

وزارة التعليم العالي
Ministère de l'Enseignement Supérieur

1ex

المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية

المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية
المكنة

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE E.N.P.A.

BIBLIOTHÈQUE

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

INGENIORAT D'ETAT EN GENIE MECANIQUE

THEME

CALCUL DES FRÉQUENCES
PROPRES DU TREILLIS
DE L'AUTOBUS 100V8

Etudié par :

ABBAS SELMANE

Proposé par :

W. KUROWSKI

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي
Ministère de l'Enseignement Supérieur

المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER
E. N. P. A.

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES .
INGENIORAT D'ETAT EN GENIE MECANIQUE

THEME

CALCUL DES FRÉQUENCES
PROPRES DU TREILLIS
DE L'AUTOBUS 100V8

Etudié par :

ABBAS SELMANE

Proposé par :

W. KUROWSKI

Promotion Juin 1985

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes remerciements à monsieur KUROWSKI qui a eu l'aimable sollicitation de me suivre le long de cette étude, ainsi que tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Par la même occasion, je voudrais remercier mes frères ainsi que le personnel de l'entreprise SONACOME pour leur précieuse aide.

Que tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce projet, trouvent ici ma sincère gratitude.



DEDICACE

Je dédie ce modeste travail

- A tous ceux qui témoignent qu'il n'y a de DIEU qu'ALLAH et que MOHAMMED est son prophète.
- A mes parents.
- A mes grands parents.
- A mes frères et sœurs.
- A toute ma grande famille.
- A tous mes amis.

Abbas

Département : Génie Mécanique

Promoteur : W. KUROWSKI

Elève Ingénieur : A. SELMANE.

الموضوع : حساب التوترات الخاصة لميكل حافلة 100V8
الملخص : موضوع عملنا يشتمل على دراسة ديناميكية للميكل المصنوع من طرف م. و. س. ص. سبب هذه الدراسة هو وجود إنشقاقات لوحظت على مستوى الهيكل عند استعمال العربة. المراحل الأساسية لدراستنا تتمثل في تحديد نموذج اوضع محدودات الكتل والحجماءة والبحث عن التوترات الحارة بمساعدة الناظم الإلكتروني.

Sujet : CALCUL DES FRÉQUENCES PROPRES DU TREILLIS DE L'AUTOBUS 100V8

Résumé : l'objet de notre travail consiste en l'étude dynamique d'un chassis d'autobus construit par CVI Ruiba ; cette étude vient à la suite des fissurations observées au niveau du chassis lors de l'exploitation du véhicule . Les principales étapes de notre étude sont : La modélisation du treillis , l'établissement des matrices masse et rigidité du système et la recherche des fréquences propres à l'aide d'un ordinateur.

Subject : 100V8 BUS FRAME OWN NATUREL FREQUENCIES CALCULATION.

Abstract: The object of this study consists of calculating the dynamical constraints of a bus frame made by CVI Ruiba . This study undertaken to do after notifying the main frame during the exploitation . the main steps of this work are : the modeling of the frame , the establishment of mass and stiffness matrices , and the calculation of the principal frequencies by computer .

TABLE DES MATIERES

Introduction.	
But du projet.	
1. Analyse du fonctionnement et de la construction du treillis.	1
1.1 Description du véhicule	1
1.2 Analyse du châssis	2
1.3 Choix du nombre de degrés de liberté.	3
2. Analyse de la méthode des éléments finis rigides	6
3. Modélisation du treillis	9
3.1 Nécessité d'une modélisation	9
3.2 Etablissement du modèle	9
3.3 Dimensionnement du treillis modèle	11
3.4 Détermination expérimentale du moment d'inertie I_x	11
3.4.1 But de l'expérience	11
3.4.2 Expérience	12
3.4.3 Calcul théorique du moment d'inertie I_x	13
3.4.4 Résultats	16
3.4.5 Moment d'inertie polaire	18
3.5 Calcul des paramètres géométriques du modèle	19
3.6 Division du treillis modèle	21
4. Calcul des paramètres des éléments du treillis modèle	24
4.1 Calcul des coefficients de rigidité des EED	24

4.1.1	Rigidité d'un EED au cisaillement	25
4.1.2	Rigidité d'un EED à la torsion	26
4.1.3	Rigidité d'un EED à la flexion	27
4.1.4	Application numérique	29
4.2	Calcul des éléments d'inertie	32
4.2.1	Calcul des masses des EFR	32
4.2.2	Calcul des moments d'inertie massique/ x_2	34
4.2.3	Calcul des moments d'inertie massique/ x_3	35
4.2.4	Tableau récapitulatif	36
5.	Etablissement du système d'équations différentielles	37
5.1	Equations de Lagrange	37
5.2	Energie du système	42
5.3	Dérivées des énergies	44
5.4	Equations du mouvement	46
5.5	Matrice masse. Matrice rigidité	49
5.6	Formulation numérique du problème	51
6.	Calcul des fréquences propres	53
6.1	Description de la méthode de JACOBI	53
6.2	organigramme	58
6.3	Programme	64
6.4	Résultats	66
	Conclusions	72
	Bibliographie	73

INTRODUCTION

Du moment où l'homme s'est rendu compte de la nocivité des vibrations mécaniques pour lui et pour les objets jouant un rôle dans sa vie, il a commencé à les étudier.

Dans ces études on voit intervenir des éléments primaires tels que masses, constantes élastiques, amortissements et forces perturbatrices ainsi que des grandeurs dont il faudra déterminer les valeurs telles que fréquences propres et amplitudes des vibrations. En tenant compte des particularités des facteurs intervenant dans le calcul ; La détermination des éléments primaires est plutôt difficile.

L'étude des vibrations des structures est fondée sur la théorie des vibrations des systèmes mécaniques, établie dès le siècle dernier, l'application de la théorie des vibrations au calcul des structures n'a cependant été commencée qu'au cours de la troisième décennie de notre siècle.

Les vibrations produites peuvent avoir des causes assez variées, dont certains sont inhérentes au processus technologique ou au principe de fonctionnement de la machine, tandis que d'autres sont dues à des inexacritudes d'exécution, à des défauts ou à l'usure.

Ces vibrations peuvent être très dangereuses en particulier lorsque il y a coïncidence entre les fréquences propres du système et les fréquences des éléments excitateurs.

Le problème fondamental de la dynamique des structures est l'étude des vibrations libres, dont le but est de déterminer les fréquences propres, pour cela on utilisera dans ce projet la méthode des éléments finis rigides qui fait appel au trois domaines suivants:

- Science de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles.
- Méthode numérique pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Programmation et information pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur.

Notre étude portera sur le calcul des fréquences propres du treillis de l'Autobus 100 VB, elle a été proposée par le bureau d'étude de la SNVI - CVI Ruiba.

Le treillis présente des fissurations au cours du fonctionnement de l'Autobus, le calcul des fréquences propres est un premier pas de l'étude du comportement dynamique de ce treillis et de la détermination des causes de ces fissurations.

BUT DU PROJET

L'objet de notre étude consiste en l'étude du comportement dynamique du treillis d'un autobus de l'unité véhicules industriels de Rouiba.

On se propose de déterminer les fréquences propres du treillis de l'autobus 100V8 par l'application de la méthode des éléments finis rigides et l'utilisation d'un ordinateur pour résoudre le problème mathématique qui se posera au cours de cette étude.

Chap 1 ANALYSE DU FONCTIONNEMENT ET DE LA CONSTRUCTION DU TRELIS.

1.1 Description du véhicule.

C'est un autobus (fig 1.2) équipé d'un moteur Cirta Diesel, alimenté par pompe à injection du type FBL413F.

La moteur comprend 8 cylindres en V, sa puissance DIN à 2500 tr/mn est égale à 210 ch, le couple maximum est de 73,5 kg. m à 1500tr/mn, le refroidissement du moteur est assuré par une turbine montée axialement en bout du vilebrequin, ce refroidissement permet au moteur d'atteindre plus vite sa pleine puissance.

La boîte de vitesses utilisée est du type VOITH D506, la transmission est assurée par arbres à cadrans entre la boîte et le pont, la direction est du type D805.2120; le réservoir carburant a une capacité de 200 litres, le pneumatique du véhicule est simple en avant, jumelés en arrière, les équipements électriques sont alimentés par deux accumulateurs de 12 volts et un alternateur de 60 Ampères.

Le poids total autorisé en charge est de 16 tonnes, le poids à ne pas dépasser sur essieu avant est de 6 tonnes, sur l'essieu arrière de 10,8 tonnes; La suspension est mixte, elle est composée de ressorts (hélicoïdaux à l'AV, avec Lames à l'AR); d'amortisseurs

à l'avant et l'arrière, de barres stabilisatrices et de coussins d'air (deux à l'AV et quatre à l'AR) qui ont pour but un meilleur confort et une hauteur constante par rapport au sol, quelle que soit la charge.

Le nombre de places est égal à 102 (100 + receveur + chauffeur)

Le véhicule a comme référence : 100 V8

où 100 : Nombre de places

V8 : 8 cylindres en V

les différentes dimensions du véhicule sont indiquées dans le tableau 1.1

1.2 Analyse du châssis.

Le châssis est de conception structurale, il est constitué de plusieurs centaines de barres de sections carrées creuses.

L'assemblage de ces barres est fait par le procédé de soudures MAG, un châssis avec une telle conception est appelé treillis.

un des avantages de ce châssis est sa faible masse (900 kg), le châssis

supporte l'ensemble des organes de l'autobus, pendant le

fonctionnement du véhicule, les différents organes vibrent, en

particulier le châssis, ces vibrations sont causées par les exci-

tations du moteur, de la boîte, du mauvais état de la route,

du démarrage et freinage brusques et...

ces vibrations provoquent des déformations et des contraintes dynamiques très dangereuses.

En analysant le châssis après une certaine durée de fonctionnement de l'autobus, on constate qu'il présente des fissuration.

Ces dernières sont très dangereuses puisque le châssis supporte tous les organes du véhicule et s'il se casse il y a danger de mort pour les passagers et les autres usagers de la route.

Pendant l'arrêt du véhicule, le treillis subit des déformations statiques dues aux charges qu'il supporte.

1.3 Choix du nombre de degrés de liberté.

Dans le cas général l'ensemble du véhicule considéré comme un solide rigide possède six degrés de liberté (fig 1.1) auxquels correspondent les déplacements et les rotations suivantes :

x_1, x_2 : Déplacements de translation horizontale.

x_3 : Déplacements de translation verticale.

θ : Rotation autour de l'axe x_1 .

φ : Rotation autour de l'axe x_2 .

ψ : Rotation autour de l'axe x_3 .

On analyse le treillis pendant le fonctionnement de l'autobus on constate qu'on peut négliger le mouvement de soubresaut (x_3), le mouvement de poussée latérale (x_2) et le mouvement de giration (θ).

On ne considère donc dans cette étude que trois degrés de liberté, le pompage (x_1) qui provoque le cisaillement

le tangage (ψ) qui provoque la flexion et la roulis (φ) qui provoque la torsion.

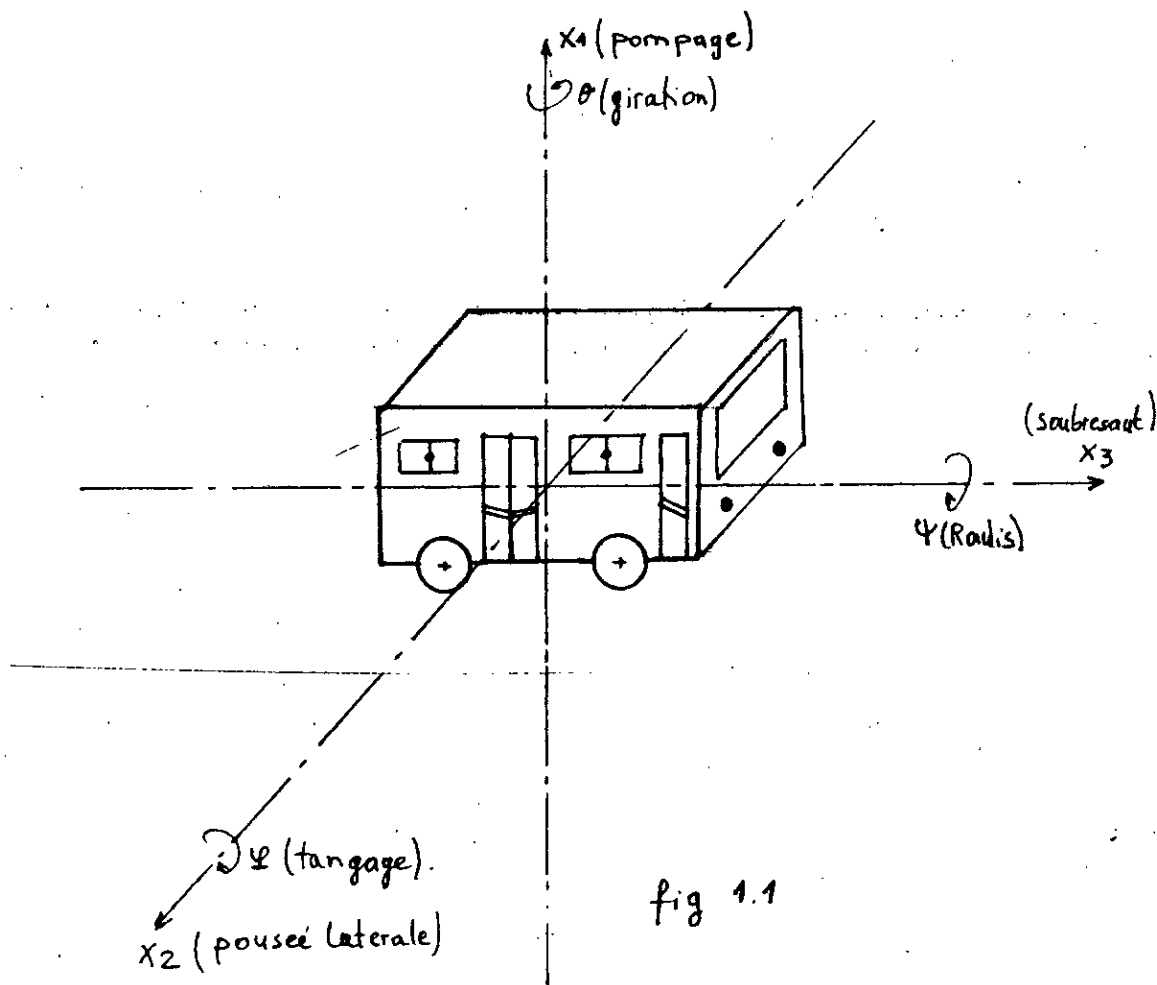


fig 1.1

(1) La terminologie de la figure 1.1 a été obtenue de [3].

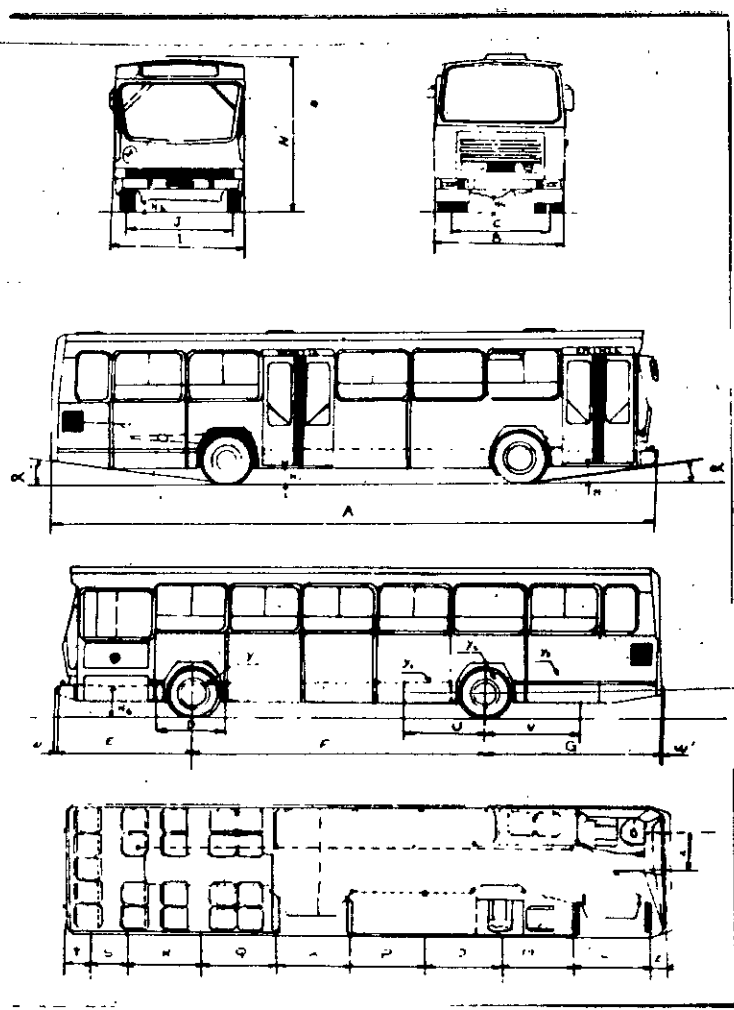


fig 1.2

Tableau 1.1

A	11522	I	2500	U	1550
B	2445	J	2063	V	1845
C	1888	K	1430	W	55
D	1340	L	1423,5	W'	55
E	1562	M	1430	X	725
F	5600	N	2920	Y	pente 1,8%
G	3360	O	1430	Y1	" 5%
H	384	P	1430	Y2	" 10%
H1	384	Q	1430	Y3	" 6%
H2	634	R	1430	Z	308,5
H3	189	S	715	α	8°
H4	247	T	435	α'	8°

Chap 2. PRINCIPE DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS

FINIS RIGIDES.

Tout objet réel possède une masse $[M]$, une rigidité $[K]$ et un amortissement interne $[C]$.

Dans le cas présent on considère que le système est conservatif, c'est à dire que les coefficients d'amortissements internes sont nuls.

Le principe de la méthode des éléments finis rigides consiste. [2]

1° À diviser l'objet réel (fig 2.1) en plusieurs éléments (fig 2.2), le nombre "n" de ces éléments élémentaires dépendra de la construction, des propriétés de l'objet initial (réel) et de la volonté motivée par la précision exigée du calcul.

