45 85

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

1 ex

المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

Département de Génie Mécanique

PROJET DE FIN D'ETUDES

THEME

CERTAINES FORMES DES CRITERES ET LEURS INFLUENCES SUR LA VIBRO-ISOLATION OPTIMUM DES SYSTEMES MECANIQUES

Promoteur :

Mr Marek KSIAZEK

Etudiant :

Tahar REZOUG

Promotion : Janvier 1985

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

Département de Génie Mécanique

PROJET DE FIN D'ETUDES

THEME

CERTAINES FORMES DES CRITERES ET LEURS INFLUENCES SUR LA VIBRO-ISOLATION OPTIMUM DES SYSTEMES MECANIQUES

Promoteur :

Mr Marek KSIAZEK

Etudiant :

Tahar REZOUG

Promotion : Janvier 1985

DEDICACES

Je dedie ce modeste travail à :

- A nos glorieux chouhadas
- A mes grands parents
- A mes chèrs parents
- A mes Frères et Sœurs
- A toute la famille
- Aux amis sincères et fidèles

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier vivement Monsieur Marek KSIAZEK pour son aide et son suivi continus durant cette étude, ainsi que tous les professeurs et assistants qui ont contribué à ma formation.

Je remercie également tous les amis qui m'ont apporté leur sincère aide

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Dans plusieurs domaines (mécanique, éléctrotechnique, ...), on est souvent confronté aux problèmes de l'isolation vibratoire. Les exigences de normalisation (normes hygiéniques, ...) nous incitent à assurer au maximum une bonne isolation des systèmes mécaniques soumis à des excitations de natures aléatoires, poly-harmoniques, ...

Pour cela, on emploie certaines méthodes qui resolvent ces problèmes par une synthèse mathématique (par exemple : methode de Wiener-Hopf) tout en prennant en consideration de ces exigences, et par la suite de parfaire à cette bonne isolation.

On definera ainsi les critères qui aboutissent ou du moins qui approchent ce but.

A partir de ces critères, on determinera les systèmes de vibro-isolation qui assurent cette vibro-isolation optimale.

Parmis ces systèmes de vibro-isolation, on distingue :

a/ les systèmes passifs composés essentiellement de ressorts, d'amortisseurs et de masses bien choisis préalablement

b/ les systèmes actifs actionnés par des servo-mécanismes.

c/ la combinaison de ces deux systèmes

L'objet de ce mémoire est de faire valoir l'influence des formes de critères sur la vibro-isolation optimum des systèmes mécaniques (systèmes dynamique et rigide), et d'en distinguer celles qui donnent cette vibro-isolation optimale.

Pour mener au bien cette etude, on a jugé necessaire de rappeler quelques notions mathématiques utiles.

I GENERALITES

1. Caractéristiques numériques d'une variable aléatoire continue

1-1 Definition de l'espérance mathématique

On appelle éspèrance mathématique de la variable aléatoire continue x de densité de probabilité $f(x)$ l'expression $m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$

1-2 Définition de la variance

On appelle variance de la variable aléatoire x l'espèrance mathé-matique du carré de la variable aléatoire centrée correspondante

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)\,dx$$

La variance est la caracteristique numérique de la dispersion, de la deviation des valeurs de la variable aléatoire par rapport à son éspérance mathé-matique.

Elle possède l'unité du carré de la variable aléatoire

1-3 Variance de la loi normale

1-3-1 Loi normale.

L'etude de différents phénomènes variés montre que de nombreuses variables aleatoires, comme par exemple, l'erreur commise au cours de mesure, l'ampleur de l'usure des pièces de nombreux mecanismes, l'ecart lateral et l'ecart de portée du point d'impact par rapport à un certain centre au cours d'un tir, vibrations d'une voiture sur la route,..., possèdent une densité de probabilités s'exprimant par la formule

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}\right]$$

On dit alors dans ce cas que la variable aléatoire suit la loi de distribution normale (ou de Gauss)

1-3-2 Variance de la loi normale et sa position sur l'axe de mesure de cette loi

On montre que $\sigma_X^2 = \sigma^2$ pour la loi normale

Dans notre cas $m_x = 0$

On definit par :

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$ L'intégrale de probabilité.

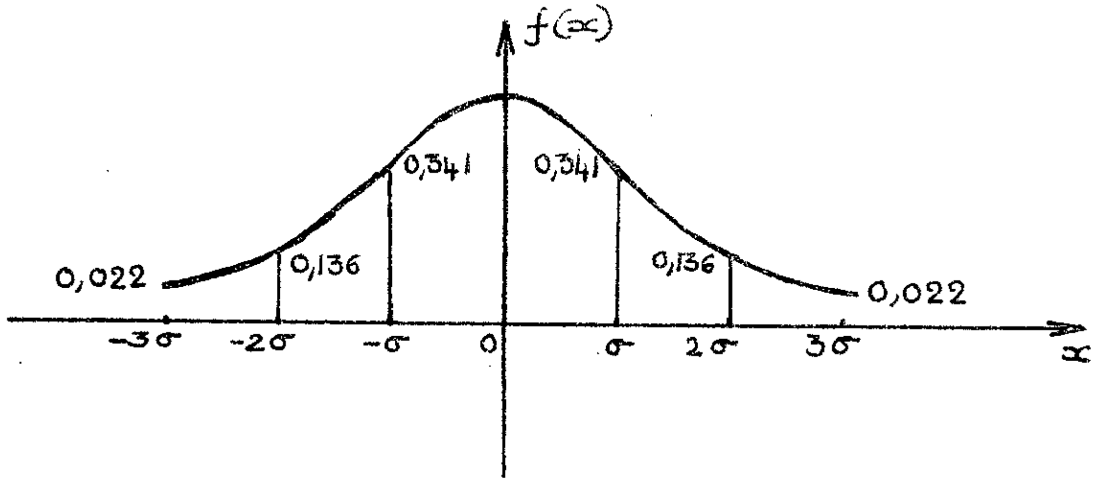
Position de la variance sur l'axe de mesure

$$P(-\sigma < x < \sigma) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}683$$

$$P(-2\sigma < x < 2\sigma) = \Phi(\sqrt{2}) = 0{,}954$$

$$P(-3\sigma < x < 3\sigma) = \Phi(3/\sqrt{2}) = 0{,}997$$

D'où l'image géomètrique de ces résultats (Voir figure ci-aprés page 5)



Il est presque certain que la variable aléatoire " L'erreur " ne s'ecartera pas en valeur absolue de l'espèrance mathématique de plus de 3 σ ce qu'on appelle La règle des trois sigmas
Ces calculs permettent La facilité d'analyse des phénomènes

2 Expression de la variance de la grandeur de sortie d'un système Lineaire

2-1 Cas général

Soit $x_0(t)$ la grandeur de sortie d'un système Linéaire et $x(t)$ La grandeur de sortie

En supposant que l'espèrance mathématique m_{x_0} est nulle on aura pour la variance de $x(t)$ La valeur

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)^2 dt$$

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_x(-j\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega \right] dt$$

avec $X_x(j\omega)$ La transformée de Fourier de $x(t)$

on a aussi $X_x(-j\omega) = H_{\frac{x}{x_0}}(-j\omega)\, X_{x_0}(-j\omega)$ où

$H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega)$ est La fonction de transfert du système et

$X_{x_0}(j\omega)$ la transformée de Fourier de $x_0(t)$

D'où $$\sigma_x^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\frac{x}{x_0}}(-j\omega)\, X_{x_0}(-j\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega \right] dt$$

En permuttant les deux intègrations on aura

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} H_{\frac{x}{x_0}}(-j\omega)\, X_{x_0}(-j\omega) \cdot \frac{1}{2\pi}\, d\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

ou $$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega) \cdot X_{x_0}(j\omega) = X_x(j\omega)$$

d'où $$\sigma_x^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega) \right|^2 \left| X_{x_0}(j\omega) \right|^2 d\omega$$ soit,

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega) \right|^2 \lim \frac{\left| X_{x_0}(j\omega) \right|^2}{2T}\, d\omega$$

avec $S_{x_0}(\omega) = \lim \dfrac{|X_{x_0}(j\omega)|^2}{2T}$ densité spéctrale énergetique

on aura finalement $$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega) \right|^2 S_{x_0}(\omega)\, d\omega$$

2-2 Cas particuliers

2-2-1 Variance de l'accélération de sortie $\ddot{x}(t)$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left| H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\,ds \quad \text{avec } s = j\omega$$

2-2-2 Variance de l'ecart $x(t) - x_0(t)$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\,ds \quad \text{avec } s = j\omega$$

2-2-3 Variance de la variation de l'accélération de sortie $\dddot{x}(t)$

$$\sigma_{\dddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left| s\, H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\,ds \quad \text{avec } s = j\omega$$

2-2-4 Variance de la vitesse de sortie $\dot{x}(t)$

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left| H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s)/s\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\,ds \quad \text{avec } s = j\omega.$$

3 Systèmes stables et réalisables

3-1 Systèmes stables

Un système est dit stable si à tout signal borné appliqué à son entrée correspond à sa sortie un signal borné.

a/ Dans le domaine du temps, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un systeme soit stable est que sa fonction de ponderation soit absolument intégrable :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < +\infty \quad (1)$$

b/ Dans le domaine des fréquences, la condition de stabilité définie par la relation (1) recquiert que le domaine de convergence de la fonction de transfert $H(p)$ contienne l'axe imaginaire $\sigma = 0$ $(p = j\omega)$

$$|H(p)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)||e^{-pt}|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)\, e^{-\sigma t} dt$$

et pour $\sigma = 0$ $\quad |H(p)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt \leq +\infty$

3-2 Systèmes réalisables :

Un système est dit réalisable si l'apparition d'un signal à sa sortie ne peut précèder l'application d'un signal à son entrée

a/ Dans le domaine du temps, un système est réalisable si $h(t) = 0$ pour $t < 0$

b/ Dans le domaine des fréquences, la condition pour qu'un système soit réalisable est que la fonction de transfert $H(p)$ ait pour domaine de convergence le demi-plan défini par $Re\{p\} > \sigma_0$ où σ_0 est un nombre fini

Dans ce cas, les singularités de $H(p)$ se trouvent à gauche de la droite $p = \sigma_0 + j\omega$ de telle sorte que

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} H(p)\, e^{pt}\, dp \text{ est nulle pour } t < 0$$

3-3 Systèmes physiquement réalisables

Un système est dit physiquement réalisable s'il est à la fois stable et réalisable

a/ Dans le domaine du temps :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < +\infty \quad \text{et} \quad h(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0$$

b/ Dans le domaine des fréquences

Critère de Paley-Wiener

Si l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\text{Log}\, |H(j\omega)||}{1+\omega^2}\, d\omega \text{ est bornée}$$

alors $|H(j\omega)|$ est le module de la fonction de tranfert d'un systeme physiquement realisable.

Si $I < +\infty$ alors $|H(j\omega)|^2 = H^*(j\omega)\, H(j\omega)$ peut être mis en produit de facteurs et il est possible que $H(j\omega)$ soit choisi de telle sorte que $H(p)$ ne contienne pas de

pôles dans la partie droite du plan complèxe $Re\{p\} > 0$
La fonction de transfert doit avoir pour domaine de convergence tout le demi-plan $Re\{p\} \geqslant 0$, c'est à dire qu'elle doit être analytique dans tout le demi-plan $Re\{p\} > 0$ et ne pas avoir de singularites sur l'axe imaginaire.

4- Systèmes linéaires stationnaires

En designant par $x_0(t)$ et $x(t)$ respectivement l'entrée et la sortie d'un système ; et par H un operateur fonctionnel qui transforme l'espace des signaux d'entrées $x_0(t)$ dans l'espace des signaux de sorties $x(t)$, on dit que H est linéaire si :

$$\begin{cases} H\left[x_{01}(t) + x_{02}(t)\right] = x_1(t) + x_2(t) \\ \text{et } H\left[\lambda x_{01}(t)\right] = \lambda H\left[x_{01}(t)\right] = \lambda x_1(t) \end{cases}$$

II PROBLEME DE CRITERE DE VIBRO-ISOLATION

1- Forme des critères et leurs dépendances des éxigences de normalisation et de structures d'objets.

1-1 Critère de déplacement relative

Pour un système donné ayant pour entrée $x_0(t)$ et sortie $x(t)$ on desire que l'ecart $\epsilon(t) = x_0(t) - x(t)$ soit minimum, qu'on caracterise par sa valeur quadratique moyenne.

$$\overline{\epsilon}^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \epsilon^2(t)\, dt$$

On peut déterminer la forme des fonctions de transfert pour ce système qui minimisent cet écart quadratique moyen par la méthode de N. Wiener.

Cette méthode est une synthèse de système lineaire optimale

On utilise généralement ce critere pour limiter les deplacements relatifs.

1-2 Critère de vitesse

Pendant le travail d'un homme opérateur, on ne peut fournir d'energie éxcedente au corps de cet operateur, car elle doit être amortie par ce corps, autrement dit le corps humain dans ce cas travaillera comme amortisseur dynamique alors les parties particulières de ce corps doivent executer certains mouvements. Ces derniers peuvent avoir des amplitudes qui ne sont pas admissibles du point de vue leurs fonctionnement et proprietés biologiques

Cette vitesse etant caracterisée par la valeur quadratique moyenne $\langle \dot{x}^2(t) \rangle = \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \dot{x}^2(t)\, dt$

1-3 Critère d'accélèration minimale

Pour répondre aux normes hygiéniques de confort et de sécurité dans le domaine de vibro-isolation, on emploie le critère d'accélèration minimale qui minimise l'accélèration de ce système de vibro-isolation ce qui impose la souplesse à ce système.

On caracterise l'accélèration du système dans ce cas :

par sa valeur quadratique moyenne.

$$\langle \ddot{x}^2(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \ddot{x}^2(t)\, dt$$

1-4 Critère de Jerk

Généralement dans la médecine du travail, on prend en considération les grandes variations d'accélération, dans ce cas ci on utilise le critère de Jerk qui minimise ces grandes variations $\frac{d}{dt}\left(\ddot{x}(t)\right) = \dddot{x}(t)$ en utilisant la valeur quadratique moyenne $\langle \dddot{x}^2(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \dddot{x}^2(t)\, dt$.

Actuellement on a une tendance vers l'emploi de ce critère, car on a découvert qu'il a une grande influence sur l'accélération.
Ce fait se manifeste surtout lors des expéditions ou vols spatiaux (spécialement pendant le décollage).

2 Définition de la fonctionnelle

Elle se rapporte, ou s'adapte aux fonctions mathématiques bien determinées

3 Enoncés des critères considérés

a/ Critere de deplacement relative, d'acceleration, et de Jerk

Pour ce critère (dont l'énoncé est au chap III paragraphe 3) la fonctionnelle est

$$C = \langle \epsilon^2(t) \rangle + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \ddot{x}^2(t) \rangle + \sum_{j=1}^{m} x_j \langle \dddot{x}^2(t) \rangle$$

b/ Critère de déplacement relative et de Jerk

On a d'une part, la condition de rigidité de notre système pour limiter les deplacements relatives ; et d'autre part on doit limiter les grandes variations d'accélèration pour des raisons de considèration de santé. Le compromis entre ces deux éxigences se traduit par la minimisation de la fonctionnelle ainsi definie $C = \langle \epsilon^2(t) \rangle + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \dddot{x}^2(t) \rangle$

c/ Critère de déplacement relative, et d'accélèration

D'un côte, le système de vibro-isolation doit-être souple pour avoir une accélèration minimale ; et d'un autre côté il doit être rigide pour limiter les déplacements relatifs.

Le cas optimum de ces deux conditions, se traduit par la minimisation de la fonctionnelle de ce critère, qui est

$$C = \langle \epsilon^2(t) \rangle + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \langle \ddot{x}^2(t) \rangle$$

d/ Critère de déplacement relative et de vitesse

D'un coté, notre système doit-être rigide pour limiter les déplacements relatifs, et d'un autre on doit supprimer ou à la rigueur limiter l'effet des amplitudes inadmissibles sur un corps humain lors de l'exécution d'un travail.

La fonctionnelle de critère ainsi definie est

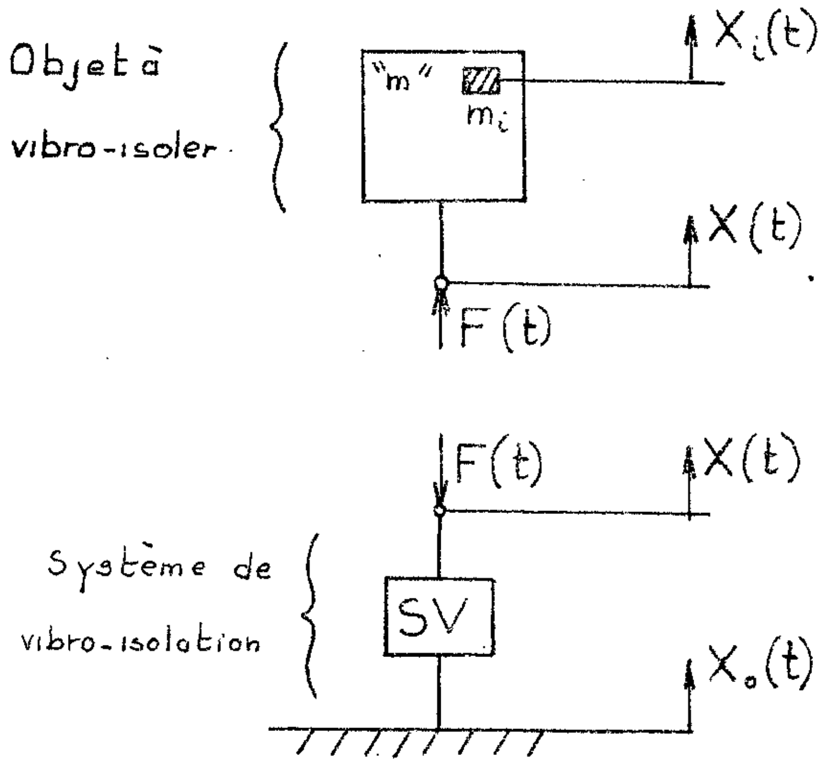
$$C = \langle \epsilon^2(t) \rangle + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \dot{x}_i^2(t) \rangle$$

N.B On a suppose dans tous les cas de critères, que les conditions initiales etaient nulles.

Les $\lambda_i, \gamma_i, \chi_j$ etant des multiplicateurs de Lagrange, et dont l'unité differe selon le type de critère considère

III CONSTRUCTION ANALYTIQUE DES SYSTEMES DE VIBRO-ISOLATION

1_Représentation générale du problème à étudier



2 Hypothèse

a/ Le système de vibro-isolation est un système linéaire à structure inconnue.

b/ On suppose qu'il n'existe que des vibrations verticales

c/ La nature de l'excitation $x_0(t)$ est un processus normal stationnaire et ergodique. Sa densité spéctrale est une fonction rationnelle de ω^2

d/ On suppose qu'il n'y a aucune action des systèmes sur l'excitation.

3_ Formulation mathématique du problème

Cas général : Critère de déplacement relative, d'accélération, et de Jerk

Notre système doit être rigide pour limiter les déplace-ments relatifs, souple pour obtenir une accélération minimale, et enfin on doit limiter les grandes variations d'accélération minimale pour prendre en considération de la santé humaine

Tout revient donc à avoir un compromis entre ces trois conditions

On note : par $\epsilon(t) = x(t) - x_0(t)$

$\ddot{x}_i(t) =$ acceleration de la masse i

$\dddot{x}_j(t) =$ variation de l'acceleration de masse j

Avec les hypotheses :

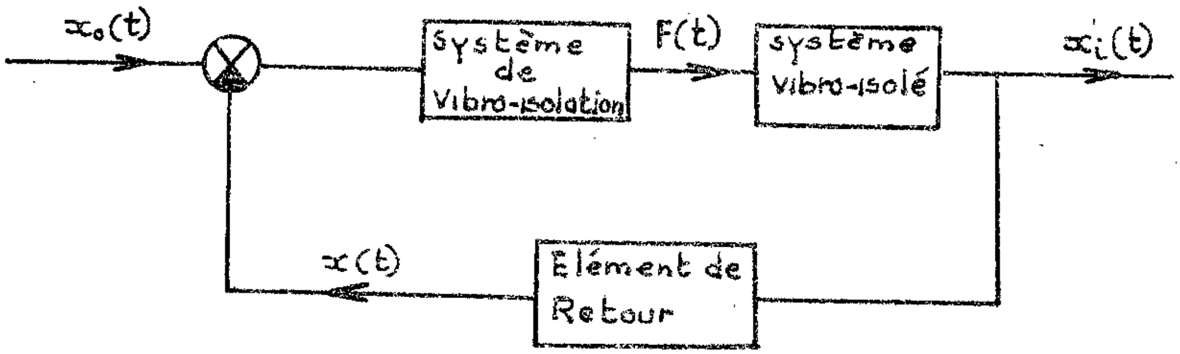
$$\epsilon(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0$$
$$\ddot{x}_i(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0$$
$$\dddot{x}_j(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0$$

Mathématiquement le problème se traduit par la minimi-sation de la fonctionnelle C :

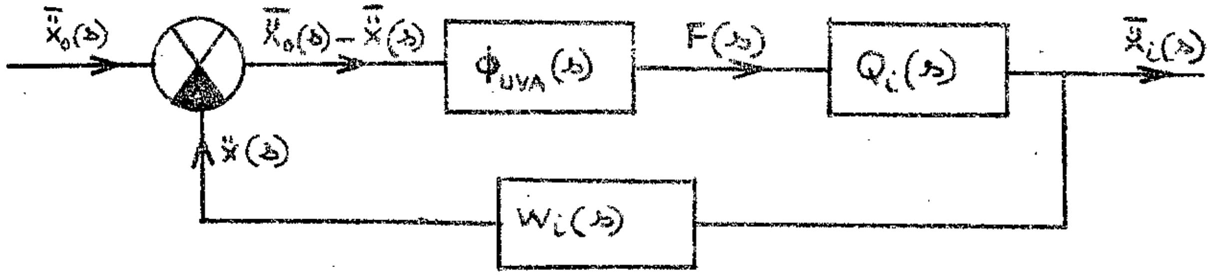
$$C = \int_0^\infty \left[\epsilon(t)\right]^2 dt + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^\infty \left[\ddot{x}_i(t)\right]^2 dt + \sum_{j=1}^{m} \chi_j \int_0^\infty \left[\dddot{x}_j(t)\right]^2 dt$$

où λ_i et χ_j sont les multiplicateurs de Lagrange.

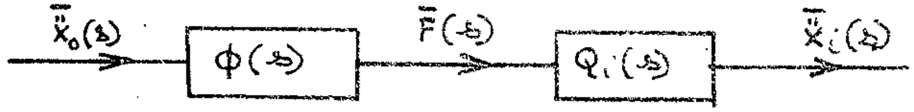
La representation de notre système à etudier en boucle fermée est :



En passant par les transformations de Laplace $\ddot{\bar{X}}_0(s)$, $\bar{X}_i(s)$, $\ddot{\bar{X}}(s)$ on aura le schema suivant :



En boucle ouverte on a :



Relations utiles :

En boucle ouverte on a :

$$\frac{\ddot{\bar{X}}_i(s)}{\ddot{\bar{X}}_0(s)} = \phi(s)\,Q_i(s)$$

En boucle fermée on a :

$$\frac{\ddot{\bar{X}}_i(s)}{\ddot{\bar{X}}_0(s)} = \frac{\phi_{UVA}(s)\,Q_i(s)}{1+\phi_{UVA}(s)\,Q_i(s)\,W_i(s)}$$

$$\Rightarrow \phi(s) = \frac{\phi_{UVA}(s)}{1+\phi_{UVA}(s)\,Q_i(s)\,W_i(s)}$$

avec $\phi(s) = \dfrac{\bar{F}(s)}{\ddot{\bar{X}}_0(s)}$

On désigne par

$$L_i(s) = \frac{\bar{X}_i(s)}{\bar{X}(s)} \quad \text{et} \quad L(s) = \frac{\bar{F}(s)}{\bar{X}(s)}$$

Alors

$$Q_i(s) = \frac{\ddot{\bar{X}}_i(s)}{\bar{F}(s)} = \frac{\ddot{\bar{X}}_i(s)}{\bar{X}(s)} \cdot \frac{\bar{X}(s)}{\bar{F}(s)} = \frac{s^2\bar{X}_i(s)}{\bar{X}(s)} \cdot \frac{\bar{X}(s)}{\bar{F}(s)} = \frac{s^2 L_i(s)}{L(s)}$$

et $W_i(s) = \dfrac{\overset{...}{x}(s)}{\ddot{x}_i(s)} = \dfrac{1}{L_i(s)}$

La fonctionnelle c est équivalente à

$$C = \langle \epsilon^2(t) \rangle + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \ddot{x}_i^2(t) \rangle + \sum_{j=1}^{m} \chi_j \langle \dddot{x}_j^2(t) \rangle$$

Pour la suite de l'étude on considere que $i = j$ et que $n = m$.

Donc
$$\langle \epsilon^2(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \epsilon^2(t)\, dt$$

$$\langle \ddot{x}_i^2(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \ddot{x}_i^2(t)\, dt$$

$$\langle \dddot{x}_i^2(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \dddot{x}_i^2(t)\, dt$$

En considérant que les valeurs moyennes de $\epsilon(t)$, $\ddot{x}_i(t)$, $\ddot{x}_j(t)$ sont nulles alors

$\langle \epsilon^2(t) \rangle = \sigma^2_{x-x_0}$ Dispersion de l'ecart

$\langle \ddot{x}_i^2(t) \rangle = \sigma^2_{\ddot{x}_i}$ Dispersion de l'accélèration

$\langle \dddot{x}_i^2(t) \rangle = \sigma^2_{\dddot{x}_i}$ Dispersion de la variation d'accélèration.

La fonctionnelle sera dans ce cas:

$$C = \sigma^2_{x-x_0} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma^2_{\ddot{x}_i} + \sum_{i=1}^{n} \chi_i \sigma^2_{\dddot{x}_i}$$

avec les relations suivantes :

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_i} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}_i}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$\sigma^2_{\dddot{x}_i} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| s\, H_{\frac{\ddot{x}_i}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

Les fonctions de transfert H étant égales à :

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\bar{X}(s)-\bar{X}_0(s)}{\ddot{\bar{X}}_0(s)} = \frac{\frac{\bar{X}(s)}{\bar{F}(s)} - \frac{\bar{X}_0(s)}{\bar{F}(s)}}{\frac{\ddot{\bar{X}}_0(s)}{\bar{F}(s)}} = \frac{\frac{1}{L(s)} - \frac{1}{s^2\Phi(s)}}{\frac{1}{\Phi(s)}} = \frac{\frac{s^2\Phi(s)}{L(s)} - 1}{s^2}$$

$$H_{\frac{\ddot{x}_i}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\ddot{\bar{X}}_i(s)}{\ddot{\bar{X}}_0(s)} = \frac{\ddot{\bar{X}}_i(s)}{\ddot{\bar{X}}(s)} \cdot \frac{\ddot{\bar{X}}(s)}{s^2\bar{X}_0(s)} = \frac{\ddot{\bar{X}}_i(s)}{\ddot{\bar{X}}(s)} \cdot \frac{s^2\bar{X}(s)}{s^2\bar{X}_0(s)}$$

$$= L_i(s)\frac{\bar{X}(s)}{\bar{F}(s)} \cdot \frac{\bar{F}(s)}{\bar{X}_0(s)} = \frac{s^2 L_i(s)\Phi(s)}{L(s)}$$

En posant $G(s) = \dfrac{s^2}{L(s)}$ on aura finalement

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\Phi(s)G(s)-1}{s^2}$$

$$H_{\frac{\ddot{x}_i}{\ddot{x}_0}}(s) = G(s)\,L_i(s)\,\Phi(s)$$

En utilisant le fait que $|H(s)|^2 = H(s)\,H(-s)$ L'expression (1) devient

$$C = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left\{\left[\frac{\phi(s)G(s)-1}{s^2}\right]\left[\frac{\phi(-s)G(-s)-1}{s^2}\right]+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Big[G(s)\phi(s)L_i(s)\Big]\Big[G(-s)\phi(-s)L_i(-s)\Big]+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\mathcal{X}_i\Big[s\,\phi(s)\,G(s)\,L_i(s)\Big]\Big[-s\,\phi(-s)\,G(-s)\,L_i(-s)\Big]\right\} S_{\ddot{x}_0}(s)\,ds$$

on sait d'autre part par hypothèse que $S_{\ddot{x}_0}(\omega)$ est une fraction rationnelle de ω^2, on peut ainsi ecrire que :

$S_{\ddot{x}_0}(s) = s^4 . S_0\, \varphi(s)\, \varphi(-s)$ avec S_0 = constante et $s = j\omega$.

