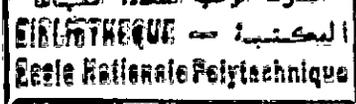


M0036/93B

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

THESE DE MAGISTER



Spécialité: Electronique Appliquée

Option: Acquisition et traitement de l'information

Présentée par :

Mr Hicham BOUSBIA-SALAH

- Ingénieur d'état en electronique (ENP)

- Master en Computer Engineering (WSU)

EXTRAPOLATION DES FONCTIONS A BANDE LIMITEE

Etude et évaluation de l'algorithme de Papoulis

Soutenue en Avril 1993 devant le jury d'examen composé de:

| | | | |
|-----------------|------------------|-----|------------|
| Mr. B. Derras | PHD | ENP | Président |
| Mr. A. Chekima | Professeur | ENP | Rapporteur |
| Mr. C. Larbès | PHD | ENP | Examineur |
| Mr. M. Trabelsi | Chargé de cours | ENP | Examineur |
| Mr. F. Chigara | Maitre assistant | ENP | Examineur |

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

THESE DE MAGISTER

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHÈQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Spécialité: Electronique Appliquée

Option: Acquisition et traitement de l'information

Présentée par :

Mr Hicham BOUSBIA-SALAH

- Ingénieur d'état en electronique (ENP)

-Master en Computer Engineering (WSU)

EXTRAPOLATION DES FONCTIONS A BANDE LIMITEE

Etude et évaluation de l'algorithme de Papoulis

Soutenue en Avril 1993 devant le jury d'examen composé de:

| | | | |
|-----------------|------------------|-----|------------|
| Mr. B. Derras | PHD | ENP | Président |
| Mr. A. Chekima | Professeur | ENP | Rapporteur |
| Mr. C. Larbès | PHD | ENP | Examineur |
| Mr. M. Trabelsi | Chargé de cours | ENP | Examineur |
| Mr. F. Chigara | Maitre assistant | ENP | Examineur |

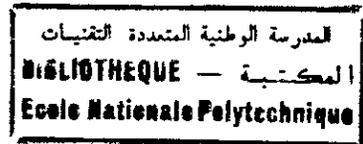
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

EXTRAPOLATION DES FONCTIONS A BANDE LIMITEE:
Etude et évaluation de l'algorithme de Papoulis

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

REMERCIEMENTS

REMERCIEMENTS



Ce travail a été réalisé sous la direction de monsieur le professeur A. Chekima dans le laboratoire de traitement du signal du département électronique de l'école nationale polytechnique d'Alger.

Je tiens à remercier, très chaleureusement, monsieur le professeur A. Chekima pour la confiance qu'il m'a accordée et la bienveillante attention qu'il a, toujours, porté à mon travail; qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à monsieur H. Farah, maître de conférences au département électronique, pour ses interventions fructueuses et ses précieux conseils.

Je remercie, vivement, le docteur B. Derras, chargé de cours au département électronique pour ses précieuses remarques et les conseils qu'il m'a donnés ainsi que pour avoir accepté de présider le jury de ma soutenance.

J'exprime toute ma gratitude à messieurs S. Aït-Cheikh et F. Chigara pour le soutien et les encouragements qu'ils n'ont cessé de me prodiguer.

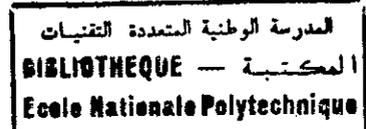
Je remercie, également, messieurs M. Trabelsi, C. Larbès, et F. Chigara chargés de cours au département électronique, pour avoir accepté de faire partie du jury de la soutenance.

Que tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail trouvent, ici, mon éternelle reconnaissance.

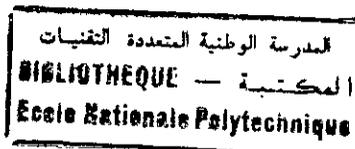
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

SOMMAIRE

SOMMAIRE



| | |
|---|----|
| <i>Sommaire</i> | 4 |
| <i>Introduction</i> | 7 |
| <i>Chapitre 1: Présentation de la méthode d'extrapolation</i> .. | 10 |
| I.1: Fonction à bande limitée..... | 11 |
| I.2: Description de la méthode d'extrapolation.. | 12 |
| I.3: Réduction de l'erreur quadratique dans le domaine fréquentiel..... | 18 |
| <i>Chapitre 2: Convergence</i> | 24 |
| II.1: Théorème 1..... | 25 |
| II.2: Démonstration du théorème 1..... | 26 |
| II.3: Théorème 2..... | 31 |
| II.4: Démonstration du théorème 2..... | 31 |
| II.5: Convergence de $F_n(\omega)$ et $G_n(\omega)$ | 35 |
| <i>Chapitre 3: Présentation des résultats</i> | 39 |
| III.1: Extrapolation de fonctions à bande limitée à une dimension..... | 40 |
| III.2: Extrapolation de fonctions à bande limitée à deux dimensions..... | 52 |
| <i>Chapitre 4: Présentation d'autres approches et comparaison</i> | 57 |
| IV.1: Application de la méthode de Papoulis pour l'estimation de sinusoides..... | 58 |
| IV.2: Comparaison avec d'autres méthodes | |

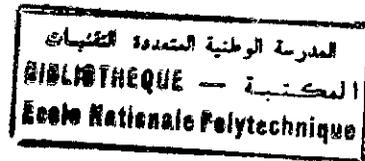


| | |
|--|----|
| d'extrapolation..... | 60 |
| IV.3: Méthode de reconstitution de signaux à deux dimensions de D.Chen et J.Allebach... | 63 |
| <i>Conclusion</i> | 66 |
| <i>Annexes</i> :..... | 68 |
| Annexe A..... | 69 |
| A.1: Borne supérieure des fonctions à bande limitée..... | 69 |
| A.2: Les fonctions prolates sphéroïdales.... | 70 |
| Annexe B..... | 73 |
| B.1: Programme d'extrapolation de fonctions à bande limitée à une dimension..... | 73 |
| B.2: Programme d'extrapolation de fonctions à bande limitée à deux dimensions..... | 79 |
| <i>Bibliographie</i> | 83 |

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

INTRODUCTION



La connaissance incomplète du comportement d'un signal dans son domaine de définition, supposé fini, ainsi que la connaissance de son spectre fréquentiel représentent un problème essentiel et fondamental que l'on doit, souvent, résoudre en traitement du signal. Pour cela, on a recours à l'extrapolation. En effet, il s'agit de prévoir le comportement du signal dans tout son domaine de définition à partir de la connaissance d'une petite partie seulement de ce domaine [2,3].

Parmi les domaines des sciences physiques où on est, souvent, confronté à ce problème; nous citerons dans le cas unidimensionnel la situation classique où on dispose de mesures incomplètes, donc de données non disponibles ou même parfois inaccessibles, pour décrire un phénomène. Dans le cas bidimensionnel, le problème se pose, naturellement, en traitement de l'image avec ses multiples applications en médecine et en sciences naturelles comme la géologie, la météorologie ou l'océanographie. On peut rencontrer ce problème, également, dans le domaine de la reconnaissance des formes ou dans le graphisme par ordinateur.

Tout le long de ce travail, la méthode d'extrapolation de Papoulis [2] de signaux unidimensionnels et bidimensionnels a été analysée et testée. Cette méthode s'applique aux fonctions à bande limitée [1]. L'algorithme consiste en une méthode itérative qui utilise les propriétés des fonctions à bande limitée ainsi que les transformées directe et inverse de Fourier. L'algorithme s'appuie sur la réduction de l'énergie de l'erreur entre le signal obtenu et le signal désiré ou réel [3].

La diminution de l'erreur quadratique ainsi que la convergence de l'algorithme ont été étudiées et démontrées pour le cas unidimensionnel au deuxième chapitre. Dans le cas bidimensionnel, la démonstration de la convergence, ainsi que, la réduction de l'erreur quadratique suivent les mêmes étapes. Néanmoins, leur présentation dans ce manuscrit peut allourdir ce travail et voiler, partiellement, l'aspect qualitatif de l'étude de cet algorithme. Au troisième chapitre, nous présenterons les différents résultats obtenus après avoir appliqué la méthode d'extrapolation à quelques exemples dans les deux domaines, unidimensionnel et bidimensionnel. Nous évaluerons, quantitativement, la réduction de l'erreur quadratique pour chaque cas. Il est à noter que, dans le cas unidimensionnel, l'extrapolation se fait à partir de la connaissance d'un segment; alors que, dans le cas bidimensionnel, l'extrapolation se fait à partir de la connaissance d'une surface. Ce qui suppose, intuitivement, une convergence moins rapide.

Enfin, le dernier chapitre sera consacré à l'étude d'une application particulière de cette méthode à la reconstruction de la somme de deux sinusoides [4] et à la comparaison entre l'algorithme de Papoulis et deux autres méthodes d'extrapolation: la méthode d'extrapolation de Harris [9], et une méthode consistant à développer la fonction à extrapoler en une somme d'ondes prolates sphéroïdales [10]. Cette comparaison permet d'évaluer l'efficacité de la méthode présentée dans ce travail, et sa commodité de mise en oeuvre informatique. A la fin de ce chapitre, on présentera, d'une manière succincte, une nouvelle approche d'extrapolation de fonctions à bande limitée bidimensionnelles [16].

Chapitre 3
PRESENTATION DE LA METHODE D'EXTRAPOLATION

Chapitre I

PRESENTATION DE LA METHODE D'EXTRAPOLATION

La méthode d'extrapolation présentée tout le long de ce travail s'applique aux fonctions à bande limitée. Il est utile de définir ces fonctions.

I.1: Fonction à bande limitée:

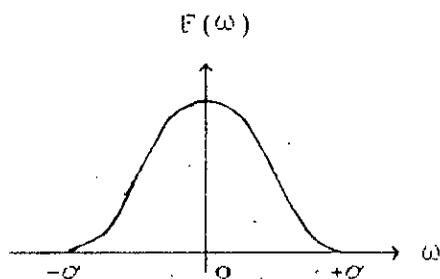
Une fonction $f(t)$ est à bande limitée si elle satisfait les deux conditions suivantes [1]:

-Sa transformée de Fourier est nulle en dehors d'un intervalle fini,

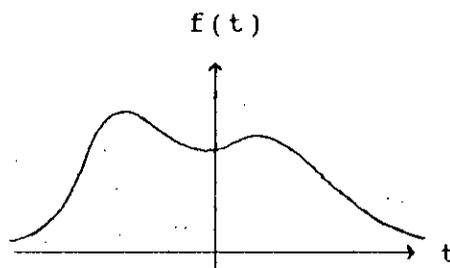
$$F(\omega) = 0 \quad \text{pour } |\omega| > \sigma \quad \text{figure 1(a)}$$

-Son énergie E est finie,

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 . dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{+\sigma} |F(\omega)|^2 . d\omega < \infty \quad \text{figure 1(b)}$$



(a)



(b)

Figure 1: Fonction à bande limitée

En physique, il existe un grand nombre de phénomènes qui peuvent être décrits, soit par des fonctions à bande limitée, soit par des fonctions à temps limité: il existe une dualité entre les propriétés des fonctions à bande limitée et les propriétés des fonctions à temps limité [1]. Ces phénomènes sont soumis, essentiellement, aux limitations occasionnées par les transducteurs utilisés. Nous citerons à titre d'exemples: les antennes qui possèdent un diagramme de rayonnement sur une bande de fréquence limitée à cause de leurs dimensions, la transmission de l'information à travers des canaux possédant une bande passante limitée due, en partie, à la technologie utilisée et l'imagerie avec des lentilles de dimensions finies.

I.2: Description de la méthode d'extrapolation:

Pour illustrer la méthode, nous nous proposerons d'extrapoler une fonction $f(t)$ particulière à bande limitée (figure 2) dans tout son intervalle de définition, à partir de la connaissance d'un petit segment $g_0(t)$ de $f(t)$ (figure 3) [2,3].

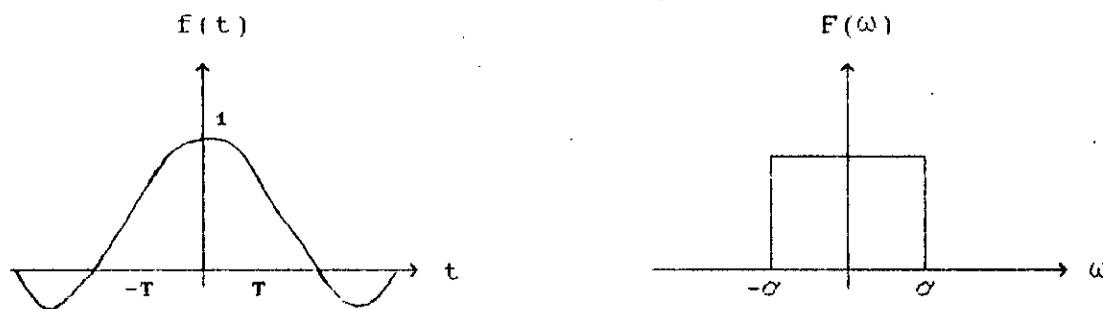


Figure 2:

La fonction à extrapoler et sa transformée

Par hypothèse, la fonction $g_0(t)$ est nulle en dehors du segment connu (figure 3).

$$g_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pour } |t| \leq T \\ 0 & \text{pour } |t| > T \end{cases}$$

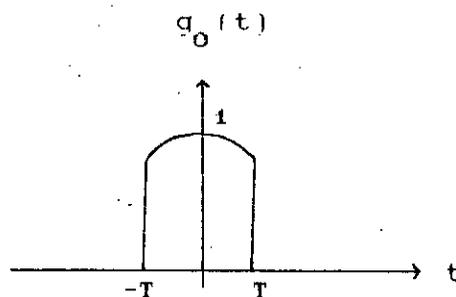


Figure 3:

La fonction $g_0(t)$ qui représente le segment connu

La première itération commence par l'étape suivante:

-On cherche la transformée de Fourier de $g_0(t)$,

$$\begin{aligned} G_0(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(t) \cdot \exp(-j\omega t) \cdot dt \\ &= \int_{-T}^{+T} g_0(t) \cdot \exp(-j\omega t) \cdot dt \quad (1) \end{aligned}$$

$G_0(\omega)$ est représentée sur la figure 7(b).