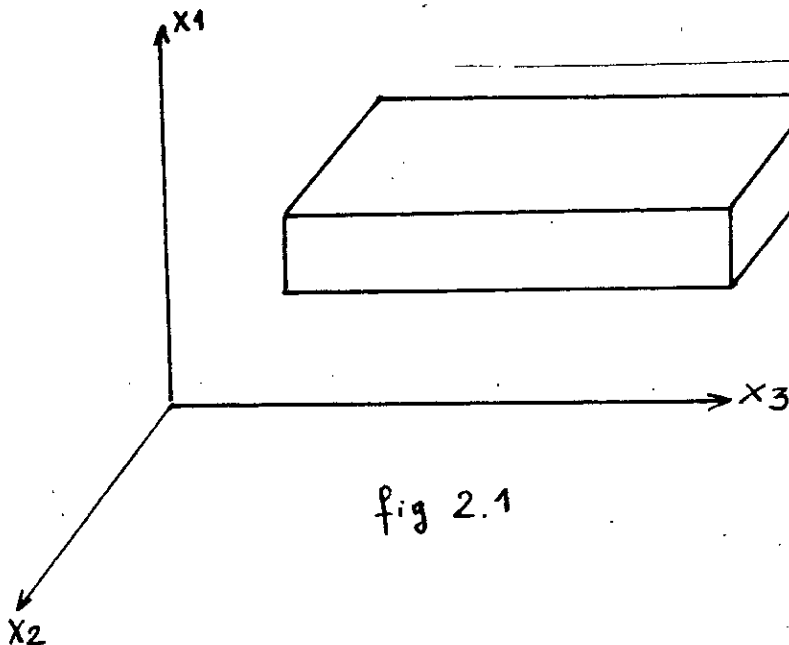


fig 2.1

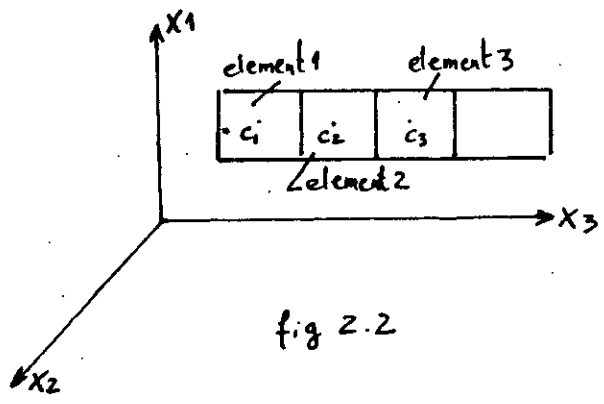


fig 2.2

2/ on suppose que les masses de ces éléments élémentaires sont concentrées en leurs centres de gravité (fig 2.3) et que chaque élément élémentaire "i" est caractérisé par son centre de gravité (c_i), sa masse (m_i), son moment d'inertie massique par rapport à l'axe x_2 (I_{2i}) et son moment d'inertie massique par rapport à l'axe x_3 (I_{3i}).

On suppose aussi que ces éléments élémentaires sont rigides, on les appellera éléments finis rigides (E.F.R)

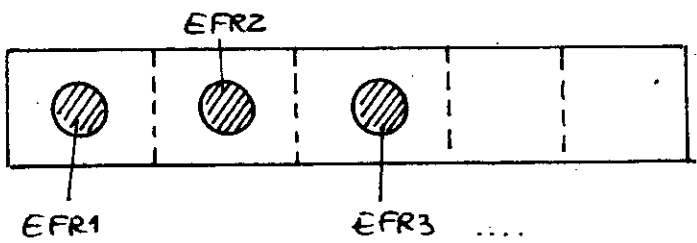


fig 2.3

3/ on admet que les masses concentrées sont assemblées à l'aide d'éléments élastiques dissipatifs (E.E.D) (fig 2.4)

le nombre de ces éléments est égal à $(n-1)$.

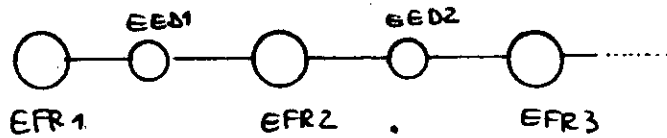


fig 2.4

En conclusion on peut dire qu'au lieu d'avoir un objet réel, on a obtenu un système de (n) éléments finis rigides qui ont des masses et des inerties mais qui n'ont pas de rigidités, assemblés à l'aide de $(n-1)$ éléments élastiques dissipatifs qui n'ont ni masse ni inertie mais des rigidités.

Vu qu'on ne considère que trois degrés de liberté les EED auront trois rigidités : cisaillement, torsion et flexion.

pour une étude plus complète il faut déterminer l'amortissement interne selon chaque degré de liberté.

chap 3 . MODELISATION DU TREILLIS

3.1 Nécessité d'une modélisation.

La structure que nous étudions est constituée d'un très grand nombre d'éléments (barres) ; il est pratiquement impossible de l'étudier sans simplification, cela dépasse le volume du travail et le temps accordé pour le sujet (En particulier il s'agit ici d'appliquer la méthode des éléments finis rigides pour étudier le treillis).

Il est donc nécessaire sinon obligatoire de modéliser cette structure et de donner un modèle qui se rapproche le plus possible de la réalité, les simplifications données au modèle dépendront de la construction et des propriétés de la structure en question.

3.2 Etablissement du modèle.

En analysant la construction du treillis, notamment les sections transversales, on peut supposer une section transversale (plan X_1-X_2) constante pour le treillis modèle. La forme géométrique de cette section dépendra de l'analyse de différentes sections du treillis réel (fig 3.2). La figure 3.1 représente un noyau du treillis réel avec les positions où on a pratiqué les sections dont on fait l'analyse.

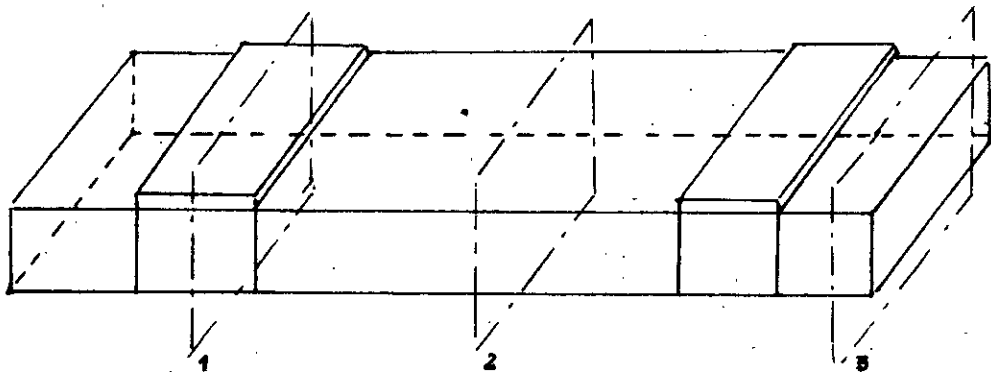


fig 3.1

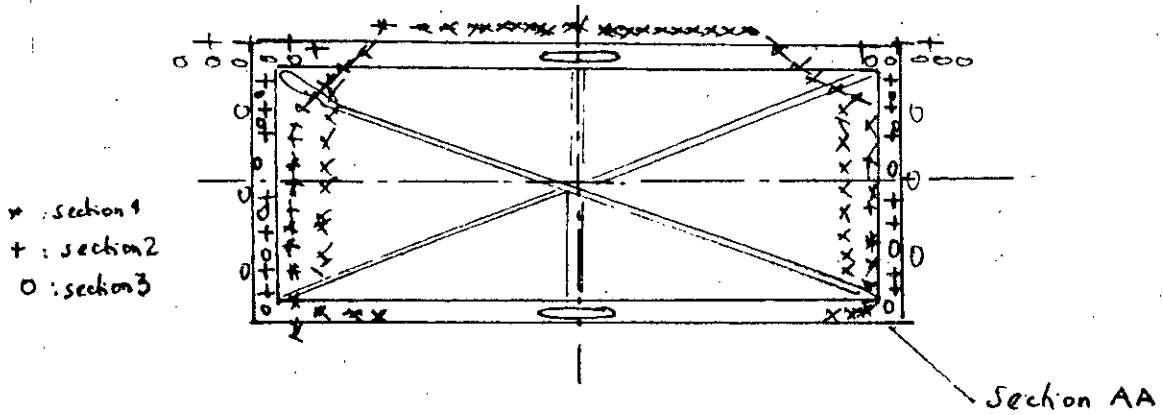


fig 3.2

En analysant les section 1, 2 et 3 de la fig 3.2 on propose la section AA (fig 3.3) comme section moyenne du treillis modele

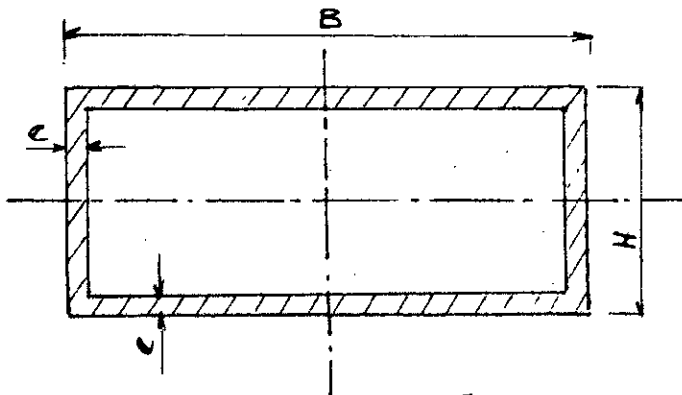


fig 3.3

Le rapport $\frac{B}{H}$ moyen (fig 3.3) est égal à 3

$$\frac{B}{H} = 3$$

3.3 Dimensionnement du treillis modèle.

La Longueur (L) du treillis modèle est égale à la Longueur du treillis réel, cad $L = 11,85$ m.

Il reste à dimensionner la section transversale du treillis modèle (Détermination de B , H et e (fig 3.3)).

Le treillis modèle doit avoir une masse égale à la masse du treillis réel, on gardera le rapport $\frac{B}{H}$ constant entre le treillis modèle et le treillis réel ($\frac{B}{H} = 3$).

Il est intéressant de dimensionner le treillis modèle en gardant les mêmes valeurs des moments d'inertie du treillis réel, pour cela on a fait des essais pour déterminer ces valeurs.

3.4 Détermination expérimentale du moment d'inertie quadratique par rapport à l'axe X_2 .

3.4.1 But de l'expérience.

L'expérience a pour but la détermination d'une valeur moyenne du moment d'inertie quadratique par rapport à l'axe X_2 , cette moyenne sert à dimensionner le treillis modèle pour calculer les fréquences propres de ce dernier.

3.4.2 Expérience.

L'expérience consiste à poser le treillis sur deux appuis simples (A et B), de le charger avec un poids P_1 (fig 3.4) et de mesurer la flèche 'f' produite par cette charge à l'aide d'un comparateur comme l'indique la figure 3.5.

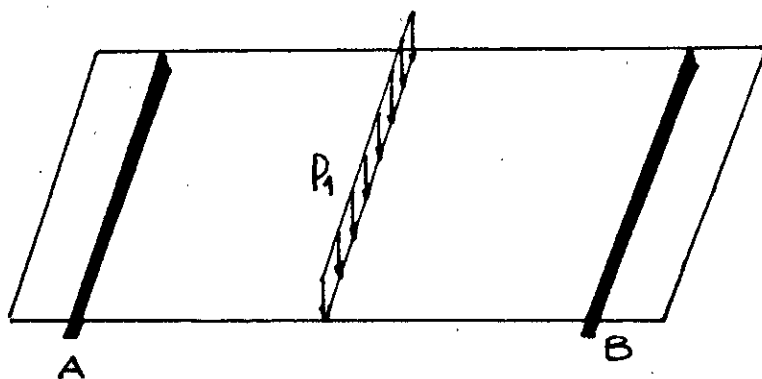


fig 3.4

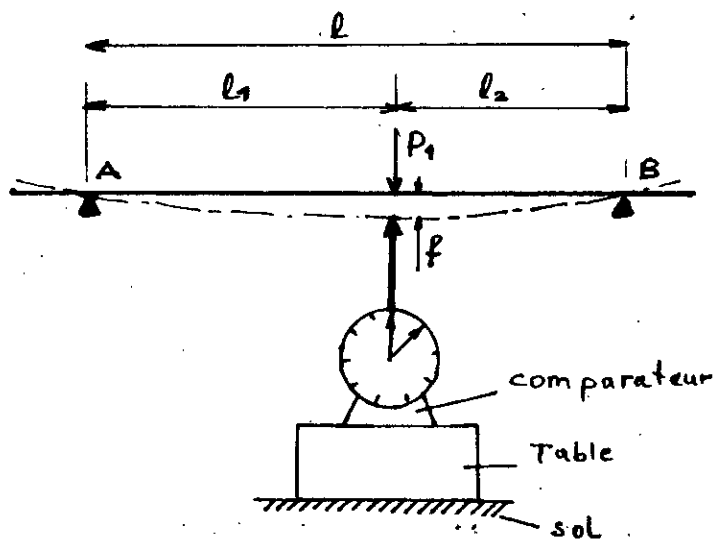


fig 3.5

3.4.3 calcul théorique du moment d'inertie par rapport à l'axe x_2 : I_2 [4]

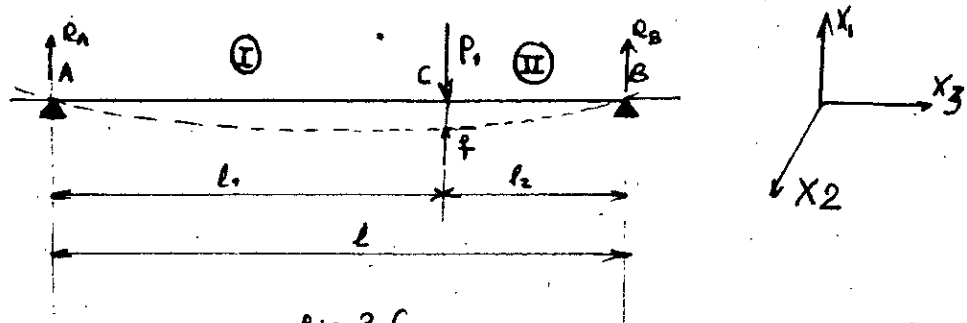


fig 3.6

L'équation différentielle de la déformée est

$$\ddot{x}_1 = - \frac{M(x_3)}{EI_2}$$

- Calcul des réactions (fig 3.6)

$$\sum M/B = 0 \Rightarrow R_A l - P_1 l_2 = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{P_1 l_2}{l}$$

symétriquement

$$R_B = \frac{P_1 l_1}{l}$$

- Moment de flexion

(1) zone I

A: origine des abscisses

$$M_I(x_3) = R_A x_3 = \frac{P_1 l_2}{l} x_3$$

(2) zone II

il est avantageux de choisir B comme origine pour

l'axe des abscisses, orienté vers la gauche.

$$M_{II}(x_3) = R_B x_3 = \frac{P_1 l_1}{l} x_3$$

- Equation différentielle

zone I

$$\ddot{x}_1 = - \frac{M(x_3)}{EI_2} = - \frac{P_1 l_2}{l EI} x_3$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}_1 = -\frac{P_1 l_2}{2 l E I_2} x_3^2 + C_1$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{P_1 l_2}{6 l E I_2} x_3^3 + C_1 x_3 + D_1$$

Zone II

$$\ddot{x}_1 = -\frac{M(x_3)}{E I_2} = -\frac{P_1 l_1}{l E I_2} x_3$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}_1 = -\frac{P_1 l_1}{2 l E I_2} x_3^2 + C_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{P_1 l_1}{6 l E I_2} x_3^3 + C_2 x_3 + D_2$$

Nous allons déterminer les constantes d'intégration, en tenant compte des conditions aux limites des deux zones.

en A et en B $x_1 = 0$ pour $x_3 = 0$

Donc $D_1 = D_2 = 0$

en C, les deux courbes élastiques se raccordent,

pour $x_{1, I} = l_1$, $x_{1, II} = l_2 \rightarrow x_{1, I} = x_{1, II}$

$$\dot{x}_{1, I} + \dot{x}_{1, II} = 0$$

les coefficients angulaires ont des signes opposés à cause des sens opposés des axes de x_3

la condition $\dot{x}_{1, I} + \dot{x}_{1, II} = 0$ conduit à

$$C_1 + C_2 = \frac{P_1 \cdot l_1 \cdot l_2}{2 E I_2}$$

La condition $x_{1, I} = x_{1, II}$ conduit à

$$C_1 l_1 - C_2 l_2 = \frac{P_1 \cdot l_1 \cdot l_2}{6 E I_2} (l_1 - l_2)$$

Il reste à résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{P_1 l_1 l_2}{2EI_2} \\ C_1 l_1 - C_2 l_2 = \frac{P_1 l_1 l_2}{6EI_2} (l_1 - l_2) \end{cases}$$

La solution de ce système est

$$C_1 = \frac{P_1 l_2 (l^2 - l_2^2)}{6EI_2}$$

$$C_2 = \frac{P_1 l_1 (l^2 - l_1^2)}{6EI_2}$$

ce qui donne comme expression pour x_{1I} et x_{1II}

$$x_{1I} = -\frac{P_1 l_2}{6EI_2} x_3^3 + \frac{P_1 l_2 (l^2 - l_2^2)}{6EI_2} x_3$$

$$x_{1II} = -\frac{P_1 l_1}{6EI_2} x_3^3 + \frac{P_1 l_1 (l^2 - l_1^2)}{6EI_2} x_3$$

ce qui nous intéresse c'est la valeur de la flèche c ad la valeur de x_{1I} en "C"

en C $x_3 = l_1$

$$f = x_{1I}(l_1) = -\frac{P_1 l_2}{6EI_2} l_1^3 + \frac{P_1 l_2 (l^2 - l_2^2)}{6EI_2} l_1$$

$$f = -\frac{P_1 l_2 l_1^3}{6EI_2} + \frac{P_1 l_1 l_2 (l + l_2)(l - l_2)}{6EI_2} \quad ; \quad l - l_2 = l_1$$

$$f = -\frac{P_1 l_2 l_1^3}{6EI_2} + \frac{P_1 l_2 (l + l_2) l_1^2}{6EI_2}$$

$$f = \frac{P_1 l_2 l_1^2 (-l_1 + l + l_2)}{6EI_2} \quad ; \quad -l_1 + l + l_2 = 2l_1$$

$$\Rightarrow \underline{f = \frac{P_1 l_1^2 l_2^2}{3EI_2}}$$

de cette dernière équation on tire I_2 en fonction de ($P_1; l_1; l_2;$
 $l; f; E$)

$$I_2 = \frac{P_1 l_1^2 l_2^2}{3 \cdot f \cdot l \cdot E}$$

3.4.4 Résultats.

l'essai a été fait pour trois positions de la charge P_1

Expérience 1

$$\left. \begin{array}{l} M_1 = 500 \text{ kg} \\ l_1 = 2250 \text{ mm} \\ l_2 = 4530 \text{ mm} \\ l = 7080 \text{ mm} \end{array} \right\} \rightarrow f = \begin{array}{l} 1,80 \text{ mm} \\ 2,10 \text{ mm} \\ 2,10 \text{ mm} \end{array} \rightarrow f_{\text{moy}} = 2 \text{ mm}$$

$$I_2 = \frac{M_1 \cdot g \cdot l_1^2 \cdot l_2^2}{3 \cdot l \cdot f \cdot E} = \frac{500 \cdot 9,8 \cdot (2250)^2 \cdot (4530)^2}{3 \cdot 7080 \cdot 2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}$$

$$\underline{I_2 = 73294104 \text{ mm}^4}$$

Expérience 2

$$\left. \begin{array}{l} M = 500 \text{ kg} \\ l_1 = 3940 \text{ mm} \\ l_2 = 3140 \text{ mm} \\ l = 7080 \text{ mm} \end{array} \right\} \rightarrow f = \begin{array}{l} 2,10 \text{ mm} \\ 2,30 \text{ mm} \\ 2,20 \text{ mm} \end{array} \rightarrow f_{\text{moy}} = 2,2 \text{ mm}$$

$$I_2 = \frac{M_1 \cdot g \cdot l_1^2 \cdot l_2^2}{3 \cdot l \cdot f \cdot E} = \frac{500 \cdot 9,8 \cdot (3940)^2 \cdot (3140)^2}{3 \cdot 7080 \cdot 2,2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}$$

$$\underline{I_2 = 76427795 \text{ mm}^4}$$

Experience 3

$$M_1 = 500 \text{ kg}$$

$$l_1 = 5500 \text{ mm}$$

$$l_2 = 1580 \text{ mm}$$

$$l = 7080 \text{ mm}$$

$$\rightarrow f = \begin{array}{|c} 1,30 \\ 1,32 \\ 1,20 \end{array} \rightarrow f_{\text{moy}} = 1,273 \text{ mm}$$

$$I_z = \frac{M_1 \cdot g \cdot l_1^2 \cdot l_2^2}{3 \cdot l \cdot f \cdot E} = \frac{500 \cdot 9,8 \cdot (5500)^2 \cdot (1580)^2}{3 \cdot 7080 \cdot 1,273 \cdot 2,1 \cdot 10^5}$$

$$I_z = 65167854 \text{ mm}^4$$

En analysant les trois valeurs de I_z calculées, on constate qu'elles sont assez proches, ce résultat nous permet d'appuyer la supposition qu'on a faite sur la constance de la section du treillis modèle.