Finalement

$$C = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left\{\Big[\phi(s)\,G(s)-1\Big]\Big[\phi(-s)G(-s)-1\Big]+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Big[G(s)\,L_i(s)\,\phi(s)\Big]s^4\times\right.$$

$$\left.\Big[G(-s)\,L_i(-s)\,\phi(-s)\Big]-\sum_{i=1}^{n}\mathcal{X}_i\,s^6\Big[G(s)L_i(s)\,\phi(s)\Big]\Big[G(-s)\,L_i(-s)\,\phi(-s)\Big]\right\} S_0\,\varphi(s)\varphi(-s)\,ds$$

4 Solution générale du problème par L'equation de Wiener-Hopf

Soit $\phi_W(s) = \phi(s) + \varepsilon\,\eta(s)$

ou $\eta(s)$: Fonction de balance arbitraire

ε : paramètre constant.

$\varepsilon\,\eta(s)$: représente ainsi $\phi_W(s) - \phi(s)$

$\phi_W(s)$ représentant La fonction optimum pour Laquelle la fonction-nelle C est minimale. En designant par C^* La valeur de celle-ci

On aura ainsi

$$C^{*}=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\Bigg\{\Big[\big(\phi(s)+\varepsilon\eta(s)\big)G(s)-1\Big]\Big[\big(\phi(-s)+\varepsilon\eta(-s)\big)G(-s)-1\Big]+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i s^4\times$$

$$\times\Big[G(s)L_i(s)\big(\phi(s)+\varepsilon\eta(s)\big)\Big]\Big[G(-s)L_i(-s)\big(\phi(-s)+\varepsilon\eta(-s)\big)\Big]+$$

$$-\sum_{i=1}^{n'}\chi_i s^6\Big[G(s)L_i(s)\big(\phi(s)+\varepsilon\eta(s)\big)\Big]\Big[G(s)L_i(s)\big(\phi(-s)+\varepsilon\eta(-s)\big)\Big]\Bigg\}\times$$

$$S_0\,\varphi(s)\varphi(-s)\,ds$$

Soit $\delta C = C^{*}-C$ l'erreur entre C^{*} et C.

Alors on aura

$$\delta C=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\Bigg\{\Big[\big(\phi(s)G(s)+\varepsilon\eta(s)G(s)-1\Big]\Big[\phi(-s)G(-s)+\varepsilon\eta(-s)G(-s)-1\Big]+$$

$$-\Big[\phi(s)G(s)-1\Big]\Big[\phi(-s)G(-s)-1\Big]+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i s^4\Big[\big(G(s)L_i(s)\phi(s)+G(s)L_i(s)\varepsilon\eta(s)\big)\times$$

$$\times\big(G(-s)L_i(-s)\phi(-s)+G(-s)L_i(-s)\varepsilon\eta(-s)\big)-\big(G(s)L_i(s)\phi(s)\big)\big(G(-s)L_i(-s)\phi(-s)\big)\Big]+$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\chi_i s^6\Big[\big(G(s)L_i(s)\phi(s)+G(s)L_i(s)\varepsilon\eta(s)\big)\big(G(-s)L_i(-s)\phi(-s)+G(-s)L_i(-s)\varepsilon\eta(-s)\big)+$$

$$-\big(G(s)L_i(s)\phi(s)\big)\big(G(-s)L_i(-s)\phi(-s)\big)\Big]\,S_0\,\varphi(s)\varphi(-s)\,ds.$$

$$\delta C = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\Big\{\Big[\varepsilon\,\eta(s)G(s)\phi(-s)G(-s) - \varepsilon\,\eta(s)G(s) + \varepsilon^2\eta(s)\,\eta(-s)\,G(s)G(-s) +$$

$$- \varepsilon\,\eta(-s)G(-s) + \varepsilon\,\eta(-s)G(-s)\phi(s)G(s)\Big] + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, s^4\Big[G(s)L_i(s)\phi(s)G(-s)\times$$

$$L_i(-s)\varepsilon\eta(-s) + G(s)L_i(s)\,\varepsilon\eta(s)\,G(-s)L_i(-s)\phi(-s) + \varepsilon^2 G(s)G(-s)L_i(s)\times$$

$$L_i(-s)\eta(s)\eta(-s)\Big] - \sum_{i=1}^{n}\chi_i\, s^6\Big[G(s)L_i(s)\phi(s)G(-s)L_i(-s)\,\varepsilon\,\eta(-s) +$$

$$+ G(s)L_i(s)\,\varepsilon\,\eta(s)\,G(-s)L_i(-s)\phi(-s) + \varepsilon^2 G(s)G(-s)L_i(s)L_i(-s)\eta(s)\eta(-s)\Big]\Big\}$$

$S_0\,\varphi(s)\varphi(-s)\,ds$.

Identifier $\phi(s)$ à $\phi_w(s)$ revient à minimiser l'erreur δC pour $\varepsilon = 0$ ce qui se traduit par.

$$\left.\frac{d(\delta C)}{d\,\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \qquad \text{donc}$$

$$\int_{-j\infty}^{j\infty}\Big\{\Big[\phi(s)G(s)G(-s)\,\eta(-s) + \phi(-s)G(-s)G(s)\,\eta(s) - G(-s)\,\eta(-s) - \eta(s)G(s)\Big] +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, s^4\Big[\phi(s)G(s)G(-s)L_i(s)L_i(-s)\,\eta(-s) + \phi(-s)G(-s)G(s)L_i(-s)L_i(s)\eta(s)\Big] +$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\chi_i\, s^6\Big[\phi(s)G(s)G(-s)L_i(s)L_i(-s)\,\eta(-s) + \phi(-s)G(-s)G(s)L_i(-s)L_i(s)\,\eta(s)\Big]S_0\varphi(s)\varphi(-s)\,ds$$

$$\int_{-j\infty}^{j\infty}\left\{\left[\left(G(s)G(-s)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i s^4 L_i(s)L_i(-s)G(s)G(-s)-\sum_{i=1}^{n}\chi_i s^6 L_i(s)L_i(-s)G(s)G(-s)\right)\phi(s)-G(-s)\right]\times\right.$$

$$\eta(-s)+\left[\left(G(s)G(-s)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i s^4 L_i(s)L_i(-s)G(s)G(-s)-\sum_{i=1}^{n}\chi_i s^6 L_i(s)L_i(-s)G(s)G(-s)\right)\phi(-s)-G(s)\right]\eta(s)\Bigg\}\times$$

$$S_0\,\varphi(s)\varphi(-s)\,ds=0$$

Posons

$$D(s)D(-s)=\left[1+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i s^4 L_i(s)L_i(-s)-\sum_{i=1}^{n}\chi_i s^6 L_i(s)L_i(-s)\right]G(s)G(-s).$$

On aura donc

$$\int_{-j\infty}^{j\infty}\left\{\left[D(s)D(-s)\varphi(s)\varphi(-s)\,\phi(s)-G(-s)\varphi(s)\varphi(-s)\right]\eta(-s)+\left[D(s)D(-s)\varphi(s)\varphi(-s)\phi(-s)+\right.\right.$$

$$\left.\left.-\,G(s)\varphi(s)\varphi(-s)\right]\eta(s)\right\}ds=0$$

$$\int_{-j\infty}^{j\infty}\left\{\left[D(s)\varphi(s)\phi(s)-\frac{G(-s)\varphi(s)}{D(-s)}\right]D(-s)\varphi(-s)\,\eta(-s)+\left[D(-s)\varphi(-s)\phi(-s)-\frac{G(s)\varphi(-s)}{D(s)}\right]\times\right.$$

$$\left.D(s)\varphi(s)\eta(s)\right\}ds=0$$

Que l'on peut ecrire

$$\int_{-j\infty}^{j\infty}\left[D(s)\varphi(s)\phi(s)-\frac{G(-s)\varphi(s)}{D(-s)}\right]D(-s)\varphi(-s)\,\eta(-s)\,ds+\int_{-j\infty}^{j\infty}\left[D(-s)\varphi(-s)\phi(-s)+\right.$$

$$\left.\left.-\,\frac{G(s)\varphi(-s)}{D(s)}\right]\right\}D(s)\varphi(s)\eta(s)\,ds=0$$

$D(s)\varphi(s)\phi(s)$ a des pôles à gauche de l'axe imaginaire, par conséquent de $\dfrac{G(-s)\varphi(s)}{D(-s)}$ on ne prend que la partie ayant des pôles à gauche de cet axe, afin de pouvoir effectuer la différence $D(s)\varphi(s)\phi(s) - \dfrac{G(-s)\varphi(s)}{D(-s)}$ en respectant les conditions de stabilité et de réalisation

La deuxième intégrale est l'opposée de la première

$$\int_{-j\infty}^{j\infty}\left[D(-s)\varphi(-s)\phi(-s) - \left\{\frac{G(s)\varphi(-s)}{D(s)}\right\}_-\right] D(s)\varphi(s)\eta(s)\,ds$$

En effectuant le changement de variable s en $-s$

on aura

$$-\int_{j\infty}^{-j\infty}\left[D(s)\varphi(s)\phi(s) - \left\{\frac{G(-s)\varphi(s)}{D(-s)}\right\}_+\right] D(-s)\varphi(-s)\eta(-s)\,ds$$

equivalente à :

$$\int_{-j\infty}^{j\infty}\left[D(s)\varphi(s)\phi(s) - \left\{\frac{G(-s)\varphi(s)}{D(-s)}\right\}\right] D(-s)\varphi(-s)\eta(-s)\,ds$$

Cette dernière intégrale etant identique à la première, tout revient à la résolution de l'equation intégrale

$$2\int_{-j\infty}^{j\infty}\left[D(s)\varphi(s)\phi(s) - \left\{\frac{G(-s)\varphi(s)}{D(-s)}\right\}_+\right] D(-s)\varphi(-s)\eta(-s)\,ds = 0$$

d'où
$$\phi(s) = \frac{1}{D(s)\,\varphi(s)}\left\{\frac{G(-s)\,\varphi(s)}{D(-s)}\right\}_+$$

En posant

$$R(s)R(-s) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s^4 L_i(s) L_i(-s) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s^6 L_i(s) L_i(-s)$$

c'est à dire

$$D(s)D(-s) = R(s)R(-s)G(s)G(-s)$$

donc $\quad D(s) = R(s)\,G(s)$

Finalement

$$\phi(s) = \frac{1}{R(s)G(s)\varphi(s)} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$$

et on peut deduire $\phi_{UVA}(s)$ sachant que

$$\phi_{UVA} = \frac{\phi(s)}{1-\phi(s)W_i(s)Q_i(s)} = \frac{\phi(s)}{1-\phi(s)\frac{s^2}{L(s)}}$$

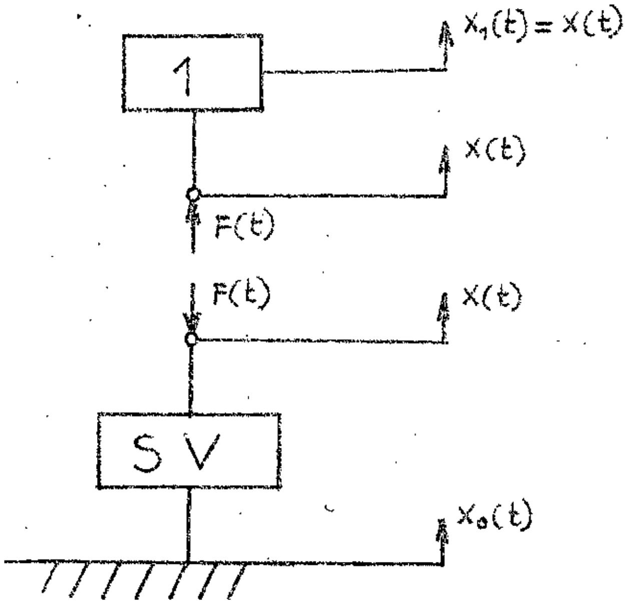
$$\phi_{UVA} = \frac{\phi(s)}{1-\phi(s)G(s)}$$

Pour l'étude des autres critères par cette méthode de Wiener-Hopf, ce résultat reste valable avec seulement le produit $R(s)\,R(-s)$ qui sera modifié selon ces divers critères

IV SYSTEME DE VIBRO-ISOLATION POUR VIBRO-ISOLER UN CORPS RIGIDE

1- Critère de déplacement relatif, d'accélération, et de Jerk.

1-1 Excitation par un processus tel que $S_{\ddot{x}_0}(s) = N^2$



1 : Corps à vibro-isoler.

$$L_1(s) = \frac{x_1(s)}{x(s)} = 1 \quad \text{donc} \quad R(s)\,R(-s) = 1 + \lambda s^4 - \mathcal{X} s^6$$

La fonction de transfert optimum du système de vibro-isolation est donnée par l'expression

$$\phi(s) = \frac{1}{\varphi(s)\,R(s)\,G(s)} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$$

avec $\varphi(s)$ telle $S_{\ddot{x}_0}(s) = s^4 S_0 \varphi(s)\varphi(-s)$

$$G(s) = \frac{s^2}{L(s)} \quad \text{ou} \quad L(s) = \frac{F(s)}{\ddot{X}(s)} = m s^2 \quad m : \text{masse du corps}$$

d'ou $G'(s) = \frac{1}{m}$.

On a d'autre part $R(s)R(-s) = 1 + \lambda s^4 - \mathcal{X} s^6$

que l'on peut écrire sous la forme

$$R(s)R(-s) = (A s^3 + B s^2 + E s + D)(-A s^3 + B s^2 - E s + D)$$

Par identification on tire

$$A = \sqrt{\mathcal{X}_i}$$
$$B = \lambda + 2E\sqrt{\mathcal{X}}$$
$$E = \sqrt{2B}$$
$$D = 1$$

d'ou $R(s) = A s^3 + B s^2 + E s + D$

On a
$$\left.\begin{aligned} S_{\ddot{x}_0}(s) &= N^2 \\ S_{\ddot{x}_0}(s) &= s^4 S_0 \varphi(s)\varphi(-s) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} \varphi(s) &= \frac{1}{s^2} \\ S_0 &= N^2 \end{aligned}$$

d'ou

$$\phi(s) = \frac{1}{(A s^3 + B s^2 + E s + D)\frac{1}{m}\frac{1}{s^2}} \left\{ \frac{\frac{1}{s^2}}{-A s^3 + B s^2 - E s + D} \right\}_+$$

En posant

$$M = \frac{1}{s^2(-A s^3 + B s^2 - E s + D)}$$

Que nous décomposons en

$$M = \underbrace{\frac{Fs+G}{s^2}}_{M+} + \underbrace{\frac{Hs^2+Is+J}{-As^3+Bs^2-Es+D}}_{M-}$$

Par identification on tire

$H - AF = 0$

$FB - AG + I = 0$

$BG - FE + J = 0$

$FD - EG = 0$

$D = 1$

On ne prend que $M_+ = \dfrac{Fs+G}{s^2}$

D'où $\phi(s) = \dfrac{m\,(Fs+G)}{(As^3+Bs^2+Es+D)}$

Détermination des dispersions de $\sigma^2_{\ddot{x}}$, $\sigma^2_{\dddot{x}}$, et $\sigma^2_{x-x_0}$

a/ Dispersion de l'accélération

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\,ds$$

avec $H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) = \phi(s)\,G(s)\,L(s) = \dfrac{m\,(Fs+G)}{(As^3+Bs^2+Es+D)}\,\dfrac{1}{m}\,.\,1$

$$H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{Fs+G}{(As^3+Bs^2+Es+D)}$$

1-2 Excitation par un processus tel que $S_{\ddot{X}_0}(s) = 2\alpha_1 N^2 \dfrac{\Omega^2 - s^2}{(-\Omega^2 + s^2)^2 - 4\alpha_1 s^2}$

La fonction de transfert optimum du système de vibro-isolation est donnée par l'expression :

$$\phi(s) = \frac{1}{R(s)\, G(s)\, \varphi(s)} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$$

Determinons $\varphi(s)$

$$S_{\ddot{X}_0}(s) = 2\alpha_1 N^2 s^4 \, \frac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \cdot \frac{\Omega - s}{s^2(s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}$$

d'où $\varphi(s) = \dfrac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}$

Sachant que

$R(s) = A s^3 + B s^2 + E s + D$

$G(s) = \dfrac{1}{m}$

Alors

$$\phi(s) = \frac{1}{(A s^3 + B s^2 + E s + D)\, \frac{1}{m}\, \frac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}} \left\{ \frac{\dfrac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}}{-A s^3 + B s^2 - E s + D} \right\}_+$$

Posons

$$T = \frac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)(-A s^3 + B s^2 - E s + D)}$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = N^2 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{Fs + G}{As^3 + Bs^2 + Es + D} \right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = N^2 \frac{F^2 D + G^2 B}{2D(EB - DA)}$$

b/ Dispersion de Jerk

$$\sigma^2_{\dddot{x}} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| s\, H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$= N^2 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{Fs^2 + Gs}{As^3 + Bs^2 + Es + D} \right|^2 ds$$

La table d'integrale donne

$$\sigma^2_{\dddot{x}} = N^2 \frac{F^2 E + G^2 A}{2A(EB - DA)}$$

c/ Dispersion du déplacement relatif

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

La table d'intégrale donne avec

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\phi(s)\,G(s) - 1}{s^2} = \frac{-As - B}{As^3 + Bs^2 + Es + D}$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = N^2 \frac{A^2 D + B^3}{2DA(EB - DA)}$$

1-2 Excitation par un processus tel que $S_{\ddot{x}_0}(s) = 2\alpha_1 N^2 \dfrac{\Omega^2 - s^2}{(-\Omega^2 + s^2)^2 - 4\alpha_1 s^2}$

La fonction de transfert optimum du système de vibro-isolation est donnée par l'expression :

$$\phi(s) = \frac{1}{R(s)\,G(s)\,\varphi(s)} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$$

Determinons $\varphi(s)$

$$S_{\ddot{x}_0}(s) = 2\alpha_1 N^2 s^4 \frac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \cdot \frac{\Omega - s}{s^2(s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}$$

d'où $\varphi(s) = \dfrac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}$

Sachant que

$$R(s) = A s^3 + B s^2 + E s + D$$

$$G(s) = \frac{1}{m}$$

Alors

$$\phi(s) = \frac{1}{(A s^3 + B s^2 + E s + D)\, \dfrac{1}{m}\, \dfrac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}} \left\{ \frac{\dfrac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}}{-A s^3 + B s^2 - E s + D} \right\}_+$$

Posons

$$T = \frac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)(-A s^3 + B s^2 - E s + D)}$$

Que nous décomposons en

$$T = \frac{Ms^3 + Ns^2 + Ps + Q}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} + \frac{Rs^2 + Is + U}{-As^3 + Bs^2 - Es + D}$$

Par identification on tire

$$-MA + R$$

$$MB - NA + 2\sqrt{\alpha_1}\, R + I = 0$$

$$-ME + NB - PA + R\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, I + U = 0$$

$$MD - NE + PB - QA + I\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, U = 0$$

$$ND - PE + QB + U\Omega^2 = 0$$

$$PD - QE = 1$$

$$QD = \Omega$$

La résolution de ce système determine les valeurs des coefficients M, N, P, Q, R, I, U

d'où $$T_+ = \frac{Ms^3 + Ns^2 + Ps + Q}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}$$

d'où $$\phi(s) = \frac{m\,(Ms^3 + Ns^2 + Ps + Q)}{(As^3 + Bs^2 + Es + D)\,(\Omega + s)}.$$

Détermination des dispersions de $\sigma^2_{\ddot{X}}$, $\sigma^2_{\dddot{X}}$, $\sigma^2_{X-X_0}$

a/ Dispersion de l'accélération.

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\,ds$$

Avec

$$H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) = \phi(s)G(s)L(s) = \frac{m(Ms^3+Ns^2+Ps+Q)}{(As^3+Bs^2+Es+D)(\Omega+s)}\cdot\frac{1}{m}\cdot 1$$

$$H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{Ms^3+Ns^2+Ps+Q}{(As^3+Bs^2+Es+D)(\Omega+s)} \qquad \text{d'où}$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{Ms^3+Ns^2+Ps+Q}{(As^3+Bs^2+Es+D)(\Omega+s)}\right|^2 2\alpha_1 N^2\,\frac{\Omega+s}{(s^2+2\sqrt{\alpha_1}\,s+\Omega^2)}\cdot\frac{\Omega-s}{(s^2-2\sqrt{\alpha_1}\,s+\Omega^2)}\,ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = 2\alpha_1 N^2\,\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{Ms^3+Ns^2+Ps+Q}{(As^3+Bs^2+Es+D)(s^2+2\sqrt{\alpha_1}\,s+\Omega^2)}\right|^2 ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = 2\alpha_1 N^2\,\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{Ms^3+Ns^2+Ps+Q}{As^5+(2\sqrt{\alpha_1}A+B)s^4+(A\Omega^2+2\sqrt{\alpha_1}B+E)s^3+(B\Omega^2+2\sqrt{\alpha_1}E+D)s^2+(E\Omega^2+2\sqrt{\alpha_1}D)s+D\Omega^2}\right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne.

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\Delta_5}\left[c_4^2 m_0+(c_3^2-2c_2c_4)m_1+(c_2^2-2c_1c_3+2c_0c_4)m_2+(c_1^2-2c_0c_2)m_3+c_0^2 m_4\right]2\alpha_1 N^2.$$

Avec :

$$m_0 = \frac{1}{d_5}\left(d_3 m_1 - d_1 m_2\right)$$

$$m_1 = -d_0 d_3 + d_1 d_2$$

$$m_2 = -d_0 d_5 + d_1 d_4$$

$$m_3 = \frac{1}{d_0}\left(d_2 m_2 - d_4 m_1\right)$$

$$m_4 = \frac{1}{d_0}\left(d_2 m_3 - d_4 m_2\right)$$

$$\Delta_5 = d_0\left(d_1 m_4 - d_3 m_3 + d_5 m_2\right)$$

où $d_5 = A$

$d_4 = 2\sqrt{\alpha_1}\, A + B$	$c_4 = 0$
$d_3 = A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, B + E$	$c_3 = M$
$d_2 = B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, E + D$	$c_2 = N$
$d_1 = E\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, D$	$c_1 = P$
$d_0 = D\Omega^2$	$c_0 = Q$

On obtient ainsi une valeur finie de $\sigma^2_{\ddot{x}}$

b/ Dispersion de Jerk.

$$\sigma^2_{\dddot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| s\, H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$\sigma^2_{\dddot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{Ms^4 + Ns^3 + Ps^2 + Qs}{(As^3 + Bs^2 + Es + D)(\Omega + s)}\right|^2 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega + s}{(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \cdot \frac{\Omega - s}{(s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}\, ds$$

$$\sigma^2_{\dddot{x}} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{Ms^4 + Ns^3 + Ps^2 + Qs}{(As^3 + Bs^2 + Es + D)(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}\right|^2 ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{M s^4 + N s^3 + P s^2 + Q s}{A s^5 + (2\sqrt{\alpha_1} A + B) s^4 + (A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1} B + E) s^3 + (B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1} E + D) s^2 + (E\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1} D) s + D\Omega^2} \right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne.