-On applique la 1^{ère} condition des fonctions à bande

limitée citée précédemment: on multiplie $G_0(\omega)$ par une fonction "fenêtre" $p_\sigma(\omega)$ (figure 4) pour former $F_1(\omega)$,

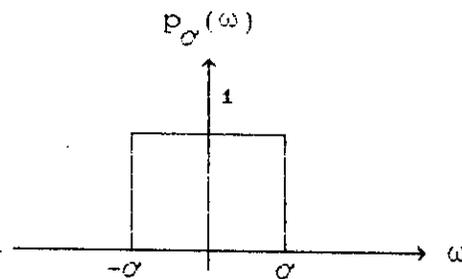


Figure 4:

La fonction "fenêtre" $p_\sigma(\omega)$

$$F_1(\omega) = G_0(\omega) \cdot p_\sigma(\omega) \quad \text{avec} \quad p_\sigma(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |\omega| \leq \sigma \\ 0 & \text{pour } |\omega| > \sigma \end{cases} \quad (2)$$

$F_1(\omega)$ est représentée sur la figure 7(c). On dira que $F_1(\omega)$ est obtenue, à partir de $G_0(\omega)$, par tronquature.

-A présent, on retourne au domaine temporel en cherchant la transformée inverse de Fourier de $F_1(\omega)$; ce qui donnera $f_1(t)$ représentée sur la figure 7(d).

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) \cdot \exp(j\omega t) \cdot d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{+\sigma} F_1(\omega) \cdot \exp(j\omega t) \cdot d\omega \end{aligned} \quad (3)$$

$-f_1(t)$ sera, alors, corrigée par le segment connu $g_0(t)$ de $f(t)$. On formera, donc, la fonction $g_1(t)$ comme suit:

$$g_1(t) = f_1(t) + [g_0(t) - f_1(t)] \cdot p_T(t) \quad (4)$$

$$\text{où } p_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| \leq T \\ 0 & \text{pour } |t| > T \end{cases}$$

$p_T(t)$ est représentée en figure 5.

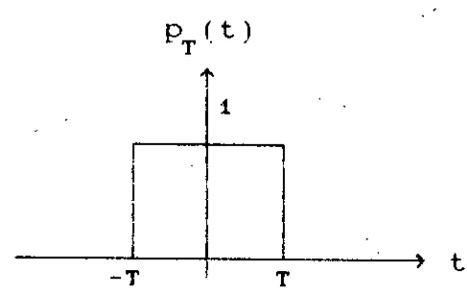


Figure 5:
La fonction "fenêtre" $p_T(t)$

$g_1(t)$ est représentée sur la figure 7(e).

A ce niveau, une itération complète a été exécutée, on calcule alors l'erreur quadratique e_1 :

$$e_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - g_1(t)|^2 \cdot dt$$

Si l'erreur quadratique est relativement faible, l'algorithme d'extrapolation s'arrête. Sinon, on exécute une nouvelle itération.

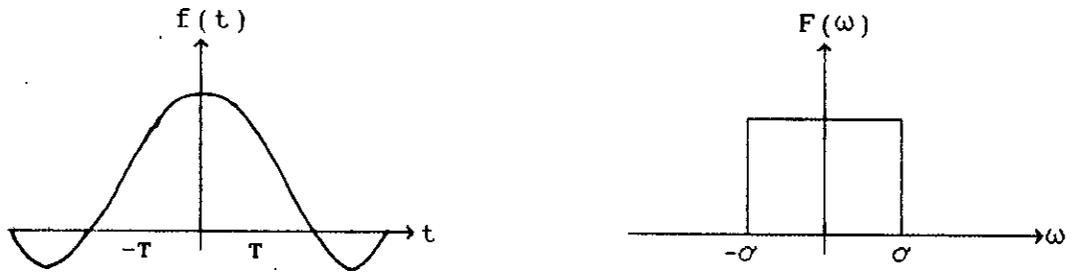


Figure 6: La fonction à extrapoler et sa transformée

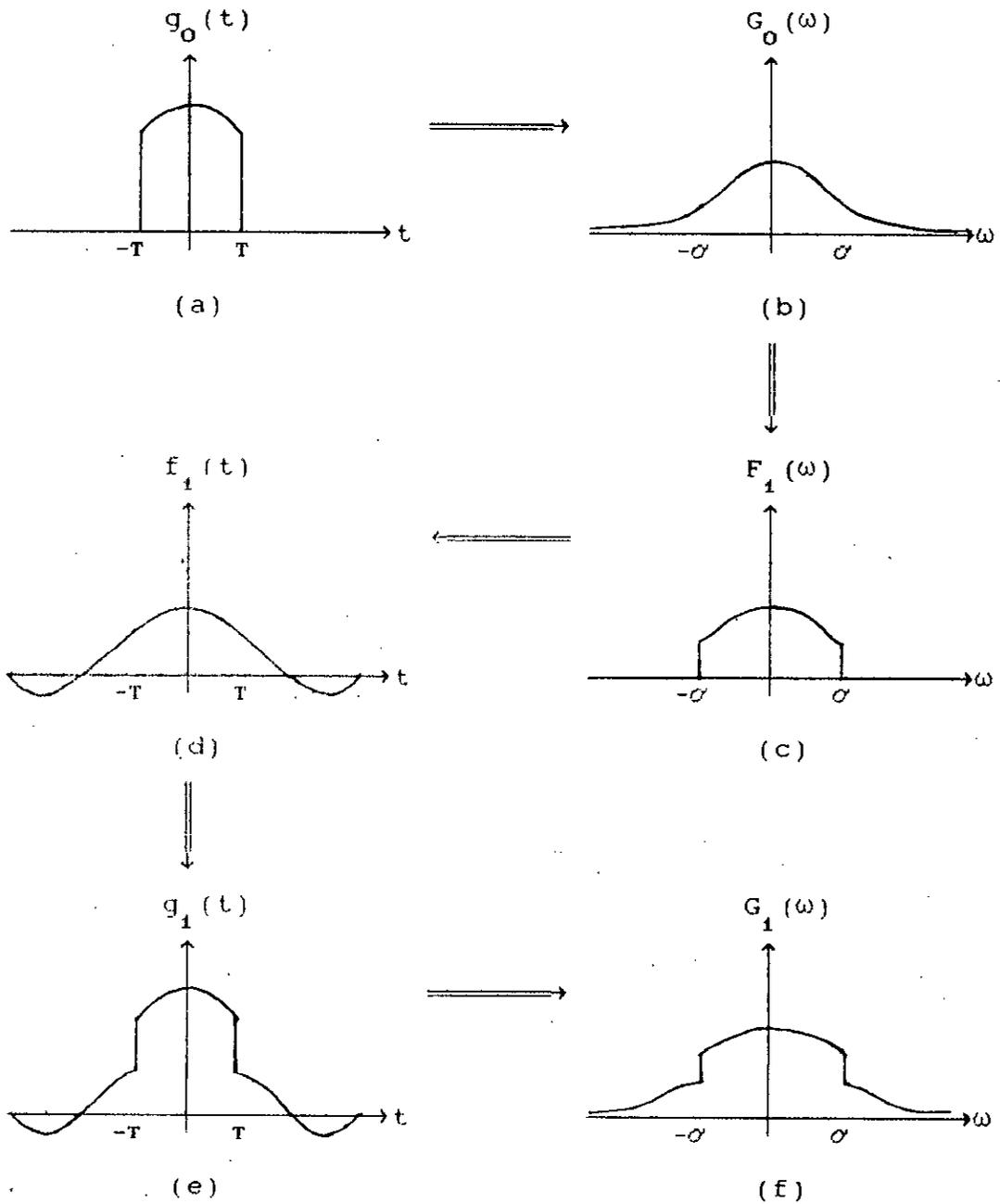


Figure 7: Signaux de la première itération

D'une manière générale, la $n^{\text{ième}}$ itération se présente comme suit:

-1: Transformée de Fourier de $g_{n-1}(t)$ qui est la $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation de la fonction $f(t)$:

$$G_{n-1}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{n-1}(t) \cdot \exp(-j\omega t) \cdot dt \quad (5)$$

-2: Tronquature dans le domaine fréquentiel:

$$F_n(\omega) = G_{n-1}(\omega) \cdot p_{\omega}(\omega) \quad (6)$$

-3: Transformée inverse de Fourier: retour au domaine temporel.

$$f_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(\omega) \cdot \exp(j\omega t) \cdot d\omega \quad (7)$$

-4: Correction dans le domaine temporel:

$$g_n(t) = f_n(t) + [g_0(t) - f_n(t)] \cdot p_T(t) \quad (8)$$

-5: Calcul de l'erreur quadratique:

$$e_n = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - g_n(t)|^2 \cdot dt \quad (9)$$

Le test d'arrêt de l'algorithme survient quand l'erreur

quadratique e_n ne diminue, presque, plus. Pour cela, on compare deux erreurs quadratiques successives e_n et e_{n+1} . L'algorithme s'arrête quand la différence entre e_n et e_{n+1} devient arbitrairement petite:

$$|e_n - e_{n+1}| \leq \varepsilon$$

" ε " est un nombre positif, relativement petit, choisi au préalable.

On aurait pu définir un autre test d'arrêt aussi efficace, qui surviendrait quand l'erreur quadratique e_n est inférieure à un nombre " ε ", choisi au début.

Dans le cas où on ne disposerait pas de la fonction à extrapoler $f(t)$, on pourrait définir un autre critère de calcul de l'erreur quadratique e_n qui serait la différence entre les fonctions obtenues après deux itérations successives:

$$e_n = \int_{-\infty}^{+\infty} |g_{n+1}(t) - g_n(t)|^2 dt$$

I.3: Réduction de l'erreur quadratique dans le domaine fréquentiel:

Montrons que la valeur quadratique de l'erreur $(F(\omega) - G_n(\omega))$ est réduite à chaque itération: ce qui revient à montrer la convergence de $G_n(\omega)$ vers $F(\omega)$:

D'après la relation (9) et le théorème de Parseval [6],

l'erreur quadratique e_n de la $n^{\text{ième}}$ itération peut s'écrire:

$$e_n = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - g_n(t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega) - G_n(\omega)|^2 \cdot d\omega \quad (10)$$

Développons en découpant l'intervalle $-\infty < \omega < +\infty$ en trois parties:

$$e_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\sigma} |F(\omega) - G_n(\omega)|^2 \cdot d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{+\sigma} |F(\omega) - G_n(\omega)|^2 \cdot d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{+\sigma}^{+\infty} |F(\omega) - G_n(\omega)|^2 \cdot d\omega$$

Appliquons la relation entre $F_{n+1}(\omega)$ et $G_n(\omega)$ donnée par l'expression (6):

$$F_{n+1}(\omega) = G_n(\omega) \cdot p_{\sigma}(\omega)$$

Ce qui revient à dire que:

$$F_{n+1}(\omega) = \begin{cases} G_n(\omega) & \text{pour } |\omega| \leq \sigma \\ 0 & \text{pour } |\omega| > \sigma \end{cases}$$

L'erreur quadratique e s'écrira alors:

$$e_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\sigma} |F(\omega) - G_n(\omega)|^2 \cdot d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{+\sigma} |F(\omega) - F_{n+1}(\omega)|^2 \cdot d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{+\sigma}^{+\infty} |F(\omega) - G_n(\omega)|^2 \cdot d\omega$$

Il est évident que le premier et le troisième terme sont positifs ou nuls :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\sigma} |F(\omega) - G_n(\omega)|^2 \cdot d\omega \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{+\sigma}^{+\infty} |F(\omega) - G_n(\omega)|^2 \cdot d\omega \geq 0$$

Nous en déduisons que :

$$e_n \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{+\sigma} |F(\omega) - F_{n+1}(\omega)|^2 \cdot d\omega$$

Sachant que $f(t)$ est une fonction à bande limitée :

$$F(\omega) = 0 \quad \text{pour} \quad |\omega| > \sigma$$

Et d'après la relation (6) :

$$F_{n+1}(\omega) = 0 \quad \text{pour} \quad |\omega| > \sigma$$

Ce qui conduit à poser :

$$e_n \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{+\sigma} |F(\omega) - F_{n+1}(\omega)|^2 \cdot d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega) - F_{n+1}(\omega)|^2 \cdot d\omega$$

Utilisons, encore une fois, le théorème de Parseval :

$$e_n \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega) - F_{n+1}(\omega)|^2 \cdot d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - f_{n+1}(t)|^2 \cdot dt \quad (11)$$

D'après la relation (8) $f_{n+1}(t)$ s'écrira:

$$f_{n+1}(t) = g_{n+1}(t) - [g_0(t) - f_{n+1}(t)] \cdot p_T(t)$$

Remplaçons $f_{n+1}(t)$ par son expression dans la relation (11):

$$e_n \geq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - g_{n+1}(t) + [g_0(t) - f_{n+1}(t)] \cdot p_T(t)|^2 \cdot dt$$

Développons l'expression à l'intérieur de l'intégrale comme suit:

$$\begin{aligned} e_n \geq & \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - g_{n+1}(t)|^2 \cdot dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |[g_0(t) - f_{n+1}(t)] \cdot p_T(t)|^2 \cdot dt \\ & + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t) - g_{n+1}(t)] \cdot [g_0(t) - f_{n+1}(t)] \cdot p_T(t) \cdot dt \end{aligned}$$

Sachant que:

$$p_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| \leq T \\ 0 & \text{pour } |t| > T \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} e_n \geq & \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - g_{n+1}(t)|^2 \cdot dt + \int_{-T}^{+T} |g_0(t) - f_{n+1}(t)|^2 \cdot dt \\ & + 2 \int_{-T}^{+T} [f(t) - g_{n+1}(t)] \cdot [g_0(t) - f_{n+1}(t)] \cdot dt \end{aligned}$$

De même, pour $-T \leq t \leq T$,

$$g_0(t) = f(t) \quad \text{et} \quad g_{n+1}(t) = g_0(t) \quad \text{d'après la relation (8)}$$

Alors le deuxième membre de l'inégalité se limitera à :

$$e_n \geq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - g_{n+1}(t)|^2 \cdot dt + \int_{-T}^{+T} |g_0(t) - f_{n+1}(t)|^2 \cdot dt$$

Il est bien évident que le dernier terme de cette relation est positif ou nul :

$$\int_{-T}^{+T} |g_0(t) - f_{n+1}(t)|^2 \cdot dt \geq 0$$

Alors, nous pouvons dire que l'erreur quadratique e_n est :

$$e_n \geq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - g_{n+1}(t)|^2 \cdot dt$$

Utilisons le théorème de Parseval pour exprimer l'erreur e_n dans le domaine fréquentiel :

$$e_n \geq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - g_{n+1}(t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega) - G_{n+1}(\omega)|^2 \cdot d\omega$$

Finalement, en utilisant l'expression de e_n donnée en (10) ; nous constatons que la deuxième intégrale n'est autre que

l'erreur d'ordre "n+1", c'est à dire e_{n+1} :

$$e_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega) - G_n(\omega)|^2 \cdot d\omega \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega) - G_{n+1}(\omega)|^2 \cdot d\omega = e_{n+1}$$

Et on voit bien que l'erreur quadratique moyenne est réduite à chaque itération.