La valeur moyenne de I_z est

$$I_{z \text{ moy}} = \frac{73294104 + 76427795 + 65167854}{3}$$

$$I_{z \text{ moy}} = 71629918 \text{ mm}^4.$$

Cette valeur ($I_{z \text{ moy}}$) servira à dimensionner le treillis modèle puisque le treillis modèle aura comme valeur du moment d'inertie quadratique par rapport à l'axe Xz cette même valeur ($I_{z \text{ moy}}$) aux erreurs près.

3.4.5 Moment d'inertie polaire.

on a essayé de mesurer le moment d'inertie polaire pour cela on a préparé l'essai suivant

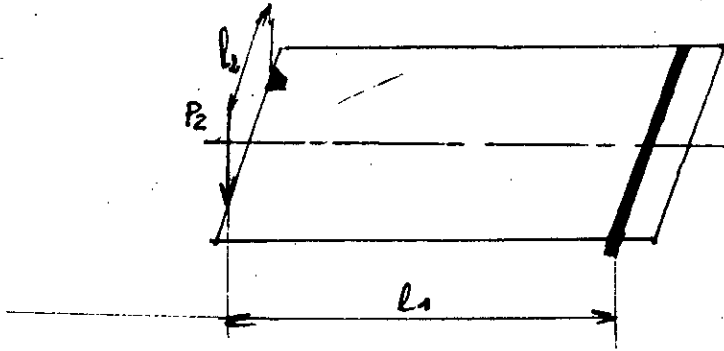


fig 3.7

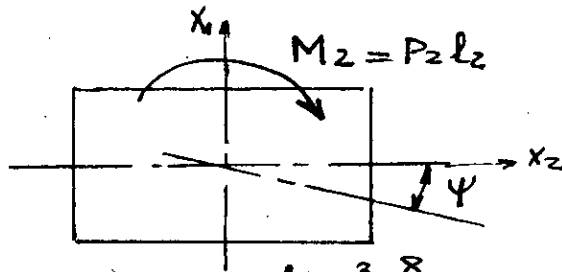


fig 3.8

d'après [1] l'angle de déformation Ψ provoqué par le moment de torsion M_z (fig 3.8) est donné

$$\text{par: } \Psi = \frac{M_t \cdot l_1}{G I_0}$$

où I_0 , moment d'inertie polaire de la section du plan $x_1 - x_2$

on a supposé que le poids P_2 (fig 3.7) provoque uniquement un moment de torsion, les résultats obtenus avec cette supposition sont absolument erronés puisque on a trouvé un moment d'inertie polaire inférieur au

moment d'inertie par rapport à l'axe X_2 (I_2)

L'erreur est sûrement dans la supposition, le poids P_2 provoque une déformation assez complexe.

En conséquence on n'a pas tenu compte du résultat de cette expérience.

3.5 Calcul des paramètres géométrique du treillis modèle.

Pour dimensionner la section du treillis modèle (fig 3.9), on doit respecter trois paramètres, la masse M du treillis réel, le moment d'inertie par rapport à l'axe X_2 déterminé précédemment et le rapport $\left(\frac{B}{H}\right)$ réel.

De ces trois contraintes on peut formuler le problème par un système de trois équations

$$\begin{cases} M = \rho \cdot L \cdot (BH - bh) \\ I_2 = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} \\ \frac{B}{H} = \left(\frac{B}{H}\right)_{\text{réel}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = B - 2e \\ h = H - 2e \end{cases}$$

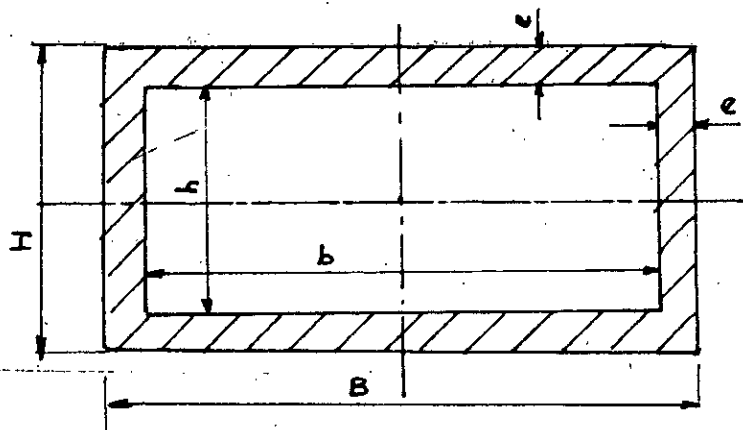


fig 3.9

04 (1) M = 900 kg.

(1) L = 11850 mm

(1) I2 = 71629918 mm^4

(1) f = 7800 10^-9 kg/mm^3.

(1) (B/H) réel = 3

En substituant ces valeurs dans le systeme (1) on obtient

$$\begin{cases} 900 = 7800 \cdot 10^{-9} \cdot 11850 (BH - bh) \\ 71629918 = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} \\ \frac{B}{H} = 3 \\ B = b + 2e \\ H = h + 2e \end{cases}$$

En effectuant les operations et en ordonnant ce dernier systeme on aura.

$$\begin{cases} BH - bh = 9737 \\ \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} = 71629918 \\ B = 3H \\ B = b + 2e \\ H = h + 2e \end{cases}$$

Avec B, H, b, h, e en [mm]

La solution de ce systeme est

$$\begin{aligned} B &= 600 \text{ mm} & b &= 587,6 \text{ mm} \\ H &= 195 \text{ mm} & h &= 182,6 \text{ mm} \\ e &= 6,2 \end{aligned}$$

L'erreur sur M, I2, B/H est inferieur a 3%

3.6 Division du treillis modèle.

D'après l'analyse de la figure 3.70 qui représente un croquis du treillis réel, on divisera le treillis modèle en cinq éléments finis rigides, cette division a été dictée de la construction du treillis réel.

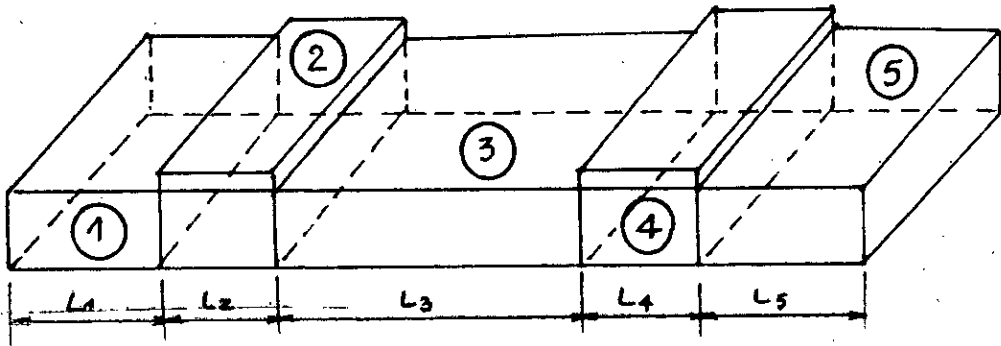


fig 3.70

les longueurs L_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) ont été obtenues du dessin de définition du treillis réel, elles sont regroupées dans le tableau 4.1

tableau 4.1

EFR	L_i [mm]
1	2250
2	1350
3	4300
4	1450
5	2500

Donc on aura cinq EFR de section transversale (fig 3.12) et de Longueurs L_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) (tableau 4.1)

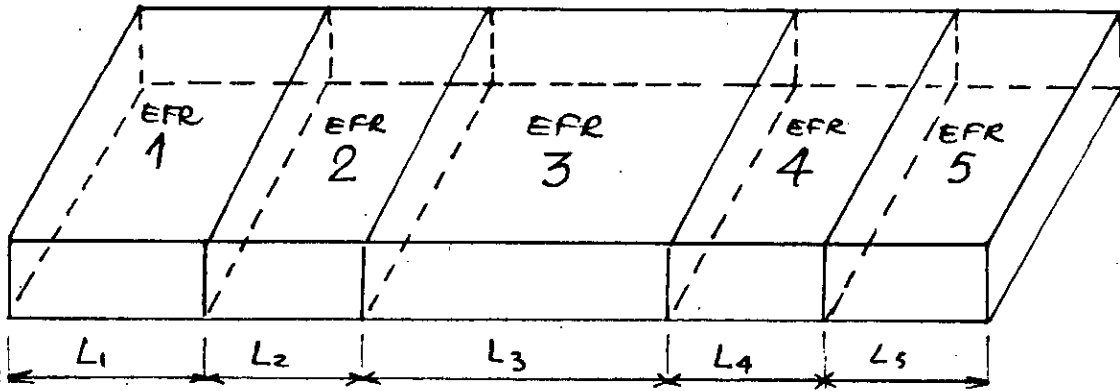


fig 3.11

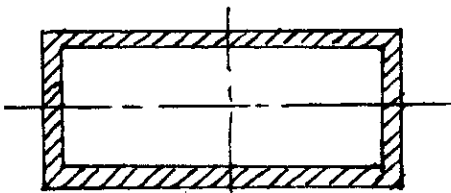


fig 3.12

La figure 3.11 représente le treillis modèle avec ces cinq EFR.

Puisque on a cinq EFR, le nombre de EED est égal à $(5-1)$ cad quatre.

Le 1^{er} EED se trouve entre l'extrémité du 1^{er} EFR et le centre de gravité du second EFR, le 2^{ème} EED se trouve entre les centres de gravité du 2^{ème} et 3^{ème} EFR, ect...

La figure 3.13 permet de déterminer les longueurs L_i ($i = 1, 2, 3, 4$) de EED

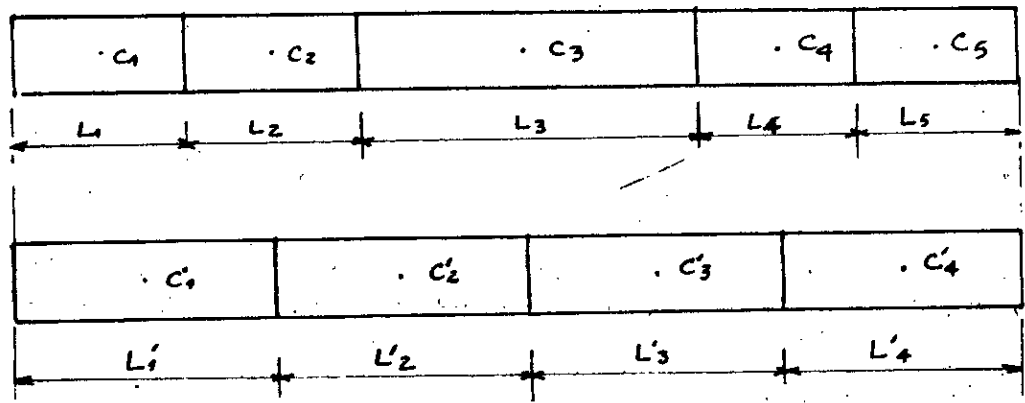


fig 3.13

$$L'_1 = L_1 + \frac{L_2}{2} \quad ; \quad L'_2 = \frac{L_2 + L_3}{2} \quad ; \quad L'_3 = \frac{L_3 + L_4}{2}$$

$$L'_4 = \frac{L_4}{2} + L_5$$

les valeurs numeriques de \$L'_i\$ (\$i=1,2,3,4\$) sont regroupees dans le tableau 4.2

tableau 4.2

EED	\$L'_i\$ [mm]
1	2925
2	2825
3	2875
4	3225

Après avoir calculé les propriétés des EED (La rigidité puisque l'amortissement est négligé) on les rapportera aux points localisés au milieu des surfaces qui séparent les EFR bien que leurs centres de gravités \$C'_1, \dots, C'_4\$ ne correspondent pas à ces surfaces.

chap 4 CALCUL DES PARAMETRES DES ÉLÉMENTS DU TREILLIS MODÈLE

4.1 Calcul des coefficients de rigidités des EED

Le calcul des rigidités des éléments élastiques dissipatifs est basé sur l'utilisation des lois de la résistance des matériaux. Pour cela, on suppose que les déformations sont petites par comparaison avec les dimensions du corps déformé et que les sections planes imaginaires pratiquées, perpendiculaires à l'axe d'un élément restent planes et perpendiculaires à l'axe au cours du processus de déformation.

Vue qu'on a pris en considération trois degrés de Liberté, le calcul des rigidités sera fait suivant l'axe x_1 (cisaillement) l'axe x_2 (flexion) et l'axe x_3 (torsion) (fig 5.1)

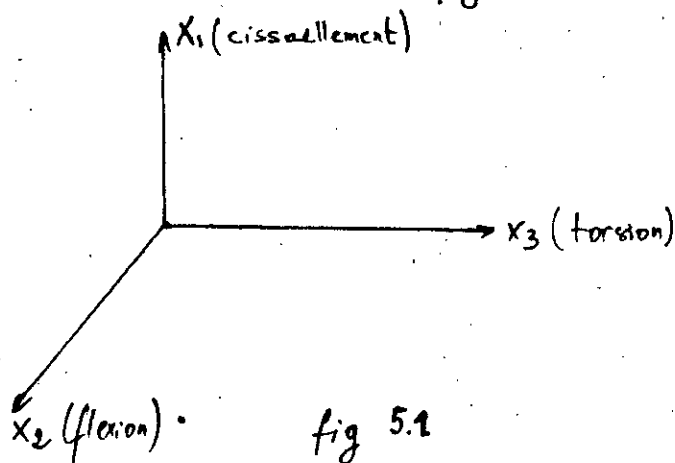


fig 5.1

4.1.1 : Rigidité d'un EED au cisaillement

Pour calculer cette rigidité, on considère que l'élément EED "n" (fig 5.2) est sollicité par un effort de cisaillement $P(t)$

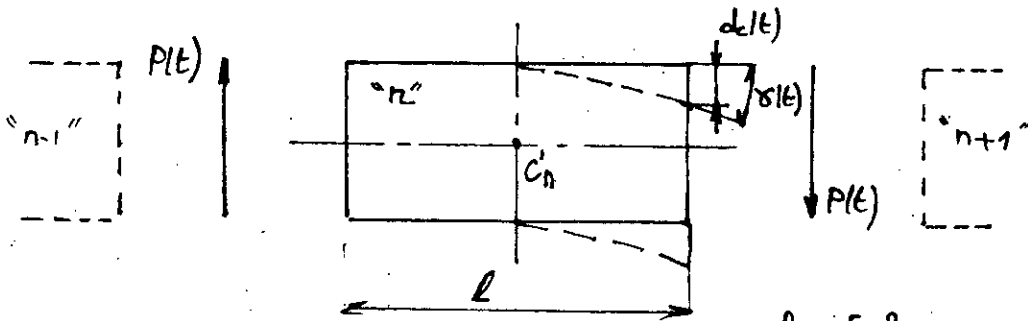


fig 5.2

Notation

C_n : centre de gravité de l'EED "n".

$P(t)$: effort de cisaillement.

$\delta(t)$: déformation angulaire.

$d_c(t)$: déplacement linéaire.

l : longueur de l'EED

La relation établie lors du cisaillement reliant la contrainte $\tau(t)$ à la déformation angulaire $\delta(t)$ peut être utilisée [1]

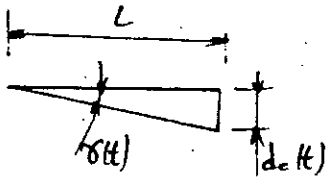
$$\tau(t) = G \cdot \delta(t) \quad (1) \quad G : \text{module de Coulomb}$$

la contrainte de cisaillement due à l'effort de cisaillement $P(t)$ appliquée à la surface F est

$$\tau(t) = \frac{P(t)}{F} \quad (2)$$

De (1) et (2) on obtient la relation

$$G \cdot \delta(t) = \frac{P(t)}{F} \quad (3)$$



$$\sin[\gamma(t)] = \frac{d_c(t)}{L}$$

d'après l'hypothèse de petite déformation on peut écrire : $\sin[\gamma(t)] \approx \gamma(t)$.

ce qui implique : $\gamma(t) = \frac{d_c(t)}{L}$ (4)

de (3) et (4) on a

$$G \cdot \frac{d_c(t)}{L} = \frac{P(t)}{F} \implies P(t) = \frac{G \cdot F}{L} d_c(t) \quad (5)$$

Rappel : La rigidité est définie comme étant la force qui doit être appliquée selon la direction du degré de liberté afin de produire un déplacement unitaire.

donc il suffit de poser le déplacement $d_c(t)$ égale à l'unité

$$d_c(t) = 1 \quad (6)$$

de (5) et (6) on déduit la rigidité au cisaillement (noté K_c)

$$K_c = \frac{G \cdot F}{L} \quad (7) \quad \text{où } K_c : \text{rigidité au cisaillement [N/m].}$$

- G : module de Coulomb $[N/m^2]$.

- F : section de l'élément $[m^2]$.

- L : Longueur de l'élément $[m]$.

4.1.2 : Rigidité de l'EED à la torsion

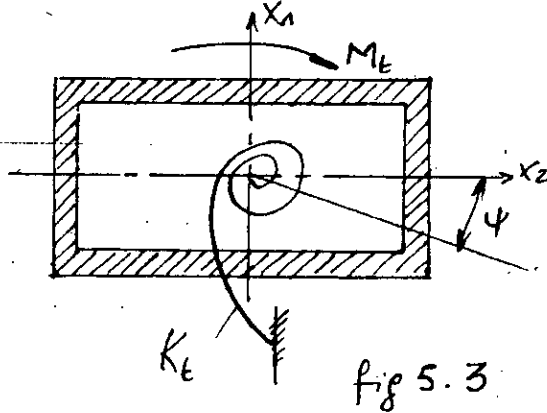
cad la rigidité suivant le degré de liberté R_3 (4).

pour cela, on considère que l'élément élastique est soumis à un moment de torsion (M_t) suivant l'axe X_3 (fig ...)

d'après [1] l'angle de déformation par unité de longueur: ψ est donné par la relation

$$\psi = \frac{M_t \cdot l}{G I_0} \quad (1) \quad \text{où } I_0 : \text{moment d'inertie polaire.}$$

$l : \text{Longueur de l'EED.}$



K_t : Rigidité de l'EED à la torsion

la rigidité à la torsion est définie par le quotient

$$K_t = \frac{M_t}{\psi} \quad (2)$$

de (1) et (2) on tire la relation

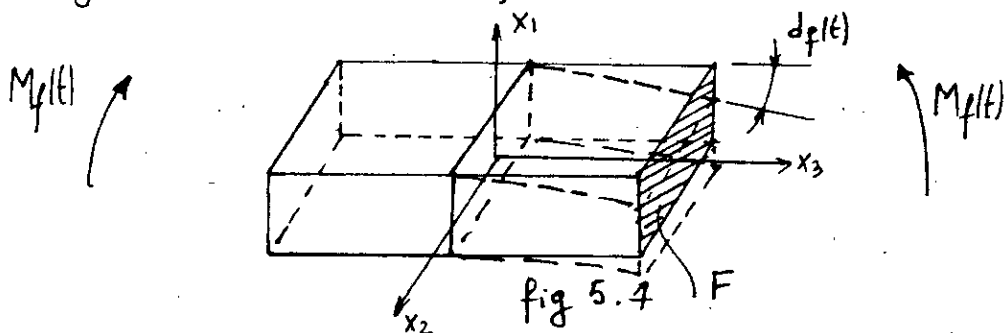
$$K_t = \frac{G I_0}{l} \quad (3) \quad \text{où } K_t : \text{rigidité à la torsion } \left[\frac{N \cdot m}{rd} \right].$$

G : module de Coulomb $[N/m^2]$.

