

M0012/01

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

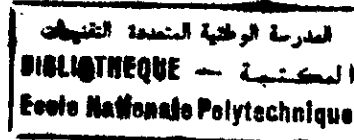
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



جمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الوطنيه المتعددة التخصصات

DEPARTEMENT METALLURGIE



THESE DE MAGISTER

PRESENTÉE PAR :
RAMDHANE. KOUBA

DIRECTEUR DE THESE : **F. HELLAL**

Thème :

**Modélisation du Processus d'Adhésion
Viscoplastique en Soudage par diffusion,
Approche analytique et Numérique**

présentée le 02 avril 2001

Devant le Jury :

S. RECHAK	Professeur	Président	E.N.P
H. BELHANECHÉ	Docteur C.C.	Examineur	E.N.P
Y. BELKACEMI	Docteur C.C.	Examineur	E.N.P
M. KASSER	M. A PHD	Examineur	E.N.P
M. CHITROUB	Docteur C.C.	Examineur	E.N.P
F. HELLAL	Docteur C.C.	Rapporteur	E.N.P

Année Universitaire : 2000 – 2001

10, Avenue Hassen Badi - El-Harrach - ALGER

☎ (02) 52.53.01/03 Fax : (02) 52.29.73

E.mail. ENP@IST.CERIST.DZ

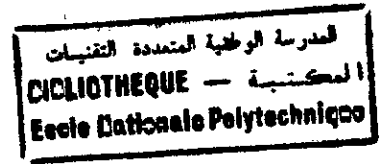
Dédicace



*A la mémoire de ma mère
A toute ma chère famille*

Je dédie ce modeste travail

Ramdhane HOUBA



Remerciements:

Je remercie mon promoteur Mr. F. Hellal et tiens à lui exprimer ma reconnaissance pour ses diligents conseils.

Je voudrais aussi exprimer ma gratitude à Mr. A. Hazotte, chargé de recherche CNRS et Mme S. Denis, directeur de recherche CNRS au Laboratoire de Sciences et Génie des Matériaux métalliques (LSG2M)- Ecole des Mines de Nancy- pour leur encadrement lors de mes stages au sein du LSG2M.

Enfin qu'il me soit permis d'exprimer ma reconnaissance aux membres du jury pour avoir accepté de juger mon modeste travail.

Abstract:

Interfacial contacting processes under high temperature and high bonding pressure for oxygen free copper is modelled by using two approaches. The analytic approach consists in comparing the different models proposed by several authors. It is found that the applicability of diffusion bonding due to power law creep is limited by the degree of bulk deformation, i.e., the void crushing rate is strikingly affected by the constraint condition of bulk. The second approach is numeric by using the finite element technique. This method can be applied to the large deformation process. The resolution of this model has not been accomplished because of the divergence of the calculation. To solve this question we used a finite elements program with elastic behaviour. This analysis gives a good agreement between the numerical results and those given by Hertz theory in normal indentation.

Résumé:

Le processus de contact viscoplastique en soudage par diffusion, contrôlé par le fluage selon une loi de comportement en puissance, a été modélisé suivant deux approches différentes: une approche analytique et une autre numérique. Le matériau utilisé est le cuivre pur. Dans l'approche analytique, une comparaison a été réalisée entre trois modèles différents. Les résultats montrent que l'applicabilité des modèles analytiques dépend des conditions de déformation en volume. L'approche numérique consiste à analyser les grandes déformations à l'interface de soudage par la méthode des éléments finis. En raison des difficultés d'ordre numérique, le traitement du processus de contact par la méthode des éléments finis a été poursuivi par l'utilisation d'un code commercial. Les résultats montrent une bonne concordance entre les résultats numériques et ceux calculés par la théorie d'indentation de Hertz en contact normal.

ملخص :

تمت نمذجة عملية التلحيم عن طريق الإنتشار المسيرة بظاهرة الزحفان حسب سلوك ذو قانون أسي بمقاربتين مختلفتين، الأولى تحليلية عن طريق المقارنة بين ثلاثة نماذج مختلفة، المادة المستعملة هي النحاس النقي الأكسجين.

المقاربة الثانية عددية عن طريق استعمال تقنية العناصر المنتهية، وذلك بتحليل ظواهر التشويهات الكبرى التي تحدث في منطقة الإلتحام، هذه المقاربة الأخيرة تطرح إشكالية عدم تقارب الحساب نحو الحل المنشود بسبب السلوك الغير خطي بدرجة كبيرة، وكذلك نظرا لوجود عوامل خاصة بظاهرة التلامس الميكانيكي، لحل هذه الإشكالية تم استعمال برنامج حاسوب يعمل بالعناصر المنتهية، النتائج المتوصل إليها بهذا البرنامج قريبة جدا من تلك الناتجة عن تطبيق نظرية هرتز في التلامس الميكانيكي النظامي.

Mots clé :

Soudage par diffusion, méthode des éléments finis, viscoplasticité, convergence, contact de hertz, modèles analytiques, fluage

Avant-propos	2
Introduction	7
Chapitre 1- Le soudage par diffusion.....	
1.1 Définition.....	8
1.2 Avantages et limites.....	8
1.3 Etapes d'une opération de soudage par diffusion.....	9
1.4 Influence des paramètres opératoires sur le soudage par diffusion.....	11
Chapitre II- Modèles analytiques du soudage par diffusion.....	
2.1. Généralités.....	15
2.2 Le soudage sous contrôle de fluage et de la diffusion	16
2.3 Origine du comportement de fluage.....	17
2.4 Considérations géométriques.....	19
2.5. Description des modèles analytiques faisant appel au fluage.....	21
2.6. Modèle de Guo et Ridley.....	23
2.7. Modèle de Takahashi.....	25
2.8 Modèle de Hill et Wallach	27
2.9 Résorption des vides par le mécanisme de diffusion.....	29
Chapitre III. Concept d'éléments finis.....	
3.1. Introduction.....	32
3.2. Les grandes lignes de la méthode.....	32
3.3. Formulation variationnelles.....	34
3.3.1. Méthode de résidus pondérés.....	35
3.3.2. Fonctionnelles variationnelles.....	35
3.3.3 Principes variationnels avec contrainte.....	35
3.3.4 Stationnarité des fonctionnelles avec contrainte.....	36
3.4 Discrétisation du domaine.....	36
3.5. Approximation sur l'élément.....	38
3.6 Assemblage et matrices globales.....	42
3.7. La résolution.....	42
3.8. Convergence de la méthode des éléments finis.....	43
Chapitre IV Modélisation du processus d'adhésion viscoplastique par la méthode des éléments finis.....	
4.1 Introduction	45
4.2 Modèle de processus de contact inter facial.....	46
4.3. principe de travaux virtuels.....	47
4.4. Fonctionnelle viscoplastique.....	48
4.5. Discrétisation en éléments finis.....	49
4.6. Conditions aux limites et traitement du contact.....	53
4.7. Méthode de calcul envisagée.....	54
4.8. Mise en œuvre du schéma de calcul.....	56
4.9. Convergence du processus itératif.....	59
4.10. Simulation du processus de contact par le code SYSTUS.....	59
4.11. Théorie de Hertz en contact normal.....	60
4.12. Modèle de contact en éléments finis par SYSTUS.....	62

Chapitre V. Résultats et interprétations	64
5.1. Résultats des modèles analytiques	64
5.1.1. Conditions générales d'applicabilité des modèles analytiques.....	64
5.1.2. Calcul de la surface de contact initiale.....	66
5.1.3. Détermination du domaine de prédominance du fluage.....	67
5.1.4. Etude de l'évolution de du soudage en fonction du temps.....	69
5.1.5. Influence des paramètres opératoires.....	76
5.1.6. Comparaison de la soudabilité du fer et du cuivre.....	79
5.2. Résultats de la simulation du contact de Hertz par SYSTUS.....	82
5.2.1 Conditions générales de la simulation.....	82
5.2.2 étude de la distribution des contraintes dans la zone de contact	84
5.2.3 Modèle de corps déformables.....	89
5.2.4 Traitement du contact viscoplastique par SYSTUS.....	90
Conclusion générale	91
Références bibliographiques.	93

Introduction générale

Les techniques de jonction à l'état solide sont des procédés d'assemblage des métaux qui ne font intervenir la fusion ni du métal de base ni du métal d'apport. Parmi les techniques d'assemblage à l'état solide, le soudage par diffusion prend une place privilégiée par rapport à d'autres techniques telles que le soudage par pression, le soudage par friction et le soudage par ultrasons. L'importance de ce procédé est due aux avantages techniques et économiques qu'il offre, notamment, l'absence de zone affectée thermiquement et l'absence des déformations macroscopiques.

Le principe de cette technique est l'accostage, sous pression, des deux pièces métalliques à assembler. La température de l'essai est nécessairement inférieure à la température de fusion des matériaux utilisés.

Malgré la simplicité apparente de son principe, le procédé de soudage par diffusion met en jeu de multiples phénomènes dont les plus importants sont la diffusion atomique à travers l'interface de soudage et la déformation viscoplastique par fluage des surfaces de contact. Le mécanisme de diffusion est prédominant pour des pressions de soudage basses, alors que le fluage contrôle l'opération pour des contraintes de soudage élevées.

Lors d'une opération de soudage par diffusion, les conditions opératoires optimales sont généralement déterminées expérimentalement par essai et erreur, ce qui augmente le coût du procédé. Il est donc avantageux de pouvoir diminuer le nombre d'essais pratiques. Ceci est possible si le processus de soudage peut être déterminé à l'avance par un modèle théorique.

L'objectif de ce travail est la modélisation du processus de formation du joint du soudage sous le contrôle exclusif du fluage selon une loi en puissance. Ceci peut être réalisé en travaillant avec des paramètres opératoires, en particulier la pression de soudage, correspondant au domaine de prédominance de ce mécanisme.

La modélisation sera réalisée selon deux approches différentes : une approche analytique et une autre numérique basée sur la méthode des éléments finis.

Pour cela, nous présenterons, dans un premier temps, des modèles analytiques quantifiant la cinétique de formation de la soudure et faisant appel au fluage selon une loi en puissance. Ils seront suivis de la présentation d'un modèle aux éléments finis dans le but d'analyser le processus de grandes déformations viscoplastiques à l'interface de soudage. Ce modèle sera complété par l'utilisation d'un code commercial aux éléments finis (SYSTUS). Le dernier chapitre sera consacré à l'analyse et à la discussion des résultats obtenus dans cette étude.

I. Le soudage par diffusion

1.1 Définition.

Le soudage par diffusion est un procédé d'assemblage de pièces métalliques, en phase solide dans lequel la liaison des surfaces est obtenue par un processus de diffusion de matière par chauffage et par l'application d'une pression pendant un temps donné [1]. Ce procédé consiste :

- A mettre en contact les surfaces de deux pièces à assembler, correctement préparées tant sur le plan de leur état physico-chimique, que sur celui de la micro géométrie et de l'ajustement des surfaces.
- A appliquer une pression d'accostage, choisie en fonction des caractéristiques mécaniques des matériaux.
- A chauffer l'ensemble, souvent sous vide ou sous atmosphère contrôlée, à une température déterminée en fonction des caractéristiques physico-chimiques et mécaniques des matériaux, pendant une durée minimale fonction des autres paramètres opératoires et du résultat souhaité.

La définition du soudage par diffusion, telle qu'elle est formulée ci-dessus, sous-entend l'absence de phase liquide, de quelque nature que ce soit pendant toutes les phases de soudage. Toutefois, certains procédés qui peuvent être assimilés à du soudage par diffusion, donnent lieu à des petites quantités de phase liquide temporaire. Ces procédés sont appelés soudage par diffusion en phase liquide [1].

Le procédé de soudage par diffusion est bien adapté à tous les matériaux qui peuvent présenter des difficultés à être assemblés par les traditionnelles techniques d'assemblage faisant appel à la fusion du métal de base et du métal d'apport. Ainsi, le titane, l'aluminium, le cuivre et leurs alliages, et certaines aciers sont un exemple de matériaux sur lesquels la technique du soudage par diffusion a été appliquée avec succès [2,3,4].

1.2. Avantage et limites du soudage par diffusion.

a- Avantages.

Le procédé du soudage par diffusion présente beaucoup d'avantages potentiels dont on peut citer les principaux [5,6]:

- L'assemblage s'effectue strictement en phase solide et n'engendre donc pas les structures de solidification, de caractéristiques nécessairement inférieures, propres aux procédés de soudage par fusion.

- Dans le cas d'un assemblage homogène, c'est à dire entre deux métaux ou alliages identiques, la zone de jonction présente la même structure et les mêmes caractéristiques que le métal de base. Le joint inter facial de soudage devient, dans la plupart des cas, indécélable.
- L'opération peut en général s'effectuer à des températures qui ne détériorent pas les propriétés des métaux.
- Les distorsions et les contraintes résiduelles associées à des chauffages localisés ne sont pas à redouter. Il subsiste dans le cas de jonction entre des métaux différents des contraintes thermiques liées aux différences de dilatation, mais celles-ci peuvent être réduites par l'emploi de températures d'assemblage relativement faibles.
- Le soudage par diffusion correctement exécuté ne provoque qu'une déformation macroscopique minimale. Il peut s'effectuer sur des pièces de cotes définitives.
- Il permet fréquemment d'effectuer des assemblages irréalisables par d'autres méthodes entre métaux d'assemblage très fragile ou difficilement fusibles. Il permet, par assemblage successif simultané de plusieurs parties, de réaliser des pièces mécaniques homogènes de formes difficiles ou impossibles à obtenir par usinage. Le procédé se prête également à l'assemblage simultané de plusieurs pièces similaires, ce qui peut réduire appréciablement le coût de l'opération.

b- Limitations du procédé.

Sur le plan pratique le soudage par diffusion présente cependant certaines limitations.

- Il nécessite une installation particulière : four fonctionnant sous vide (ou sous atmosphère contrôlée).
- Souvent le temps d'une opération de soudage par diffusion est relativement important : 30 min à 6 heures.
- Les surfaces à souder doivent être parfaitement propres (dégraissage, décapage chimique) et leur état microgéométrique doit être bien soigné.
- L'assemblage de grandes surfaces plane se révèle délicat, et nécessite une bonne planéité, ainsi qu'un bon parallélisme.

1.3. Etapes d'une opération de soudage par diffusion.

Malgré toute l'attention que l'on peut porter à la préparation des surfaces, celles ci restent rugueuses à l'échelle microscopique[7]. Le contact est initialement limité aux micro aspérités et par conséquent l'aire initiale de contact est très faible vis-à-vis de l'aire de surface géométrique apparente. L'application de la charge de soudage augmente la surface de contact par déformation de ces aspérités.

La liaison des surfaces n'est pas dans le principe réalisée par déformation, mais par un mécanisme lié à la diffusion atomique. Cependant la diffusion à travers l'interface ne peut, à elle seule agrandir la jonction soudée. En effet elle ne peut opérer que si l'adhésion des surfaces à l'échelle atomique est déjà réalisée, ce qui implique que le contact mécanique soit produit et que les oxydes et les contaminants résiduels soient éliminés.

L'opération de soudage par diffusion comporte deux stades essentiels[4,5,8] qui se chevauchent partiellement, et elle met en jeu principalement deux mécanismes physiques : déformation de l'interface de soudage et transfert de matière à travers cette interface.

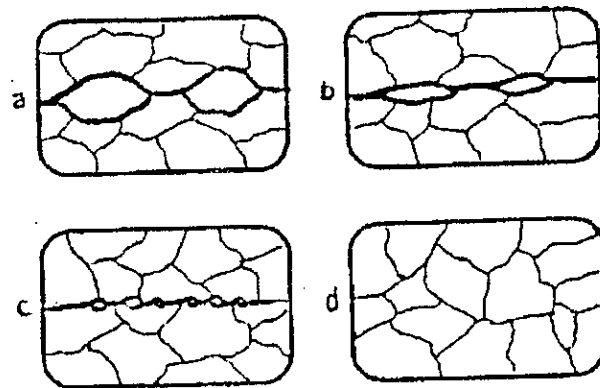


Figure 1.1: Représentation schématique des différents phases du processus de soudage [10]

Première phase : développement du contact physique (figure 1.1 a -b)

Du fait que les surfaces sont rugueuses, le contact initial est limité à quelques points. Même pour ces points, les atomes des surfaces peuvent être séparés par des couches d'oxydes et/ou de contaminants qui doivent être dispersées pour que la diffusion puisse avoir lieu à travers l'interface. Pour une surface finement polie et en l'absence de toute pression extérieure, la fraction d'aire de contact réelle a été estimée à environ 10^{-6} [9].

Compte tenu de cette faible aire de contact initiale, la pression de soudage engendre, au niveau des points de contact, des contraintes locales élevées qui tendent à devenir supérieures à la limite élastique du matériau. Le matériau se déforme donc plastiquement de façon à accroître l'aire de contact réelle. La déformation plastique cesse dès que l'aire de contact devient suffisante pour supporter la contrainte locale appliquée au niveau de l'interface.

Le phénomène de déformation des surfaces de contact se poursuit lors du maintien à la température du soudage par un mécanisme de viscoplasticité dépendant du temps (déformation par fluage). A la fin de cette première phase, l'interface apparaît comme une alternance de pores dans la zone de contact.

Deuxième phase : élimination des cavités par mécanisme de diffusion (Figure 1.1. c-d).

Lors de cette deuxième phase le mécanisme de fluage devient insignifiant et celui de diffusion prépondérant. Les vides présents à l'interface se combent et la plupart d'entre eux disparaissent par diffusion des atomes à travers l'interface. Ce phénomène traduit une tendance vers la réduction de l'énergie superficielle. La morphologie des grains dans la zone inter faciale tend alors à se modifier jusqu'à ce qu'elle devienne similaire à celle des autres grains du métal de base.

Trois modes de diffusion sont à priori possibles : diffusion en volume, diffusion inter faciale et diffusion de surface.

La diffusivité en volume étant faible, le processus est alors gouverné par la migration atomique à travers les joints de grains, en particulier ceux engendrés par l'interface de soudage initiale (diffusion d'interface). Il est également gouverné par le flux atomique entre deux zones de la surface de cavité ayant des rayons de courbure différents (diffusion de surface).

Vers la fin de l'opération, les vides résiduels restent emprisonnés à l'intérieur de certains grains. Ces vides résiduels n'étant plus en contact avec un joint de grain, ils ne peuvent alors être éliminés que par diffusion en volume.

En résumé, le processus de soudage par diffusion comporte schématiquement deux phases ; la première phase (l'établissement de contact physique) se fait par déformation plastique et viscoplastique (fluage) de l'interface de soudage. La deuxième phase correspond à la résorption des vides issus de la phase précédente, par diffusion atomique.

1.4. Influence des paramètres opératoires sur le soudage par diffusion.

La plupart des paramètres opératoires agissant sur une opération de soudage par diffusion sont interdépendants. Cependant, pour faciliter la présentation de leur influence sur le processus de liaison et sur la qualité du joint soudé, nous considérerons séparément les effets de chacun d'entre eux.

1.4.1. Température de soudage.

La température de soudage est probablement le paramètre opératoire le plus important [4,8,11], car les mécanismes de déformation plastique, de fluage et de diffusion mis en jeu dans le soudage dans le processus sont des phénomènes thermiquement activés. Cependant, d'un point de vue pratique, pour que le soudage ait lieu en phase solide, il faut que la température de soudage soit inférieure à la température de fusion du métal de base. Certaines considérations métallurgiques, telles que la formation d'une phase fragile, peuvent également

conduire à limiter la température de soudage [1]. Généralement la température optimale de soudage est comprise entre 0.5 et 0.8 fois la température de fusion du métal de base [3,12].

Durant la phase d'établissement du contact physique (première phase), l'augmentation de la température engendre une diminution du seuil d'écoulement du matériau le rendant ainsi plus ductile, ce qui favorise le développement de la jonction. La cinétique de déformation par fluage devient également plus importante pour des températures plus élevées.

Pendant la deuxième phase du processus, l'élévation de la température permet d'accroître le mouvement des atomes et par-là l'augmentation de la vitesse de diffusion atomique et donc la vitesse d'élimination des vides de l'interface[6,11,13].

L'effet quantitatif de la température sur la diffusion est exprimé par la relation :

$$D = D_0 e^{Q/RT}$$

avec

Q : énergie d'activation (l'énergie de liaison inter atomique) (joule/mole),

R : constante des gaz parfaits (joule/mole.k°)

T : température en kelvin,

D₀ : coefficient lié aux fréquences de vibration des atomes (m²/s).

Cette expression montre qu'une élévation de la température entraîne une augmentation rapide du processus de diffusion.

1.4.2. Temps de soudage.

Les mécanismes de fluage et de diffusion décrites précédemment dépendent du temps aussi bien que de la température. Pour une diffusion unidirectionnelle, la distance moyenne X parcourue par un atome qui diffuse s'exprime en fonction du temps par la relation:

$$X = k\sqrt{Dt}$$

avec k : Constante de proportionnalité,

D : coefficient de diffusion,

t : temps.

En pratique, la durée de l'opération est fonction des autres paramètres notamment, la pression et la température de soudage [11]. Elle doit être suffisamment longue pour permettre l'élimination complète des cavités par diffusion des atomes vers l'interface et des lacunes hors de l'interface. Il convient toutefois de remarquer que, dans certains cas, la prolongation du temps de soudage se traduit par une fragilisation, notamment lorsque des composés intermétalliques se développent [14]. Généralement le temps du soudage peut varier entre quelques secondes et une ou plusieurs heures.

1.4.3. Pression de soudage.

L'application de la pression de soudage permet de réaliser le contact intime des surfaces, par écoulement plastique et viscoplastique des micro-aspérités. Cet écoulement au niveau de l'interface permet, d'une part, de rompre le film d'oxyde superficiel et, d'autre part, de combler une grande partie des vides engendrés par les aspérités de surface. L'augmentation de la pression de soudage peut donc accroître la vitesse de l'opération. Cet accroissement aura lieu non seulement lors du première phase du processus mais également pendant l'élimination des porosités par diffusion[1,12]. Toutefois, cet accroissement est limité. En effet, des contraintes élevées ne permettent pas forcément d'éliminer des irrégularités de surface trop importantes et peuvent conduire à des déformations inacceptables des pièces.

En plus de son rôle dans l'établissement du contact intime des surfaces, la pression peut avoir d'autres effets favorables sur la réalisation de la jonction, tels que la création d'un plus grand nombre de lacunes pour la diffusion des atomes[1], ainsi que la germination-croissance des grains au voisinage de l'interface.

En soudage par diffusion, les pressions utilisées se situent, pour de nombreux métaux et alliages, dans un domaine compris entre 2MPa et 40MPa [13]. Dans certains cas, elles peuvent atteindre 70MPa, par exemple pour des matériaux tels que le molybdène et le tungstène.

1.4.4. Etat de surface.

La qualité de l'état de surface est un paramètre important car il conditionne la possibilité de migration des atomes d'une pièce à l'autre. Ce paramètre peut être considéré sous deux aspects : la micro géométrie (rugosité) et la physico-chimie.

a) La micro géométrie : c'est le paramètre qui détermine le nombre de points de contact entre les deux pièces au début de l'opération. Il détermine également la taille et la forme des pores engendrés après l'application de la pression. Une rugosité trop importante génère, à l'issue de la phase de déformation mécanique, des vides de taille importante qu'il sera difficile et long d'éliminer pendant les phases ultérieures de soudage[2,6]. Cependant, un accroissement de la température et/ou de la pression de soudage peut parfois compenser l'effet d'une plus grande rugosité.

b) La physico-chimie des surfaces : Elle est déterminée par la présence d'agents contaminants tels que les films d'oxyde et les films gazeux. Ce paramètre joue également un rôle prépondérant dans la formation du joint. Néanmoins, il est très difficile d'appréhender et de prévoir analytiquement l'influence de la physico-chimie sur les caractéristiques mécaniques de la liaison. En effet, dans tous les modèles théoriques proposés jusqu'à présent, seul l'aspect géométrique des surfaces est pris en compte.

1.4.5. Atmosphère de soudage.

Une opération de soudage par diffusion requiert, en plus d'une propreté initiale des surfaces, une protection de celles-ci contre les contaminants pendant toute la durée de l'opération de soudage.

Cette protection est généralement assurée par une atmosphère contrôlée ou par un vide suffisamment poussé (de l'ordre de 10^{-1} à 10^{-2} Pa) [13,14].

II Modèles analytiques du soudage par diffusion

2.1 Généralités.

La technique de soudage par diffusion connaît une utilisation de plus en plus accrue, en tant que procédé de jonction des pièces métalliques. L'industrie aéronautique, aérospatiale et l'assemblage des pièces en superalliage, sont des exemples typiques des champs d'application du procédé. Des matériaux familiers tels que les aciers au carbone ont pu être assemblés économiquement sans recours à un vide très poussé ni à des temps de maintien extrêmement élevés[15].

Malgré la place importante que le procédé ait prise parmi les autres techniques d'assemblage, les différents mécanismes qui le gouvernent ne sont pas complètement élucidés. Ceci est dû à la diversité et à la complexité des phénomènes mis en jeu par ce procédé. En conséquence, les conditions opératoires optimales (température, pression, rugosité) étaient généralement déterminées par les méthodes expérimentales par essais et erreur [5], à qui exige naturellement un grand nombre d'essais. Il est donc avantageux de pouvoir diminuer le nombre d'essais pratiques, et ceci est possible si le processus de soudage peut être déterminé à l'avance à l'aide d'un modèle théorique.

Dans cet objectif, différents modèles ont été conçus durant les deux dernières décennies par plusieurs auteurs. Dans chacun de ces modèles, il a été d'abord procédé à l'identification des mécanismes mis en jeu ensuite sont établies les équations exprimant la contribution de chaque mécanisme dans le processus de formation du joint de soudage.

Les mécanismes mis en jeu et qui peuvent être objet de modélisation ont été décrits dans le premier chapitre. Ces phénomènes ont été énumérés par Wallach et al [12,16] :

- 1- Liaison atomique entre les couches superficielles des deux surfaces,
- 2- Présence d'une couche d'oxyde et/ou des contaminants sur les surfaces à souder,
- 3- Déformation plastique instantanée,
- 4- Transfert de masse en phase vapeur,
- 5- La recristallisation,
- 6- Déformation viscoplastique par fluage,
- 7- Diffusion atomique à travers la surface du soudage.

L'adhésion chimique entre les atomes des deux surfaces est supposée se produire facilement et instantanément, dès qu'il y a contact intime entre les deux surfaces. Elle ne contrôle donc pas

le processus de croissance de la surface de soudage. Cette croissance est gouvernée, en fait, par les processus dépendant du temps.

L'effet de l'existence d'une couche d'oxyde sur la vitesse de formation du joint n'est pas pris en compte par les modèles établis jusqu'à maintenant [16,17]. Cela est dû, d'une part, à la difficulté de quantifier et de prévoir analytiquement l'influence de la physico-chimie de la surface sur le processus de formation du joint, et d'autre part au fait qu'à haute température et à l'exception du cas des métaux avec des oxydes insolubles tel que l'aluminium, les oxydes sont dissous rapidement dans le métal de base lors du maintien à la température du soudage.

La déformation plastique se produit instantanément, elle ne contribue donc pas à la cinétique de formation du joint. Souvent, la phase du contact plastique initiale est considérée comme le 'stade zéro' de l'opération du soudage par diffusion[16] et le processus de formation du joint s'entreprend avec un taux de soudage différent de zéro dû à la déformation plastique.

Le transfert de matière en phase vapeur à l'intérieur du vide est un mécanisme dans lequel les atomes sont transportés de la surface du pore vers l'interface de soudage en croissance en passant par l'état gazeux. Ce mécanisme n'est pas pris en compte dans la présente étude étant donné qu'il ne joue pas un rôle primordial dans l'opération de soudage des métaux, selon la plupart des auteurs [12].

La recristallisation joue un rôle considérable dans le soudage des alliages à grains fin tel que les métaux superplastiques. Ce type de matériaux nécessite un traitement particulier qui sort du cadre du présent travail. Certains modèles conçus pour la modélisation du soudage des alliages superplastiques considèrent que la recristallisation est accélérée par la diffusion intergranulaire supplémentaire induite par la taille réduite des grains[18].

Cependant, les deux mécanismes prépondérants dans le processus de formation de la soudure sont la déformation viscoplastique par fluage et le transfert atomique dans la zone de soudage. Le mécanisme de fluage est prédominant pour des pressions de soudage élevées [20], alors que le mécanisme de la diffusion contrôle l'opération pour de faibles contraintes de soudage. Souvent, les deux mécanismes agissent simultanément[19]. Le premier est prédominant durant la phase du développement du contact physique (première phase de l'opération), la diffusion, elle, est prédominante lors de la phase de résorption des pores résiduelle (deuxième stade). Les conditions opératoires déterminent la part de la contribution de chacun des deux mécanismes.

2.2. Le soudage sous contrôle de fluage et de la diffusion.

Tous les modèles développés par différents auteurs tiennent compte de la contribution de ces deux mécanismes dans le processus de résorption des cavités. Cependant, le taux de résorption des vides calculé par les différents modèles n'est pas toujours équivalent. Ceci résulte de la

différence dans la modélisation de chacun des mécanismes et de la manière de combiner leur contribution.

Deux approches ont été adoptées dans la modélisation du processus. La première assimile le processus de formation du joint de soudage par diffusion à un processus de formation des liaisons entre les particules d'une poudre métallique lors d'une opération de frittage sous pression Takahashi [19,20,21], Guo-Ridley [22] et Ashby [23]. Cette approche stipule que le transfert de matière n'est pas influencé par les phénomènes de déformation de la matière au voisinage de l'interface, et que les mécanismes diffusionnels se produisent indépendamment du fluage. Le taux de variation de volume de la cavité est donc la somme de la contribution de chacun des deux mécanismes.

La deuxième approche fait appel aux modèles qui traitent de la croissance des vides dans une éprouvette métallique soumise à une force de traction constante à haute température (essai de fluage). Dans ces conditions, des vides apparaissent au niveau des joints de grains, le volume de ces vides tend à croître en fonction du temps du maintien jusqu'à la rupture du matériau sous l'effet combiné du fluage et de la diffusion. Contrairement aux cas de frittage, les deux mécanismes sont interdépendants dans cette approche [18]. Selon Chen et Argon, le fluage agit sur la diffusion en modifiant la distance de migration des atomes. Ce modèle a été appliqué par Pilling [18] au soudage par diffusion en considérant que les vides de l'interface de soudage sont en décroissance lors du maintien. Le modèle de Pilling traite le cas des matériaux superplastiques dont les grains sont très fins, ce qui favorise les mécanismes de résorption à travers les joints des grains selon un processus similaire à celui qui se produit dans l'essai de traction à haute température.

L'objectif de ce travail est l'étude du processus de formation du joint de soudage sous contrôle de fluage. La première approche a été utilisée dans le but de modéliser le processus de fluage indépendamment de la diffusion étant donné que l'approche inspirée de l'essai de traction à haute température donne lieu à un modèle unifié qui tient compte de chacun des deux mécanismes. L'idée est de travailler avec des paramètres opératoires, en particulier la pression du soudage, correspondant au domaine où le fluage est prédominant. Afin de déterminer ce domaine, nous incluons également les équations qui quantifient analytiquement la contribution de la diffusion.

2.3. Origine du comportement de fluage.

Le fluage joue un rôle très important en soudage par diffusion et souvent prédomine pour des pressions de soudage élevées. Avant d'établir les équations relatives aux vitesses de soudage sous contrôle de fluage, il est nécessaire de préciser les types de fluage qui peuvent être rencontrés en soudage par diffusion de sorte que les lois de comportement qui en découlent

puissent être explicitées. Pour ce faire, les mécanismes responsables du fluage à l'échelle de la microstructure sont brièvement passés en revue.

Le fluage se rencontre avant tout dans les métaux et alliages opérant à des températures élevées. Il correspond à un comportement viscoplastique dans lequel la déformation permanente est fonction du temps. Différents types de fluage sont rencontrés à des hautes températures. Selon l'amplitude de la contrainte imposée et l'activation thermique, on distingue[24,25]:

1- *Fluage par glissement des dislocations:*

Il est engendré par le mouvement des dislocations le long d'un plan de glissement. Dans ce mécanisme les obstacles qui peuvent empêcher le mouvement des dislocations (tels que les précipités et atomes en solution solide) sont surmontés par activation thermique. Ce type de fluage correspond à des contraintes élevées : $\sigma/G > 10^{-2}$

où σ et G représentent la contrainte appliquée et le module de cisaillement respectivement.