Chapitre 33
CONVERGENCE

Chapitre II

CONVERGENCE

Pour prouver la convergence de l'algorithme, développons la fonction à bande limitée $f(t)$ en une série de fonctions $\phi_k(t)$.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \phi_k(t) \quad (12)$$

Où les $\phi_k(t)$ sont des fonctions d'ondes prolates sphéroïdales à bande limitée [Annexe A.2]; et les a_k sont des coefficients donnés par:

$$a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \phi_k(t) \cdot dt$$

Nous allons démontrer puis utiliser un théorème qui exprime la fonction $f_n(t)$ de la $n^{\text{ième}}$ itération à l'aide des coefficients a_k , des valeurs propres λ_k et des fonctions $\phi_k(t)$.

II.1: Théorème 1:

La fonction $f_n(t)$ de la $n^{\text{ième}}$ itération est donnée par [2]:

$$f_n(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (1 - \lambda_k)^n \cdot \phi_k(t)$$

Où les λ_k sont les valeurs propres correspondantes aux fonctions propres $\phi_k(t)$ [Annexe A.2.b].

II.2: Démonstration du théorème 1:

Supposons au départ que $f(t) = \phi_k(t)$, nous montrerons par récurrence que:

$$f_n(t) = A_n \cdot \phi_k(t) \quad \text{où} \quad A_n = 1 - (1 - \lambda_k)^n$$

Les fonctions $\phi_k(t)$ étant des fonctions à bande limitée [Annexe A.2.b], et comme $f(t)$ est aussi une fonction à bande limitée, la supposition du départ se trouve, parfaitement, justifiée.

II.2.a: Démontrons pour le cas (n = 1):

Il s'agit de montrer que: $f_1(t) = A_1 \cdot \phi_k(t) = \lambda_k \cdot \phi_k(t)$.

En utilisant les équations (2) et (3), on a:

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{+\sigma} F_1(\omega) \cdot \exp(j\omega t) \cdot d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{+\sigma} G_0(\omega) \cdot p_0(\omega) \cdot \exp(j\omega t) \cdot d\omega \quad (13)$$

$G_0(\omega)$ étant donnée par l'équation (1), on applique le théorème de convolution à l'expression de $f_1(t)$ et on trouve:

$$f_1(t) = g_0(t) * \frac{\sin(\sigma t)}{\pi t}$$

On pourra exprimer $f_1(t)$ d'une autre manière:

$$f_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(x) \cdot \frac{\sin(\sigma(t-x))}{\Pi(t-x)} \cdot dx$$

$$\text{avec } g_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } |x| \leq T \\ 0 & \text{pour } |x| > T \end{cases}$$

On écrira, alors:

$$f_1(t) = \int_{-T}^{+T} f(x) \cdot \frac{\sin(\sigma(t-x))}{\Pi(t-x)} \cdot dx$$

On a supposé, précédemment, que $f(t) = \phi_k(t)$; donc:

$$f_1(t) = \int_{-T}^{+T} \phi_k(x) \cdot \frac{\sin(\sigma(t-x))}{\Pi(t-x)} \cdot dx \quad (14)$$

D'après la définition des fonctions d'ondes prolates sphéroïdales [Annexe A.2.a], l'équation (14) devient:

$$f_1(t) = \int_{-T}^{+T} \phi_k(x) \cdot \frac{\sin(\sigma(t-x))}{\Pi(t-x)} \cdot dx = \lambda_k \cdot \phi_k(t)$$

Le cas ($n = 1$) est, donc, bien démontré.

II.2.b: Démontrons pour le cas ($n+1$):

Supposons que: $f_n(t) = A_n \cdot \phi_k(t)$ où $A_n = 1 - (1 - \lambda_k)^n$, et montrons que:

$$f_{n+1}(t) = A_{n+1} \cdot \phi_k(t) \quad \text{où} \quad A_{n+1} = 1 - (1 - \lambda_k)^{n+1}.$$

D'après l'équation (7):

$$f_{n+1}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{n+1}(\omega) \cdot \exp(j\omega t) \cdot d\omega$$

Et en utilisant l'expression de $F_{n+1}(\omega)$ donnée en (6):

$$f_{n+1}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_n(\omega) \cdot p_\sigma(\omega) \cdot \exp(j\omega t) \cdot d\omega \quad (15)$$

Rappelons que $G_n(\omega)$ est donnée par l'équation (5):

$$G_n(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) \cdot \exp(-j\omega t) \cdot dt$$

En appliquant le théorème de convolution sur $f_{n+1}(t)$, l'équation (15) devient:

$$f_{n+1}(t) = g_n(t) * \frac{\sin(\sigma t)}{\pi t}$$

Remplaçons $g_n(t)$ par son expression donnée en (8):

$$f_{n+1}(t) = [f_n(t) + (g_0(t) - f_n(t)) \cdot p_T(t)] * \frac{\sin(\sigma t)}{\Pi t}$$

Comme, $g_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pour } |t| \leq T \\ 0 & \text{pour } |t| > T \end{cases}$, on pourra écrire:

$$f_{n+1}(t) = [f_n(t) + (f(t) - f_n(t)) \cdot p_T(t)] * \frac{\sin(\sigma t)}{\Pi t}$$

Utilisons le fait que:

$$f(t) = \phi_k(t) \quad \text{et} \quad f_n(t) = A_n \cdot \phi_k(t)$$

$$f_{n+1}(t) = [A_n \cdot \phi_k(t) + (1 - A_n) \cdot \phi_k(t) \cdot p_T(t)] * \frac{\sin(\sigma t)}{\Pi t}$$

D'après le théorème de convolution:

$$f_{n+1}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A_n \cdot \phi_k(x) + (1 - A_n) \cdot \phi_k(x) \cdot p_T(x)] \cdot \frac{\sin(\sigma(t-x))}{\Pi(t-x)} \cdot dx$$

$$f_{n+1}(t) = A_n \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_k(x) \frac{\sin(\sigma(t-x))}{\Pi(t-x)} dx + (1 - A_n) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_k(x) p_T(x) \frac{\sin(\sigma(t-x))}{\Pi(t-x)} dx$$

Comme $p_T(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x| \leq T \\ 0 & \text{pour } |x| > T \end{cases}$, on écrira:

$$f_{n+1}(t) = A_n \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_k(x) \frac{\sin(\sigma(t-x))}{\Pi(t-x)} dx + (1-A_n) \int_{-T}^{+T} \phi_k(x) \frac{\sin(\sigma(t-x))}{\Pi(t-x)} dx$$

Encore une fois, en utilisant la propriété d'orthonormalité et d'orthogonalité des fonctions d'ondes prolates sphéroïdales [Annexe A]:

$$f_{n+1}(t) = A_n \cdot \phi_k(t) + (1-A_n) \cdot \lambda_k \cdot \phi_k(t)$$

$$f_{n+1}(t) = [A_n + \lambda_k \cdot (1-A_n)] \cdot \phi_k(t)$$

En reportant l'expression de A_n ($A_n = 1 - (1-\lambda_k)^n$), et en simplifiant, on aboutit à:

$$f_{n+1}(t) = [1 - (1-\lambda_k)^{n+1}] \cdot \phi_k(t) = A_{n+1} \cdot \phi_k(t)$$

Le cas (n+1) est, donc, démontré.

On écrira, donc:

$$f_n(t) = A_n \cdot \phi_k(t) = [1 - (1-\lambda_k)^n] \cdot \phi_k(t)$$

Appliquons ce résultat au développement de f(t) en (12):

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \phi_k(t) = \phi_k(t) = \frac{f_n(t)}{A_n}$$

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot A_n \cdot \phi_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot [1 - (1-\lambda_k)^n] \cdot \phi_k(t)$$

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \phi_k(t) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (1-\lambda_k)^n \cdot \phi_k(t)$$

Finalement:

$$f_n(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (1-\lambda_k)^n \cdot \phi_k(t) \quad (16)$$

Le théorème 1 est démontré.

Le théorème suivant montrera la convergence de $f_n(t)$ vers $f(t)$ lorsque le nombre d'itérations "n" augmente.

II.3: Théorème 2:

Pour tout t , $f_n(t)$ tend vers $f(t)$ quand n tend vers l'infini.

II.4: Démonstration du théorème 2:

En utilisant l'expression de $f_n(t)$ de la relation (16) obtenue au théorème 1, l'erreur $e_n(t)$ s'écrira:

$$e_n(t) = f(t) - f_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (1-\lambda_k)^n \cdot \phi_k(t) \quad (17)$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit de démontrer que $e_n(t)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

II.4.a: Evaluation de l'énergie E_n de l'erreur $e_n(t)$:

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e_n^2(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (1-\lambda_k)^n \cdot \phi_k(t) \right]^2 dt$$

Développons l'expression de E_n :

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 (1-\lambda_k)^{2n} \phi_k^2(t) + \sum_{\substack{i=0 \\ j=0 \\ i \neq j}}^{\infty} a_i a_j (1-\lambda_i)^n (1-\lambda_j)^n \phi_i(t) \phi_j(t) \right] \cdot dt$$

$$E_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 (1-\lambda_k)^{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_k^2(t) dt + \sum_{\substack{i=0 \\ j=0 \\ i \neq j}}^{\infty} a_i a_j (1-\lambda_i)^n (1-\lambda_j)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_i(t) \phi_j(t) dt$$

Utilisons la propriété d'orthonormalité des fonctions d'ondes prolates sphéroïdales [Annexe A.2.c]:

$$E_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \cdot (1-\lambda_k)^{2n} \quad (18)$$

II.4.b: Evaluation de l'énergie E du signal $f(t)$:

Par définition de l'énergie et en utilisant la relation (12) qui décrit la fonction $f(t)$:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \phi_k(t) \right]^2 \cdot dt$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \cdot \phi_k^2(t) + \sum_{\substack{i=0 \\ j=0 \\ i \neq j}}^{\infty} a_i \cdot a_j \cdot \phi_i(t) \cdot \phi_j(t) \right] \cdot dt$$

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_k^2(t) \cdot dt + \sum_{\substack{i=0 \\ j=0 \\ i \neq j}}^{\infty} a_i \cdot a_j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_i(t) \cdot \phi_j(t) \cdot dt$$

Appliquons, encore une fois, la propriété d'orthonormalité des fonctions d'ondes prolates sphéroïdales [Annexe A.2.c]:

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \quad (19)$$

Comme le signal $f(t)$ est une fonction à bande limitée [1], on dira que son énergie E est finie. On peut, alors, écrire:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tel que: } E = \sum_{k > N}^{\infty} a_k^2 < \varepsilon$$

Sachant que: $\lambda_k < 1$

avec: $\lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ quand $k \xrightarrow{k \rightarrow \infty}$

Etant:

$$1 > \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_k > \dots > \lambda_N > \dots > 0 \quad [\text{Annexe A.2.b}]$$

Quand: $k \leq N$, alors:

$$(1-\lambda_k) \leq (1-\lambda_N) < \dots < 1$$

En l'appliquant à l'énergie de l'erreur E_n trouvée en (18):

$$E_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \cdot (1-\lambda_k)^{2n} = \sum_{k=0}^N a_k^2 \cdot (1-\lambda_k)^{2n} + \sum_{k>N}^{\infty} a_k^2 \cdot (1-\lambda_k)^{2n}$$

$$E_n < \sum_{k=0}^N a_k^2 \cdot (1-\lambda_k)^{2n} + \sum_{k>N}^{\infty} a_k^2 = (1-\lambda_k)^{2n} \cdot \sum_{k=0}^N a_k^2 + \sum_{k>N}^{\infty} a_k^2$$

Sachant que l'énergie E du signal est donnée par:

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 > \sum_{k=0}^N a_k^2 \quad \text{de même que:} \quad \sum_{k>N}^{\infty} a_k^2 < \varepsilon$$

L'énergie de l'erreur E_n sera alors bornée par:

$$0 < E_n < (1-\lambda_N)^{2n} \cdot E + \varepsilon \quad (20)$$

Comme, $(1-\lambda_N) < 1$ et $(1-\lambda_N)^{2n} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$

et $E_n > 0$.

ε étant arbitraire, on aura finalement:

$$E_n \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty$$

D'autre part, l'erreur à la $n^{\text{ème}}$ itération est donnée par l'expression (17):

$$e_n(t) = f(t) - f_n(t)$$

les fonctions $f(t)$ et $f_n(t)$ étant des fonctions à bande limitée, il est évident que $e_n(t)$ sera aussi une fonction à bande limitée.

On peut, donc, dire que $e_n(t)$ sera bornée par l'expression suivante [Annexe A.1]:

$$|e_n(t)| \leq \sqrt{\frac{E_n \cdot \sigma}{\Pi}}$$

Comme $E_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$, il est clair que: $|e_n(t)|$ tendra vers 0 quand n tendra vers l'infini.

II.5: Convergence de $F_n(\omega)$ et $G_n(\omega)$:

Nous avons démontré la convergence de $f_n(t)$ vers $f(t)$; étudions, à présent, la convergence de $F_n(\omega)$ et $G_n(\omega)$ vers $F(\omega)$.

D'après le théorème 1 et l'équation (16), $f_n(t)$ s'écrira:

$$f_n(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (1-\lambda_k)^n \cdot \phi_k(t)$$

Remplaçons $f(t)$ par son expression en (12), nous aurons:

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot [1 - (1 - \lambda_k)^n] \cdot \phi_k(t)$$

La transformée de Fourier de $f_n(t)$ sera, d'après les résultats en [Annexe A.2.d]:

$$F_n(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot [1 - (1 - \lambda_k)^n] \cdot \frac{B}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot \phi_k(b\omega) \cdot p_{\sigma}(\omega)$$

avec $B = \sqrt{\frac{2\Pi T}{\sigma}}$; $b = \frac{T}{\sigma}$;

$$F_n(\omega) = B \cdot p_{\sigma}(\omega) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot [1 - (1 - \lambda_k)^n] \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot \phi_k(b\omega)$$

De même, $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \phi_k(t)$

La transformée de Fourier de $f(t)$ sera d'après les résultats en [Annexe A.2.d]:

$$F(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{B}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot \phi_k(b\omega) \cdot p_{\sigma}(\omega) = B \cdot p_{\sigma}(\omega) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot \phi_k(b\omega)$$

Sachant que $[1 - (1 - \lambda_k)^n]$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini, alors, $F_n(\omega)$ tend vers $F(\omega)$.

Etudions, à présent, la convergence de $G_n(\omega)$.