I_0 : moment d'inertie polaire $[m^4]$.

l : longueur de l'EED $[m]$.

4.1.3. Rigidité de l'EED à la flexion



L'action du moment de flexion $M_f(t)$ provoque un déplacement angulaire $d_f(t)$ (fig 5.4)

le moment de flexion $M_f(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$M_f(t) = \int_F \sigma_f(t) \cdot x_{IF} dF \quad (1) \quad (\text{voir fig 5.5})$$

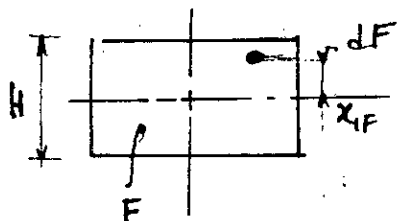


fig 5.5

- où dF : élément de surface
- F : section
- x_{IF} ordonné de dF ($E[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}]$)
- H hauteur de l'EED

dans la relation (1) $\sigma_f(t)$ représente la contrainte de flexion due à l'application du moment de flexion $M_f(t)$

D'après la théorie de résistance de matériaux on a :

$\sigma_f(t) = E \cdot \epsilon(t)$ (2) où $\epsilon(t)$: Allongement relatif résultant de la déformation angulaire $d_f(t)$ de la surface F

$$\epsilon(t) = \frac{x_{IF} \cdot d_f(t)}{L} \quad (3)$$

de (1) et (2) on a

$$M_f(t) = \int_F E \cdot \epsilon(t) \cdot x_{IF} dF \quad (4)$$

de (3) et (4) on a

$$M_f(t) = \int_F E \cdot \frac{x_{IF} d_f(t)}{L} \cdot x_{IF} dF$$

$$\Rightarrow M_f(t) = \left[\int_F x_{IF}^2 dF \right] \cdot \frac{E \cdot d_f(t)}{L} \quad (5)$$

Dans l'équation (5) on peut identifier le facteur $\int_F x_{IF}^2 dF$ à I_z (moment d'inertie quadratique par rapport à l'axe X_2)

Ce qui donne la relation

$$M_f(t) = \frac{E \cdot I_z}{l} \cdot d_f(t) \quad (6)$$

La rigidité à la flexion est définie par

$$K_f = \frac{M_f(t)}{d_f(t)} \quad (7)$$

de (6) et (7) on déduit la relation donnant le coefficient de rigidité à la flexion (K_f) en fonction de E , I_z et l .

$$K_f = \frac{E \cdot I_z}{l} \quad (8) \quad \text{ou} \quad K_f: \text{Rigidité à la flexion [N.m].}$$

- E : Module d'élasticité [N/m^2].

- I_z : Moment d'inertie/ x_2 [m^4].

- l : Longueur de l'EED [m].

4.1.4 Application numérique.

Pour cela, on calcule d'abord la section (F), le moment d'inertie quadratique par rapport à l'axe x_2 (I_z) et le moment d'inertie polaire (I_p).

Les différentes dimensions de la section du treillis modèle sont données dans la figure 5.6

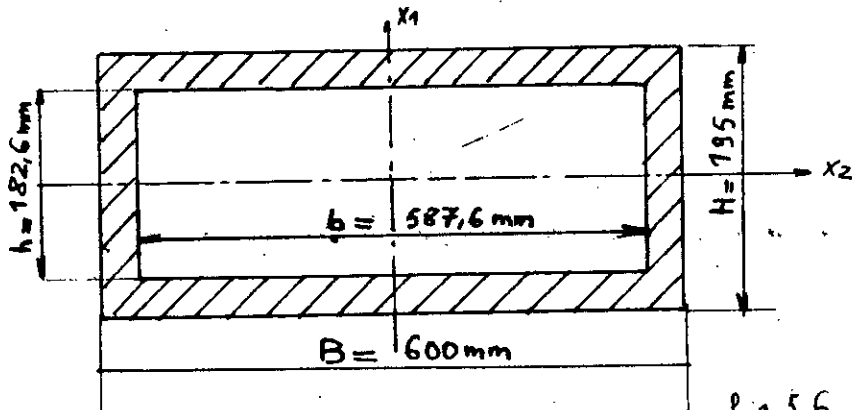


fig 5.6

- Section F:

$$F = BH - bh$$

$$F = 600.195 - 587,6.182,6$$

$$F = 9704,2 \text{ mm}^2$$

$$\underline{F = 9704,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2}$$

- Moment d'inertie quadratique par rapport à l'axe X_2 : I_2 .

$$I_2 = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}$$

$$I_2 = \frac{600.195^3}{12} - \frac{587,6.182,6^3}{12}$$

$$I_2 = 72615685,4 \text{ mm}^4$$

$$\underline{I_2 = 72615685,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4}$$

- Moment d'inertie polaire : I_p .

$$I_p = \frac{BH}{12} (B^2 + H^2) - \frac{bh}{12} (b^2 + h^2)$$

$$I_p = \frac{600.195}{12} (600^2 + 195^2) - \frac{587,6.182,6}{12} (587,6^2 + 182,6^2)$$

$$I_p = 495414811,5 \text{ mm}^4$$

$$\underline{I_p = 495414811,5 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4}$$

* Calcul des coefficients de rigidité :

D'après les relations établies précédemment on peut calculer les coefficients de rigidité pour chaque élément élastique dissipatif.

On prendra comme valeur du module d'élasticité la valeur

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

la valeur de G (module de Coulomb) est [1]

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad , \text{ pour l'acier } \nu = 0,29$$

$$G = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{2(1+0,29)} = 81395 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

* calcul des K_{ci}

$$K_{ci} = \frac{G \cdot F}{l_i} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$K_{ci} = \frac{81395 \cdot 10^6 \cdot 9704,2 \cdot 10^{-6}}{l_i}$$

$$K_{ci} = \frac{789527262,2}{l_i} \quad \text{avec } l_i \text{ (m)}$$

* calcul des K_{fi}

$$K_{fi} = \frac{E \cdot I_z}{l_i} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$K_{fi} = \frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 72615685,4 \cdot 10^{-12}}{l_i}$$

$$K_{fi} = \frac{15249293,93}{l_i} \quad \text{avec } l_i \text{ (m)}$$

* calcul des K_{ti}

$$K_{ti} = \frac{G \cdot I_p}{l_i} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$K_{ti} = \frac{81395 \cdot 10^6 \cdot 495414811,5 \cdot 10^{-12}}{l_i}$$

$$K_{ti} = \frac{40,324289 \cdot 10^6}{l_i} \quad \text{avec } l_i \text{ (m)}$$

les valeurs des différents coefficients de rigidité sont regroupés dans le tableau 5.1

Tableau 5.1

EED_i	l_i [m]	$K_{ci} \cdot 10^{-6}$ [N/m]	$K_{pi} \cdot 10^{-6}$ [N.m]	$K_{\theta i} \cdot 10^{-6}$ [N.m/rd]
1	2,925	269,9	5,2	13,8
2	2,825	279,5	5,4	14,3
3	2,875	274,6	5,3	14,0
4	3,225	244,8	4,7	12,5

4.2 Calcul des éléments d'inertie:

4.2.1 Calcul des masses des EFR

soit m_i la masse de l'élément fini rigide i^e , $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

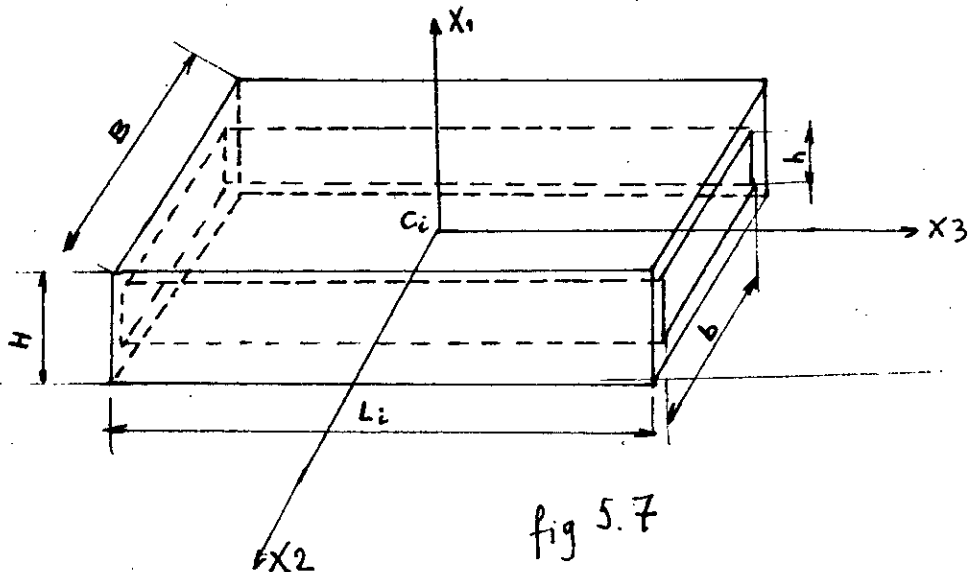


fig 5.7

pour calculer m_i , on calculera d'abord la masse m_{pi} (masse de l'EFR considérée comme plein) et la m_{vi} (masse du vide dans l'EFR), on aura besoin de ces masses pour déterminer les moments d'inertie massiques par rapport à l'axe X_2 et à l'axe X_3 .

d'après les notations de la fig 5.7 on a

$$m_{pi} = \rho \cdot L_i \cdot B \cdot H$$

$$m_{pi} = 7800 \cdot L_i \cdot 0,600 \cdot 0,195 \quad \text{avec } L_i \text{ (m)}$$

$$m_{pi} = 912,6 L_i \text{ [kg]}$$

$$m_{vi} = \rho \cdot L_i \cdot b \cdot h$$

$$m_{vi} = 7800 \cdot L_i \cdot 0,5876 \cdot 0,1826 \quad \text{avec } L_i \text{ (m)}$$

$$m_{vi} = 836,9 L_i \text{ [kg]}$$

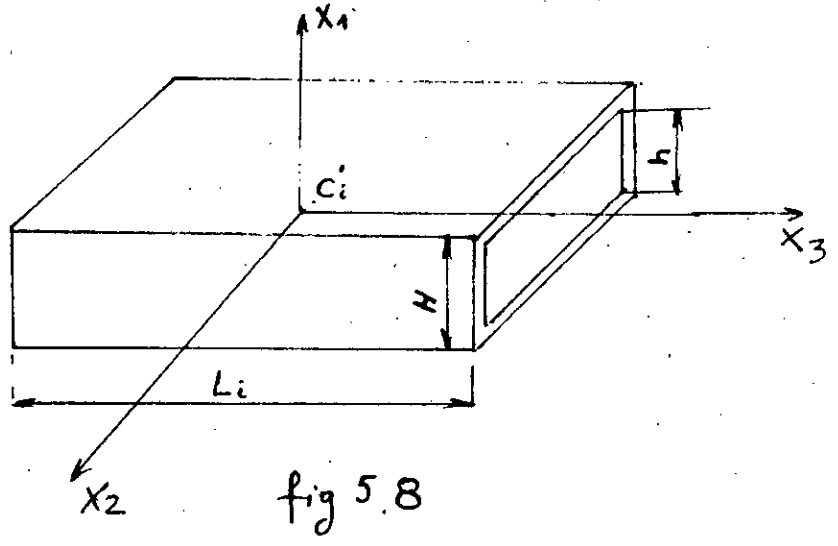
$$m_i = m_{pi} - m_{vi}$$

le tableau 5.2 donne les différentes valeurs de m_i , m_{vi} , m_{pi}

Tableau 5.2

EFR _i	L_i [m]	m_{pi} [Kg]	m_{vi} [kg]	m_i [kg]
1	2,25	2053,35	1883,02	170,33
2	1,35	1232,01	1129,81	102,20
3	4,30	3924,18	3598,67	325,51
4	1,45	1323,27	1213,50	109,77
5	2,50	2281,50	2092,25	189,25

4.2.2 Calcul des moments d'inertie massique / $x_2 : I_{zi}$



le moment d'inertie massique / $x_2 : I_{zi}$ peut être calculer à partir de relation: [10]

$$I_{zi} = \frac{m_{pi}}{12} (L_i^2 + H^2) - \frac{m_{vi}}{12} (L_i^2 + h^2)$$

- où - $H = 0,195 \text{ m}$, $h = 0,1826 \text{ m}$
- les masses m_{pi} et m_{vi} ont été calculées dans le 4.2.1
- L_i (Longueur de l'EFR) en mètres

le tableau 5.3 fournit les valeurs I_{zi} pour chaque EFR

Tableau 5.3

EFR	L_i [m]	m_{pi} [kg]	m_{vi} [kg]	I_{zi} [kg.m ²]
1	2,25	2053,35	1883,02	73,13
2	1,35	1232,01	1129,81	16,29
3	4,30	3924,18	3598,67	503,99
4	1,45	1323,27	1213,50	20,05
5	2,50	2281,50	2092,25	99,98

4.2.3 Calcul des moments d'inertie massique / X_3 : I_{3i}

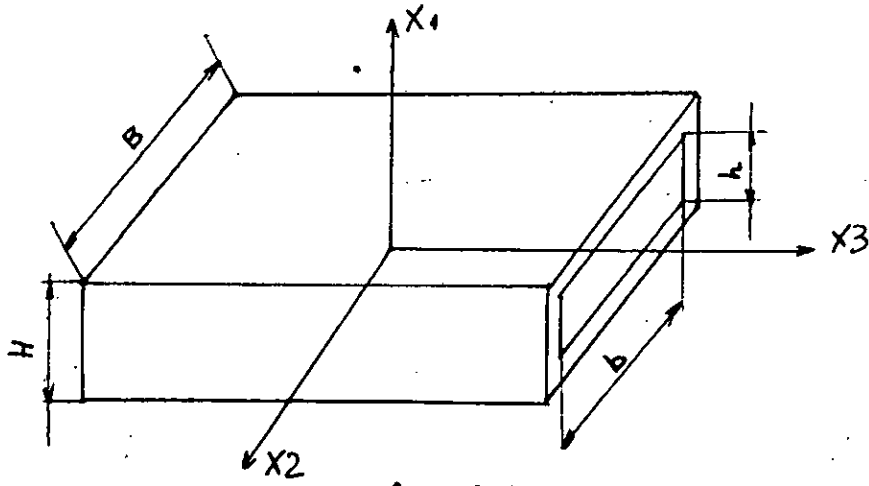


fig 5.9

La relation donnant la valeur du moment d'inertie massique par rapport à l'axe X_3 (I_{3i}) d'un EFR "i" est [10]

$$I_{3i} = \frac{m_{pi}}{12} (B^2 + H^2) - \frac{m_{vi}}{12} (b^2 + h^2).$$

où $B = 0,600 \text{ m}$, $b = 0,5876 \text{ m}$
 $H = 0,195 \text{ m}$, $h = 0,1826 \text{ m}$

les valeurs de I_{3i} sont regroupés dans le tableau 5.4.

Tableau 5.4

EFR	m_{pi} [kg]	m_{vi} [kg]	I_{3i} [kg.m ²]
1	2053,35	1883,02	8,69
2	1232,01	1129,81	5,22
3	3924,18	3598,67	16,62
4	1323,27	1213,50	5,60
5	2281,50	2092,25	9,66

4.2.4. Tableau récapitulatif.

Le tableau 5.5 nous donne les différentes valeurs d'inertie ($m_i; I_{zi}; I_{zi}$) pour chaque élément fini rigide "i" $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Tableau 5.5

EFR _i	m_i [kg]	I_{zi} [kgm ²]	I_{zi} [kgm ²]
1	170,33	73,13	8,69
2	102,20	16,29	5,22
3	325,51	503,99	16,62
4	109,77	20,05	5,60
5	189,25	99,98	9,66

chap 5 ETABLISSEMENT DU SYSTEME
D'EQUATIONS DIFFERENCIELLES.

Après avoir calculé les facteurs d'inertie des EFR et les facteurs de rigidité des EED, on va établir le système d'équations différentielles en utilisant l'équation générale de la dynamique; on considère que les vibrations provoquent des faibles déplacements.

5.1 Equations de LAGRANGE

Pour déterminer les équations du mouvement d'un système en coordonnées généralisées, nous allons utiliser l'équation générale de la dynamique qui est donnée par:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^{in} = 0 \quad (1)$$

où $\sum \delta A_k^a$: somme des travaux élémentaires de toutes les forces actives appliquées.

$\sum \delta A_k^{in}$: somme des travaux élémentaires de toutes les forces d'inertie.

Supposons que le système possède "s" degrés et que sa position soit donnée par les coordonnées généralisées.

Le terme $\sum \delta A_k^a$ peut s'écrire sous la forme

$$\sum \delta A_k^a = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s \quad (2)$$

de même

$$\sum \delta A_k^{in} = Q_1^{in} \delta q_1 + Q_2^{in} \delta q_2 + \dots + Q_s^{in} \delta q_s \quad (3)$$

$$\text{Avec } Q_1^{in} = \sum F_k^{in} \frac{\partial r_k}{\partial q_1}; \quad Q_2^{in} = \sum F_k^{in} \frac{\partial r_k}{\partial q_2}; \dots \quad (4)$$

où ∂r_k : accroissement élémentaire du rayon vecteur du point d'application de la force F_k .

En portant les valeurs (2) et (3) dans l'équation (1) on trouve

$$(Q_1 + Q_1^{in}) \delta q_1 + (Q_2 + Q_2^{in}) \delta q_2 + \dots + (Q_s + Q_s^{in}) \delta q_s = 0 \quad (5)$$

Tous les $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ étant indépendants entre eux, cette dernière équation n'est vérifiée que si chacun des coefficients de $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ est égale à zéro, par conséquent

$$Q_1 + Q_1^{in} = 0, \quad Q_2 + Q_2^{in} = 0, \quad \dots \quad Q_s + Q_s^{in} = 0 \quad (6)$$

les équations établies peuvent être directement utilisées pour la résolution des problèmes de la dynamique, pourtant leur usage sera beaucoup plus facile si l'on exprime les forces d'inertie généralisées y figurant à l'aide de l'énergie cinétique du système.

La force d'inertie d'un point quelconque du système étant :

$$F_k^{in} = -m_k a_k = -m_k \frac{dV_k}{dt}$$

où a_k : accélération.