2- *Fluage par montée de dislocations:*

Observé pour des contraintes de valeurs moyennes: $10^{-4} < \sigma/G < 10^{-2}$

Le mouvement des dislocations est bloqué par une barrière qui peut être un joint de grain ou un empilement d'autres dislocations. A des températures élevées, cette barrière peut être surmontée par montée et annihilation des dislocations permettant ainsi une relaxation des contraintes. Ce processus se répète dès que la dislocation rencontre un autre obstacle.

Selon Dieter [24] ce type de fluage donne lieu a une loi de comportement en puissance:

$$\dot{\epsilon}_e = \frac{A_0 D_v G b}{KT} \left(\frac{\sigma_e}{G} \right)^n \quad (2.1)$$

Où σ_e et $\dot{\epsilon}_e$ représentent respectivement la contrainte équivalente et la vitesse de déformation équivalente.

A_0 : une constante adimensionnelle de fluage.

n : Exposant de la contrainte,

b : Vecteur de Burger (m),

K : Constante de Boltzman (joule/k^o),

T : Température absolue,

G : Module de cisaillement (N/m²),

D_v : Coefficient de diffusion (m²/s)

Des essais expérimentaux réalisés sur une large gamme de matériaux métalliques ont montré que n peut varier entre 3 et 8.

Le coefficient de diffusion volumique D_v varie en fonction de la température selon

$$D_v = D_{v0} \exp(-Q_v / RT) \quad (2.2)$$

3-Fluage de Coble et de Nabarro-Herring: A haute température ($T \geq 0,7T_f$) et faibles contraintes, on observe souvent une relation linéaire entre la vitesse de déformation et la contrainte appliquée. La déformation se produit alors sans mouvement de dislocation, mais par transfert de matière assuré soit par diffusion transgranulaire (modèle de Herring-Nabarro), soit par diffusion intergranulaire (modèle de Coble). L'énergie d'activation de ce dernier mode de transfert étant plus faible que celle associée à la diffusion volumique, le fluage de Coble opère à plus basse température que le fluage de Herring –Nabarro.

En soudage par diffusion les conditions opératoires font que le fluage est déterminé principalement par le mécanisme de montée de dislocation. Ce fait est confirmé expérimentalement aussi bien pour le frittage que pour le soudage par diffusion. La loi de comportement qui en découle est donc en puissance (équation 2.1).

2.4. considérations géométriques.

Dans le premier chapitre nous avons décrit le rôle important que joue la micro géométrie de la surface dans le processus de soudage. Pour la suite de l'étude, le paramètre rugosité surfacique doit donc être examiné avant de pouvoir résoudre le problème dans le cadre du fluage selon une loi en puissance.

La micro-géométrie est caractérisée par la forme et les dimensions des micro- aspérités. Dans cette étude les aspérités sont considérées de forme triangulaire tel que c'est illustré dans la figure 2.1 a et b. Ce type de rugosité peut résulter d'une opération d'usinage tel que le tournage réalisé sur les pièces avant leur jonction. Après le contact initial suivi de déformation plastique instantanée, le joint de soudage apparaît comme une alternance de vides rhomboédriques de même taille séparée par une zone soudée (figure 2.1 c.)

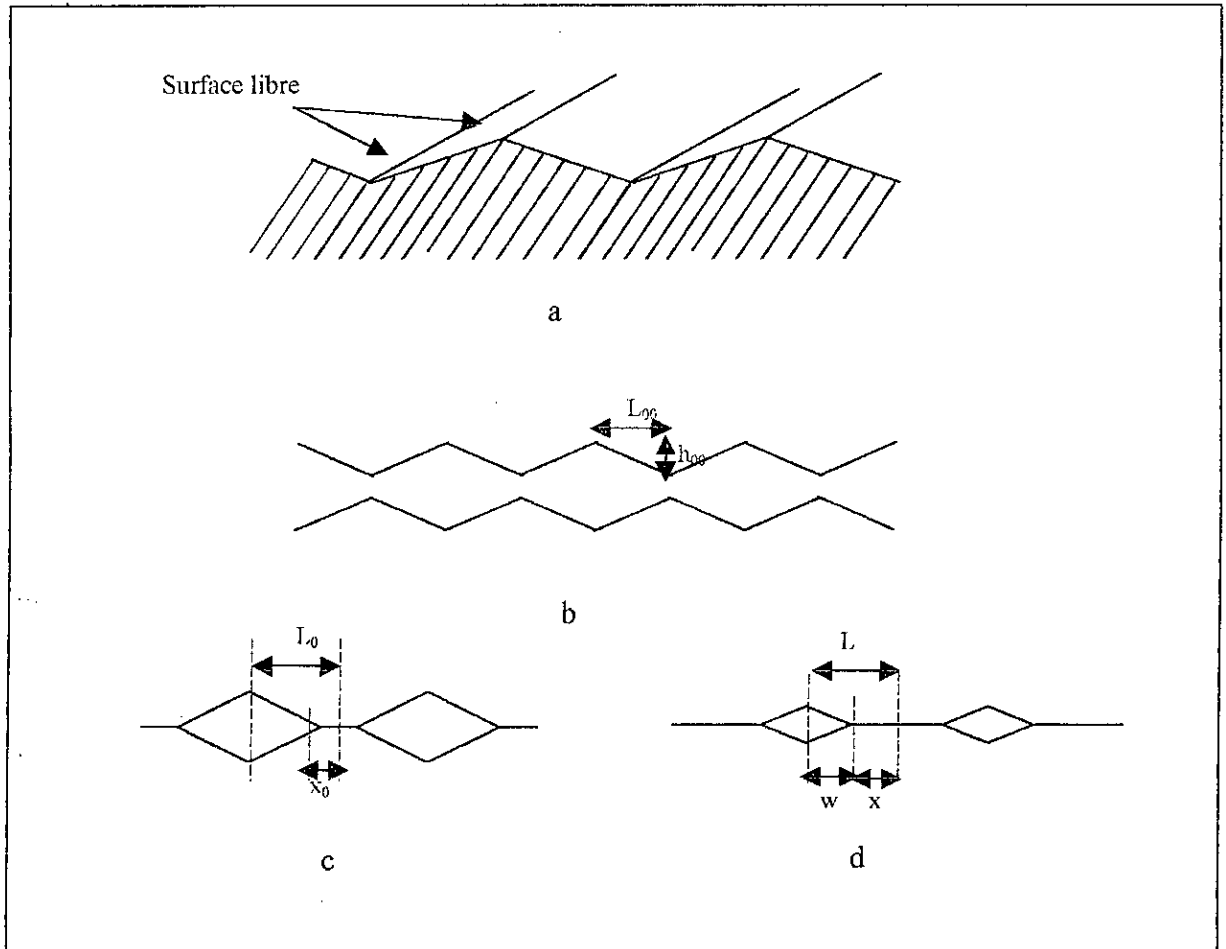


Figure 2.1 : Géométrie de joint de soudage, a) la rugosité triangulaire b) surfaces libres avant le contact pic contre pic c) les vides après contact et déformation plastique instantanée d) vides en cours de résorption

Un autre type de rugosité a été présenté dans la littérature. Guo et Wallach[16,22] ont considéré que les vides sont de forme elliptique. Cette supposition a permis d'inclure l'influence de la diffusion surfacique engendrée par la différence en rayon de courbure entre le sommet et la pointe de l'ellipse. Cette géométrie était également justifiée par des observations expérimentales des joints en cours de soudage, qui présentent des vides de forme proche d'une ellipse. Selon ces travaux, c'est le processus de diffusion qui est responsable de la modification de la géométrie en fonction du temps de maintien.

En fait, les vides observés expérimentalement sont d'une forme généralement complexe. L'hypothèse des cavités rhomboédriques est adoptée dans le but de s'affranchir des problèmes de conditions aux limites que peut poser une géométrie complexe. De plus, pour le cas où le fluage contrôlerait le processus, la forme initiale des vides reste pratiquement inchangée pendant que leur volume se résorbe[20]. C'est la raison pour laquelle la forme des cavités est considérée rhomboédrique durant tout le processus de formation de la soudure.

Pour les modèles traités dans cette étude, la rugosité est supposée toujours régulière, i.e. la distance séparant deux cavités est supposée constante. Toutefois, la rugosité superficielle réelle peut avoir des composantes irrégulières. Dans ce cas il est nécessaire d'évaluer à l'avance les paramètres géométriques des surfaces à l'aide d'un profilomètre [17,19]. Une valeur moyenne de la distance entre deux vides est prise en considération.

Le contact est supposé se produire pic contre pic. Cette situation est la plus probable dans notre cas de figure, si nous considérons que les aspérités triangulaires se présentent sous forme de stries parallèles dans un état tridimensionnel. En outre, le contact pic contre pic correspond à un temps de soudage maximal puisque un contact pic- vallée correspond à une surface d'accostage plus grande facilitant ainsi le soudage[16]. Dans la pratique des temps de soudage inférieur peuvent être observés et donc le temps estimé par le modèle est largement suffisant pour la résorption complète.

La figure 2.1d montre les paramètres géométriques caractérisant le processus de formation du joint de soudage:

x : Longueur soudée (équivalente à la surface soudée si l'épaisseur unité est considérée)

L : demi-distance séparant deux vides

h et w : hauteur et largeur du vide respectivement.

L_{00} et h_{00} représentent les paramètres de la rugosité avant l'application de la pression de soudage. Usuellement, la hauteur h_{00} est de l'ordre de 0.5 à 20 microns. La longueur L_{00} varie entre 5 et 200 microns[26].

Les deux principales variables qui permettent de suivre le processus de formation de la soudure sont:

- La fraction de la surface de soudée s donnée par : $s = \frac{x}{L}$

Le taux de résorption des cavités, qui est déterminé par l'évolution du volume du vide V en fonction du temps. Le volume d'un vide rhomboédrique est donné par: $V = 2hw$

2.5. Description des modèles analytiques faisant appel au fluage.

Le fluage en soudage par diffusion est le mécanisme par lequel une cavité est résorbée par la déformation viscoplastique de la matière qui l'entoure[16,19,22]. Cette déformation est produite sous l'effet de la force de compression totale agissant à l'interface. Cette force est la résultante de la pression extérieure et de la tension superficielle à la surface de vide [12]. En cas de pressions de soudage élevées ou de rugosités importantes, la pression est seule responsable de la déformation viscoplastique.

La déformation viscoplastique doit se maintenir localisée à l'échelle du joint de soudage (micro - fluage) . Une déformation macroscopique est indésirable car elle provoque des distorsions difficiles à corriger au niveau de la pièce. La contrainte de soudage doit donc être inférieure à limite élastique macroscopique du matériau.

Afin de comprendre quantitativement la contribution du fluage selon une loi en puissance au processus d'éliminations des vides, différents modèles ont été établis séparément[16,19,22].

Wilkinson et Ashby [23] ont proposé en premier un modèle de résorption de cavité pour le cas du frittage sous pression. Dans ce modèle les vides sont considérés de forme sphérique et le problème est amené à une déformation d'une coque sphérique sujette à une pression interne et externe, la pression interne est due à la présence d'un gaz à l'intérieur du vide. Dans ce modèle l'équation exprimant la vitesse de résorption de la cavité dans les premiers stades de l'opération est différente de celle donnant le taux de résorption des pores durant la deuxième phase de l'opération.

Ce modèle a été suivi par celui de Derby et Wallach [27] et Takahashi [19] qui modifient le modèle de Wilkinson et Ashby afin de l'adapter à un problème de soudage par diffusion en travaillant dans un cas bidimensionnel. Derby et Wallach ont considéré que les vides sont de forme cylindrique alors que pour Takahashi les vides sont rhomboédriques.

Séparément, Garmong et al [28] ont proposé un modèle dans lequel l'aspérité en déformation est divisée en tranches de même épaisseur, chaque tranche se déforme uniformément sous l'effet de la contrainte locale. Ce modèle à été modifié par Guo et Ridley[22] qui considèrent une cavité de forme cylindrique et en tiennent compte de l'effet de la déformation plastique initiale instantanée.

Une autre approche a été utilisée par Hill et Wallach[16], basée sur les travaux de Mc Clintock et Hancock[19] sur le comportement d'un vide isolé dans un matériau sous sollicitation mécanique. Ce modèle ne tient pas compte des interactions possibles entre les vides adjacents au niveau de la soudure. Toutefois, cette interaction diminue fortement au fur et à mesure de la résorption de ces cavités.

En somme, il existe trois sortes de modèles de résorption des vides par le fluage selon une loi en puissance: Le modèle de Takahashi et al.[22,23,24] qui fait appel au modèle de Wilkinson et Ashby sur le frittage, le modèle de Guo et Ridley [35] basé sur le modèle de Garmong et al et le modèle de Hill et Wallach[37] établi à partir des travaux de Hancock. Beaucoup de modèles traitant du fluage en soudage par diffusion font appel à l'une de ces trois approches. C'est la raison pour laquelle il existe une différence remarquable entre les résultats donnés par les différents modèles, bien qu'ils fassent tous appel au fluage selon une loi en puissance.

Dans la présente étude les trois modèles ont été appliqués dans des conditions qui permettent la comparaison entre les résultats donnés par chaque modèle. En effet, la géométrie des cavités est toujours considérée rhomboédrique et les constantes expérimentales relatives au matériau sont identiques.

2.7 Modèle de Guo et Ridley.

Pour calculer la déformation d'un aspérité qui s'aplatit sous l'effet du contact avec un autre aspérité, Guo et Ridley[22] ont repris l'idée de Garmong et al [22] selon laquelle l'aspérité est divisée en N tranches de même épaisseur δ_y ($\delta_y = h/N$) et parallèles à la base de l'aspérité (figure 2.2). Chaque aspérité se déforme uniformément sous l'effet de la contrainte locale. La déformation totale est donc la somme des déformations relative à chaque tranche.

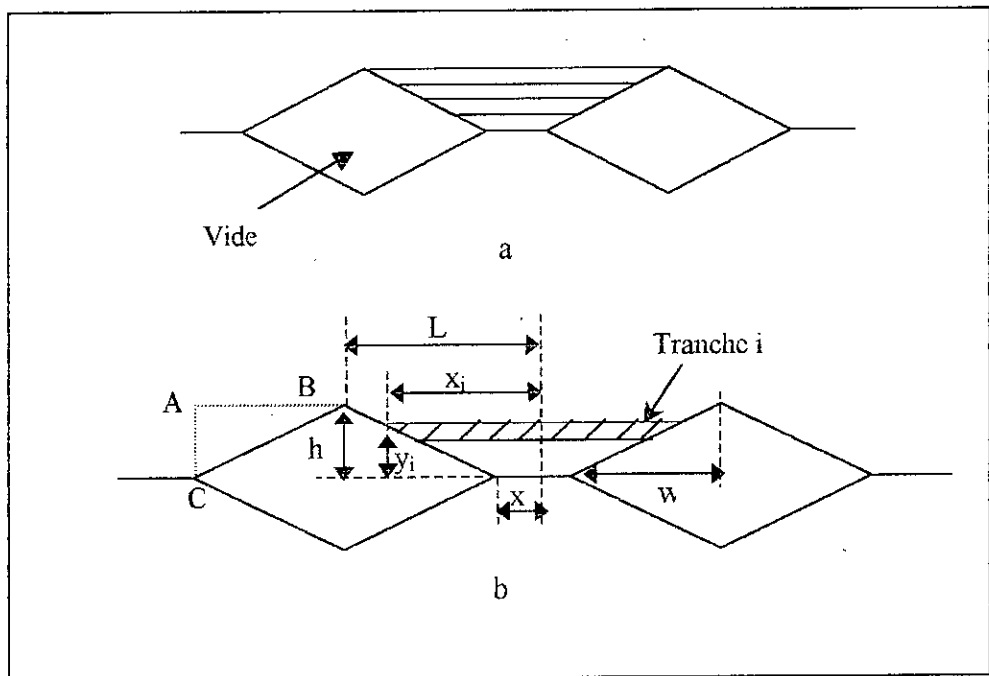


Figure 2.2 : Géométrie relative au modèle de Guo-Ridley a) modèle de l'aspérité divisée en tranche b) grandeurs caractéristiques d'une tranche i

En travaillant dans les conditions de déformation plane, on obtient, d'après l'équation de conservation de masse,

$$\dot{\epsilon}_{xi} + \dot{\epsilon}_{yi} = 0 \quad (2.3)$$

ou : $\dot{\epsilon}_{xi}$ et $\dot{\epsilon}_{yi}$ représentent le taux de déformation de la tranche (i) dans les direction x et y .

Le fluage se produit suivant une loi de comportement en puissance ce qui donne :

$$\dot{\epsilon}_x = -\dot{\epsilon}_y = -A_p \left(\frac{\sigma_i}{G} \right)^n \quad (2.4)$$

A_p : Constante de fluage relative à l'état de déformation plane ($= A(\sqrt{3}/2)^{n+1}$), où la constante de fluage A est donnée par la relation $A = A_0(D_v G b / kT)$

σ_i : la valeur de la contrainte pour la tranche (i), elle est exprimée par la relation :

$$\sigma_i = (L / X_i) P \quad (2.5)$$

où: X_i : représente la demi-largeur de la tranche (i) et P pression de soudage. A partir des considérations géométriques de la fig.(2.2) on peut démontrer que :

$$x_i = [(L-x)y_i + hx] / h \quad (2.6)$$

La variation $\Delta\delta_y$ de l'épaisseur relative à la tranche (i), pendant un temps Δt est exprimé par la relation :

$$\begin{aligned} \Delta\delta_{yi} &= \dot{\epsilon}_{yi} \cdot dt \cdot \delta_y = -A_p (\sigma_i / G)^n \cdot \Delta t \delta_y \\ &= -A_p \left\{ \frac{L.P}{X_i.G} \right\}^n \left\{ \frac{h}{N} \right\} \Delta t \end{aligned} \quad (2.7)$$

Le rétrécissement en hauteur Δh est la somme des variations des épaisseurs élémentaires de chaque tranche

$$\begin{aligned} \Delta h &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_1^N \Delta\delta_{yi}, \\ \Delta h &= -A_p \left(\frac{P}{G} \right)^n \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_1^N (L/d_i) (h/N) \Delta t \end{aligned} \quad (2.8)$$

La valeur de la vitesse de rétrécissement en hauteur pour la cavité est obtenue par:

$$\dot{h} = \Delta h / \Delta t \quad (2.9)$$

en combinant les relation (2.8) et (2.9) et en transformant la somme en une intégrale, on obtient:

$$\dot{h} = -A_p \left(\frac{P}{G} \right)^n \int_0^L \left(\frac{L}{d} \right) dy \quad (2.10)$$

où $d = \{(L-x)/h\}y + x$

Donc la vitesse de rétrécissement en hauteur est donnée par:

$$\dot{h} = -A_p \left(\frac{P}{G} \right)^n \int_0^L \left(\frac{hL}{(L-x)y + hx} \right)^n dy \quad (2.11)$$

et après intégration

$$\dot{h} = -A_p \left(\frac{P}{G} \right)^n \frac{hL}{(n-1)(L-x)} \left\{ (L/x)^{n-1} - 1 \right\} \quad (2.12)$$

Pour l'obtention de la vitesse de croissance de soudage \dot{x} on utilise la relation de conservation du volume (ABC) figure(2.2) :

$$V_{const} = Lh - 2wh \quad (2.13)$$

En substituant $w = L - x$ et en dérivant par rapport au temps et après réarrangement la vitesse de croissance de soudage est donnée par

$$\dot{x} = -\dot{h}(L + x)/h \quad (2.14)$$

donc
$$\frac{dx}{dt} = -A_p \left(\frac{P}{G}\right)^n \frac{L(L+x)}{(n-1)(L-x)} \left\{ (L/x)^{n-1} - 1 \right\} \quad (2.15)$$

La simulation du processus passe par la résolution de l'équation différentielle

Pour calculer la vitesse de résorption en volume on utilise la relation

$$\dot{V} = 2h\dot{w} + 2\dot{h}w \quad (2.16)$$

obtenu en dérivant l'expression du volume par rapport au temps.

2.7 Modèle de Takahashi.

Ce modèle est basé sur celui de Ashby et Wilkinson conçu à l'origine pour la modélisation du frittage sous pression d'une poudre métallique. Le processus est supposé s'effectuer en deux phases, la première faisant appel à la théorie d'indentation entre deux solides. Dans la deuxième phase la vitesse de soudage est calculée analytiquement par l'analyse de la résorption des vides rhomboédriques sous l'effet de la pression extérieure.

L'indentation entre deux aspérités triangulaires suppose l'existence d'une zone sous compression hydrostatique dans laquelle il y a absence de toute déformation permanente [30]. Cette zone est de forme cylindrique (figure 2.3) et tend à s'accroître avec la déformation de fluage. La zone avoisinante se déforme selon une symétrie cylindrique et peut être assimilée à la déformation d'un cylindre creux.

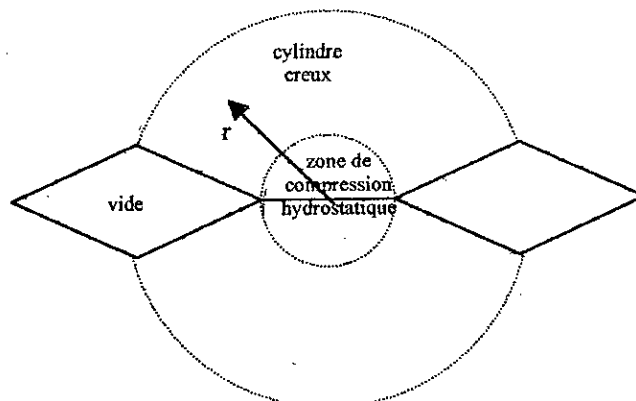


Figure 2.3 Modèle de résorption basé sur la théorie d'indentation.

Une solution du problème était obtenue par Ashby pour le cas d'un système de cordonnées sphériques. Cette dernière analyse peut être utilisée dans le cas d'une symétrie cylindrique. La déformation du cylindre creux se fait sous l'effet de la pression d'indentation ΔP , égale à la différence entre la pression interne et externe

$$\Delta P = (PL/x)_{\text{int}} - (P)_{\text{ext}}$$

$$\Delta P = P \left(\frac{L}{x} - 1 \right) \quad (2.17)$$

Le problème peut être maintenant modélisé. La solution doit satisfaire les équations suivantes

1- L'équation d'équilibre
$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \quad (2.18)$$

2- Les conditions aux limites

$$\sigma_r(x) = P \frac{L}{x} \quad (2.19)$$

$$\sigma_r(L) = P$$

3- L'équation de compatibilité:
$$\frac{d}{dr}(r\dot{\epsilon}_\theta) = \dot{\epsilon}_r \quad (2.20)$$

Sous les conditions de l'état de déformations planes $\dot{\epsilon}_z = 0$ et à partir du principe de conservation de masse $\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_z = 0$ on obtient donc $\dot{\epsilon}_r = -\dot{\epsilon}_\theta$ (2.21)

4- La relation constitutive (loi de comportement)
$$\dot{\epsilon}_e = A \left(\frac{\sigma_e}{G} \right)^n \quad (2.22)$$

Le problème posé ainsi peut être résolu en déterminant d'abord le champ des déformations, ensuite on remplacera l'expression de $\dot{\epsilon}_r$ dans la relation constitutive, les conditions aux limites sont utilisés pour compléter la solution.

En combinant l'équation (2.20) et (2.21) et après intégration:

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{K}{r^2} = -\dot{\epsilon}_\theta \quad (2.23)$$

où K est une constante d'intégration. En substituant ce résultats dans la relation (2.22) et en appliquant le résultats à l'équation d'équilibre (2.18) on obtient :

$$d\sigma_r = -\frac{1}{r} \left(\frac{K}{A_p r^2} \right)^{1/n} dr \quad (2.24)$$

En intégrant cette relation entre les limites données par l'équation (2.19) et en résolvant l'équation obtenue par rapport à K on aura

En intégrant cette relation entre les limites données par l'équation (2.19) et en résolvant l'équation obtenue par rapport à K on aura

$$K = \frac{A_p r^2}{\left[1 - \left(\frac{r}{L}\right)^{2/n}\right]^n} \left\{ \frac{2P}{nG} \left(\frac{L}{x} - 1\right) \right\}^n \quad (2.25)$$

En substituant ce résultats dans la relation (2.23) pour $r=x$ et en tenant compte que la composante radiale de la déformation est donnée par $\dot{\epsilon}_r = \frac{\dot{r}}{r} = \frac{\dot{x}}{x}$, la vitesse de croissance

suivant x est obtenue par l'équation

pour $r = x$ (rayon intérieur du cylindre)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A_p x}{\left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^{2/n}\right]^n} \left\{ \frac{2P}{nG} \left(\frac{L}{x} - 1\right) \right\}^n \quad (2.26)$$

Durant le deuxième stade, les vides toujours de forme rhomboédrique se résorbent sous l'effet de la pression extérieure. La formulation précédente peut être reprise dans le cas de déformations planes (x, y) afin de calculer la déformation autour du vide.

Dans ces conditions, la déformation suivant x est obtenue en modifiant la relation (2.26) par rapport au système de coordonnées cartésienne (x, y) à l'état de déformations planes et en considérant que la pression extérieure est l'unique force motrice du processus de résorption du vide ($\Delta P = P_{ext}$)

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\dot{x}}{x} = \frac{A_p}{\left[1 - \left(\frac{w}{L}\right)^{2/n}\right]^n} \left\{ \frac{2P}{nG} \right\}^n \quad (2.27)$$

donc la vitesse de croissance de soudage pour $s > 50\%$ est donnée par

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A_p x}{\left[1 - \left(\frac{w}{L}\right)^{2/n}\right]^n} \left\{ \frac{2P}{nG} \right\}^n \quad (2.28)$$

La vitesse de croissance de soudage durant le deuxième stade ($s > 50\%$) est obtenue en résolvant l'équation différentielle (2.28)

2.8 Modèle de Hill et Wallach.

Ce modèle est basé sur des travaux antérieurs sur l'analyse des variations du volume d'un vide se trouvant dans un matériau sous sollicitation mécanique. Une solution en plasticité a été donnée par Mc Clintock [29] dans le cas d'un vide elliptique. Cette étude a été suivie par les

travaux de Hancock [31] pour l'étude de la croissance de vide pour un matériau en fluage suivant une loi en puissance. Hill et Wallach ont appliqué ce modèle à un cas de soudage par diffusion en considérant que les vides dans la zone de l'interface de soudage sont de forme cylindrique. De même que les deux modèles précédents, la forme des vides est amenée à une forme rhomboédrique afin de comparer entre les différents modèles

On définit les grandeurs R et M comme suit :

$$R = \frac{w+h}{2}, R_0 = \frac{w_0+h_0}{2} \quad \text{et} \quad M = \frac{w-h}{w+h} \quad M_0 = \frac{w_0-h_0}{w_0+h_0} \quad (2.29)$$

D'après Hancock, pour le cas de déformation plane, la relation suivante est vérifiée.

$$\ln \frac{R}{R_0} = \frac{\sqrt{3}\varepsilon_e}{2(1-1/n)} \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3}(1-1/n)(\sigma_x + \sigma_y)}{2\sigma_e} \right\} \quad (2.30)$$

$$\text{et } M = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_x + \sigma_y} \left[M_0 - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_x + \sigma_y} \right] \left[-\frac{\sqrt{3}\varepsilon_e}{1-1/n} \sinh \left(\frac{\sqrt{3}(1-1/n)(\sigma_x + \sigma_y)}{2\sigma_e} \right) \right] \quad (2.31)$$

Expressions dans lesquels $\sinh(x)$ représente le sinus hyperbolique de x , $(\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2})$

et $\dot{\varepsilon}_e^{\text{II}}$ représente la vitesse de déformation équivalente

$$\text{On considère d'après les conditions de sollicitation que } \sigma_x = 0 \text{ et } \sigma_y = -P \quad (2.32)$$

$$\text{En état de déformation plane, on utilise la relation } \sigma_z = (\sigma_x + \sigma_y)/2 \quad (2.33)$$

La contrainte équivalente est donnée par

$$\sigma_e = \left[\frac{2}{9} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 \right\} \right]^{1/2} \quad (2.34)$$

En combinant les relations (2.32) (2.33) (2.34) pour l'obtention de l'expression de la vitesse de déformation équivalente $\dot{\varepsilon}_e^{\text{II}}$:

$$\dot{\varepsilon}_e^{\text{II}} = A \left(\frac{\sigma_e}{G} \right) = A \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n \left(\frac{P}{G} \right)^n \quad (2.35)$$

Si nous dérivons les équations (2.30) et (2.31) par rapport au temps

$$\frac{\dot{R}}{R_0} = \frac{\sqrt{3}\dot{\epsilon}_e}{2(1-1/n)} \sinh(1-1/n) \quad (2.36)$$

$$\frac{\dot{M}}{M-1} = \frac{\sqrt{3}\dot{\epsilon}_e}{(1-1/n)\sinh(1-1/n)} \quad (2.36)$$

A partir la relation (2.29) on peut écrire $h = R(1-M)$

Après différenciation par rapport au temps :

$$\dot{h} = \dot{R}(1-M) - MR \quad (2.38)$$

La substitution de R , M , R^u et M^u dans cette dernière équation l'équation donne

$$\dot{h} = -\frac{h}{2} \frac{\sqrt{3}\dot{\epsilon}_e}{(1-1/n)} \sinh(1-1/n) \quad (2.39)$$

Pour l'obtention de la vitesse de croissance de soudage \dot{x} on utilise la relation de conservation de volume

$$\dot{x} = -\dot{h}(L+x)/h$$

En substituant l'expression de \dot{h} dans cette dernière relation on obtient

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{L+x}{2} \frac{\sqrt{3}\dot{\epsilon}_e}{(1-1/n)} \sinh(1-1/n) \quad (2.40)$$

Cette dernière équation représente l'équation différentielle régissant le processus de résorption.

2.9 Résorption des vides par le mécanisme de diffusion.[20]

Dans le but de déterminer les conditions opératoires pour lesquelles le fluage est prédominant, il est nécessaire de tenir compte des phénomènes diffusionnels. Le but recherché n'est pas l'examen complet de la contribution des phénomènes de transport sur le processus, mais uniquement de délimiter le domaine pression correspondant à la prédominance du fluage. Pour ce faire, des calculs incluant la vitesse de résorption par diffusion doivent être réalisés. Il est donc indispensable de passer en revue les différentes sortes de diffusion qui participent au processus de résorption.

Le mécanisme de diffusion est principalement un flux d'atomes au voisinage de l'interface. Parce que s'intéresse dans notre étude uniquement au soudage des métaux pur, le mécanisme correspond à un processus d'auto diffusion. Ce dernier est gouverné par le déplacement des lacunes à partir de la surface intérieure du vide (les atomes se déplacent en sens inverse et résorbent ainsi le pore), le mouvement des atomes (donc des lacunes en sens inverse) se fait

généralement suivant des chemins préférentiels, ceci donne lieu à trois types de diffusion (figure 2.4):

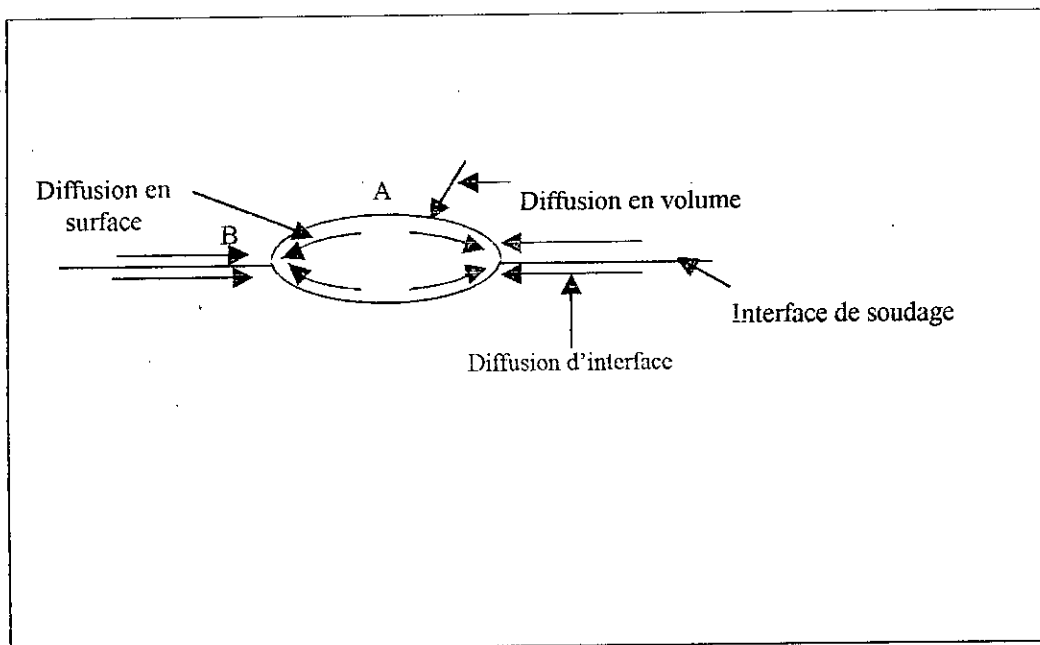


Figure 2.4: Différents types de transfert de matière autour d'une cavité à l'interface de soudage [20]

La diffusion en volume: engendrée par la différence de concentration en lacunes entre le joint de la soudure et le volume de la pièce.