L'expression (8), nous donne:

$$g_n(t) = f_n(t) + [g_0(t) - f_n(t)] \cdot p_T(t)$$

Avec,

$$g_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pour } |t| \leq T \\ 0 & \text{pour } |t| > T \end{cases}$$

Donc,

$$g_n(t) = f_n(t) + [f(t) - f_n(t)] \cdot p_T(t)$$

Remplaçons $f(t)$ et $f_n(t)$ par leurs expressions respectives (12) et (16):

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \phi_k(t) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (1-\lambda_k)^n \cdot \phi_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (1-\lambda_k)^n \cdot \phi_k(t) p_T(t)$$

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot [1 - (1-\lambda_k)^n] \cdot \phi_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (1-\lambda_k)^n \cdot \phi_k(t) p_T(t)$$

La transformée de Fourier de $g_n(t)$ sera [Annexe A.2.d]:

$$G_n(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k [1 - (1-\lambda_k)^n] \frac{B}{\sqrt{\lambda_k}} \phi_k(b\omega) p_G(\omega) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (1-\lambda_k)^n B \sqrt{\lambda_k} \phi_k(b\omega)$$

Finalement,

$$G_n(\omega) = F_n(\omega) + B \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (1-\lambda_k)^n \cdot \sqrt{\lambda_k} \cdot \phi_k(b\omega)$$

Comme $(1-\lambda_k)^n$ tend vers zero quand n tend vers l'infini, il est clair que $G_n(\omega)$ tend vers $F_n(\omega)$, donc vers $F(\omega)$.

Chapitre 333
PRESENTATION DES RESULTATS

Chapitre III

PRESENTATION DES RESULTATS

Le long de ce chapitre, nous présenterons quelques applications numériques permettant d'illustrer la méthode d'extrapolation de Papoulis étudiée dans ce travail. Deux logiciels ont été élaborés dans ce but: le premier concerne l'extrapolation des fonctions à bande limitée à une dimension [Annexe B-1] (extrapolation d'un segment); le deuxième concerne l'extrapolation des fonctions à bande limitée à deux dimensions [Annexe B-2] (extrapolation d'une surface finie ou section).

III.1: Extrapolation de fonctions à bande limitée à une dimension:

Quelques fonctions à bande limitée ont été expérimentées:

$$f(t) = \frac{\sin(\sigma t)}{\Pi t} ;$$

$$f(t) = \left[\frac{\sin(\sigma t)}{\Pi t} \right]^2 ;$$

$$f(t) = \frac{\cos(\sigma t)}{[1 - (2\sigma t/\Pi)^2]}$$

III.1.a: Extrapolation de: $f(t) = \sin(\sigma t)/\Pi t$:

Cette fonction se présente comme suit (figure 8):

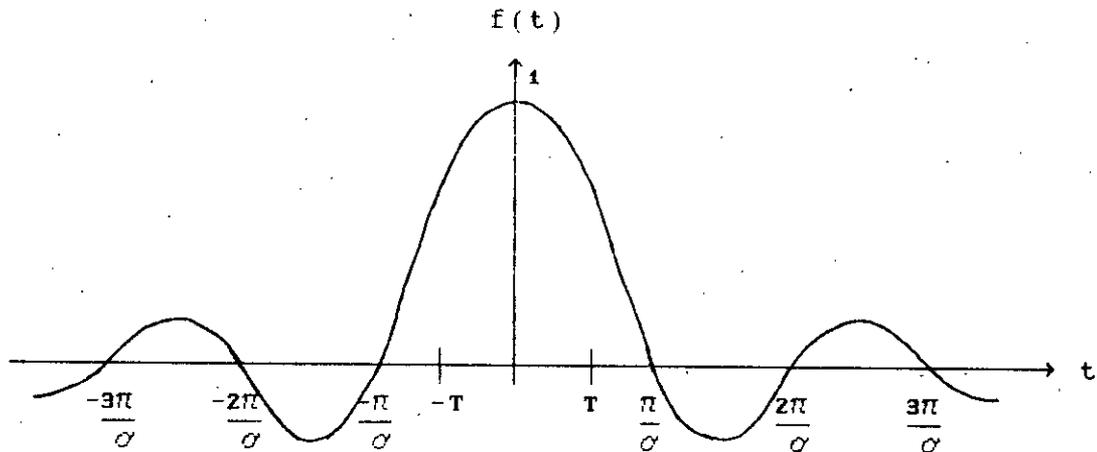


Figure 8:

La fonction $f(t) = \sin(\sigma t)/\Pi t$

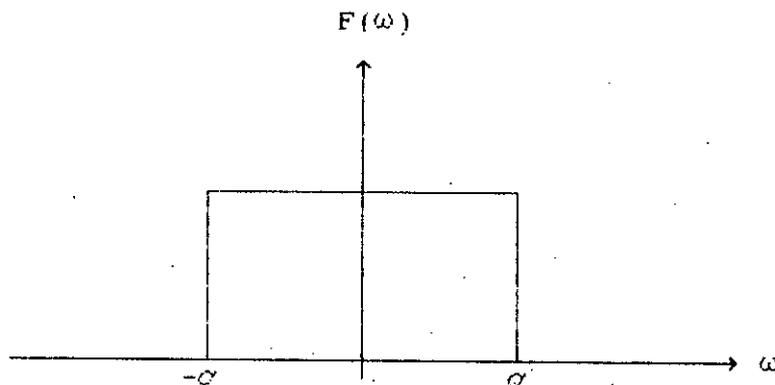


Figure 9:

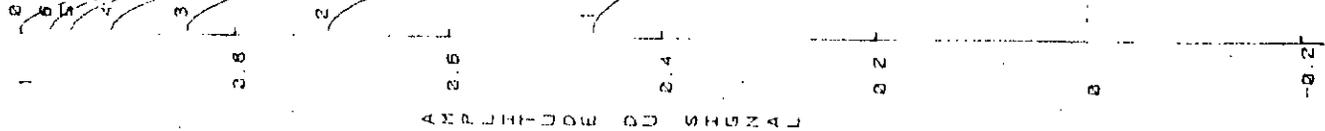
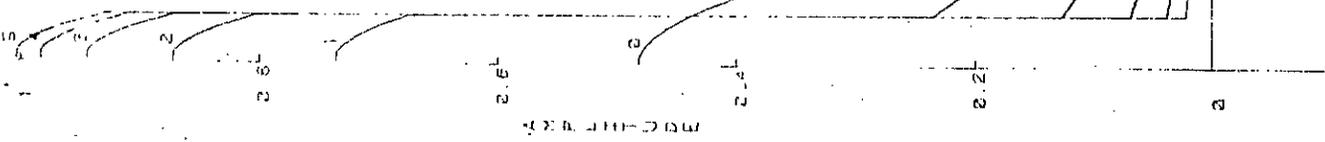
La transformée de Fourier $F(\omega)$

L'exemple, proposé, suppose connu le quart du lobe principal de la fonction. Par hypothèse, $f(t)$ sera connu pour:

$$|t| \leq T = \Pi/4\sigma$$

FACTORS OF SAFETY

FACTORS OF SAFETY



DEPTH (FT)

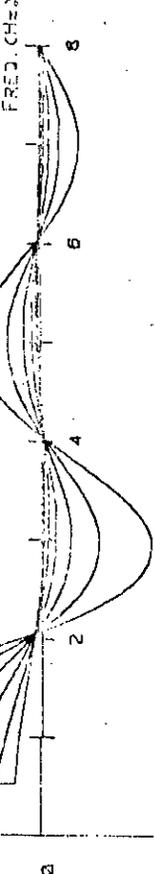
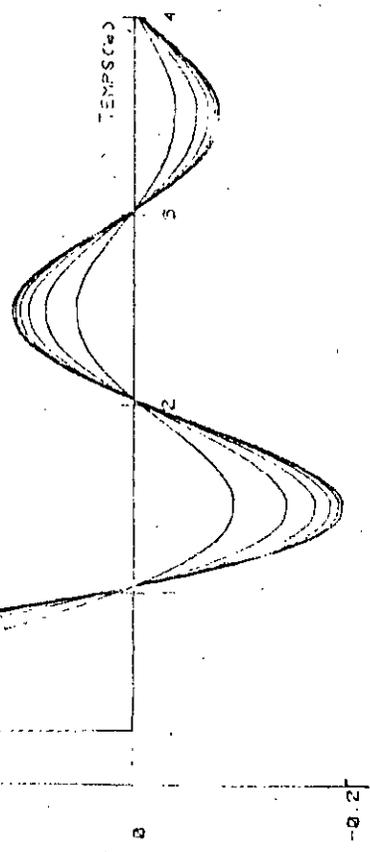


FIGURE 10

Les différentes itérations représentant les fonctions $f_n(t)$ et $G_n(\omega)$ sont données sur la figure 10. On voit bien qu'à partir de la 4^e itération, la fonction approximée $f_4(t)$ s'approche de la fonction exacte $f(t)$ avec une erreur, relativement, faible.

L'erreur quadratique en fonction du nombre d'itérations (Nit) est représentée sur le graphe de la figure 11. Pour une meilleure évaluation de cette erreur, la valeur maximale de la fonction $f(t)$ est de "1". L'arrêt des itérations survient lorsque l'erreur quadratique ne diminue, pratiquement, plus: lorsque l'écart entre deux erreurs quadratiques de deux itérations successives est inférieur à un nombre déterminé au préalable (relativement faible).

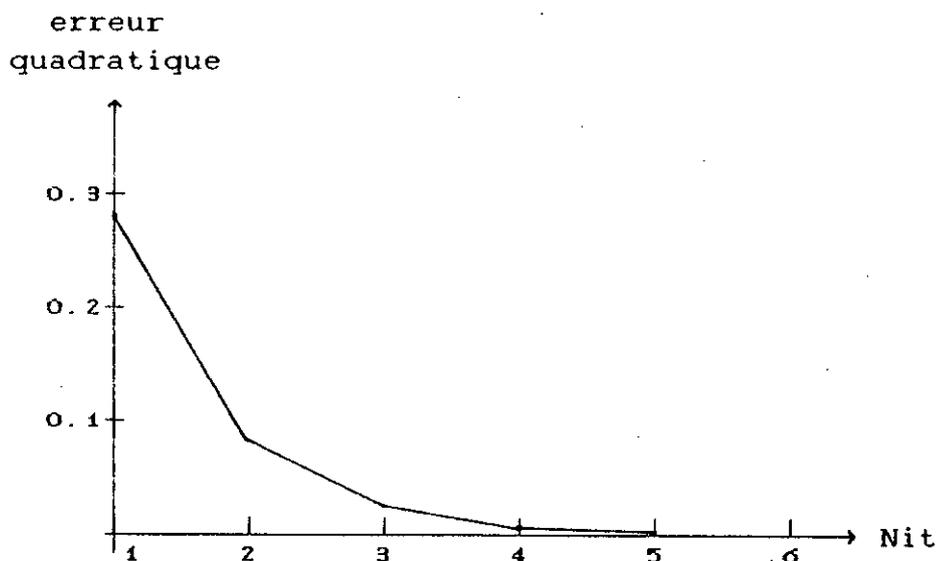


Figure 11:

erreur quadratique pour 25% de connaissance du lobe principal

Au départ, il est clair que plus nous faisons d'itérations, plus l'erreur quadratique diminue. A partir de la 6^e itération, l'erreur se stabilise à 0,001. Remarquons que l'arrêt de l'extrapolation dépend aussi des performances du

calculateur utilisé: en effet, avec un calculateur plus rapide et possédant des registres de stockage des nombres plus grands, on peut arriver à un nombre d'itérations plus important et donc à une erreur plus petite.

Dans le tableau ci-dessous (figure 12), nous donnons une comparaison entre le pourcentage du segment connu par rapport au lobe principal et le nombre d'itérations qu'il faut pour arriver à une erreur quadratique tolérable:

| segment connu / lobe principal | nombre d'itérations | erreur quadratique |
|-----------------------------------|------------------------|-----------------------|
| 25% | 6 | 0,001 |
| 50% | 5 | 0,007 |
| 75% | 3 | 0,004 |
| 100% | 3 | 0,008 |

Figure 12:

Comparaison entre la partie connue et le nombre d'itérations

Les valeurs des différentes erreurs quadratiques peuvent être réduites ainsi que le nombre d'itérations augmenté si nous utilisons un calculateur plus performant; mais il reste que, plus nous connaissons la fonction $f(t)$ à bande limitée, plus le nombre d'itérations nécessaires pour que l'algorithme converge est réduit. Il est à noter que, dans le cas de cet exemple ($f(t) = \sin(\sigma t) / \Pi t$), l'extrapolation est particulièrement rapide. Ceci résulte du développement de $f(t)$ en fonctions d'ondes prolates sphéroïdales (12). En effet, les premiers termes seulement de ce développement sont significatifs.

Étudions, à présent, le problème d'une autre manière et essayons de répondre à la question suivante: est-il préférable d'avoir la partie connue de la fonction $f(t)$ concentrée en un seul segment ou bien répartie en deux ou plusieurs segments?

Pour cela, prenons le même exemple ($f(t)=\sin(\sigma t)/\Pi t$) et comparons les résultats de l'erreur quadratique lorsque l'on connaît 4%, de toute la fonction dans les trois cas suivants:

- a/- Toute la partie connue est concentrée autour de l'axe des ordonnées.
- b/- La partie connue est répartie en deux segments.
- c/- La partie connue est répartie en trois segments.

L'intervalle de définition de la fonction $f(t)$ étant échantillonné en 1024 points, 4% de la fonction correspond à 40 points connus.

Pour une vue d'ensemble complète et une comparaison rapide, les résultats sont disposés dans le tableau suivant (figure 13):

| Itération | a/-concentrée en un segment | b/- répartie en 2 segments | c/- répartie en 3 segments |
|------------------|-----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1 ^{ère} | 0,05502 | 0,26224 | 0,26911 |
| 2 ^{ème} | 0,00755 | 0,07184 | 0,07401 |
| 3 ^{ème} | 0,00745 | 0,02092 | 0,02103 |
| 4 ^{ème} | 0,00740 | 0,00665 | 0,00631 |
| 5 ^{ème} | 0,00733 | 0,00238 | 0,00207 |
| 6 ^{ème} | 0,00720 | 0,00140 | 0,00081 |

Figure 13:

Tableau comparatif de l'erreur quadratique en fonction de la répartition de la partie connue (4% de la fonction)

En étudiant le tableau ci-dessus, on remarque que l'erreur quadratique est plus faible, durant les premières itérations de l'algorithme dans le cas où l'information sur la fonction $f(t)$ est concentrée en un seul segment (a/-). Néanmoins, au fur et à mesure que les itérations se succèdent, l'erreur est nettement plus faible quand cette information se trouve de plus en plus répartie (c/-).

Ceci s'explique par le fait que plus on répartit la partie connue dans l'intervalle de définition de la fonction $f(t)$, plus on fait une interpolation et non une extrapolation entre des points connus suivie d'un lissage. Au dernier chapitre, nous étudierons, d'une manière succincte, une application de l'algorithme de Papoulis faite par P. S. Naidu et B. Paramasivaiah pour la reconstruction de la somme de deux sinusoides [4]: les auteurs supposent que les points connus sont répartis dans l'intervalle de définition de la fonction $f(t)$ d'une manière probabilistique.

III.1.b: Extrapolation de $f(t) = [\sin(\sigma t)/\Pi t]^2$:

La fonction: $f(t) = [\sin(\sigma t)/\Pi t]^2$, est représentée sur la figure 13. Sur la figure 14, nous avons représenté sa transformée de Fourier $F(\omega)$.

