x=35$ m.

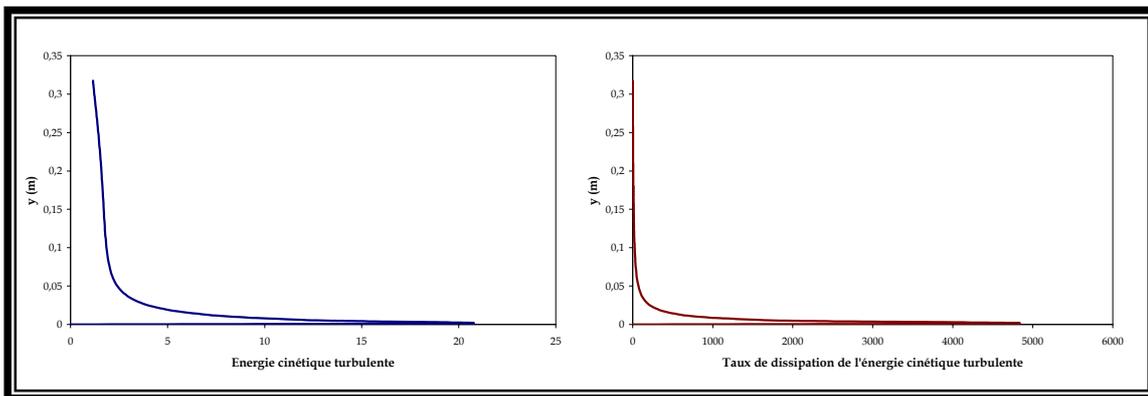


Figure IV.15 : Variation de : (a) L'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) et (b) taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ϵ (m^2/s^3) pour $q=11m^2/s$ à $x=26$ m.

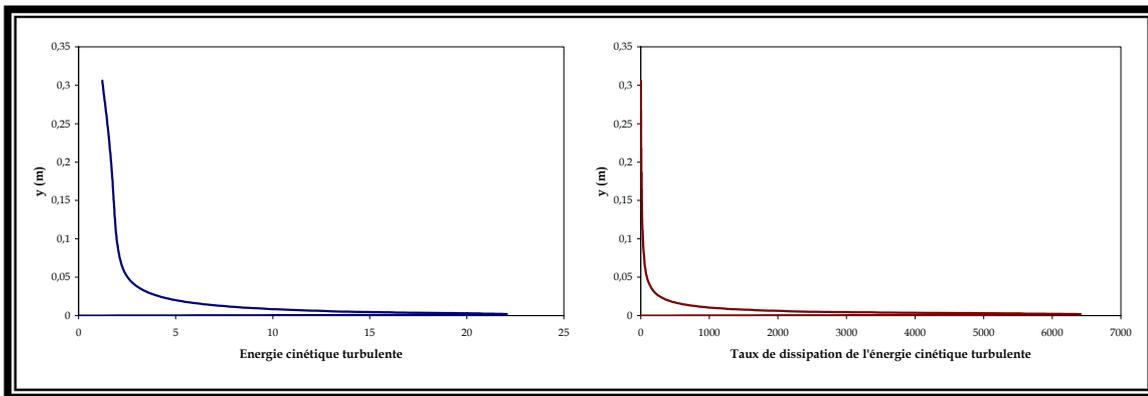


Figure IV.16 : Variation de : (a) l'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) et (b) taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ϵ (m^2/s^3) pour $q=11m^2/s$ à $x=30$ m.