La diffusion en surface : engendrée par la différence en tension de surface (donc la différence en rayon de courbure) entre la zone A et B (figure 2.4), les atomes se déplacent de A vers B.

La diffusion d'interface : C'est le transfert de matière qui s'opère le long de l'interface de soudage. Elle est similaire à la diffusion intergranulaire. Cette dernière n'est pas prise en compte dans cette étude, en considérant qu'il ne s'agit pas d'un matériau à grains fin et que le chemin de ce type de diffusion est exclusivement l'interface de soudage.

La résorption du pore par diffusion est due uniquement à l'action de la diffusion d'interface et de volume. La diffusion de surface agit uniquement dans le sens de modification de la forme du vide et n'a pas d'effet sur la diminution de son volume.

Takahashi et al ont établi l'équation quantifiant la vitesse de résorption du vide à partir du modèle de Raj et Ashby[20]. Le déplacement du corps rigide à été pris en considération.

La vitesse de résorption de volume due à la diffusion interfaciale est donnée par

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_B = \frac{6\Omega\delta_b D_b L}{kTX^2} \left(\frac{L}{X} P - \frac{\gamma_s}{r}\right) \quad (2.41)$$

Expression dans laquelle $\left(\frac{dV}{dt}\right)_B$ représente la contribution de la diffusion d'interface dans la vitesse de résorption du volume de cavité.

Ω : volume atomique

δ_b : épaisseur de la région de frontière

D_b : Coefficient d'autodiffusion à l'interface

γ_s : énergie de surface

r: rayon de courbure

k: constante de Boltzman

T: température absolue

La vitesse correspondante à la diffusion de volume est exprimée par:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_v = \left(\frac{dv}{dt}\right)_B \frac{2D_v L}{\pi\delta_b D_b} \quad (2.42)$$

La vitesse totale de taux de résorption par diffusion est donnée par

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_v = \left(\frac{dv}{dt}\right)_B \left(1 + \frac{2D_v L}{\pi\delta_b D_b}\right) \quad (2.43)$$

III Concepts d'éléments finis

3.1. Introduction.

La simulation numérique est en passe de devenir un outil de mise au point aussi important que les essais expérimentaux. Les difficultés rencontrées par les ingénieurs dans l'analyse de leurs conceptions et projets sur ordinateurs sont dues à la complexité de la géométrie, variation des propriétés du phénomène étudié, ainsi que beaucoup d'autres liées à l'implémentation, l'instabilité et l'exploitation des méthodes utilisées.

L'outil le plus efficace, actuellement utilisé pour surmonter ces problèmes, est la méthode des éléments finis (MEF) dont le principe de base consiste à discrétiser le domaine géométrique en sous domaines simples appelés éléments finis (ayants des dimensions finies non infinitésimales), utiliser l'approximation nodale sur chaque élément puis assembler pour reconstituer le domaine originel. Ceci permet de choisir un maillage irrégulier et non structuré pour discrétiser des domaines comportant une géométrie complexe ou des frontières variées. De plus la formulation faible des lois permet de représenter les conditions aux limites plus facilement.

Les méthodes des différences finies et volumes finis sont traditionnellement basées sur un maillage structuré. Pour des géométries simples ces méthodes sont faciles à mettre en œuvre. La méthode d'intégrales aux frontières (ou d'éléments de frontières) se base sur la discrétisation des contours du domaine et ramène le problème posé sur tout le domaine à ses limites. Ceci peut entraîner des difficultés d'intégration en présence de points anguleux tels que les coins (discontinuité de la dérivée du contour).

L'inconvénient majeur de la méthode des éléments finis réside dans sa complexité car elle demande beaucoup plus de mathématique et de programmation que les autres[32].

La méthode des éléments finis est le fruit de deux domaines de recherche : mathématiques et sciences de l'ingénieur[33,34,35].

Dans la suite du chapitre, nous essayerons de présenter d'une manière simplifiée, les étapes d'application de la méthode des éléments finis et les outils nécessaires.

3.2. Grandes lignes de la méthode.

La résolution d'un problème physique par éléments finis suit en général les étapes suivantes (figure3.1):

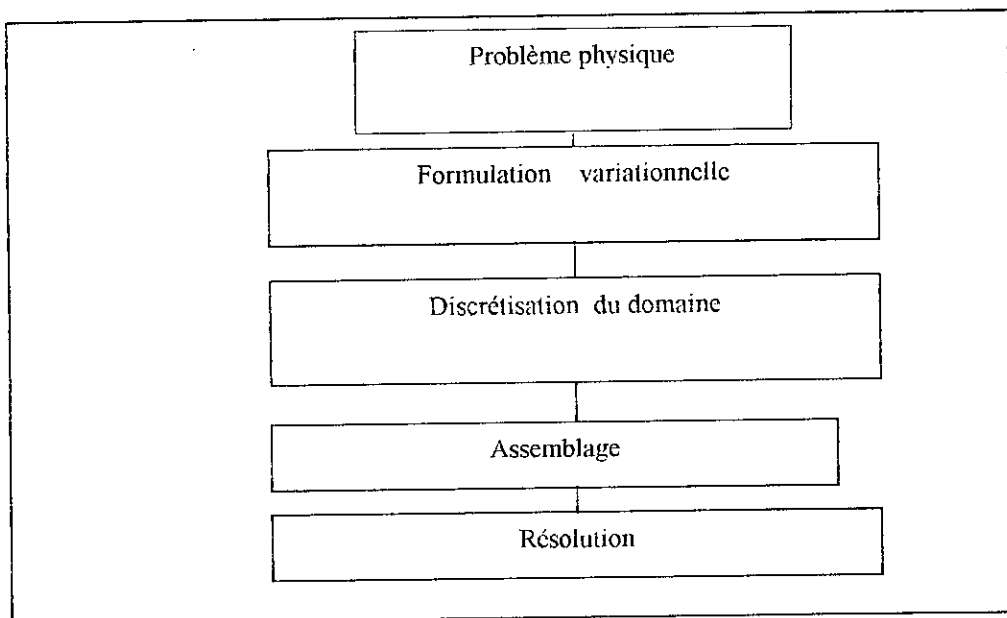


Figure 3.1 :Grandes lignes de la méthode des éléments finis

Etape 1 : formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites. La majorité des problèmes d'ingénierie sont décrits par des équations différentielles ou au dérivées partielles associées à des condition aux limites définies sur un domaine et son contour.

L'application de la MEF exige une réécriture de ces équations sous forme intégrale. La formulation faible est souvent utilisée pour inclure les conditions aux limites.

Etape2 : division de domaine en sous domaine. Cette étape consiste à discrétiser le domaine en éléments et calculer les connectivités de chacun ainsi que les coordonnées de ses nœuds, elle constitue donc la préparation des données géométriques.

Etape 3 : approximation sur un élément :dans chaque élément la variable tel que le déplacement, la pression, la température,... est approximée par une simple fonction linéaire ou polynomiale ou autre. Le degré du polynôme d'interpolation est relié au nombre de nœuds de l'élément. L'approximation nodale est appropriée. C'est dans cette étape que se fait la construction des matrices élémentaires.

Etape 4 : Assemblage :Toutes les propriétés de l'élément (masse, rigidité...) doivent être assemblées afin de former le système algébrique pour les valeurs nodales des variables physiques. C'est à ce niveau qu'on utilise les connectivités calculées à l'étape 2 pour construire les matrices globales à partir des matrices élémentaires.

Etape 5 : résolution de système global: Le système global peut être linéaire ou non linéaire il définit soit :

- un problème d'équilibre qui concerne un cas stationnaire ou statique. Les méthodes de résolution utilisées sont les méthodes usuelles(élimination de Gauss, factorisation).

- Un problème de valeur critiques où il faut déterminer les valeurs et vecteurs propres du système qui correspondent généralement aux fréquences et modes propres d'un système physique.
- Un problème de propagation qui concerne le cas transitoire (non stationnaire) dans lequel il faut déterminer les variations dans le temps des variables physiques et la propagation d'une valeur initiale. Les méthodes d'intégration pas à pas sont les plus fréquentes.

A ces méthodes doivent être associés des techniques d'itération pour traiter les cas non linéaires. La plus célèbre est la méthode de Newton. Raphson.

3.3. Formulation variationnelle [35,36,37].

Les problèmes de physique et de l'ingénierie donnent naissance à des formulations mathématiques qui sont, en général, posées en termes d'équations différentielles, ou aux dérivées partielles, avec des conditions aux limites. Ceci revient à rechercher une fonction u qui doit satisfaire un certain nombre d'équations dans un domaine V (Figure 3.2),

$$A(u) = \begin{Bmatrix} A_1(u) \\ A_2(u) \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

ainsi que les conditions aux limites $B_1(u)=0$ sur le bord du domaine S :

$$B(u) = \begin{Bmatrix} B_1(u) \\ B_2(u) \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

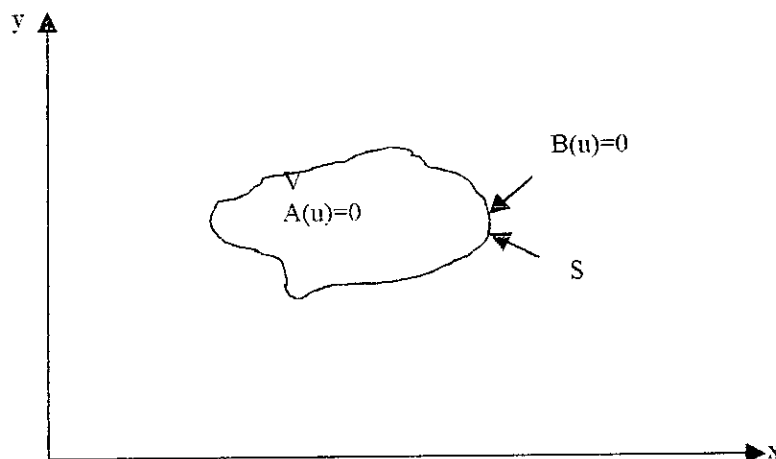


Figure 3.2 : formulation du problème physique

La méthode des éléments finis cherche la solution de système (3.1) et (3.2) sous la forme approchée suivante :

$$u = \sum_i^n N_i u_i \quad (3.3)$$

où les N_i sont les fonctions de forme dépendant de coordonnées x et y . et les u_i sont les valeurs recherchées de la fonction (u) aux nœuds.

La formulation variationnelle consiste en l'écriture de système d'équation (3.1) et (3.2) sous une forme intégrale :

$$\int_V G(u) dV + \int_S g(u) dS = 0 \quad (3.4)$$

Dans laquelle G et g sont des fonctions ou des opérateurs connus. Pour obtenir une telle formulation, nous disposons de deux procédés :

3.3.1. Méthode de résidus pondérés.

La méthode des résidus pondérés connue sous le nom de méthode de 'Galerkine', consiste à trouver la fonction (u) qui satisfait la relation :

$$\int_V \Psi A(u) dV = 0 \quad (3.5)$$

où : Ψ est une fonction quelconque

Si l'équation (3.5) est satisfaite pour toute valeur de Ψ , alors l'équation différentielle (3.1) est satisfaite en tout point de V [32].

3.3.2. Fonctionnelles variationnelles.

La seconde manière pour l'établissement de la formulation variationnelle est la recherche d'une fonctionnelle variationnelle (Π). Une fonctionnelle est une quantité scalaire définie par une intégrale de la forme :

$$\Pi = \int_V F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right) dV + \int_S E\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right) dS \quad (3.6)$$

Où u est la fonction inconnue, F et E sont des opérateurs connus, la solution de problème considéré est une fonction u qui rend (Π) stationnaire par rapport à de petites variations δu , ainsi pour une solution de problème continue, la variation de Π est nulles : $\delta \Pi = 0$.

Dès que nous pouvons trouver une fonctionnelle, il en résulte immédiatement un moyen d'obtenir une formulation variationnelle sous une forme intégrale pour l'analyse en élément finis.

Le principe variationnel tel qu'il a été posé en dessus est dit naturel. Cependant, il existe une autre catégorie de principes variationnels appelés 'artificiels' ou principes variationnels avec contraintes et qui font appel aux multiplicateurs de Lagrange.

3.3.3. Principes variationnels avec contraintes.

Nous voulons rendre stationnaire une fonctionnelle. La fonction inconnue u devant satisfaire certaines relations différentielles supplémentaires.

$$C(u) = 0 \quad \text{dans } V \quad (3.7)$$

Pour introduire cette contrainte, nous pouvons former une nouvelle fonctionnelle $\bar{\Pi}(u)$

$$\bar{\Pi}(u, \lambda) = \Pi(u) + \int_V \lambda^T C(u) dV \quad (3.8)$$

Les fonctions λ sont appelées multiplicateurs de Lagrange.

Il apparaît donc possible d'inclure n'importe quelle condition supplémentaire (contrainte) en introduisant les fonctions additionnelles λ et de modifier ainsi la fonctionnelle.

3.3.4. Stationnarité de la fonctionnelle avec contraintes

D'après l'équation (3.8), la variation de la fonctionnelle $\bar{\Pi}$ est :

$$\delta \bar{\Pi} = \delta \Pi + \int_V \delta \lambda^T C(u) dV + \int_V \lambda^T C(u) dV \quad (3.9)$$

Elle est nulle à condition que $C(u) = 0$ et que simultanément $\delta \Pi = 0$

et si $\delta \Pi$ s'exprime de la forme :

$$\delta \Pi = \int_V \delta u^T A(u) dV$$

on obtient à partir de la relation (3.9), la relation:

$$\delta \bar{\Pi} = \int_V \delta u^T A(u) dV + \int_V \lambda^T C(u) dV + \int_V \lambda^T \delta C dV \quad (3.10)$$

Dans l'étape de discrétisation les fonctions u et λ s'écrivent sous la forme :

$$u = \sum N_i u_i = N u$$

$$\lambda = \sum N_{\lambda i} \lambda_i = N_{\lambda} \lambda$$

$$(3.11)$$

où N_u et N_{λ} sont les fonctions de formes relatives à l'approximation de u et λ respectivement.

En incluant ces relations dans (3.10) pour le cas de contrainte linéaire $C(u) = L_1 u + c_1$

La variation de la fonctionnelle ($\bar{\Pi}$) s'écrit donc :

$$\delta \bar{\Pi} = \delta u^T \int_V N_u^T A(u) dV + \delta \lambda^T \int_V N_{\lambda}^T (L_1 u + c_1) dV + \delta u^T \int_V (L_1 u)^T \lambda d\Omega = 0 \quad (3.12)$$

cela doit être vrai pour toute variation δa et δb , nous obtenons un système de deux équations

$$\begin{cases} \int_V N_u^T A(u) dV + \int_V (L_1 N_u)^T \lambda dV = 0 \\ \int_V N_{\lambda}^T (L_1 u + c_1) dV = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

3.4. Discrétisation du domaine :

la MEF est une méthode d'approximation par sous domaines, donc avant toute application il faut diviser le domaine à étudier en éléments. Chaque élément est défini géométriquement par un nombre de noeuds bien déterminé qui constituent en général ses sommets. (figure.3.3)

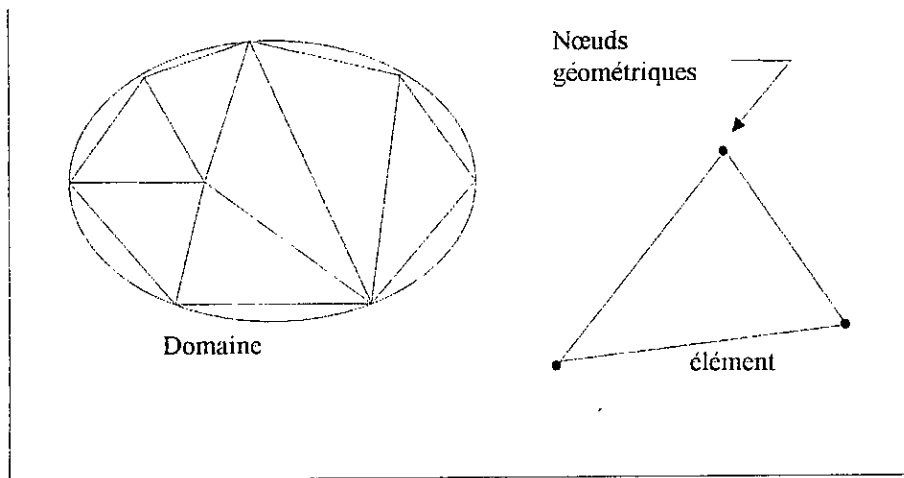


Figure3.3: Exemple de discrétisation

Pour cela, on doit respecter les règles suivantes : [32]

- 1)- Un noeud d'un élément ne doit jamais être intérieur à un côté d'un autre du même type. (fig.3.4a)
- 2)- Aucun élément bidimensionnel ne doit être plat/ éviter les angles trop proches de 0° ou de 180° . (fig.3.4b).
- 3)- Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés dans leurs frontières communes. Cela exclut le recouvrement. (fig.3.4c)
- 4)- L'ensemble de tous les éléments doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné. Cela exclut les trous entre éléments. (fig.3.4d)

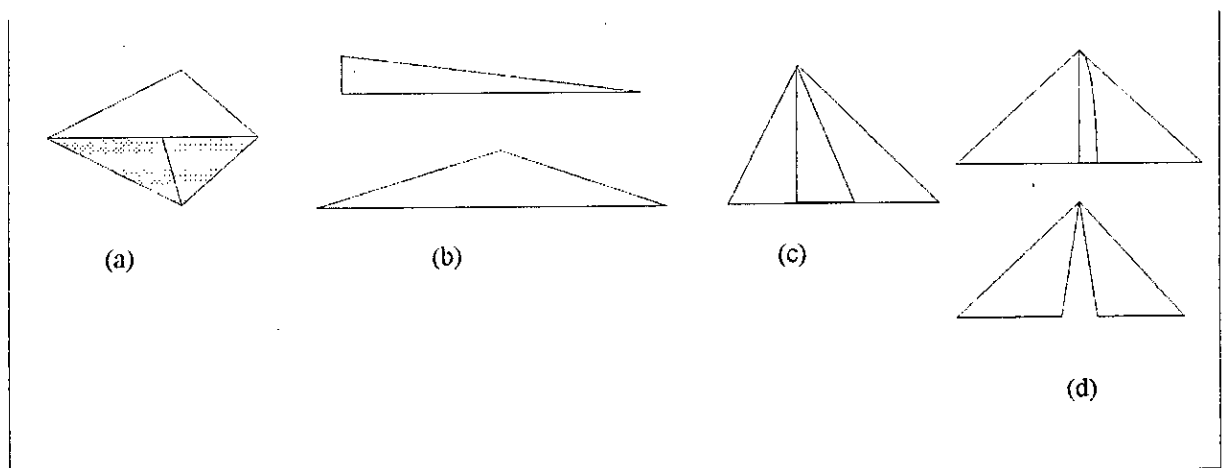


Figure 3.4 : Situations à exclure

Le résultat du procédé doit contenir deux données essentielles qui sont les coordonnées des nœuds et les connectivités des éléments. On doit numéroter tous les nœuds et les éléments de façon à avoir des matrices globales à petite largeur de bande. Pour cela, la numérotation se fait selon la plus petite largeur du domaine. (fig.3.5)

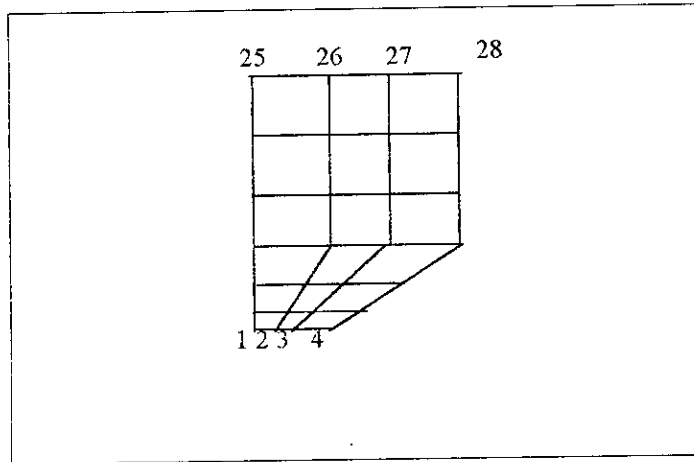


Figure 3.5 : Exemples de numérotation des nœuds

3.5 Approximation sur l'élément.

Après avoir défini l'élément, on peut remplacer la fonction exacte par une autre approximative. On utilise souvent des polynômes ou des fonctions faciles à mettre en œuvre sur ordinateur[34].

3.5.1. Approximation polynomiale nodale.

$$\text{La fonction approchée est exprimée par : } u = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (3.14)$$

$$\text{qui s'écrit sous la forme : } \langle f_n \rangle \{a_n\} \equiv f_n a_n \quad (3.15)$$

Cette forme d'approximation est appelée polynomiale. Si on exprime la fonction sur tous les nœuds on aurait :

$$u_i = \langle f_{ij} \rangle \{a_j\} \quad \text{pour chaque nœud} \quad (3.16)$$

$$\{u_n\} = \begin{bmatrix} \langle f_{1j} \rangle \{a_j\} \\ \langle \dots \rangle \{.. \} \\ \langle f_{nj} \rangle \{a_j\} \end{bmatrix} = f_n a_n \quad (3.17)$$

avec : u_n : valeurs aux nœuds.

f_n : valeurs des polynômes au nœud $x = (x_i, y_i)$.

a_n : variables généralisées.

De (3.16), on peut tirer les a_n :

$$a_n = P_n^{-1} u_n \quad (3.18)$$

qu'on remplace dans (3.14)

$$u = \langle P \rangle [P_n]^{-1} \{ u_n \} = \langle N \rangle \{ u_n \} \quad (3.19)$$

C'est la forme la plus utilisée par le fait que ses variables sont les valeurs de la fonction aux nœuds, donc la résolution donne directement ces valeurs et permet d'éviter leur calcul à l'avance. Elle est appelée approximation nodale.

3.5.2 Élément de référence.

Pour des éléments à nombre de nœuds élevé ou à côtés curvilignes, la formulation devient complexe et leur manipulation plus lourde. On pense évidemment aux expressions telles que les dérivées et les intégrales. L'idée est de ramener le problème à un plan de référence de manière à standardiser les formules, c'est à dire définir un élément de forme très simple qui peut être transformé en chaque élément réel par une transformation géométrique, et de construire des fonctions de forme en coordonnées locales. (figure 3.6)

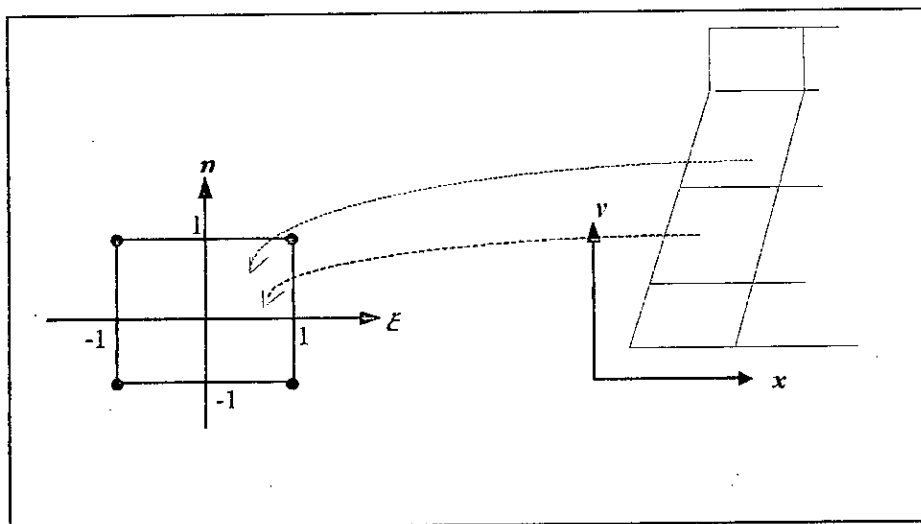


Figure 3.6 : élément réel et élément de référence

Cette méthode s'applique de manière générale, à condition qu'il existe une relation bijective

entre les coordonnées cartésiennes $\mathbf{X} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ et les coordonnées locales $\boldsymbol{\xi} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}$. Soit $X = f(\xi)$.

La méthode la plus simple pour déterminer les formules de transformation de coordonnées consiste à utiliser les fonctions de forme standard déjà calculées pour représenter la variable inconnue sur l'élément de référence

$$x = N\{x_n\} \quad y = N\{y_n\} \quad (3.20)$$

où les N_i sont maintenant exprimés en fonction de ξ et η . Plusieurs éléments sont présentés avec leur formulation dans la plupart des ouvrages sur les éléments finis[32,34,38].

3.5.3. Jacobien et transformation de coordonnées.

Dans ce qui suit nous allons montrer comment exprimer les dérivées et les intégrales en fonction des coordonnées de références par le biais du Jacobien de l'élément réel. Les écritures sont restreintes au cas de deux dimensions :

$$\text{On a : } x = \langle N(\xi, \eta) \rangle \{X_n\}, \quad y = \langle N(\xi, \eta) \rangle \{Y_n\} \quad (3.21)$$

donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial \xi} = \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} = \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \equiv \begin{Bmatrix} N_{,\xi} \\ N_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{,x} \\ N_{,y} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\text{ou bien } N_{,\xi} = J N_{,x} \quad (3.23)$$

la matrice J est appelée matrice jacobienne de l'élément.

Explicitons $x_{,\xi}$ et $y_{,\xi}$ dans J on obtient :

$$[J] = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \{x_n\} & \langle N_{,\xi} \rangle \{y_n\} \\ \langle N_{,\eta} \rangle \{x_n\} & \langle N_{,\eta} \rangle \{y_n\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \\ \langle N_{,\eta} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{x_n\} \\ \{y_n\} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Expression des dérivées :

Pour exprimer les dérivées dans le plan de référence il suffit de multiplier les expressions données dans le plan physique par l'inverse de la matrice jacobienne.

$$N_{,x} = J^{-1} N_{,\xi} \quad (3.25)$$

Expression de $dx \cdot dy$:

Dans le calcul des intégrales de volume $dx \cdot dy$ doit être écrite en fonction de $d\xi \cdot d\eta$

$$dx = dN \cdot X_n, \quad dy = dN \cdot Y_n \quad (3.26)$$

$$dN = N_{,\xi} d\xi + N_{,\eta} d\eta \quad (3.27)$$

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \{x_n\} & \langle N_{,\eta} \rangle \{x_n\} \\ \langle N_{,\xi} \rangle \{y_n\} & \langle N_{,\eta} \rangle \{y_n\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x_n \rangle \{N_{,\xi}\} & \langle x_n \rangle \{N_{,\eta}\} \\ \langle y_n \rangle \{N_{,\xi}\} & \langle y_n \rangle \{N_{,\eta}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x_n \rangle \\ \langle y_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{N_{,\xi}\} & \{N_{,\eta}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = [J]^T \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}$$

$$\text{Donc } dx \cdot dy = \det([J]^T) d\xi \cdot d\eta = \det(J) d\xi \cdot d\eta \quad (3.29)$$

3.5.4. Construction des matrices élémentaires.

Jusqu'à maintenant, nous avons vu presque tous les outils nécessaires pour la définition d'un élément. Il convient donc de passer à leur utilisation pour discrétiser les formes intégrales dans le but construire les matrices élémentaires correspondantes. Commençons, tout d'abord, par exprimer les différents opérateurs agissant sur u . On a :

$$u = \langle N \rangle \{u_n\} \equiv N u_n$$

$$\text{La perturbation } \delta u = \delta(N u_n) = N \delta u_n \quad (3.30)$$

puisque la perturbation n'agit que sur u , N étant un polynôme de x, y .

Pour pouvoir simplifier δu_n des équations générales, il est commode d'écrire :

$$\delta u = \delta u^T \cdot N^T \equiv \langle \delta u_n^T \rangle \{N\} \quad (3.31)$$

Le gradient est composé de $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ s'exprime par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \langle \frac{\partial N}{\partial x} \rangle \{u_n\} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \langle \frac{\partial N}{\partial y} \rangle \{u_n\} \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\text{d'où : } \nabla u = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial N}{\partial x} \rangle \\ \langle \frac{\partial N}{\partial y} \rangle \end{bmatrix} \{u_n\} \equiv \nabla N u_n \quad (3.33)$$

$$\text{et la divergence : } \nabla^T u = \nabla^T N \cdot u_n$$

La dérivée par rapport au temps est :

$$\partial u / \partial t = \langle N \rangle \{ \partial u_n / \partial t \} \equiv N \cdot \dot{u}_n \quad (3.34)$$

Dans ce qui suit, il reste à évaluer les intégrales des combinaisons de ces opérateurs. Deux manières sont possibles :

- Intégration explicite sur l'élément de référence (ou réel), ce qui donne l'expression exacte de chaque élément de la matrice.

Exemple : dans la référence [32], l'auteur donne la forme explicite de la matrice de rigidité pour les éléments triangulaire et rectangulaire.

- *Intégration numérique* : utilisant souvent la quadrature de Gauss, qui consiste à remplacer l'intégrale d'une fonction par une somme des valeurs pondérées de cette fonction en des points bien déterminés[32].

$$\int_{\Omega} f(x,y) d\Omega = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i, y_i) \quad (3.36)$$

avec n : nombre de points de Gauss

w_i : poids correspondants

3.6. Assemblage -Matrices globales.

Afin d'obtenir la solution complète d'un système physique, il faut que la condition d'équilibre global soit satisfaite. Comme cette condition est vérifiée à l'intérieur de chaque élément (par la formulation de la matrice élémentaire), il ne nous reste donc, qu'à la vérifier au niveau de chaque nœud. Pour cela, on doit déterminer les contributions de tous les éléments auxquels un nœud "i" appartient pour les égaliser avec l'excitation extérieure appliquée en ce nœud.

Autrement dit, on doit situer chaque élément de la matrice élémentaire dans la matrice globale, et le sommer avec la valeur existante qui est le résultat des contributions des autres matrices élémentaires. Cet emplacement dans la matrice globale n'est qu'une localisation de la variable élémentaire dans la variable globale. Des techniques et algorithmes d'assemblage sont bien traités dans les références.[32,33]

3.7. La résolution

Le passage par les étapes décrites dans les sections précédentes a pour but de substituer le problème posé en termes d'équations aux dérivées partielles, par un système d'équations algébriques équivalent

$$KU = F \quad (3.36)$$

où K est une matrice à structure de bande appelée matrice de rigidité, U est un vecteur contenant les valeurs de la grandeur recherchée pour chaque nœud et le vecteur représentant les forces de sollicitation. Ce système définit un équilibre entre les forces extérieures de sollicitation, et de réactions internes.

Les méthodes de résolution du système (3.36) sont de deux types:

- *Méthodes directes*: Ce sont des méthodes qui permettent de donner la solution du système tout en évitant de calculer explicitement la matrice inverse de K . Les méthodes directes sont les plus robustes et ont l'avantage de donner la solution exacte, à la précision de

l'ordinateur prés. Parmi ces méthodes, les plus répandues sont: la méthode de Gauss, la méthode de Crout et de Cholesky.