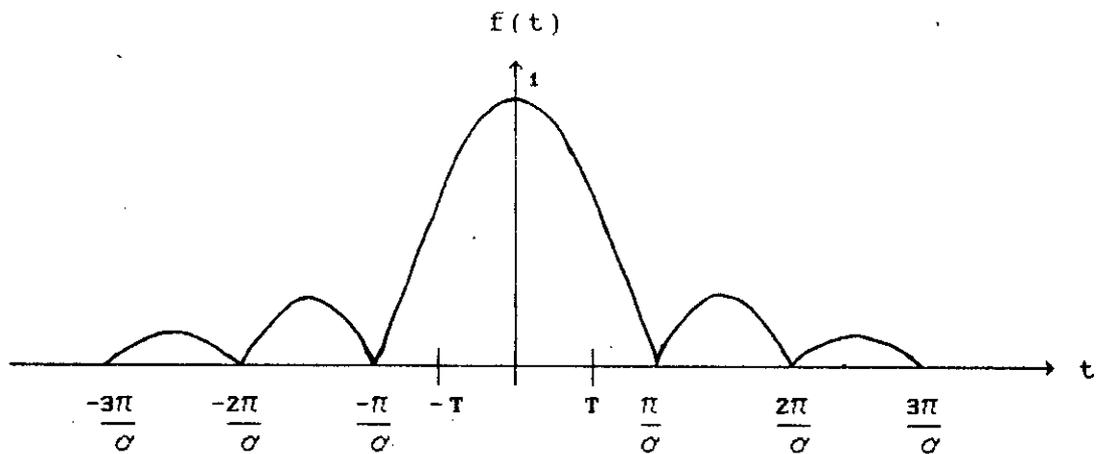


Figure 13:

La fonction $f(t) = [\sin(\sigma t)/\Pi t]^2$

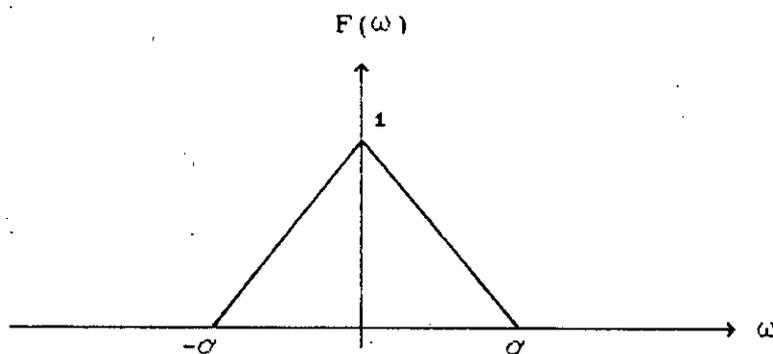
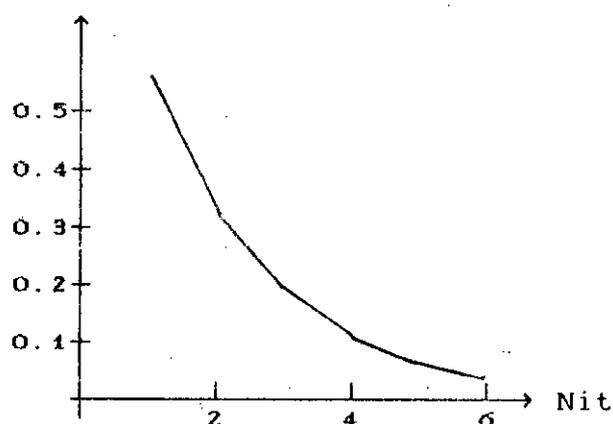


Figure 14

La transformée de Fourier $F(\omega)$

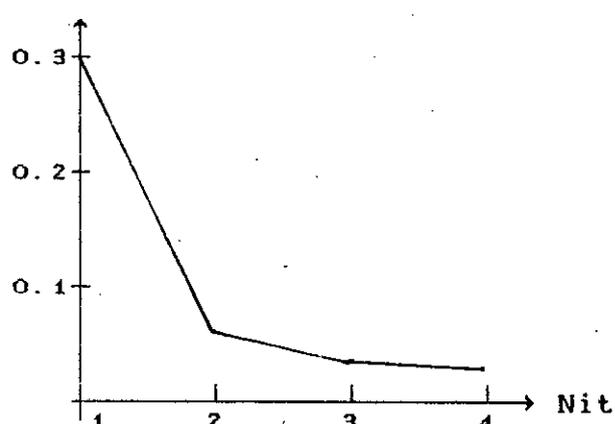
Les différentes erreurs quadratiques, correspondantes à des pourcentages de connaissance du lobe principal différents en fonction du nombre d'itérations N_{it} sont données sur la figure 15.

erreur
quadratique



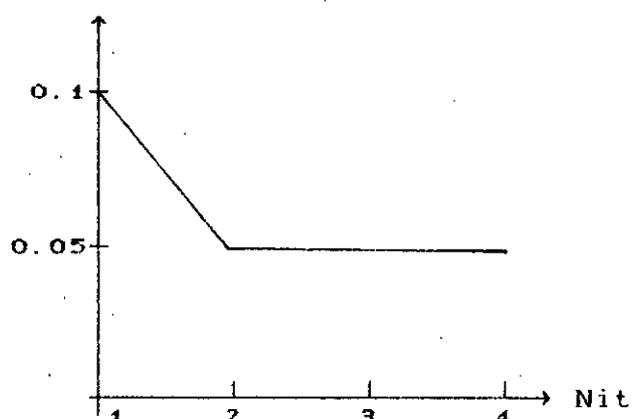
(a) 12,5% du lobe principal
connu.

erreur
quadratique



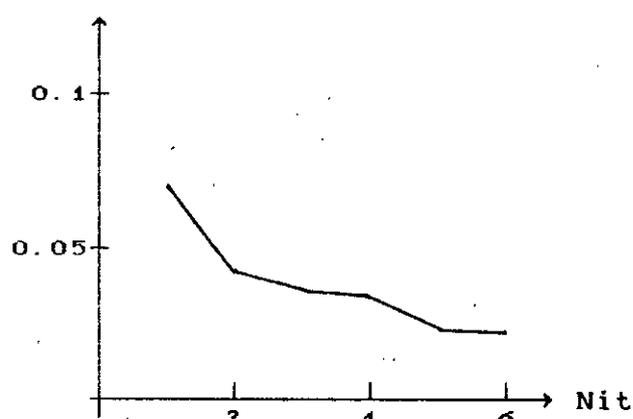
(b) 25% du lobe principal
connu.

erreur
quadratique



(c) 50% du lobe principal
connu.

erreur
quadratique



(d) 75% du lobe principal
connu.

Figure 15:

Erreurs quadratiques

Là aussi, plus la fonction est connue, plus l'erreur quadratique est réduite et donc l'algorithme est efficace. Il est à noter que, dans ce cas aussi, le nombre d'itérations est relativement petit.

III.1.c: Extrapolation de $f(t) = \cos(\sigma t) / [1 - (2\sigma t/\Pi)^2]$:

Cette fonction se présente comme suit (figure 16):

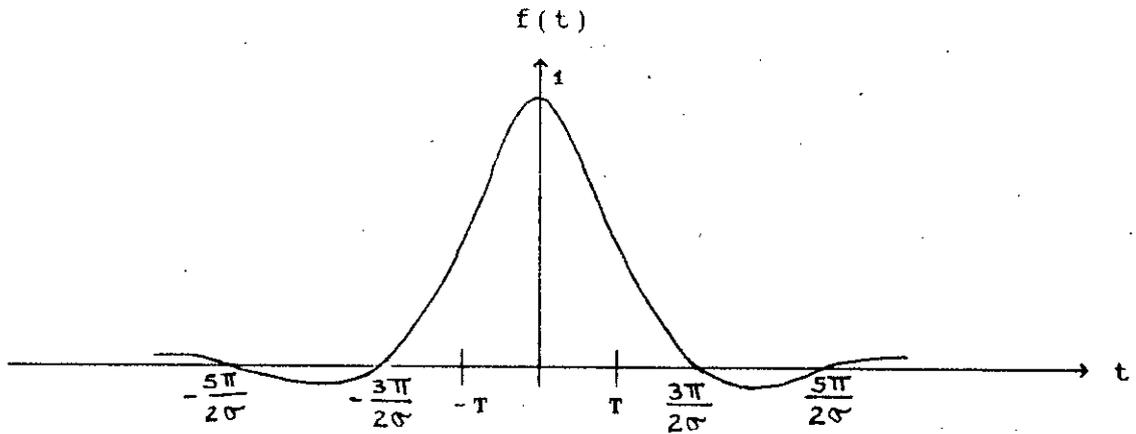


Figure 16:

La fonction $f(t) = \cos(\sigma t) / [1 - (2\sigma t/\Pi)^2]$

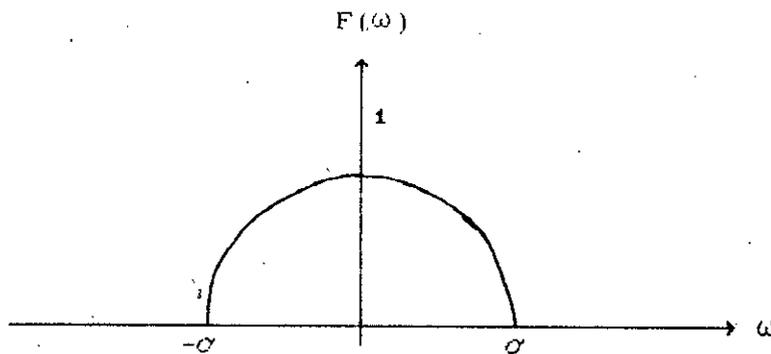


Figure 17

La transformée de Fourier $F(\omega)$

Les différentes itérations représentant les fonctions $f_n(t)$ et $G_n(\omega)$ sont données sur la figure 18. Dans ce cas précis, le segment connu représente la moitié du lobe principal de la

F_n(t) SIGNAL TEMPOREL

G_n(f) SPECTRE FREQUENTIEL

50

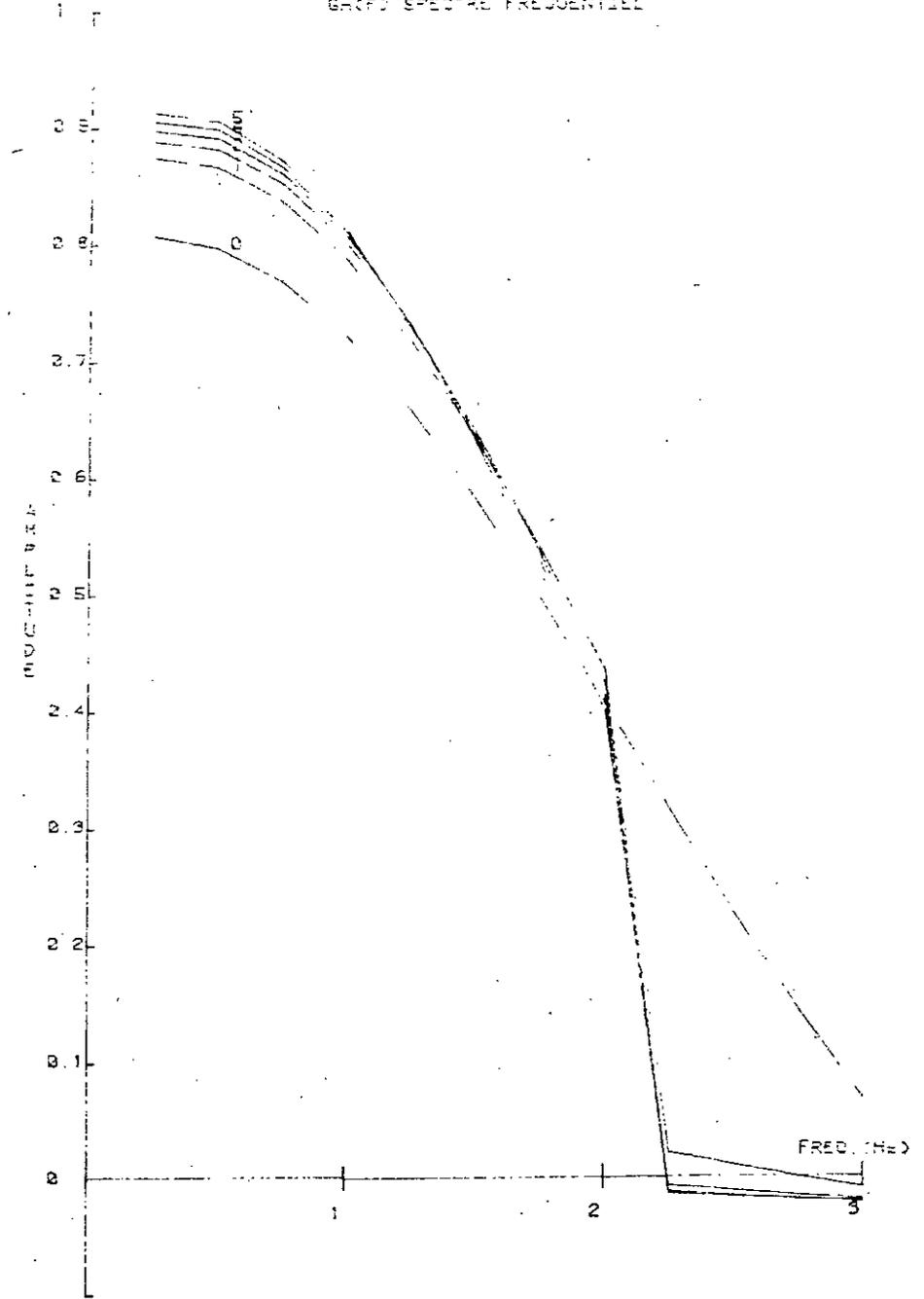
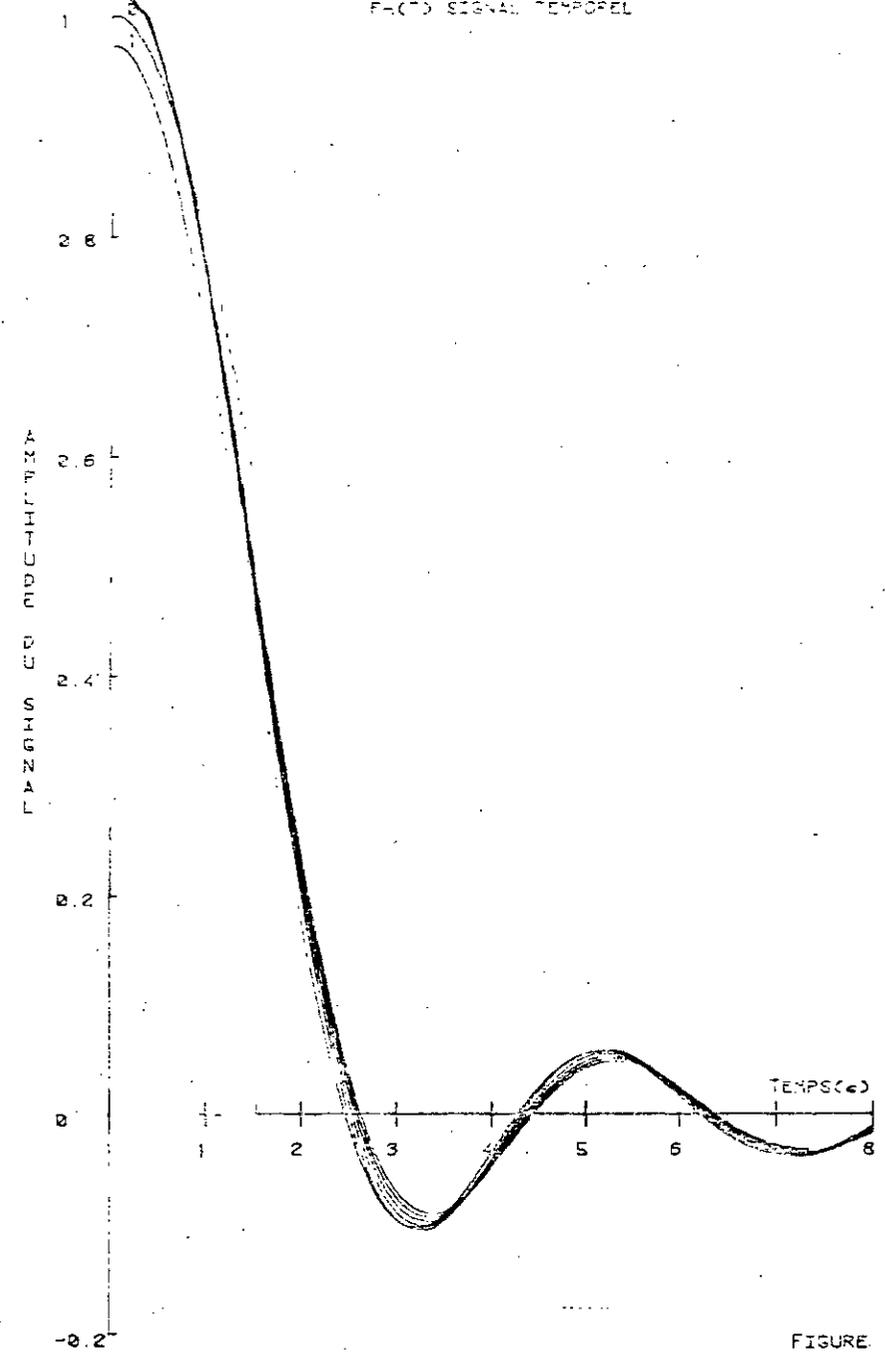