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = 2\alpha_1 N^2 \cdot \frac{1}{2\Delta_5} \left[c_4^2 m_0 + (c_3^2 - 2c_2c_4) m_1 + (c_2^2 - 2c_1c_3 + 2c_0c_4) m_2 + (c_1^2 - 2c_0c_2) m_3 + c_0^2 m_4 \right]$$

Avec

$$m_0 = \frac{1}{d_5}(d_3 m_1 - d_1 m_2)$$

$$m_1 = -d_0 d_3 + d_1 d_2$$

$$m_2 = -d_0 d_5 + d_1 d_4$$

$$m_3 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_2 - d_4 m_1)$$

$$m_4 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_3 - d_4 m_2)$$

$$\Delta_5 = d_0 (d_1 m_4 - d_3 m_3 + d_5 m_2)$$

où $d_5 = A$

$d_4 = 2\sqrt{\alpha_1} A + B$	$c_4 = M$
$d_3 = A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1} B + E$	$c_3 = N$
$d_2 = B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1} E + D$	$c_2 = P$
$d_1 = E\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1} D$	$c_1 = Q$
$d_0 = D\Omega^2$	$c_0 = 0$

on a aussi obtenu une valeur finie de $\sigma^2_{\ddot{x}}$.

c/ Dispersion du déplacement relative

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

Avec

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\phi(s)\, G(s) - 1}{s^2} = \frac{-As^2 + (M - A\Omega - B)s + N - B\Omega - E}{(As^3 + Bs^2 + Es + D)(\Omega + s)}$$

$$\text{d'où } \sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{-As^2 + (M - A\Omega - B)s + N - B\Omega - E}{(As^3 + Bs^2 + Es + D)(\Omega + s)} \right|^2 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega + s}{(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \frac{\Omega - s}{(s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}\, ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{-As^2 + (M - A\Omega - B)s + N - B\Omega - E}{(As^3 + Bs^2 + Es + D)(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \right| ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{-As^2 + (M - A\Omega - B)s + N - B\Omega - E}{As^5 + (2\sqrt{\alpha_1}A + B)s^4 + (A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}B + E)s^3 + (B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}E + D)s^2 + (E\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}D)s + D\Omega^2} \right|^2 ds$$

La table d'integrale donne.

$$\sigma^2_{x-x_0} = \alpha_1 N^2 \frac{1}{\Delta_5}\Big[c_4^2 m_0 + (c_3^2 - 2c_2c_4)m_1 + (c_2^2 - 2c_1c_3 + 2c_0c_4)m_2 + (c_1^2 - 2c_0c_2)m_3 + c_0^2 m_4\Big]$$

Avec

$$m_0 = \frac{1}{d_5}\left(d_3 m_1 - d_1 m_2\right)$$

$$m_1 = -d_0 d_3 + d_1 d_2$$

$$m_2 = -d_0 d_5 + d_1 d_4$$

$$m_3 = \frac{1}{d_0}\left(d_2 m_2 - d_4 m_1\right)$$

$$m_4 = \frac{1}{d_0}\left(d_2 m_3 - d_4 m_2\right)$$

$$\Delta_5 = d_0 \left(d_1 m_4 - d_3 m_3 + d_5 m_2\right)$$

où $d_5 = A$

$$d_4 = 2\sqrt{\alpha_1}A + B \qquad c_4 = 0$$

$$d_3 = A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}B + E \qquad c_3 = 0$$

$$d_2 = B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}E + D \qquad c_2 = -A$$

$$d_1 = E\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}D \qquad c_1 = M - A\Omega - B$$

$$d_0 = D\Omega^2 \qquad c_0 = N - B\Omega - E$$

On aura par conséquent une valeur finie de $\sigma^2_{x-x_0}$

2 Critère de déplacement relative et de Jerk

2-1 excitation par un processus tel que $S_{\dddot{x}_0}(s) = N^2$

La fonction de transfert optimum du système de vibro-isolation est donnée par

$$\phi(s) = \frac{1}{R(s)G(s)\varphi(s)}\left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+$$

Pour ce critère, le produit $R(s)\,R(-s)$ est tel que

$$R(s)\,R(-s) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, s^6\, L_i(s)\, L_i(-s)$$

Pour notre système de vibro-isolation pour un corps rigide

on a $L_1(s) = 1$ avec $i = 1$

$$R(s)\,R(-s) = 1 - \lambda s^6$$

Que nous décomposons en

$$R(s) = A s^3 + B s^2 + C s + D$$

$$R(s)\,R(-s) = (A s^3 + B s^2 + C s + D)(-A s^3 + B s^2 - C s + D)$$

Par identification on tire

$$A = \lambda^{1/2}$$

$$\left.\begin{aligned} B^2 - 2AC &= 0 \\ 2BD - C^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \begin{aligned} C &= 2\lambda^{1/6} \\ B &= 2\lambda^{1/3} \end{aligned}$$

$$D = 1$$

d'où $\quad R(s) = \lambda^{1/2} s^3 + 2\lambda^{1/3} s^2 + 2\lambda^{1/6} s + 1$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\dot{x}_0}(s) = N^2 \\ S_{\dot{x}_0}(s) = s^4 S_0\, \varphi(s)\, \varphi(-s) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} S_0 = N^2 \\ \varphi(s) = \dfrac{1}{s^2} \end{array}$$

$$G(s) = \frac{1}{m}$$

Donc $$\phi(s) = \frac{1}{\left(\lambda^{1/2} s^3 + 2\lambda^{1/3} s^2 + 2\lambda^{1/6} s + 1\right)\frac{1}{m}\frac{1}{s^2}} \left\{ \frac{\frac{1}{s^2}}{-\lambda^{1/2} s^3 + 2\lambda^{1/3} s^2 - 2\lambda^{1/6} s + 1} \right\}_+$$

Posons $$M = \frac{1}{s^2\left(-\lambda^{1/2} s^3 + 2\lambda^{1/3} s^2 - 2\lambda^{1/6} s + 1\right)}$$

Que nous décomposons en

$$M = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{Cs^2 + Ds + E}{-\lambda^{1/2} s^3 + 2\lambda^{1/3} s^2 - 2\lambda^{1/6} s + 1}$$

Par identification on tire

$A = 1$

$B = -2\lambda^{1/6}$

$C = -2\lambda^{2/3}$

$D = 3\lambda^{1/2}$

$E = 2\lambda^{1/3}$

D'ou

$$M_+ = \frac{1}{s^2} - \frac{2\lambda^{1/6}}{s} = \frac{1 - 2\lambda^{1/6} s}{s^2}$$

On aura finalement :

$$\phi(s) = \frac{m\left(1 - 2\lambda^{1/6}s\right)}{\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 + 2\lambda^{1/6}s + 1}$$

Détermination des dispersions de $\sigma^2_{\ddot{x}}$, $\sigma^2_{\dddot{x}}$, $\sigma^2_{x-x_0}$

a/ Dispersion de l'accélération.

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

Avec $H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) = G(s)\, L_1(s)\, \phi(s) = \frac{1}{m} \cdot 1 \cdot \frac{\left(1 - 2\lambda^{1/6}s\right)m}{\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 + 2\lambda^{1/6}s + 1}$

$$H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{1 - 2\lambda^{1/6}s}{\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 + 2\lambda^{1/6}s + 1}$$ d'où

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{1 - 2\lambda^{1/6}s}{\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 + 2\lambda^{1/6}s + 1} \right|^2 N^2\, ds$$

La table d'intégrale donne :

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = N^2 \frac{1}{\lambda^{1/6}}$$

b/ Dispersion de Jerk

$$\sigma^2_{\dddot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| s\, H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$\sigma^2_{\dddot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{s - 2\lambda^{1/6}s^2}{\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 + 2\lambda^{1/6}s + 1} \right|^2 N^2\, ds$$

La table d'intégrale donne:

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = N^2 \frac{3}{2\lambda^{1/2}}$$

c/ Dispersion du déplacement relative

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\phi(s)G(s) - 1}{s^2} = \frac{-\lambda^{1/2} s - 2\lambda^{1/3}}{\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 + 2\lambda^{1/6}s + 1} \qquad \text{d'où}$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{-\lambda^{1/2} s - 2\lambda^{1/3}}{\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 + 2\lambda^{1/6}s + 1} \right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne

$$\sigma^2_{x-x_0} = N^2 \frac{3}{2} \lambda^{1/2}$$

2-2 éxcitation par un processus tel que $S_{\ddot{x}_0}(s) = 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega^2 - s^2}{(\Omega^2 + s^2)^2 - 4\alpha_1 s^2}$

On a $\quad \phi(s) = \dfrac{1}{R(s)G(s)\varphi(s)} \left[\dfrac{\varphi(s)}{R(-s)} \right]_+$

on sait que

$$\varphi(s) = \frac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}$$

$$R(s) = \lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 + 2\lambda^{1/6}s + 1$$

d'où $\phi(s) = \dfrac{1}{(\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 + 2\lambda^{1/6}s + 1)\,\dfrac{1}{m}\,\dfrac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\,s + \Omega^2)}} \left\{ \dfrac{\dfrac{\Omega + s}{s^2(s^2+2\sqrt{\alpha_1}\,s+\Omega^2)}}{-\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 - 2\lambda^{1/6}s + 1} \right\}_+$

Posons

$$M = \frac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\,s + \Omega^2)(-\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 - 2\lambda^{1/6}s + 1)}$$

Que nous décomposons en

$$M = \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\,s + \Omega^2)} + \frac{Js^2 + Ks + L}{-\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 - 2\lambda^{1/6}s + 1}$$

Par identification on tire

$$-\lambda^{1/2}F + J = 0$$

$$2\lambda^{1/3}F - \lambda^{1/2}G + 2\sqrt{\alpha_1}\,J + K = 0$$

$$-2\lambda^{1/6}F + 2\lambda^{1/3}G - \lambda^{1/2}H + J\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\,K + L = 0$$

$$F - 2\lambda^{1/6}G + 2\lambda^{1/3}H - \lambda^{1/2}I + K\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\,L = 0$$

$$G - 2\lambda^{1/6}H + 2\lambda^{1/3}I + L\Omega^2 = 0$$

$$H - 2\lambda^{1/6}I = 1$$

$$I = \Omega$$

La résolution de ce système d'equation, nous donne les valeurs des coefficients F, G, H, I, J, K, L.

On ne prend de M que la valeur

$$M_+ = \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\,s + \Omega^2)}$$

d'où $\phi(s) = \dfrac{m\,(Fs^3 + Gs^2 + Hs + I)}{(\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 + 2\lambda^{1/6}s + 1)(\Omega + s)}$

Détermination des dispersions

a/ Dispersion de l'accélération

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) = G(s)\, L_1(t)\, \phi(s) = \frac{1}{m}\cdot 1 \cdot \frac{m\,(Fs^3 + Gs^2 + Hs + I)}{(\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 + 2\lambda^{1/6}s + 1)(\Omega + s)}$$

$$H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{(\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 + 2\lambda^{1/6}s + 1)(\Omega + s)}$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{(\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 + 2\lambda^{1/6}s + 1)(\Omega + s)} \right|^2 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega + s}{s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2}\; \frac{\Omega - s}{s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2}\, ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{(\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 + 2\lambda^{1/6}s + 1)(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \right|^2 ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{\lambda^{1/2}s^5 + (2\sqrt{\alpha_1\lambda} + 2\lambda^{1/3})s^4 + (\Omega^2\sqrt{\lambda} + 4\lambda^{1/3}\sqrt{\alpha_1} + 2\lambda^{1/6})s^3 + (2\Omega^2\lambda^{1/3} + 4\lambda^{1/6}\sqrt{\alpha_1} + 1)s^2 + (2\Omega^2\lambda^{1/6} + 2\sqrt{\alpha_1})s + \Omega^2} \right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \alpha_1 N^2 \frac{1}{\Delta_5}\left[c_4^2 m_0 + (c_3^2 - 2c_2c_4) m_1 + (c_2^2 - 2c_1c_3 + 2c_0c_4) m_2 + \right.$$

$$+ \left(c_1^2 - 2c_0c_2\right) m_3 + c_0^2 m_4 \Big]$$

Avec

$$m_0 = \frac{1}{d_5}\left(d_3 m_1 - d_1 m_2\right)$$

$$m_1 = -d_0 d_3 + d_1 d_2$$

$$m_2 = -d_0 d_5 + d_1 d_4$$

$$m_3 = \frac{1}{d_0}\left(d_2 m_3 - d_4 m_2\right)$$

$$m_4 = \frac{1}{d_0}\left(d_2 m_3 - d_4 m_2\right)$$

$$\Delta_5 = d_0\left(d_1 m_4 - d_3 m_3 + d_5 m_2\right)$$

où $d_5 = \lambda^{1/2}$

$$d_4 = 2\lambda^{1/3} + 2\sqrt{\alpha_1 \lambda} \qquad c_4 = 0$$

$$d_3 = \Omega^2\sqrt{\lambda} + 4\lambda^{1/3}\sqrt{\alpha_1} + 2\lambda^{1/6} \qquad c_3 = F$$

$$d_2 = 2\Omega^2\lambda^{1/3} + 4\lambda^{1/6}\sqrt{\alpha_1} + 1 \qquad c_2 = G$$

$$d_1 = 2\Omega^2\lambda^{1/6} + 2\sqrt{\alpha_1} \qquad c_1 = H$$

$$d_0 = \Omega^2 \qquad c_0 = I$$

b/ Dispersion de Jerk

$$\sigma_{\dddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| s\, H_{\dddot{x}/\ddot{x}_0}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$\sigma_{\dddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{Fs^4 + Gs^3 + Hs^2 + Is}{\left(\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 + 2\lambda^{1/6}s + 1\right)(\Omega + s)}\right|^2 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega + s}{\left(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2\right)} \frac{\Omega - s}{\left(s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2\right)}\, ds$$

$$\sigma_{\dddot{x}}^2 = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{Fs^4 + Gs^3 + Hs^2 + Is}{\left(\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 + 2\lambda^{1/6}s + 1\right)\left(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2\right)}\right|^2 ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{F s^4 + G s^3 + H s^2 + I s}{\lambda^{1/2} s^5 + (2\sqrt{\alpha_1 \lambda} + 2\lambda^{1/3}) s^4 + (\Omega^2 \lambda^{1/2} + 4\lambda^{1/3}\sqrt{\alpha_1} + 2\lambda^{1/6}) s^3 + (2\Omega^2 \lambda^{1/3} + 4\lambda^{1/6}\sqrt{\alpha_1} + 1) s^2 + (2\Omega^2 \lambda^{1/6} + 2\sqrt{\alpha_1}) s + \Omega^2} \right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \alpha_1 N^2 \frac{1}{\Delta_5} \left[c_4^2 m_0 + (c_3^2 - 2c_2c_4) m_1 + (c_2^2 - 2c_1c_3 + 2c_0c_4) m_2 + (c_1^2 - 2c_0c_2) m_3 + c_0^2 m_4 \right]$$

Avec

$$m_0 = \frac{1}{d_5}(d_3 m_1 - d_1 m_2)$$

$$m_1 = -d_0 d_3 + d_1 d_2$$

$$m_2 = -d_0 d_5 + d_1 d_4$$

$$m_3 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_2 - d_4 m_1)$$

$$m_4 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_3 - d_4 m_2)$$

$$\Delta_5 = d_0 (d_1 m_4 - d_3 m_3 + d_5 m_2)$$

où

$$d_5 = \lambda^{1/2}$$

$$d_4 = 2\sqrt{\alpha_1 \lambda} + 2\lambda^{1/3} \qquad c_4 = F$$

$$d_3 = \Omega^2 \lambda^{1/2} + 4\lambda^{1/3}\sqrt{\alpha_1} + 2\lambda^{1/6} \qquad c_3 = G$$

$$d_2 = 2\Omega^2 \lambda^{1/3} + 4\lambda^{1/6}\sqrt{\alpha_1} + 1 \qquad c_2 = H$$

$$d_1 = 2\Omega^2 \lambda^{1/6} + 2\sqrt{\alpha_1} \qquad c_1 = I$$

$$d_0 = \Omega^2 \qquad c_0 = 0$$

c/ Dispersion de déplacement relative

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\phi(s)G(s)-1}{s^2} = \frac{-\lambda^{1/2}\Omega s^2 + s\left(F-\Omega\lambda^{1/2}-2\lambda^{1/3}\right) + G - 2\lambda^{1/3} - 2\lambda^{1/6}}{\left(\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 + 2\lambda^{1/6}s + 1\right)(-\Omega+s)}$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{-\lambda^{1/2}\Omega s^2 + \left(F-\Omega\lambda^{1/2}-2\lambda^{1/3}\right)s + G - 2\lambda^{1/3} - 2\lambda^{1/6}}{\left(\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 + 2\lambda^{1/6}s + 1\right)(\Omega+s)} \right|^2 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega+s}{(s^2+2\sqrt{\alpha_1}s+\Omega^2)} \frac{\Omega-s}{(s^2-2\sqrt{\alpha_1}s+\Omega^2)}\, ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{2\alpha_1 N^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{-\lambda^{1/2}\Omega s^2 + \left(F-\Omega\lambda^{1/2}-2\lambda^{1/3}\right)s + G - 2\lambda^{1/3} - 2\lambda^{1/6}}{\left(\lambda^{1/2}s^3 + 2\lambda^{1/3}s^2 + 2\lambda^{1/6}s + 1\right)\left(s^2+2\sqrt{\alpha_1}s+\Omega^2\right)} \right|^2 ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{-\lambda^{1/2}\Omega s^2 + \left(F-\Omega\lambda^{1/2}-2\lambda^{1/3}\right)s + G - 2\lambda^{1/3} - 2\lambda^{1/6}}{\lambda^{1/2}s^5 + \left(2\sqrt{\alpha_1\lambda} + 2\lambda^{1/3}\right)s^4 + \left(\Omega^2\lambda^{1/2} + 4\lambda^{1/3}\sqrt{\alpha_1} + 2\lambda^{1/6}\right)s^3 + \left(2\Omega^2\lambda^{1/3} + 4\lambda^{1/6}\sqrt{\alpha_1} + 1\right)s^2 + \left(2\Omega^2\lambda^{1/6} + 2\sqrt{\alpha_1}\right)s + \Omega^2} \right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne

$$\sigma^2_{x-x_0} = \alpha_1 N^2 \frac{1}{\Delta_5}\left[c_4^2 m_0 + \left(c_3^2 - 2c_2c_4\right)m_1 + \left(c_2^2 - 2c_1c_3 + 2c_0c_4\right)m_2 + \left(c_1^2 - 2c_0c_2\right)m_3 + c_0^2 m_4\right]$$

Avec

$$m_0 = \frac{1}{d_5}\left(d_3 m_1 - d_1 m_2\right)$$

$$m_1 = -d_0 d_3 + d_1 d_2$$

$$m_2 = -d_0 d_5 + d_1 d_4$$

$$m_3 = \frac{1}{d_0}\left(d_2 m_2 - d_4 m_1\right)$$

$$m_4 = \frac{1}{d_0}\left(d_2 m_3 - d_4 m_2\right)$$

$$\Delta_5 = d_0\left(d_1 m_4 - d_3 m_3' + d_5 m_2\right)$$

Avec $d_5 = \lambda^{1/2}$

$d_4 = 2\sqrt{\alpha_1 \lambda} + 2\lambda^{1/3}$	$c_4 = 0$
$d_3 = \Omega^2 \lambda^{1/2} + 4\lambda^{1/3}\sqrt{\alpha_1} + 2\lambda^{1/6}$	$c_3 = 0$
$d_2 = 2\Omega^2\lambda^{1/3} + 4\lambda^{1/6}\sqrt{\alpha_1} + 1$	$c_2 = -\lambda^{1/2}\Omega$
$d_1 = 2\Omega^2\lambda^{1/6} + 2\sqrt{\alpha_1}$	$c_1 = F - \Omega\lambda^{1/2} - 2\lambda^{1/3}$
$d_0 = \Omega^2$	$c_0 = G - 2\lambda^{1/3} - 2\lambda^{1/6}$

3_Critère du déplacement relative et de l'accélération

3-1 éxcitation par un processus tel que $S_{\ddot{X}_0}(s) = N^2$

La fonction de transfert optimum du système de vibro-isolation est donnée par

$$\phi(s) = \frac{1}{R(s)\,G(s)\,\varphi(s)} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$$

Pour ce critère, le produit $R(s)\,R(-s)$ est tel que :

$$R(s)\,R(-s) = \lambda + s^4 L_i(s)\,L_i(-s) \quad (1)$$

Pour notre système de vibro-isolation pour vibro-isoler un corps rigide on a :

$$L_1(s) = L_1(-s) = 1$$

Le produit $R(s)\,R(-s)$ peut être décomposé en

$$R(s)\,R(-s) = (As^2 + Bs + C)(As^2 - Bs + C)$$

Par identification à (1) on tire

$$R(s) = s^2 + \sqrt{2}\,\lambda^{1/4} s + \lambda^{1/2}$$ c'est à dire que

$A = 1 \qquad B = \sqrt{2}\,\lambda^{1/4} \qquad C = \lambda^{1/2}$

On sait d'autre part que

$$G(s) = \frac{1}{m}$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{s^2}$$

D'où finalement

$$\phi(s) = \frac{1}{(s^2+\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}\,s+\lambda^{1/2})\,\frac{1}{m}\,\frac{1}{s^2}}\left\{\frac{\frac{1}{s^2}}{s^2-\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}\,s+\lambda^{1/2}}\right\}_+$$

Posons

$$T = \frac{1}{s^2\,(s^2-\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}\,s+\lambda^{1/2})}$$

Que nous décomposons en

$$T = \frac{Ms+N}{s^2} + \frac{Ps+Q}{s^2-\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}\,s+\lambda^{1/2}}$$

Par identification on tire

$M = \sqrt{2}\,\lambda^{-3/4}$

$N = \lambda^{-1/2}$

$P = -\sqrt{2}\,\lambda^{-3/4}$

$Q = +\lambda^{-1/2}$

D'où $$T_+ = \frac{\sqrt{2}\,\lambda^{-3/4}\,s+\lambda^{-1/2}}{s^2}$$

Donc $$\phi(s) = \frac{m\,(\sqrt{2}\,\lambda^{-3/4}\,s+\lambda^{-1/2})}{(s^2+\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}\,s+\lambda^{1/2})}$$

Détermination des dispersions de $\sigma^2_{\dot{x}}$, $\sigma^2_{\ddot{x}}$, $\sigma^2_{x-x_0}$

a/ Dispersion de $\sigma^2_{\ddot{x}}$

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\,ds$$

$$H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) = G(s)\,L(s)\,\phi(s) = \frac{1}{m} \cdot 1 \cdot \frac{m(\sqrt{2}\,\lambda^{-3/4} s + \lambda^{-1/2})}{(s^2 + \sqrt{2}\,\lambda^{1/4} s + \lambda^{1/2})}$$

$$H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\sqrt{2}\,\lambda^{-3/4} s + \lambda^{-1/2}}{(s^2 + \sqrt{2}\,\lambda^{1/4} s + \lambda^{1/2})}$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\sqrt{2}\,\lambda^{-3/4} s + \lambda^{-1/2}}{s^2 + \sqrt{2}\,\lambda^{1/4} s + \lambda^{1/2}} \right|^2 N^2\, ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = N^2 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\sqrt{2}\,\lambda^{-3/4} s + \lambda^{-1/2}}{s^2 + \sqrt{2}\,\lambda^{1/4} s + \lambda^{1/2}} \right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = N^2 \frac{3}{2\sqrt{2}}\, \lambda^{-7/4}$$

b/ <u>Dispersion de Jerk</u>

$$\sigma^2_{\dddot{x}} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| s\, H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$\sigma^2_{\dddot{x}} = N^2 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\sqrt{2}\,\lambda^{-3/4} s^2 + \lambda^{-1/2} s}{s^2 + \sqrt{2}\,\lambda^{1/4} s + \lambda^{1/2}} \right|^2 ds = \infty$$

L'intégrale donnant la valeur de la dispersion de Jerk est divergente. Ce fait peut être interprété que pour une telle excitation, le système n'est pas réalisable, sans quoi il serait instable c/ Dispersion du déplacement relative

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\phi(s)G(s)-1}{s^2} = \frac{-s^2+\left(-\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}+\sqrt{2}\,\lambda^{-3/4}\right)s+\lambda^{-1/2}-\lambda^{1/2}}{s^2\left(s^2+\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}s+\lambda^{1/2}\right)}$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = N^2\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{-s^2+\left(-\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}+\sqrt{2}\,\lambda^{-3/4}\right)s+\lambda^{-1/2}-\lambda^{1/2}}{s^4+\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}s^3+\lambda^{1/2}s^2} \right|^2 ds$$

La table d'intégrale nous donne une valeur infinie pour $\sigma^2_{x-x_0}$, car la fonction de transfert du système de vibro-isolation $H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s)$ possède des singularités sur l'axe imaginaire, donc notre système n'est pas réalisable ou dans le cas contraire il serait instable.

N-B

On remarque que pour une valeur particulière de $\lambda = 1$ c'est à dire $\varrho = 0,5$ $\left(\lambda = \lambda_0 \frac{\varrho}{1-\varrho}\right.$ avec $\lambda_0 = 1$ [unité] ici $\left.s^{-4}\right)$ la valeur de cette intégrale est finie en effet :

$$\sigma^2_{x-x_0} = N^2\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{-1}{s^2+\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}s+\lambda^{1/2}} \right|^2 ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{N^2}{2\sqrt{2}} \qquad \text{avec } \lambda = 1$$

3-2 éxcitation par un processus tel que $S_{\ddot{x}_0}(s) = 2\alpha_1 N^2 \dfrac{\Omega^2 - s^2}{(\Omega^2+s^2)^2 - 4\alpha_1 s^2}$

Comme précedemment on a

$$\phi(s) = \frac{1}{R(s)\,G(s)\,\varphi(s)} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$$

On sait que

$$R(s) = s^2 + \sqrt{2}\,\lambda^{1/4} s + \lambda^{1/2}$$

$$G(s) = \frac{1}{m}$$

$$\varphi(s) = \frac{\Omega + s}{s^2\left(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2\right)}$$ précédemment determineé

donc $$\phi(s) = \frac{1}{\left(s^2 + \sqrt{2}\,\lambda^{1/4} s + \lambda^{1/2}\right) \frac{1}{m} \frac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}} \left\{ \frac{\dfrac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}}{s^2 - \sqrt{2}\,\lambda^{1/4} s + \lambda^{1/2}} \right\}_+$$

Posons $$M = \frac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)(s^2 - \sqrt{2}\,\lambda^{1/4} s + \lambda^{1/2})}$$

Que nous décomposons en

$$M = \frac{F s^3 + G s^2 + H s + I}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} + \frac{J s + K}{s^2 - \sqrt{2}\,\lambda^{1/4} s + \lambda^{1/2}}$$

Par identification on tire

$$F + J = 0$$

$$-\sqrt{2}\,\lambda^{1/4} F + G + K + 2\sqrt{\alpha_1}\, J = 0$$

$$\lambda^{1/2} F - \sqrt{2}\,\lambda^{1/4} G + H + \Omega^2 J + 2\sqrt{\alpha_1}\, K = 0$$

$$\lambda^{1/2} G - \sqrt{2}\, \lambda^{1/4} H + I + \Omega^2 K = 0$$

$$\lambda^{1/2} H - \sqrt{2}\, \lambda^{1/4} I = 1$$

$$\lambda^{1/2} I = \Omega$$

La résolution de ce système, nous détermine les valeurs des coefficients

F, G, H, I, J, K d'où

$$M_+ = \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}$$

Par conséquent $\phi(s) = \dfrac{m(Fs^3 + Gs^2 + Hs + I)}{(s^2 + \sqrt{2}\,\lambda^{1/4} s + \lambda^{1/2})(\Omega + s)}$

Détermination des dispersions de $\sigma^2_{\ddot{x}}$, $\sigma^2_{\dddot{x}}$, $\sigma^2_{x - x_0}$

a/ Dispersion de l'accélération

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) = G(s)\, L(s)\, \phi(s) = \frac{1}{m} \cdot 1 \cdot \frac{m(Fs^3 + Gs^2 + Hs + I)}{(s^2 + \sqrt{2}\,\lambda^{1/4} s + \lambda^{1/2})(\Omega + s)}$$

$$H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{(s^2 + \sqrt{2}\,\lambda^{1/4} s + \lambda^{1/2})(\Omega + s)}$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{(s^2 + \sqrt{2}\,\lambda^{1/4} s + \lambda^{1/2})(\Omega + s)} \right|^2 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega + s}{(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \frac{\Omega - s}{(s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}\, ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{(s^2 + \sqrt{2}\,\lambda^{1/4} s + \lambda^{1/2})(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \right|^2 2\alpha_1 N^2\, ds$$

$$\sigma_{\dddot{x}}^2 = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{Fs^3+Gs^2+Hs+I}{s^4+(2\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{2}\lambda^{1/4})s^3+(\Omega^2+2\sqrt{2\alpha_1}\lambda^{1/4}+\lambda^{1/2})s^2+(\sqrt{2}\lambda^{1/4}\Omega^2+2\sqrt{\alpha_1}\lambda^{1/2})s+\Omega^2\lambda^{1/2}}\right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne

$$\sigma_{\dddot{x}}^2 = \frac{c_3^2(-d_0^2 d_3 + d_1 d_2 d_0) + (c_2^2 - 2c_1c_3)d_0 d_1 d_4 + (c_1^2 - 2c_0c_2)d_0 d_3 d_4 + c_0^2(-d_1 d_4^2 + d_2 d_3 d_4)}{[d_0 d_4(-d_0 d_3^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3)] \times 1} \cdot N^2\alpha_1$$

Avec $d_4 = 1$

$$d_3 = 2\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{2}\lambda^{1/4} \qquad c_3 = F$$

$$d_2 = \Omega^2 + 2\sqrt{2\alpha_1}\lambda^{1/4} + \lambda^{1/2} \qquad c_2 = G$$

$$d_1 = \sqrt{2}\lambda^{1/4}\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\lambda^{1/2} \qquad c_1 = H$$

$$d_0 = \Omega^2\lambda^{1/2} \qquad c_0 = I$$

b/ Dispersion de Jerk

$$\sigma_{\ddddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|s\,H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\,ds$$

$$\sigma_{\ddddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{Fs^4+Gs^3+Hs^2+Is}{(s^2+\sqrt{2}\lambda^{1/4}s+\lambda^{1/2})(\Omega+s)}\right|^2 2\alpha_1 N^2\frac{\Omega+s}{(s^2+2\sqrt{\alpha_1}s+\Omega^2)}\,\frac{\Omega-s}{(s^2-2\sqrt{\alpha_1}s+\Omega^2)}\,ds$$

$$\sigma_{\ddddot{x}}^2 = 2\alpha_1 N^2\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{Fs^4+Gs^3+Hs^2+Is}{(s^2+\sqrt{2}\lambda^{1/4}s+\lambda^{1/2})(s^2+2\sqrt{\alpha_1}s+\Omega^2)}\right|^2 ds$$

$$\sigma_{\dddot{x}}^2 = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{F s^4 + G s^3 + H s^2 + I s}{s^4 + (2\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{2}\,\lambda^{1/4})s^3 + (\Omega^2 + 2\sqrt{2\alpha_1}\,\lambda^{1/4} + \lambda^{1/2})s^2 + (\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\,\lambda^{1/2})s + \lambda^{1/2}\Omega^2}\right|^2 ds$$

La table d'intégrale nous donne une valeur infinie de la dispersion de Jerk

c/ Dispersion du déplacement relative

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\,ds$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\phi(s)G(s)-1}{s^2} = \frac{s^3(F-1) + (G-\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}-\Omega)s^2 + (H-\lambda^{1/2}-\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}\Omega)s + I - \Omega\lambda^{1/2}}{\left[s^2(s^2+\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}s+\lambda^{1/2})(\Omega+s)\right] \times 1}$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{s^3(F-1) + (G-\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}-\Omega)s^2 + (H-\lambda^{1/2}-\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}\Omega)s + I - \Omega\lambda^{1/2}}{s^2(s^2+\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}s+\lambda^{1/2})(\Omega+s)}\right|^2 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega+s}{(s^2+2\sqrt{\alpha_1}\,s+\Omega^2)}\cdot\frac{\Omega-s}{s^2-2\sqrt{\alpha_1}\,s+\Omega^2}\,ds,$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = 2\alpha_1 N^2\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{s^3(F-1)+(G-\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}-\Omega)s^2+(H-\lambda^{1/2}-\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}\Omega)s+I-\Omega\lambda^{1/2}}{s^2(s^2+\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}s+\lambda^{1/2})(s^2+2\sqrt{\alpha_1}\,s+\Omega^2)}\right|^2 ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{(F-1)s^3 + (G-\sqrt{2}\lambda^{1/4} - \Omega)s^2 + (H - \lambda^{1/2} - \sqrt{2}\lambda^{1/4}\Omega)s + I - \Omega\lambda^{1/2}}{s^6 + (2\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{2}\lambda^{1/4})s^5 + (\Omega^2 + 2\sqrt{2\alpha_1}\lambda_1^{1/4} + \lambda^{1/2})s^4 + (\sqrt{2}\lambda^{1/4}\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\lambda^{1/2})s^3 + \lambda^{1/2}\Omega^2 s^2} \right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne une valeur infinie pour la dispersion du déplacement relative, car la fonction de transfert $H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s)$ possède des singularités sur l'axe imaginaire donc notre système est irréalisable, sans quoi il serait instable.