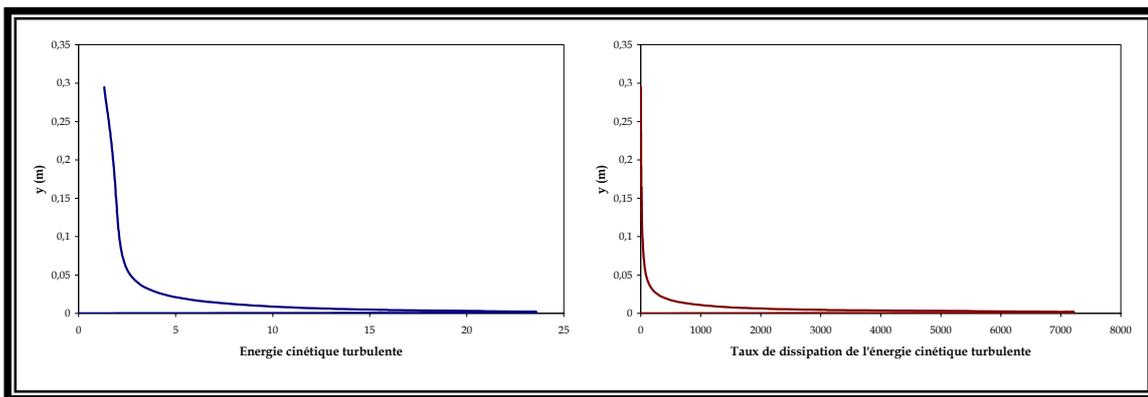


Figure IV.17 : Variation de : (a) l'énergie cinétique turbulente k (m^2/s^2) et (b) taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ϵ (m^2/s^3) pour $q=11m^2/s$ à $x=35$ m.

Les valeurs de l'énergie cinétique turbulente et de taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente augmentent rapidement de la pseudo - base

jusqu'à atteindre le maximum, puis les allures diminuent très rapidement jusqu'à certaines hauteurs. Par la suite, la variation devient plus lente pour atteindre des valeurs proches de zéro au voisinage de la surface libre.

V. Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié l'écoulement turbulent dans un évacuateur de crues en marches d'escaliers à l'aval du point d'inception.

Un modèle numérique permettant de déterminer les caractéristiques de l'écoulement à l'aval du point d'inception, le profil de la concentration et de la profondeur d'eau et le profil de vitesse a été développé.

D'après les résultats, on remarque que :

- Le point de l'apparition d'eau blanche « point d'inception » s'éloigne avec l'augmentation de débit.
- Quant la concentration en air augmente le long du canal, la profondeur d'eau diminue.
- Pour les trois débits, la concentration de l'écoulement uniforme n'est pas atteinte, par le fait que la longueur de l'évacuateur de crues de barrage du M'Bali ne le permet pas.
- Le profil de vitesse suit une loi de puissance.

Conclusion générale

Conclusion générale

A travers cette étude, nous avons vu l'intérêt de mettre les marches le long du coursier de l'évacuateur de crues, qui forment une macro-rugosité et accélèrent le processus d'entraînement d'air. Ceci permet de ralentir ou de prévenir les dommages dus à l'érosion par cavitation.

Ce travail a pour objectif de simuler l'écoulement à l'aval du point d'inception dans un canal en marches d'escaliers via la méthode des volumes finis en utilisant l'algorithme simple.

Dans les canaux en marches, il existe deux régimes d'écoulements :

- Ecoulement en nappe est caractérisé par des ressauts partiellement au complètement développé. Ce type d'écoulement provient pour des faibles débits et des pentes duces.
- Ecoulement extrêmement turbulent, ce type d'écoulement est illustré par trois zones, zone d'écoulement lisse, zone d'écoulement graduellement varié aéré, et la zone d'écoulement uniforme aéré. Ces deux premières zones sont départagées par le point d'inception, c'est le point d'apparition de l'eau blanche.

Un modèle numérique permettant de déterminer le point d'apparition de l'eau blanche a été élaboré. Ce modèle permet ainsi de déterminer les différents variables de l'écoulement, la concentration d'air, les profils de vitesse, la hauteur d'eau, l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.

Ce modèle numérique a été appliqué sur l'évacuateur de crues de barrage de M'Bali. Les résultats obtenus sont validés à l'aide des expérimentations numériques des travaux de Benmamar (2006). La comparaison entre ces résultats donne une bonne concordance.

A travers ces résultats on constate :

Le point d'inception s'éloigne avec l'augmentation des débits, ce qui provoque le retard de l'apparition de l'eau blanche.

Le profil de vitesse suit une loi de puissance.

Quant la concentration en air augmente le long du canal, la profondeur d'eau diminue.

Pour les trois débits, la concentration de l'écoulement uniforme n'est pas atteinte, par le fait que la longueur de l'évacuateur de crues de barrage du M'Bali ne le permet pas.