- *Méthodes itératives:* A l'inverse des méthodes directes, les méthodes itératives permettent de converger vers la solution du système, à une précision donnée prés, par approximations successives. Parmi ces méthodes on peut citer : les méthodes de Jacobi , de Gauss-Seidel et les méthodes de gradient simple et gradient conjugué.

Dans le cas d'un système non linéaire, ces méthodes doivent être associées à des algorithmes permettant de traiter ce type de problèmes. Parmi ces méthodes, les plus utilisées sont la méthode de Newton-Raphson et la méthode de substitution.

La résolution d'un problème non stationnaire se fait généralement de manière récurrente i.e. on suppose connus l'état du système à t et on cherche à calculer son état à $t+\Delta t$. Ce schéma de calcul est réaliser suivant soit, deux approches peuvent être utilisées: Approche explicite et approche implicite.

3.8. Convergence de la méthode des éléments finis.

Puisque le domaine idéalisé par cette méthode est un assemblage d'éléments, donc, la performance de l'analyse dépend essentiellement du nombre d'élément utilisé et l'approximation dans chacun. La solution doit converger quand le nombre d'éléments augmente, sous réserve que l'élément soit complet et compatible c'est à dire conforme.

On note ici que "complet", veut dire que les déplacements du corps rigide doivent être effectués par l'élément sans se déformer ni développer des contraintes à l'intérieur. En d'autres termes l'approximation doit utiliser au moins une base polynomiale complète jusqu'à l'ordre m si des dérivées jusqu'à cet ordre apparaissent dans la formulation. Et que "compatible", assure la continuité de la fonction dans l'élément et entre éléments.

Pour poser ces conditions de convergence, Zienkiewicz[32] énonce trois (3) critères que la fonction représentative des déplacements (fonction d'interpolation) doit satisfaire :

Critère 1 : Il est impossible que l'élément se déforme quand les déplacements de ses nœuds sont causés par un mouvement de corps solide.

Critère 2 : Si les déplacements nodaux correspondent à des déformations constantes, on obtient effectivement ces déformations.

Critère 3 : Les déformations aux interfaces restent bornées.

Les deux premiers critères ne doivent être satisfaits qu'à la limite lorsque la taille des éléments tend vers zéro. La convergence obtenue quand la taille des éléments tend vers zéro s'appelle convergence h (h : taille de l'élément).

D'un autre côté, nous pouvons obtenir la convergence vers la solution exacte en fixant une fois pour toute la taille des éléments et en augmentant le degré p des polynômes dans chaque

élément (nombre de nœud). Dans ce cas, on parle de convergence p . D'une manière générale, la convergence p est la plus rapide.

Pour conclure nous pouvons confirmer, d'après cet exposé, que la MEF est facilement exploitable et peut toucher plusieurs domaines.

IV Modélisation du processus d'adhésion viscoplastique par la méthode des éléments finis

4.1-Introduction.

Dans le deuxième chapitre nous avons examiné les modèles analytiques permettant de simuler le processus de croissance de la surface de soudage sous contrôle du fluage selon une loi en puissance. Ces modèles permettent de prévoir la durée de l'opération et d'optimiser les conditions opératoires. L'approche analytique a donné lieu à des résultats intéressants qui ont fait l'objet de nombreuses validations expérimentales.

Cependant, les modèles analytiques sont basés sur des approximations simplificatrices concernant le champ de sollicitation ainsi que la géométrie du problème. De plus, certains aspects importants du processus d'adhésion ne peuvent être résolus par les modèles analytiques. Nous pouvons citer par exemple la distribution des champs de contraintes et de déformations au voisinage de la zone de soudure ainsi que le champ des vitesses. A côté de ces limitations, on peut rajouter le problème des conditions aux limites lié au fait que les modèles analytiques sont d'origines différentes. Cette situation fait que l'applicabilité des modèles analytiques est difficile à déterminer.

Dans le but d'une compréhension plus approfondie du processus de contact, et pour compléter l'étude des paramètres qui ne peuvent être analysés par les modèles analytiques, nous présentons dans ce chapitre un modèle de processus de résorption des cavités basé sur la méthode des éléments finis. Les principes de cette méthode ont été exposés dans le précédent chapitre. Il s'agit d'analyser le processus dynamique lié aux phénomènes de grandes déformations qui se produisent à l'interface de soudage.

Le modèle aux éléments finis présenté dans cette étude fait référence à des travaux de simulation réalisés par d'autres auteurs. Tomita et Sowerby ont proposé en premier un modèle de simulation de la dynamique des déformations viscoplastique autour d'un vide isolé dans matériau superplastique[39]. Plus récemment, un modèle de processus de contact viscoplastique basé sur la méthode des éléments finis a été développé par Takahashi et al[26,40,41] dans lequel le processus de formation du joint de soudage est supposé réalisé par la déformation de la matière qui entoure le vide. Cette déformation est assimilée à un écoulement d'un fluide non newtonien caractérisé par une équation constitutive de type puissance.

Le schéma général de la simulation par éléments finis consiste à résoudre les équations d'équilibre sous forme intégrale dans un volume délimité par des surfaces de frontière. Pour ce faire, un maillage du domaine étudié est d'abord réalisé, ensuite l'interpolation est effectuée localement pour chaque élément. L'assemblage des matrices de rigidités élémentaires permettra de construire le système non linéaire et non stationnaire globale qui est appelé à être résolu par une méthode numérique appropriée.

4.2-Modèle de processus de contact interfacial.

La figure 4.1 illustre schématiquement (a) la rugosité des surfaces à souder et (b) l'interface de soudage après la déformation initiale. Pour des raisons de symétrie nous traiterons uniquement la section hachurée de la figure 4.1b. Les conditions géométriques sont donc les mêmes que celles utilisé dans le cas des modèles analytiques: de longues aspérités de forme triangulaire arrangées à des intervalles réguliers comme le montre la figure 4.1, les aspérités sont en contact pic contre pic. Nous adopterons les conditions de l'état de déformation plane.

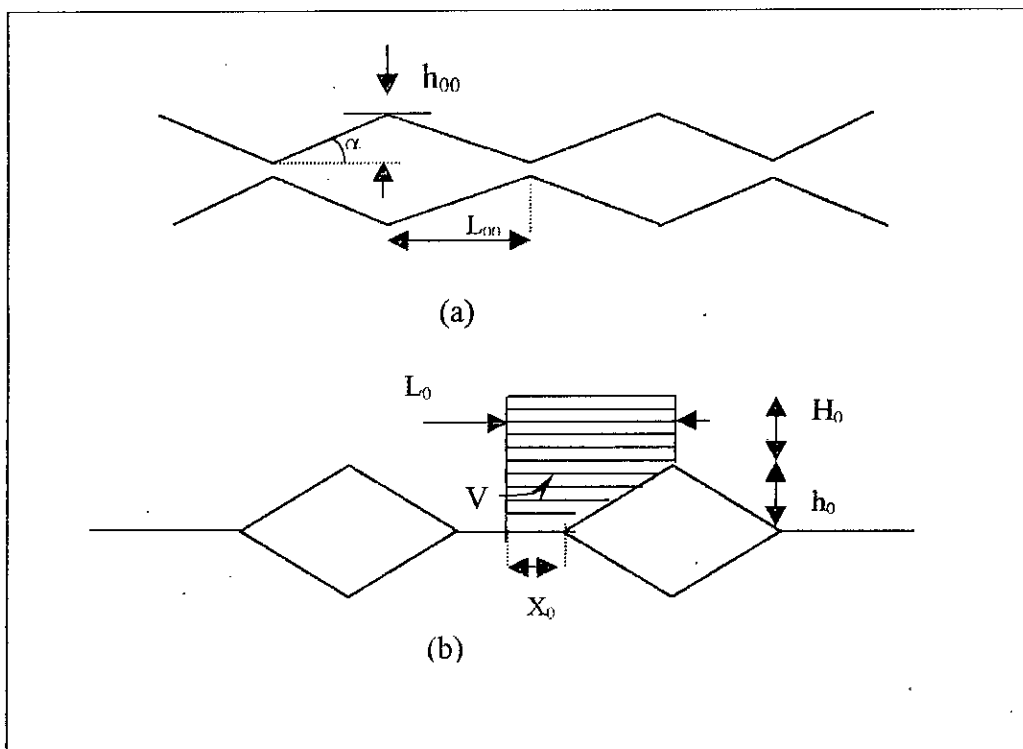


Figure 4.1: Géométrie du problème et domaine étudié

La figure 4.2 illustre le maillage du domaine étudié délimité par le contour OABCD sur lequel sont appliquées les conditions aux limites: S_v est la partie correspondant à des conditions

imposées sur la vitesse et S_T représente la surface du domaine subissant une sollicitation de contrainte et S_C la partie du contour susceptible de rentrer en contact avec l'aspérité opposé.

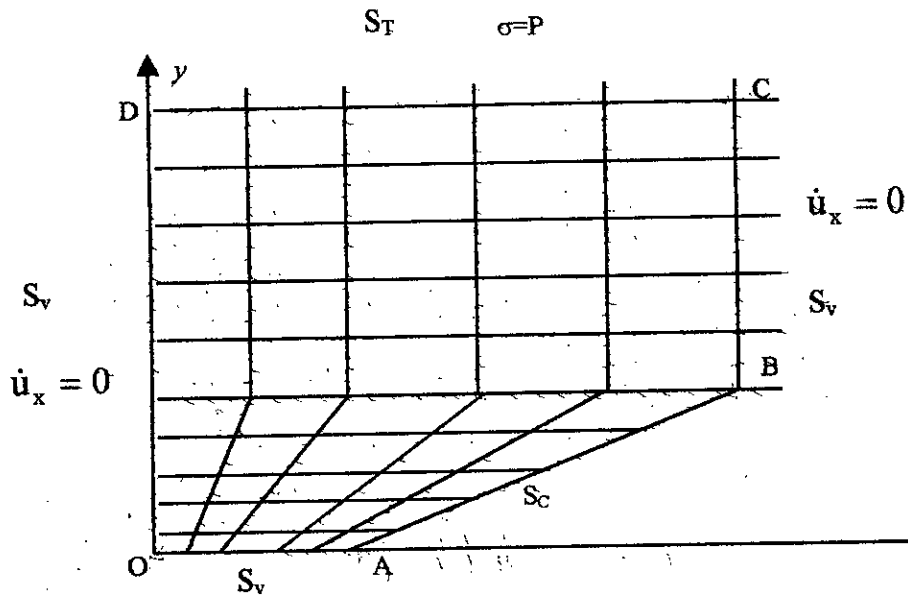


Figure 4.2 : Maillage et conditions aux limites

4.3. Principe des travaux virtuels. [36,37]

Il est bien connu en mécanique du solide que les forces appliquées à un corps sont convertis en énergie cinétique (translation et rotation du corps). Dans le cas d'un solide déformable, il faut tenir compte en outre de l'énergie de déformation.

Les équations d'équilibre d'un volume élémentaire s'écrivent en fonction des composantes du tenseur de contraintes, sous la forme :

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (\text{Grad}v) \cdot v \right] = F_v + \text{div} \sigma \quad (4.1)$$

telle que

$$\text{div} \sigma = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{Grad}v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Dans ces expressions:

σ_{ij} : représentent les composantes du tenseur de contrainte ($i,j= x,y,z$)

v et v_i : vitesse de déplacement et sa composante selon i respectivement

ρ : densité du solide

F_v : force volumique due à la gravité

L'équation 4.1 est appelée l'équation fondamentale de la dynamique. Si nous multiplions cette relation par un champ de vitesse arbitrairement choisi ou virtuel, $v(x,t)$, et que l'on intègre sur le domaine V étudié . On obtient:

$$\int_V \rho a \cdot v dV - \int_V F_v \cdot v dV = \int_V \text{div} \sigma \cdot v dV \quad (4.2)$$

avec $a = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + (\text{Grad} v) \cdot v$ qui représente le vecteur d'accélération.

On peut démontrer aisément que

$$\text{div} \sigma \cdot v = \text{div}(\sigma \cdot v) - \sigma : \dot{\varepsilon} \quad (4.3)$$

Nous avons fait apparaître les vitesses de déformation $\dot{\varepsilon}_{ij}^v$ ainsi que le produit contracté noté ":" de ce tenseur avec celui de contraintes . En introduisant cette relation dans (4.2), il vient avec le théorème de divergence de la formule de Green

$$\int_V \rho a \cdot v dV - \int_V F_v \cdot v dV = \int_S (\sigma \cdot n) \cdot v ds - \int_V \sigma : \dot{\varepsilon} dV \quad (4.4)$$

A la surface S du domaine $\sigma \cdot n$ représente le vecteur des contraintes T lié à la densité surfacique de forces locales de contact. On obtient ainsi le bilan des puissances virtuelles suivant:

$$\int_V F_v \cdot v dV + \int_S T \cdot v ds = \int_V \rho a \cdot v dV - \int_V \sigma : \dot{\varepsilon} dV \quad (4.5)$$

C'est l'expression générale du principe des travaux virtuels. La puissance des efforts extérieurs, exercée conjointement par les forces volumiques et les forces surfaciques est transformée en puissance virtuelle cinétique et en puissance virtuelle de déformation.

4.4. Fonctionnelle viscoplastique.

L'équilibre du domaine V (zone hachurée dans la figure 4.1) à tout instant du processus de soudage est donné par le principe des puissances virtuelles. On a alors, d'après (4.5)

$$\int_V \sigma : \dot{\varepsilon} dV - \int_{S_T} T \cdot v ds = 0 \quad (4.6)$$

Où la surface S_T correspond au segment CD sur lequel est appliquée la pression de soudage.

On remarque que cette écriture néglige le terme relatif aux forces de volumes (forces de gravité) et de celui relatif aux forces d'accélération virtuelles (forces d'inertie). Ceci est bien compréhensible pour le cas du processus d'adhésion viscoplastique à l'interface de soudage.

De surcroît, dans ce cas de figure, on peut introduire la condition d'incompressibilité du volume élémentaire en déformation exprimée[38,42] par la relation

$$\varepsilon_{ii}^0 = 0 \quad \text{tel que } i = x, y, z \quad (4.7)$$

De la même manière explicitée dans §3.3.3 nous pouvons inclure cette condition dans la fonctionnelle (4.6) avec l'introduction des multiplicateurs de Lagrange λ :

$$\int_V \sigma : \dot{\varepsilon} dV - \int_{S_T} T \cdot v dS - \int_V \lambda \dot{\varepsilon}_{ii} dV = 0 \quad (4.8)$$

La solution du problème de déformation en question revient à résoudre à chaque incrément de temps la forme intégrale (4.8). Toutefois il est difficile de résoudre cette équation sous cette forme. Afin de réaliser ultérieurement la discrétisation en éléments finis, il est souvent nécessaire de remplacer la vitesse par la variation admissible de la vitesse virtuelle. Nous obtenons, ainsi en notation matricielle, l'expression du principe des puissances virtuelles généralisé exprimé par :

$$\int_V \delta \{\dot{\varepsilon}\}^T \{\sigma'\} dv - \int_{S_T} \delta \{v\}^T \{T\} ds - \int_V \delta \lambda \{A\}^T \{\dot{\varepsilon}\} dv - \int_V \delta \{\dot{\varepsilon}\}^T \{A\} \lambda dv = 0 \quad (4.9)$$

Où $\delta \{\dot{\varepsilon}\} = \{\delta \dot{\varepsilon}_{ij}\}$, $\{\sigma'\} = \{\sigma'_{ij}\}$, $T = \{T_i\}$, $\delta \{v\} = \{\delta v_i\}$.

$\{A\}$ Est un vecteur utilisé pour la détermination des composantes des taux de déformation en volume. Pour les conditions de déformation plane, le vecteur $\{A\}$ est donné par $\{A\}^T = \langle 110 \rangle$. L'exposant T indique la transposée de la matrice.

A noter que lors du passage de l'équation (4.8) à l'expression (4.9), nous avons remplacé le tenseur des contraintes σ par le tenseur déviateur des contraintes $\{\sigma'\}$ qui contient uniquement les composantes de cisaillement. Ceci est admissible, fréquemment, dans le contexte des déformations viscoplastiques à l'interface de soudage. En effet, les déformations permanentes sont indépendantes de la pression hydrostatique.

4.5. Discrétisation en éléments finis.

Introduisons maintenant la discrétisation dans le domaine étudié de la fonctionnelle viscoplastique donnée dans l'expression (4.9) au moyen de la méthode des éléments finis(chapitre3). Pour cela le domaine V est maillé en éléments finis et on introduit l'interpolation du champ de vitesse et des multiplicateurs de Lagrange.

Pour cela nous adoptons un élément rectangulaire à 8 nœuds pour l'interpolation du champ des vitesses et un élément à 4 nœuds pour le calcul des multiplicateurs de Lagrange. Ce choix

permet de satisfaire les conditions de compatibilité entre les deux types interpolations [32] qui garantissent l'unicité de la solution et sa convergence vers la solution du problème.

Le vecteur vitesse de déplacement est donné dans le système de coordonnées locale (ξ, η) par:

$$\{v\} = [N_v] \{\dot{u}^e\} \quad (4.10)$$

où $N_v = [N_{v1} N_{v2} \dots N_{v8}]$

N_{vi} est exprimé par :

$$N_{vi} = \begin{bmatrix} N_{vi} & 0 \\ 0 & N_{vi} \end{bmatrix}; \quad i = 1,8 \quad (4.11)$$

N_{vi} : fonction de forme pour l'élément quadratique à 8 nœuds.

$\{\dot{u}\} = [v_{x1} v_{y1} \dots v_{x8} v_{y8}]^T$ représente le vecteur des vitesses nodales.

Le multiplicateur de Lagrange au point (ξ, η) est donné par:

$$\lambda = \{N_\lambda\} \{\lambda^e\} \quad (4.12)$$

avec

$$N_\lambda = [N_{\lambda1} N_{\lambda2} N_{\lambda3} N_{\lambda4}], \quad \{\lambda^e\} = [\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4]^T$$

$N_{\lambda i}$ est la fonction de forme pour l'élément rectangulaire linéaire au nœud (i).

Le taux de déformation dans les conditions de déformation plane est donné par

$$\{\dot{\epsilon}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ 2\dot{\epsilon}_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \{\dot{u}^e\} \quad (4.13)$$

$$\text{où } [B] = [B_1 \dots B_8] \text{ avec } B_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{vj}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{vj}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{vj}}{\partial y} & \frac{\partial N_{vj}}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad j = 1,8 \quad (4.14)$$

La résolution des équation d'équilibre sous forme intégrale par rapport à v , nécessite que le tenseur déviateur des contraintes soit exprimé en fonction de la vitesse (donc des déformations). L'expression correspondantes est donnée par la relation de Von-Mises [42].

$$\{\sigma'\} = \begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \tau'_{yx} \end{Bmatrix} = \frac{2\sigma_e}{3\dot{\epsilon}_e} [\bar{C}] \{\dot{\epsilon}\} = \frac{2\sigma_e}{3\dot{\epsilon}_e} [\bar{C}] [B] \{\dot{u}^e\} \quad (4.15)$$

σ_e et ε_{ϕ}^u représentent respectivement la contrainte équivalente et le taux de déformation équivalente. Dans Le cas de déformations planes la matrice $[\bar{C}]$ est obtenue en utilisant la fonction d'écoulement de Von-Mises [38,42].

$$[\bar{C}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Si nous remplaçons (4.10), (4.12), (4.13) et (4.15) dans (4.9) nous obtiendrons une équation de la forme

$$\pi_u \delta u + \pi_\lambda \delta \lambda = 0 \quad (4.16)$$

à partir de laquelle il peut être déduit que :

$$\pi_u = \int_{v_e} \frac{2\sigma_e}{3\varepsilon_{\phi}^u} [B]^T [\bar{C}] [B] dV \{U^{0e}\} - \int_{v_e} [B]^T \{A\} [N_\lambda] dV \{\lambda^e\} - \{f\} = 0 \quad (4.17)$$

$$\pi_\lambda = \int_{v_e} [N_\lambda]^T [A]^T [B] dV \{U^e\} = 0 \quad (4.18)$$

où v_e représente le volume de l'élément. Le vecteur $\{f\}$ représente la contribution des forces de surfaces appliquées sur le segment CD (figure4.2) et exprimées par:

$$\{f\} = \int_{S_f} [N_\lambda]^T \{t\} ds \quad (4.19)$$

Ces expressions représentent les formes intégrales des équations d'équilibre discrétisées pour un élément fini. Le système représenté par les relations (4.17) et (4.18), est évidemment non linéaire en raison de la loi de comportement en puissance utilisée. Pour alléger l'écriture le système peut être écrit sous la forme.

$$R(\dot{u}) = 0 \quad (4.20)$$

Dans le but de résoudre ce système d'équations par la méthode de Newton-Raphson, on effectue une linéarisation de l'équation (4.20) en séries de Taylor de sorte que:

$$R(\dot{u} + \Delta\dot{u}) = R(\dot{u}) + \frac{\partial R}{\partial \dot{u}} \Delta\dot{u} = 0 \quad (4.21)$$

Après calcul et réarrangement, le système (4.21) s'écrit:

$$\begin{cases} \int_{ve} \left(g[D] + \frac{g}{\sigma} \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_e^u} \{\beta\} \{\beta\}^T \right) dV \{\Delta u^e\} - \int_{ve} [B]^T \{A\} [N_\lambda] dV \{\lambda^e\} = \{f\} - \int_{ve} g \{\beta\} dV \\ - \int_{ve} [N_\lambda]^T \{A\}^T [B] dV \{\Delta u^e\} = \int_{ve} [N_\lambda]^T \{A\}^T [B] dV \{u^e\} \end{cases} \quad (4.22)$$

où

$$[D] = [B]^T [C] [B] \quad (4.23)$$

$$\{B\} = [D] \{u^e\} \quad (4.24)$$

$$g = \frac{2\sigma_e}{3\varepsilon_e^u} \quad (4.25)$$

le système d'équations (4.22) s'écrit sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} k^e & k_{ab} \\ k_{ab}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u^e \\ \lambda^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

où

$$k^e = \int_{ve} \left(g[D] + \frac{g}{\sigma_e} \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_e^u} \{\beta\} \{\beta\}^T \right) dV$$

$$k_{ab} = - \int_{ve} [B]^T \{A\} [N_\lambda] dV$$

$$f_1 = \{f\} - \int_{ve} g \{\beta\} dV$$

$$f_2 = \int_{ve} [N_\lambda]^T \{A\}^T [B] dV \{u^e\}.$$

Ces expressions permettent la construction des matrices et des vecteurs élémentaires. Les intégrales qui apparaissent dans ces relations sont calculées numériquement par la méthode de Gauss ce qui signifie que les contraintes et les autres grandeurs matricielles $[B]$, $[D]$ et $\{\beta\}$ sont calculées aux points de Gauss de l'élément.

L'expression de l'intégral calculant k^e met en relief l'existence d'un paramètre appelé module tangent de comportement $\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_e}$. Ce module doit être calculé lors de la détermination des

différents termes de la matrice de rigidité élémentaire. Pour ce faire nous pouvons aisément démontrer que[36]

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_e} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{2}{3} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \varepsilon_e} - g \right) \quad 4.27$$

La loi de comportement en puissance s'exprime par la relation :

$$\dot{\epsilon}_e = A_0 \frac{D_0 b G}{kT} \left(\frac{\sigma_e}{G} \right)^n \exp\left(-\frac{Qc}{RT}\right) \quad (4.28)$$

Dans ces conditions $\frac{\partial \sigma_e}{\partial \dot{\epsilon}_e}$ est obtenu en dérivant la relation 4.28 ce qui donne :

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial \dot{\epsilon}_e} = \left(\frac{KT.G^{n-1}}{n.D_0 b A_0} \right) \left(\frac{1}{\sigma_e} \right) \left(\frac{1}{\exp(-Qc/RT)} \right) \quad (4.29)$$

Cette dernière équation est injectée dans (4.27) pour le calcul du module tangent de comportement

4. 6. Conditions aux limites et traitement du contact.[36]

Nous devons à présent, introduire les conditions aux limites appliquées sur le contour OABCD (figure4.2). Naturellement, les nœuds appartenant à la partie du contour correspondant à la surface de contact initiale (segment OA) sont liés suivant la direction y ce qui correspond à la condition $\dot{u}_y = 0$. De même pour les surfaces OD et CB qui sont liées suivant la direction x ($\dot{u}_x = 0$). Cette condition sur OD découle du fait que le segment correspond à un axe de symétrie. De plus, nous considérons que les deux pièces sont soudées à volume contrain c'est la raison pour laquelle, les nœuds appartenant à la surface CB sont également empêchés de se déplacer dans la direction x .

La surface DC représente la frontière qui supporte des efforts extérieurs dus à l'application de la pression du soudage. Cette condition aux limites est introduite par l'intermédiaire de l'intégrale de surface exprimée dans la relation (4.19). Dans cette expression les forces de contact $\{T\}$ correspondent à $T_x = 0$ et $T_y = P$ où P représente la pression de soudage.

La partie AB du contour est la surface susceptible de rentrer en contact avec l'aspérité opposé. La prise en compte des conditions aux limites relatives à cette partie de frontière fait appel à la théorie de contact entre deux solides.

La figure 4.3 illustre schématiquement le processus de contact entre deux aspérités opposées. Considérons deux points en contact M_1 et M_2 . En M_1 règne un état de contraintes σ , le vecteur de contrainte T est donné par la relation $T = \sigma n$, où n correspond au vecteur normal représentant la surface de contact.

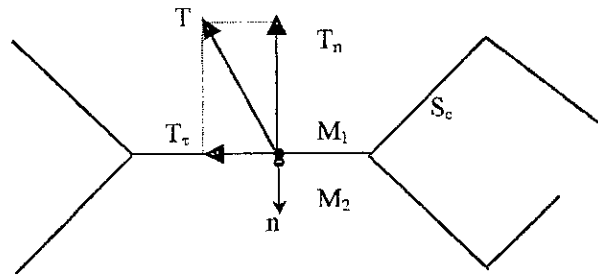


Figure 4.3 : schématisation de l'état de contact entre deux aspérités opposées

On décompose le vecteur T en composante normale T_n donnée par :

$$T_n = (T \cdot n)n \quad (4.30)$$

et une autre tangentielle T_t exprimée par la relation

$$T_t = T - (T \cdot n)n \quad (4.31)$$

Le produit scalaire $T \cdot n$ est appelé pression de contact et nommé σ_n .

D'un point de vue cinématique, on définit les vecteurs vitesse v_1 et v_2 de M_1 et M_2 et le vecteur de vitesse relative Δv donnée par : $\Delta v = v_1 - v_2$. Dans ces conditions deux types de contact peuvent être considérés[36] :

Contact unilatéral :

Pour que les points M_1 et M_2 soient en contact doivent remplir une condition géométrique ($\Delta v \cdot n = 0$) et une condition de contrainte ($\sigma_n < 0$). Les conditions de contact se condensent sous la forme dite de Signorini

$$\begin{cases} \sigma_n < 0 \text{ et } \Delta v \cdot n = 0 \text{ point en contact et le restant} \\ \sigma_n = 0 \text{ et } \Delta v \cdot n < 0 \text{ point en contact et le quittant} \end{cases} \quad (4.32)$$

Ces conditions impliquent que le contact n'est maintenu que si les efforts maintiennent les solides l'un contre l'autre

Contact bilatéral :

Dans ce cas le contact est maintenu quelle que soit la direction des efforts.

Nous avons considéré dans cette étude que le contact est de type bilatéral ce qui exclue toute possibilité de perte de contact pour les points qui atteignent la surface d'accostage. Ceci se traduit par la condition $u_x^B = 0$ pour tout nœud de la surface S_c qui atteint l'axe x (figure 4.2). De plus nous considérons que le contact est parfaitement glissant, c'est à dire que les nœuds en contact sont libres de se déplacer suivant l'axe x.

4.7. Méthode de calcul envisagée.

La procédure de construction de la matrice de rigidité globale se fait par une technique d'assemblage qui consiste à situer chaque élément de la matrice élémentaire (équation 4.26) dans la matrice globale.

$$\text{On note } k_{el} = \begin{bmatrix} k^e & k_{ab} \\ k_{ab}^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad f_{el} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

On appelle respectivement K et F , la matrice de raideur globale et le vecteur de sollicitation global obtenus après assemblage de k_{el} et de f_{el} . L'algorithme utilisé pour l'assemblage peut être résumé comme suit:

- initialiser les termes de K et F à zéro
- pour chaque élément faire:
 - ajouter chaque terme de la matrice élémentaire au terme correspondant dans la matrice globale K
 - ajouter chaque terme du vecteur élémentaire de sollicitation à celui correspondant dans le vecteur F

Ainsi on obtient un système d'équation sous la forme:

$$K\Delta\dot{u} = F \tag{4.33}$$

où le vecteur $\Delta\dot{u}$ contient les grandeurs à calculer donc les composantes de la variation des vitesses après chaque itération.

Afin de résoudre le système par rapport à $\{\Delta\dot{u}\}$ suivant l'algorithme de Newton-Raphson, nous avons besoin de choisir des valeurs initiales pour les vitesses de déplacements des nœuds à $t=0$.

La méthode de résolution consiste à utiliser, jusqu'à la convergence, la relation itérative :

$$\{\dot{u}\}^{i+1} = \{\dot{u}\}^i + \{\Delta\dot{u}\}^i$$

où l'indice (i) représente le numéro de l'itération.

Après la résolution à l'instant t , la distance $\{u_y\}^i \Delta t$ est rajoutée aux coordonnées de chaque nœud, ce qui conduit à la déformation de réseau à l'instant $t+\Delta t$, où l'incrément du temps est suffisamment réduit.

Afin de tenir compte de l'actualisation de l'état de contact par rapport à la surface S_c , il est nécessaire d'effectuer le test de contact pour chaque nœud appartenant à cette partie du contour, après chaque pas de temps. Puisque la surface de contact coïncide avec l'axe x , la condition pour qu'un nœud entre en contact est $y=0$. Dans ces conditions, un nœud qui atteint l'axe x doit être lié suivant $y (u_y=0)$.