4 Critère de déplacement relative et de vitesse

4-1 éxcitation par un processus tel que $S_{\ddot{x}_0}(s) = N^2$

La fonction de transfert du systeme de vibro-isolation est donnée par

$$\phi(s) = \frac{1}{R(s)\,G(s)\,\varphi(s)} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$$

Avec $\varphi(s) = \dfrac{1}{s^2}$

$G(s) = \dfrac{1}{m}$

Pour ce critère, le produit $R(s)R(-s)$ est tel que

$$R(s)\,R(-s) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, s^2 L_i(s) L_i(-s) \qquad (1)$$

Comme notre système de vibro-isolation est destiné pour la vibro-isolation d'un corps rigide on a les relations :

$L_1(s) = L_1(-s) = 1$ (avec $i = 1$). Par conséquent on aura

$$R(s)\,R(-s) = 1 - \lambda s^2$$

$$R(s)\,R(-s) = (1 + \sqrt{\lambda}\, s)(1 - \sqrt{\lambda}\, s)$$

Donc $R(s) = (1 + \omega_0 s)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\lambda}$

D'ou $$\phi(s) = \frac{1}{(1+\omega_0 s)\frac{1}{m}\frac{1}{s^2}} \left\{ \frac{\frac{1}{s^2}}{1 - \omega_0 s} \right\}_+$$

Posons $M = \dfrac{1}{s^2(1 - \omega_0 s)}$

Que nous decomposons en:

$$M = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{1-\omega_0 s}$$

Par identification on tire

$A = \omega_0$

$B = 1$

$C = \omega_0^2$

On ne prend de M que la valeur

$$M_+ = \frac{\omega_0 s + 1}{s^2}$$

D'où

$$\phi(s) = \frac{m\, s^2 \;(1+\omega_0 s)}{(1+\omega_0 s) \quad s^2} = m$$

$\phi(s) = m$ c'est une fonction dépendant seulement de la masse

Détermination des dispersions de $\sigma^2_{\dot{x}}$, $\sigma^2_{\ddot{x}}$, $\sigma^2_{x-x_0}$

a/ Dispersion de la vitesse

$$\sigma^2_{\dot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) / s \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) = G(s)\, L(s)\, \phi(s) = \frac{1}{m} \cdot 1 \cdot m = 1$$

$$\sigma^2_{\dot{x}} = N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{1}{s} \right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne une valeur infinie pour la dispersion de la vitesse, car la fonction $\frac{1}{s}$ possède des singularités sur l'axe imaginaire, par conséquent notre système est irréalisable, ou dans le cas contraire il serait instable

b/ Dispersion de l'accélération

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left| H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\,ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left| 1 \right|^2 N^2\,ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = N^2\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left| 1 \right|^2 ds = \infty$$

c/ Dispersion du déplacement relative

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\,ds$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\phi(s)\,G(s)-1}{s^2} = 0$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = N^2\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left| 0 \right|^2 ds = cte$$

4-2 éxcitation par un processus tel que $S_{\ddot{x}_0}(s) = 2\alpha_1 N^2 \dfrac{\Omega^2 - s^2}{(\Omega^2+s^2)^2 - 4\alpha_1 s^2}$

La fonction de transfert du système de vibro-isolation est donnée par :

$$\phi(s) = \frac{1}{R(s)\,G(s)\,\varphi(s)} \cdot \left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+$$

On sait que

$$R(s) = (1 + \omega_0 s) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\lambda}$$

$$G(s) = \frac{1}{m}$$

$$\varphi(s) = \frac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}$$

Par conséquent on aura

$$\phi(s) = \frac{1}{(1+\omega_0 s)\,\dfrac{1}{m}\,\dfrac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}} \left\{\frac{\dfrac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}}{1 - \omega_0 s}\right\}_+$$

Posons

$$M = \frac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)(1 - \omega_0 s)}$$

Que nous décomposons en

$$M = \frac{F s^3 + G s^2 + H s + I}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} + \frac{J}{(1 - \omega_0 s)}$$

Par identification on tire

$$\left.\begin{array}{l} J - F\omega_0 = 0 \\ F - G\omega_0 + 2\sqrt{\alpha_1}\, J = 0 \\ G - H\omega_0 + \Omega^2 J = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} J = \dfrac{\omega_0^2 (1+\omega_0\Omega)}{(1+2\sqrt{\alpha_1}\,\omega_0 + \Omega^2\omega_0^2)} \\ G = \dfrac{(1+\omega_0\Omega)(1+2\sqrt{\alpha_1}\,\omega_0)}{(1+2\sqrt{\alpha_1}\,\omega_0+\Omega^2\omega_0^2)} \\ F = \dfrac{\omega_0(1+\omega_0\Omega)}{(1+2\sqrt{\alpha_1}\,\omega_0+\Omega^2\omega_0^2)} \end{array}$$

$$H - I\omega_0 = 1 \qquad \Rightarrow H = 1 + \omega_0\Omega$$

$$\Omega = I \qquad\qquad I = \Omega$$

La connaissance de ces coefficients determine celle de

$$M_+ = \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}$$

finalement on aura

$$\phi(s) = \frac{m(Fs^3 + Gs^2 + Hs + I)}{(1+\omega_0 s)(\Omega + s)}$$

Détermination des dispersions de $\sigma^2_{\dot{x}}$, $\sigma^2_{\ddot{x}}$, $\sigma^2_{x-x_0}$

a/ Dispersion de la vitesse

$$\sigma^2_{\dot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s)\big/ s \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) = G(s)\, L_i(s)\, \phi(s) = \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{(1+\omega_0 s)(\Omega + s)}$$

$$\sigma^2_{\dot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{s(1+\omega_0 s)(\Omega + s)} \right|^2 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega + s}{s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2}\; \frac{\Omega - s}{s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2}\, ds$$

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{Fs^3+Gs^2+Hs+I}{(s+\omega_0 s^2)(s^2+2\sqrt{\alpha_1}s+\Omega^2)}\right|^2 ds$$

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{Fs^3+Gs^2+Hs+I}{s^4\omega_0+s^3(1+2\sqrt{\alpha_1}\omega_0)+s^2\Omega^2\omega_0+s\Omega^2}\right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne une valeur infinie pour la dispersion de la vitesse toujours pour la même raison, c'est à dire que la fonction en module, possède des singularités sur l'axe imaginaire, donc notre système est irréalisable sans quoi il serait instable.

b/ Dispersion du deplacement relative

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\,ds$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\phi(s)G(s)-1}{s^2} = \frac{Fs^3+(G-\omega_0)s^2}{(1+\omega_0 s)(\Omega+s)}$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{Fs^3+(G-\omega_0)s^2}{(1+\omega_0 s)(\Omega+s)}\right|^2 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega+s}{(s^2+2\sqrt{\alpha_1}s+\Omega^2)}\,\frac{\Omega-s}{(s^2-2\sqrt{\alpha_1}s+\Omega^2)}\,ds$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{Fs^3+(G-\omega_0)s^2}{(1+\omega_0 s)(s^2+2\sqrt{\alpha_1}s+\Omega^2)}\right|^2 ds$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{Fs^3+(G-\omega_0)s^2}{\omega_0 s^3+(1+2\sqrt{\alpha_1}\omega_0)s^2+(2\sqrt{\alpha_1}+\Omega^2\omega_0)s+\Omega^2}\right|^2 ds$$

On obtient une valeur infinie pour la dispersion du deplacement relative.

c/ Dispersion de l'accélération

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{(1+\omega_0 s)(\Omega + s)} \right|^2 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega + s}{(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \frac{\Omega - s}{(s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}\, ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{(1+\omega_0 s)(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \right|^2 2\alpha_1 N^2\, ds$$

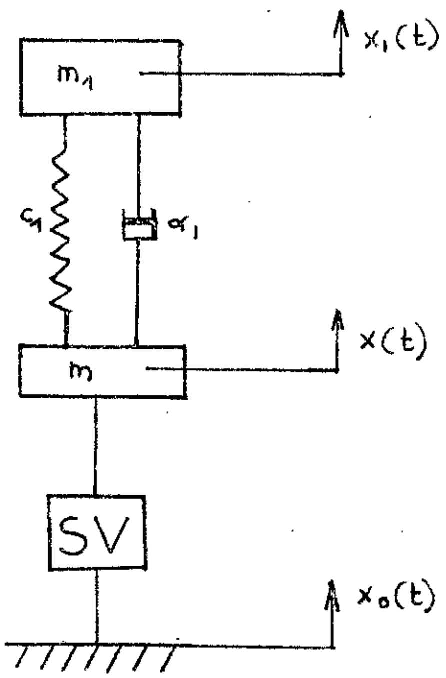
$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{\omega_0 s^3 + (1 + 2\sqrt{\alpha_1}\,\omega_0)s^2 + (2\sqrt{\alpha_1} + \Omega^2\omega_0)s + \Omega^2} \right|^2 ds$$

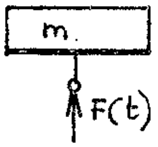
On obtient aussi une valeur infinie pour la dispersion de l'accélération

V SYSTEME DE VIBRO-ISOLATION POUR ISOLER UN SYSTEME DYNAMIQUE

1- Critère de déplacement relative, d'accélération ; , et de JerK

Soit le système dynamique suivant :





La fonction de transfert optimum du système de vibro-isolation est donnée par :

$$\phi(s) = \frac{1}{R(s)G(s)\varphi(s)} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$$

Déterminons $\phi(s)$ en fonction de l'impédance de déplacement

$$R(s)R(-s) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s^4 L_i(s) L_i(-s) - \sum_{i=1}^{n} \chi_i s^6 L_i(s) L_i(-s)$$

Pour notre système dynamique on a,

$$L_1(s) = \frac{\bar{x}_1(s)}{\bar{x}(s)} = \frac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$

$$G(s) = \frac{s^2}{L(s)}$$

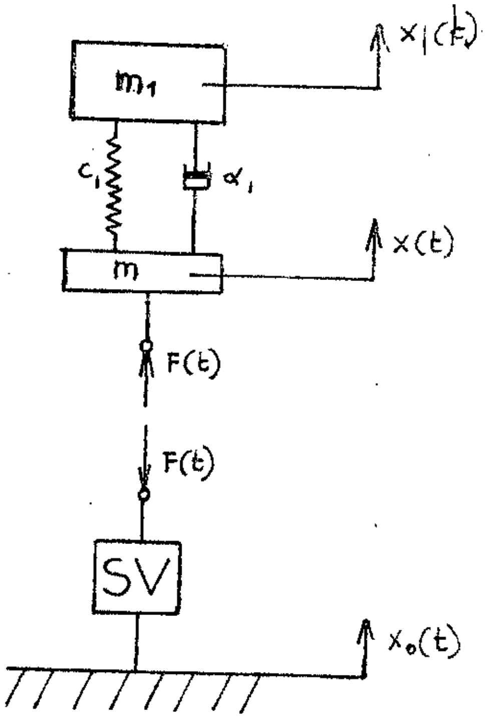
Avec $L(s) = \dfrac{\bar{F}(s)}{\bar{x}(s)} = Z(s)$ impédance de déplacement.

Donc $G(s) = \dfrac{s^2}{Z(s)}$

finalement $$\phi(s) = \frac{Z(s)}{R(s)\varphi(s) s^2} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$$

Déterminons l'impédance de deplacement pour notre système

[illegible] schéma est le suivant :



On a la relation suivante

$$m\ddot{x} = F + c_1(x_1 - x) + \alpha_1(\dot{x}_1 - \dot{x})$$

En passant aux transformées de Laplace on aura

$$m\bar{\ddot{x}}(s) = \bar{F}(s) + c_1(\bar{x}_1 - \bar{x}) + \alpha_1(\bar{\dot{x}}_1 - \bar{\dot{x}})$$

Comme on a supposé que les conditions initiales sont nulles on aura par conséquent:

$$ms^2\bar{x}(s) = \bar{F}(s) - \bar{x}(s)(c_1 + \alpha_1 s) + \bar{x}_1(s)(c_1 + \alpha_1 s) \text{ donc}$$

$$(ms^2 + \alpha_1 s + c_1)\bar{x}(s) = \bar{F}(s) + \bar{x}_1(s)(\alpha_1 s + c_1)$$

On sait que d'autre part

$$\frac{\bar{x}_1(s)}{\bar{x}(s)} = \frac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$ tirée de la relation suivante

$$m_1\ddot{x}_1 = -c_1(x_1 - x) - \alpha_1(\dot{x}_1 - x)$$ en procédant de la même façon que ci-dessus

Ce qui entraine

$$(ms^2 + \alpha_1 s + c_1)\bar{x}(s) = \bar{F}(s) + \bar{x}(s)\frac{(\alpha_1 s + c_1)^2}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$

On aboutit finalement à

$$z(s) = \frac{F(s)}{\bar{x}(s)} = \frac{mm_1 s^4 + (m + m_1)\alpha_1 s^3 + (m + m_1)c_1 s^2}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$

$$\text{Donc } \phi(s) = \frac{mm_1 s^2 + (m + m_1)\alpha_1 s + (m + m_1)c_1}{R(s)\,\varphi(s)\,(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)}\left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+$$

Déterminons $H_{\frac{X}{X_0}}(s)$

$$\phi(s) = \frac{\bar{F}(s)}{\bar{\ddot{X}}_0(s)} = \frac{1}{s^2 \bar{X}_0(s)} \cdot \bar{X}(s) \left(\frac{m_1 m s^4 + (m+m_1)\alpha_1 s^3 + (m+m_1)c_1 s^2}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1} \right)$$

D'où $$H_{\frac{X}{X_0}}(s) = \frac{\bar{X}(s)}{\bar{X}_0(s)} = \phi(s) \frac{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}{m_1 m s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)c_1}$$

$$H_{\frac{X}{X_0}}(s) = \frac{1}{R(s)\,\varphi(s)} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$$

$\varphi(s)$ est telle que $S_{\ddot{X}_0}(s) = s^4 S_0\, \varphi(s)\, \varphi(-s)$

avec $S_0 = cte$

$R(s)$ prendra des valeurs différentes selon les types de critères rencontrés.

1-1 éxcitation par un processus tel que $S_{\ddot{X}_0}(s) = N^2$

La fonction de transfert du système de vibro-isolation est par $$\phi(s) = \frac{m_1 m s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)c_1}{R(s)\,\varphi(s)\,(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$$

Pour ce critère, le produit $R(s)R(-s)$ est tel que

$$R(s)\,R(-s) = 1 + \lambda s^4 L_1(s) L_1(-s) - \mathcal{X} s^6 L_1(s) L_1(-s)$$

Avec $L_1(s) = \dfrac{\bar{X}_1(s)}{\bar{X}(s)} = \dfrac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$ donc

$$R(s)\,R(-s) = 1 + \lambda s^4 \frac{\alpha_1 s + c_1}{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)} \frac{-\alpha_1 s + c_1}{(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1)} - \mathcal{X} s^6 \frac{\alpha_1 s + c_1}{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)} \frac{-\alpha_1 s + c_1}{(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1)}$$

$$R(s)\,R(-s) = \frac{\alpha_1^2 \mathcal{X} s^8 + (-\mathcal{X}c_1^2 - \alpha_1^2\lambda)s^6 + (m_1^2 + \lambda c_1^2)s^4 + (2m_1c_1 - \alpha^2)s^2 + c_1^2}{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)\;(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1)}$$

Que nous décomposons en

$$R(s)\,R(-s) = \frac{As^4 + Bs^3 + Ds^2 + Es + F}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}\;\frac{As^4 - Bs^3 + Ds^2 - Es + F}{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}$$

Par identification on tire

$$A^2 = \alpha_1^2 \mathcal{X}$$

$$2AD - B^2 = -\alpha_1^2\lambda - \mathcal{X}c_1^2$$

$$2AF - 2BE + D^2 = m_1^2 + \lambda c_1^2$$

$$2DF - E^2 = 2m_1c_1 - \alpha_1^2$$

$$F^2 = c_1^2$$

La résolution de ce système nous donne les valeurs des coefficients A, B, D, E, F d'où la détermination de

$$R(s) = \frac{As^4 + Bs^3 + Ds^2 + Es + F}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$

$$\left.\begin{aligned} S_{\ddot{x}_0}(s) &= s^4 S_0\,\varphi(s)\,\varphi(-s) \\ S_{\ddot{x}_0}(s) &= N^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} S_0 &= N^2 \\ \varphi(s) &= \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

$$\phi(s) = \frac{m m_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)c_1}{(As^4 + Bs^3 + Ds^2 + Es + F)\,\frac{1}{s^2}} \left\{ \frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{As^4 - Bs^3 + Ds^2 - Es + F}{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}} \right\}_+$$

Posons $T = \dfrac{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}{s^2\,(As^4 - Bs^3 + Ds^2 - Es + F)}$

Que nous décomposons en

$$T = \frac{Ms+N}{s^2} + \frac{Ps^3+Qs^2+Rs+T}{As^4-Bs^3+Ds^2-Es+F}$$

Par identification on tire

$$MA + P = 0$$

$$-MB + NA + Q = 0$$

$$MD - NB + R = 0$$

$$-ME + ND + T = m_1$$

$$MF - NE = -\alpha_1$$

$NF = c_1$ comme $F = c_1$ alors $N = 1$

d'ou $M = \dfrac{-\alpha_1 + E}{c_1}$

On ne prend de T que la valeur

$$T_+ = \frac{Ms+N}{s^2}$$

D'ou $$\phi(s) = \frac{\left(mm_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)c_1\right)(Ms+N)}{(As^4 + Bs^3 + Ds^2 + Es + F)}$$

Détermination des dispersions de $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$, $\sigma^2_{\dddot{x}_1}$, $\sigma^2_{x-x_0}$

a/ Dispersion de l'accélération

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds.$$

Avec

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = H_{\frac{x_1}{x}}(s) \cdot H_{\frac{x}{x_0}}(s)$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{(d_1 s + c_1)}{(m_1 s^2 + d_1 s + c_1)} \cdot \frac{(m_1 s^2 + d_1 s + c_1)(Ms + N)}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)}$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{(d_1 s + c_1)(Ms + N)}{A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F}$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{(d_1 s + c_1)(Ms + N)}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)} \right|^2 N^2 ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = N^2 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{d_1 M s^2 + (d_1 N + c_1 M)s + N c_1}{A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F} \right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = N^2 \frac{d_1^2 M^2 F E + \left[(d_1 N + c_1 M)^2 - 2 N c_1 d_1 M\right] F B + N^2 c_1^2 \left[D B - E A\right]}{2 F \left[E D B - E^2 A - F B^2\right]}$$

b/ Dispersion de Jerk

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| s\, H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{d_1 M s^3 + (d_1 N + c_1 M) s^2 + N c_1 s}{A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F} \right|^2 N^2 ds$$

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = N^2 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{d_1 M s^3 + (d_1 N + c_1 M) s^2 + N c_1 s}{A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F} \right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne:

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = N^2 \frac{\alpha_1^2 M^2\left[-F^2B+FED\right]+\left[(\alpha_1 N + c_1 M)^2 - 2Nc_1\alpha_1 M\right]FEA + N^2c_1^2 FBA}{2FA\left[EDB - FB^2 - E^2A\right]}$$

c/ Dispersion du deplacement relative

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\,ds,$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{1}{s^2}\left[H_{\frac{x}{x_0}}(s) - 1\right] = \frac{1}{s^2}\left[\frac{(m_1s^2+\alpha_1 s + c_1)(Ms+N)}{As^4+Bs^3+Ds^2+Es+F} - 1\right]$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{-As^2+(m_1N-B)s+(m_1N+\alpha_1M-D)}{As^4+Bs^3+Ds^2+Es+F}$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{-As^2+(m_1N-B)s+m_1N+\alpha_1M-D}{As^4+Bs^3+Ds^2+Es+F}\right|^2 N^2\,ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = N^2\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{-As^2+(m_1N-B)s+m_1N+\alpha_1M-D}{As^4+Bs^3+Ds^2+Es+F}\right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne

$$\sigma^2_{x-x_0} = N^2\frac{A^2FE+\left[(m_1N-B)^2+2(m_1N+\alpha_1M-D)A\right]FB+(m_1N+\alpha_1M-D)^2\times}{2F\left[EDB-FB^2-E^2A\right]}$$

$\underline{[DB-EA]}$

1-2 éxcitation par un processus tel que $S_{\ddot{x}_0}(s) = 2\alpha_1 N^2 \dfrac{\Omega^2 - s^2}{(\Omega^2+s^2)^2 - 4\alpha_1 s^2}$

La fonction de transfert optimum du système de vibro-isolation est donnée par

$$\phi(s) = \frac{m m_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)c_1}{(As^4 + Bs^3 + Ds^2 + Es + F)\varphi(s)} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$$

Determinons $\varphi(s)$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\ddot{x}_0}(s) = s^4 S_0 \varphi(s)\varphi(-s) \\ S_{\ddot{x}_0}(s) = 2\alpha_1 N^2 s^4 \dfrac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}s + \Omega^2)} \dfrac{\Omega - s}{s^2(s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}s + \Omega^2)} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\varphi(s) = \frac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}s + \Omega^2)}$$

On sait que $R(-s) = \dfrac{As^4 - Bs^3 + Ds^2 - Es + F}{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}$

$$\text{d'ou} \quad \phi(s) = \frac{}{(As^4 + Bs^3 + Ds^2 + Es + F)\dfrac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}s + \Omega^2)}} \left\{ \frac{\dfrac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}s + \Omega^2)}}{\dfrac{As^4 - Bs^3 + Ds^2 - Es + F}{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}} \right\}_+$$

Posons

$$T = \frac{(\Omega + s)(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1)}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}s + \Omega^2)(As^4 - Bs^3 + Ds^2 - Es + F)}$$

Que nous décomposons en :

$$T = \frac{Ms^3 + Ns^2 + Ps + Q}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\,s + c_1)} + \frac{Rs^3 + Us^2 + Vs + W}{As^4 - Bs^3 + Ds^2 - Es + F}$$

Par identification on tire

$$MA + R = 0$$

$$NA - MB + 2\sqrt{\alpha_1}\,R + U = 0$$

$$MD + PA - NB + Rc_1 + 2\sqrt{\alpha_1}\,U + V = 0$$

$$-ME + ND - PB + QA + Uc_1 + 2\sqrt{\alpha_1}\,V + W = 0$$

$$MF - NE + PD - QB + Vc_1 + 2\sqrt{\alpha_1}\,W = m_1$$

$$NF - PE + QD + Wc_1 = \Omega m_1 - \alpha_1$$

$$PF - QE = c_1 - \Omega\alpha_1$$

$$QF = \Omega c_1$$

La résolution de ce système nous donne les valeurs des coefficients M, N, P, Q, R, U, V, W d'où la détermination de

$$T_+ = \frac{Ms^3 + Ns^2 + Ps + Q}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\,s + c_1)}$$

Finalement

$$\phi(s) = \frac{\left(mm_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)c_1\right)\left(Ms^3 + Ns^2 + Ps + Q\right)}{(As^4 + Bs^3 + Ds^2 + Es + F)(\Omega + s)}$$

Détermination des dispersions de $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$, $\sigma^2_{\dot{x}_1}$, $\sigma^2_{x-x_0}$

a/ Dispersion de l'accélération

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds \,.$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = H_{\frac{x_1}{x}}(s) \cdot H_{\frac{x}{x_0}}(s)$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{(\alpha_1 s + c_1)}{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)} \; \frac{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)(M s^3 + N s^2 + P s + Q)}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)(\Omega + s)}$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{(\alpha_1 s + c_1)(M s^3 + N s^2 + P s + Q)}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)(\Omega + s)}$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{(\alpha_1 s + c_1)(M s^3 + N s^2 + P s + Q)}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)(\Omega + s)} \right|^2 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega + s}{(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \; \frac{\Omega - s}{(s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}\, ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{(\alpha_1 s + c_1)(M s^3 + N s^2 + P s + Q)}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \right|^2 ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\alpha_1 M s^4 + (\alpha_1 N + c_1 M)s^3 + (\alpha_1 P + c_1 N)s^2 + (\alpha_1 Q + c_1 P)s + c_1 Q}{A s^6 + (2\sqrt{\alpha_1}\, A + B)s^5 + (A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, B + D)s^4 + (B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, D + E)s^3 + (D\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, E + F)s^2 + (E\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, F)s + F\Omega^2} \right|^2 ds.$$

La table d'intégrale donne:

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \alpha_1 N^2 \frac{1}{\Delta_6}\Big[c_5^2 m_0 + (c_4^2 - 2c_3c_5)m_1 + (c_3^2 - 2c_2c_4 + 2c_1'c_5)m_2 + (c_2^2 - 2c_1'c_3 + 2c_0c_4)m_3 + (c_1^2 - 2c_0c_2)m_4 + c_0^2 m_5 \Big]$$