En connaissant les profils des concentrations en air, en tout point du coursier, il est possible d'estimer la hauteur requise pour les murs latéraux.

Mettre en évidence l'influence de l'entraînement d'air sur la dissipation d'énergie.

Définir un système de dissipation optimal.

Pour suivre le développement de ce travail, il est nécessaire de prendre en considération le comportement de l'écoulement sans tenir la pseudo base en prenant en considération les rouleaux de recirculation, ainsi que l'étude de l'évolution de la surface libre en utilisant la méthode de VOF.

Bibliographies

Bibliographie

- [1]. **André S.** (2004). «High velocity aerated flows on stepped chutes with macro-roughness elements». Thèse de Doctorat d'état, Ecole Polytechnique de Lausanne, Lausanne, Switzerland, 299 pages.
- [2]. **André S. & Dewals B. & Piroton M. & Schleiss A.J.,** (2003). «Quasi 2D-Numerical model of aerated flow over stepped chutes». Proceeding XXX IAHR Congress on Water Engineering and Research in a Learning Society: Modern Developments and traditional Concepts : Theme D:CFD Models and Applications, Thessaloniki, Greece, pp. 24-29.
- [3]. **André S. & Boillat J.-L. & Schleiss A.,** (2001). «High velocity two-phase turbulent flow over macro-roughness stepped chutes: Focus on dynamic pressures. ». Proceeding, Int. Symposium on Environmental Hydraulics : CD. Tempe, Arizona, pp. 5-8.
- [4]. **André S. & Matos J. & Boillat J.-L. & Schleiss A. J.,** (2004). «Energy dissipation and hydrodynamic forces of aerated flow over macroroughness linings for overtopped embankment dams» Proc., Int. Conf. on Hydraulics of Dams and River Structures, April 26-28, 2004, Tehran, Iran, Balkema, Rotterdam, The Netherlands, pp. 189-196.
- [5]. **Benkenida A.,** (1999). « Développement et validation d'une méthode de simulation d'écoulements diphasiques sans reconstruction d'interfaces. Application à la dynamique des bulles de Taylor». Thèse de Doctorat d'état, Institut Nationale Polytechnique de Toulouse, France, 264pages.
- [6]. **Benmamar S.,** (2006). « Etude des écoulements dans les conduits à motifs périodique- Application aux évacuateurs de crues ». Thèse de Doctorat d'état, Nationale Polytechnique d'Alger, Algérie, 198 pages.
- [7]. **Benmamar S. & Smakghi N. & Kettab A.,** (2004). «Approche numérique du calcul du point d'inception dans les canaux en marches d'escalier ». Revue Internationale de l'Eau, N°1, pp. 83-87.
- [8]. **Bentalha C.,** (2004). « Evolution de la couche limite dans des canaux à forte pente pour des géométries complexes ». Mémoire de Magistère, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, Algérie, 86 pages.
- [9]. **Cain, P. & Wood I. R. (1981).** «Measurements of Self- Aerated Flow on a Spillway». Journal of Hydraulic Division , ASCE, 107, HY11, pp. 1425-1444.
- [10]. **Carosi G. & Chanson H.,** (2006). «Air Water time and length scales in skimming flows on stepped spillway. Application to the spray characteristation ». Report CH59/06, Division of Civil Engineering, University of Queensland, Australia, July, 144 pages.