L'algorithme global du processus de calcul peut être résumé comme suit :

Initialisation : - lecture de maillage initiale

Lecture des paramètres de fluage relatif au matériau utilisé (cuivre pur)

Choix des valeurs initiales pour le vecteur vitesse de déplacement

Boucle sur les incréments de temps :

résolution mécanique (\dot{u}^t, λ^t)

actualisation $X^{t+\Delta t} = X^t + \Delta t \{ \dot{u}^t \}$

analyse du contact

test d'arrêt de la simulation

stockage éventuel des résultats

fin de boucle sur les incréments de temps

Ce schéma de calcul peut être présenté avec plus de détail à l'aide d'un organigramme (figure4.4) :

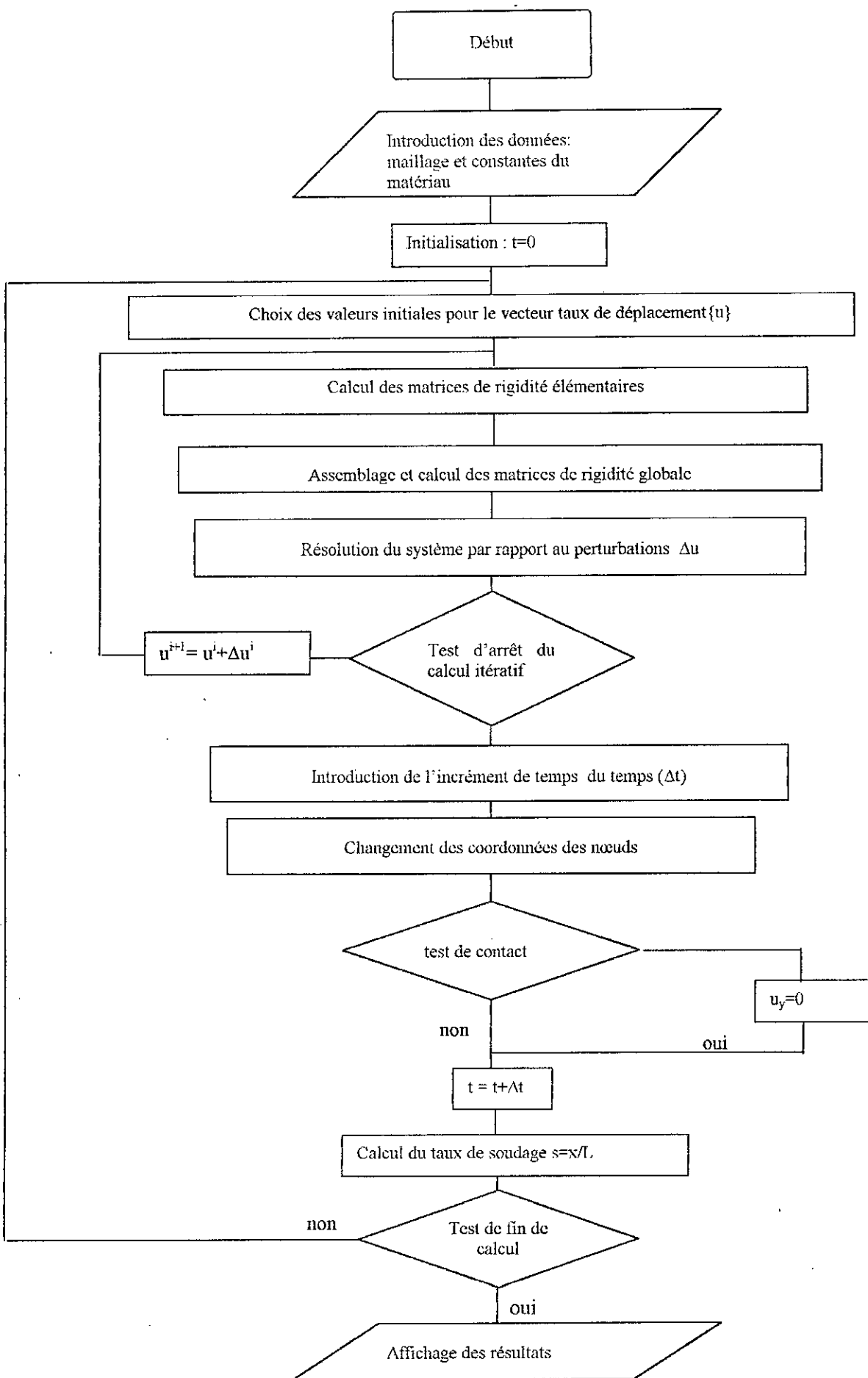


Figure 4.4: Organigramme général du schéma de calcul viscoplastique

Remarque :

L'organigramme de calcul présenté dans la figure (4.4) schématise l'organisation générale de la simulation complète du processus de contact viscoplastique. Ce Diagramme, suppose que la solution numérique converge vers la solution du problème continu lorsque le pas de discrétisation spatiale et tend vers zéro. Toutefois, nous nous sommes retrouvé, lors de la mise en œuvre du calcul, en face d'un problème de divergence de la solution après l'incrémentation de quelques pas de temps. Les problèmes numériques qui sont à l'origine de la non convergence seront discutés dans §4.9. En raison de ces difficultés numériques le schéma ci-dessus n'a pas été complètement achevé.

4.8. Mise en œuvre du schéma de calcul.

Le schéma présenté dans la figure 4.4 peut être décomposé en deux parties essentielles

4.8.1. Préparation des données.

La présentation des données contient, en général, un module qui, lie et arrange dans des blocs (structures) les données relatives à la géométrie, aux matériaux, type de chargement, nombre d'éléments et un procédé d'entrée des éléments (maillage). Dans notre cas, nous disposons d'un module simple constitué par une entrée permettant de lire à partir soit d'un fichier soit d'un écran graphique:

- les dimensions des paramètres de rugosité (h_0, L_0, H_0 et α)
- les paramètres de fluage et d'activation thermique relatifs au matériau
- le nombre et les types d'éléments disponibles.

Ce module permet également de calculer les connectivités des éléments et les coordonnées des nœuds et fait une visualisation du maillage sur écran. L'ensemble de ces données est stocké dans un fichier pour qu'il soit utilisé par les autres modules du programme.

4.8.2. Traitement et calcul.

C'est la partie essentielle du programme. Elle comporte les différentes procédures de calcul. En général elle est constituée de programmes de construction des matrices élémentaires, d'assemblage, des conditions aux limites et de résolution.

La méthode de calcul des matrices proposée est constituée de trois niveaux de calcul:

1^{er} niveau : modules de base: se basant sur la formulation des éléments, comportent les formules de bases utilisées telles que, les fonctions de forme, les points et les poids de quadrature de Gauss.

2^{ème} niveau: *modules de calcul*: se chargent des sous-routines de calcul nécessaires à la construction des matrices élémentaires.

3^{ème} niveau: *modules de contrôle* : font le choix du nombre de points de Gauss selon le type d'éléments utilisé, puis bouclent les calculs sur les éléments, avec assemblage et sauvegarde de la matrice globale.

Le module de traitement et calcul peut être représenté par un schéma simplifié (figure4.5)

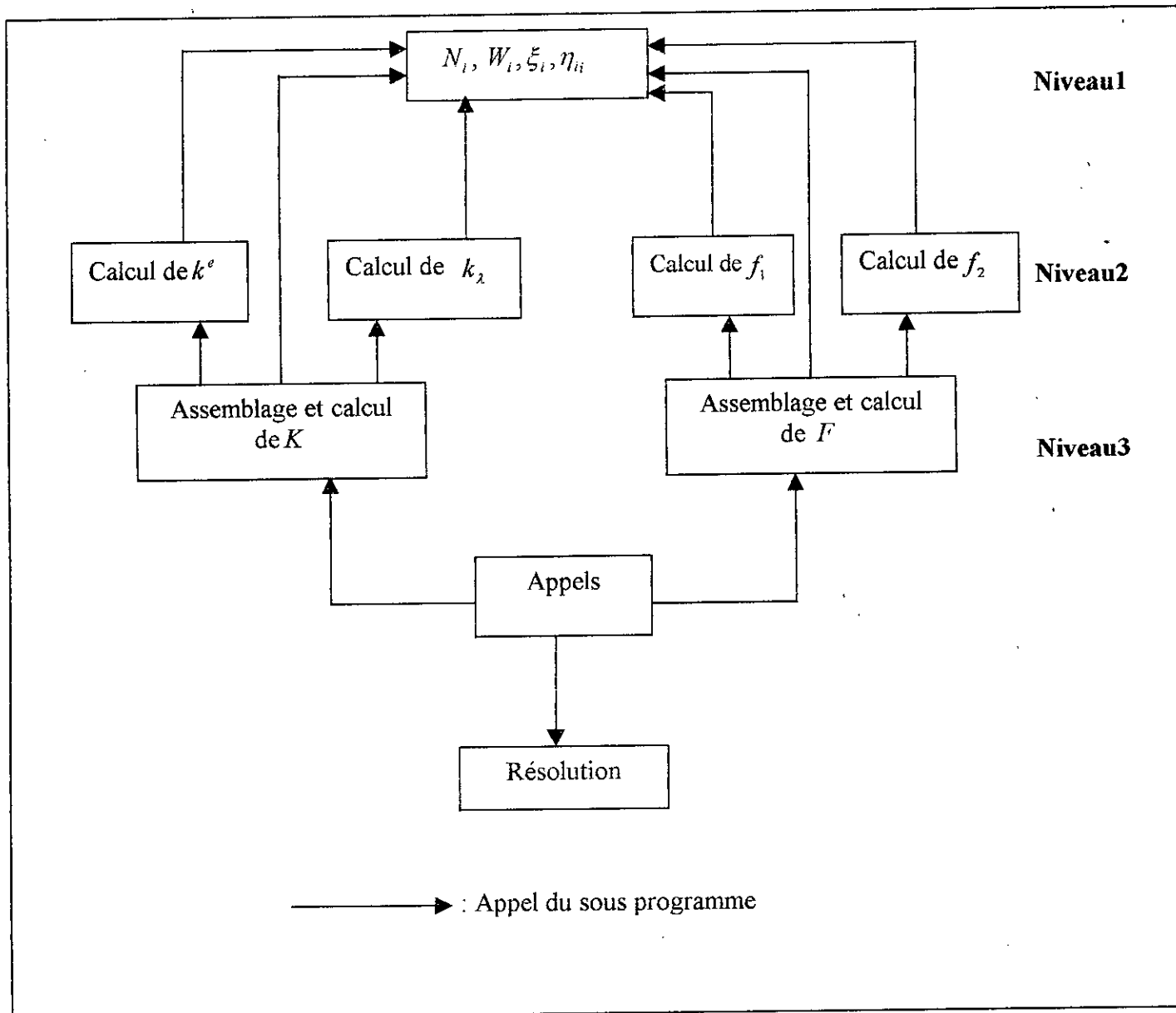


Figure4.5 : Structure du module de traitement et calcul

4.9. Convergence du processus de calcul itératif.

L'étape de la résolution, dans le digramme précédent, n'a pu être terminée en raison des problèmes de non convergence rencontrés lors du calcul itératif ; Nous envisageons, dans ce paragraphe, d'analyser les causes qui peuvent être à l'origine de la divergence de la solution.

La simulation du processus de déformation viscoplastique en soudage par diffusion est similaire au traitement de cas de mise en forme des matériaux métalliques, tel que le forgeage à chaud. Dans les deux cas de figure, la déformation du solide est considérable (appelée souvent viscoplasticité rigide car le terme élastique est souvent négligé). D'après Tomita[39] deux difficultés numériques apparaissent souvent lors de la résolution des équations relatives à ce genre de problème. L'un est lié à la loi de comportement utilisée ; il s'agit d'une loi en puissance avec un exposant $n=6$, donc c'est une loi fortement non linéaire.

L'autre difficulté est générée par lors de la discrétisation dans le temps du processus de déformation. En effet, la procédure d'actualisation de l'incrément de temps, aboutit inévitablement dans ce cas à une dégénérescence des éléments : la transformation entre élément réel et élément de référence perd son caractère bijectif et la matrice jacobienne ne peut être inversée. Cette difficulté est généralement surmontée par la génération d'un nouveau maillage, sur la base du maillage existant, afin de poursuivre le calcul. Après remaillage, il est nécessaire de transporter vers le nouveau maillage les variables de vitesse et de déformation.

Enfin, nous pouvons rajouter l'effet de la non linéarité supplémentaire introduite par les termes relatifs à la mécanique de contact dans la matrice de rigidité.

4.10 Simulation des processus de contact par le code aux éléments finis SYSTUS.

En raison des difficultés citées ci-dessus, le travail de simulation du processus de contact a été poursuivi par l'utilisation d'un code commerciale aux éléments finis. Il s'agit du code SYSTUS, développé par la société SYSTUS INTERNATIONAL et FRAMASOFT et dont le Laboratoire de Sciences et Génie de Matériaux Métallique (LSG2M) de l'Ecole des Mines de Nancy possède un droit d'utilisation.

Le code SYSTUS est un logiciel qui touche à des domaines très variés de la physique et de l'engineering tel que la mécanique des solides, calcul de structures, les calculs métallurgiques et thermiques . L'architecture de SYSTUS correspond à deux applications principales:

- L'application 'géométrie-maillage' : permet d'établir la géométrie de l'espace à étudier, puis de faire le maillage des domaines constituant cette géométrie.

- L'application 'analyse': porte sur les différentes étapes classiques de la simulation d'un problème physique par la méthode des éléments finis: introduction des données, conditions aux limites et de chargement, résolution.

Dans l'objectif d'étudier le processus d'accostage des surfaces en soudage par diffusion, nous nous sommes intéressés aux modules traitant de la mécanique de contact dans SYSTUS. Ce module adopte une méthode de résolution des problèmes de contact basé sur les fonctions de pénalité, associée à une bibliothèque de modèles de contact et de lois de comportement.

Pour étudier le processus de contact à l'aide du code SYSTUS et afin de maîtriser les problèmes d'ordre numérique rencontrés lors de la simulation du processus en viscoplasticité, nous avons d'abord réalisé l'étude en élasticité linéaire. Ceci a été effectué en étudiant le contact de Hertz en configuration sphère contre plan. Les objectifs recherchés à travers l'étude du contact de Hertz sont: d'une part le traitement d'un cas de contact avec une loi de comportement plus simple que celle qui gouverne le soudage par diffusion ce qui permet de maîtriser des les autres paramètres du processus. D'autre part, le contact de Hertz nous permettra également de valider les modules traitant de la mécanique de contact dans SYSTUS qui n'ont pas été utilisé au préalable. Cette validation est réalisée en comparant entre les résultats numériques de SYSTUS et ceux obtenus par la théorie de Hertz en contact normal.

4.11. Théorie de Hertz en contact normal.

Dans le cas où un indenteur de forme sphérique est pressé contre la surface plane d'un solide élastique semi-infini, la théorie de Hertz permet, sous certaines conditions, de déterminer la dimension de l'aire de contact et la distribution des contraintes et déformations, et de les relier à la pression de contact, à la géométrie des solides et à leur module d'élasticité, [30,43].

Les hypothèses formulées par Hertz sont :

- la zone du contact est un cercle de rayon a (Fig4.6).
- les deux solides en contact sont infinis.
- la dimension de la zone de contact doit être faible devant les dimensions caractéristiques des deux solides, pour s'affranchir des problèmes de conditions aux limites et pour que les résultats ne soient pas influencés par les effets de bord des solides.
- les surfaces de contact sont considérées sans frottement (contact glissant).

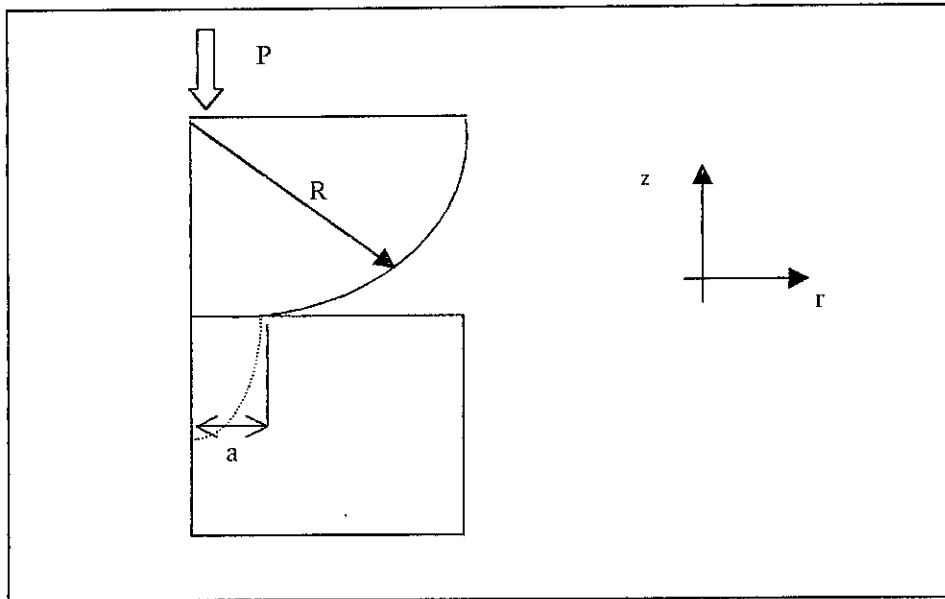


Figure4.6: Contact hertzien en coordonnées cylindriques(r, z): configuration sphère/plan(P . force appliquée, R . rayon de l'indenteur)

On définit un module de Young effectif E^* tel que

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}, \quad (4.34)$$

avec: E_1, E_2 : modules de Young du plan et de la sphère.

ν_1, ν_2 : coefficients de poisson du plan et de la sphère.

Compte tenu de la symétrie d'axe, il est commode d'utiliser une représentation axisymétrique.

Le rayon de contact vaut:

$$a = \left(\frac{3PR}{4E^*} \right)^{1/3}$$

(4.35)

L'enfoncement des surfaces δ_{ind} est égal à :

$$\delta_{ind} = \frac{a^2}{R} = \left(\frac{9P^2}{16RE^{*2}} \right)^{1/3}$$

(4.36)

Le maximum de la pression au centre de contact P_0 est donné par :

$$P_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} = \left(\frac{6PE^{*2}}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3} \quad (4.37)$$

$$\text{et } P = \frac{\pi^3 R^{*2}}{6 E^{*2}} \cdot P_0^3 \quad (4.38)$$

La distribution radiale de la pression $P(r)$ est évaluée par :

$$P(r) = P_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (4.39)$$

Le développement des équations du champ de contraintes, pour ce cas de figure, est résumé dans les références [30,43].

4.12. Modèle de contact en élément finis par SYSTUS.

En nous plaçons dans le système de coordonnées cylindriques (système axisymétrique), la géométrie du problème correspond à la configuration sphère/ plan (fig.4.7). Le chargement étant toujours normal, une telle configuration nous assure effectivement un chargement bidimensionnel pendant toute la sollicitation. La zone du système étudiée, d'après la littérature[44,45], correspond généralement au domaine défini comme suit :

$$0 < r < 4a \quad \text{et } 0 < z < 4a.$$

a : étant le rayon de contact indenteur / plan, l'aire de contact est donc un cercle.

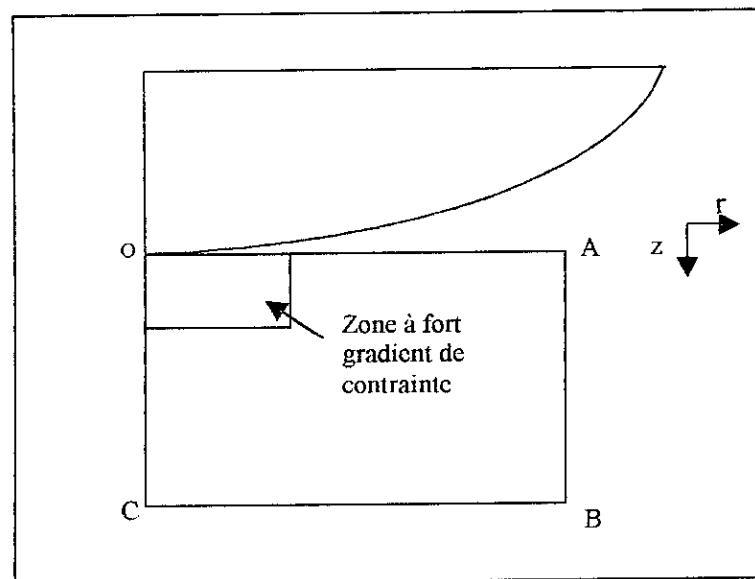


Figure4.7: Géométrie du Système étudié pour le contact de Hertz

Pour la simulation de l'essai de l'indentation deux cas de figures ont été considérés: contact plan déformable avec indenteur rigide, et contact entre deux corps déformables.

L'indenteur rigide est défini comme un contour fermé décrit dans le sens trigonométrique (sphère dans notre cas) et composé exclusivement de segments de droite et d'arc de cercle. Aucun maillage n'est effectué pour l'indenteur rigide et aucune caractéristique mécanique ne lui est affecté car il est supposé infiniment rigide devant le plan déformable et affecté de caractéristiques. Cependant, l'étude de contact de Hertz avec deux corps déformables nécessite un maillage également pour l'indenteur ainsi que l'affectation des caractéristiques mécaniques aux éléments constituant ce maillage.

La prise en compte des termes relatifs aux contacts est effectuée par l'intermédiaire des éléments de peau, il est donc nécessaire de réaliser un maillage de peau pour les zones susceptibles de rentrer en contact.

Les seules caractéristiques mécaniques à introduire sont le module de Young (E) et le coefficient de Poisson (ν), étant donné que l'essai d'indentation de Hertz correspond à une loi de comportement élastique.

L'indentation dans notre essai est normale, mais les modules contact de 'SYSTUS' ne nous permettent pas d'imposer des efforts sur l'indenteur rigide. La modélisation est donc effectuée à déplacement imposé, ce qui revient à effectuer une translation du sphère selon la direction d'indentation.

La configuration adoptée pour la fixation du matériau (plan) est la liaison suivant (z) de la face (BC) (Fig.4.7), qui repose par exemple sur un porte-échantillon par analogie à un test expérimental, tandis que la face (OC) est liée suivant r car (OC) représente un axe de révolution.

La formulation précédente aboutit à la constitution d'un système d'équation non linéaire qui est résolu par la méthode de Newton-Raphson intégrée dans le logiciel.

Le code SYSTUS possède une interface qui permet de sortir les résultats sous forme graphique où sous forme de fichier qui contiennent les grandeurs calculées: déplacements, déformations et contraintes.

Les résultats obtenus dans cette section seront discutés dans le chapitre de résultats et interprétations (chapitre5).

Chapitre v : Résultats et interprétations.

Dans ce chapitre nous présenterons les résultats relatifs à l'étude de processus de contact. Dans ce but le chapitre est divisé en deux parties, dans la première sont regroupés les résultats relatifs aux modèles analytiques du soudage par diffusion sous contrôle de fluage selon une loi en puissance. La deuxième partie contient la simulation du contact de Hertz par le code aux éléments finis SYSTUS.

5.1. Résultats de l'approche analytique.

5.1.1. Conditions générales d'applicabilité des modèles.

Dans cette partie les résultats de calculs analytiques sont présentés de façon à examiner la cinétique de formation du joint de soudage. En pratique et d'un point de vue économique le temps de soudage est la grandeur la plus importante compte tenu du coût énergétique de l'opération de maintien à la température de soudage[4]. La qualité de la soudure, déterminée par l'absence de toute porosité à l'interface, est également liée au temps de maintien. Dans ces conditions, le but de la simulation est, finalement, l'optimisation de la durée de l'opération du soudage en rapport avec les conditions opératoires.

Une comparaison entre les trois modèles analytiques examinés au chapitre 2 a été réalisée après unification de leurs conditions d'applicabilité. Cette unification concerne la géométrie du joint de soudage dont les vides sont maintenus de forme rhomboédrique pour tous les modèles. De même, les données expérimentales de fluage et d'activation thermique relatives aux matériaux utilisés sont extraits des mêmes sources bibliographiques. Pour le cas du soudage de cuivre pur, les constantes de fluage utilisées sont données par Ashby[25], alors que celles relatives au fer sont rapportées par Wallach [16] (Tableau 5.1).

Les matériaux utilisés dans cette étude, sont donc le cuivre pur et le fer α . Ce choix est justifié par le fait que les deux matériaux présentent une couche d'oxyde facilement soluble lors du maintien à la température de soudage[16]. Le cuivre est un matériau dont la soudabilité a fait l'objet de nombreuses études théoriques et expérimentales. Son utilisation dans le présent travail nous a permis de comparer nos résultats avec des travaux réalisés par d'autres auteurs. L'utilisation du fer comme deuxième matériau pour la simulation nous a permis de comparer le processus de soudage entre deux différents matériaux.

Pour la simulation du processus sous contrôle de fluage, l'énergie superficielle due à la surface libre des vides a été négligée par rapport à la pression extérieure. En effet, Takahashi et al[40] ont montré, dans le cas de l'assemblage du cuivre, que pour $L > 10 \mu\text{m}$ et $P > 10 \text{MPa}$, γ_s/r doit être

inférieure à 3.45MPa afin que la pression extérieure serai seule responsable du fluage, où γ_s représente la tension de surface, r rayon de courbure du pore et γ_s / r la contrainte engendrée par l'énergie de surface. Cette condition est réalisée pour un taux de soudage inférieur à 95%. Au-delà de $s > 95\%$ même si le fluage est encore agissant, l'énergie de surface ne peut être ignorée.

Paramètre	symbolc	Unité	Cuivre	Fer α
Facteur de fréquence	D_{v0}	m ² /seconde	0.62×10^{-4}	2×10^{-4}
Energie d'activation pour Le coefficient de diffusion	Q_v	kJ/mol	207.8	251
Vecteur de Burger	b	m	2.56×10^{-10}	2.48×10^{-10}
Exposant de la loi de Comportement	n	-	6	6.9
Energie d'activation pour le fluage	Q_c	kJ/mol	207.8	251
Module de cisaillement à 300°k	G	GPa	42.1	64
Coefficient de la Température pour le Calcul du module de cisaillement à T	-	-	2×10^{-3}	3×10^{-3}
Limite d'écoulement (limite élastique). Normalisé par rapport au module de cisaillement	σ_v/G	-	3×10^{-3}	2×10^{-3}

Tablcau5.1 Paramètres du matériau pour le cuivre et le fer α [16,23]

La modélisation du soudage par diffusion sous contrôle de fluage passe par la résolution des équations différentielles (2.15) (2.26) (2. 28). (2.40). Toute ces équations sont de la forme:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (5.1)$$

Afin de résoudre le problème ainsi posé , l'algorithme d'Euler explicite a été utilisé comme suit: pour résoudre x en fonction du temps, il est supposé connu la valeur de x à l'instant t et on cherche la valeur correspondante à $t + \Delta t$:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \frac{\partial x}{\partial t} \quad (5.2)$$

le calcul est réalisé de sorte que le pas de temps Δt soit suffisamment réduit. Pour le calcul de taux de résorption en volume la relation $\dot{V} = 2h\dot{w} + 2\dot{h}w$ peut être utilisée.

La résolution des équations différentielles précédentes nécessite la connaissance des conditions initiales, i.e. le taux de soudage initial s_0 ($s_0 = x_0 / L$ figure 2.1). La valeur de x_0 peut être calculée en faisant appel à la théorie de champs des lignes de glissement.

5.1.2. Calcul de la surface initiale de contact.

La valeur de x_0 est obtenue par la résolution de l'analyse de champs de glissement. Cette théorie permet la détermination, sous les conditions de déformation plane, du champs de contraintes, pour un solide déformé plastiquement. Cette méthode est basée sur la détermination des lignes de glissement correspondant à une contrainte de cisaillement maximale (ce qui est équivalent à une composante hydrostatique nulle)

Le champs de lignes de glissement pour le cas de l'indentation d'un triangle est donné par [46] et repris par Takahashi [47] pour un cas de soudage par diffusion figure 5.1.

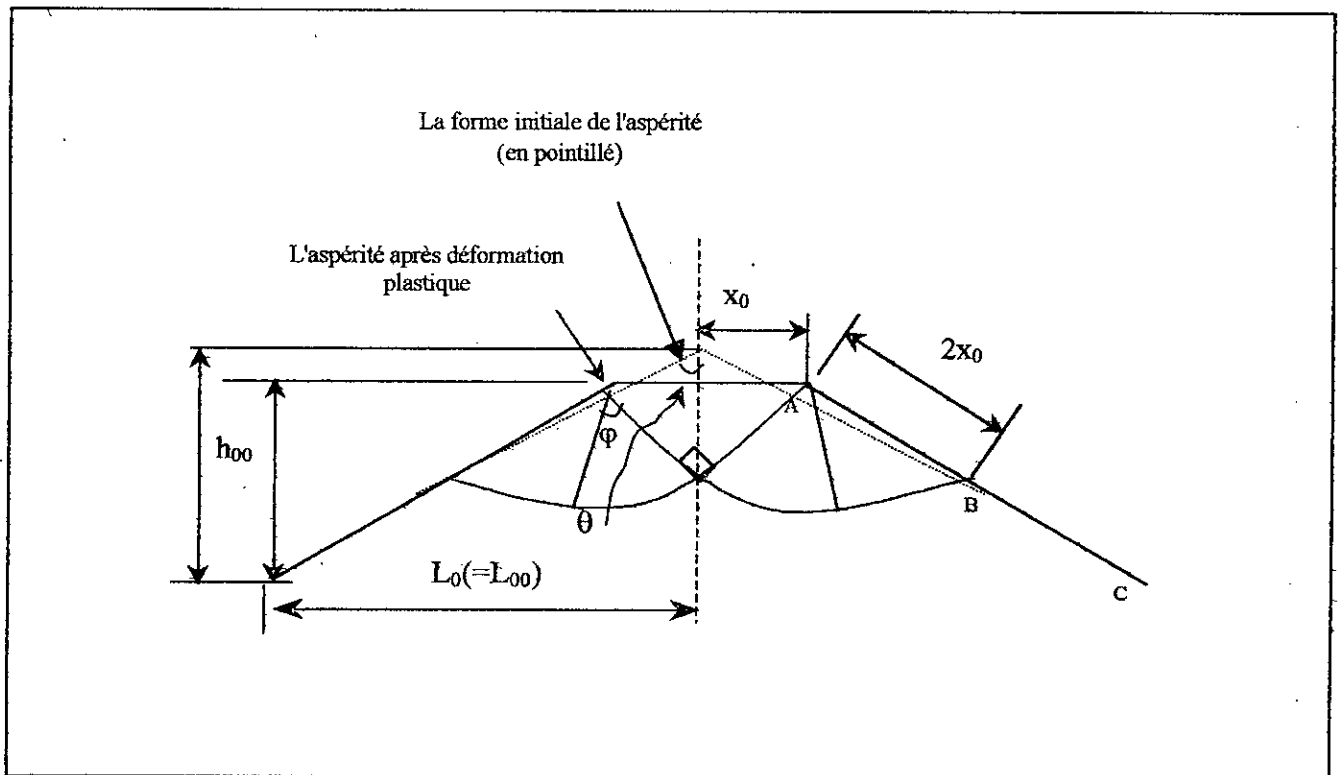


Figure 5.1 Champs de lignes de glissement pour la déformation plastique [47]

Selon cette analyse la distance x_0 est calculée par la relation

$$x_0 = \frac{L_{00}P}{(\varphi + 1)\sigma_y(T)} \quad (5.3)$$

Où P est la pression de soudage, $\sigma_y(T)$ est la contrainte limite d'écoulement à la température T et l'angle φ défini dans la figure 5.1 est donnée par :

$$\tan g\theta = \frac{(1 + 2 \sin \varphi)^2}{4 \cos \varphi (1 + \sin \varphi)} \quad (5.4)$$

2θ représente l'angle du sommet de l'aspérité.

la hauteur (h_0) de l'aspérité après la déformation plastique est obtenue à partir de l'équation :

$$\frac{x_0}{h_{00} - h_0} = \frac{1 + 2 \sin \varphi}{2 \cos \varphi} \quad (5.5)$$

La figure 5.2 illustre la variation de la surface initiale de contact, calculée par cette méthode, en fonction de la pression appliquée. Les valeurs du taux de contact initial, obtenues par cette analyse représentent les conditions initiales nécessaires pour les résolutions des équations différentielles de la cinétique de résorption relative à chaque modèle.

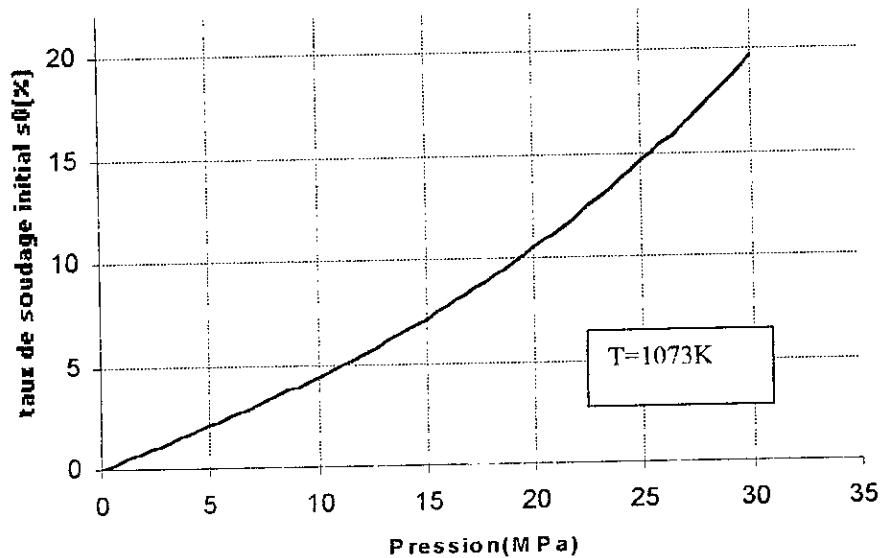


Figure 5.2: Variation de la surface de contact initiale en fonction de la pression appliquée

5.1.3. Détermination du domaine de prédominance du fluage.

L'étude de la résorption des vides sous contrôle exclusif du fluage nécessite la détermination préalable du domaine de prédominance de ce mécanisme. Souvent, il n'est pas facile de déterminer les paramètres opératoires correspondant à la prédominance de l'un des mécanismes

agissant dans une opération de soudage par diffusion vu que les paramètres opératoires sont interdépendants. Par exemple, une variation de la température de soudage engendre un changement du domaine de pression correspondant à la prédominance de fluage. Le but recherché dans ce paragraphe est la détermination, même approximative, de l'intervalle de pression dans lequel le processus est gouverné uniquement par le fluage selon une loi en puissance.