V_k : vitesse du point du système dont le rayon vecteur est r_k .

de (4) on a

$$-Q_1^{in} = \sum m_k \frac{dV_k}{dt} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_1} \quad (7)$$

$$\frac{dV_k}{dt} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(V_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_1} \right) - V_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_k}{\partial q_1} \right) \quad (8)$$

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} = r_k = V_k \quad ; \quad \frac{d q_1}{dt} = \dot{q}_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_k}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial r_k}{\partial t} \right) = \frac{\partial V_k}{\partial q_1} \quad (9)$$

$$\frac{\partial r_k}{\partial q_1} = \frac{\partial \dot{r}_k}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial v_k}{\partial \dot{q}_1} \quad (10) \quad \text{Règle de l'hôpital.}$$

En utilisant les relations (9) et (10) nous pouvons écrire l'égalité (8) comme suite :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_1} &= \frac{d}{dt} \left(v_k \cdot \frac{\partial v_k}{\partial \dot{q}_1} \right) - v_k \frac{\partial v_k}{\partial q_1} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v_k^2}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial v_k^2}{\partial q_1} \end{aligned}$$

Remarquant que la masse est une grandeur constante et que la somme des dérivées est égale à la dérivée de la somme, on obtient pour l'expression (7)

$$\begin{aligned} -Q_1^{in} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\sum \frac{m_k v_k^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\sum \frac{m_k v_k^2}{2} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} \end{aligned}$$

où $T = \sum \left(\frac{m_k v_k^2}{2} \right)$ est l'énergie cinétique; des expressions analogues s'obtiennent pour toutes les autres forces d'inertie généralisées en définitive les égalités (6) deviennent

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 \\ \dots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \end{cases} \quad (11)$$

les équations (11) sont les équations différentielles du mouvement d'un système en coordonnées généralisées ou équations de Lagrange.

cas des forces potentielles : Dans ce cas les forces actives (Q_i) s'obtiennent de la relation

$$Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (12) \quad \text{ou } V \text{ est l'énergie potentielles du système.}$$

Donc si toutes les forces agissant sur le système sont potentielles en se servant de la formule (12), on peut écrire la première équation du système (11)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_1} = 0 \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_1} = 0 \right).$$

Introduisons la fonction $L = T - V$

la fonction "L" des coordonnées généralisées et des vitesses généralisées égale à la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système est appelée fonction de Lagrange.

les équations de Lagrange dans le cas des forces potentielles sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

Le résultat obtenu rend évident le fait que pour déterminer l'état d'un système mécanique soumis à l'action des forces potentielles il suffit de donner seule la fonction de Lagrange, car connaissant cette fonction on peut écrire les équations différentielles du mouvement du système.

Le système (12) peut être écrit sous la forme d'une seule équation

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (13) \quad i = 1, 2, \dots, s$$

Avec $L = T - V$

(13) peut s'écrire

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad (14)$$

Vu que l'énergie cinétique prend une forme quadratique des vitesses généralisées

$$T = \frac{1}{2} \sum b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad \text{où } b_{jk} : \text{facteur d'inertie.}$$

le terme $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ de l'équation (14) sera égal à zéro

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0 \quad (15)$$

De l'équation (14) et (15) on tire l'équation de Lagrange simplifiée

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad (16)$$

On utilisera cette dernière équation pour établir le système d'équations différentielles, pour cela on calculera d'abord les énergies (cinétique et potentielle) et on les dérivera, puis on substituera ces résultats dans (16).

5.2 Energie du système.

Soit le modèle établi (fig 5.1) qui est composé de cinq EFR de masse : m_i , de moment d'inertie massique par-rapport à l'axe x_2 : I_{2i} et de moment d'inertie massique par rapport à l'axe x_3 : I_{3i} ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

le modèle comporte quatre EED dont les coefficients d'élasticité sont : K_{c_j} ; K_{f_j} , K_{t_j} ($j = 1, 2, 3, 4$).

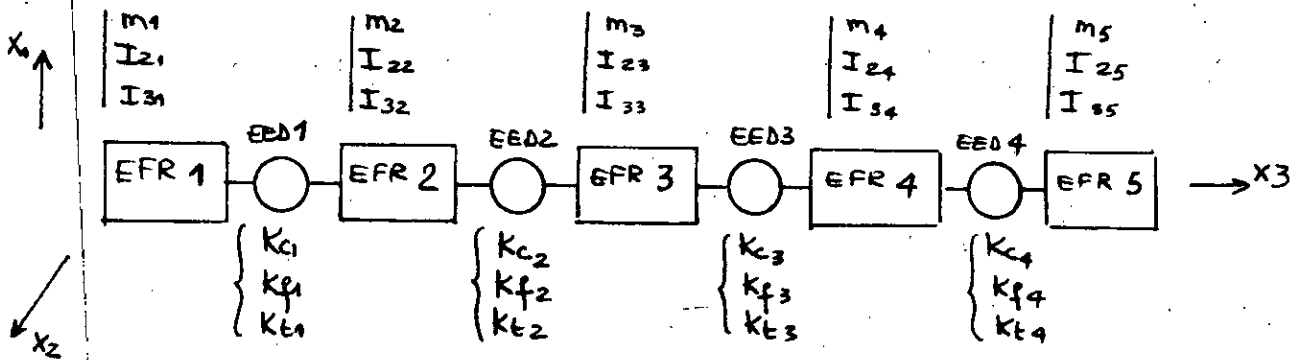


fig 5.1

* Energie cinétique : T

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 + \frac{1}{2} m_4 \dot{x}_4^2 + \frac{1}{2} m_5 \dot{x}_5^2$$

$$+ \frac{1}{2} I_{21} \dot{\psi}_1^2 + \frac{1}{2} I_{22} \dot{\psi}_2^2 + \frac{1}{2} I_{23} \dot{\psi}_3^2 + \frac{1}{2} I_{24} \dot{\psi}_4^2 + \frac{1}{2} I_{25} \dot{\psi}_5^2$$

$$+ \frac{1}{2} I_{31} \dot{\psi}_1^2 + \frac{1}{2} I_{32} \dot{\psi}_2^2 + \frac{1}{2} I_{33} \dot{\psi}_3^2 + \frac{1}{2} I_{34} \dot{\psi}_4^2 + \frac{1}{2} I_{35} \dot{\psi}_5^2$$

* Energie potentielle : V

l'énergie potentielle est l'énergie de déformations des éléments élastiques (EED) $i = 1, 2, 3, 4$.

Pour cela on calcul pour chaque EED: son énergie potentielle V_i .

$$V_4 = \frac{1}{2} K_{C4} (\lambda_8 - \lambda_7)^2 + \frac{1}{2} K_{f4} (y_5 - y_4)^2 + \frac{1}{2} K_{E4} (y_5 - y_4)^2$$

$$\lambda_7 = x_4 + f_{s2} y_4$$

$$\lambda_8 = x_5 - f_{s1} y_5$$

$$V_3 = \frac{1}{2} K_{C3} (\lambda_6 - \lambda_5)^2 + \frac{1}{2} K_{f3} (y_4 - y_3)^2 + \frac{1}{2} K_{E3} (y_4 - y_3)^2$$

$$\lambda_5 = x_3 + f_{s2} y_3$$

$$\lambda_6 = x_4 - f_{s1} y_4$$

$$V_2 = \frac{1}{2} K_{C2} (\lambda_4 - \lambda_3)^2 + \frac{1}{2} K_{f2} (y_3 - y_2)^2 + \frac{1}{2} K_{E2} (y_3 - y_2)^2$$

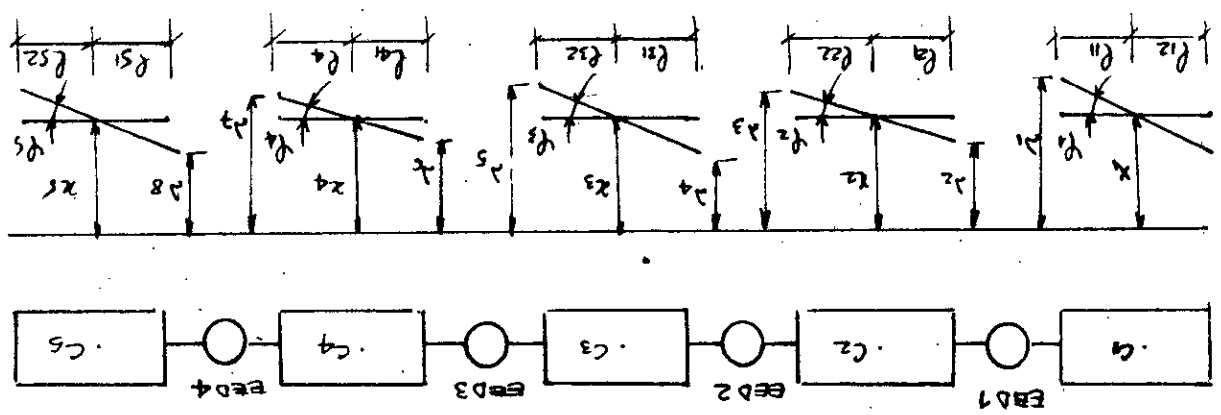
$$\lambda_3 = x_2 + f_{s2} y_2$$

$$\lambda_4 = x_3 - f_{s1} y_3$$

$$V_1 = \frac{1}{2} K_{C1} (\lambda_2 - \lambda_1)^2 + \frac{1}{2} K_{f1} (y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2} K_{E1} (y_2 - y_1)^2$$

$$\lambda_1 = x_1 + f_{s1} y_1$$

$$\lambda_2 = x_2 - f_{s2} y_2$$



l'énergie potentielle du système : V

$$V = \sum_{i=1}^4 V_i$$

$$V = \frac{1}{2} K_{c1} (\Delta_2 - \Delta_1)^2 + \frac{1}{2} K_{c2} (\Delta_4 - \Delta_3)^2 + \frac{1}{2} K_{c3} (\Delta_6 - \Delta_5)^2$$

$$+ \frac{1}{2} K_{c4} (\Delta_8 - \Delta_7)^2 + \frac{1}{2} K_{f1} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} K_{f2} (\varphi_3 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} K_{f3} (\varphi_4 - \varphi_3)^2$$

$$+ \frac{1}{2} K_{f4} (\varphi_5 - \varphi_4)^2 + \frac{1}{2} K_{t1} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} K_{t2} (\varphi_3 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} K_{t3} (\varphi_4 - \varphi_3)^2$$

$$+ \frac{1}{2} K_{t4} (\varphi_5 - \varphi_4)^2.$$

En remplaçant les Δ_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) par leurs expressions, on obtient l'expression finale de V.

$$V = \frac{1}{2} K_{c1} [(\chi_2 - l_{21} \varphi_2) - (\chi_1 + l_{11} \varphi_1)]^2 + \frac{1}{2} K_{c2} [(\chi_3 - l_{31} \varphi_3) - (\chi_2 + l_{22} \varphi_2)]^2$$

$$+ \frac{1}{2} K_{c3} [(\chi_4 - l_{41} \varphi_4) - (\chi_3 + l_{32} \varphi_3)]^2 + \frac{1}{2} K_{c4} [(\chi_5 - l_{51} \varphi_5) - (\chi_4 + l_{42} \varphi_4)]^2$$

$$+ \frac{1}{2} K_{f1} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} K_{f2} (\varphi_3 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} K_{f3} (\varphi_4 - \varphi_3)^2 + \frac{1}{2} K_{f4} (\varphi_5 - \varphi_4)^2$$

$$+ \frac{1}{2} K_{t1} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} K_{t2} (\varphi_3 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} K_{t3} (\varphi_4 - \varphi_3)^2 + \frac{1}{2} K_{t4} (\varphi_5 - \varphi_4)^2.$$

5.3 Dérivées des énergies:

* calcul des $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)$ ($i = 1, 2, \dots, 15$)

pour $q_i = \chi_1$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\chi}_1} \right) = m_1 \ddot{\chi}_1$

χ_2 : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\chi}_2} \right) = m_2 \ddot{\chi}_2$

χ_3 : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\chi}_3} \right) = m_3 \ddot{\chi}_3$

χ_4 : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\chi}_4} \right) = m_4 \ddot{\chi}_4$

χ_5 : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\chi}_5} \right) = m_5 \ddot{\chi}_5$

pour $q_i = \varphi_1$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = I_{z1} \ddot{\varphi}_1$

φ_2 : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = I_{z2} \ddot{\varphi}_2$

$$\Psi_3 : \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}_3} \right) = I_{23} \ddot{\Psi}_3.$$

$$\Psi_4 : \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}_4} \right) = I_{24} \ddot{\Psi}_4.$$

$$\Psi_5 : \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}_5} \right) = I_{25} \ddot{\Psi}_5.$$

pour $q_i = \Psi_1 : \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}_1} \right) = I_{31} \ddot{\Psi}_1.$

$$\Psi_2 : \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}_2} \right) = I_{32} \ddot{\Psi}_2.$$

$$\Psi_3 : \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}_3} \right) = I_{33} \ddot{\Psi}_3.$$

$$\Psi_4 : \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}_4} \right) = I_{34} \ddot{\Psi}_4.$$

$$\Psi_5 : \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}_5} \right) = I_{35} \ddot{\Psi}_5.$$

* Calcul des $\frac{\partial V}{\partial q_i}$; $i = 1, 2, \dots, 15$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = Kc_1 (x_1 + l_{11} \Psi_1 - x_2 + l_{21} \Psi_2).$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = Kc_1 (x_2 - l_{21} \Psi_1 - x_1 - l_{11} \Psi_1) + Kc_2 (x_2 + l_{22} \Psi_2 - x_3 + l_{31} \Psi_3).$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} = Kc_2 (x_3 - l_{31} \Psi_3 - x_2 - l_{22} \Psi_2) + Kc_3 (x_3 + l_{32} \Psi_3 - x_4 + l_{41} \Psi_4).$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_4} = Kc_3 (x_4 - l_{41} \Psi_4 - x_3 - l_{32} \Psi_3) + Kc_4 (x_4 + l_{42} \Psi_4 - x_5 + l_{51} \Psi_5).$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_5} = Kc_4 (x_5 - l_{51} \Psi_5 - x_4 - l_{42} \Psi_4).$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Psi_1} = Kc_1 l_{11} (x_1 + l_{11} \Psi_1 - x_2 + l_{21} \Psi_2) + Kf_1 (\Psi_1 - \Psi_2).$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Psi_2} = Kc_1 l_{21} (x_1 + l_{11} \Psi_1 - x_2 + l_{21} \Psi_2) + Kc_2 l_{22} (x_2 + l_{22} \Psi_2 - x_3 + l_{31} \Psi_3) + Kf_1 (\Psi_2 - \Psi_1) + Kf_2 (\Psi_2 - \Psi_3).$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Psi_3} = Kc_2 l_{31} (x_2 + l_{22} \Psi_2 - x_3 + l_{31} \Psi_3) + Kc_3 l_{32} (x_3 + l_{32} \Psi_3 - x_4 + l_{41} \Psi_4) + Kf_2 (\Psi_3 - \Psi_2) + Kf_3 (\Psi_3 - \Psi_4).$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Psi_4} = Kc_3 l_{41} (x_3 + l_{32} \Psi_3 - x_4 + l_{41} \Psi_4) + Kc_4 l_{42} (x_4 + l_{42} \Psi_4 - x_5 + l_{51} \Psi_5) + Kf_3 (\Psi_4 - \Psi_3) + Kf_4 (\Psi_4 - \Psi_5).$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_5} = K_{c4} l_{s1} (x_4 + l_{a2} \psi_4 - x_5 + l_{s1} \psi_5) + K_{f4} (\psi_5 - \psi_4).$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_1} = K_{t1} (\psi_1 - \psi_2).$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_2} = K_{t2} (\psi_2 - \psi_1) + K_{t2} (\psi_2 - \psi_3).$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_3} = K_{t2} (\psi_3 - \psi_2) + K_{t3} (\psi_3 - \psi_4).$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_4} = K_{t3} (\psi_4 - \psi_3) + K_{t4} (\psi_4 - \psi_5).$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_5} = K_{t4} (\psi_5 - \psi_4).$$

5.4 Equations du mouvement :

Comme on l'a indiqué dans le 5.1, les équations différentielles du mouvement sont celles de Lagrange.

Equation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0.$$

En remplaçant les termes $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)$ et $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ par leurs expressions pour chaque "q_i", on obtient le système suivant.

$$m_1 \ddot{x}_1 + K_{c1} (x_1 + l_{11} \psi_1 - x_2 + l_{21} \psi_2) = 0.$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + K_{c1} (x_2 - l_{21} \psi_2 - x_1 - l_{11} \psi_1) + K_{c2} (x_2 + l_{22} \psi_2 - x_3 + l_{31} \psi_3) = 0.$$

$$m_3 \ddot{x}_3 + K_{c2} (x_3 - l_{31} \psi_3 - x_2 - l_{22} \psi_2) + K_{c3} (x_3 + l_{32} \psi_3 - x_4 + l_{41} \psi_4) = 0.$$

$$m_4 \ddot{x}_4 + K_{c3} (x_4 - l_{41} \psi_4 - x_3 - l_{32} \psi_3) + K_{c4} (x_4 + l_{42} \psi_4 - x_5 + l_{s1} \psi_5) = 0.$$

$$m_5 \ddot{x}_5 + K_{c4} (x_5 - l_{s1} \psi_5 - x_4 - l_{42} \psi_4) = 0.$$

$$I_{z1} \ddot{\psi}_1 + K_{c1} l_{11} (x_1 + l_{11} \psi_1 - x_2 + l_{21} \psi_2) + K_{f1} (\psi_1 - \psi_2) = 0.$$

$$I_{z2} \ddot{\psi}_2 + K_{c1} l_{21} (x_1 + l_{11} \psi_1 - x_2 + l_{21} \psi_2) + K_{c2} l_{22} (x_2 + l_{22} \psi_2 - x_3 + l_{31} \psi_3)$$

$$+ K_{f1} (\psi_2 - \psi_1) + K_{f2} (\psi_2 - \psi_3) = 0.$$

$$I_{23} \ddot{\varphi}_3 + K_{c2} l_{31} (\ddot{x}_2 + l_{22} \ddot{\varphi}_2 - \ddot{x}_3 + l_{31} \ddot{\varphi}_3) + K_{c3} l_{32} (\ddot{x}_3 + l_{32} \ddot{\varphi}_3 - \ddot{x}_4 + l_{41} \ddot{\varphi}_4) + K_{f2} (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) + K_{f3} (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_4) = 0$$

$$I_{24} \ddot{\varphi}_4 + K_{c3} l_{41} (\ddot{x}_3 + l_{32} \ddot{\varphi}_3 - \ddot{x}_4 + l_{41} \ddot{\varphi}_4) + K_{c4} l_{42} (\ddot{x}_4 + l_{42} \ddot{\varphi}_4 - \ddot{x}_5 + l_{51} \ddot{\varphi}_5) + K_{f3} (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_3) + K_{f5} (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_5) = 0$$

$$I_{25} \ddot{\varphi}_5 + K_{c4} l_{51} (\ddot{x}_4 + l_{42} \ddot{\varphi}_4 - \ddot{x}_5 + l_{51} \ddot{\varphi}_5) + K_{f4} (\dot{\varphi}_5 - \dot{\varphi}_4) = 0$$

$$I_{31} \ddot{\varphi}_1 + K_{t1} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = 0$$

$$I_{32} \ddot{\varphi}_2 + K_{t1} (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + K_{t2} (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) = 0$$

$$I_{33} \ddot{\varphi}_3 + K_{t2} (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) + K_{t3} (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_4) = 0$$

$$I_{34} \ddot{\varphi}_4 + K_{t3} (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_3) + K_{t4} (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_5) = 0$$

$$I_{35} \ddot{\varphi}_5 + K_{t4} (\dot{\varphi}_5 - \dot{\varphi}_4) = 0$$

En ordonnant ce système d'équations différentielles du second ordre, on obtient le système suivant:

$$(\cdot) m_1 \ddot{x}_1 + (K_{c1}) x_1 + (-K_{c2}) x_2 + 0. x_3 + 0. x_4 + 0. x_5 + (K_{c1} l_{11}) \varphi_1 + (K_{c2} l_{21}) \varphi_2 + 0. \varphi_3 + 0. \varphi_4 + 0. \varphi_5 + 0. \dot{\varphi}_1 + 0. \dot{\varphi}_2 + 0. \dot{\varphi}_3 + 0. \dot{\varphi}_4 + 0. \dot{\varphi}_5 = 0$$