- [11]. **Chanson H. & Gualtieri C.**, (2008). «Similitude and Scale Effects of Air Entrainment in Hydraulic Jumps». *Journal of Hydraulic Research, IAHR*, Volume 46, N°1, pp. 35-44.
- [12]. **Chanson H.**, (2006). «Hydraulics of skimming flows on stepped chutes: The effects of inflow conditions? ». *Journal of Hydraulic Research* Volume 44, N° 1 (2006), pp. 51-60.
- [13]. **Chanson H.**, (2005). «Air-water and momentum exchanges in unsteady surging waters: An experimental». *Experimental Thermal and Fluid Science* 30 (2005) 37-47.
- [14]. **Chanson H. & Gonzalez C. A.**, (2005). «Physical modelling and scale effects of air-water flows on stepped spillways». *Journal of Zhejiang University SCIENCE*, 6A(3), pp. 243-250.
- [15]. **Chanson H.**, (2004). «Drag reduction in skimming flow on stepped spillways by aeration». *Journal of Hydraulic Research* Volume 42, N°3, pp. 316-322.
- [16]. **Chanson H. & Toombes L.**, (2004). «Hydraulics of stepped chutes: The transition flow». *Journal of Hydraulic Research* Volume 42, N°1, pp. 43-54.
- [17]. **Chanson H. & Toombes L.**, (2003). «Strong interactions between free-surface aeration and turbulence in an open channel flow». *Experimental Thermal and Fluid Science* 27 (2003) 525-535.
- [18]. **Chanson H. & Yasuda Y. & Ohtsu I.**, (2002). «Flow Resistance in Skimming Flows and its Modelling». *Can JI of Civ. Eng.*, Volume 29, N°6, pp. 809 - 819.
- [19]. **Chanson H. & Toombes L.**, (2002). «Air-water flows down stepped chutes: turbulence and flow structure observations». *International Journal of Multiphase Flow*, volume 28, pp. 1737-1761.
- [20]. **Chanson H. & Toombes L.**, (2001). «Experimental Investigations of Air Entrainment in Transition and Skimming Flows down a Stepped Chute Application to Embankment Overflow Stepped Spillways». *Research Report N° CE 158, Department of Civil Engineering, The University of Queensland, July, Australia, 40 pages.*
- [21]. **Chanson, H** (2001) «Caractéristiques Diphasiques des Ecoulements sur les Coursiers en Marches d'Escaliers. Two - Phase Flow Properties of Stepped Spillway Flows". *Revue International de l'eau : La Houille Blanche* N°8 pp. 16-28.
- [22]. **Chanson H.**, (1994). «Hydraulic Design of Stepped Cascades, Channels, Weirs and Spillways ». *Pergamon, Oxford, UK*, Jan. 292 pages.
- [23]. **Chanson H.**, (1993). «Flow resistance in high velocity supercritical flow ». *Australian Civil Engineering Transactions. I.E.Aust.*, Volume CE35, N°2, June, pp. 141-149 (ISSN 0819-0259).

- [24] **Chanson H.**, (1992). « Entraînement d'air dans les écoulements à surface libre : application aux évacuateurs de crues de barrage ». *Revue International de l'eau : La Houille Blanche* N°4, pp. 277-285.
- [25]. **Chanson H.**, (1989). « Etude de des phénomènes d'entraînement d'air, application aux évacuateurs de crue ». *Revue International de l'eau : Revue International de l'eau : La Houille Blanche* N°6, pp. 441-462.
- [26]. **Chassaing P.**, (2000). « Turbulence en mécanique des fluides : Analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur ». *Collection Polytechnic, CEPADUES-Edition*, 625 pages.
- [27]. **Chen Q.**, (2001). «Turbulence numerical simulation and model test of the stepped spillway overflow». *Dissertation for the Doctoral Degree (in Chinese)*. Chengdu: Sichuan University, pp. 21 – 32.
- [28]. **Cheng X. & Chen Y. & Luo L.**, (2006). «Numerical simulation of air-water two-phase flow over stepped spillways». *Science in China Series E: Technological Sciences, Volume 49 N°6*, pp. 674 -684.
- [29]. **Cheng X., Luo L., Zhao W. and Li R.**, (2004). «Two phase flow simulation of aeration on stepped spillway». *Journal of Hydrodynamics, 2005, Serie B*, 17(1): 626.
- [30] **Chungen Yin & Mads Bang**, (2004). «Course Notes: Numerical Fluid Dynamics». *Institute of energy technology, FACE 9-Numerical Fluid Dynamics*, 27 pages.
- [31]. **Chungen Yin**, (2003). «Course Notes: Numerical Fluid Dynamics». *Institute of energy technology, FACE7-Numerical Fluid Dynamics*, 32 pages.
- [32]. **Cummings P D, Chanson H.**, (1997), « Air entrainment in the developing flow region of plunging jets – Part 2: Experimental». *J Fluids Eng*, 119(9):pp. 603 – 608.
- [33]. **Djaroud M.**, (2001). « Etude numérique des écoulements turbulents dans les évacuateurs de crues en marches d'escalier ». *Mémoire de magistère, Ecole Nationale Supérieurs de l'Hydraulique, Blida, Algérie*, 107pages.
- [34]. **Dong Z. & Lee J.**, (2006). «Numerical simulation of skimming flow over mild stepped channel». *Journal of Hydrodynamics, série B*, 18(3), pp. 367 - 371.
- [35]. **Gafsi M.**, (1999). « Etude expérimentale des écoulements dans les canaux à motifs périodiques ». *Thèse de Magistère, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, Algérie*, 120 pages.
- [36]. **Gonzalez C.A. & Chanson H.**, (2008). «Turbulence and cavity recirculation in air-water skimming flows on a stepped spillway ». *Journal of Hydraulic Research Volume 46, N° 1*, pp. 65-72.