Pour ce faire, la résorption par diffusion doit être également quantifiée par la résolution de l'équation différentielle correspondante, chapitre 2 (relation 2.43). La résolution suit les mêmes étapes que dans le cas du fluage. La comparaison entre les résultats obtenus par le calcul de fluage et la diffusion à une pression donnée permet de déterminer lequel des deux mécanismes est prépondérant.

La figure 5.3 montre, pour le cas du cuivre, la contribution du fluage et de la diffusion dans le processus de résorption ainsi que la courbe de résorption globale, par rapport à deux valeurs différentes de la pression de soudage P : $P=5\text{MPa}$ figure 5.3 a et $P=2\text{MPa}$ figure 5.3 b. La surface de soudage produite par le fluage est calculée selon le modèle de Guo et Ridley (équation 2.15). Le taux de résorption globale est la somme de la contribution du fluage, de la diffusion et du taux de soudage initial engendré par la déformation plastique instantanée.

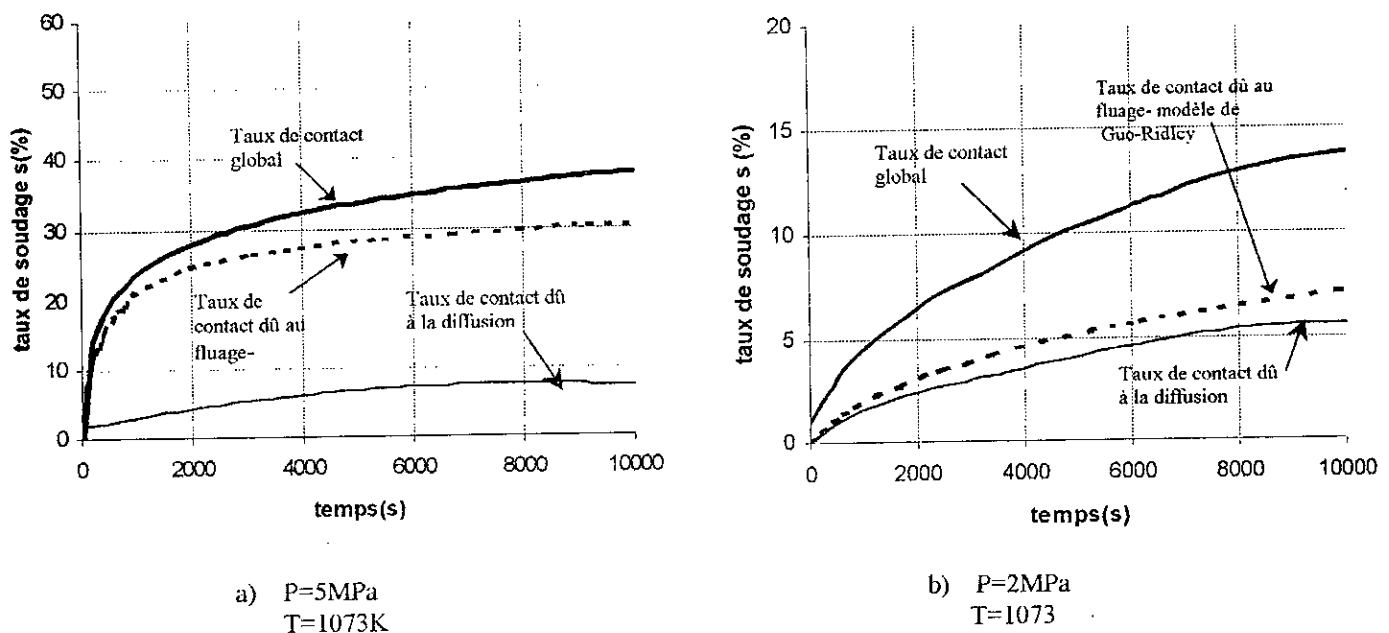


Figure 5.3 Comparaison entre le Taux de soudage dû au fluage et la diffusion pour deux différentes pressions a) $P=5\text{MPa}$ et b) $P=2\text{MPa}$

Pour une pression de soudage de 5MPa (fig 5.3.a) on constate que la contribution du fluage est beaucoup plus importante que celle de la diffusion, alors que pour $P=2\text{MPa}$ les surfaces de soudage dues à chacun des deux mécanismes sont du même ordre de grandeur. Pour le cas de

$P=5\text{MPa}$ le fluage est supposé prépondérant, car la contribution de la diffusion reste constamment inférieure à 10% pendant tout le processus

Ce résultat est conforme à ce qui est présenté généralement dans la littérature, [19,48]. Selon ces études, dans le cas du cuivre, une pression de soudage supérieure à 5MPa fait que le fluage est prédominant, indépendamment des autres paramètres opératoires. Pour la suite de l'étude, la pression choisie sera donc supérieure à cette valeur.

Une analyse similaire pour le fer nous a montré que la pression de soudage doit être supérieure à 12MPa afin que le fluage selon une loi en puissance soit prédominant.

5.1.4. Etude de l'évolution du soudage en fonction du temps.

Les figures 5.4, 5.5, 5.6, montrent l'augmentation de la surface de contact en fonction du temps du maintien pour les trois modèles analytiques traités et pour différentes valeurs de la contrainte appliquée et à une température de soudage constante (1073K). Le fluage est supposé lui seul contrôler le processus. Toutefois, pour $s > 95\%$, tel qu'est expliqué précédemment, la tension de surfaces ne peut être négligée ce qui favorise et accélère les phénomènes diffusionnels. A ce stade de l'opération même le mécanisme de fluage se trouve modifié avec l'ajout de l'énergie de surface en tant que force motrice supplémentaire. C'est la raison pour lesquelles les résultats obtenus pour $s > 95\%$ peuvent s'écarter de la réalité.

Dans le modèle de Takahashi, tel que c'est explicité dans le chapitre 2, le processus d'adhésion est représenté par deux équations différentielles bien distinctes (2.26) et (2.28) entre le premier stade de soudage ($s < 50\%$) et le deuxième stade ($s > 50\%$). Ceci apparaît bien dans la solution obtenue (figure 5.4). En effet, on constate bien que le soudage s'effectue d'une façon beaucoup plus lente pour $s > 50\%$.

Le modèle de Guo et Ridley, figure 5.5, aboutit à un taux de soudage du même ordre de grandeur que celui de modèle de Takahashi pour les premiers instants de l'opération ($s < 50\%$). Par contre, les deux modèles s'écartent nettement pour $s > 50\%$. La cinétique de résorptions devient plus importante pour le modèle de Guo-Ridley. Cette tendance est bien illustrée dans la figure 5.7 dans laquelle sont superposées, pour différents modèles, les courbes d'évolution du taux de contact pour une pression de soudage de 20MPa.

La résorption des vides peut être déterminée également à l'aide des graphiques représentant la diminution du volume d'une cavité, figure 5.8. On constate que l'évolution du volume varie dans le sens inverse du taux de contact.

La surface de soudage calculée par le modèle de Hill et Wallach est moins importante que celle calculée par les deux autres modèles (figures 5.6, 5.7 et 5.8), à l'exception des derniers moments

du processus ($s > 70\%$) où le taux de soudage calculé par ce modèle devient équivalent à celui de Guo et Ridley.

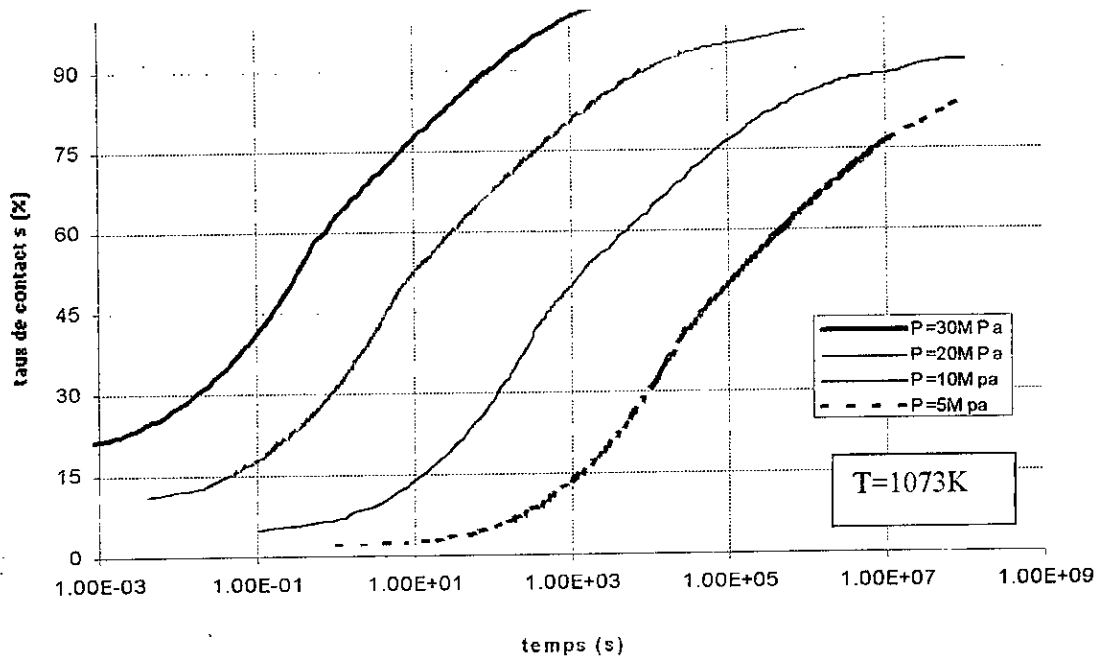


Figure 5.4 : Croissance de la surface de contact en fonction du temps, modèle de Takahashi

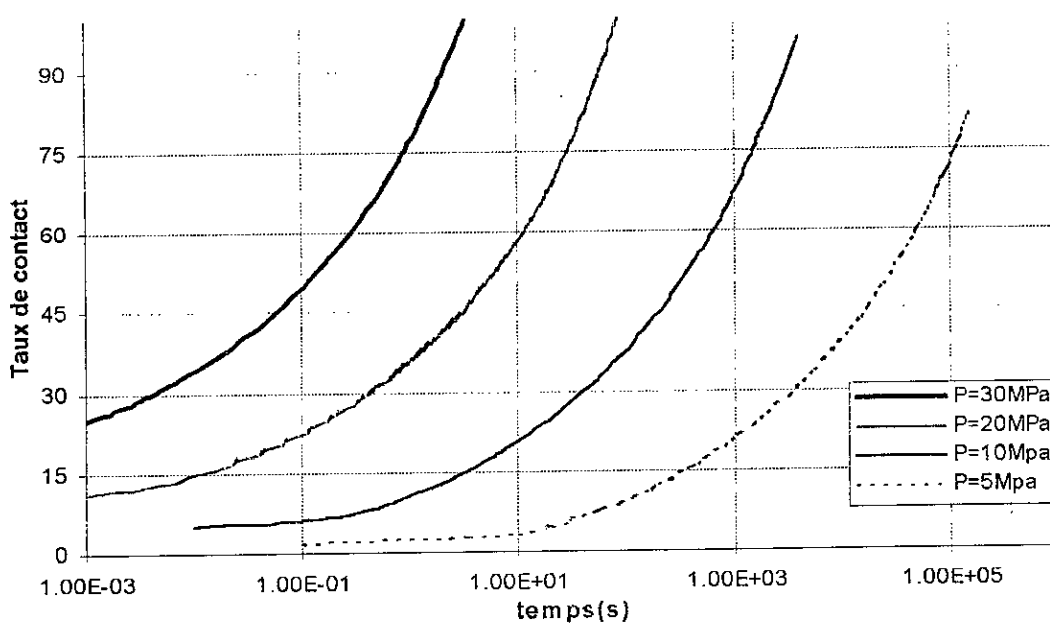


Figure 5.5: Croissance de la surface de contact en fonction du temps, modèle de Guo et Ridley

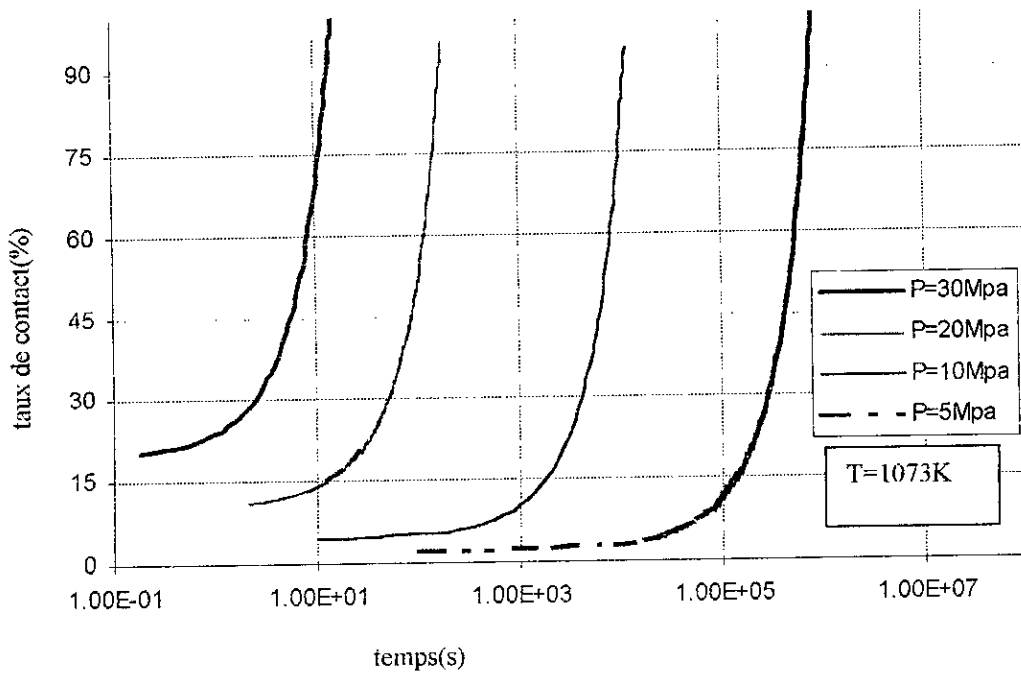


Figure5.6: Croissance de la surface de contact en fonction du temps , modèle de Hill et Wallach

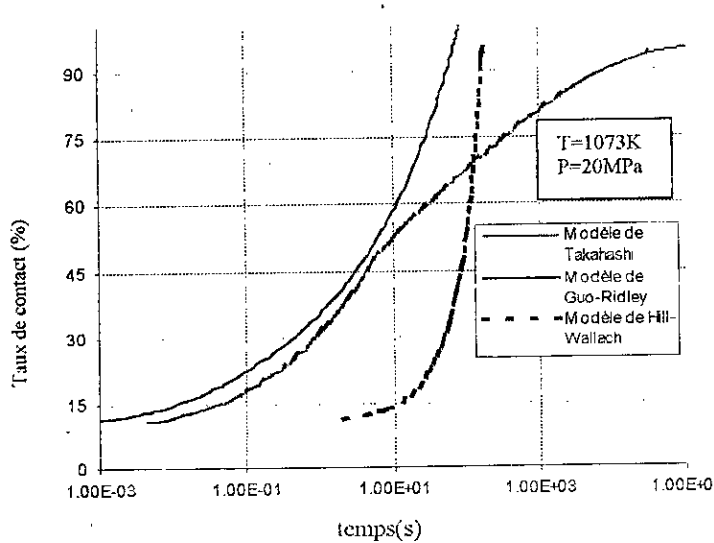


Figure5.7, Comparaison entre le taux de soudage calculé par différents modèles

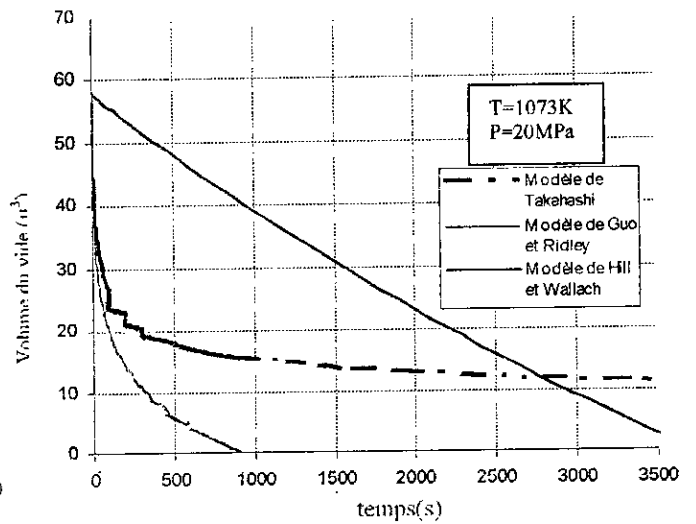


Figure5.8: Variation du volume d'une cavité pour les différents modèles

Les constatations précédentes, sont mieux mises en évidence si on considère les courbes représentant la vitesse de formation du joint en fonction du taux de soudage, données dans la figure 5.9 et obtenues directement à partir des équations 2. 15, 2.26, 2.28.et 2.40. Si on suppose que la distance L reste constante au cours du soudage, la vitesse de formation du joint \dot{s} est calculée par la relation $\dot{s} = \dot{x} / L$.

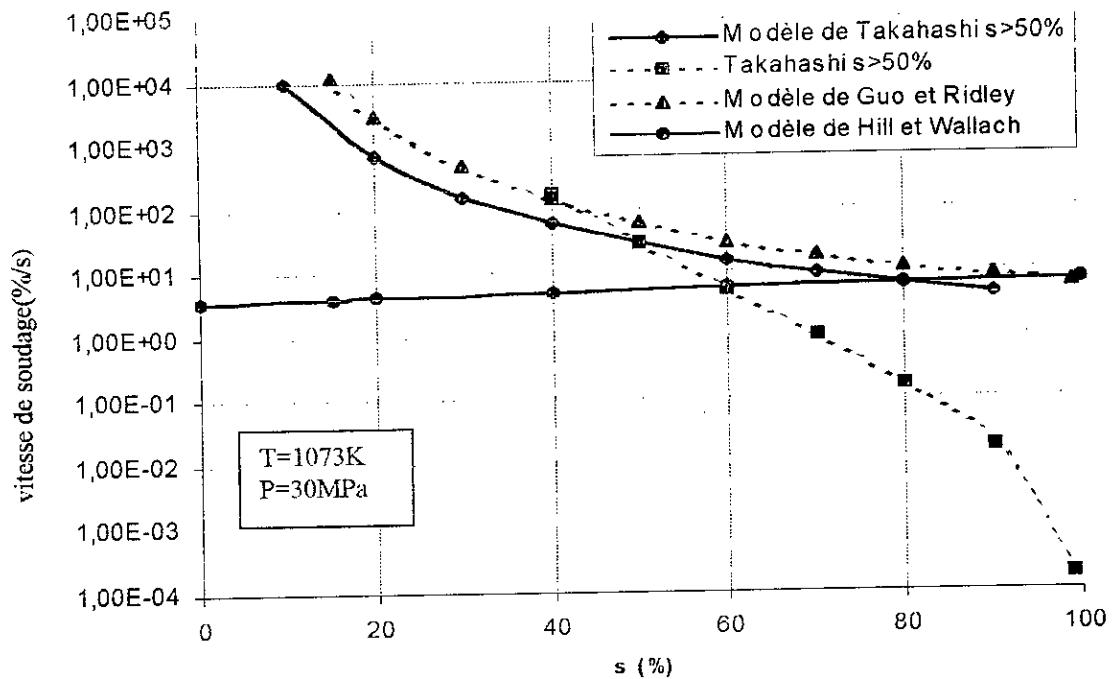


Figure 5.9: Vitesse de formation du joint de soudage en fonction de l'évolution de la surface de contact ,

On remarque, d'après ces courbes, que la vitesse de formation du joint est considérable au début de l'opération ($s < 50\%$) par rapport au modèle de Takahashi et de Guo-Ridley. La valeur de cette vitesse est particulièrement considérable au début du déroulement du processus. En effet, pour $s = 15\%$ la vitesse est environ $10^4\%s^{-1}$. La figure (5.9) confirme que ces deux modèles sont bien équivalents dans le premier stade de l'opération, tandis que durant la deuxième phase la vitesse de résorption des cavités s'affaiblit considérablement dans le modèle de Takahashi.

La vitesse de croissance est quasiment constante dans le modèle de Hill et Wallach et elle est très faible par rapport à celle relative au deux autres modèles pour $s < 50\%$ mais elle devient similaire au modèle de Guo et Ridley pour les derniers stades de soudage ($s > 70\%$). Ce modèle n'est équivalent aux deux autres que vers la fin de l'opération.

L'explication de ces résultats peut être résumée comme suit:

- 1- Pour les modèles de Takahashi et Guo-Ridley la vitesse de résorption est très grande au début de l'opération à cause de l'effet de d'écrasement, c'est à dire que la déformation se fait préférentiellement dans la zone avoisinante de la pointe du vide (point A dans la figure 5.13) [40]. Ce mécanisme engendre une expansion rapide de la surface de contact.
- 2- Le modèle de Hill et Wallach étant conçu à partir d'un modèle traitant la croissance d'un vide isolé (modèle de Hancock), est applicable uniquement pour $L \gg w$. En conséquence, ce modèle ne tient pas compte de l'effet d'écrasement qui résulte du contact des surfaces. Ce qui explique que la vitesse de résorption est moins importante par rapport aux deux autres modèles.

Selon Takahashi ce modèle ne peut être appliqué à un processus de résorption de cavité que dans les derniers stades de l'opération du soudage.

- 3- La différence dans le taux de soudage entre les modèles de Takahashi et de Guo-Ridley pour $s > 50\%$, est due aux conditions aux limites retenues pour les deux modèles. Le modèle de Takahashi correspond dans la pratique à un cas de soudage avec volume contraint[41] : c'est à dire que lors de réalisation de l'essai, le porte échantillons empêche le déplacement des surfaces extérieures de la pièce (figure 5.10), ceci est similaire au procédé de compactage d'une poudre métallique sous haute pression isostatique. Il a été prouvé que contraindre le volume se traduit par la diminution de la vitesse de résorption des cavités[26,41,48].

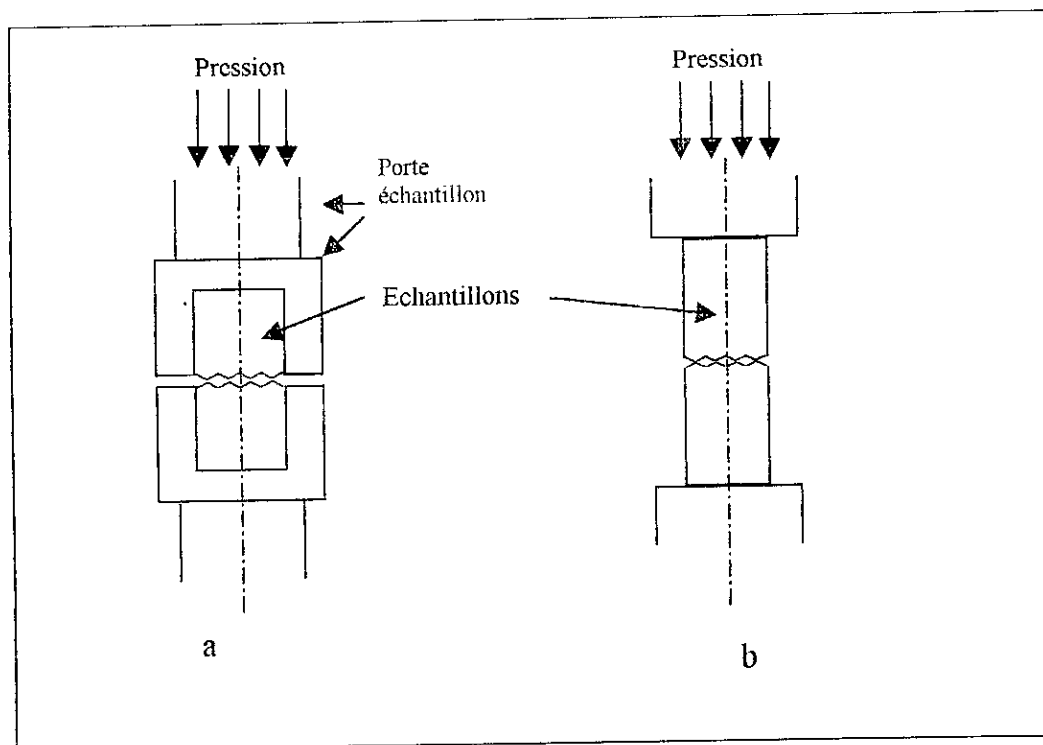


Figure 5.10: Schématisation des conditions aux limites qui peuvent être retenues lors d'une opération du soudage par diffusion a) volume contraint b) volume en déformation uniforme[26]

Par contre, dans le modèle de Guo et Ridley les conditions aux limites correspondent à la non liaison des surfaces libres de la pièce comme indiqué dans la figure 5.10 b les facettes libre se déplacent librement de la pièce dans la direction du joint de soudage. Dans ces conditions, le processus se retrouve sensiblement facilité[26]. Ce cas de figure se rencontre principalement dans le cas du soudage des pièces métallique sous forme de plaques.

Il faut noter que les conditions de liaisons du volume des pièces n'ont d'effets que dans la deuxième phase du processus. Durant la première phase l'effet d'écrasement prédomine quelles que soient les conditions aux limites adoptées.

Ces constatations suggèrent que le processus dépend non seulement de la déformation aux alentours de vides mais également dans des zones plus éloignées (en volume de l'échantillon). La compréhension de ce mécanisme a été rendue possible avec un modèle aux éléments finis établi par Takahashi et Kogushi[41]. Ce modèle permet d'imposer les conditions aux limites relatives à chacune de ces deux cas précédents, et d'examiner ensuite leur effet sur le processus de résorption. Les conditions aux limites pour le modèle aux éléments finis de Takahashi sont présentées dans la figure 5.11. Le cas de volume contraint correspond à la liaison du segment BC suivant x. L'autre cas de figure correspond à un déplacement uniforme suivant x des nœuds du même segment BC.

Une comparaison entre les résultats du modèle aux éléments finis de Takahashi avec les modèles analytiques de Guo et Ridley et Takahashi est présentée dans la figure 5.12. Il est bien visible que le modèle de Takahashi concorde bien avec le cas du volume contraint, alors que celui de Guo-Ridley s'accorde mieux avec le cas de déformation uniforme du volume du vide.

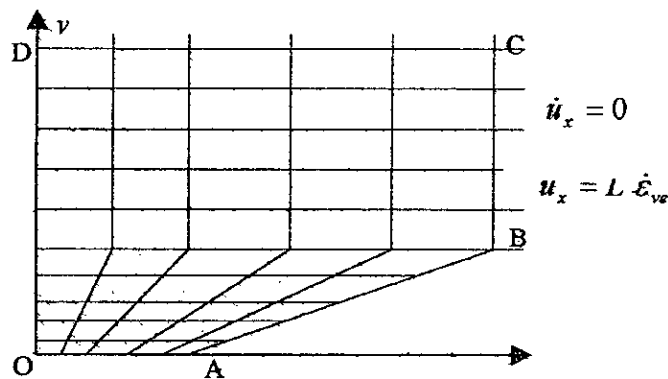


Figure 5.11 Conditions aux limites MEF Takahashi[40]

- a) Cas de volume contraint, il correspond à la liaison du segment BC suivant l'axe x $\dot{u}_x = 0$
- b) Cas de déformation libre du volume, il correspond à une déformation uniforme des nœuds du segment BC $u_x = L \dot{\epsilon}_{ve}$.

$\dot{\epsilon}_{ve}$ Représente la déformation en volume, considérée constante

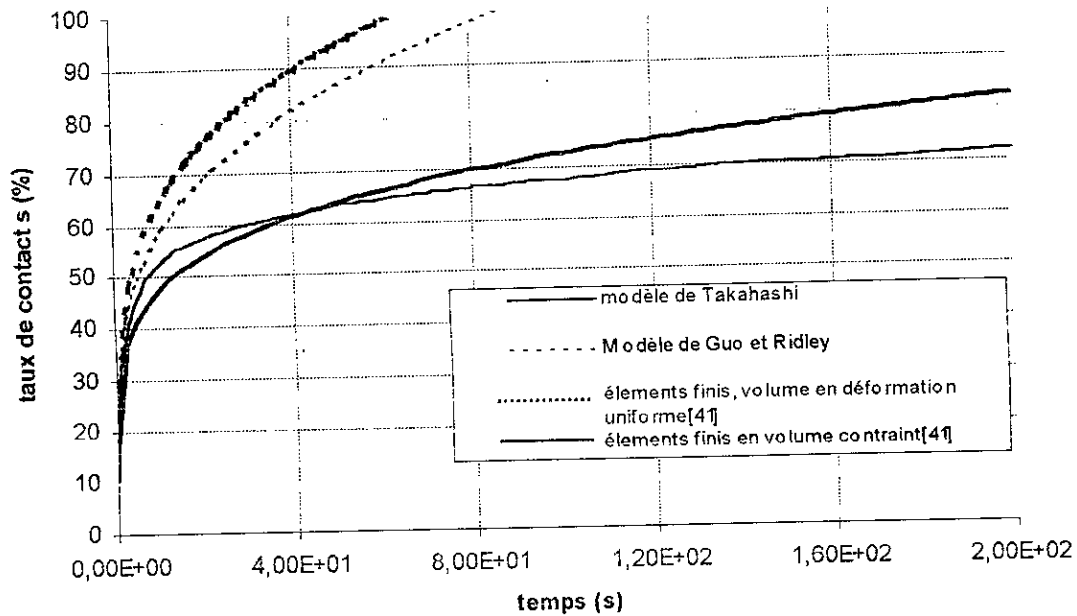


Figure 5.12 : Comparaison entre les modèles analytiques et le modèle aux éléments finis d'après Takahashi [41]

Il est possible d'expliquer ces résultats à l'aide du modèle aux éléments finis de Takahashi qui permet de déterminer les mécanismes d'apport de matière à l'interface de soudage par mécanisme de déformation viscoplastique (figure 5.13) Cet apport est finalement responsable de la résorption des cavités

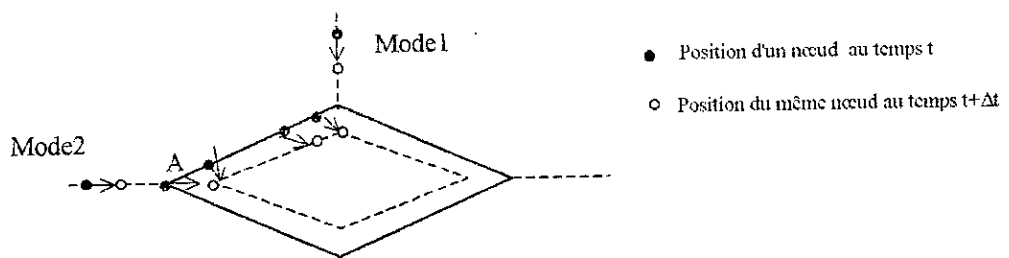


Figure 5.13: Différents modes de transport de matière par déformation de fluage autour d'une cavité.

Cette figure montre la géométrie du vide entre deux instants successifs. Deux modes de transport de matière par déformation peuvent coexister : mode 1, transport suivant le sommet du vide et le mode 2: apport suivant la pointe du vide (A). L'effet de d'écrasement correspond à un déplacement préférentiel du point A selon les deux modes de transport engendrant ainsi croissance rapide de la surface de soudage. Selon Takahashi, les conditions aux limites correspondant à un volume

contraint agissent dans le sens de diminution du mode(2), ce qui explique que la vitesse de soudage est inférieure par rapport à l'autre cas de figure.

Le modèle un aux éléments finis est donc un puissant outil pour l'étude de du processus d'adhésion viscoplastique. Il permet une meilleure compréhension des phénomènes de déformation à l'interface de soudage et en volume des échantillons ainsi que la quantification de leur contribution..

5.1.5- Influence des paramètres opératoires sur le processus de formation du joint.