FIGURE 18

F_n(t) ET G_n(f) POUR 52% DU LOBE PRINCIPAL CONNU

insérer ses annotations ici

fonction soit 50%:

$$|t| \leq T = \frac{3\pi}{4\sigma}$$

Nous voyons bien que, après une dizaine d'itérations la fonction approximée $f_n(t)$ s'approche de la fonction recherchée $f(t)$ avec une erreur tolérable.

Plusieurs autres extrapolations pour des valeurs différentes du segment connu ont été faites pour reconstruire cette fonction. Nous concentrerons les résultats dans le tableau comparatif de la figure 19.

Le segment connu par rapport au lobe principal de la fonction $f(t)$ est donné en pourcentage afin de permettre une meilleure appréciation des résultats.

| Pourcentage du segment connu par rapport au lobe principal | | | | | |
|--|---------|---------|---------|---------|---------|
| Itér. | 16,5% | 25% | 33% | 50% | 66% |
| 1 ^{ère} | 0,27735 | 0,11688 | 0,07092 | 0,02575 | 0,00383 |
| 5 ^{ème} | 0,09245 | 0,07375 | 0,05087 | 0,01156 | 0,00047 |
| 10 ^{ème} | 0,08958 | 0,06784 | 0,04339 | 0,00546 | 0,00036 |
| 15 ^{ème} | 0,08708 | 0,06372 | 0,03860 | 0,00261 | 0,00033 |
| 20 ^{ème} | 0,08504 | 0,06074 | 0,03480 | 0,00126 | 0,00033 |
| 25 ^{ème} | 0,08316 | 0,05850 | 0,03550 | 0,00062 | 0,00032 |
| 30 ^{ème} | 0,08144 | 0,05668 | 0,02860 | 0,00031 | 0,00031 |

Figure 19:

Tableau des erreurs quadratiques en fonction du segment connu

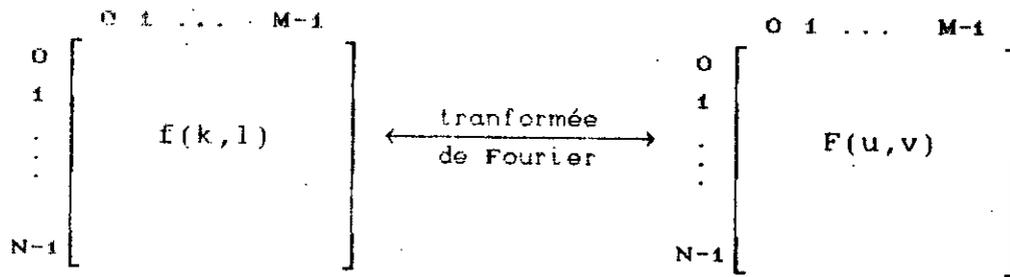
Cette fonction ($f(t) = \cos(\sigma t) / [1 - (2\sigma t/\pi)^2]$) est relativement plus compliquée que les deux précédentes, l'extrapolation se fait pour un nombre d'itérations plus grand. Toutefois, on constate la même tendance que pour les deux autres fonctions, plus le segment connu est grand, plus l'algorithme converge et l'erreur quadratique est réduite.

L'erreur quadratique est minimale lorsque le segment connu est supérieur ou égal à 50% du lobe principal. Il faut remarquer que, 50% du lobe principal correspondent à 10%, à peine, de toute la fonction $f(t)$, soit 96 points connus sur 1024.

III.2: Extrapolation de fonctions à bande limitée à deux dimensions:

L'algorithme décrivant la méthode d'extrapolation pour les signaux bidimensionnels reste le même que celui présenté, précédemment, dans le cas unidimensionnel. Néanmoins, la variable, à présent, est un point à deux coordonnées. Le programme permettant l'extrapolation, dans le cas bidimensionnel, d'une section ou surface est représenté en annexe [Annexe B.2]. Ce programme nécessite l'utilisation de la transformée de Fourier à deux dimensions. Il est basé sur les résultats décrits en [8]. Citons les principaux points:

Si on a une matrice de départ $f(k,l)$ de dimensions $[N \times M]$ où $k=0,1,\dots,N-1$ et $l=0,1,\dots,M-1$, la matrice $F(u,v)$ transformée de Fourier discrète de $f(k,l)$ sera exprimée par:



$$F(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} f(k,l) \cdot \exp(-j \frac{2\pi}{M} lv) \right] \cdot \exp(-j \frac{2\pi}{N} ku)$$

Le terme entre crochets [] correspond à la DFT simple de la ^kème ligne. Notons que $u=0,1,\dots,N-1$ et $v=0,1,\dots,M-1$.

Dans notre travail, une matrice carrée de dimensions [NxN] a été utilisée pour simplifier l'écriture du programme d'extrapolation à deux dimensions [Annexe B.2]:

$$F(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f(k,l) \cdot \exp(-j \frac{2\pi}{N} (lv+ku))$$

Deux exemples illustreront notre méthode; dans les deux cas, nous avons pris une matrice de dimensions [16x16], soit 256 points à traiter.

III.2.a: $f(k,l) = \exp(-0,1(k+l))$:

Nous donnerons les résultats sous forme de tableau (Figure 20) afin de permettre une vue d'ensemble rapide et une comparaison.

Rappelons que la valeur maximale que peut avoir cette fonction est "1".

| nombre de points connus / 256 | nombre d'itérations | erreur quadratique |
|-------------------------------|---------------------|--------------------|
| 4 = 1,5% | 67 | 0,085 |
| 9 = 3,5% | 30 | 0,058 |
| 16 = 6,2% | 18 | 0,027 |
| 25 = 9,7% | 15 | 0,029 |
| 49 = 19,1% | 9 | 0,016 |

Figure 20

Tableau comparatif de l'erreur quadratique
pour la fonction $f(k,l) = \exp(-0,1(k+l))$

La première colonne correspond à la section ou surface connue à extrapoler. C'est le nombre de points connus parmi les 256 points de toute la surface. Il est intéressant de remarquer, que chaque ligne de ce tableau, correspond à la connaissance d'un nombre de points autour de l'origine; ce qui correspond, pour cet exemple, aux points où la fonction $f(k,l)$ est maximum. Ceci explique les résultats décrits à la première ligne du tableau où la connaissance de quatre points, seulement, a permis l'obtention d'une erreur quadratique sensiblement faible.

D'une façon générale, il est clair que, plus grande est la surface connue, plus la convergence de l'algorithme est rapide et l'erreur est réduite.

III.2.b: $f(k,l) = \sin(\Pi kl)/(\Pi kl)$:

Les résultats de l'erreur quadratique par rapport au nombre de points connus ou au pourcentage de la surface connue et par rapport au nombre d'itérations sont donnés sur le tableau de la figure 21.

| nombre de points connus / 256 | nombre d'itérations | erreur quadratique |
|-------------------------------|---------------------|--------------------|
| 1 = 0,4% | 99 | 0,277 |
| 4 = 1,5% | 25 | 0,167 |
| 9 = 3,5% | 8 | 0,099 |
| 16 = 6,2% | 3 | 0,060 |

Figure 21:

Tableau comparatif de l'erreur quadratique pour la fonction $f(k,l) = \sin(\Pi kl)/(\Pi kl)$

En étudiant le tableau ci-dessus, on voit bien que pour "1" ou "4" points connus sur "256" l'algorithme ne donne pas des résultats satisfaisants. Par contre, si on augmente la surface connue, l'erreur quadratique devient tolérable. Néanmoins cette dernière reste plus grande dans cet exemple que celle de l'exemple précédent.

Dans les différentes applications, à une ou deux dimensions, que nous avons présenté, l'algorithme n'est efficace que si le segment connu ou la surface connue fait partie de la région où la fonction a la plus grande valeur absolue. De même,

l'algorithme converge si la connaissance de la fonction à extrapoler n'est pas concentrée en un seul segment ou une seule section mais répartie dans tout l'intervalle de définition de la fonction. On a vu dans le premier exemple dans le cas unidimensionnel que la convergence pouvait même s'améliorer.

Au debut du chapitre suivant, nous décrirons une application de l'algorithme de Papoulis à la reconstitution d'un signal qui correspond à la somme de deux sinusoides [4]. L'approche effectuée, dans ce cas, est basée sur la connaissance aléatoire d'un certain nombre de points. Nous allons également présenter d'autres méthodes d'extrapolation.

Chapitre 3B

PRESENTATION D'AUTRES APPROCHES ET COMPARAISON

Chapitre IV

PRESENTATION D'AUTRES APPROCHES ET COMPARAISON

Nous aborderons ce chapitre par l'étude d'une application de la méthode de Papoulis pour la reconstruction d'un signal à une dimension qui est la somme de deux sinusoides [4]. Ensuite, nous ferons une étude comparative de la méthode d'extrapolation de Papoulis de fonctions à bande limitée avec deux autres méthodes ([9] et [10]). Enfin, Nous terminerons par la présentation d'une approche différente pour reconstruire un signal à deux dimensions [16].

IV.1: Application de la méthode de Papoulis pour l'estimation de sinusoides [4]:

P.S.Naidi et B.Paramasivalah ont appliqué l'algorithme d'extrapolation de Papoulis pour estimer la somme de deux sinusoides, dont les points sont connus d'une manière aléatoire. Ils montrent que l'on peut, à partir de dix pourcent, seulement, de points connus, reconstituer tous les points manquants. Ceci, avec une précision remarquable: l'erreur quadratique moyenne est inférieure à 0,0035 après 30 itérations.

L'approche du problème est similaire à la notre; sauf que les points connus ne sont pas regroupés, mais aléatoirement choisis.

Nous pouvons résumer leur travail comme suit:

On considère une fonction à bande limitée $f(t)$ avec sa transformée de Fourier $F(\omega)$:

$$F(\omega) = 0 \quad |\omega| > |\omega_0|$$

Les points où $f(t)$ est connue sont répartis aléatoirement. Ils sont décrits par $f_0(t)$:

$$f_0(t) = D(t).f(t) \quad t=0,1,2,\dots,T-1$$

où $D(t)$ est une séquence aléatoire prenant les valeurs "1" ou "0" avec des probabilités respectives "p" et "1-p".

$$\text{prob}\{D(t)=1\} = p \quad \text{pour } t=0,1,2,\dots,T-1.$$

A chaque fois que $D(t)=1$, nous sommes en présence d'un point connu. Si $D(t)=0$, nous avons un point à extrapoler.

La procédure pour reconstruire $f(t)$ à partir de $f_0(t)$ est:

- a/- Calculer la transformée de Fourier $F_0(\omega)$ de $f_0(t)$.
- b/- Appliquer la propriété des fonctions à bande limitée:

$$G_0(\omega) = \begin{cases} F_0(\omega) & \text{pour } |\omega| \leq |\omega_0| \\ 0 & \text{pour } |\omega| > |\omega_0| \end{cases}$$

- c/- Calculer la transformée inverse de Fourier de $G_0(\omega)$ qui sera $g_0(t)$.

- d/- Former la fonction $f_1(t)$ suivante:

$$f_1(t) = [1-D(t)].g_0(t) + f_0(t)$$

$f_1(t)$ sera la première estimation de $f(t)$. Après cela, on refait les étapes de "a/-" à "d/-" pour une nouvelle itération. L'algorithme se poursuit jusqu'à ce que cette différence moyenne quadratique soit:

$$\sum_t |f_n(t) - f_{n-1}(t)|^2 \leq \varepsilon$$

ε étant un nombre préalablement choisi.

L'exemple proposé était:

$$f(t) = 1.25 \cos(20\pi t + \pi/2) + 1.5 \cos(24\pi t + \pi/3)$$

Les auteurs montrent que, après 30 itérations, l'erreur quadratique moyenne était de 0.00327 et que si nous sommes en présence d'un bruit dont le spectre est extérieur à la bande limitée par ω_0 ($|\omega| \leq |\omega_0|$), ce bruit n'introduit aucune distortion au signal obtenu à la fin de l'algorithme. Par contre, si le spectre du bruit se trouve à l'intérieur de la bande, alors cette technique ne peut ni l'enlever, ni le diminuer. Il est évident que, plus la bande de fréquence est rétrécie, moins le bruit n'a d'effets sur le résultat.