- [37]. **Gonzalez C.A. & Chanson H.**, (2007). «Hydraulic Design of Stepped Spillways and Downstream Energy Dissipators for Embankment Dams». *Dam Engineering*, Volume 17, No. 4, pp. 223-244.
- [38]. **Gonzalez C.A. & Takahashi M. & Chanson H.**, (2005). «Effects of step roughness in skimming flows: An experimental study». Research report N° CE160, Department of Civil Engineering, University of Queensland, University of Queensland, Australia, July, 154 pages.
- [39]. **Gonzalez C.A. & Chanson H.**, (2005). « Physical modelling and scale effects of air-water flows on stepped spillways». *Journal of Zhejiang University SCIENCE*, 6A(3), pp. 243-250.
- [40]. **Gonzalez C.A. & Chanson H.**, (2004). « Interactions between cavity flow and main stream skimming flows: an experimental study». *Can. J. Civ. Eng.* **31**: pp. 33–44.
- [41]. **Gonzalez C.A. & Chanson H.**, (2008). «Turbulence and Cavity Recirculation in Air-Water Skimming Flows on a Stepped Spillway». *Journal of Hydraulic Research, IAHR*, Vol. 46, No. 1, pp. 65-72.
- [42]. **Haddad D.**, (2007). « Etude numérique bidimensionnelle instationnaire des transferts de chaleur, masse et charge dans la cathode et la membrane d'une PEMFC. Utilisation de la méthode des volumes finis». Mémoire de Magistère en Génie Mécanique, Université de Batna, Algérie, 120 pages.
- [43]. **Hirt C. W. and Nichols B. D.**, (1981) . « Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries». *J. Comput. Phys.*, 39: pp. 201-225.
- [44]. **Ishii M.**, (1975) . « Thermo-fluid Dynamic Theory of Two-phase Flow». Paris: Eyrolles, pp. 32–86.
- [45]. **Kherbache, K.**, (2004). «Contribution à l'élaboration d'un modèle hydrodynamique par la méthode des volumes finis». Mémoire de fin d'études, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, Algérie, 102 pages.
- [46] **Kherbache K. & Benmamar S.**, (2008). « Simulation des écoulements dans les canaux en marches d'escaliers par la méthode des volumes finis ». *Algerian Journal Of Technology*, pp153-163.
- [47]. **Liao Huasheng & Wu chigong**, (1995). «Numerical model of stepped spillway overflow». *Proceeding of 2nd International Conference on Hydro-Science and Engineering*, Beijing, Mar. 1995.
- [48]. **Meguellati F. & Ben Moussa H.**, (2006). «Modélisation et simulation de la réaction d'un polluant en atmosphère par la méthode des volumes finis. Application aux oxydes d'azote ». Mémoire de magistère, Université de Batna, Algérie, 102 pages.
- [49]. **Manninen M, Taivassalo V, Kallio S.**, (1996). «On the Mixture Model for Multiphase Flow». *VTT Publications 288*, Technical Research Centre of Finland, pp. 1- 65.