$$(\cdot) m_2 \ddot{x}_2 + (-K_{c1}) x_1 + (K_{c1} + K_{c2}) x_2 + (-K_{c2}) x_3 + 0. x_4 + 0. x_5 + (-K_{c1} l_{11}) \varphi_1 + (-K_{c1} l_{21} + K_{c2} l_{22}) \varphi_2 + (K_{c2} l_{31}) \varphi_3 + 0. \varphi_4 + 0. \varphi_5 + 0. \dot{\varphi}_1 + 0. \dot{\varphi}_2 + 0. \dot{\varphi}_3 + 0. \dot{\varphi}_4 + 0. \dot{\varphi}_5 = 0$$

$$(\cdot) m_3 \ddot{x}_3 + 0. x_1 + (-K_{c2}) x_2 + (K_{c2} + K_{c3}) x_3 + (-K_{c3}) x_4 + 0. x_5 + 0. \varphi_1 + (-K_{c2} l_{22}) \varphi_2 + (-K_{c2} l_{31} + K_{c3} l_{32}) \varphi_3 + (K_{c3} l_{41}) \varphi_4 + 0. \varphi_5 + 0. \dot{\varphi}_1 + 0. \dot{\varphi}_2 + 0. \dot{\varphi}_3 + 0. \dot{\varphi}_4 + 0. \dot{\varphi}_5 = 0$$

$$(\cdot) m_4 \ddot{x}_4 + 0. x_1 + 0. x_2 + (-K_{c3}) x_3 + (K_{c3} + K_{c4}) x_4 + (-K_{c4}) x_5 + 0. \varphi_1 + 0. \varphi_2 + (-K_{c3} l_{32}) \varphi_3 + (-K_{c3} l_{41} + K_{c4} l_{42}) \varphi_4 + (K_{c4} l_{51}) \varphi_5 + 0. \dot{\varphi}_1 + 0. \dot{\varphi}_2 + 0. \dot{\varphi}_3 + 0. \dot{\varphi}_4 + 0. \dot{\varphi}_5 = 0$$

$$\begin{aligned}
 (.) \quad m_5 \dot{x}_5 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + (-K_{c4}) x_4 + (K_{c4}) x_5 + 0 \cdot \psi_1 + \\
 + 0 \cdot \psi_2 + 0 \cdot \psi_3 + (-K_{c4} l_{42}) \psi_4 + (-K_{c4} l_{51}) \psi_5 + 0 \cdot \psi_6 + 0 \cdot \psi_7 + \\
 + 0 \cdot \psi_8 + 0 \cdot \psi_9 + 0 \cdot \psi_{10} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (.) \quad I_{z1} \dot{\psi}_1 + (K_{c1} l_{11}) x_1 + (-K_{c1} l_{11}) x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + \\
 + (K_{c1} l_{11}^2 + K_{f1}) \psi_1 + (K_{c1} l_{11} l_{21} - K_{f1}) \psi_2 + 0 \cdot \psi_3 + 0 \cdot \psi_4 + 0 \cdot \psi_5 + \\
 + 0 \cdot \psi_6 + 0 \cdot \psi_7 + 0 \cdot \psi_8 + 0 \cdot \psi_9 + 0 \cdot \psi_{10} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (.) \quad I_{z2} \dot{\psi}_2 + (K_{c1} l_{21}) x_1 + (-K_{c1} l_{21} + K_{c2} l_{22}) x_2 + (-K_{c2} l_{22}) x_3 + \\
 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + (K_{c1} l_{11} l_{21} - K_{f1}) \psi_1 + (K_{c1} l_{21}^2 + K_{c2} l_{22}^2 + K_{f1} + \\
 + K_{f2}) \psi_2 + (K_{c2} l_{22} l_{31} - K_{f2}) \psi_3 + 0 \cdot \psi_4 + 0 \cdot \psi_5 + 0 \cdot \psi_6 + 0 \cdot \psi_7 + \\
 + 0 \cdot \psi_8 + 0 \cdot \psi_9 + 0 \cdot \psi_{10} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (.) \quad I_{z3} \dot{\psi}_3 + 0 \cdot x_1 + (K_{c2} l_{31}) x_2 + (-K_{c2} l_{31} + K_{c3} l_{32}) x_3 + \\
 + (-K_{c3} l_{32}) x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot \psi_1 + (K_{c2} l_{31} l_{32} - K_{f2}) \psi_2 + \\
 + (K_{c2} l_{31}^2 + K_{c3} l_{32}^2 + K_{f2} + K_{f3}) \psi_3 + (K_{c3} l_{32} l_{41} - K_{f3}) \psi_4 + \\
 + 0 \cdot \psi_5 + 0 \cdot \psi_6 + 0 \cdot \psi_7 + 0 \cdot \psi_8 + 0 \cdot \psi_9 + 0 \cdot \psi_{10} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (.) \quad I_{z4} \dot{\psi}_4 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + (K_{c3} l_{41}) x_3 + (-K_{c3} l_{41} + K_{c4} l_{42}) x_4 + \\
 + (-K_{c4} l_{42}) x_5 + 0 \cdot \psi_1 + 0 \cdot \psi_2 + (K_{c3} l_{31} l_{41} - K_{f3}) \psi_3 + \\
 + (K_{c3} l_{41}^2 + K_{c4} l_{42}^2 + K_{f3} + K_{f4}) \psi_4 + (K_{c4} l_{42} l_{51} - K_{f4}) \psi_5 + \\
 + 0 \cdot \psi_6 + 0 \cdot \psi_7 + 0 \cdot \psi_8 + 0 \cdot \psi_9 + 0 \cdot \psi_{10} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (.) \quad I_{z5} \dot{\psi}_5 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + (K_{c4} l_{51}) x_4 + (-K_{c4} l_{51}) x_5 + \\
 + 0 \cdot \psi_1 + 0 \cdot \psi_2 + 0 \cdot \psi_3 + (K_{c4} l_{42} l_{51} - K_{f4}) \psi_4 + (K_{c4} l_{51}^2 + K_{f4}) \psi_5 + \\
 + 0 \cdot \psi_6 + 0 \cdot \psi_7 + 0 \cdot \psi_8 + 0 \cdot \psi_9 + 0 \cdot \psi_{10} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (.) \quad I_{z6} \dot{\psi}_6 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot \psi_1 + 0 \cdot \psi_2 + 0 \cdot \psi_3 + \\
 + 0 \cdot \psi_4 + 0 \cdot \psi_5 + (K_{t1}) \psi_6 + (-K_{t1}) \psi_7 + 0 \cdot \psi_8 + 0 \cdot \psi_9 + 0 \cdot \psi_{10} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (.) \quad & I_{32} \Psi_2 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot \varphi_1 + 0 \cdot \varphi_2 \\
 & + 0 \cdot \varphi_3 + 0 \cdot \varphi_4 + 0 \cdot \varphi_5 + (-K_{E1}) \Psi_1 + (K_{E1} + K_{E2}) \Psi_2 + (-K_{E2}) \Psi_3 \\
 & + 0 \cdot \Psi_4 + 0 \cdot \Psi_5 = 0
 \end{aligned}$$

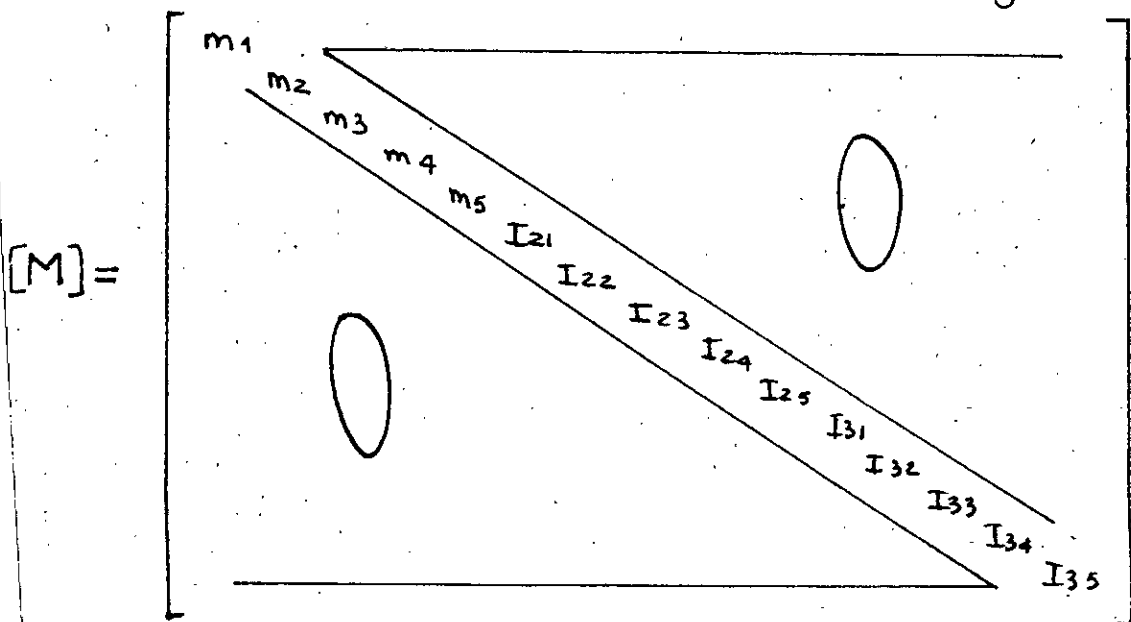
$$\begin{aligned}
 (.) \quad & I_{33} \Psi_3 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot \varphi_1 + 0 \cdot \varphi_2 \\
 & + 0 \cdot \varphi_3 + 0 \cdot \varphi_4 + 0 \cdot \varphi_5 + 0 \cdot \Psi_1 + (-K_{E2}) \Psi_2 + (K_{E2} + K_{E3}) \Psi_3 \\
 & + (-K_{E3}) \Psi_4 + 0 \cdot \Psi_5 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (.) \quad & I_{34} \Psi_4 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot \varphi_1 + 0 \cdot \varphi_2 \\
 & + 0 \cdot \varphi_3 + 0 \cdot \varphi_4 + 0 \cdot \varphi_5 + 0 \cdot \Psi_1 + 0 \cdot \Psi_2 + (-K_{E3}) \Psi_3 + (K_{E3} + K_{E4}) \Psi_4 \\
 & + (-K_{E4}) \Psi_5 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (.) \quad & I_{35} \Psi_5 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot \varphi_1 + 0 \cdot \varphi_2 \\
 & + 0 \cdot \varphi_3 + 0 \cdot \varphi_4 + 0 \cdot \varphi_5 + 0 \cdot \Psi_1 + 0 \cdot \Psi_2 + 0 \cdot \Psi_3 + (-K_{E4}) \Psi_4 + K_{E4} \Psi_5 = 0
 \end{aligned}$$

5.5 Matrice masse . Matrice rigidité:

Dans ce dernier système d'équations on peut distinguer deux matrices: la matrice masse [M] et la matrice de rigidités [K]



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5
x_1	Kc_1	$-Kc_1$	0	0	0	$Kc_1 l_{11}$	$Kc_1 l_{21}$	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	$-Kc_1$	$Kc_1 + Kc_2$	$-Kc_2$	0	0	$-Kc_1 l_{11}$	$-Kc_1 l_{21} + Kc_2 l_{22}$	$Kc_2 l_{31}$	0	0	0	0	0	0	0
x_3	0	$-Kc_2$	$Kc_2 + Kc_3$	$-Kc_3$	0	0	$-Kc_2 l_{22}$	$-Kc_2 l_{31} + Kc_3 l_{32}$	$Kc_3 l_{41}$	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	$-Kc_3$	$Kc_3 + Kc_4$	$-Kc_4$	0	0	$-Kc_3 l_{32}$	$-Kc_3 l_{41} + Kc_4 l_{42}$	$Kc_4 l_{51}$	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	$-Kc_4$	Kc_4	0	0	0	$-Kc_4 l_{42}$	$-Kc_4 l_{51}$	0	0	0	0	0
ψ_1	$Kc_1 l_{11}$	$-Kc_1 l_{11}$	0	0	0	$Kc_1 l_{11}^2 + Kf_1$	$Kc_1 l_{11} l_{21} - Kf_1$	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_2	$Kc_1 l_{21}$	$-Kc_1 l_{21} + Kc_2 l_{22}$	$-Kc_2 l_{22}$	0	0	$Kc_1 l_{11} l_{21} - Kf_1$	$Kc_1 l_{21}^2 + Kc_2 l_{22}^2 + Kf_1 + Kf_2$	$Kc_2 l_{31} l_{22} - Kf_2$	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	$Kc_2 l_{31}$	$-Kc_2 l_{31} + Kc_3 l_{32}$	$-Kc_3 l_{32}$	0	0	$Kc_2 l_{31} l_{22} - Kf_2$	$Kc_2 l_{31}^2 + Kc_3 l_{32}^2 + Kf_2 + Kf_3$	$Kc_3 l_{41} l_{32} - Kf_3$	0	0	0	0	0	0
ψ_4	0	0	$Kc_3 l_{41}$	$-Kc_3 l_{41} + Kc_4 l_{42}$	$-Kc_4 l_{42}$	0	0	$Kc_3 l_{32} l_{41} - Kf_3$	$Kc_3 l_{41}^2 + Kc_4 l_{42}^2 + Kf_3 + Kf_4$	$Kc_4 l_{51} l_{42} - Kf_4$	0	0	0	0	0
ψ_5	0	0	0	$Kc_4 l_{51}$	$-Kc_4 l_{51}$	0	0	0	$Kc_4 l_{42} l_{51} - Kf_4$	$Kc_4 l_{51}^2 + Kf_4$	0	0	0	0	0
ψ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Kt_1	$-Kt_1$	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-Kt_1$	$Kt_1 + Kt_2$	$-Kt_2$	0	0
ψ_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-Kt_2$	$Kt_2 + Kt_3$	$-Kt_3$	0
ψ_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-Kt_3$	$Kt_3 + Kt_4$	$-Kt_4$
ψ_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-Kt_4$	Kt_4

Matrice [K].

PM 04 T 85
Page 50

Le système d'équations différentielles peut s'écrire sous la forme

matricielle suivante : $[M] \{q\} + [K] \{q\} = \{0\}$.

où $\{q\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ y_4 \\ y_5 \end{Bmatrix}$

5.6 Formulation numérique du problème.

Facteurs dimensionnels des EFR.

EFR 1	EFR 2	EFR 3	EFR 4	EFR 5
$l_{11} = 1,125m$	$l_{21} = 0,675m$	$l_{31} = 2,15m$	$l_{41} = 0,725m$	$l_{51} = 1,25m$
	$l_{22} = 0,675m$	$l_{32} = 2,15m$	$l_{42} = 0,725m$	

En vertu des résultats des tableaux 5.1 ; 5.5 et 6.1 , les matrices $[M]$ et $[K]$ après calcul peuvent être écrites sous forme numérique comme suite.

MATRICE D'INERTIE (M)

MATRICE?

B>TYPE B:SM

- 170.33
- 102.20
- 325.51
- 109.77
- 189.25
- 73.13
- 16.29
- 503.99
- 20.05
- 99.98
- 8.69
- 5.22
- 16.62
- 5.60
- 9.66

B>

MATRICE DE RIGIDITE

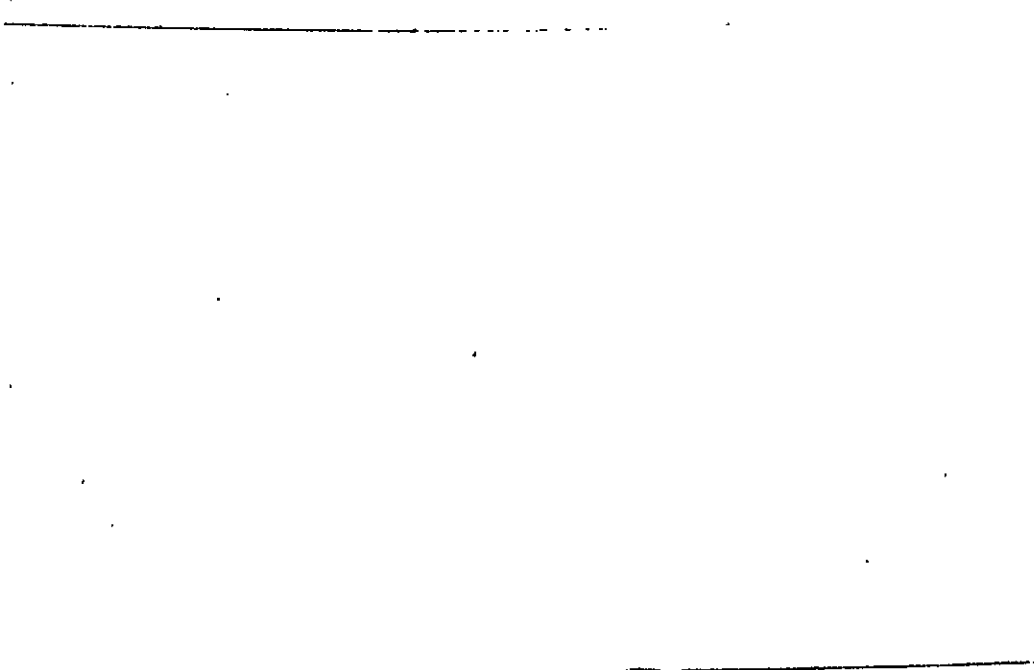
MATRICE?

B>

TYPE B:SA

269.900,-269.900,0,0,0,303.600,182.200,0,0,0,0,0,0,0,0
-269.900,549.400,-279.500,0,0,-303.600,6.50000,600.900,0,0,0,0,0,0,0
0,-279.500,554.100,-274.600,0,0,-188.700,-10.500,199.100,0,0,0,0,0,0
0,0,-274.600,519.400,-244.800,0,0,-590.400,-21.6000,306.0,0,0,0,0,0
0,0,0,-244.800,244.800,0,0,0,-177.500,-306.0,0,0,0,0,0
303.600,-303.600,0,0,0,346.800,199.700,0,0,0,0,0,0,0
182.200,6.50000,-188.700,0,0,199.700,260.900,400.200,0,0,0,0,0,0
0,600.900,-10.500,-590.400,0,0,400.200,2572,422.7,0,0,0,0,0,0
0,0,199.100,-21.600,-177.500,0,0,422.700,283.000,217.100,0,0,0,0,0
~~0,0,0,306.0,-306.0,0,0,0,217.100,600.900,0,0,0,0,0~~
0,0,0,0,0,0,0,0,0,13.800,-13.800,0,0,0
0,0,0,0,0,0,0,0,0,-13.800,28.100,-14.300,0,0
0,0,0,0,0,0,0,0,0,-14.300,28.300,-14.000,0
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-14.0,26.500,-12.500
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-12.500,12.500

B>



Chap 6 CALCUL DES FRÉQUENCES PROPRES

La mise en œuvre effective de la méthode des éléments finis rigides décrite dans les chapitres précédents nécessite l'utilisation de méthodes numériques variées pour résoudre les systèmes d'équations algébriques qui en résultent, en particulier pour déterminer les valeurs propres d'un système mécanique.

Pour le calcul des valeurs propres on peut citer les méthodes de JACOBI, de RAYLEIGH, de RUTISHAUSER etc...

Dans notre cas, nous utiliserons la méthode de JACOBI.