Avec $m_0 = \dfrac{1}{d_6}\left(d_4 m_1 - d_2 m_2 + d_0 m_3\right)$

$$m_1 = -d_0 d_1 d_5 + d_0 d_3^2 + d_1^2 d_4 - d_1 d_2 d_3$$

$$m_2 = d_0 d_3 d_5 + d_1^2 d_6 - d_1 d_2 d_5$$

$$m_3 = d_0 d_5^2 + d_1 d_3 d_6 - d_1 d_4 d_5$$

$$m_4 = \frac{1}{d_0}\left(d_2 m_3 - d_4 m_2 + d_6 m_1\right)$$

$$m_5 = \frac{1}{d_0}\left(d_2 m_4 - d_4 m_3 + d_6 m_2\right)$$

$$\Delta_6 = d_0\left(d_1 m_5 - d_3 m_4 + d_5 m_3\right)$$

ou $d_6 = A$

$d_5 = 2\sqrt{\alpha_1}\,A + B$	$c_5 = 0$
$d_4 = A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\,B + D$	$c_4 = \alpha_1 M$
$d_3 = B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\,D + E$	$c_3 = \alpha_1 N + c_1 M$
$d_2 = D\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\,E + F$	$c_2 = \alpha_1 P + c_1 N$
$d_1 = E\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\,F$	$c_1' = \alpha_1 Q + c_1 P$
$d_0 = F\Omega^2$	$c_0 = c_1 Q$

b/ Dispersion de Jerk

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| s\, H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\alpha_1 M s^5 + (\alpha_1 N + c_1 M)s^4 + (\alpha_1 P + c_1 N)s^3 + (\alpha_1 Q + c_1 P)s^2 + c_1 Q s}{(As^4 + Bs^3 + Ds^2 + Es + F)(\Omega + s)} \right|^2 \times$$

$$2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega + s}{(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \frac{\Omega - s}{(s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}\, ds \,.$$

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\alpha_1 M s^5 + (\alpha_1 N + c_1 M)s^4 + (\alpha_1 P + c_1 N)s^3 + (\alpha_1 Q + c_1 P)s^2 + c_1 Q s}{(As^4 + Bs^3 + Ds^2 + Es + F)(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \right|^2 ds$$

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\alpha_1 M s^5 + (\alpha_1 N + c_1 M)s^4 + (\alpha_1 P + c_1 N)s^3 + (\alpha_1 Q + c_1 P)s^2 +}{As^6 + (2\sqrt{\alpha_1} A + B)s^5 + (A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1} B + D)s^4 + (B\Omega^2 +} \right.$$

$$\left. \frac{+ c_1 Q s}{+ 2\sqrt{\alpha_1} D + E)s^3 + (D\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1} E + F)s^2 + (E\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1} F)s + F\Omega^2} \right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = \alpha_1 N^2 \frac{1}{\Delta_6} \Big[c_5^2 m_0 + (c_4^2 - 2c_3 c_5) m_1 + (c_3^2 - 2c_2 c_4 + 2c_1' c_5) m_2 +$$

$$+ (c_2^2 - 2c_1' c_3 + 2c_0 c_4) m_3 + (c_1'^2 - 2c_0 c_2) m_4 + c_0^2 m_5 \Big]$$

Avec :

$$m_0 = \frac{1}{d_6}\left(d_4 m_1 - d_2 m_2 + d_0 m_3 \right)$$

$$m_1 = -d_0 d_1 d_5 + d_0 d_3^2 + d_1^2 d_4 - d_1 d_2 d_3$$

$$m_3 = d_0 d_5^2 + d_1 d_3 d_6 - d_1 d_4 d_5$$

$$m_2 = d_0 d_3 d_5 + d_1^2 d_6 - d_1 d_2 d_5$$

$$m_4 = \frac{1}{d_0}\left(d_2 m_3 - d_4 m_2 + d_6 m_1\right)$$

$$m_5 = \frac{1}{d_0}\left(d_2 m_4 - d_4 m_3 + d_6 m_2\right)$$

$$\Delta_6 = d_0\left(d_1 m_5 - d_3 m_4 + d_5 m_3\right)$$

ou $d_6 = A$

$$d_5 = 2\sqrt{\alpha_1}\,A + B \qquad c_5 = \alpha_1 M$$

$$d_4 = A\,\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\,B + D \qquad c_4 = \alpha_1 N + c_1 M$$

$$d_3 = B\,\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\,D + E \qquad c_3 = \alpha_1 P + c_1 N$$

$$d_2 = D\,\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\,E + F \qquad c_2 = \alpha_1 Q + c_1 P$$

$$d_1 = E\,\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\,F \qquad c_1' = c_1 Q$$

$$d_0 = F\,\Omega^2 \qquad c_0 = 0$$

c/ Dispersion du déplacement relative

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{1}{s^2}\left[H_{\frac{x}{x_0}}(s) - 1 \right] = \frac{1}{s^2}\left[\frac{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)(M s^3 + N s^2 + P s + Q)}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)(\Omega + s)} - 1 \right]$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{s^3(m_1 M - A) + s^2(m_1 N + \alpha_1 M - B - A\Omega) + s(m_1 P + \alpha_1 N + c_1 M - D - B\Omega) + (m_1 Q + \alpha_1 P + c_1 N - E - D\Omega)}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)(\Omega + s)}$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{(m_1 M - A)s^3 + (m_1 N + \alpha_1 M - B - A\Omega)s^2 + (m_1 P + \alpha_1 N + c_1 M - D - B\Omega)s + }{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)(\Omega + s)} \right.$$

$$\left. \frac{+ (m_1 Q + \alpha_1 P + c_1 N - E - D\Omega)}{} \right|^2 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega + s}{(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \cdot \frac{\Omega - s}{(s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}\, ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{(m_1 M - A)s^3 + (m_1 N + \alpha_1 M - B - A\Omega)s^2 + (m_1 P + \alpha_1 N + c_1 M + }{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \right.$$

$$\left. \frac{- D - B\Omega)s + (m_1 Q + \alpha_1 P + c_1 N - E - D\Omega)}{} \right|^2 ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{(m_1 M - A)s^3 + (m_1 N + \alpha_1 M - B - A\Omega)s^2 + (m_1 P + \alpha_1 N + c_1 M + }{A s^6 + (2\sqrt{\alpha_1}\, A + B)s^5 + (A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, B + D)s^4 + } \right.$$

$$\left. \frac{- D - B\Omega)s + (m_1 Q + \alpha_1 P + c_1 N - E - D\Omega)}{+ (B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, D + E)s^3 + (D\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, E + F)s^2 + (E\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, F)s + F\Omega^2} \right|^2 ds$$

La table d'integrale donne:

$$\sigma^2_{x-x_0} = \alpha_1 N^2 \frac{1}{\Delta_6}\Big[c_5^2 m_0 + (c_4^2 - 2c_3c_5)m_1 + (c_3^2 - 2c_2c_4 + 2c_1c_5)m_2 +$$

$$+ (c_2^2 - 2c_1c_3 + 2c_0c_4)m_3 + (c_1^2 - 2c_0c_2)m_4 + c_0^2 m_5 \Big]$$

Avec

$$m_0 = \frac{1}{d_6}(d_4 m_1 - d_2 m_2 + d_0 m_3)$$

$$m_1 = -d_0 d_1 d_5 + d_0 d_3^2 + d_1^2 d_4 - d_1 d_2 d_3$$

$$m_2 = d_0 d_3 d_5 + d_1^2 d_6 - d_1 d_2 d_5$$

$$m_3 = d_0 d_5^2 + d_1 d_3 d_6 - d_1 d_4 d_5$$

$$m_4 = \frac{1}{d_0}\left(d_2 m_3 - d_4 m_2 + d_6 m_1\right)$$

$$m_5 = \frac{1}{d_0}\left(d_2 m_4 - d_4 m_3 + d_6 m_2\right)$$

$$\Delta_6 = d_0 \left(d_1 m_5 - d_3 m_4 + d_5 m_3\right)$$

Avec $d_6 = A$

$d_5 = 2\sqrt{\alpha_1}\, A + B$ $\qquad c_5 = 0$

$d_4 = A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, B + D$ $\qquad c_4 = 0$

$d_3 = B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, D + E$ $\qquad c_3 = m_1 M - A$

$d_2 = D\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, E + F$ $\qquad c_2 = m_1 N + \alpha_1 M - B - A\Omega$

$d_1 = E\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, F$ $\qquad c_1 = m_1 P + \alpha_1 N + c_1 M - D - B\Omega$

$d_0 = F\Omega^2$ $\qquad c_0 = m_1 Q + \alpha_1 P + c_1 N - E - D\Omega$

2- Critère de déplacement relative, et de Jerk

2-1 éxcitation par un processus tel que $S_{\ddot{x}_0}(s) = N^2$

La fonction de transfert du système de vibro-isolation est donnée par

$$\phi(s) = \frac{m_1 m s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)c_1}{R(s)\,\varphi(s)\,(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)}\left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+$$

Pour ce critère, le produit $R(s)R(-s) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s^6 L_i(s) L_i(-s)$,

Dans notre cas $i = 1$, par conséquent on aura

$$L_1(s) = \frac{\bar{x}_1(s)}{\bar{x}(s)} = \frac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$

$$R(s)R(-s) = 1 - \lambda s^6 L_1(s) L_1(-s)$$

$$R(s)R(-s) = 1 - \lambda s^6 \frac{(\alpha_1 s + c_1)}{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)} \frac{(-\alpha_1 s + c_1)}{(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1)}$$

$$R(s)R(-s) = \frac{\lambda \alpha_1^2 s^8 - \lambda c_1^2 s^6 + m_1^2 s^4 + (2m_1 c_1 - \alpha_1^2) s^2 + c_1^2}{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)\,(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1)}$$

Que l'on peut écrire sous la forme

$$R(s)R(-s) = \frac{(As^4 + Bs^3 + Ds^2 + Es + F)}{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)} \frac{(As^4 - Bs^3 + Ds^2 - Es + F)}{(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1)}$$

Par identification on tire

$$A^2 = \lambda \alpha_1^2$$

$$2AD - B^2 = -\lambda c_1^2$$

$$2AF - 2BE + D^2 = m_1^2$$

$$2FD - E^2 = 2m_1 c_1 - \alpha_1^2$$

$$F^2 = c_1^2$$

Donc A, B, D, E, F sont ainsi déterminés par la résolution de ce système, il en est de même pour

$$R(s) = \frac{As^4 + Bs^3 + Ds^2 + Es + F}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$

On sait que $\varphi(s) = \frac{1}{s^2}$ d'ou

$$\phi(s) = \frac{m m_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1) c_1}{(As^4 + Bs^3 + Ds^2 + Es + F)\,\frac{1}{s^2}} \left\{ \frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{As^4 - Bs^3 + Ds^2 - Es + F}{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}} \right\}_+$$

Posons

$$T = \frac{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}{s^2 \left[A s^4 - B s^3 + D s^2 - E s + F \right]}$$

Que l'on décompose en

$$T = \frac{H s + I}{s^2} + \frac{J s^3 + K s^2 + L s + M}{A s^4 - B s^3 + D s^2 - E s + F}$$

Par identification on tire

$$A H + J = 0$$

$$-B H + I A + K = 0$$

$$H D - I B + L = 0$$

$$-H E + D I + M = m_1$$

$$H F - I E = -\alpha_1$$

$I F = c_1$ comme $F = c_1$ alors $I = 1$

d'où $H = \dfrac{E - \alpha_1}{c_1}$

La résolution de ce système donnera les valeurs des autres coefficients, mais nous avons besoin seulement celles des coefficients I et H qui sont ainsi determinées par conséquent

$$T_+ = \frac{H s + I}{s^2} = \frac{(E - \alpha_1) s + c_1}{c_1 s^2}.$$

d'où $$\phi(s) = \frac{\left(m m_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)c_1\right)\left((E-\alpha_1)s + c_1\right)}{\left(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F\right)c_1}$$

Détermination des dispersions de $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$, $\sigma^2_{\dddot{x}_1}$, $\sigma^2_{x-x_0}$

a/ Dispersion de l'accélération

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = H_{\frac{x_1}{x}}(s) \cdot H_{\frac{x}{x_0}}(s)$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{(\alpha_1 s + c_1)}{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)} \cdot \frac{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)\left((E-\alpha_1)s + c_1\right)}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)c_1}$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{\alpha_1(E-\alpha_1)s^2 + c_1 E s + c_1^2}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)c_1}$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\alpha_1(E-\alpha_1)s^2 + c_1 E s + c_1^2}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)c_1} \right|^2 N^2\, ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\alpha_1(E-\alpha_1)s^2 + c_1 E s + c_1^2}{A c_1 s^4 + B c_1 s^3 + D c_1 s^2 + E c_1 s + c_1^2} \right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = N^2 \frac{\alpha_1^2 E (E-\alpha_1)^2 + \left(E^2 - 2\alpha_1(E-\alpha_1)\right)B c_1^2 + c_1^3 (DB - AE)}{2 c_1^2 \left(BDE - B^2 c_1 - A E^2\right)}$$

b/ Dispersion de Jerk

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| s\, H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\alpha_1(E-\alpha_1)s^3 + c_1 E s^2 + c_1^2 s}{Ac_1 s^4 + Bc_1 s^3 + Dc_1 s^2 + Ec_1 s + c_1^2} \right|^2 N^2\, ds$$

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\alpha_1(E-\alpha_1)s^3 + c_1 E s^2 + c_1^2 s}{Ac_1 s^4 + Bc_1 s^3 + Dc_1 s^2 + Ec_1 s + c_1^2} \right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = N^2 \frac{\alpha_1^2(E-\alpha_1)^2(DE - Bc_1) + (E^2 - 2\alpha_1(E-\alpha_1))AEc_1^2 + ABc_1^4}{2Ac_1^2(BDE - B^2c_1 - AE^2)}$$

c/ Dispersion du déplacement relative

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{1}{s^2}\left[H_{\frac{x}{x_0}}(s) - 1 \right] = \frac{1}{s^2}\left[\frac{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)((E-\alpha_1)s + c_1)}{Ac_1 s^4 + Bc_1 s^3 + Dc_1 s^2 + Ec_1 s + c_1^2} - 1 \right]$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{-Ac_1 s^2 + ((E-\alpha_1)m_1 - Bc_1)s + (m_1 c_1 + \alpha_1(E-\alpha_1) - Dc_1)}{Ac_1 s^4 + Bc_1 s^3 + Dc_1 s^2 + Ec_1 s + c_1^2}$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{-Ac_1 s^2 + ((E-\alpha_1)m_1 - Bc_1)s + (m_1 - D)c_1 + \alpha_1(E-\alpha_1)}{Ac_1 s^4 + Bc_1 s^3 + Dc_1 s^2 + Ec_1 s + c_1^2} \right|^2 N^2\, ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{-Ac_1 s^2 + ((E-\alpha_1)m_1 - Bc_1)s + (m_1 - D)c_1 + \alpha_1(E-\alpha_1)}{Ac_1 s^4 + Bc_1 s^3 + Dc_1 s^2 + Ec_1 s + c_1^2} \right|^2 ds$$

La table d'integrale donne

$$\sigma^2_{x-x_0} = N^2 \frac{A^2 E c_1^3 + B c_1 \left((m_1(E-\alpha_1) - B c_1\right)^2 + 2 A c_1 \left((m_1 - D) c_1 + \alpha_1 (E - \alpha_1)\right) + \left((m_1 - D) c_1 + \alpha_1 (E - \alpha_1)\right)^2 (DB - AE)}{2 c_1^3 \left(BDE - B^2 c_1 - A E^2\right)}$$

2-2 éxcitation par un processus tel que $S_{\ddot{x}_0}(s) = 2 \alpha_1 N^2 \dfrac{\Omega^2 - s^2}{(\Omega^2 + s^2)^2 - 4 \alpha_1 s^2}$

La fonction de transfert optimum du systeme de vibro-isolation etant donnée par $\phi(s) = \dfrac{m m_1 s^2 + (m + m_1)\alpha_1 s + (m + m_1) c_1}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)\, \varphi(s)} \left\{ \dfrac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$

On sait d'autre part que pour une telle excitation

$$\varphi(s) = \frac{\Omega + s}{s^2 (s^2 + 2 \sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}$$

Avec $R(s) = \dfrac{A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$

Finalement

$$\phi(s) = \frac{m m_1 s^2 + (m + m_1)\alpha_1 s + (m + m_1) c_1}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F) \dfrac{\Omega + s}{s^2 (s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}} \left\{ \frac{\dfrac{\Omega + s}{s^2 (s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}}{\dfrac{A s^4 - B s^3 + D s^2 - E s + F}{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}} \right\}_+$$

Posons

$$T = \frac{(\Omega + s)(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1)}{s^2 (s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)(A s^4 - B s^3 + D s^2 - E s + F)}$$

Que nous décomposons en

$$T = \frac{Gs^3 + Hs^2 + Is + J}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega)} + \frac{Ks^3 + Ls^2 + Ms + N}{As^4 - Bs^3 + Ds^2 - Es + F}$$

Par identification on tire

$$AG + K = 0$$

$$HA - GB + L + 2\sqrt{\alpha_1}\, K = 0$$

$$GD - HB + IA + K\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, L + M = 0$$

$$HD + JA - IB - GE + L\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, M + N = 0$$

$$GF - HE + ID - JB + M\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, N = m_1$$

$$HF - IE + JD + N\Omega^2 = m_1\Omega - \alpha_1$$

$$IF - JE = -\alpha_1\Omega' + c_1$$

$$JF = \Omega c_1$$

La résolution de ce système, nous donne les valeurs des coefficients G, H, I, J, K, L, M, N, avec A, B, D, E, F précédemment déterminés.

Donc on aura

$$T_+ = \frac{Gs^3 + Hs^2 + Is + J}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}$$

D'ou

$$\phi(s) = \frac{\left(mm_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)c_1\right)\left(Gs^3 + Hs^2 + Is + J\right)}{(As^4 + Bs^3 + Ds^2 + Es + F)(\Omega + s)}$$

Détermination des dispersions de $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$, $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$, $\sigma^2_{x-x_0}$

a/ Dispersion de l'accélération

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = H_{\frac{x_1}{x}}(s) \cdot H_{\frac{x}{x_0}}(s)$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{(\alpha_1 s + c_1)}{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)} \cdot \frac{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)(G s^3 + H s^2 + I s + J)}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)(\Omega + s)}$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{(\alpha_1 s + c_1)(G s^3 + H s^2 + I s + J)}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)(\Omega + s)}$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{(\alpha_1 s + c_1)(G s^3 + H s^2 + I s + J)}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)(\Omega + s)} \right|^2 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega + s}{(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \frac{\Omega - s}{(s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}\, ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{(\alpha_1 s + c_1)(G s^3 + H s^2 + I s + J)}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \right|^2 2\alpha_1 N^2\, ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{2\alpha_1 N^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\alpha_1 G s^4 + (\alpha_1 H + c_1 G) s^3 + (\alpha_1 I + c_1 H) s^2 + (\alpha_1 J + c_1 I) s + c_1 J}{A s^6 + (2\sqrt{\alpha_1} A + B) s^5 + (A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1} B + D) s^4 + (B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1} D + E) s^3 + (D\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1} E + F) s^2 + (E\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1} F) s + F\Omega^2} \right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne.

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = \alpha_1 N^2 \frac{1}{\Delta_6}\Big[c_5^2 m_0 + (c_4^2 - 2c_3c_5)m_1 + (c_3^2 - 2c_2c_4 + 2c_1'c_5)m_2 +$$

$$+ (c_2^2 - 2c_1'c_3 + 2c_0c_4)m_3 + (c_1'^2 - 2c_0c_2)m_4 + c_0^2 m_5\Big]$$

Avec $m_0 = \frac{1}{d_6}(d_4 m_1 - d_2 m_2 + d_0 m_3)$

$$m_1 = -d_0 d_1 d_5 + d_0 d_3^2 + d_1^2 d_4 - d_1 d_2 d_3$$

$$m_2 = d_0 d_3 d_5 + d_1^2 d_6 - d_1 d_2 d_5$$

$$m_3 = d_0 d_5^2 + d_1 d_3 d_6 - d_1 d_4 d_5$$

$$m_4 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_3 - d_4 m_2 + d_6 m_1)$$

$$m_5 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_4 - d_4 m_3 + d_6 m_2)$$

$$\Delta_6 = d_0(d_1 m_5 - d_3 m_4 + d_5 m_3)$$

ou $d_6 = A$

$d_5 = 2\sqrt{\alpha_1}A + B$	$c_5 = 0$
$d_4 = A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}B + D$	$c_4 = \alpha_1 G$
$d_3 = B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}D + E$	$c_3 = \alpha_1 H + c_1 G$
$d_2 = D\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}E + F$	$c_2 = \alpha_1 I + c_1 H$
$d_1 = E\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}F$	$c_1' = \alpha_1 J + c_1 I$
$d_0 = F\Omega^2$	$c_0 = c_1 J$

b/ Dispersion de Jerk

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| s\, H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\alpha_1 G s^5 + (\alpha_1 H + c_1 G)s^4 + (\alpha_1 I + c_1 H)s^3 + (\alpha_1 J + c_1 I)s^2 + c_1 J s}{A s^6 + (2\sqrt{\alpha_1}A + B)s^5 + (A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}B + D)s^4 + (B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}D + E)s^3 + (D\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}E + F)s^2 + (E\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}F)s + F\Omega^2} \right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne:

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = \alpha_1 N^2 \frac{1}{\Delta_6}\Big[c_5^2 m_0 + (c_4^2 - 2c_3c_5)m_1 + (c_3^2 - 2c_2c_4 + 2c_1'c_5)m_2 + (c_2^2 - 2c_1'c_3 + 2c_0c_4)m_3 + (c_1'^2 - 2c_0c_2)m_4 + c_0^2 m_5 \Big]$$

Avec $m_0 = \frac{1}{d_6}(d_4 m_1 - d_2 m_2 + d_0 m_3)$

$m_1 = -d_0 d_1 d_5 + d_0 d_3^2 + d_1^2 d_4 - d_1 d_2 d_3$

$m_2 = d_0 d_3 d_5 + d_1^2 d_6 - d_1 d_2 d_5$

$m_3 = d_0 d_5^2 + d_1 d_3 d_6 - d_1 d_4 d_5$

$m_4 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_3 - d_4 m_2 + d_6 m_1)$

$m_5 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_4 - d_4 m_3 + d_6 m_2)$

$\Delta_6 = d_0 (d_1 m_5 - d_3 m_4 + d_5 m_3)$

ou $d_6 = A$

$d_5 = 2\sqrt{\alpha_1}A + B$ $\qquad c_5 = \alpha_1 G$

$d_4 = A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}B + D$ $\qquad c_4 = \alpha_1 H + c_1 G.$

$$d_3 = B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, D + E \qquad c_3 = \alpha_1 I + c_1 H$$

$$d_2 = D\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, E + F \qquad c_2 = \alpha_1 J + c_1 I$$

$$d_1 = E\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, F \qquad c_1' = c_1 J$$

$$d_0 = F\Omega^2 \qquad c_0 = 0$$

c/ Dispersion du déplacement relative

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{1}{s^2}\left[H_{\frac{x}{x_0}}(s) - 1 \right] = \frac{1}{s^2}\left[\frac{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)(G s^3 + H s^2 + I s + J)}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)(\Omega + s)} - 1 \right]$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{s^3(m_1 G - A) + s^2(m_1 H + \alpha_1 G - B - A\Omega) + s(m_1 I + \alpha_1 H + c_1 G - D - B\Omega) + (m_1 J + \alpha_1 I + c_1 H - E - D\Omega)}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)(\Omega + s)}$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{(m_1 G - A)s^3 + (m_1 H + \alpha_1 G - B - A\Omega)s^2 + (m_1 I + \alpha_1 H + c_1 G - D - B\Omega)s + (m_1 J + \alpha_1 I + c_1 H - E - D\Omega)}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)(\Omega + s)} \right|^2 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega + s}{(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \frac{\Omega - s}{(s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}\, ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{(m_1 G - A)s^3 + (m_1 H + \alpha_1 G - B - A\Omega)s^2 + (m_1 I + \alpha_1 H + c_1 G - D - B\Omega)s + (m_1 J + \alpha_1 I + c_1 H - E - D\Omega)}{(A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F)(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \right|^2 ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{(m_1 G - A)s^3 + (m_1 H + \alpha_1 G - B - A\Omega)s^2 + (m_1 I + \alpha_1 H + c_1 G - D - B\Omega)s + (m_1 J + \alpha_1 I + c_1 H - E - D\Omega)}{As^6 + (2\sqrt{\alpha_1}A + B)s^5 + (A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}B + D)s^4 + (B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}D + E)s^3 + (D\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}E + F)s^2 + (E\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}F)s + F\Omega^2} \right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne :

$$\sigma^2_{x-x_0} = \alpha_1 N^2 \frac{1}{\Delta_6}\Big[c_5^2 m_0 + (c_4^2 - 2c_3c_5)m_1 + (c_3^2 - 2c_2c_4 + 2c_1c_5)m_2 + (c_2^2 - 2c_1c_3 + 2c_0c_4)m_3 + (c_1^2 - 2c_0c_2)m_4 + c_0^2 m_5\Big]$$

Avec

$$m_0 = \frac{1}{d_6}(d_4 m_1 - d_2 m_2 + d_0 m_3)$$
$$m_1 = -d_0 d_1 d_5 + d_0 d_3^2 + d_1^2 d_4 - d_1 d_2 d_3$$
$$m_2 = d_0 d_3 d_5 + d_1^2 d_6 - d_1 d_2 d_5$$
$$m_3 = d_0 d_5^2 + d_1 d_3 d_6 - d_1 d_4 d_5$$
$$m_4 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_3 - d_4 m_2 + d_6 m_1)$$
$$m_5 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_4 - d_4 m_3 + d_6 m_2)$$
$$\Delta_6 = d_0(d_1 m_5 - d_3 m_4 + d_5 m_3)$$

où

$$d_6 = A$$

$$d_5 = 2\sqrt{\alpha_1}A + B \qquad c_5 = 0$$

$$d_4 = A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}B + D \qquad c_4 = 0$$

$$d_3 = B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}D + E \qquad c_3 = m_1 G - A$$

$$d_2 = D\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}E + F \qquad c_2 = m_1 H + \alpha_1 G - B - A\Omega$$

$d_1 = E\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, F$ $\qquad c_1 = m_1 I + \alpha_1 H + c_1 G - D - B\Omega$

$d_0 = F\Omega^2$ $\qquad c_0 = m_1 J + \alpha_1 I + c_1 H - E - D\Omega$

3- Critere de déplacement relative, et de l'accélération

3-1 éxcitation par un processus tel que $S_{\ddot{x}_0}(s) = N^2$

La fonction de transfert optimum du système de vibro-isolation est donnée par

$$\phi(s) = \frac{mm_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)c_1}{R(s)\,\varphi(s)\,(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$$

Pour ce critère, le produit $R(s)\,R(-s)$ est tel que :

$$R(s)\,R(-s) = \lambda + s^4 L_1(s)\,L_1(-s)$$

avec $\quad L_1(s) = \dfrac{\bar{x}_1(s)}{\bar{x}(s)} = \dfrac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$

d'ou

$$R(s)\,R(-s) = \lambda + s^4 \frac{(\alpha_1 s + c_1)}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1} \cdot \frac{-\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}$$

Qu'en développant devient

$$R(s)\,R(-s) = \frac{-\alpha_1^2 s^6 + (m_1^2 \lambda + c_1^2) s^4 + \left(\lambda\,(2m_1 c_1 - \alpha_1^2)\right) s^2 + \lambda c_1^2}{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)\,(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1)}$$