L'étude de l'influence des paramètres opératoires (pression, température, rugosité) sur le processus de soudage sous contrôle exclusif du fluage est souvent délicate, en raison de la dépendance du domaine de prédominance de ce mécanisme avec les variations de la température et la pression. Ce qui engendre un chevauchement de ce domaine avec celui où la diffusion prédomine[50]. Nous avons montré précédemment (§5.3) que le processus est gouverné par le fluage si la pression de soudage est suffisamment élevée indépendamment de la température. Pour étudier donc l'influence des paramètres opératoire la pression est maintenue constamment supérieure à 5MPa.

La figure 5.14 a montre l'évolution de la surface de soudage en fonction de la pression à la température 973 K et après un temps de maintien de 3 minutes. Cette figure confirme que la pression active le processus de résorption en favorisant l'écoulement de la matière à l'interface. Ceci est bien mis en évidence par tous les modèles. En effet, l'effet d'écrasement et les autres modes de transport par déformation se trouvent sensiblement activés. De surcroît, la loi de comportement de fluage en puissance engendre des déformations considérables même pour de petites augmentations de la pression.

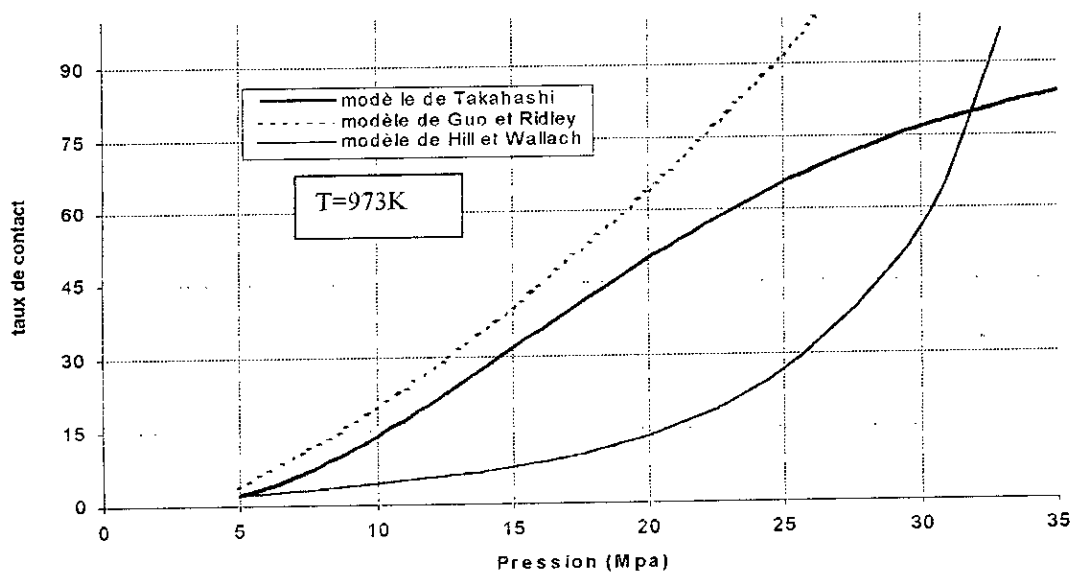


Figure 5.14 Evolution de la surface de contact en fonction de la pression pour T=973 t=3min

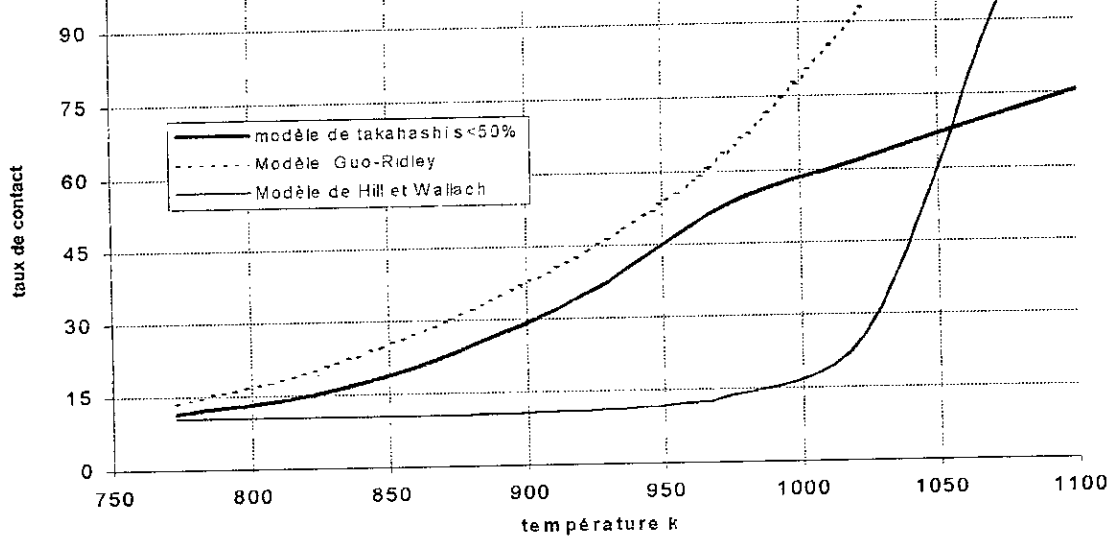


Figure 5.15: Evolution de la surface de contact en fonction de la température pour P=20Mpa (t=3min)

De même pour la température de soudage (figure 5.15), on remarque que le taux de soudage augmente avec la température pour une pression constante (le temps de maintien pris est de 3 minutes). Cette augmentation s'explique naturellement par l'effet de l'activation thermique sur les mécanismes microscopiques responsables de la déformation de fluage.

Afin de déterminer les conditions optimales du processus à l'aide des modèles faisant appel au fluage, on a établi un diagramme P-T-t (pression- température- temps). Ce diagramme (figure 5.16) représente le temps nécessaire pour la réalisation de la soudure en fonction de la pression et la température. Dans les conditions où le fluage contrôle seul le processus, la durée de soudage correspond au temps requis pour l'obtention d'un taux de contact de 95%, vu que pour $s > 95\%$, le fluage ne contrôle plus le processus, même pour des pressions élevées.

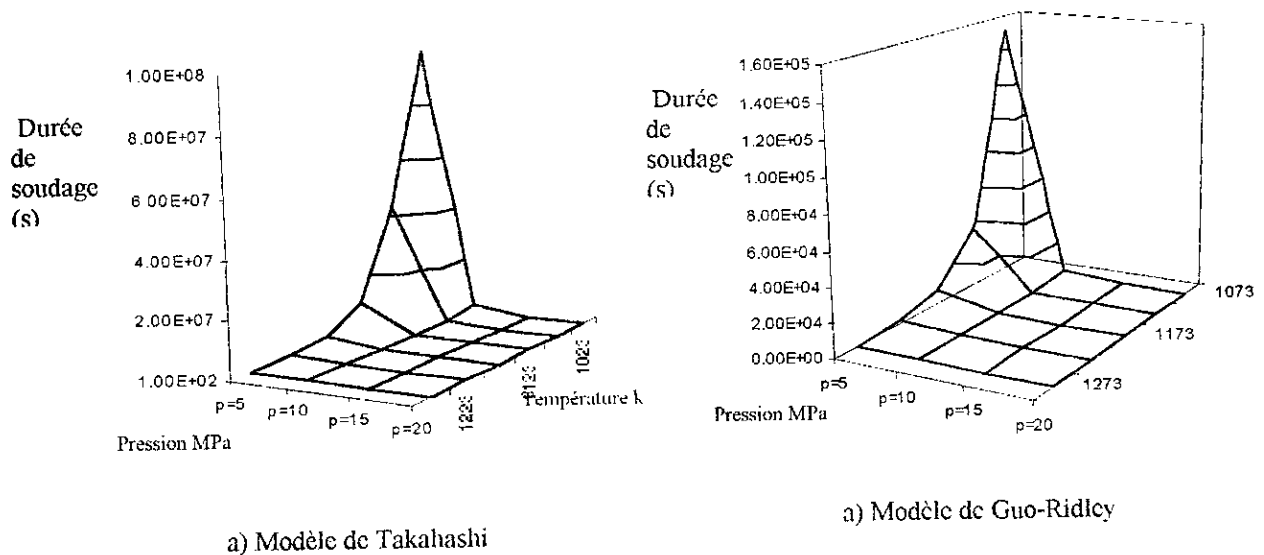


Figure 5.16 : Diagramme de temps de soudage en fonction de la pression et de la température

Ces diagrammes montrent que pour chacun des modèles le temps de soudage décroît rapidement quant la pression et la température de soudage augmente. Ces paramètres devraient être accrus pour réduire significativement le temps de soudage. Le diagramme tridimensionnel ne permet pas de définir les conditions adéquates du processus, mais donne une image globale de l'évolution du temps de soudage. Dans la pratique, on réalise des coupes horizontales similaires au diagramme présenté dans la figure 5.17. Dans ce cas la coupe est réalisée pour un temps de soudage $t_s = 1800$

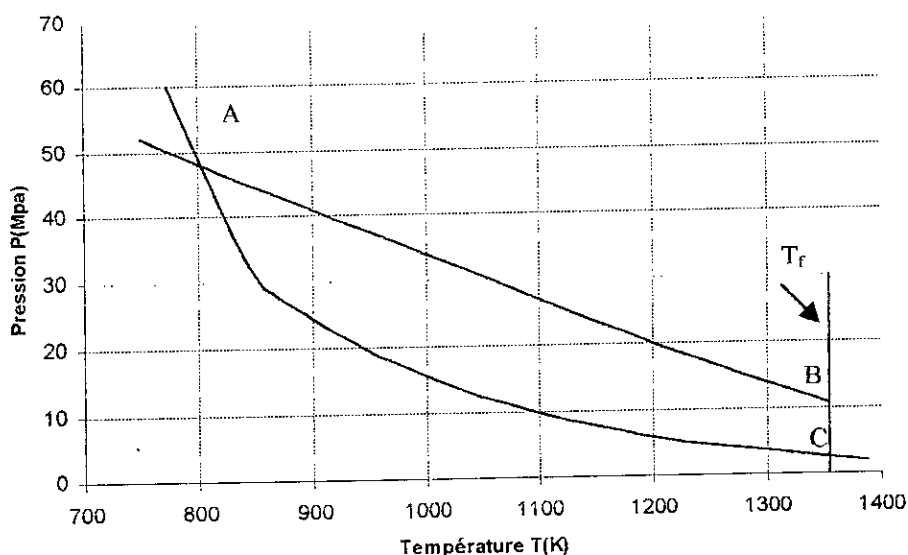


Figure 5.17 Coupe d'un diagramme P-T-t
Pour $t=1800$ seconde

Ce diagramme permet de déterminer le couple T-P susceptible de réaliser la soudure (à 95%) après un temps de maintien de 1800 secondes. Les conditions opératoires doivent se situer à l'intérieur de la zone ABC. Le segment AC correspond à la courbe de soudage et signifie qu'il faut 1800 s pour réaliser le processus de soudage dans les conditions (P, T).

Le segment AB correspond à la limite d'écoulement macroscopique du cuivre (la limite élastique). Cette courbe laisse entendre que pour éviter l'écrasement du métal les conditions de soudage doivent se situer en dessous de AB. La ligne BC constitue la limite due à la température de fusion de cuivre 1355K

L'influence de la rugosité est examinée en étudiant les grandeurs caractéristiques L_0 et h_0 . Les modèles analytiques n'ont pas montré une influence remarquable de la valeur de L_0 , sur la vitesse. Selon Derby-Wallach[16], l'influence des paramètres géométrique se manifeste particulièrement pour le cas de la diffusion interfaciale en modifiant la distances de migration des atomes. Toutefois, il a été montré par le modèle aux éléments finis[22,49] que pour le cas de volume en déformation uniforme, la vitesse de résorption croît inversement avec l'augmentation de l'angle α

défini par $ig\alpha = \frac{h_{00}}{L_{00}}$ (figure 2.1) Ce résultat est expliqué par la diminution de la vitesse de déformation selon le sommet du vide (mode1). C'est à dire que l'écoulement de la matière se fait plus dans le sens de l'expansion suivant x (mode2) si l'aspérité devient plus pointue.

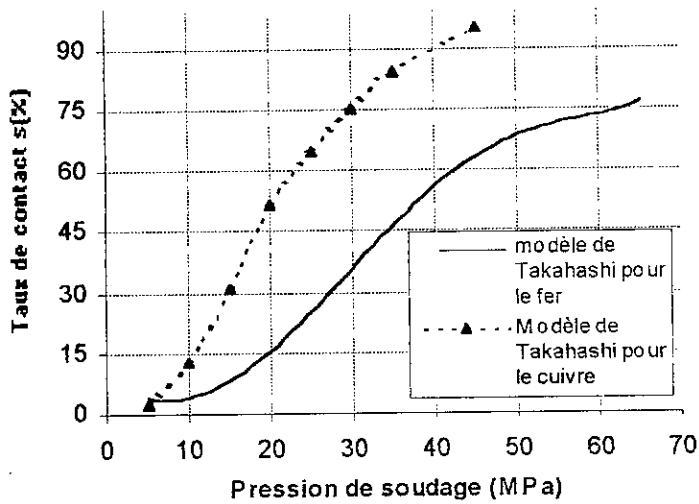
5.1.6 comparaison de la soudabilité du fer et du cuivre.

Jusqu'ici, n'ont été présentés que le cas du soudage du cuivre, ce qui nous a permis de comparer nos résultats avec ceux de la littérature. Dans ce paragraphe nous étendons cette étude au cas du fer pur dans le but de comparer la soudabilité de ces deux matériaux.

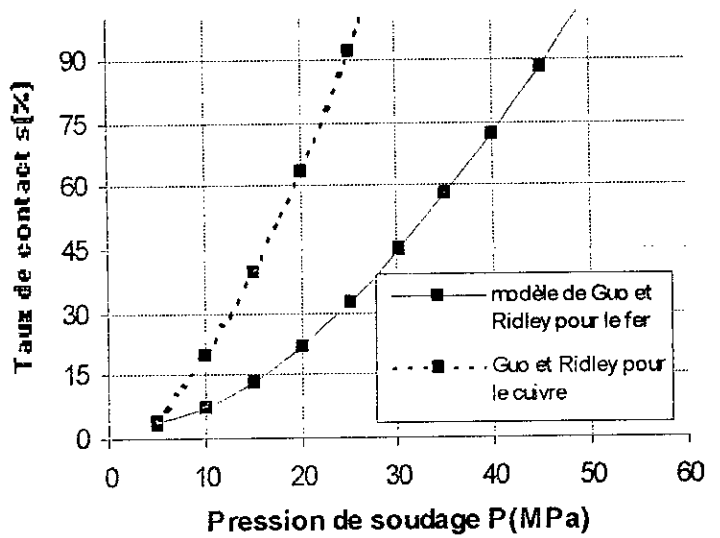
Le fer n'est pas le matériau idéal pour une compréhension précise du processus. En effet ce matériau présente certaines difficultés supplémentaires causées par la transformation allotropique du $fer\alpha$ en $fer\gamma$. La vitesse de soudage se trouve ainsi modifiée par la contribution des phénomènes de transport liés à la germination et la croissance la nouvelle phase. La cinétique de résorption varie également en raison de changement des constantes de fluage engendré par la présence d'une nouvelle phase.

Compte tenu des considérations précédentes le domaine de température de soudage a été inclus dans celui relatif à l'existence de la phase α . La température de soudage doit donc être inférieure à $910^{\circ}C$. Néanmoins, en pratique, pour le cas des aciers à faible taux de carbone le soudage s'effectue non seulement dans la phase ferritique mais également dans la phase austénitique (La température de soudage varie entre $700-1200^{\circ}C$ [15]).

Les figures 5.18 et 5.19 montrent l'évolution du taux de contact en fonction de la température et la pression respectivement, pour le cas du soudage du $fer\alpha$ (lignes pleines) en comparaison avec les résultats obtenus pour le cas du cuivre (lignes en pointillés). Le calcul est réalisé pour les modèles de Takahashi et de Guo-Ridley, pour un temps de maintien de 3 minutes.

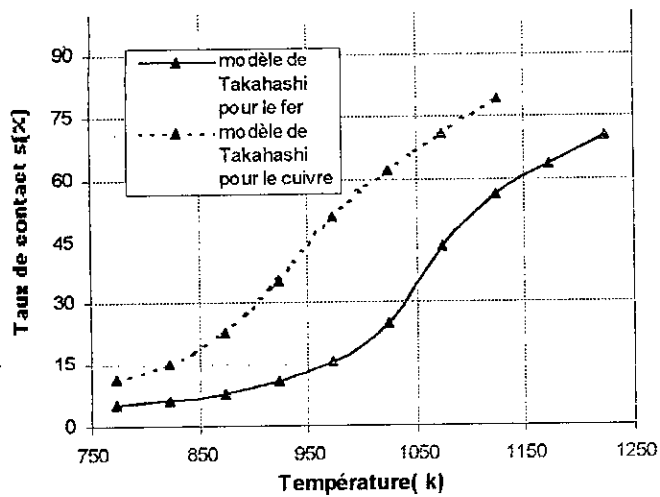


a

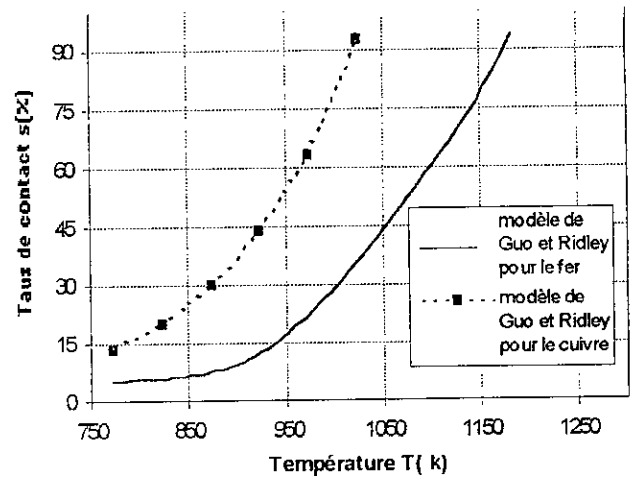


b

Figure 18 comparaison du taux de soudage en fonction de la pression entre le cuivre et le fer. a) modèle de Takahashi b) modèle de Guo et Ridley



a



b

Figure 19 comparaison du taux de soudage en fonction de la température entre le cuivre et le fer. a) modèle de Takahashi b) modèle de Guo et Ridley

On remarque que pour tous les modèles, le taux de contact est plus grand pour le cuivre que pour le fer ceci est bien compréhensible si on tient compte que le processus s'effectue sous le contrôle de la déformation de fluage. Le cuivre est plus déformable à chaud que le fer, ceci engendre une résorption plus importante par le mécanisme de fluage.

5.2. Résultats de la simulation du contact de Hertz par le code SYSTUS.

5.2.1. Conditions générales de la simulation du contact de Hertz.

Dans cette partie nous nous intéresserons aux résultats de la simulation du processus de contact à l'aide du code aux éléments finis SYSTUS. L'étude du processus d'adhésion selon une loi de comportement viscoplastique en puissance s'est révélé complexe, en raison de l'existence dans la matrice de rigidité de termes non linéaires relatifs au processus de contact entre les deux surfaces, d'un côté. D'un autre côté à cause des difficultés d'ordre numériques engendrées par le processus de grandes déformations. C'est la raison pour laquelle on a envisagé d'analyser le processus de contact en élasticité linéaire par l'étude du contact de Hertz en configuration sphère/plan.

Deux objectifs ont été recherchés à travers l'étude du contact de Hertz. Le premier est le traitement d'un cas de contact avec une loi de comportement plus simple que celle qui gouverne le soudage par diffusion, dans le but de maîtriser les autres paramètres du processus de contact tel que le modèle de contact et de frottement. Le deuxième objectif est liée à la validation des modules traitant de la mécanique de contact dans SYSTUS qui n'ont pas été utilisés au préalable. Cette validation est réalisée en comparant entre les résultats numériques de SYSTUS et ceux obtenus par la théorie de Hertz en contact normal.

L'étape de la simulation de contact de Hertz devait être une étape préliminaire pour étudier le contact viscoplastique mais la divergence de la solution ne nous a pas permis de d'analyser ce cas de figure. Les résultats présentés ci-dessous ne concernent donc que la simulation du contact de Hertz.

Le matériau utilisé est un verre - céramique de module d'élasticité $E=85\text{GPa}$ et de coefficient de poisson $\nu=0.26$. L'indenteur est considéré infiniment rigide par rapport au substrat.

Pour étudier l'effet du maillage sur les résultats de la simulation, différents maillages ont été utilisés et qui sont représentés dans les figures (5.20)(5.21)(5.22)(5.23).

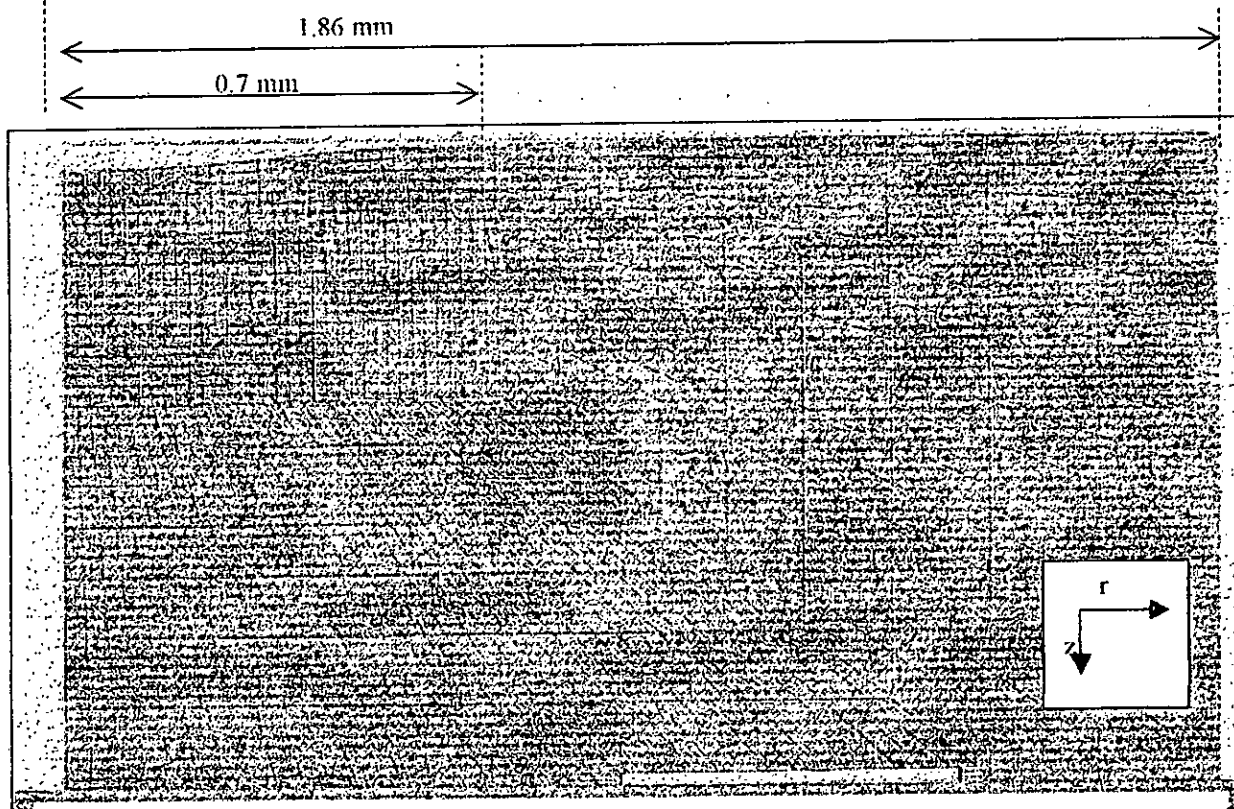


Figure 5.20 maillage quadrangulaire (maillage1)

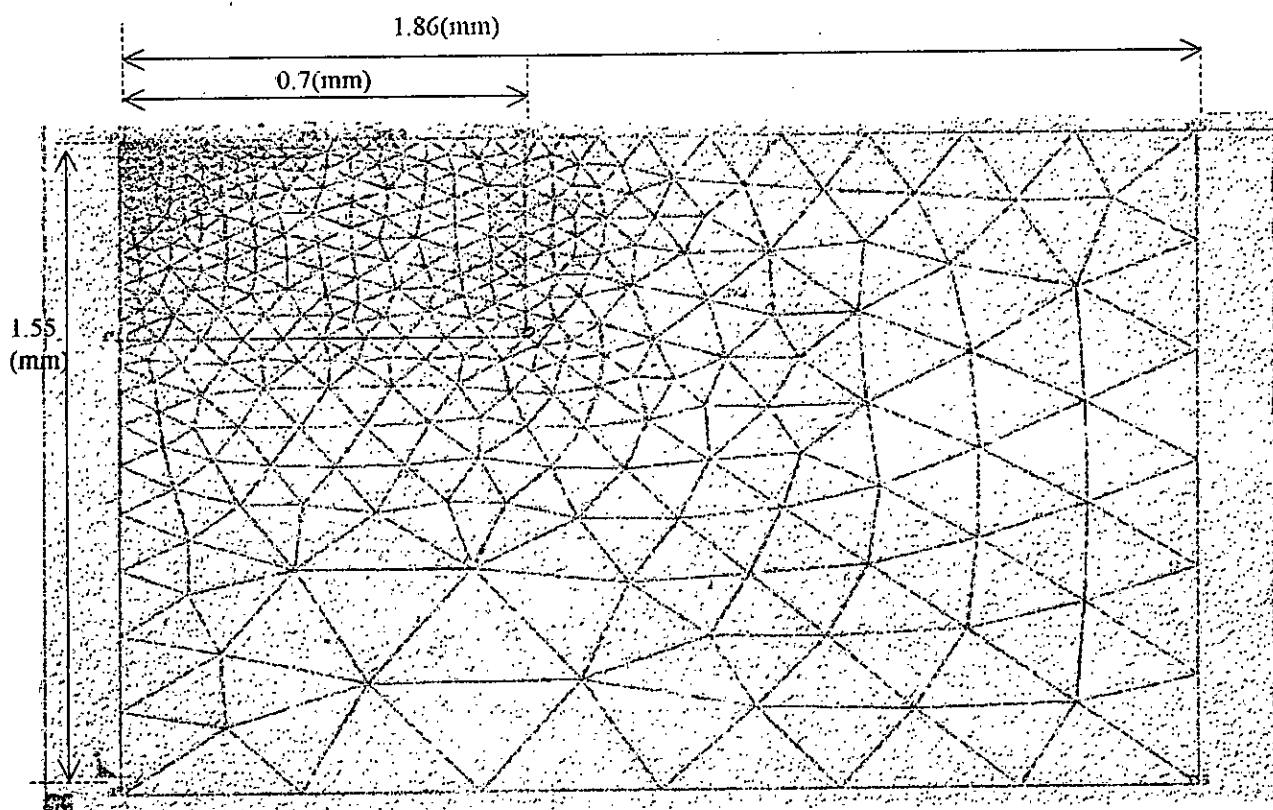


Figure 21 Maillage n°1 : maillage triangulaire fin au voisinage point du contact initial

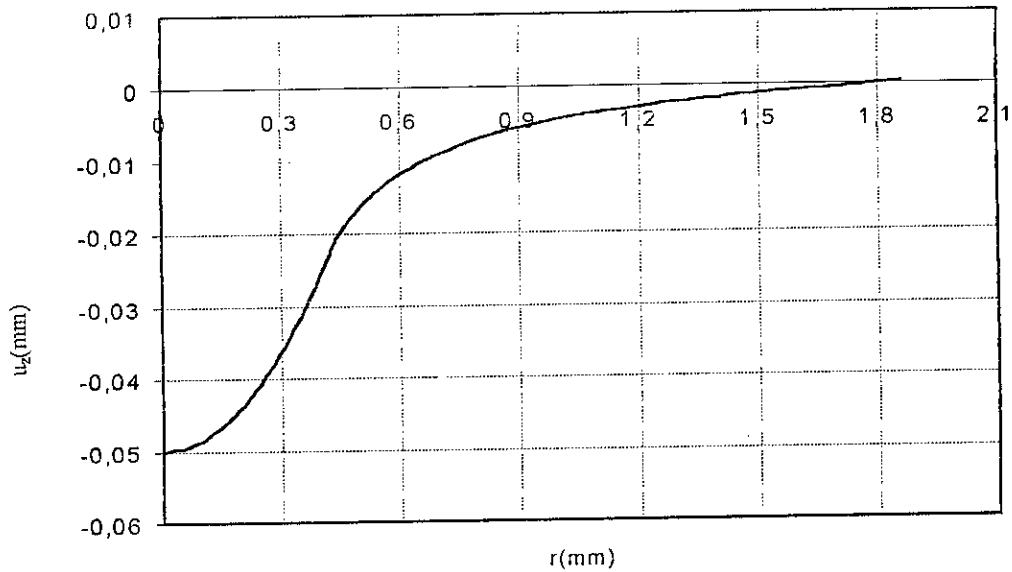


Figure 5.24: Déplacement u_z le long de l'axe r

Le calcul analytique est effectué à effort imposé et non à déplacement imposé comme pour la simulation numérique. Afin de comparer les résultats analytiques et numériques on a choisit d'utiliser pour le calcul analytique, le rayon de contact a correspondant à la profondeur d'indentation, qui elle est calculée numériquement. Donnée par la courbe précédente (figure 5.24).

a et δ_{ind} sont liés par la relation

$$\delta_{ind} = a^3 / R \quad \text{avec } R \text{ rayon de l'indenteur} = 3.18 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{donc } a = \sqrt[3]{R \delta_{ind}} = 0.3987$$

Le rayon de contact a donné par le calcul numérique est 0,42 mm. Cette grandeur est déterminée en recherchant les coordonnées de dernier point en contact suivant la direction r.

Les figures (5.25) à (5.27) montrent la distribution des contraintes σ_r , σ_z et σ_θ en surface de contact calculées numériquement pour différents maillages. Superposé à ces graphiques les courbes relatives au calcul analytique. L'analyse de ces sorties graphiques montre que les résultats numériques concordent bien avec ceux obtenus analytiquement. Toutefois, on peut remarquer qu'un écart entre le calcul numérique et analytique existe dans la zone au voisinage du point de contact initial (point correspondant $r=0$ et $z=0$). Cet écart est de 7% pour σ_z et de 13% pour σ_r et σ_θ . En s'éloignant de ce point suivant r, l'écart numérique/analytique diminue sensiblement à l'exception de la zone de bord de contact, cas de la contrainte σ_r (la zones avoisinante du point $r=a$, $z=0$). Aux alentours de ce point les courbes analytiques et numériques s'écartent de nouveau.