6.1 Description de la méthode de JACOBI. [6]

Notre système vibre librement et il est gouverné par l'équation :

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{0\} \quad (1) \quad \text{ou } \{ \} \text{ matrice colonne.}$$

Supposons une solution de l'équation (1) de la forme :

$$\{q\} = \{q_0\} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

En dérivant deux fois les deux membres de l'équation (2)

on obtient : $\{\ddot{q}\} = -\omega^2 \{q_0\} \sin(\omega t + \varphi) \quad (3)$

En substituant (2) et (3) dans (1) on aura.

$$(-\omega^2 [M] + [K]) \{q_0\} = \{0\} \quad (4)$$

puisque $\{q_0\} \neq \{0\}$ (sinon le système ne vibre pas) la solution de (4) existe si le déterminant

$$\det [[K] - \omega^2 [M]] = 0 \quad (5)$$

ce déterminant est d'ordre n en ω^2 , et constitue l'équation aux pulsations propres.

l'équation (4) peut s'écrire sous forme

$$[K] \{q_0\} = \omega^2 [M] \{q_0\} \quad (6)$$

l'équation (6) est valable $\forall \{q_0\}$ en particulier pour $\{q_0\} = \{q_n\}$ d'où on aura

$$[K] \{q_n\} = \omega^2 [M] \{q_n\} \quad (7)$$

En écrivant l'équation (7) pour chaque valeur de n on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} [K] \{q_{01}\} = \omega^2 [M] \{q_{01}\} \\ [K] \{q_{02}\} = \omega^2 [M] \{q_{02}\} \\ \vdots \\ [K] \{q_{0n}\} = \omega^2 [M] \{q_{0n}\} \end{array} \right. \quad (8)$$

le système (8) peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$[K] [\Delta] = \Delta(\omega^2) [M] [\Delta] \quad (9)$$

Avec $[\Delta] = [\{q_{01}\}, \{q_{02}\}, \dots, \{q_{0n}\}]$

$$\text{et } \Delta(\omega^2) = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

Introduisant deux nouvelles matrices

$$[\bar{A}] = [M]^{1/2} \cdot [\Delta] \quad (10)$$

$$[\bar{K}] = [M]^{-1/2} \cdot [K] \cdot [M]^{-1/2}$$

où $1/2$ et $-1/2$ sont des exposants.

L'équation (9) devient

$$[\bar{K}] \cdot [\bar{\Delta}] = [\bar{\Delta}] \cdot [\Delta(\omega^2)] \quad (11)$$

si on multiplie les deux membres de l'équation (11) par la matrice transposée de $[\bar{\Delta}] : [\bar{\Delta}]^T$, on aura

$$[\bar{\Delta}]^T \cdot [\bar{K}] \cdot [\bar{\Delta}] = [\bar{\Delta}]^T \cdot [\bar{\Delta}] \cdot [\Delta(\omega^2)]$$

on peut démontrer que $[\bar{\Delta}]^T [\bar{\Delta}] = [I]$ (matrice unitaire)

ce qui donne

$$[\bar{\Delta}]^T \cdot [\bar{K}] \cdot [\bar{\Delta}] = [\Delta(\omega^2)] \quad (12)$$

La méthode de JACOBI cherche à trouver une matrice $[\bar{\Delta}]$ qui par des opérations dans l'équation (12) diagonalise la matrice $[\bar{K}]$, cette matrice diagonale va contenir les valeurs propres.

1/ on démarre avec la matrice $[\bar{K}]$ et on opère dans cette matrice avec une série de matrices carrées T_r de la manière suivante.

$$\left. \begin{aligned} \bar{K} &= K_0 \\ T_1^T \cdot K_0 \cdot T_1 &= K_1 \\ T_2^T \cdot K_1 \cdot T_2 &= K_2 \\ &\dots \\ T_r^T \cdot K_{r-1} \cdot T_r &= K_r \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

le résultat obtenu est: $T_r^T \dots T_2^T \cdot T_1^T \cdot \bar{K} \cdot T_1 \cdot T_2 \dots T_r = K_r$ (14)

on veut choisir les matrices T_r pour que cette équation converge vers la forme: $\Delta^T \cdot K \cdot \Delta = \Delta(\omega^2)$

on peut identifier :

$$\left. \begin{array}{l} T_1 T_2 \dots T_r \longrightarrow \Delta \\ K_r \longrightarrow \Delta(\omega^2) \end{array} \right\} (15)$$

Puisque on a $\Delta^T \cdot \Delta = I$, il faut que la matrice T_r satisfait la condition $T_r^T \cdot T_r = I$

Pour produire la diagonalisation de K , les matrices T_r employées dans la méthode de JACOBI ont une propriété spéciale qui est : quand on crée K_r , les termes hors diagonales de K_{r-1} deviennent nuls. On note par a_{jk} les éléments de K_{r-1} et b_{jk} les éléments de K_r , si $a_{pq} \neq 0$, on définit T_r par :

$$T_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & c & 0 & 0 & -s & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s & 0 & 0 & c & \dots & \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{p^{i\text{eme}} \text{ colonne}} \\ \xrightarrow{q^{i\text{eme}} \text{ colonne}} \\ \xrightarrow{p^{i\text{eme}} \text{ ligne}} \\ \xrightarrow{q^{i\text{eme}} \text{ ligne}} \end{array} \quad (16)$$

où $c = \cos \theta$,
 $s = \sin \theta$.

T_r représente une rotation d'un angle θ dans le plan pq , Avec l'équation $T_r^T \cdot K_{r-1} \cdot T_r = K_r$ et la forme de T_r de la relation (16), on peut montrer que tous les éléments de K_{r-1} sont les mêmes que les éléments de K_r sauf ceux qui sont dans les $p^{i\text{eme}}$ et $q^{i\text{eme}}$ lignes et colonnes.

les éléments de la $p^{i\text{eme}}$ et $q^{i\text{eme}}$ lignes et colonnes sont donnés par: [10].

$$\left. \begin{aligned}
 b_{pp} &= a_{pp} \cos^2 \theta + 2 a_{pq} \sin \theta \cos \theta + a_{qq} \sin^2 \theta \\
 b_{pq} &= a_{pq} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - (a_{pp} - a_{qq}) \sin \theta \cos \theta \\
 b_{qq} &= a_{pp} \sin^2 \theta - 2 a_{pq} \sin \theta \cos \theta + a_{qq} \cos^2 \theta \\
 b_{pj} &= a_{pj} \cos \theta + a_{qj} \sin \theta \\
 b_{qj} &= -a_{pj} \sin \theta + a_{qj} \cos \theta
 \end{aligned} \right\} j \neq p, q \quad (17)$$

L'élément b_{pq} devient nul si on prend l'angle θ qui satisfait

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 a_{pq}}{a_{pp} - a_{qq}} \quad (18)$$

si $a_{pp} = a_{qq}$, $\theta = \pi/4$.

La méthode de JACOBI converge rapidement avec un nombre assez petit d'itération.

Par exemple dans une méthode qui est connue sous le nom

"Threshold JACOBI Method", la rotation est supprimée si

$|a_{pq}|$ est inférieur à une certaine valeur (EPS).

* Détermination de $[M]^{-1/2}$ et $[R]$.

soit la matrice $[M]$ de la forme

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n \end{bmatrix}$$

$$\text{d'après [7], } [M]^{-1/2} = \begin{bmatrix} m_1^{-1/2} & & & \\ & m_2^{-1/2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n^{-1/2} \end{bmatrix}$$

la matrice $[\bar{K}]$ est définie par

$$[K] = [M]^{-1/2} \cdot [k] \cdot [M]^{-1/2}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & & k_{2n} \\ & & \dots & \\ k_{n1} & & & k_{nn} \end{bmatrix} = [(k_{ij})]$$

$$[M] = [(m_i)]$$

$$[M]^{-1/2} = [(m_i^{-1/2})]$$

$$[K] = [(m_i^{-1/2})] \cdot [(k_{ij})] \cdot [(m_i^{-1/2})]$$

$$[\bar{K}] = \left[\left(\frac{k_{ij}}{\sqrt{m_i m_j}} \right) \right]$$

6.2 Organigramme

Notation:

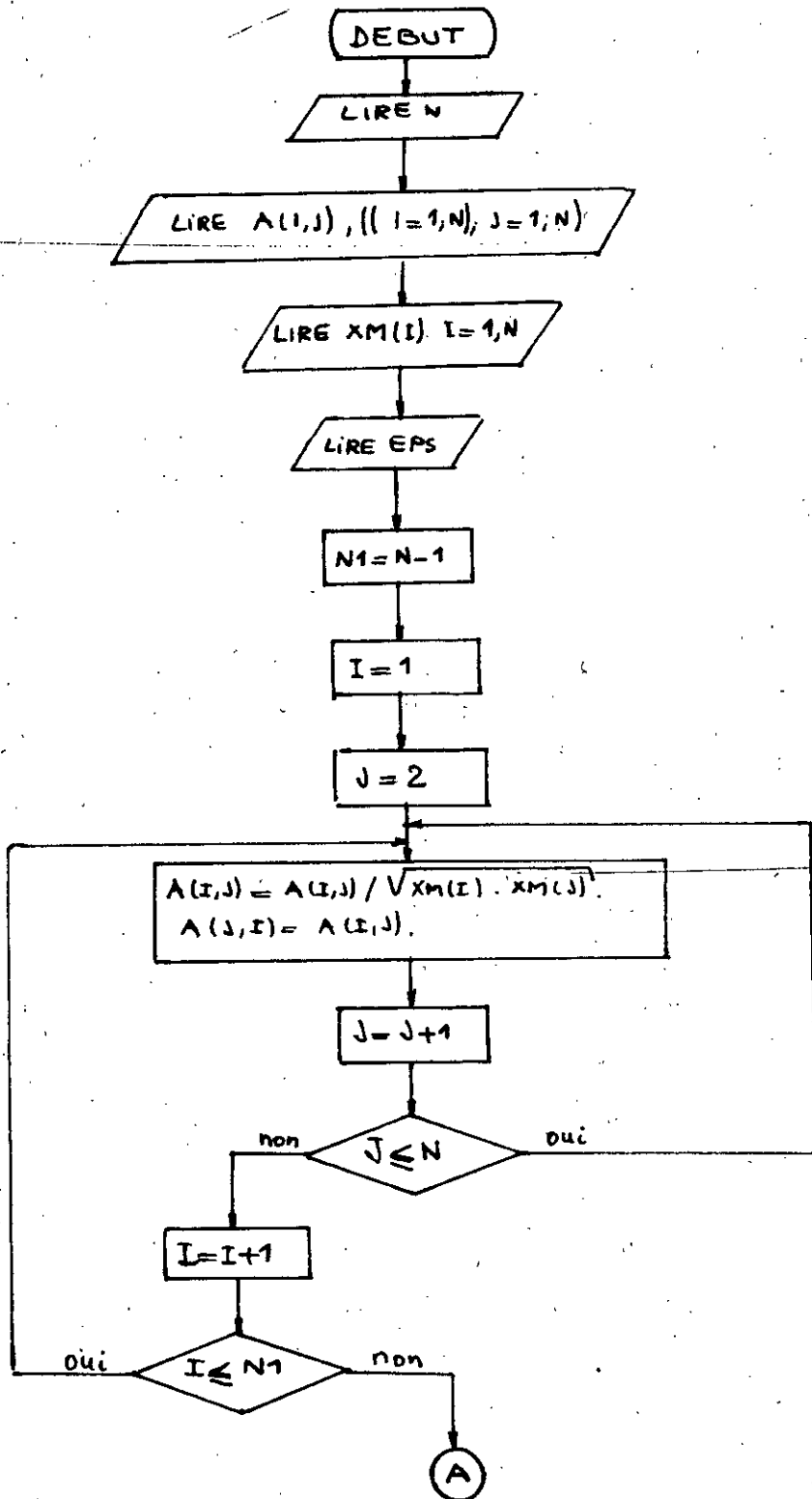
- N : ordre de la matrice [K]. (N = 15)
- [A(I, I)] : matrice de rigidité [K].
- [XM(I)] : matrice masse [M].
- EPS : valeur du test de convergence (EPS = 10⁻⁵).

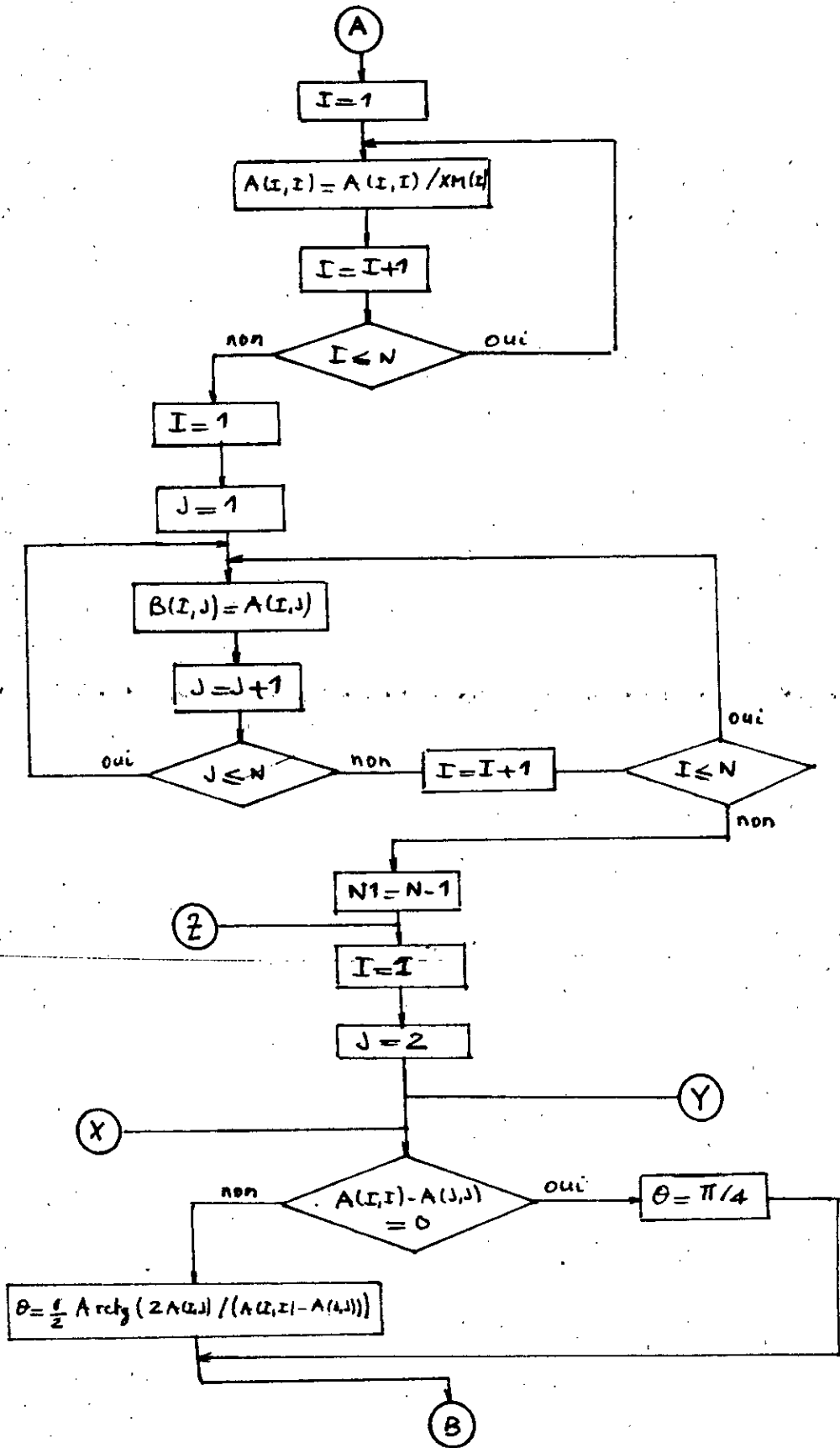
L'organigramme est composé de quatre parties:

- Lecture des matrices de rigidité et masse.
- Calcul de la matrice [K].
- Diagonalisation de [K]
- Résultat

Cet organigramme nous permet de déterminer les 'N' valeurs de W² (carré de la pulsation propre).

ORGANIGRAMME





(B)

$$\begin{aligned} B(I,I) &= A(I,I) \cos^2 \theta + 2 A(I,J) \sin \theta \cos \theta + A(J,J) \sin^2 \theta \\ B(I,J) &= A(I,J) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - (A(I,I) - A(J,J)) \sin \theta \cos \theta \\ B(J,I) &= B(I,J) \\ B(J,J) &= A(I,I) \sin^2 \theta - 2 A(I,J) \sin \theta \cos \theta + A(J,J) \cos^2 \theta \end{aligned}$$

M = 1

M - I = 0

M = M + 1

M - J = 0

M = M + 1

M - N ≤ 0

$$\begin{aligned} B(I,M) &= A(I,M) \cos \theta + A(J,M) \sin \theta \\ B(M,I) &= B(I,M) \\ B(J,M) &= -A(I,M) \sin \theta + A(J,M) \cos \theta \\ B(M,J) &= B(J,M) \end{aligned}$$

M = M + 1

KK = 1

LL = 1

A(KK,LL) = B(KK,LL)