L'erreur ne peut être réduite à partir d'une certaine limite; même si on augmente le nombre d'itérations indéfiniment.

IV.2: Comparaison avec d'autres méthodes d'extrapolation:

Plusieurs méthodes d'extrapolation ont été développées et

testées à ce jour. Une présentation succincte de deux de ces méthodes ainsi qu'une comparaison permettent d'évaluer l'efficacité et l'économie en mémoire de la méthode de Papoulis.

IV.2.a: Méthode de Harris [9]:

La méthode de Harris consiste à convoluer le signal à extrapoler (de largeur T_1) avec un train d'impulsions de période égale à T_1 ou inférieure. Le résultat sera multiplié par une fonction fenêtre ou rectangle de largeur supérieure à T_1 .

Soit $g(t)$ le signal à convoluer:

$$g(t) = 0 \text{ pour } |t| > T_1/2$$

Soit $\text{comb}(t/T_2)$ le train d'impulsions:

$$\text{comb}(t/T_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\frac{t}{T_2} - n\right)$$

où "n" est un nombre entier.

Soit $\text{rect}(t/T_3)$ la fonction rectangle ou fenêtre:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T_3}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \left|\frac{t}{T_3}\right| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pour } \left|\frac{t}{T_3}\right| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Alors,

$$g(t) = [g(t) * \text{comb}(t/T_2)] \cdot \text{rect}(t/T_3)$$

Avec la condition suivante :

$$T_1 \leq T_3 \leq T_2$$

La transformée de Fourier de $g(t)$ est :

$$G(f) = T_2 \cdot T_3 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n/T_2) \cdot \frac{\sin(\Pi T_3 (f - n/T_2))}{\Pi T_3 (f - n/T_2)}$$

"f" étant la fréquence.

Harris montre que même si on prend une partie seulement de cette série, on aura une bonne approximation du spectre fréquentiel de $g(t)$. Seulement, l'inconvénient est que cette méthode ne donne pas le spectre réel mais une approximation pratique et acceptable. De plus, il faut disposer d'une mémoire importante pour stocker les différentes valeurs de cette série.

IV.2.b: Developpement en série de fonctions d'ondes prolates sphéroïdales [10]:

Soit $g(t)$ le segment à extrapoler, cette méthode consiste à développer ce segment en une série de fonctions d'ondes prolates sphéroïdales $\phi_k(t)$ [Annexe A.2] dans l'intervalle $[-T, T]$ où il est connu :

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \phi_k(t)$$

Les coefficients a_k sont donnés par :

$$a_k = \frac{1}{\lambda_k} \int_{-T}^{+T} g(t) \cdot \phi_k(t) \cdot dt$$

λ_k sont les valeurs propres correspondantes aux fonctions $\phi_k(t)$.

On insère les valeurs obtenues dans le développement de la fonction $f(t)$ à bande limitée (9).

La transformée $F(\omega)$ de $f(t)$ sera [Annexe A.2.d]:

$$F(\omega) = B \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot \phi_k(b\omega) \quad \text{quand } |\omega| \leq \sigma$$

Si on veut évaluer $F(\omega)$ à l'aide de cette méthode, on doit stocker en mémoire toutes les valeurs des fonctions $\phi_k(t)$ et les utiliser pour trouver les valeurs de a_k . Ce qui nécessiterait un espace mémoire très important.

Les avantages de la méthode d'extrapolation de Papoulis étudiée et analysée dans ce travail par rapport à ces deux méthodes, [9] et [10], sont l'économie en mémoire ainsi que l'utilisation de la transformée rapide de Fourier (FFT).

IV.3: Méthode de reconstitution de signaux à deux dimensions de D. Shi Chen et J.P. Allebach [16]:

Cette méthode permet d'estimer un signal à deux dimensions

a bande limitée, à partir de la connaissance d'un nombre de points fini espacés irrégulièrement. Elle est basée sur une interpolation à partir de chaque point connu.

Cette méthode trouve, tout naturellement, ses applications dans le traitement d'images, le graphisme par ordinateur et les sciences naturelles comme la géologie, la météorologie et l'océanographie.

Résumons le principe:

Le signal à reconstituer est $s(x)$, "x" étant un point de l'espace à deux dimensions. On forme, alors, la fonction $\hat{s}(x)$ suivante qui est un estimateur de $s(x)$:

$$\hat{s}(x) = \sum_{l=0}^{L-1} b_l \cdot \psi(x-x_l)$$

Où b_l est une fonction des points $s(x_0); s(x_1); \dots; s(x_{L-1})$.

$x_0; x_1; \dots; x_{L-1}$ sont les points irrégulièrement espacés où le signal $s(x)$ est connu.

$\psi(x)$ est une fonction d'interpolation à bande limitée.

On applique, alors, la théorie de projection dans l'espace de Hilbert et on résoud pour les fonctions b_l qui minimisent l'erreur quadratique moyenne suivante:

$$e_s^2 = \|s - \hat{s}\|^2$$

Pour que e_s^2 soit minimum, il faut que " ψ " soit la transformée de Fourier inverse d'une fonction normalisée définissant le spectre. Dans ce cas, les b_l forment une fonction linéaire des données (les points où $s(x)$ est connue). On

démontre que cet estimateur fait une interpolation à partir de chaque point connu et que c'est l'estimateur ayant le minimum d'énergie.

Une condition s'impose pour la démonstration: l'erreur quadratique moyenne doit être nulle quand le nombre de points connus est infini. A partir de cela, l'estimateur $\hat{s}(x)$ converge uniformément vers le signal original $s(x)$.

Cet estimateur $\hat{s}(x)$ dépend aussi de la répartition des points à interpoler ($x_0; x_1; \dots; x_{L-1}$). D. Shi Chen et Jan P. Allebach développent trois critères pour évaluer la qualité et les performances de la répartition des points connus en utilisant le principe de minimax.

CONCLUSION

CONCLUSION

En définitive, la méthode d'extrapolation, que nous avons étudié est très pratique pour les fonctions à bande limitée. Cela paraît restrictif à première vue, mais si on considère que la plus grande partie des phénomènes physiques sont d'énergie finie ayant un spectre fréquentiel limité, le champ d'application de notre méthode sera élargi. De plus, on pourrait développer une méthode d'extrapolation similaire pour les fonctions à temps limité qui sont des fonctions de durée limitée et d'énergie finie. En effet, il existe une dualité entre les propriétés des fonctions à bande limitée et les propriétés des fonctions à temps limité [1].

Dans notre étude, l'effet du bruit n'est pas abordé. Mais on peut montrer que l'erreur occasionnée par un bruit blanc, par exemple, est limitée et bornée [2]. D'une manière générale, plus le spectre de la fonction à extrapoler est étroit (bande limitée), moins l'effet d'un bruit blanc est important [4]: les composantes fréquentielles de ce bruit, extérieures à la bande considérée, n'auront aucune influence sur le résultat. Il existe, aussi, une autre erreur que l'on peut étudier et estimer qui est l'erreur d'arrondi (roundoff error) dû au calculateur utilisé [2].

Enfin, nous avons montré que, à partir de la connaissance d'une petite partie seulement d'un signal, on peut reconstituer, avec beaucoup de succès, le signal en entier et sa transformée de Fourier. Effectivement, dans beaucoup de cas, il est difficile d'obtenir le spectre fréquentiel d'un signal à partir d'une partie de ce signal.

ANNEXES

ANNEXE A

A.1: Borne supérieure des fonctions à bande limitée [1]

Si une fonction $f(t)$ est à bande limitée et son énergie E est connue, alors cette fonction ne peut prendre n'importe quelle grande valeur en module:

$$|f(t)| \leq \sqrt{\frac{E\sigma}{\pi}}$$

Démonstration

On peut écrire $f(t)$ comme la transformée inverse de Fourier de $F(\omega)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{+\sigma} F(\omega) \cdot \exp(j\omega t) \cdot d\omega$$

Rappelons que pour une fonction à bande limitée:

$$- F(\omega) = 0 \quad \text{pour } |\omega| > \sigma$$

$$- E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{+\sigma} |F(\omega)|^2 \cdot d\omega < \infty$$

Multiplions $F(\omega)$ par une fonction $H(\omega)$ arbitraire:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{+\sigma} F(\omega) \cdot H(\omega) \cdot \exp(j\omega t) \cdot d\omega$$

$g(t)$ serait, alors, la réponse d'un système linéaire ayant pour entrée $f(t)$.

Appliquons l'inégalité de Schwartz

$$|g(t)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left| \int_{-\sigma}^{+\sigma} F(\omega) \cdot H(\omega) \cdot \exp(j\omega t) \cdot d\omega \right|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\sigma}^{+\sigma} |F(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\sigma}^{+\sigma} |H(\omega)|^2 d\omega$$

$$|g(t)|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \left[2\pi E \int_{-\sigma}^{+\sigma} |H(\omega)|^2 d\omega \right]$$

Prenons le cas où $H(\omega) = 1$ donc $g(t) = f(t)$

$$|f(t)|^2 \leq \frac{E}{2\pi} \int_{-\sigma}^{+\sigma} d\omega \quad \text{donc} \quad |f(t)|^2 \leq \frac{E\sigma}{\pi}$$

Finalement,

$$|f(t)| \leq \sqrt{\frac{E\sigma}{\pi}}$$

A.2: Les fonctions prolates sphéroïdales [1], [2]:

A.2.a: Définition:

Les fonctions d'ondes prolates sphéroïdales sont des

fonctions propres $\phi_k(t)$, solutions de cette équation:

$$\int_{-T}^{+T} \phi_k(x) \cdot \frac{\sin(\varrho(t-x))}{\Pi(t-x)} \cdot dx = \lambda_k \cdot \phi_k(t)$$

A.2.b: Valeurs propres:

L'équation n'a de solutions que pour certaines valeurs λ_k .
Les nombres λ_k sont réels, positifs et tels que:

$$1 > \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_k > \dots > 0$$

$$\lambda_k \xrightarrow{\quad} 0 \quad \text{quand} \quad k \xrightarrow{\quad} \infty$$

A.2.c: Double orthogonalité et double orthonormalité:

Les fonctions $\phi_k(t)$ sont, respectivement, orthonormales ou orthogonales dans les intervalles $[-\infty, +\infty]$ et $[-T, +T]$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_i(t) \cdot \phi_k(t) \cdot dt = \begin{cases} 1 & \text{quand } i=k \\ 0 & \text{quand } i \neq k \end{cases}$$

$$\int_{-T}^{+T} \phi_i(t) \cdot \phi_k(t) \cdot dt = \begin{cases} \lambda_k & \text{quand } i=k \\ 0 & \text{quand } i \neq k \end{cases}$$

A.2.d: Transformée de Fourier:

Les fonctions $\phi_k(t)$ sont égales à leurs transformées de Fourier tronquées et avec un changement d'échelle:

$$\phi_k(t) \longleftrightarrow \frac{B}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot \phi_k(b\omega) \cdot p_\sigma(\omega)$$

$$\phi_k(t) \cdot p_T(t) \longleftrightarrow B \cdot \sqrt{\lambda_k} \cdot \phi_k(b\omega)$$

avec $B = \sqrt{\frac{2\Pi T}{\sigma}}$; $b = \frac{T}{\sigma}$;

$$p_\sigma(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |\omega| \leq \sigma \\ 0 & \text{pour } |\omega| > \sigma \end{cases}$$

et enfin:

$$p_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| \leq T \\ 0 & \text{pour } |t| > T \end{cases}$$

Il est clair, donc, que les solutions $\phi_k(t)$ sont des fonctions à bande limitée; on en déduit:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_k(x) \cdot \frac{\sin(\sigma(t-x))}{\Pi(t-x)} \cdot dx = \phi_k(t)$$

ANNEXE B

B.1: Programme d'extrapolation de fonctions à bande limitée à une dimension:

```

100 REM *****
110 REM *
120 REM * EXTRAPOLATION DE SIGNAUX *
130 REM * UNIDIMENTIONNELS *
140 REM *
145 REM *****
150 PAGE
160 INIT
170 REM N:Nb.de pts,A1:Part.reel.,A2:Part.imag.,
180 REM B:Vect.de stockage,Er:Vect.Erreur,Nit:Nb.Itérations,
190 REM Ermx:Vect.Erreur Maximale.
200 N=1024
210 Nit=6
220 DIM A1(N),A2(N),B(N),Er(N),Ermx(Nit)
230 REM *CONSTRUIRE F(t)=sin(πt)/(πt) et INITIALISER A1 et A2*
240 FOR I=1 TO N/2
250     B(I)=SIN(IR2-5)/(IR2-5)
260     B(N+1-I)=B(I)
270 NEXT I
280 FOR I=1 TO N
290     A1(I)=0
300     A2(I)=0
310 NEXT I
320 CHARSIZE 1
330 REM * COMMENCER L'ALGORITHME *
340 It=0
350 REM *CORRIGER F(T) AVEC LA BANDE CONNUE*
360 FOR I=1 to 8
370     A1(I)=B(I)
380     A1(N+1-I)=B(N+1-I)
390     A2(I)=0
400     A2(N+1-I)=0
410 NEXT I
420 IF It>0 THEN 450
430 REM *TRACER Fo(t)*
440 GOSUB 2000
450 REM *CHERCHER FFT DE F(t)*
460 J1=1

```

```

470 GOSUB 8000
480 REM *TRACER G(f)*
490 GOSUB 3000*
500 REM *TRONQUER G(f)*
510 FOR I=17 TO N-16
520     A1(I)=0
530     A2(I)=0
540 NEXT I
550 REM *CHERCHER FFT INVERSE DE G(f)*
560 J1=-1
570 GOSUB 8000
580 It=It+1
590 REM *TRACER F(t)*
600 GOSUB 2000
610 REM
620 REM             * CALCUL DE L'ERREUR *
630 REM
640 FOR I=1 TO N
650     Er(I)=(ABS(B(I))-SQR(A1(I)^2+A2(I)^2))^2
660 NEXT I
670 Ermx(It)=0
680 FOR I=1 TO N
690     Ermx(It)=Ermx(It) MAX Er(I)
700 NEXT I
710 REM *A CE NIVEAU,UNE ITERATION COMPLETE*
720 IF It<Nit THEN 350
730 REM
740 REM             * TRACE DE L'ERREUR *
750 REM
760 PAGE
770 VIEWPORT 10,100,10,60
780 WINDOW 1,Nit,0,0.3
790 AXIS 1,0.05
800 MOVE Nit/2,0.2
810 PRINT "HHHHHHHHHH";"Erreur Max=F(Nb.Itérations)";
820 FOR It=1 TO Nit
830     MOVE It-0.02,0
840     PRINT "J";It;
850 NEXT It
860 FOR J=0.05 TO 0.3 STEP 0.05
870     MOVE 1,J-0.005
880     PRINT "HHHH";J;
890 NEXT J
900 MOVE 1,Ermx(1)
910 FOR It=1 TO Nit
920     Ermx (It)=INT(Ermx(It)*1000)/1000
930     DRAW It,Ermx(It)