Que l'on peut ecrire sous la forme

$$R(s)\; R(-s) = \frac{As^3 + Bs^2 + Ds + E}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1} \cdot \frac{-As^3 + Bs^2 - Ds + E}{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}$$

Par identification on tire

$$A = \alpha_1$$

$$B^2 - 2\alpha_1 D = \lambda m_1^2 + c_1^2$$

$$2Bc_1\sqrt{\lambda} - D^2 = \lambda(2m_1c_1 - \alpha_1^2)$$

$$E = c_1\sqrt{\lambda}$$

La résolution de ce système, nous donne les valeurs des coefficients A, B, D, E. Ainsi $R(s)$ est determiné

$$R(s) = \frac{As^3 + Bs^2 + Ds + E}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\ddot{x}_0}(s) = N^2 \\ S_{\ddot{x}_0}(s) = s^4 S_0 \varphi(s)\varphi(-s) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} S_0 = N^2 \\ \varphi(s) = \dfrac{1}{s^2} \end{array}$$

Alors on aura

$$\phi(s) = \frac{mm_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)c_1}{(As^3 + Bs^2 + Ds + E)\ \frac{1}{s^2}} \left\{ \frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{-As^3 + Bs^2 - Ds + E}{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}} \right\}_+$$

Posons $M = \dfrac{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}{s^2(-As^3 + Bs^2 - Ds + E)}$

Que nous décomposons en

$$M = \frac{Fs + G}{s^2} \quad \frac{Hs^2 + Is + J}{-As^3 + Bs^2 - Ds + E}$$

On tire par identification

$$-AF + H = 0$$

$$FB + I - AG = 0$$

$$-FD + J + GB = m_1$$

$$FE - GD = -\alpha_1 \qquad \Longrightarrow \qquad F = \frac{-\alpha_1 E + c_1 D}{E^2}$$

$$GE = c_1 \qquad \Longrightarrow \qquad G = \frac{c_1}{E}$$

d'ou $$\phi(s) = \frac{(mm_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)c_1)\left(\left(-\alpha_1 E + c_1 D\right)s + c_1 E\right)}{(As^3 + Bs^2 + Ds + E)E^2}$$

Détermination des dispersions de $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$, $\sigma^2_{\dddot{x}_1}$, $\sigma^2_{x-x_0}$

a/ Dispersion de l'accélération

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = H_{\frac{x_1}{x}}(s) \cdot H_{\frac{x}{x_0}}(s)$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{\alpha_1 s + c_1)}{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)} \; \frac{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)\left(\left(-\alpha_1 E + c_1 D\right)s + c_1 E\right)}{(As^3 + Bs^2 + Ds + E)E^2}$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{\alpha_1(-\alpha_1 E + c_1 D)s^2 + c_1^2 D s + c_1^2 E}{(As^3 + Bs^2 + Ds + E)E^2}$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\alpha_1(-\alpha_1 E + c_1 D)s^2 + c_1^2 D s + c_1^2 E}{(As^3 + Bs^2 + Ds + E)E^2} \right|^2 N^2\, ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\alpha_1(-\alpha_1 E + c_1 D)s^2 + c_1^2 D s + c_1^2 E}{(As^3 + Bs^2 + Ds + E)E^2} \right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne :

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = N^2 \frac{D\alpha_1^2(-\alpha_1 E + c_1 D)^2 - 2\,A\,c_1^2 \alpha_1 E(-\alpha_1 E + c_1 D) + A c_1^4 (D^2 + EB)}{2\,A E^4 (DB - AE)}$$

b/ Dispersion de Jerk

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| s\, H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\alpha_1(-\alpha_1 E + c_1 D)s^3 + c_1^2 D s^2 + c_1 E s}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)E^2}\right|^2 ds = \infty$$

c/ Dispersion du déplacement relative

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{1}{s^2}\left[H_{\frac{x}{x_0}}(s) - 1\right] = \frac{1}{s^2}\left[\frac{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)\left((-\alpha_1 E + c_1 D)s + c_1 E\right)}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)E^2} - 1\right]$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{1}{s^2}\left[\frac{\left(m_1(-\alpha_1 E + c_1 D) - AE^2\right)s^3 + \left(m_1 c_1 E + \alpha_1(-\alpha_1 E + c_1 D) - E^2 B\right)s^2 + D(c_1^2 - E^2)s + E(c_1 - E^2)}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)E^2}\right]$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\left(m_1(-\alpha_1 E + c_1 D) - AE^2\right)s^3 + \left(m_1 c_1 E + \alpha_1(-\alpha_1 E + c_1 D) - E^2 B\right)s^2 + D(c_1^2 - E^2)s + E(c_1 - E^2)}{(A s^5 + B s^4 + D s^3 + E s^2)E^2}\right|^2 ds$$

$$= \infty$$

3-2 éxicitation par un processus tel que $S_{\ddot{X}_0}(s) = 2\alpha_1 N^2 \dfrac{\Omega^2 - s^2}{(\Omega^2+s^2)^2 - 4\alpha_1 s^2}$

La fonction de transfert optimum du système de vibro-isolation étant donnée par

$$\phi(s) = \frac{m m_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)c_1}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)\,\varphi(s)} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$$

On sait que pour une telle excitation on a :

$$\varphi(s) = \frac{\Omega + s}{s^2 (s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}$$

On sait d'autre part que

$$R(-s) = \frac{-A s^3 + B s^2 - D s + E}{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}$$

Par conséquent on aura

$$\phi(s) = \frac{m m_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)c_1}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)\dfrac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}} \left\{ \frac{\dfrac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}}{\dfrac{-A s^3 + B s^2 - D s + E}{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}} \right\}_+$$

Posons $M = \dfrac{(\Omega + s)(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1)}{s^2 (s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)(-A s^3 + B s^2 - D s + E)}$

Que nous décomposons en;

$$M = \frac{F s^3 + G s^2 + H s + I}{s^2 (s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} + \frac{J s^2 + K s + L}{-A s^3 + B s^2 - D s + E}$$

Par identification on tire :

$$-AF + J = 0$$

$$FB - AG + K + 2\sqrt{\alpha_1}\, J = 0$$

$$-FD + GB - AH + L + 2\sqrt{\alpha_1}\, K + J\Omega^2 = 0$$

$$FE - GD + HB - AI + 2\sqrt{\alpha_1}\, L + K\Omega^2 = m_1$$

$$GE - HD + BI + \Omega^2 L = m_1\Omega - \alpha_1$$

$$HE - ID = c_1 - \alpha_1\Omega$$

$$IE = \Omega c_1$$

La résolution de ce système, nous donne les valeurs des coefficients F, G, H, I, J, K, L. Ainsi on déterminera la valeur de

$$M_+ = \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}$$

d'ou $$\phi(s) = \frac{(mm_1 s^2 + (m+m_1)d_1 s + (m+m_1)c_1)(Fs^3 + Gs^2 + Hs + I)}{(As^3 + Bs^2 + Ds + E)(\Omega + s)}$$

Détermination des dispersions de $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$, $\sigma^2_{\dddot{x}_1}$, $\sigma^2_{x-x_0}$

a/ Dispersion de l'accélération

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = H_{\frac{x_1}{x}}(s) \cdot H_{\frac{x}{x_0}}(s)$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{(d_1 s + c_1)}{(m_1 s^2 + d_1 s + c_1)} \cdot \frac{(m_1 s^2 + d_1 s + c_1)(Fs^3 + Gs^2 + Hs + I)}{(As^3 + Bs^2 + Ds + E)(\Omega + s)}$$

$$H_{\frac{\ddot{X}_1}{\ddot{X}_0}}(s) = \frac{(\alpha_1 s + c_1)(F s^3 + G s^2 + H s + I)}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)(\Omega + s)}$$

$$\sigma_{\ddot{X}_1}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{(\alpha_1 s + c_1)(F s^3 + G s^2 + H s + I)}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)(\Omega + s)}\right|^2 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega + s}{(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}\,\frac{\Omega - s}{(s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}\, ds$$

$$\sigma_{\ddot{X}_1}^2 = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{(\alpha_1 s + c_1)(F s^3 + G s^2 + H s + I)}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}\right|^2 ds$$

$$\sigma_{\ddot{X}_1}^2 = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{F\alpha_1 s^4 + (G\alpha_1 + F c_1)s^3 + (H\alpha_1 + G c_1)s^2 + (I\alpha_1 + H c_1)s + I c_1}{A s^5 + (2\sqrt{\alpha_1}A + B)s^4 + (A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}B + D)s^3 + (B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}D + E)s^2 + (D\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}E)s + E\Omega^2}\right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne :

$$\sigma_{\ddot{X}_1}^2 = \alpha_1 N^2 \frac{1}{\Delta_5}\left[c_4^2 m_0 + (c_3^2 - 2c_2 c_4)m_1 + (c_2^2 - 2c_1' c_3 + 2c_0 c_4)m_2 + (c_1^2 - 2c_0 c_2)m_3 + c_0^2 m_4\right] \text{ ; avec}$$

$$m_0 = \frac{1}{d_5}(d_3 m_1 - d_1 m_2) \qquad m_3 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_2 - d_4 m_1)$$

$$m_1 = -d_0 d_3 + d_1 d_2 \qquad m_4 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_3 - d_4 m_2)$$

$$m_2 = -d_0 d_5 + d_1 d_4 \; . \qquad \Delta_5 = d_0 (d_1 m_4 - d_3 m_3 + d_5 m_2)$$

ou

$d_5 = A$, $d_1 = D\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}E$, $c_2 = H\alpha_1 + G c_1$

$d_4 = 2\sqrt{\alpha_1}A + B$, $d_0 = E\Omega^2$, $c_1 = I\alpha_1 + H c_1$

$d_3 = A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}B + D$, $c_4 = F\alpha_1$, $c_0 = I c_1$

$d_2 = B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}D + E$, $c_3 = G\alpha_1 + F c_1$,

b/ Dispersion de Jerk

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left| s\, H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{F\alpha_1 s^5 + (G\alpha_1 + Fc_1)s^4 + (H\alpha_1 + Gc_1)s^3 + (I\alpha_1 + Hc_1)s^2 + Ic_1 s}{A s^5 + (2\sqrt{\alpha_1}A + B)s^4 + (A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}B + D)s^3 + (B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}D + E)s^2 + (D\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}E)s + E\Omega^2}\right|^2 ds = \infty$$

c/ Dispersion du déplacement relative

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{1}{s^2}\left[H_{\frac{x}{\ddot{x}_0}}(s) - 1\right] = \frac{1}{s^2}\left[\frac{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)(F s^3 + G s^2 + H s + I)}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)(\Omega + s)} - 1\right]$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{m_1 F s^5 + (m_1 G + \alpha_1 F - A)s^4 + (m_1 H + \alpha_1 G + c_1 F - B - A\Omega)s^3 + (m_1 I + \alpha_1 H + Gc_1 - B\Omega - D)s^2 + (\alpha_1 I + Hc_1 - D\Omega - E)s + Ic_1 - E\Omega}{s^2 (A s^3 + B s^2 + D s + E)(\Omega + s)}$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{m_1 F s^5 + (m_1 G + \alpha_1 F - A)s^4 + (m_1 H + \alpha_1 G + c_1 F - B - A\Omega)s^3 + (m_1 I + \alpha_1 H + Gc_1 - B\Omega - D)s^2 + (\alpha_1 I + Hc_1 - D\Omega - E)s + Ic_1 - E\Omega}{s^2 (A s^3 + B s^2 + D s + E)(\Omega + s)}\right|^2 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega + s}{(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}s + \Omega^2)}\cdot\frac{\Omega - s}{(s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}s + \Omega^2)}\, ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{m_1 F s^5 + (m_1 G + \alpha_1 F - A)s^4 + (m_1 H + \alpha_1 G + c_1 F - B - A\Omega)s^3 + (m_1 I + \alpha_1 H + G c_1 - B\Omega - D)s^2 + (\alpha_1 I + H c_1 - D\Omega - E)s + I c_1 - E\Omega}{s^2 (A s^3 + B s^2 + D s + E)(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}\right|^2 ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{m_1 F s^5 + (m_1 G + \alpha_1 F - A)s^4 + (m_1 H + \alpha_1 G + c_1 F - B - A\Omega)s^3 + (m_1 I + \alpha_1 H + G c_1 - B\Omega - D)s^2 + (\alpha_1 I + H c_1 - D\Omega - E)s + I c_1 - E\Omega}{A s^7 + (2\sqrt{\alpha_1} A + B)s^6 + (A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1} B + D)s^5 + (B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1} D + E)s^4 + (D\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1} E)s^3 + E\Omega^2 s^2}\right|^2 ds = \infty$$

4-Critère de déplacement relative, et de vitesse.

4-1 excitation par un processus tel que $S_{\ddot{x}_0}(s) = N^2$

La fonction de transfert optimum du système de vibro-isolation est donnée par
$$\phi(s) = \frac{m m_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)c_1}{R(s)\,\varphi(s)\,(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)} \left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+$$

Pour ce critère, le produit $R(s)R(-s)$ est tel que
$$R(s)R(-s) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda s^2 L_1(s) L_1(-s)$$

Pour notre système, on a $i = 1$, par conséquent on aura
$$L_1(s) = \frac{\bar{x}_1(s)}{\bar{x}(s)} = \frac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$

$$R(s)R(-s) = 1 - \lambda s^2 L_1(s) L_1(-s)$$
$$R(s)R(-s) = 1 - \lambda s^2 \frac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1} \cdot \frac{-\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}$$

$$R(s)R(-s) = \frac{(m_1^2 + \lambda \alpha_1^2)s^4 + (2m_1c_1 - \alpha_1^2 - \lambda c_1^2)s^2 + c_1^2}{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1)}$$

Que l'on peut ecrire sous la forme.
$$R(s)R(-s) = \frac{A s^2 + B s + E}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1} \cdot \frac{A s^2 - B s + E}{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}$$

Par identification on tire
$$A^2 = m_1^2 + \lambda \alpha_1^2$$
$$-B^2 + 2AE = 2m_1c_1 - \alpha_1^2 - \lambda c_1^2$$

$$E^2 = c_1^2$$

Les coefficients A, B, E étant determinés par la résolution de ce système, il en sera de même pour :

$$R(s) = \frac{As^2 + Bs + E}{m_1 s^2 + d_1 s + c_1}$$

On a d'autre part

$$\left.\begin{aligned} S_{\ddot{x}_0}(s) &= N^2 \\ S_{\ddot{x}_0}(s) &= s^4 S_0 \varphi(s)\varphi(-s) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} S_0 &= N^2 \\ \varphi(s) &= \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\phi(s) = \frac{m m_1 s^2 + (m+m_1) d_1 s + (m+m_1) c_1}{(As^2 + Bs + E)\,\frac{1}{s^2}} \left\{ \frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{As^2 - Bs + E}{m_1 s^2 - d_1 s + c_1}} \right\}_+$$

Posons

$$T = \frac{m_1 s^2 - d_1 s + c_1}{s^2 (As^2 - Bs + E)}$$

Que nous décomposons en

$$T = \frac{Fs + G}{s^2} + \frac{Hs + I}{\text{[illegible]}}$$

Par identification on tire

La résolution de ce système, nous donne les valeurs des coefficients F, G, H, I. On déterminera ainsi les valeurs de :

$$T_+ = \frac{(-\alpha_1 E + c_1 B)s + c_1 E}{E^2 s^2}$$

d'où $$\phi(s) = \frac{m m_1 c_1(-\alpha_1 + B)s^3 + c_1\left(m m_1 c_1 + (m+m_1)(-\alpha_1 + B)\alpha_1\right)s^2 + (m+m_1)c_1^2 B s + (m+m_1)c_1^3}{A c_1^2 s^2 + B c_1^2 s + c_1^3}$$

Détermination des dispersions de $\sigma^2_{\dot{x}_1}$, $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$, $\sigma^2_{x-x_0}$

a/ Dispersion de la vitesse

$$\sigma^2_{\dot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left| H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s) / s \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = H_{\frac{x_1}{x}}(s) \cdot H_{\frac{x}{x_0}}(s)$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{(\alpha_1 s + c_1)}{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)} \cdot \frac{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)\left((-\alpha_1 + B)c_1 s + c_1^2\right)}{A c_1^2 s^2 + B c_1^2 s + c_1^3}$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{\alpha_1(-\alpha_1 + B)s^2 + B c_1 s + c_1^2}{A c_1 s^2 + B c_1 s + c_1^2}$$

$$\sigma^2_{\dot{x}_1} = N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left| \frac{\alpha_1(-\alpha_1 + B)s^2 + B c_1 s + c_1^2}{A c_1 s^3 + B c_1 s^2 + c_1^2 s} \right|^2 ds = \infty$$

Cette intégrale est divergente, à cause des singularités sur l'axe imaginaire.

b/ Dispersion de l'accélération

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left| H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = N^2\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{\alpha_1(-\alpha_1+B)s^2+Bc_1 s+c_1^2}{Ac_1 s^2+Bc_1 s+c_1^2}\right|^2 ds = \infty$$

c/ Dispersion du déplacement relative

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{1}{s^2}\left[H_{\frac{x}{x_0}}(s)-1\right] = \frac{1}{s^2}\left[\frac{(m_1s^2+\alpha_1 s+c_1)\left((-\alpha_1c_1+c_1B)s+c_1^2\right)}{Ac_1^2s^2+Bc_1^2 s+c_1^3}-1\right]$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{m_1c_1(-\alpha_1+B)s+\left((m_1-A)c_1^2+\alpha_1c_1(-\alpha_1+B)\right)}{Ac_1^2s^2+Bc_1^2s+c_1^3}$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = N^2\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{m_1c_1(-\alpha_1+B)s+\left((m_1-A)c_1^2+\alpha_1c_1(-\alpha_1+B)\right)}{Ac_1^2s^2+Bc_1^2s+c_1^3}\right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne

$$\sigma^2_{x-x_0} = N^2\frac{m_1^2c_1^2(-\alpha_1+B)^2+\left((m_1-A)c_1+\alpha_1(-\alpha_1+B)\right)^2A}{2ABc_1^4}$$

4-2 éxcitation par un processus tel que $S_{\ddot{x}_0}(s) = 2\alpha_1 N^2 \dfrac{\Omega^2 - s^2}{(\Omega^2+s^2)^2 - 4\alpha_1 s^2}$

La fonction de transfert optimum du système de vibro-isolation est donnée par $\phi(s) = \dfrac{mm_1 s^2 + (m+m_1)d_1 s + (m+m_1)c_1}{(As^2+Bs+E)\,\varphi(s)} \left\{ \dfrac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$

On sait que pour une telle excitation on a

$$\varphi(s) = \frac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}$$

et on a d'autre part $R(-s) = \dfrac{As^2 - Bs + E}{m_1 s^2 - d_1 s + c_1}$

$$\text{d'ou } \phi(s) = \frac{mm_1 s^2 + (m+m_1)d_1 s + (m+m_1)c_1}{(As^2+Bs+E)\dfrac{\Omega+s}{s^2(s^2+2\sqrt{\alpha_1}\,s+\Omega^2)}} \left\{ \frac{\dfrac{\Omega+s}{s^2(s^2+2\sqrt{\alpha_1}\,s+\Omega^2)}}{\dfrac{As^2-Bs+E}{m_1s^2-d_1s+c_1}} \right\}_+$$

Posons

$$T = \frac{(m_1 s^2 - d_1 s + c_1)(\Omega + s)}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)\,(As^2 - Bs + E)}$$

Que nous décomposons en

$$T = \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} + \frac{Js + K}{As^2 - Bs + E}$$

Par identification on tire

$$AF + J = 0$$

$$AG - FB + K + 2J\sqrt{\alpha_1} = 0$$

$$FE + HA - GB + 2\sqrt{\alpha_1}\,K + J\Omega^2 = m_1$$

$$GE + IA - HB + K\Omega^2 = m_1\Omega - \alpha_1$$

$$HE - IB = c_1 - \alpha_1\Omega$$

$$IE = c_1\Omega$$

La résolution de ce système, nous donne les valeurs des coefficients F, G, H, I, J, K ; ains on déterminera celle de

$$T_+ = \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\,s + \Omega^2)}$$

d'où $$\phi(s) = \frac{(mm_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)c_1)(Fs^3 + Gs^2 + Hs + I)}{(As^2 + Bs + E)(\Omega + s)}$$

Determination des dispersions de $\sigma^2_{\dot{x}_1}$, $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$, $\sigma^2_{x-x_0}$

a/ Dispersion de la vitesse

$$\sigma^2_{\dot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left| H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s)\Big/ s\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\,ds$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = H_{\frac{x_1}{x}}(s)\cdot H_{\frac{x}{x_1}}(s)$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{(\alpha_1 s + c_1)}{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)}\cdot\frac{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)(Fs^3 + Gs^2 + Hs + I)}{(As^2 + Bs + E)(\Omega + s)}$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{(\alpha_1 s + c_1)(Fs^3 + Gs^2 + Hs + I)}{(As^2 + Bs + E)(\Omega + s)}$$

$$\sigma^2_{\dot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{(d_1 s + c_1)(F s^3 + G s^2 + H s + I)}{(A s^3 + B s^2 + E s)(\Omega + s)}\right|^2 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega + s}{(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \cdot \frac{\Omega - s}{(s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} ds$$

$$\sigma^2_{\dot{x}_1} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{(d_1 s + c_1)(F s^3 + G s^2 + H s + I)}{(A s^3 + B s^2 + E s)(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}\right|^2 ds$$

$$\sigma^2_{\dot{x}_1} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{d_1 F s^4 + (d_1 G + c_1 F)s^3 + (d_1 H + c_1 G)s^2 + (d_1 I + c_1 H)s + c_1 I}{A s^5 + (2\sqrt{\alpha_1}A + B)s^4 + (A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}B + E)s^3 + (B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}E)s^2 + E\Omega^2 s}\right|^2 ds$$

$$\sigma^2_{\dot{x}_1} = \infty$$

. Cette intégrale est divergente à cause des singularites sur l'axe imaginaire.

b/ Dispersion de l'accélération

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left| H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds .$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{(d_1 s + c_1)(F s^3 + G s^2 + H s + I)}{(A s^2 + B s + E)(\Omega + s)}\right|^2 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega + s}{(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \cdot \frac{\Omega - s}{(s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} ds.$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{(d_1 s + c_1)(F s^3 + G s^2 + H s + I}{(A s^2 + B s + E)(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}\right|^2 ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{d_1 F s^4 + (d_1 G + c_1 F)s^3 + (d_1 H + c_1 G)s^2 + (d_1 I + c_1 H)s + c_1 I}{A s^4 + (2\sqrt{\alpha_1}A + B)s^3 + (A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}B + E)s^2 + (B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}E)s + E\Omega^2}\right|^2 ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \infty$$

c/ Dispersion du déplacement relative

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\,ds .$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{1}{s^2}\left[H_{\frac{x}{\ddot{x}_0}}(s) - 1\right] = \frac{1}{s^2}\left[\frac{(m_1 s^2+\alpha_1 s + c_1)(Fs^3+Gs^2+Hs+I)}{(As^2+Bs+E)(\Omega+s)} - 1\right]$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{m_1 F s^3 + (m_1 G+\alpha_1 F)s^2 + (m_1 H+\alpha_1 G + c_1 F - A)s + (m_1 I + \alpha_1 H + c_1 G - A\Omega - B)}{(As^2+Bs+E)(\Omega+s)}$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{m_1Fs^3+(m_1G+\alpha_1F)s^2+(m_1H+\alpha_1G+c_1F-A)s+(m_1I+\alpha_1H+c_1G-A\Omega-B)}{(As^2+Bs+E)(\Omega+s)}\right|^2 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega+s}{(s^2+2\sqrt{\alpha_1}s+\Omega^2)}\frac{\Omega-s}{(s^2-2\sqrt{\alpha_1}s+\Omega^2)}\,ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{m_1Fs^3+(m_1G+\alpha_1F)s^2+(m_1H+\alpha_1G+c_1F-A)s+(m_1I+\alpha_1H+c_1G-A\Omega-B)}{(As^2+Bs+E)(s^2+2\sqrt{\alpha_1}s+\Omega^2)}\right|^2 ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = 2\alpha_1 N^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{m_1Fs^3+(m_1G+\alpha_1F)s^2+(m_1H+\alpha_1G+c_1F-A)s+(m_1I+\alpha_1H+c_1G-A\Omega-B)}{As^4+(2\sqrt{\alpha_1}A+B)s^3+(A\Omega^2+2\sqrt{\alpha_1}B+E)s^2+(B\Omega^2+2\sqrt{\alpha_1}E)s+E\Omega^2}\right|^2 ds$$

La table d'intégrale donne

$$\sigma^2_{x-x_0} = 2\alpha_1 N^2 \frac{c_3^2(-d_0^2d_3+d_0d_1d_2)+(c_2^2-2c_1'c_3)d_0d_1d_4+(c_1'^2-2c_0c_2)d_0d_3d_4+c_0^2(-d_1d_4^2+d_2d_3d_4)}{2d_0d_4(-d_0d_3^2-d_1^2d_4+d_1d_2d_3)}$$

Avec

$d_4 = A$

$d_3 = 2\sqrt{\alpha_1}A + B$ $\qquad c_3 = m_1 F$

$d_2 = A\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}B + E$ $\qquad c_2 = m_1 G + \alpha_1 F$

$d_1 = B\Omega^2 + 2\sqrt{\alpha_1}E$ $\qquad c_1' = m_1 H + \alpha_1 G + c_1 F - A$

$d_0 = E\Omega^2$ $\qquad c_0 = m_1 I + \alpha_1 H + c_1 G - A\Omega - B$

En conclusion pour ce calcul théorique , on remarque que :

a/ Pour les critères dont les fonctionnelles sont

$$C = \sigma^2_{x-x_0} + \lambda\, \sigma^2_{\ddot{x}} + \pi\, \sigma^2_{\dddot{x}} \; ; \; C = \sigma^2_{x-x_0} + \lambda\, \sigma^2_{\dddot{x}} \, .$$

que les formes analytiques deviennent autant compliquées que les formes de critère , et d'excitations. D'où la difficulté de réalisation physique du système de vibro-isolation.

b/ Pour les critères dont les fonctionnelles sont

$$C = \sigma^2_{x-x_0} + \lambda\, \sigma^2_{\dot{x}} \quad ; \; C = \sigma^2_{\ddot{x}} + \lambda\, \sigma^2_{x-x_0}$$

que les dispersions prennent généralement des valeurs infinies ce qui entraine l'irréalisabilité du système de vibro-isolation

VI COMPARAISON DES RESULTATS

Notre comparaison sera axée sur l'influence des formes de critère sur la vibro-isolation optimum dans le cas où l'on vibro-isole un système dynamique ou un corps rigide.

Pour se faire, on considère les deux critères

a/ critère de déplacement relative, et de Jerk

b/ critère de déplacement relative, d'accélération ~~minimale~~, et de Jerk

On calculera pour chacun des deux critères cités ci-dessus, les dispersions du deplacement relative, d'accélération, et de Jerk suivant les valeurs du multiplicateur de Lagrange, et on comparera ces valeurs de dispersions avec celles du critère dont l'etude a été déja faite, et ayant pour fonctionnelle $C = \sigma^2_{x-x_0} + \gamma\, \sigma^2_{\ddot{x}}$.

1 Système dynamique.

1-1 Critère de déplacement relative, et de Jerk

Cas où l'on a une excitation de bruit blanc telleque $S_{\ddot{x}_0}(s) = N^2$.

Le calcul théorique a été dejà fait (Voir chap V) dont voici les principaux résultats.