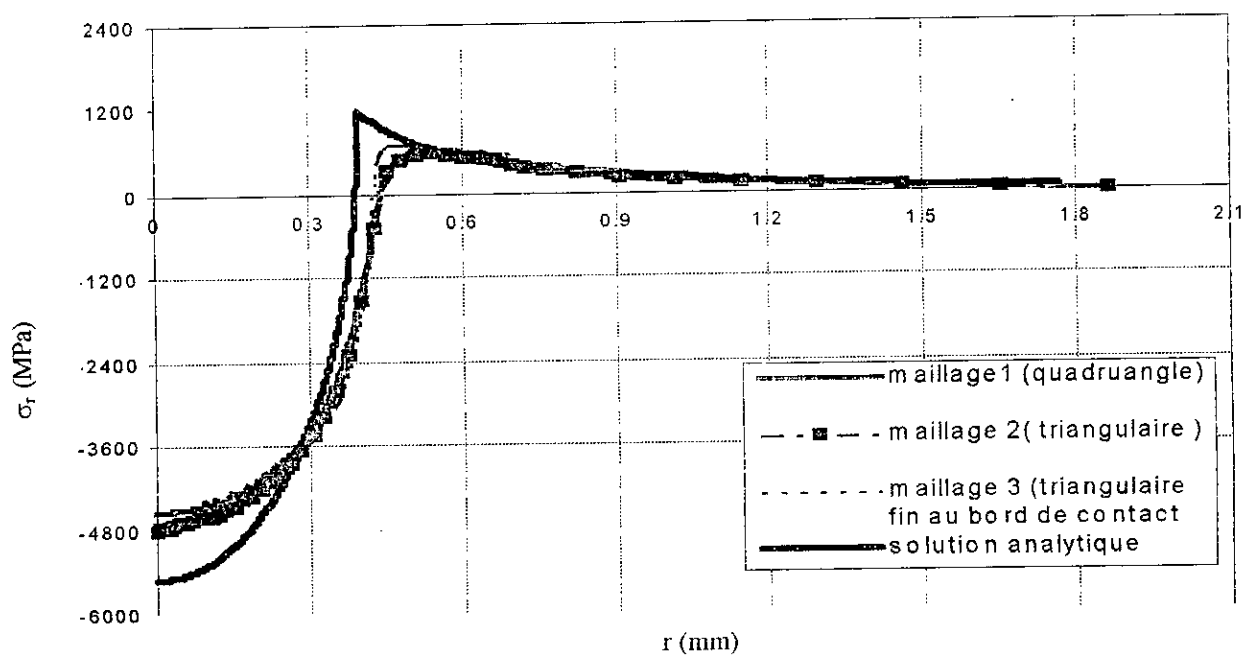


Figure 5.25 distribution de la contrainte σ_r en surface de contact pour les différents maillages et pour la solution analytique

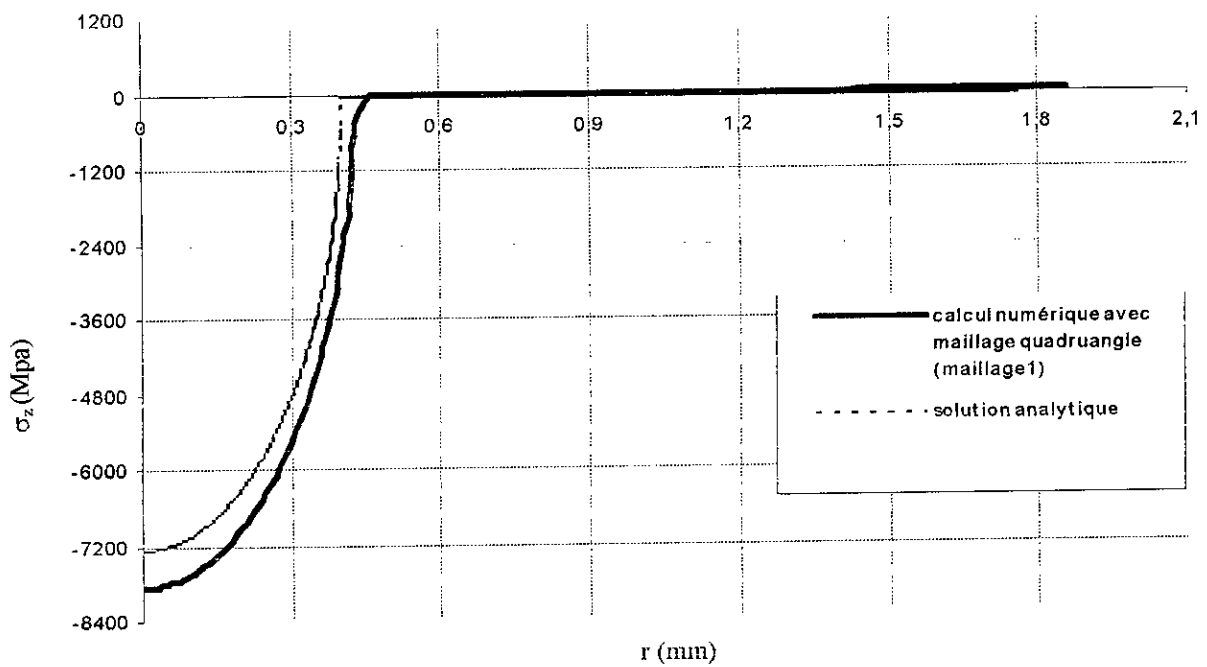


Figure 5.26 distribution de la contrainte σ_z en surface de contact pour les différents maillages et pour la solution analytique

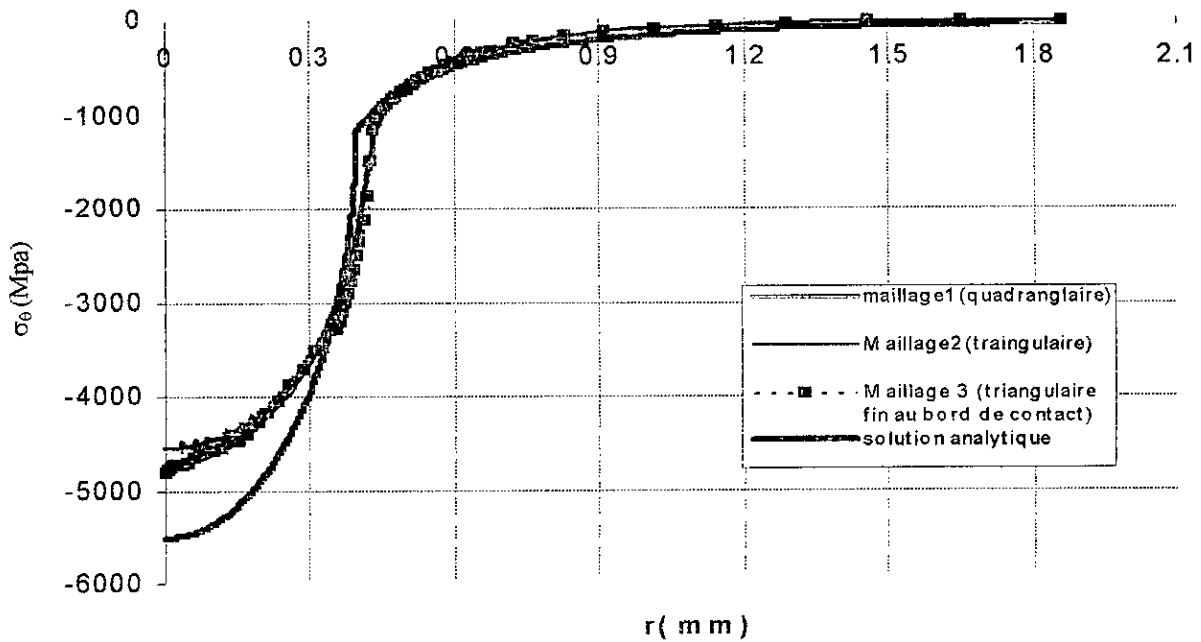


Figure5.27, distribution de la contrainte σ_0 en surface de contact pour les différents maillages et pour la solution analytique

De même pour le profil des contraintes σ_r et σ_z le long de l'axe z (figures 5.28 et 5.29), on constate que les courbes analytiques et numériques sont en bonne concordance avec la présence du même écart numérique/analytique au point ($r=0, z=0$)

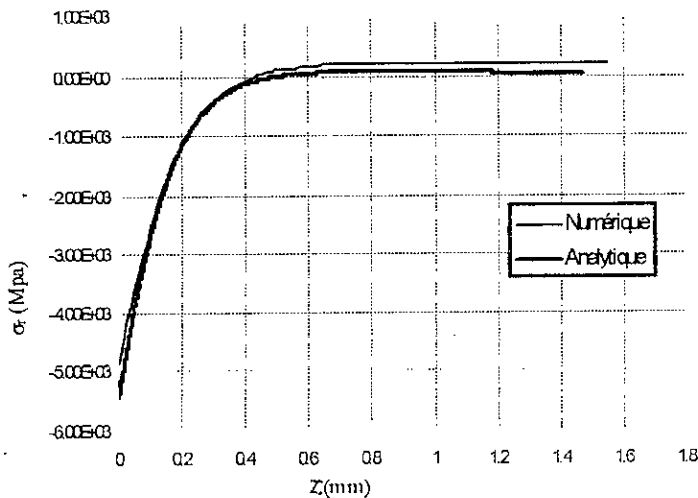


Figure5.28 : distribution de la contrainte σ_r suivant z pour le calcul analytique et analytique

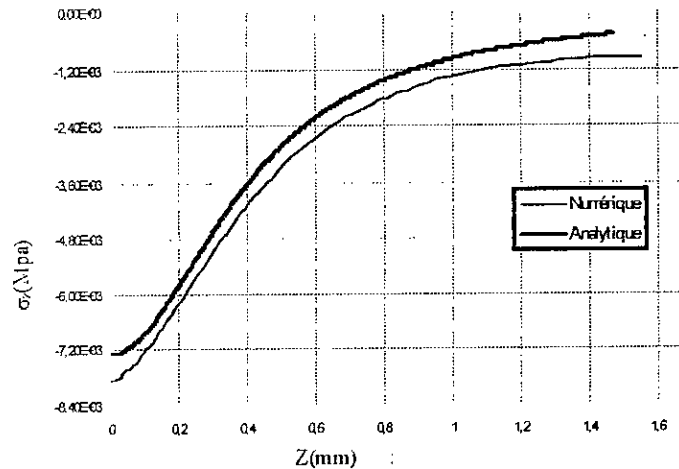


Figure5.29 : distribution de la contrainte σ_z suivant z pour le calcul analytique et analytique

La figure (5.30) illustre les lignes des isovaleurs pour la contrainte σ_z correspondant au calcul numérique (trait plein) et analytique(trait en pointillé). On remarque que l'allure des ces lignes reste semblable entre les graphiques numériques et analytiques. Cependant un écart est constaté

entre ces deux types de lignes, constamment dans les zones avoisinantes des deux points $(0,0)$ et $(0, a)$.

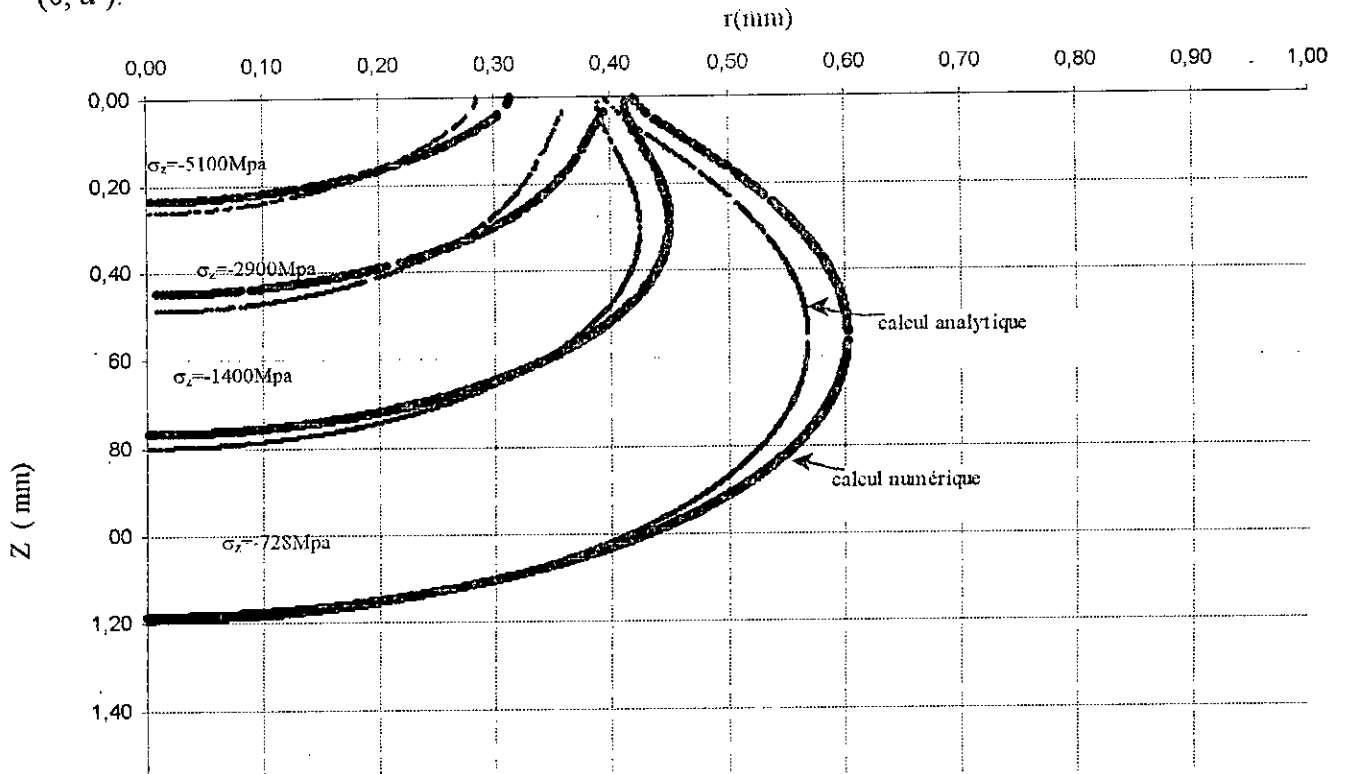


Figure 5.30 la distributions des lignes d'isovaleurs dans la zone de contact pour la contraintes σ_z .

Pour expliquer ces résultats, particulièrement les causes de l'écart l'analytique/numérique dans les zones avoisinantes des points $(0,0)$ et $(a, 0)$, il faut remarquer que ces zones correspondent à un fort gradient de contraintes. En effet, la force d'indentation est maximale au point de contact initial alors qu'au bord de contact σ_r varie fortement jusqu'à ce qu'elle devienne une contrainte en traction. L'écart analytique/numérique est lié au calcul des contraintes aux nœuds qui est basé sur une extrapolation à partir des valeurs calculées aux points de Gauss. Dans les zones à fort gradient de contraintes, une telle extrapolation peut engendrer des erreurs significatives[51]

A noter que toutes les contraintes du système sont en compression à l'exception de σ_r au voisinage de bord de contact qui est en traction.

On note également qu'une contrainte de cisaillement est générée à l'interface au cours de la simulation. L'existence d'une telle contrainte viole évidemment le modèle de physique retenu étant donné que le contact de Hertz est parfaitement glissant et ne donne donc pas lieu à des contraintes tangentielles en surface de contact. Cette contrainte n'a pas d'origine physique et relève de

l'artefact numérique engendré lors de la moyennation des contraintes aux nœuds à partir des points de Gauss.

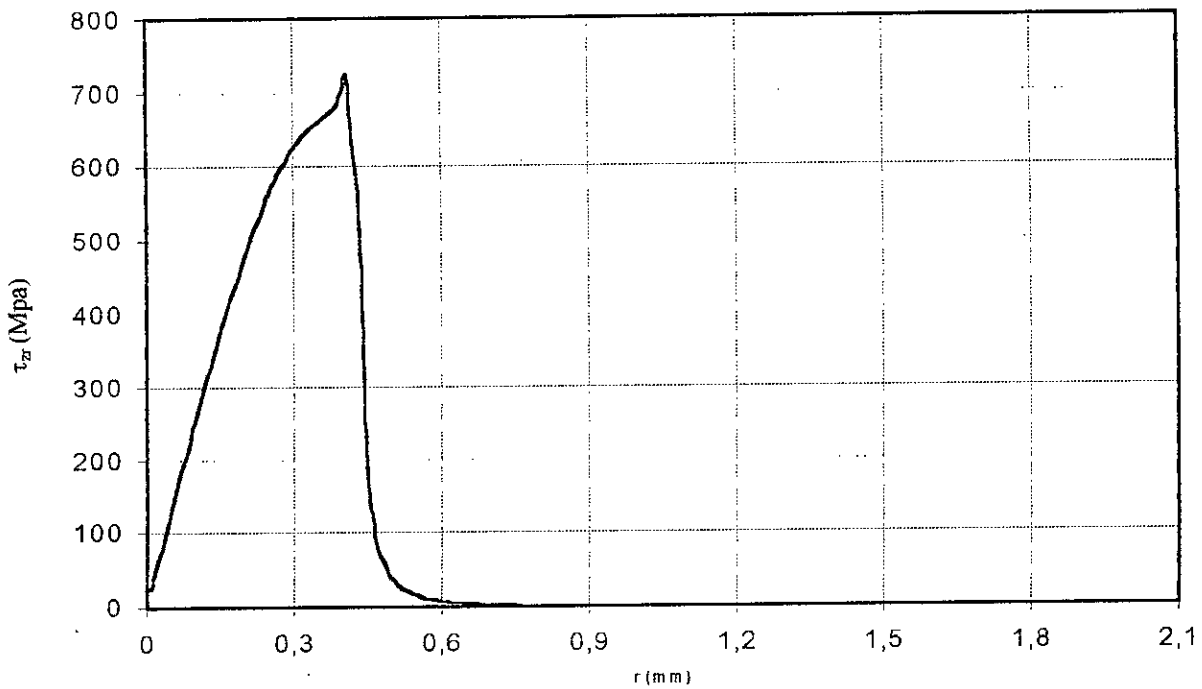


Figure 5.31 Contrainte de tangentielle due à l'artefact numérique

Les figures (5.20, 5.21, 5.22) nous permettent également d'étudier l'effet du maillage sur les résultats de la simulation. On remarque qu'en passant d'un maillage quadrangle (maillage1) à un maillage triangulaire fin au point de contact initial (maillage2) l'écart entre l'analytique et le numérique varie de 16% à 12% en raison de la diminution de l'erreur due à l'extrapolation des contraintes à partir des points de Gauss. Dans le troisième maillage nous avons affiné au bord de contact qui est également une zone à fort gradient de contrainte. On constate pour ce cas que le pic analytique de σ_r est mieux décrit. Cependant, ceci ne conduit pas à une réduction de l'écart analytique/numérique au point (0,0).

5.2.3. Le modèle avec indenteur déformable.

Dans cette partie le calcul numérique s'effectue en considérant que le contact s'effectue entre deux corps déformable. Pour cela on a affecté à l'indenteur un module d'Young: $E_{\text{indenteur}} = 10^5 E_{\text{substrat}}$. La figure 5.32 donne l'évolution de σ_r en surface comparaison avec la solution analytique. On constate que les résultats sont semblables au cas d'indenteur rigide (car $E_{\text{indenteur}}$ est très grand par rapport à E_{substrat}), avec constamment un écart de 13% au point $r=0$.

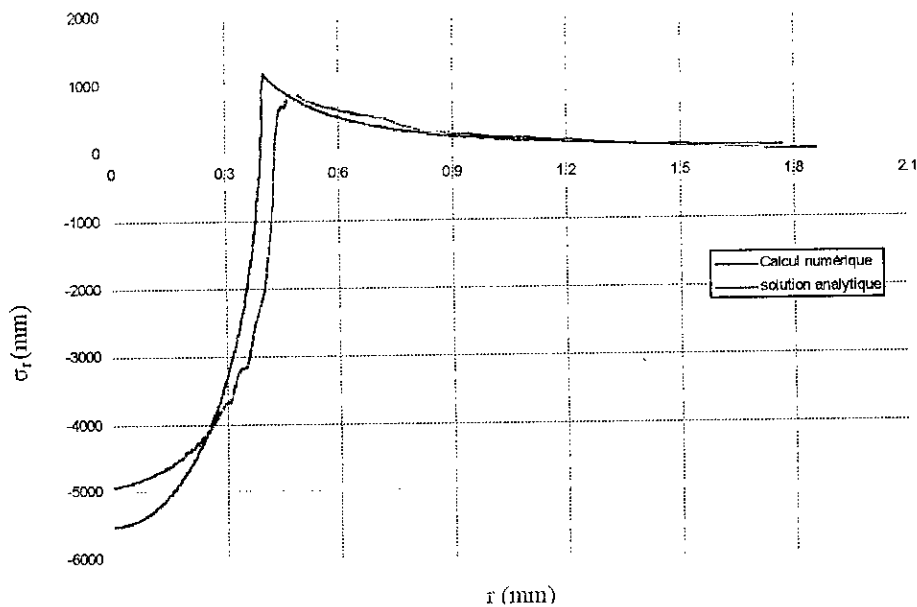


Figure 5.32 contrainte σ_r pour le cas d'un indenteur déformable

5.2.4 Traitement du contact viscoplastique par SYSTUS

Dans cette partie nous sommes passé à un cas réel de soudage par diffusion en simulant un contact entre deux aspérités triangulaires. Le travail consiste donc à compléter le modèle de contact viscoplastique présenté ci-dessus à l'aide du code aux éléments finis SYSTUS. Dans ces conditions il faut noter que la formulation précédente reste valable. Elle est d'ailleurs intégrée dans les modules de contact en relation avec la loi de comportement associée. Dans la bibliothèque de SYSTUS relative aux lois de comportements, une loi en puissance correspond à modèle de viscoplasticité rigide.

Afin de mieux maîtriser le comportement viscoplastique en grandes déformations, nous avons commencé par étudier une aspérité triangulaire sous sollicitation de compression, sans l'intervention des phénomènes de contact. L'application de ce modèle nous a confirmé l'existence de déformations considérables (de l'ordre de 60% même pour des sollicitations faibles).

La simulation du processus d'adhésion viscoplastique consiste à affecter aux deux aspérités en contact une loi de comportement en puissance de type (5.1). Durant la simulation le calcul itératif s'effectue normalement jusqu'à ce que les premiers nœuds des deux surfaces commencent à rentrer en contact. A partir de ce moment le calcul diverge même pour de très petit pas de temps (de l'ordre de 10^{-6} s).

Les problèmes de divergence rencontrés dans ce cas sont de mêmes nature que ceux exposés dans le paragraphe 4.9. En effet, les problèmes de non-convergence de la solution ont été observés même lors de la simulation du contact de Hertz. Nous avons été amenés à optimiser la valeur du déplacement imposé à l'indenteur. Sinon des fluctuations ont été observées dans les profils des

contraintes et des déformations. La divergence du calcul viscoplastique peut être une amplification de ce phénomène.

Conclusion générale

Dans ce travail nous nous sommes fixé comme objectif principal la modélisation du processus de formation de la soudure dans le procédé de soudage par diffusion contrôlé par le fluage selon une loi en puissance. Cette étude a été réalisée en analysant le processus d'adhésion viscoplastique à l'interface de soudage, selon deux approches différentes :

1- l'approche analytique faisant appel à trois modèles analytiques (modèle de Guo-Ridley, de Takahashi et de Hill-Wallach). Les modèles analytiques de Guo-Ridley et de Takahashi sont inspirés des modèles théoriques conçus à l'origine pour la modélisation du frittage sous pression des poudres métalliques. Le modèle de Hill et Wallach fait référence aux études sur la déformation de la matière qui entoure un vide isolé. Ceci explique la différence notable dans le taux de soudage calculé par ce modèle par rapport aux deux autres.

Les modèles de Takahashi et de Guo et Ridley sont équivalents dans le premier stade du processus, mais ils s'écartent sensiblement durant la deuxième phase, de sorte que la cinétique de résorption relative au modèle de Guo-Ridley est plus importante. Ceci s'explique par les conditions aux limites retenues pour chacun des deux modèles. En effet le modèle de Takahashi correspond à un cas de soudage avec volume contraint, alors que celui de Guo et Ridley correspond à des conditions de soudage avec volume en déformation uniforme.

2- Le modèle aux éléments finis est basé sur l'étude du processus de contact dynamique à l'interface de soudage ainsi que l'analyse des larges déformations qui se produisent aux alentours d'une cavité.

Ce modèle aux éléments finis n'a pu être achevé en raison des difficultés d'ordre numérique qui ont surgi lors de la programmation.

Ces difficultés sont causées par la divergence du calcul itératif vers la solution adéquate du problème. La non convergence du calcul est due, d'un côté, à la forte non linéarité que présente la loi de comportement (une loi en puissance). D'un autre côté ces soucis numériques sont liés au processus de grandes déformations qui nécessitent, généralement, la réalisation d'un remaillage automatique en fonction de l'incrément du temps. Une autre source de difficultés numériques découle de la présence des termes relatifs à la mécanique de contact dans la matrice de rigidité.

3- Cependant, le processus de contact a été étudié après adoption d'une loi de comportement élastique (contact de Hertz). Les résultats obtenus par cette étude montrent qu'il existe une concordance entre les résultats numériques calculés par SYSTUS et ceux calculés par la théorie de

Hertz en contact normal.

Naturellement, cette étude est appelée à être poursuivie par la finalisation de l'étape de la réalisation du modèle aux éléments finis. Ceci nécessitera la construction d'un algorithme robuste susceptible de résoudre les difficultés numériques posées par ce modèle.

Références bibliographiques

- [1] M.J. ALBOM, solid state bonding, Welding journal, Vol. 6 pp. 491-504, 1967
- [2] Y. BIENVENU, M. JEANDIN, Métallurgie du soudage par diffusion, Ann. Chim.Fr Vol.12 pp 77-86, 1987
- [3] B. BLANCHE, J. J. BOULANGER, Le soudage par diffusion, Soudage et techniques connexes n° 3-4, pp.93-110, 1975
- [4] W. H. KING and W. A. OWCZARSKY, Additional study on the diffusion welding of titanium, n° 10 pp. 444-450, 1968
- [5] W. H. KING and W. A. OWCZARSKY, Diffusion of welding of commercially pure titanium, Welding Journal, n° 7, pp. 289-298, 1967
- [6] M. HOURCADE, Le soudage-diffusion à l'état solide, Soudage et Techniques Connexes n° 5-6 pp. 48-58, 1989
- [7] D. R. MILNER and G. R. ROWE, Fundamentals of solid-phase welding, Metal. Rev. Vol. 28 n° 7 pp. 433-450, 1962
- [8] D. HAUSER and P. KAMMER, Solid state welding of aluminium, Weld Journal Vol.46 pp. 11-12, 1967
- [9] G. G. LESSMAN and W. A. BRYANT, Complex rotor fabrication, welding journal Vol. 51 pp. 606-614, 1972
- [10] M. M. SHWARTZ, Diffusion Welding, Welding Technology for the aerospace industry, Las Vegg pp. 1-40, 1981
- [11] P. KAMMER and R. E. MONROE, Further studies of diffusion bonding below 1000°F, Welding research supplement, n° 3 pp. 116-124, 1969
- [12] B. DERBY and E. R. WALLACH, Diffusion bonding: development of theoretical model, Metal Science Vol. 18 pp. 427-431, 1984
- [13] G. V. ALM, Guide to diffusion bonding, Mat. Eng. N° 9 pp. 24-29, 1969
- [14] T. OMAE, Y. RFUKUYA and S. INOUE, Development and practical application of diffusion bonding, Mitsubishi Heavy Ind, Technical revue pp. 1-8, 1983
- [15] D.S. TAYLORS, G.POLLARD, The diffusion bonding of steels: from conf on "advances in welding processes" 1, 78, Cambridge, The welding institute, 1978.
- [16] A. HILL and E. R. WALLACH, Modelling solid-state diffusion bonding, Acta. Metall. Vol. 37 No 9. pp. 2425-2437, 1989
- [17] Y. TAKAHASHI and K. INOUE, Prediction algorithm for solid state diffusion bonding in the case when materiel constants are unknown, Trans. JWRI Vol. 24 No 2 pp. 27-36, 1996
- [18] J. PILLING, The kinetics of isostatic diffusion bonding in superplastic materials, Mct. Scic. Vol 18 pp. 117-122, 1986
- [19] Y. TAKAHASHI and K. NISHIGUSHI, Determiation of optimum process conditions in solid phase bonding by a numerical model, Welding in the world Vol. 4 pp. 100-113, 1989

- [20] Y. TAKAHASHI and K. INOUE, Recent void shrinkage models and their applicability to diffusion bonding, *Mat. Sci. Tech.* Vol. 19 No 4 pp. 953-964, 1992
- [21] Y. TAKAHASHI and K. KOGUSHI, Y. TAKAHASHI, Modelling of solid state bonding by power law creep, *trans. of JWRI* Vol. 20 No 2 pp. 9-17, 1992
- [22] Z. X. GUO and N. RIDLEY, Modelling of diffusion bonding of metals, *Mater. Scien. Tech.* Vol. 3 pp. 945-953, 1987
- [23] K. WILKINSON and M. F. ASHBY, Pressure sintering by power law creep, *Acta. Metal.* Vol.23 pp. 1277- 1285, 1975
- [24] G. E. DIETER, *Mechanical Metallurgy*, Third Edition McGraw-Hill International editions, 1986
- [25] G. LEMAITRE , J. CHABOCHE, *Mécanique de solide*, Dunod, Paris, 1985.
- [26] Y. TAKAHASHI and M. TANIMOTO, Effect of surface asperity on interfacial contact process controlled by power law creep –A numerical study of viscoplastic adhering process, *Jour. of Eng. and Tech.* Vol. 117 pp. 330-335, 1995
- [27] B. DERBY and E. R. WALLACH, Joining method in space :a theoretical model for diffusion bonding,, *Acta. Metall.* Vol. 7 pp. 685-698, 1980
- [28] G. GARMONG, N. E. PATON and A. S. ARGON, Attainment of full interfacial contact during diffusion bonding, *Metallurgical Transaction* Vol. 6A pp. 1269-127, 1975
- [29] E. A. MCCLINTOCK, Approximate analysis of plastic deformation around a hole, *J. App. Mech.* Vol. 35 pp. 363-371, 1973
- [30] K. L. JOHNSON, *Contact Mechanics*, Cambridge University press, 1985
- [31] J. W. HANCOCK, Deformation of an elliptical hole, *Met. Sci.* Vol. 10 pp. 319-325, 1976
- [32] O. C. ZIENKIWICZ and R. L. TAYLOR, *La méthode des éléments finis. Formulation de base problèmes linéaires*, Traduction du volume1. AFNOR technique, 1991.
- [33] K. J. BATHE and E. L. WILSON, *Numerical method in finite element analysis*, Prentice Hall, 1976
- [34] G. DHATT, G. TOUZOT, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, 2^{ème} ed. Maloine S. A. éditeur, 1984
- [35] O. C. ZIENKIWICZ and R. L. TAYLOR, *The finite element method. Solid and fluid mechanics, dynamic and non-linearity* , Volume2 Mc Graw-Hill Book Company, 1991
- [36] M. RAPPAZ, M. BELLET et M. DEVILLE, *Modélisation numérique en science et génie des matériaux*, Série traité des matériaux, Presse polytechnique romande, 1998
- [37] K. WASHIZU, *Variational methods in elasticity and plasticity*, 2^{ème} ed Pergamon Press, 1975
- [38] E. HINTON and D. R. J. OWEN, *Finite element programming*, Academic press, 1979
- [39] Y. TOMITA and R. SOWERBY, An approximate analysis for studying the deformation mechanics of the rate sensitive materials, *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 20 pp. 361-371, 1978
- [40] Y. TAKAHASHI, T. KOGUSHI and K. NISHIGUSHI, Modelling of viscoplastic adhering process by finite element technique, *Jour. of Eng. and Tech.* Vol. 115 pp. 150-155, 1993

- [41] Y. TAKAHASHI and K. KOGUSHI, T. Y. TAKAHASHI, Effect of bulk deformation on viscoplastic adhering process- A numerical study of solid state process welding, Jour. of Eng. and Tech. Vol. 115 pp. 171-178, 1993
- [42] Y. YAMADA, Plasticity and viscoelasticity, Baifucan, Tokyo, 1980
- [43] G. GEANDIER, Théorie d'indentation de Hertz, rapport d'avancement LSG2M , Ecole Des Mines De Nancy, 1999
- [44] A. C. FISHER-CRIppS, The hertzian contact surfaces, J. Mat. Sci. V 34. pp. 129-137, 1985
- [45] E. H. YOFFE, Modified Hertz Theory for spherical indentation, Philosophical magazine, Vol. A, 50(6) pp. 813-828, 1984.
- [46] R. HILL, The mathematical Theory of plasticity, Oxford at the Clarendon Press, London, pp 213-226, 1950
- [47] Y. TAKAHASHI, F UENO and K. NISHIGUSHI, A numerical analysis of the void shrinkage process controlled by surface diffusion, Vol 36 No 11 pp. 3007-3018, 1988
- [48] B. DERBY and E. R. WALLACH, Theoretical model for diffusion bonding, Metal Science Vol. 16 pp. 49-56, 1982
- [49] Y. TAKAHASHI and M. TANIMOTO, Experimental study of interfacial contacting process controlled by power law creep, Vol 39 No 12 pp. 3199-3216 1991 Jour. of Eng. Mat. And Tech. Vol. 6A pp. 336-340, 1995
- [50] K. NISHIGUSHI and Y. TAKAHASHI, A quantitative analysis of solid state bonding mechanism, Int. Conf. on reliability in welding, 6-8 september 1984, Hangzhou, China, Paper A-13.
- [51] A. KRICHEN, Simulation et analyse expérimental du comportement d'un contact Verre/Pmma sous sollicitation de fretting, Thèse de doctorat, Ecole centrale de Lyon, 1997