```

```

900      PRINT Ermx(It)
950      MOVE It,Ermx(It)
960 NEXT It
970 HOME
980 END

2000 REM *TRACE DE F(t)*
2010 VIEWPORT 6,60,5,95
2020 WINDOW 0,N/8,-0.22,1
2030 IF It>0 THEN 2310
2040 AXIS N/32,0.2
2045 AXIS à1:N/32,0.2
2048 PRINT à1,17:0.896,1.408
2050 REM *TITRAGE*
2060 A$="fn(t):SIGNAL TEMPOREL"
2070 MOVE N/16,1
2075 MOVE à1:N/16,1
2080 PRINT "HHHHHHHHHH";A$;
2085 PRINT à1:"HHHHHHHHHH";A$;
2090 REM *TITRAGE DES ABSCISSES*
2100 B$="TEMPS(s)"
2110 MOVE N/8,0
2115 MOVE à1:N/8,0
2120 PRINT "KHHHHHHHHH";B$;
2125 PRINT à1:"KHHHHHHHHH";B$;
2130 REM *TITRAGE DES ORDONNEES*
2140 C$="AMPLITUDE DU SIGNAL"
2150 MOVE 0,0.5
2155 MOVE à1:0,0.5
2160 PRINT "HHHHHHK KKKKKK"
2165 PRINT à1:"HHHHHHK KKKKKK"
2170 FOR I=1 TO LEN(C$)
2180     X$=SEG(C$,I,1)
2190     PRINT X$,"HJ";
2195     PRINT à1:X$,"HJ";
2200 NEXT I
2201 REM *FIGURE 5*
2202 MOVE à1:N/8,-0.2
2204 D$="FIGURE 5"
2206 PRINT à1:" JJJJ";D$;
2210 REM *DIVISIONS DES ABSCISSES*
2220 FOR I=N/32 TO N/8 STEP N/32
2230     MOVE I+1.5,0
2235     MOVE à1:I+1.5,0
2240     PRINT "JJH";I/(N/32);
2245     PRINT à1:"JJH";I/(N/32);
2250 NEXT I

```

```

2260 REM *DIVISIONS DES ORDONNEES*
2270 FOR I=-0.2 TO 1 STEP 0.2
2280     MOVE 0,I-0.01
2285     MOVE à1:0,I-0.01
2290     PRINT "HHHH";I;
2295     PRINT à1:"HHHH";I;
2300 NEXT I
2310 MOVE 1,A1(1)
2315 MOVE à1:1,A1(1)
2320 FOR I=2 TO N/8
2330     DRAW I,A1(I)
2335     DRAW à1:I,A1(I)
2340 NEXT I
2350 MOVE 1,A1(1)
2355 MOVE à1:1,A1(1)
2360 PRINT It
2365 PRINT à1:It
2370 RETURN

```

```

3000 REM *TRACE DE G(f)*
3010 VIEWPORT 70,125,5,95
3020 WINDOW 0,N/4,-3,32
3030 IF It>0 THEN 3310
3040 AXIS N/32,6.4
3045 AXIS à1:N/32,6.4
3050 REM *TITRAGE*
3060 D$="gn(f):SPECTRE FREQUENTIEL"
3070 MOVE N/8,32
3075 MOVE à1:N/8,32
3080 PRINT "HHHHHHHHHHHH";D$;
3085 PRINT à1:"HHHHHHHHHHHH";D$;
3090 REM *TITRAGE DES ABSCISSES*
3100 E$="FREQ.(Hz)"
3110 MOVE N/4,0
3115 MOVE à1:N/4,0
3120 PRINT "KHHHHH";E$;
3125 PRINT à1:"KHHHHH";E$;
3130 REM *TITRAGE DES ORDONNEES*
3140 F$="AMPLITUDE"
3150 MOVE 0,16
3155 MOVE à1:0,16
3160 PRINT "HHHHHKKKK";
3165 PRINT à1:"HHHHHKKKK";
3170 FOR I=1 TO LEN(F$)
3180     Y$=SEG(F$,I,1)
3190     PRINT Y$;"HJ";
3195     PRINT à1:Y$;"HJ";

```

```

3200 NEXT I
3210 REM *DIVISIONS DES ABSCISSES*
3220 FOR I=N/16 TO N/4 STEP N/16
3230     MOVE I+3,0
3235     MOVE à1:I+3,0
3240     PRINT "HJJ";I/(N/32);
3245     PRINT à1:I+3,0
3250 NEXT I
3260 REM *DIVISIONS DES ORDONNEES*
3270 FOR I=0 TO 32 STEP 6.4
3280     MOVE 0,I-0.3
3285     MOVE à1:0,I-0.3
3290     PRINT "HHH";I/32;
3295     PRINT à1:"HHH";I/32;
3300 NEXT I
3310 MOVE 1,A1(1)
3315 MOVE à1:1,A1(1)
3320 FOR I=2 TO N/4
3330     DRAW I,A1(I)
3335     DRAW à1:I,A1(I)
3340 NEXT I
3350 MOVE 2,A1(2)
3355 MOVE à1:2,A1(2)
3360 PRINT It
3365 PRINT à1:It
3370 RETURN

8000 REM *** FFT ET FFT INVERSE ***
8010 A=LGT(N)/LGT(2)
8020 M=INT(A+0.5)
8030 J=1
8040 FOR I=1 TO N-1
8050     IF I≥J THEN 8120
8060     T1=A1(J)
8070     T2=A2(J)
8080     A1(J)=A1(I)
8090     A2(J)=A2(I)
8100     A1(I)=T1
8110     A2(I)=T2
8120     K=N/2
8130     IF K≥J THEN 8170
8140     J=J-K
8150     K=K/2
8160     GO TO 8130
8170     J=J+K
8180 NEXT I
8190 FOR L=1 TO M

```

```
8200     L1=2^L
8210     L2=L1/2
8220     U=1
8230     V=0
8240     W=COS( $\Pi/L2$ )
8250     Z=-J1*SIN( $\Pi/L2$ )
8260     FOR J=1 TO L2
8270         FOR I=J TO N STEP L1
8280             I1=I+L2
8290             T1=A1(I1)*U-A2(I1)*V
8300             T2=A1(I1)*V+A2(I1)*U
8310             A1(I1)=A1(I)-T1
8320             A2(I1)=A2(I)-T2
8330             A1(I)=A1(I)+T1
8340             A2(I)=A2(I)+T2
8350         NEXT I
8360         U1=U*W-V*Z
8370         U2=U*Z+W*V
8380         U=U1
8390         V=U2
8400     NEXT J
8410 NEXT L
8420 IF J1>0 THEN 8470
8430 FOR I=1 TO N
8440     A1(I)=A1(I)/N
8450     A2(I)=A2(I)/N
8460 NEXT I
8470 RETURN
```

B.2: Programme d'extrapolation de fonctions à bande
limitée à deux dimensions:

```

100 REM *****
110 REM *
120 REM * EXTRAPOLATION DE SIGNAUX *
130 REM * BIDIMENTIONELS *
140 REM *
150 REM *****
160 PAGE
170 INIT
180 CHARSIZE 1
190 REM N:Dim.des matrices;Nit:Nb.d'itér.;T:Matr.données(N*N);
200 REM Tint:Matr.stockage(N*N);Mat:Matr.Transf.Fourier(N*N);
210 REM A1:Vect.Part.Reel.;A2:Vect.Part.Imag;
220 REM
230 REM
240 N=16
250 Nit=64
260 DIM Hyp(N,N),T(N,N),Matr(N,N),Mati(N,N),Er(N,N),A1(N),A2(N)
265 DIM Ermax(Nit)
268 Ermax=0
270 REM *CONSTRUIRE Z=F(X,Y)*
280 FOR I=1 TO N
290     FOR J=1 TO N
300         Hyp(I,J)=EXP(-0.1*(I+J-2))
310     NEXT J
320 NEXT I
400 REM *COMMENCER L'ALGORITHME*
410 It=1
420 T=0
430 REM *DONNER FO(T)*
440 FOR I=N/2-N/8 TO N/2+N/8-1
450     FOR J=N/2-N/8 TO N/2+N/8-1
460         T(I,J)=Hyp(I,J)
470     NEXT J
480 NEXT I
490 REM *CHERCHER T.F de T*
500 J1=1
510 GOSUB 7000
520 REM *TRONQUER Matr*
530 T=0
540 FOR I=N/2-N/8 TO N/2+N/8-1
550     FOR J=N/2-N/8 TO N/2+N/8-1
560         T(I,J)=Matr(I,J)

```

```

570     NEXT J
580 NEXT I
600 REM *CHERCHER T.F.Inverse de T*
610 J1=-1
620 GOSUB 7000
630 T=Matr
640 REM *CORRIGER AVEC SURFACE CONNUE*
650 FOR I=N/2-N/8 TO N/2+N/8-1
660     FOR J=N/2-N/8 TO N/2+N/8-1
670         T(I,J)=Hyp(I,J)
680     NEXT J
690 NEXT I
730 REM
740 REM *CALCUL DE L'ERREUR*
750 FOR I=1 TO N
760     FOR J=1 TO N
770         Er(I,J)=(Hyp(I,J)-T(I,J))^2
780         Ermax(It)=Ermax(It) MAX Er(I,J)
790     NEXT J
800 NEXT I
805 PRINT "ERREUR MAX.A LA ";It;"e ITERATION =";Ermax(It)
810 REM *A CE NIVEAU UNE ITERATION COMPLETE*
820 It=It+1
830 IF It<Nit THEN 490
840 END

7000 REM *FFT DOUBLE*
7010 FOR Lg=1 TO N
7020     FOR Cl=1 TO N
7030         A1(Cl)=T(Lg,Cl)
7040         A2(Cl)=0
7050     NEXT Cl
7060     GOSUB 8000
7080     FOR Cl=1 TO N
7090         Matr(Lg,Cl)=A1(Cl)
7100         Mati(Lg,Cl)=A2(Cl)
7110     NEXT Cl
7120 NEXT Lg
7130 FOR Cl=1 TO N
7140     FOR Lg=1 TO N
7150         A1(Lg)=Matr(Lg,Cl)
7160         A2(Lg)=Mati(Lg,Cl)
7170     NEXT Lg
7180     GOSUB 8000
7190     FOR Lg=1 TO N
7200         Matr(Lg,Cl)=A1(Lg)
7210         Mati(Lg,Cl)=A2(Lg)

```

```

7220     NEXT Lg
7230 NEXT C1
7240 RETURN

8000 REM *** FFT ET FFT INVERSE ***
8010 A=LGT(N)/LGT(2)
8020 M=INT(A+0.5)
8030 J=1
8040 FOR I=1 TO N-1
8050     IF I ≥ J THEN 8120
8060     T1=A1(J)
8070     T2=A2(J)
8080     A1(J)=A1(I)
8090     A2(J)=A2(I)
8100     A1(I)=T1
8110     A2(I)=T2
8120     K=N/2
8130     IF K ≥ J THEN 8170
8140     J=J-K
8150     K=K/2
8160     GO TO 8130
8170     J=J+K
8180 NEXT I
8190 FOR L=1 TO M
8200     L1=2^L
8210     L2=L1/2
8220     U=1
8230     V=0
8240     W=COS(Π/L2)
8250     Z=-J1*SIN(Π/L2)
8260     FOR J=1 TO L2
8270         FOR I=J TO N STEP L1
8280             I1=I+L2
8290             T1=A1(I1)*U-A2(I1)*V
8300             T2=A1(I1)*V+A2(I1)*U
8310             A1(I1)=A1(I)-T1
8320             A2(I1)=A2(I)-T2
8330             A1(I)=A1(I)+T1
8340             A2(I)=A2(I)+T2
8350         NEXT I
8360         U1=U*W-V*Z
8370         U2=U*Z+W*V
8380         U=U1
8390         V=U2
8400     NEXT J
8410 NEXT L
8420 IF J1 > 0 THEN 8470

```

```
8430 FOR I=1 TO N
8440     A1(I)=A1(I)/N
8450     A2(I)=A2(I)/N
8460 NEXT I
8470 RETURN
```

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.Papoulis, "Signal Analysis" McGraw Hill, 1977.
- [2] A.Papoulis, "A New Algorithm in Spectral Analysis and Band-Limited Extrapolation", IEEE Trans.Circuits Syst., vol.CAS-22, pp:735-742, Sept.1975.
- [3] R.W.Gerchberg, "Super-Resolution through Error Energy Reduction", Optica Acta, vol.21, No.9, pp:709-720, 1974.
- [4] P.S.Naidu, B.Paramasivaiah, "Estimation of Sinusoids from Incomplete Time Series", IEEE Trans.Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol.ASSP-32, No.3, pp:559-562, June 1984.
- [5] A.Papoulis, "Probability, Random Variables, and Stockastic Process", New York: McGraw Hill, 1965.
- [6] J.Max, "Méthodes et Techniques de Traitement du Signal et Applications aux Mesures Physiques", 2^e édition, Masson, 1977.
- [7] Harry L.Van Trees, "Detection, Estimation, and Modulation Theory", Part I, pp:186-208, Wiley, 1968.
- [8] A.Rosenfeld and A.C.Kak, "Digital Picture Processing", Comp. Science and Applied Mathematics vol.1, pp:21-27,

Academic Press, INC, 1987.

- [9] Harris, J.L., *Jour. Opt. Soc. Am.*, 54, 931, 1964.
- [10] Slepian D., and Pollack, H.O., *Bell Syst.Tech. Jour.*, 40, 43, 1961.
- [11] A.Ralstone and P.Rabinowitz, "A First Course in Numerical Analysis", McGraw Hill, pp:226-228, 1985.
- [12] Philip J.Davis, "Interpolation and Approximation", Dover, pp:78-83, 1975.
- [13] Z.Wang, "Fast Algorithms for the Discrete W Transform and for the Discrete Fourier Transform" *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol.ASSP-32, pp:803-816, August 1984.
- [14] O.Ersoy, "Real Discrete Fourier Transform" *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol.ASSP-33, pp:880-882, August 1985.
- [15] R.Fortet, "Sur une méthode de Papoulis pour l'extrapolation d'un signal" *Annales des télécommunications*, pp:413-420, 1981.
- [16] D.Shi Chen and Jan P.Allebach, "Analysis of Error in Reconstruction of Two Dimensional Signals from Irregularly Spaced Samples", *IEEE Trans. Acoustics; Speech and Signal Processing*, vol.ASSP-35, N°2, pp:173-180, February 1987.