Dispersion d'accélération

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = N^2 \frac{\alpha_1^2 E (E-\alpha_1)^2 + \left(E^2 - 2\alpha_1 (E-\alpha_1)\right) B c_1^2 + c_1^3 (DB - AE)}{2 c_1^2 \left(BDE - B^2 c_1 - AE^2\right)}$$

Dispersion de Jerk

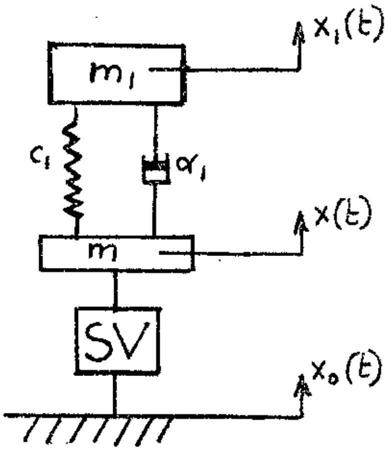
$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = N^2 \frac{\alpha_1^2 (E-\alpha_1)^2 (DE - Bc_1) + \left(E^2 - 2\alpha_1 (E-\alpha_1)\right) AEc_1^2 + ABc_1^4}{2Ac_1^2 \left(BDE - B^2 c_1 - AE^2\right)}$$

Dispersion du déplacement relotive

$$\sigma^2_{x-x_0} = N^2 \frac{A^2 E c_1^3 + Bc_1 \left(\left(m_1 (E-\alpha_1) - Bc_1\right)^2 + 2Ac_1 \left((m_1 - D)c_1 + \alpha_1 (E-\alpha_1)\right) + \left((m_1 - D)c_1 + \alpha_1 (E-\alpha_1)\right)^2 (DB - AE)\right)}{2 c_1^3 \left(BDE - B^2 c_1 - AE^2\right)}$$

Pour faire valoir, ces dispersions, tout en réspectant le critère d'optimisation $\left(C = \sigma^2_{x-x_0} + \lambda\, \sigma^2_{\dddot{x}_1} = \text{minimum}\right)$, nous considérons un exemple pratique pour effectuer ce calcul

On desire vibro-isoler un modele dynamique d'un homme operateur (par exemple conducteur d'un véhicule), le modèle dynamique étant le fauteuil avec son systeme de vibro-isolation.



Les données sont :

masse $m_1 = 80{,}862$ Kg

ressort $c_1 = 7961{,}05$ Kg.s^{-2}

l'amortisseur $\alpha_1 = 141{,}688$ Kg.s^{-1}

La détermination de ces dispersions, et de la fonction de transfert du système de vibro-isolation optimum necessite la résolution du système d'equations en A, B, D, E, F suivant

$$\left.\begin{array}{ll} A = \alpha_1\sqrt{\lambda} & (1) \\ B^2 - 2\alpha_1\sqrt{\lambda}\, D = \lambda c_1^2 & (2) \\ D^2 - 2BE = m_1^2 - 2\alpha_1 c_1\sqrt{\lambda} & (3) \\ 2c_1 D - E^2 = 2m_1 c_1 - \alpha_1^2 . & (4) \\ F = c_1 & (5) \end{array}\right. \qquad (\mathrm{I})$$

avec λ comme multiplicateur de Lagrange.

L'algorithme necessaire pour résoudre ce système est le suivant

On encadre la valeur de B par deux valeurs B_{min} et B_{max}.

Ces deux dernières sont estimées à partir de l'equation (2) telle que

$$B_{min} = B(1) = c\sqrt{\lambda} + (c\sqrt{\lambda})/50$$

$$B_{max} = B(2) = c\sqrt{\lambda} + (c\sqrt{\lambda})/3$$

On calcule $\quad B_{moy} = B(3) = \dfrac{B(1) + B(2)}{2}$

Ainsi que

$$D(I) = \frac{B(I)^2 - \lambda c_1^2}{2\alpha_1\sqrt{\lambda}} \qquad \text{avec} \quad I = 1, 2, 3$$

$$E(I) = \frac{D(I)^2 - m_1^2 + 2\alpha_1 c_1\sqrt{\lambda}}{2B(I)}$$

En designant par $G(I) = 2c_1 D(I) - E(I)^2 - 2m_1 c_1 + \alpha_1^2$ (6) $I = 1,2,3$

Cette équation (6) tirée de la quatrième équation (4) sera pour la vérification des valeurs B, D, E trouvées à partir des équations (2) et (3).

La verification se fera selon que

$$G(1) . G(3) < 0 \quad \text{alors} \quad B(2) = B(3)$$

$$G(2) . G(3) < 0 \quad \text{alors} \quad B(1) = B(3)$$

On arrête si $|B(1) - B(2)| < 10^{-6}$

Programme de résolution de ce système non Lineaire

Pour se faire on designe par :

$S = \lambda$

avec $\lambda = \lambda_0 \dfrac{\rho}{1-\rho}$ $\qquad \rho \in [0 \div 1]$ et $\lambda_0 = 1\ [s^6]$

Le pas de ρ etant 0,05

$H = \rho$ $\qquad\qquad T = \alpha_1$

$W1 = \sigma^2_{\ddot{x}_1}$

$W2 = \sigma^2_{\dddot{x}_1}$

$W3 = \sigma^2_{x-x_0}$

$M1 = m_1$

$C1 = c_1$

Programme de resolution des systèmes I , II

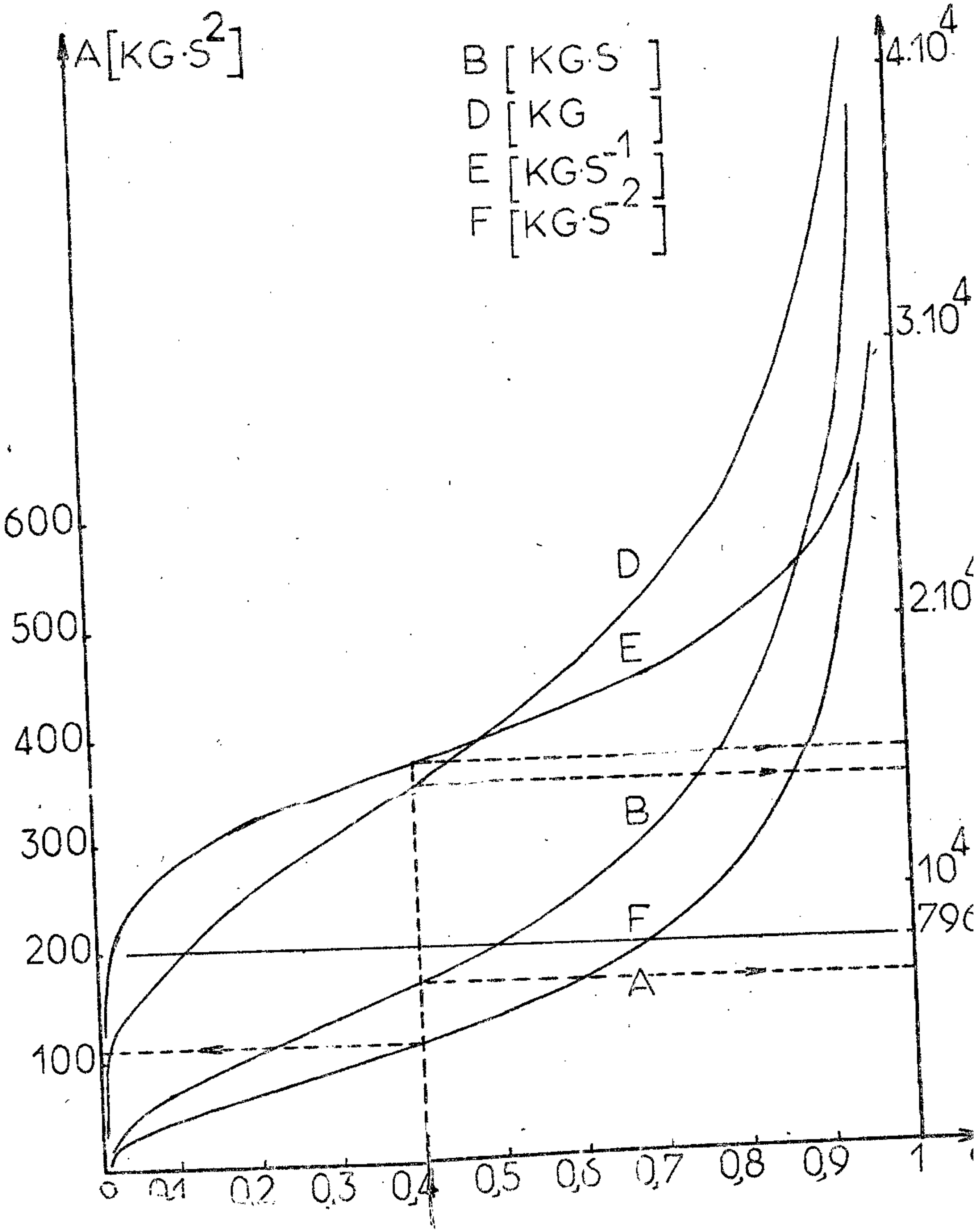
```
5  DATA 80.862 , 7961.05, 141.688
10 READ M, C, T
15 PRINT M; C; T
17 FØR S = 0.05 TØ 0.99 STEP 0.05
18 H = S /( 1 - S)
20 B(1) = C* H** 0.5 + (C * H** 0,5) /(50)
22 B(2) = C* H** 0,5 + (C* H** 0,5) /(3)
24 B(3) = ( B(1) + B(2)) / 2
26 PRINT "B(3) = " ; B(3)
28 FØR I = 1 TØ 3
30 D(I) = (B(I)**2 - H* C1**2) / (2* T* H** 0,5)
32 E(I) = (D(I)**2 - M1**2 + 2*T* C1* H**0,5) /(2* B(I))
34 G(I) = 2*C1* D(I) - E(I)**2 - 2* M1* C1 + T**2
35 PRINT "G("; I; ") = "; G(I)
36 NEXT I
38 IF G(1) * G(3) < 0 THEN LET B(2) = B(3)
40 IF G(2) * G(3) < 0 THEN LET B(1) = B(3)
42 IF ABS (B(1) - B(2)) < 1.E-6 THEN 48
44 PRINT B(1) ; B(2)
46 GØTØ 24
48 PRINT "B(3) = "; B(3); "D(3) = "; D(3); "E(3) = "; E(3) .
```

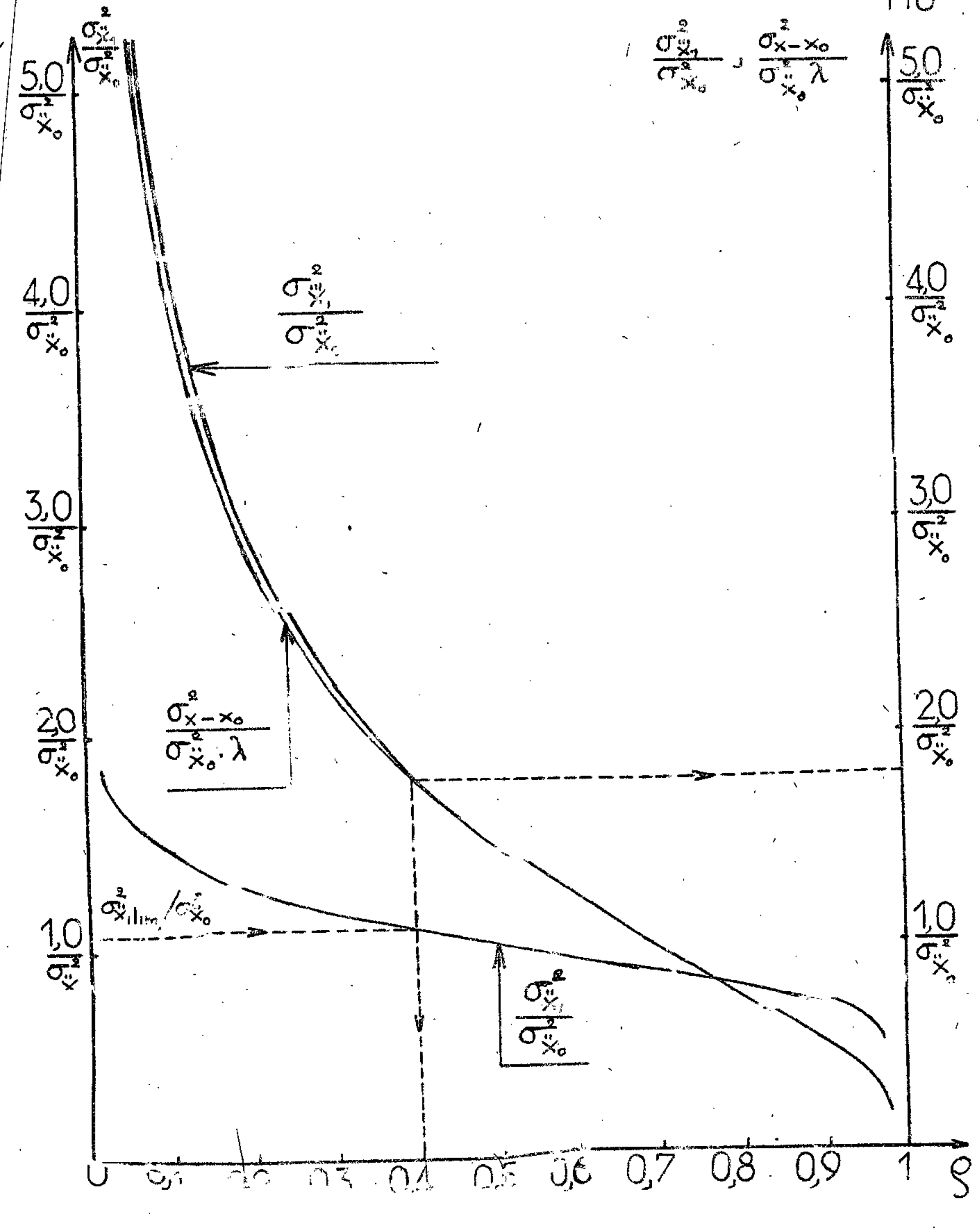
```
50  B = B(3)
52  D = D(3)
54  E = E(3)
56  A = T*H**0,5
58  U1 = T**2*E*(E-T)**2 + (E**2 - 2*T*(E-T))*B*C1**2 + C1**3*(D*B-A*E)
60  U2 = 2*C1**2*(D*D*E - B**2*C1 - A*E**2)
62  W1 = U1/U2
64  U3 = T**2*(E-T)**2*(D*E-B*C1) + (E**2-2*T*(E-T))*A*E*C1**2 + A*B*C1**4
66  U4 = 2*A*C1**2*(B*D*E - B**2*C1 - A*E**9)
68  W2 = U3/U4
70  U5 = A**2*E*C1**3 + B*C1*((M1*(E-T) - D*C1)**2 + 2*A*C1*((M1-D)*C1+T*(E-T))
72  U6 = ((M1-D)*C1+T(E-T))**2*(D*B-A*E)
74  U7 = 2*C1**3*(B*D*E - B**2*C1 - A*E**2)
76  W3 = (U5+U6)/U7
80  PRINT "W1 = "; W1; "W2 = "; W2; "W3 = "; W3
82  INPUT P
84  NEXT S
92  END
```

Tableau des valeurs des coefficients et des dispersions en fonction de ρ

ρ	A(Kg.s²)	B(Kg.s)	D(Kg)	E(Kg.s⁻¹)	F(Kg.s⁻²)	$\sigma^2_{\ddot{x}_1}$ (cm² s⁻⁴)	$\sigma^2_{\dddot{x}_1}$ (cm² s⁻⁶)	$\sigma^2_{x-x_0}$ (cm²)
0,00	0	0	80,862	141,688	7961,05	∞	∞	0,00000000
0,05	32,50	1932,11626	6112,39464	9800,75201	7961,05	1,64089033	6,49858048	0,33372263
0,10	47,23	2789,4436	7823,10836	11103,7334	7961,05	1,44732126	4,47870997	0,488207921
0,15	59,52	3502,7838	9115,16845	11994,3821	7961,05	1,33925064	3,55625062	0,617383783
0,20	70,844	4158,56637	10227,3657	12711,1661	7961,05	1,26330323	2,98918814	0,736493322
0,25	81,80	4792,32149	11247,9185	13335,0279	7961,05	1,20386635	2,58957343	0,851853689
0,30	92,75	5424,90601	12222,6883	13904,7985	7961,05	1,15425747	2,28439448	0,967201569
0,35	103,97	6071,87897	13181,2688	14443,2012	7961,05	1,11098858	2,03845826	1,08534635
0,40	115,68	6747,24603	14146,3429	14965,6965	7961,05	1,071198499	1,83235045	1,20883543
0,45	128,16	7465,60557	15138,2285	15484,34151	7961,05	1,03588098	1,65429449	1,34033916
0,50	141,688	8243,94971	16177,7624	16009,8883	7961,05	1,00169179	1,496601173	1,48297827
0,55	156,64	9103,77483	17288,8795	16553,1822	7961,05	0,96863834	1,35392676	1,64071203
0,60	173,53	10074,163	18501,7667	17126,5753	7961,05	0,936036691	1,22232215	1,81890624
0,65	193,08	11196,9253	19857,6272	17745,6391	7961,05	0,9032123317	1,09867177	2,02528522
0,70	216,43	12536,0841	21417,0356	18431,9492	7961,05	0,86940919	0,980304718	2,27168696
0,75	245,41	14197,1647	23276,3439	19218,2423	7961,05	0,833660137	0,864666558	2,57763826
0,80	283,37	16371,4538	25604,1999	20159,4942	7961,05	0,794546625	0,748931069	2,97856008
0,85	337,28	19455,8222	28737,1615	21360,9115	7961,05	0,749648069	0,62932661	3,54799554
0,90	425,06	24472,1178	33500,4783	23067,955	7961,05	0,693925392	0,49945647	4,47548469
0,95	617,60	35457,095	42921,9954	26117,8291	7961,05	0,612561567	0,343832135	6,51056745
1,00	∞	∞	∞	∞	7961,05	0,00000000	0,00000000	∞

TABLEAU 1


A [KG·S^2]
B [KG·S]
D [KG]
E [KG·S^{-1}]
F [KG·S^{-2}]
600
500
400
300
200
100
4.10^4
3.10^4
2.10^4
10^4
796
D
E
B
F
A
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1



Les résultats obtenus sont resumés sur le tableau 1
Les variations des coefficients et des dispersions en fonction de ς, sont respectivement representées sur les graphes des pages 117 et 118

1-2 Critère de déplacement relative, d'accélération, et de Jerk.

Cas où l'on a une éxcitation de bruit blanc telle que $S_{\ddot{x}_0}(s) = N^2$

Pour ce critère, les valeurs des dispersions sont :

Dispersion d'accélération

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = N^2 \frac{\alpha_1^2 M^2 FE + \left[(\alpha_1 N + c_1 M)^2 - 2 N c_1 \alpha_1 M\right] FB + N^2 c_1^2 \left[DB - EA\right]}{2F\left[EDB - E^2 A - FB^2\right]}$$

Dispersion de Jerk

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = N^2 \frac{\alpha_1^2 M^2 (-F^2 B + FED) + \left((\alpha_1 N + c_1 M)^2 - 2 N c_1 \alpha_1 M\right) FEA + N^2 c_1^2 FBA}{2FA\left(EDB - FB^2 - E^2 A\right)}$$

Dispersion du déplacement relative

$$\sigma^2_{x - x_0} = N^2 \frac{A^2 FE + \left((m_1 N - B)^2 + 2(m_1 N + \alpha_1 M - D)A\right) FB + (m_1 N + \alpha_1 M - D)^2 (DB - EA)}{2F\left(EDB - FB^2 - E^2 A\right)}$$

En considérant toujours le même exemple pratique que précedemment, on est ramené à la résolution du système suivant

$$
\begin{aligned}
&A = \alpha_1 \sqrt{\mathcal{X}} \\
&B^2 - 2\alpha_1 \sqrt{\mathcal{X}}\, D = \alpha_1^2 \lambda + c_1^2 \mathcal{X} \qquad\qquad (\mathrm{II}) \\
&D^2 - 2BE = m_1^2 + \lambda c_1^2 - 2\alpha_1 c_1 \sqrt{\mathcal{X}} \\
&2c_1 D - E^2 = 2 m_1 c_1 - \alpha_1^2 \\
&F = c_1
\end{aligned}
$$

Avec $\mathcal{X}$ et λ comme multiplicateurs de Lagrange tels que

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \frac{\rho}{1-\rho} \qquad \mathcal{X}_0 = 1 \left[s^6 \right]$$

$$\lambda = \lambda_0 \frac{\rho}{1-\rho} \qquad \lambda_0 = 1 \left[s^4 \right]$$

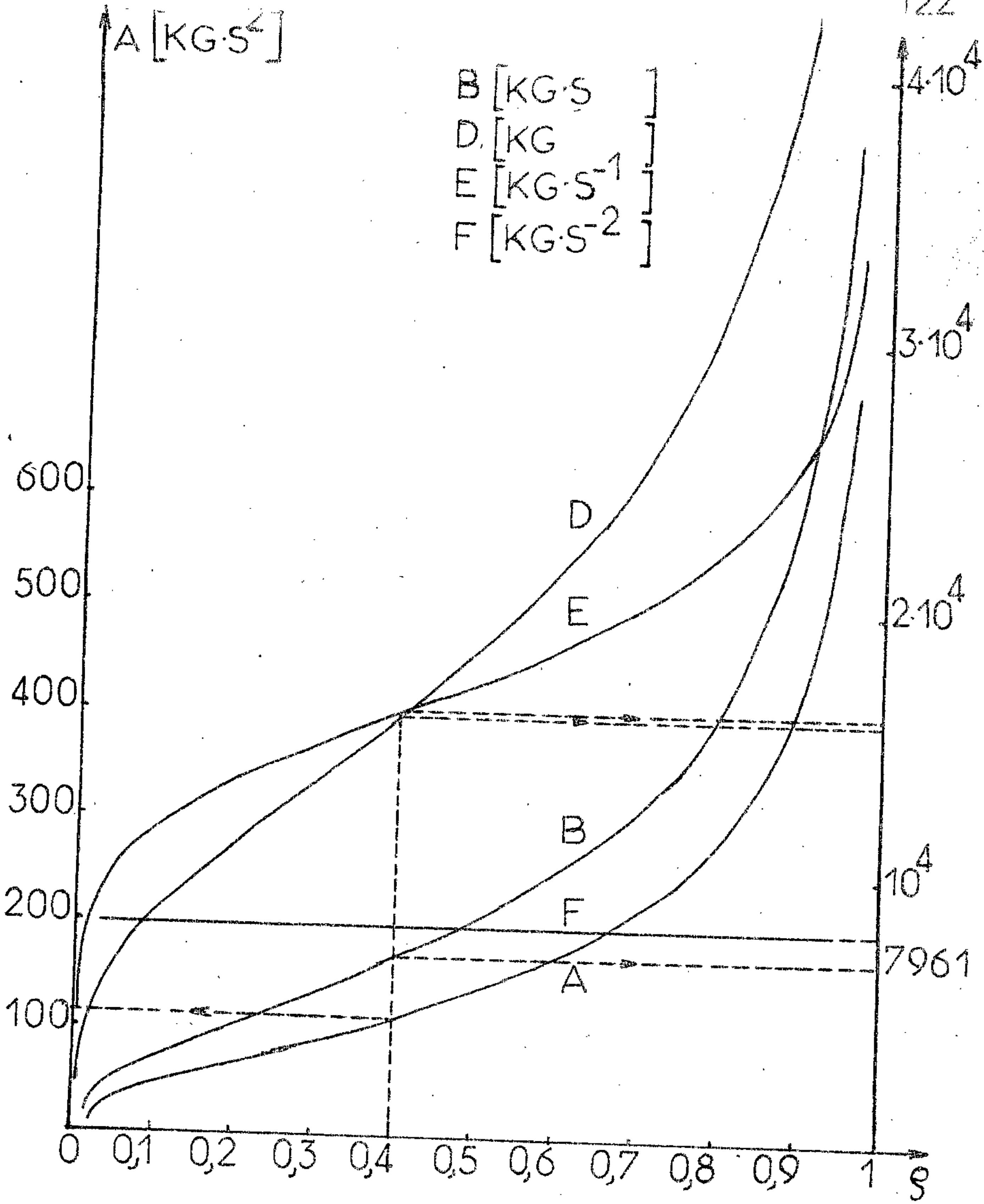
Les résultats obtenus sont resumés sur le tableau 2
Les variations des coefficients, et des dispersions en fonction de ρ sont respectivement representées sur les graphes des pages 122 et 123.