- [50]. **Meguelliati, F., Ben Moussa, H.** (2006) «Modélisation et simulation de la réaction d'un polluant en atmosphère par la méthode des volumes finis. Application aux oxydes d'azote » Mémoire de magistère, Université de Batna, Algérie, 102 pages.
- [51]. **Messaoudi S.,** (1995). « Etude de l'entraînement d'air dans les écoulements à surface libre (canaux à forte pente) : applications aux évacuateurs de crues ». Thèse de Magistère, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, Algérie, 91 pages.
- [52]. **Ouabbas Y.,** (1997). « Etude expérimentale sur les écoulements dans les canaux en marches d'escalier ». Mémoire de fin d'études, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, Algérie, 129 pages.
- [53]. **Patankar S.V.,** (1980). «Numerical heat transfer and fluid flow». Hemisphere Publishing Corporation, 196 pages.
- [54]. **Pegram G. G. S. & Officer A. K. & Mottram S. R.,** (1999). «Hydraulics of skimming flow on modeled stepped spillways». Journal of Hydraulic Engineering, May 1999, pp.500-510.
- [55]. **Peyras L. & Royet P. & Degoutte G.,** (1992). « Flow and energy dissipation over stepped gabion weirs». Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 118(5) : pp. 707-717.
- [56] **Popa Ioan C.,** (2002). « Modélisation numérique du transfert thermique: Méthode des volumes finis ». Universitaria, Craiova, 251pages.
- [57]. **Qun Chen & Dai Guang-qing,** (2005). "Influencing factors for the energy dissipation ratio of stepped spillways ». Project supported the National Foundation of China (Grant N°59879013), Journal of Hydrodynamics, Série B, 17(1) : pp. 50-57.
- [58]. **Qun Chen & Dai Guang-qing & Fen-qing Zhu, Qing Yang,** (2004). « Three-dimensional turbulence numerical simulation of a stepped spillway overflow». Journal of Hydrodynamics, Série B, 16(1) : pp. 74-79.
- [59]. **Qun Chen & Guang-qing Dai e& Haowu Liu,** (2002). « Numerical simulation for the stepped spillway overflow with turbulence model». Journal of Hydrodynamics, Série B, 14(2) : 58-63.
- [60]. **Qun Chen & Dai Guangqing & and Liu Haowu,** (2002). «Volume of Fluid Model for Turbulence Numerical Simulation of Stepped Spillway Overflow ». Journal of Hydraulics Engineering, 683-688.
- [61]. **Qun Chen & Guangqing Dai & Haowu Liu** (2001). « The turbulence numerical simulation for the stepped spillway overflow». Proceeding Of the XXIX IAHR Congress: CD. Beijing, China.
- [62]. **Rice C. E. & Kadavy K. C.,** (1996). « Model study of a roller compacted concrete stepped spillway». Journal of Hydraulic Engineering, pp. 292-297.

- [63]. **Schiestel R.**, (1998). «Les écoulements turbulents: Modélisation et simulation». Edition Hermès, Paris, France, 504 pages.
- [64]. **Sorensen R. M.**, (1985). «Stepped spillway hydraulic model investigation». Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 111(12): pp.1461-1472.
- [65]. **Stephenson D.**, (1991). «Energy dissipation down stepped spillways». Water Power and Dam Construction, pp. 27-30.
- [66]. **Straub L. G., Anderson A. G.**, (1958). «Experiments on self-aerated flow in open channels ». Journal of the Hydraulics Division, ASCE, (HY7):pp. 1-35.
- [67]. **Tabbara M. & Chatila J. & Awwad R.**, (2005). « Computational simulation of flow over stepped spillways ». Computers and Structures 83 (2005) 2215–2224.
- [68]. **Tabbara M. & Chatila J.**, (2004). « Computational modelling of flow over an ogee spillway ». Computers and Structures 82 (2004), pp. 1805–1812.
- [69]. **Toombes L. & and Chanson H.**, (2008). «Flow Patterns in Nappe Flow Regime down Low Gradient Stepped Chutes» Journal of Hydraulic Research, IAHR, Vol. 46, No. 1, pp. 4-14 (ISSN 0022-1686).
- [70]. **Versteeg H. K. & Malalasekera W.**, (1995). « An Introduction to computational fluid dynamics.finite volume method». British Library in Publication Data, 257pages.
- [71]. **Wood I. R.**, (1983). «Uniform region of self-aerated flow». Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, volume 109, N°3, pp. 447-461.
- [72]. **Wood I. R.**, (1985). «Air water flow». 20st IAHR Congress, Melbourne, Australia, Keynote address, pp. 18-19.