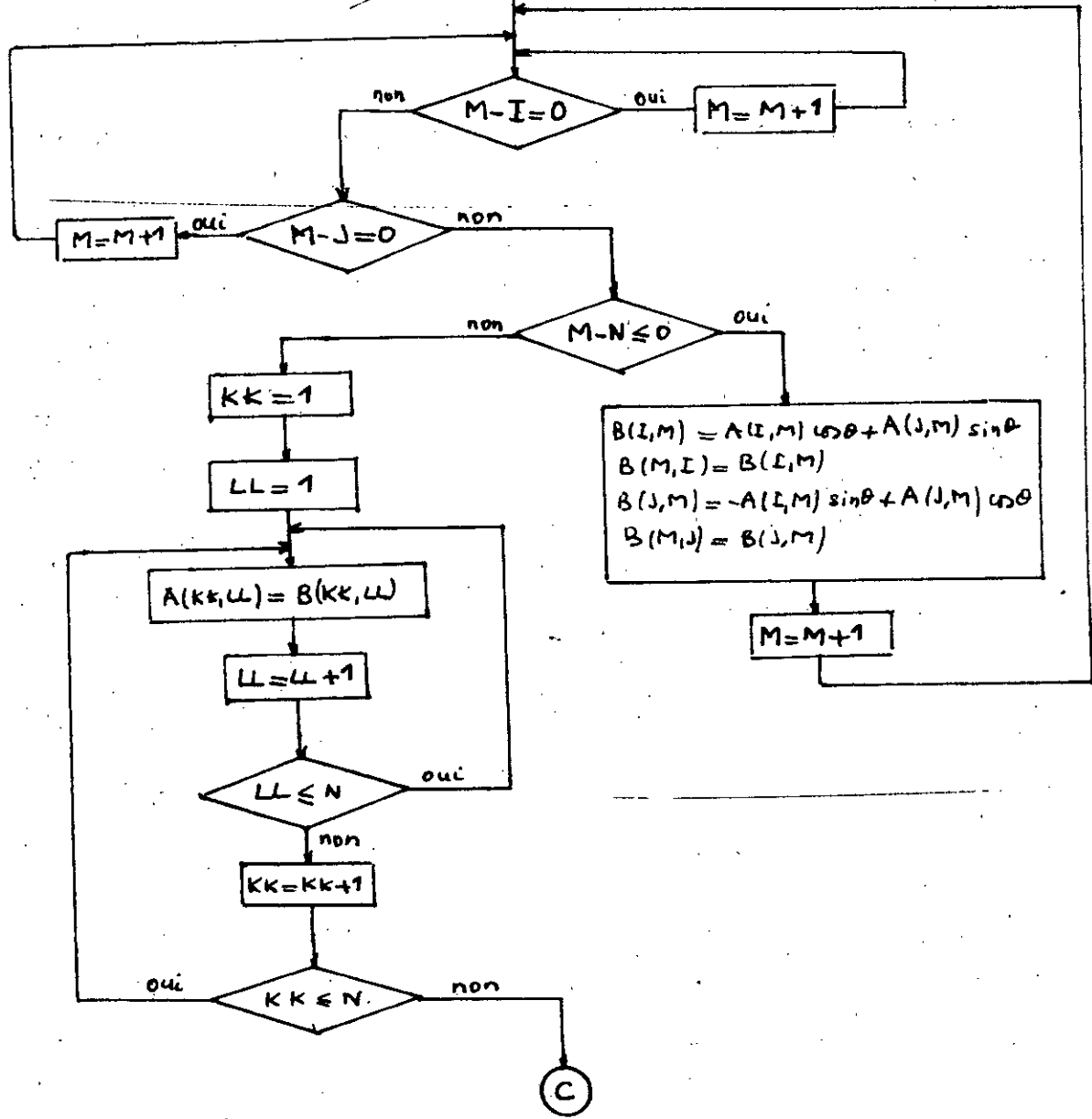
LL = LL + 1

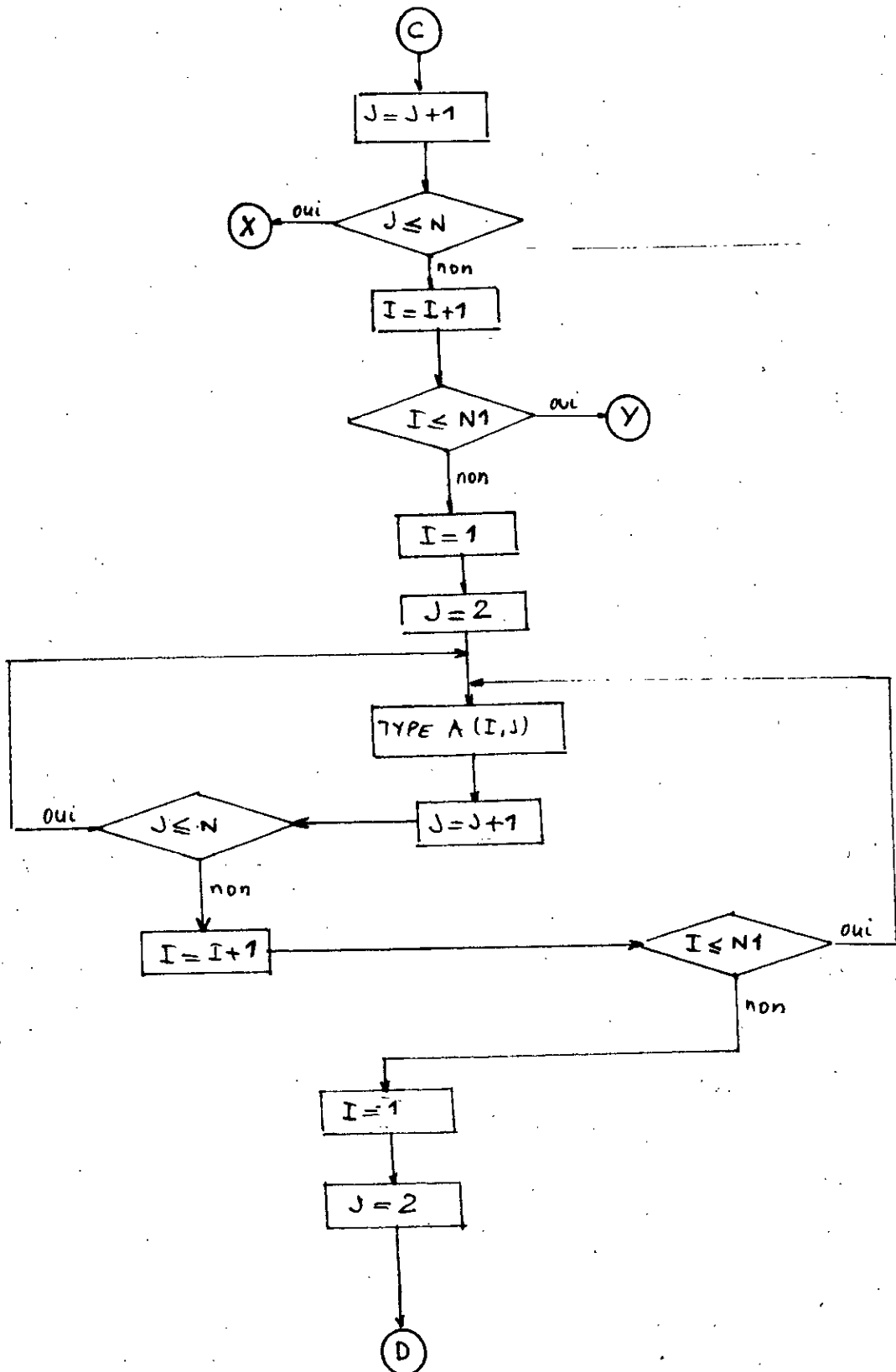
LL ≤ N

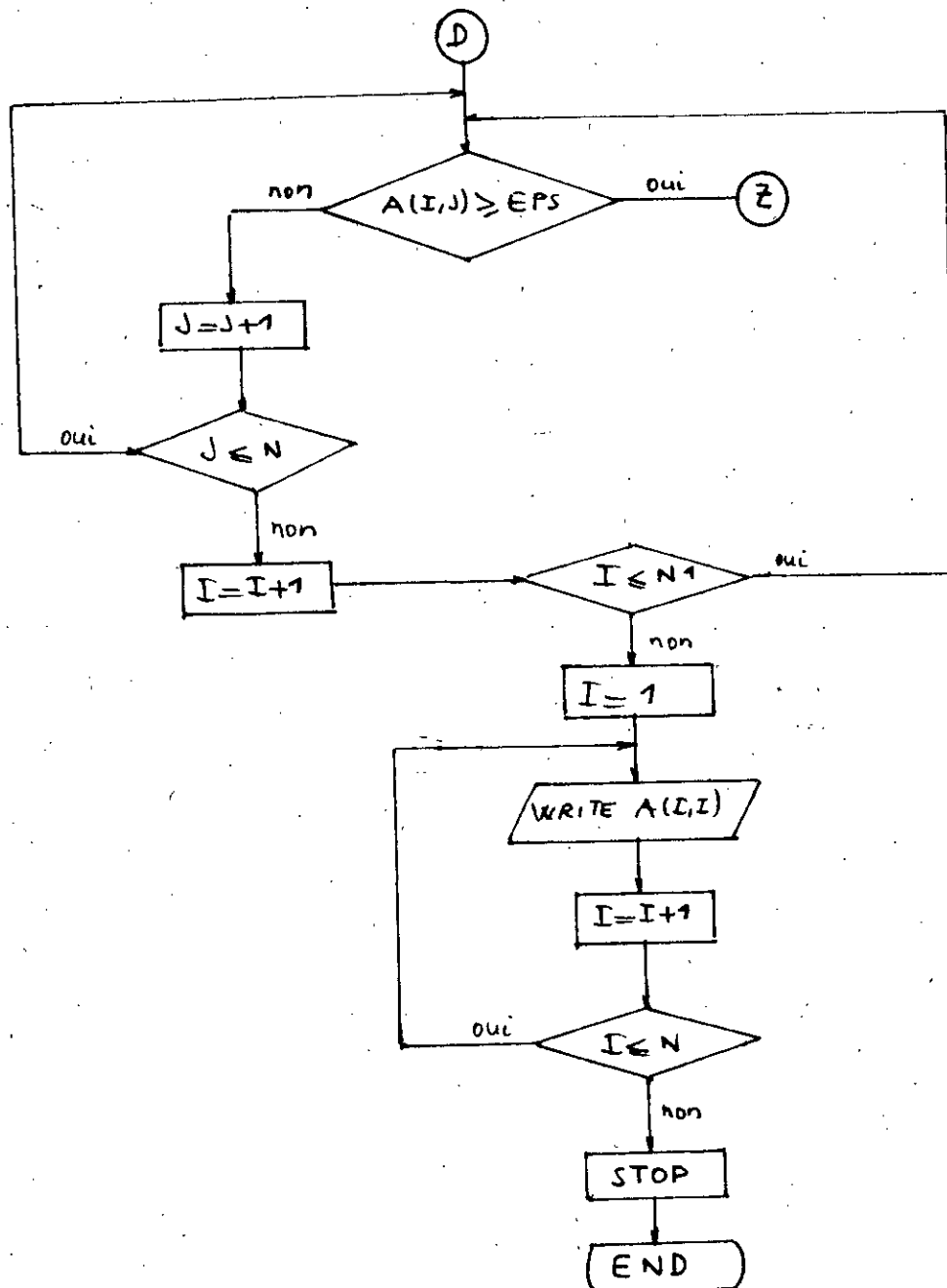
KK = KK + 1

KK ≤ N

(C)







6.3 PROGRAMME

```

OPTIONS X,Q
  DIMENSION A(50,50),B(50,50),XM(50),IFIC(3)
  CALL LOPEN(3,'LST:')
222  FORMAT(3A6)
  TYPE 'STIFFNESS MATRIX FILE ?'
  READ(0,222) IFIC
  CALL OPEN(5,IFIC)
  TYPE 'MASS VECTOR FILE ?'
  READ(0,222)IFIC
  CALL OPEN(6,IFIC)
  ACCEPT 'EPS = ',EPS
  ACCEPT 'MATRIX ORDER N= ',N
  EPS2=EPS*EPS
  DO 200 I=1,N
200  READ(5,*) (A(I,J),J=1,N)
  NN=N
  DO 300 II=1,NN
300  READ(6,*) XM(II)
  N1=N-1
  DO 66 I=1,N1
  L=I+1
  DO 66 J=L,N
  A(I,J)=A(I,J)/SQRT(XM(I)*XM(J))
  A(J,I)=A(I,J)
66  CONTINUE
  DO 44 I=1,N
44  A(I,I)=A(I,I)/XM(I)
  DO 55 I=1,N
55  WRITE(3,1000) (A(I,J),J=1,N)
  DO 77 I=1,N
  DO 77 J=1,N
77  B(I,J)=A(I,J)
  N1=N-1
70  DO 10 I=1,N1
  L=I+1
  DO 20 J=L,N
  IF(A(I,I)-A(J,J))15,16,15
16  TETA=0.7853981
  GO TO 17
15  TETA=0.5*ATAN((2*A(I,J))/(A(I,I)-A(J,J)))
17  B(I,I)=A(I,I)*COS(TETA)*COS(TETA)+2*A(I,J)*SIN(TETA)*COS(TETA)
  &+A(J,J)*SIN(TETA)*SIN(TETA)
  B(I,J)=A(I,J)*(COS(TETA)**2-SIN(TETA)**2)-(A(I,I)-A(J,J))
  &*SIN(TETA)*COS(TETA)
  B(J,I)=B(I,J)
  B(J,J)=A(I,I)*SIN(TETA)*SIN(TETA)-2*A(I,J)*SIN(TETA)*COS(TETA)
  &+A(J,J)*COS(TETA)*COS(TETA)
  M=1

```

```
5   IF(M-I)1,2,1
2   M=M+1
1   IF(M-J)3,4,3
4   M=M+1
3   IF(M-N)6,6,21
6   B(I,M)=A(I,M)*COS(TETA)+A(J,M)*SIN(TETA)
    B(M,I)=B(I,M)
    B(J,M)=-A(I,M)*SIN(TETA)+A(J,M)*COS(TETA)
    B(M,J)=B(J,M)
    M=M+1
    GO TO 5
21  DO 88 KK=1,N
    DO 88 LL=1,N
98  A(KK,LL)=B(KK,LL)
20  CONTINUE
10  CONTINUE
    DO 720 I=1,N1
        L=I+1
    DO 720 J=L,N
720  TYPE A(I,J)
    DO 710 I=1,N1
        L=I+1
    DO 710 J=L,N
    IF (ABS(A(I,J)).GT.EPS) GOTO 70
710  CONTINUE
    DO 99 I=1,N
99  WRITE(3,1000)A(I,I)
1000 FORMAT(4X,6E16.8)
    STOP
    END
```

B>

6.4 Résultats.

Selon le procédé de résolution décrit et en utilisant les formes numériques de $[M]$ et $[K]$, le programme nous donne comme résultat (page 67).

On a aussi calculé les valeurs propres du système en considérant seulement :

- cisaillement - Flexion (page 68).
- cisaillement - Torsion (page 67).
- Torsion - Flexion (page 70).

Les résultats du calcul des valeurs propres pour chaque degré de liberté sont dans la page 71

Ces résultats nous permettront (après l'étude des déformées nodales et l'établissement du bilan des excitations) de savoir si les fissurations sont provoquées par le cisaillement, la flexion, la torsion ou par une combinaison de ces degrés de liberté.

Notation : ω^2 : carré de la pulsation propre.

- ω : pulsation propre.

- F : fréquence propre.

- T : période propre.

RESULTATS DU CALCUL DES VALEURS PROPRES
 DU TRELIS DE L'AUTOBUS 100V8

W2(rd/s)2	W(rd/s)	F(Hz)	T(sec)
.1352782	.3678019	5.853754E-02	17.08306
1.057486E+07	3251.901	517.5565	1.932156E-03
57.00899	7.55043	1.201689	.8321619
8390958	2896.715	461.027	2.169071E-03
5498.029	74.1487	11.80114	8.473756E-02
187104.7	432.556	68.84348	.0145257
2.095479E+07	4577.64	728.5547	1.372581E-03
21525.79	146.7167	23.35071	4.282526E-02
1.808906E+07	4253.124	676.9063	1.47731E-03
313047	559.506	89.04822	1.122987E-02
3.410314E-02	.1846704	2.939123E-02	34.02376
6813560	2610.28	415.4393	2.407091E-03
640229	800.1431	127.3468	7.85257E-03
5681955	2383.685	379.3756	2.635911E-03
1564337	1250.734	199.0607	5.023593E-03

**CALCUL DES VALEURS PROPRES DU TRELLIS DE DIAUTOBUS 100V8
EN CONSIDERANT DEUX DEGRES DE LIBERTE**

CISSAILLEMENT-FLEXION

ω (rd/s) ²	W (rd/s)	F (Hz)	T (sec)
.1352782	.3678019	5.853754E-02	17.08306
1.057486E+07	3251.901	517.5565	1.932156E-03
57.00899	7.55043	1.201689	.8321619
3390958	2896.715	461.027	2.169071E-03
5498.029	74.1487	11.80114	8.473756E-02
187104.7	432.556	68.84348	.0145257
2.095479E+07	4577.64	728.5547	1.372581E-03
21525.79	146.7167	23.35071	4.282526E-02
1.808906E+07	4253.124	676.9063	1.47731E-03
313047	559.506	89.04822	1.122987E-02

**CALCUL DES VALEURS PROPRES DU TREILLIS DE L'AUTOBUS 100VS
EN CONSIDERANT DEUX DEGRES DE LIBERTE**

CISSAILLEMENT-TORSION

W2(rd/s) ²	W(rd/s)	F(Hz)	T(sec)
.1323468	.3637951	5.789983E-02	17.27121
6805015	2608.642	415.1787	2.408602E-03
639740.1	799.8375	127.2982	7.85557E-03
5680292	2383.336	379.3201	2.636296E-03
1562749	1250.1	198.9597	5.026144E-03
3.410314E-02	.1846704	2.939123E-02	34.02376
6813560	2610.28	415.4393	2.407091E-03
640229	800.1431	127.3468	7.85257E-03
5681955	2383.685	379.3756	2.635911E-03
1564337	1250.734	199.0607	5.023593E-03

**CALCUL DES VALEURS PROPRES DU TREILLIS DE D'ANTONNE 10010
EN CONSIDERANT DEUX DEGRES DE LIBERTE**

TORSION-FLEXION

W2(rd/s)2	W(rd/s)	F(Hz)	T(sec)
3.410314E-02	.1846704	2.939123E-02	34.02376
6813560	2610.28	415.4393	2.407091E-03
640229	800.1431	127.3468	7.85257E-03
5681955	2383.685	379.3756	2.635911E-03
1564337	1250.734	199.0607	5.023593E-03
26828.18	163.7931	26.0685	3.836047E-02
693839	832.97	132.5714	7.543104E-03
1.382853E-03	3.718673E-02	5.918457E-03	168.963
526995.1	725.9443	115.5377	8.655182E-03
42343.63	205.7757	32.75025	3.053413E-02

RESUTATS DU CALCUL DES VALEURS PROPRES
POUR CHAQUE DEGRE DE LIBERTE

*** CISSAILLEMENT ***

W2(rd/s)2	W(rd/s)	F(Hz)	T(sec)
9.494376E-02	.3081295	4.904037E-02	20.39136
6749292	2597.94	413.4754	2.418524E-03
639571	799.7318	127.2814	7.856608E-03
5667965	2380.749	378.9083	2.639161E-03
1505058	1226.808	195.2527	5.121567E-03

*** FLEXION ***

W2(rd/s)2	W(rd/s)	F(Hz)	T(sec)
26827.43	163.7908	26.06814	3.836101E-02
692642.1	832.2513	132.457	7.549619E-03
3.270582E-04	1.808475E-02	2.87828E-03	347.4297
526994	725.9435	115.5376	8.655191E-03
42341.74	205.7711	32.74952	.0305348

*** TORSION ***

W2(rd/s)2	W(rd/s)	F(Hz)	T(sec)
3.410314E-02	.1846704	2.939123E-02	34.02376
6813560	2610.28	415.4393	2.407091E-03
640229	800.1431	127.3468	7.85257E-03
5681955	2383.685	379.3756	2.635911E-03
1564337	1250.734	199.0607	5.023593E-03

CONCLUSIONS

Ce travail m'a donné un aperçu sur l'étude dynamique d'un système mécanique.

Le but de l'étude, qui était d'effectuer une première approximation du calcul des fréquences propres du treillis a été atteint.

Les résultats numériques obtenus montrent que toutes les fréquences propres du treillis se trouvent dans la plage des fréquences des excitations mécaniques qui arrivent le plus souvent au cours du fonctionnement des systèmes réels ($0 \div 2000$ Hz), d'où forte probabilité que les conditions de résonance puissent avoir lieu, cela confirme l'importance des études dynamiques des treillis et des châssis des véhicules.

Le problème est assez difficile malgré la négligence de l'amortissement interne du matériau et pour obtenir des résultats précis et utiles pour le côté pratique il faudra résoudre les tâches suivantes :

- Ecrire un programme général pour déterminer directement les matrices masse et rigidité.
- Déterminer l'amortissement interne du matériau.
- Déterminer les déformées nodales.
- Faire le bilan des excitations.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]. Christian ELOY : Calcul en construction mécanique
(Dunod 1981)
- [2]. Dohbi : Thèse de fin d'étude (janvier 1982)
- [3]. l'Automobile (Edition Delta et Spees 1983)
- [4]. P. Chillon et M. Kerquinas : Résistance des matériaux
- [5]. G. Buzdugan : Dynamique des fondation de machines
(Edition Eyrolles PARIS 1972)
- [6]. Dhatt et Touzot : Méthode des éléments finis
(Edition Maloine S.A 1984)
- [7]. Jean Charles Gille : Calcul matriciel Tome 1
(Edition Eyrolles 1979)
- [8]. G. Pissarenko : Aide mémoire de RDM
(Edition de Moscou 1975)
- [9]. M. Rahmoune : Thèse de fin d'étude (janvier 1985)
- [10]. K. Bathe et E. Wilson : Numérial méthode infinite élément analysis.
(Edition Prentice-Hall, New Jersey 1979)