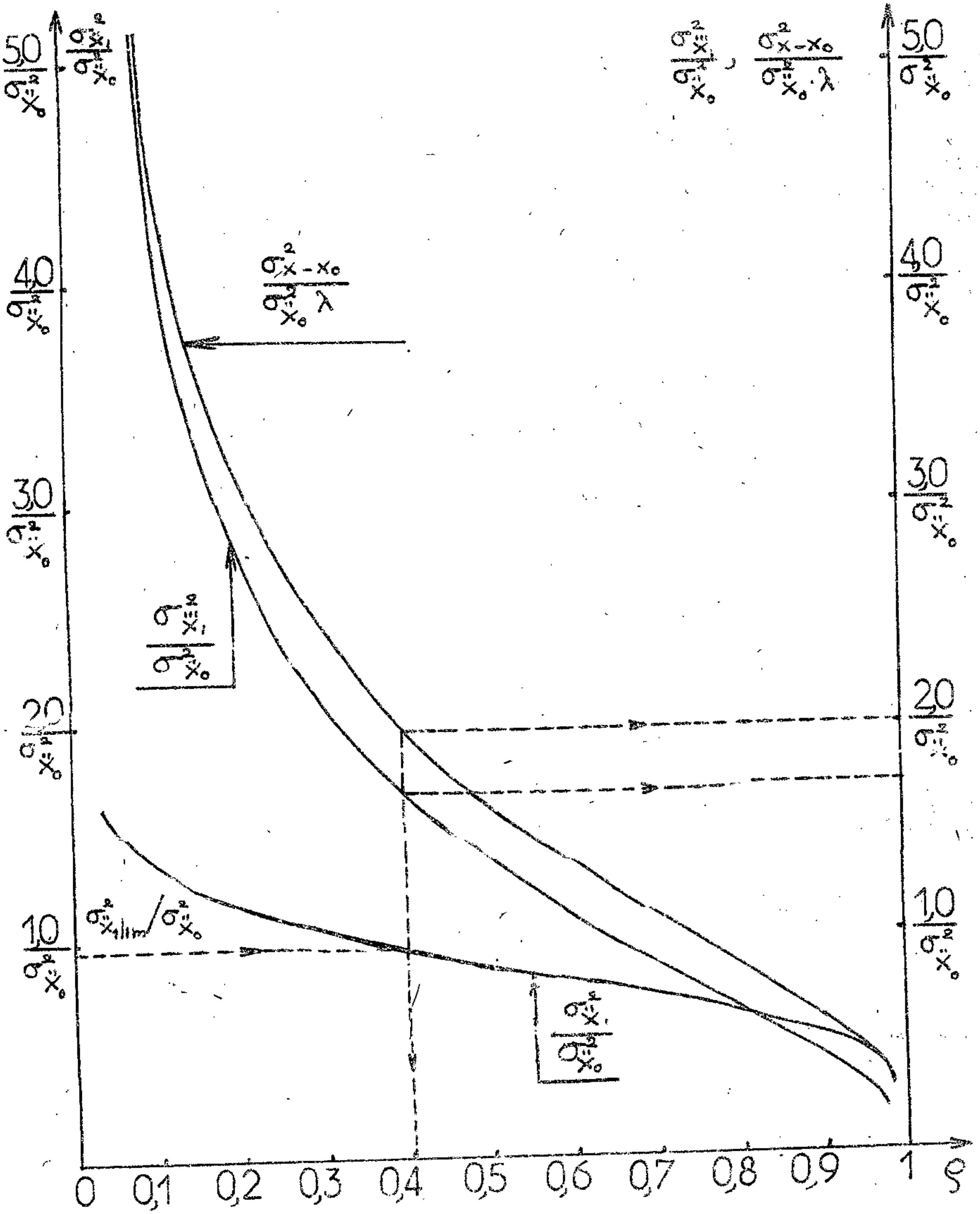
N.B le programme de résolution du système (I) ... reste globalement valable, pour le système (II), avec seulement le vecteur colonne des constantes (seconds membres des equations) qui prendra d'autres valeurs

Tableau des valeurs des coefficients et des dispersions en fonction de ρ

ρ	A(Kg.s²)	B(Kg.s)	D(Kg)	E($Kg.s^{-1}$)	F($Kg.s^{-2}$)	M(s)	$\sigma^2_{\ddot{x}_1}$($cm^2.s^{-4}$)	$\sigma^2_{\dddot{x}_1}$($cm^2.s^{-6}$)	$\sigma^2_{x-x_0}$(cm^2)
0,00	0	0	80,862	141,688	7961,05	0	∞	∞	0,000000
0,05	32,50	1938,51722	6477,24355	10092,7655	7961,05	1,24997049	1,54901146	6,2603365	0,349348925
0,10	47,23	2799,83814	8414,55622	11519,9825	7961,05	1,42924545	1,34721342	4,27649365	0,517231555
0,15	59,52	3516,8022412	9912,03945	12512,1161	7961,05	1,55386891	1,23599206	3,37423455	0,659854382
0,20	70,85	4176,11391	11224,1635	13320,8427	7961,05	1,65545434	1,15418245	2,82139287	0,793054231
0,25	81,80	4813,43488	12446,6261	14032,4265	7961,05	1,74483749	1,09158843	2,43291559	0,923529151
0,30	92,75	5449,71343	13630,4997	14688,7289	7961,05	1,82727667	1,0392603	2,13703217	1,05537137
0,35	103,97	6100,58955	14809,9455	15314,6339	7961,05	1,90589758	0,993563707	1,89919852	1,1917873
0,40	115,68	6780,15346	16012,4355	15927,4664	7961,05	1,98287643	0,952393241	1,70038578	1,33580978
0,45	128,16	7503,10198	17263,8552	16541,1436	7961,05	2,05996138	0,914141753	1,52907098	1,49073796
0,50	141,688	8286,55119	18592,0404	17168,4863	7961,05	2,13876289	0,877959449	1,37774711	1,66054223
0,55	156,64	9152,16278	20030,2609	17822,918	7961,05	2,22036709	0,842971115	1,24121166	1,85037415
0,60	173,53	10129,2508	21621,7961	18520,1774	7961,05	2,30855093	0,808461657	1,11564045	2,08734336
0,65	193,08	11259,9689	23427,1922	19280,6295	7961,05	2,40407251	0,773726786	0,998037102	2,32184586
0,70	216,43	12608,8763	25537,3007	20133,059	7951,05	2,51114753	0,737979557	0,88586137	2,63005654
0,75	245,41	14282,4008	28099,4046	21121,8868	7961,05	2,63535573	0,700217346	0,776721905	3,01908241
0,80	283,37	16473,5006	31376,4235	22322,8841	796,05	2,7862149	0,658977082	0,668025884	3,53899498
0,85	337,28	19582,5963	35905,1366	23883,421	7961,05	2,98223639	0,611778974	0,558388488	4,29612516
0,90	425,06	24640,9487	43041,5384	26154,2396	7961,05	3,26747748	0,553507748	0,436191367	5,57306781
0,95	617,60	35724,1197	58001,0064	30368,2183	796105	3,79680196	0,469349444	0,29417113	8,54600197
1,00	∞	∞	∞	∞	7961,05		0,0000000	0,00000000	∞

TABLEAU 2


A [KG·S^{2}]
B [KG·S]
D [KG]
E [KG·S^{-1}]
F [KG·S^{-2}]
600
500
400
300
200
100
$4 \cdot 10^4$
$3 \cdot 10^4$
$2 \cdot 10^4$
10^4
7961
D
E
B
F
A
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
ϱ



$\sigma^2_{\ddot{x}_1} / \sigma^2_{\ddot{x}_0}$, $\sigma^2_{x-x_0} / \sigma^2_{\ddot{x}_0} \cdot \lambda$
$\sigma^2_{x-x_0} / \sigma^2_{\ddot{x}_0} \lambda$
$\sigma^2_{\ddot{x}_1} / \sigma^2_{\ddot{x}_0}$
$\sigma^2_{\ddot{x}_1 lim} / \sigma^2_{\ddot{x}_0}$
$5,0 / \sigma^2_{\ddot{x}_0}$
$4,0 / \sigma^2_{\ddot{x}_0}$
$3,0 / \sigma^2_{\ddot{x}_0}$
$2,0 / \sigma^2_{\ddot{x}_0}$
$1,0 / \sigma^2_{\ddot{x}_0}$
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1 ρ

Deuxième cas : critere de deplacement relative, d'acceleration ~~mini-~~ ~~-male~~, et de JerK

En procédant de la même façon que celle du premier cas on obtient

pour $\xi = 0,4$

$A = 115,68 \ Kg.s^2$ $\qquad E = 15927,4664 \ Kg.s^{-1}$

$B = 6780,15346 \ Kg.s$ $\qquad F = 7961,05 \ Kg.s^{-2}$

$D = 16012,4355 \ Kg$ $\qquad M = 1,98287643 \ s$

La fonction de transfert du système de vibro-isolation optimum est

$$H_{\frac{X}{X_0}}(s) = \frac{m_1 M s^3 + (m_1 + \alpha_1 M)s^2 + (\alpha_1 + c_1 M)s + c_1}{A s^4 + B s^3 + D s^2 + E s + F}$$

$$H_{\frac{X}{X_0}}(s) = \frac{160,34 s^3 + 361,81 s^2 + 15927,4664 s + 7961,05}{115,68 s^4 + 6780,15346 s^3 + 16012,4355 s^2 + 15927,4664 s + 7961,05}$$

b/ Influence des formes des critères sur la vibro-isolation optimum d'un système dynamique

. Pour se faire, on comparera les résultats obtenus avec les deux critères ayant pour fonctionnelles respectives $C_1 = \sigma^2_{x-x_0} + \lambda \sigma^2_{\dddot{x}_1}$ et $C_2 = \sigma^2_{x-x_0} + \lambda \sigma^2_{\ddot{x}_1} + x \sigma^2_{\dddot{x}_1}$, avec le critère dont la fonctionnelle est $C_3 = \sigma^2_{x-x_0} + \gamma \sigma^2_{\ddot{x}_1}$

Première comparaison : critère C_1 avec critère C_3

On fixe la valeur de la dispersion à une valeur limite pour le critère C_3

$$\left.\frac{\sigma^2_{\ddot{x}_1 lim}}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\right|_3 = \frac{1,16}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}$$

la valeur correspondante de $\rho = 0,4$ détermine

$$\frac{\sigma^2_{x-x_0}}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}\lambda} = \frac{19}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}} \quad \text{ou encore} \quad \left.\frac{\sigma^2_{x-x_0}}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\right|_3 = \frac{12,66}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}$$

$$\left.\frac{\sigma^2_{\dddot{x}_1}}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\right|_3 = \infty$$

Pour le critère C_1 avec $\rho = 0,4$, on a

$$\left.\frac{\sigma^2_{x-x_0}}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\right|_1 = \frac{1,2088}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}} \; ; \; \left.\frac{\sigma^2_{\ddot{x}_1 lim}}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\right|_1 = \frac{1,0712}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}} \; ; \; \left.\frac{\sigma^2_{\dddot{x}_1}}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\right|_1 = \frac{1,8323}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}$$

En faisant les rapports, on obtient

$$\frac{\sigma^2_{\ddot{x}_1}\big|_3}{\sigma^2_{\ddot{x}_1}\big|_1} = \frac{1,16}{1,0712} = 1,08 \quad ; \quad \frac{\sigma^2_{x-x_0}\big|_3}{\sigma^2_{x-x_0}\big|_1} = \frac{12,66}{1,2088} = 10,47$$

$$\frac{\sigma^2_{\dddot{x}_1}\big|_3}{\sigma^2_{\dddot{x}_1}\big|_1} = \frac{\infty}{1,8323} = \infty$$

On limite ainsi de 8 % la dispersion de l'accélèration, de 10 fois celle du deplacement relative, et indefiniment celle de Jerk en employànt le critère C_1 au lieu de C_3.

Deuxième comparaison : Critere 2 avec Critere 3

Pour le critère 2 avec $\xi = 0,4$ on a

$$\frac{\sigma^2_{x-x_0}}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\bigg|_2 = \frac{1,3358}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\bigg|_2 \quad ; \quad \frac{\sigma^2_{\ddot{x}_1 lim}}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\bigg|_2 = \frac{0,9524}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\bigg|_2 \quad ; \quad \frac{\sigma^2_{\dddot{x}_1}}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\bigg|_2 = \frac{1,7004}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\bigg|_2$$

En faisant les rapports on a

$$\frac{\sigma^2_{\ddot{x}_1}\big|_3}{\sigma^2_{\ddot{x}_1}\big|_2} = \frac{1,16}{0,9524} = 1,22 \quad ; \quad \frac{\sigma^2_{x-x_0}\big|_3}{\sigma^2_{x-x_0}\big|_2} = \frac{12,66}{1,3358} = 9,47 \quad ; \quad \frac{\sigma^2_{\dddot{x}_1}\big|_3}{\sigma^2_{\dddot{x}_1}\big|_2} = \frac{\infty}{1,7} = \infty$$

On limite encore de 22 % la dispersion de l'acceleration, 9 fois celle du deplacement relative, et indefiniment celle de Jerk. en employant le critère 2 au lieu du critère 3.

Au vu de ces deux comparaisons, on constate l'influence des formes des critères sur la vibro-isolation d'un système dynamique essentiellement pour la dispersion du déplacement relative, et de Jerk

2 Corps rigide

2-1 Critère de déplacement relative et de Jerk

Excitation par un processus tel que $S_{\ddot{x}_0}(\omega) = N^2$

Le calcul theorique a donné les resultats suivants.

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \lambda^{-1/6} N^2$$

$$\sigma^2_{\dddot{x}} = \frac{3}{2} \lambda^{-1/2} N^2$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{3}{2} \lambda^{1/2} N^2$$

Avec : $\lambda = \lambda_0 \dfrac{\rho}{1-\rho}$

et $[\lambda_0] = 1 \, [s^6]$

Les valeurs des dispersions en fonction de ρ sont resumées sur le tableau 3.

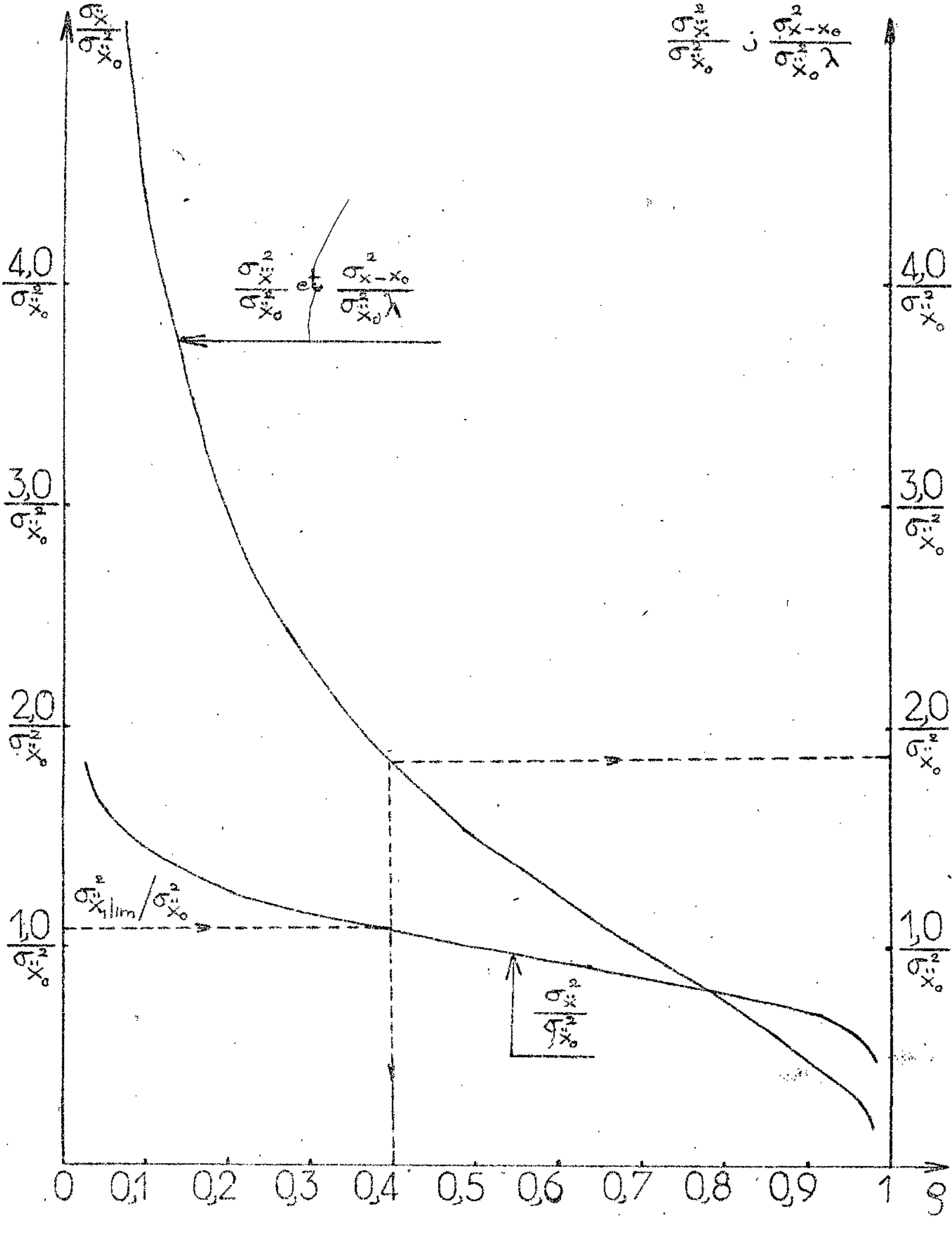
Pour les variations des dispersions en fonction de ρ voir graphe de la page.

On comparera ces resultats avec ceux du critère dont la fonctionnelle $C_3 = \sigma^2_{x-x} + \gamma \, \sigma^2_{\ddot{x}_1}$

γ : multiplicateur de Lagrange.

TABLEAU 3

ρ	$\sigma^2_{\dot{x}}$	$\sigma^2_{\ddot{x}}$	$\sigma^2_{x-x_0}$
0,00	∞	∞	0
0,05	1,633	6,538	0,344
0,10	1,442	4,52	0,497
0,15	1,335	3,57	0,63
0,20	1,260	3,00	0,75
0,25	1,201	2,60	0,87
0,30	1,152	2,28	0,98
0,35	1,107	2,04	1,10
0,40	1,070	1,84	1,22
0,45	1,034	1,66	1,36
0,50	1,000	1,50	1,50
0,55	0,967	1,36	1,66
0,60	0,935	1,22	1,84
0,65	0,902	1,10	2,04
0,70	0,868	0,98	2,30
0,75	0,833	0,87	2,60
0,80	0,794	0,75	3,00
0,85	0,749	0,63	3,57
0,90	0,693	0,50	4,50
0,95	0,612	0,344	6,54
1,00	0	0	∞


$\sigma^2_{\ddot{x}} / \sigma^2_{\ddot{x}_o}$
$\sigma^2_{\ddot{x}} / \sigma^2_{\ddot{x}_o}$ et $\sigma^2_{x-x_o} / \sigma^2_{\ddot{x}_o}\lambda$
$\sigma^2_{\ddot{x}_1 lim} / \sigma^2_{\ddot{x}_o}$
$\sigma^2_{\ddot{x}} / \sigma^2_{\ddot{x}_o}$
$4{,}0 / \sigma^2_{\ddot{x}_o}$
$3{,}0 / \sigma^2_{\ddot{x}_o}$
$2{,}0 / \sigma^2_{\ddot{x}_o}$
$1{,}0 / \sigma^2_{\ddot{x}_o}$
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
ρ

En fixant la valeur de la dispersion à une valeur limite pour le critère C_3, qui avec la valeur correspondante $\rho = 0,4$ donne.

$$\left.\frac{\sigma^2_{\ddot{x}_1 lim}}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\right|_3 = \left.\frac{1,17}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\right|_3 \; ; \; \left.\frac{\sigma^2_{x-x_0}}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\right|_3 = \left.\frac{0,39127}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\right|_3 \; ; \; \left.\frac{\sigma^2_{\dddot{x}_1}}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\right|_3 = \frac{\infty}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}$$

Pour le critère C_1 / $C_1 = \sigma^2_{x-x_0} + \lambda \sigma^2_{\dddot{x}_1}$ avec $\rho = 0,4$ on a

$$\left.\frac{\sigma^2_{\ddot{x}_1 lim}}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\right|_1 = \left.\frac{1,07}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\right|_1 \; ; \; \left.\frac{\sigma^2_{x-x_0}}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\right|_1 = \left.\frac{1,84}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\right|_1 \; ; \; \left.\frac{\sigma^2_{\dddot{x}_1}}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\right|_1 = \left.\frac{1,84}{\sigma^2_{\ddot{x}_0}}\right|_1$$

En faisant les rapports on obtient.

$$\frac{\sigma^2_{\ddot{x}_1}|_3}{\sigma^2_{\ddot{x}_1}|_1} = \frac{1,17}{1,07} = 1,09 \; ; \; \frac{\sigma^2_{x-x_0}|_3}{\sigma^2_{x-x_0}|_1} = \frac{0,39127}{1,84} = 0,2126 \; ; \; \frac{\sigma^2_{\dddot{x}_1}|_3}{\sigma^2_{\dddot{x}_1}|_1} = \frac{\infty}{1,84} = \infty$$

On limite ainsi de 9 % la dispersion de l'acceleration, et indefiniment celle de Jerk. Par contre il y a augmentation de la dispersion du deplacement relative.

Donc pour un corps rigide, l'influence des formes decriteres est moindre par rapport a un système dynamique, du moins pour le critere de deplacement relative, et de Jerk.

Généralement pour les problèmes de vibro-isolation, on fixe la dispersion du déplacement relative $\sigma^2_{x-x_0}$ à une valeur limite ψ et à partir de cette valeur, on détermine celle de l'accélération

Pour le critère 1 on a

$$\frac{3}{2}\lambda^{1/2}N^2 \leq \psi$$

Dans le cas limite on aura $\psi = \frac{3}{2}\lambda^{1/2}N^2$ d'où $\lambda = \left(\frac{2\psi}{3N^2}\right)^2$

en reportant cette valeur dans l'expression de l'accélération on aura $\sigma^2_{\ddot{x}} = N^{8/3}\sqrt[3]{\frac{3}{2\psi}}$

Pour le critère 3 on a

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{3/4}N^2 \quad \text{et} \quad \sigma^2_{\ddot{x}} = \frac{3}{2\sqrt{2}\,\gamma^{1/4}}N^2$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{3/4}N^2 \leq \psi \Rightarrow \gamma = \left(\frac{\psi\, 2\sqrt{2}}{N^2}\right)^{4/3}$$

d'où $\sigma^2_{\ddot{x}} = N^{8/3}\frac{3}{4\sqrt[3]{\psi}}$

En faisant le rapport des accélérations.

$$\frac{\sigma^2_{\ddot{x}}\big|_3}{\sigma^2_{\ddot{x}}\big|_1} = \frac{N^{8/3}\,\frac{3}{4\sqrt[3]{\psi}}}{N^{8/3}\sqrt[3]{\frac{3}{2\psi}}} = 0{,}6551$$

3 Influence des données numériques.

Cas où les données du modèle dynamique de l'homme operateur sont masse $m_1 = 75$ Kg ; ressort $c_1 = 68000\ \mathrm{Kg.s^{-2}}$, amortisseur $\alpha_1 = 1540\ \mathrm{Kg.s^{-1}}$ tirées de la norme ISO 5982

Le tableau 4 resume les resultats obtenus avec ces nouvelles données.

On remarque alors que les valeurs des dispersions $\sigma^2_{\ddot{X}_1}$, $\sigma^2_{\dddot{X}_1}$, $\sigma^2_{X-X_0}$ sont sensiblement les même que celles avec les donneés ;

$m_1 = 80,$ Kg , $c_1 = 7961,\ \mathrm{Kg.s^{-2}}$, $\alpha_1 = 141,\ \mathrm{Kg.s^{-1}}$

Par contre, il y a une grande difference entre les valeurs des coefficients B, D, E pour les deux types de données.

De ce fait, la fonction de transfert du système de vibro-isolation optimum sera differente.

Pour $\xi = 0,4$ $A = 115,68\ \mathrm{Kg.s^2}$ $E = 128599,636\ \mathrm{Kg.s^{-1}}$

$B = 58211,8303\ \mathrm{Kg.s}$ $F = 7961,\ \mathrm{Kg.s^{-2}}$

$D = 121659,52\ \mathrm{Kg}$

d'ou

$$H_{\frac{X}{X_0}}(s) = \frac{1050,74\,s^3 + 1884,47\,s^2 + 102378,81\,s + 6337,83}{92,09\,s^4 + 46342,73\,s^3 + 96853,75\,s^2 + 102378,81\,s + 6337,83}$$

Donc, les éléments du systeme de vibro-isolation, seront differents qualitativement.

Valeurs des coefficients et des dispersions en fonction de ρ cas n°2

ρ	$A (Kg\,s^2)$	$B (Kg.s)$	$D (Kg)$	$E (Kg.s^{-1})$	$F (Kg.s^{-2})$	$\sigma^2_{\dot{x}_1} (cm^2.s^{-4})$	$\sigma^2_{\ddot{x}_1} (cm^2.s^{-6})$	$\sigma^2_{x-x_0} (cm^2)$
0,00	0	0	80,862	141,688	7961,05	∞	∞	0,0000000
0,05	32,50	16753,9553	52825,6025	84713,9511	7961,05	1,63432539	6,53406222	0,342976997
0,10	47,23	24146,8120	67490,9225	95765,0597	7961,05	1,44279988	4,49770164	0,498703721
0,15	59,52	30292,7425	78563,6304	103328,723	7961,05	1,33568228	3,56915145	0,628727366
0,20	70,844	35939,7137	88092,8705	109420,296	7961,05	1,26028813	2,99883109	0,748518889
0,25	81,80	41394,8062	96835,4983	114724,88	7961,05	1,20125492	2,59715655	0,864472514
0,30	92,75	46838,0428	105184,974	119571,432	7961,05	1,15195417	2,29054208	0,980362011
0,35	103,97	52403,531	113394,835	124152,606	7961,05	1,089336	2,04353897	1,099011856
0,40	115,68	58211,8303	121659,52	128599,636	7961,05	1,07013887	1,83660136	1,22230042
0,45	128,16	64388,4666	130153,078	133015,000	7961,05	1,0342137	1,65797743	1,35500065
0,50	141,688	71079,4348	139053,913	137490,015	7961,05	1,00018363	1,49963205	1,4981390 4
0,55	156,64	78469,3318	148566,919	142117,105	7961,05	0,9672741125	1,35648974	1,6563889
0,60	173,53	86807,8058	159956,446	147001,465	7961,05	0,934805248	1,2244824	1,83512776
0,65	193,08	96453,6853	170557,092	152275,855	7961,05	0,902105521	1,10047944	2,04209449
0,70	216,43	107956,316	183905,136	158124,229	7961,05	0,862421698	0,981798959	2,26914772
0,75	245,41	122221,018	199818,911	164825,792	7961,05	0,832789253	0,865878119	2,59384559
0,80	283,37	140888,63	219741,224	172849,576	7961,05	0,7937924	0,749884115	2,99766080
0,85	337,28	167362,92	246551,151	183093,219	7961,05	0,749014365	0,630039358	3,56823655
0,90	425,06	210406,093	287307,766	197651,279	7961,05	0,693422518	0,499941062	4,49732541
0,95	617,60	304623,239	367908,178	223668,671	7961,05	0,61221552	0,344091955	6,53532259
1,00	∞	∞	∞	∞	7961,05	0,00000000	0,00000000	∞

TABLEAU 4

VII CONCLUSION

1 – La détermination du système de vibro-isolation optimum est obtenue en minimisant la fonctionnelle par la méthode de Wiener-Hopf tout en supposant :

a/ la linéarité du système de vibro-isolation

b/ la stabilité et la réalisabilité de ce système

c/ que l'on considère comme connue les spectres de fréquences des excitations.

2 – Parmis les critères étudiés, dans le cas où l'on vibro-isole un système dynamique ; il y a ceux qui limitent considérablement les dispersions de déplacement relative et de Jerk notamment ; par contre aucune amélioration sensible pour la vibro-isolation d'un corps rigide, donc l'influence des formes de critère est plus efficace sur un système dynamique que sur un corps rigide.

Et il y a ceux qui aboutissent à des valeurs infinies pour ces dispersions, alors notre système n'est pas réalisable dans ce cas là sans quoi il serait instable.

3 – La réalisation physique des systèmes de vibro-isolation peut-être obtenue par la combinaison de systèmes actifs et passifs, ou simplement passifs dans le cas où l'on vibro-isole un corps rigide et qu'on l'excite par un bruit blanc

4- Les paramètres du système de vibro-isolation donné par $\phi(s)$ dependent seulement de la structure de l'objet à vibro-isoler pour une excitation de bruit blanc. Par contre si l'on a une excitation du type $S_{\ddot{x}_0}(s) = 2\alpha_1 N^2 \frac{\Omega^2 - s^2}{(\Omega^2+s^2)^2 - 1}$ $\phi(s)$ depend de la structure de l'objet à vibro-isoler et de la densite spec

5- La complexité des formes de critères, entraine celle des formes analytiques des dispersions d'où la difficulté d'interpretation des resu. et de la realisation physique des systèmes de vibro-isolation. Ce qui necessite un outil de calcul plus puissant qu'est l'ordinateur.

6- L'étude ainsi faite concerne la vibro-isolation des systèmes à paramètres discrets, qu'on peut la compléter par la vibro-isolat. des systèmes à paramètres continus qui nous rapprochent ainsi la realité.

BIBLIOGRAPHIE

1 _ G-C. Newton, Jr - Leonard A - Gould - James F - Kaiser.
Analytical Design of linear Feedback Controls
New-York . John Willey et Sons, Inc London 1957

2 _ David Middelton.
" Statistical Communication Theory "
Mc Graw-Hill Book company, inc.
New York Toronto London 1960

3 _ Marek Ksiazek et C. Ahrikencheikh.
"Vibro-isolation optimum des excitations stochastiques"
Promotion Ecole Nationale Polytechnique d'Alger Juin 83

4 _ Marek Ksiazek et Z. Boutaghou.
"Vibro-isolation optimum d'une structure mécanique soumise à des excitations stochastiques au voisinage d'un dispositif de localisation".
Promotion Ecole Nationale Polytechnique d'Alger Juin 84