

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

11/86

وزارة التعليم والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Hex

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES
pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état

SUJET

**Généralisation du Calcul de
Résistance des Matrices non
cylindriques du Filage à Froid**

Proposé par :

ELEOD ANDRAS

Etudié par :

NEKBIL AMAR

Proposé et dirigé par :

ELEOD ANDRAS

PROMOTION JANVIER 1986

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

«O»

وزارة التعليم والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

«O»

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

«O»

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état

SUJET

**Généralisation du Calcul de
Résistance des Matrices non
cylindriques du Filage à Froid**

Proposé par :

ELEOD ANDRAS

Etudié par :

NEKBIL AMAR

Proposé et dirigé par :

ELEOD ANDRAS

PROMOTION JANVIER 1986

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
الْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي

DEDICACES

Je dedie Ce modeste travail à :

- mon père
- ma mère
- mon frère grace à qui j'ai pu poursuivre mes études
- mes sœurs
- mes amis
- tous ceux qui témoignent qu'il n'existe de dieu qu'ALLAH et que MOHAMMED est son envoyé.

Amber

REMERCIEMENTS

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à mon promoteur
M^r ELEOD andras d'avoir proposé et dirigé ce
travail et l'aide qu'il n'a cessé de m'apporter.

Que tous les professeurs qui ont contribué à ma
formation trouvent ici l'expression de ma profonde
gratitude.

Que tous ceux qui ont participé de près ou de loin
à la réalisation de cette étude, trouvent ici mes
sincères remerciements

Amar

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département: Genie Mecanique

Promoteur: ELEOD ANDRAS

Eleve ingénieur: Nekbil Amar

وزارة التعليم العالي

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

دائرة: الهندسة الميكانيكية

الموجه: ايليود اندراس

طالب مهندس: نقيب عمر

SUJET : الموضوع : تحميل حساب مقاومة قوالب القولبة على البارد

الملخص : تهدف هذه الدراسة الى حساب اجهادات الجبر المؤثرة على الحواف الداخلية لقوالب غير اسطوانية تعمل على البارد . ويكون حل معادلات المرونة المستوية في هذه الحالة باستخدام طريقة صسكيليشفيلي الطبقة ضمن دائرة مضاعفة الارتباط . وقد استعملنا طرقا عددية لتعيين دوال التحويل في المستوى المركب . كل الحسابات تجري بواسطة ناظم آلي برمج بلغة " البازيك "

8
SUJET: GENERALISATION DE CALCUL DE RESISTANCE DES MATRICES DE FILAGE A FROID

Resumé: Cette etude consiste en la determination des contraintes de traction sur le contour interieur des matrices non cylindriques de filage a froid; .
La resolution des equations de l'élasticité plane se fait par la methode de "MUSKHELISHVILLI" appliquée ici à un domaine doublement connexe.
Nous avons utilisé des methodes numeriques pour trouver les fonctions de transformation dans le plan complexe.
Tous les calculs se font sur ordinateur programmé en langage "BASIC"

Subject: GENERALIZATION OF RESISTANCE CALCULATION OF A COOL EXTRUSION DIE

Abstract: This study consists in the determination of tensile stresses on the polygonal internal contour of a cool extrusion die; .
The resolution of the elasticity plane equations is obtained in this case by the "MUSKHELISHVILLI" method applied to a doubly connected body. Digital methods were applied to find the mapping functions in the complex plane. All the calculations were carried out on the computer, using programs written in "BASIC"

TABLE DES MATIERES

Introduction

0 Rappels mathématiques

1 - fonction de variable complexe

2 - fonction analytique

3 - transformation conforme

4 - Equations de Cauchy-Riemann

5 - fonctions harmoniques et biharmoniques

I Equations de l'élasticité plane

II Application au problème des matrices non
cylindriques

II-1 Présentation de la matrice

II-2 Détermination de la fonction de transformation

II-2-1 - matrice à trou carré

II-2-2 - matrice à trou hexagonal

II-2-3 - matrice à trou octogonal

II-2-4 - matrice à trou décagonal

II-2-5 - matrice à trou dodécagonal

III Calcul des contraintes

III-1 Equations et calculs

III-2 Interprétation des résultats

Conclusion

INTRODUCTION

Le façonnage par déformation plastique a pris au cours des dernières années une importance considérable. Il permet de réaliser en grande série, la fabrication des produits ayant d'excellentes caractéristiques mécaniques, avec des prix de revient très bas comparés avec ceux obtenus par usinage sur machines-outils. Les pièces ainsi obtenues possèdent de plus un bon fibrage.

La déformation plastique peut être réalisée à chaud ou à froid elle comporte plusieurs types, parmi lesquels nous citons la déformation volumétrique qui se caractérise par la conservation du volume initial du métal de la pièce.

Le filage est un procédé de déformation volumétrique, son principe consiste à obliger le matériau fortement comprimé sous l'action d'un poinçon dans une matrice à filer, c'est à dire à sortir par un orifice lequel donne au produit filé sa propre forme, la filière a un diamètre inférieur à celui de la matrice et de ce fait, il y a réduction de section de la barre au cours de cette opération.

BUT DE L'ETUDE

Cette étude porte sur les matrices non cylindriques, et plus particulièrement, sur la répartition des contraintes de traction produites par l'application de la pression du poinçon sur le contour intérieur de la matrice.

La détermination des contraintes permet de :

- dimensionner la frette
- mesurer la concentration aux coins des polygones (matrices)
- voir l'influence de la présence des angles aux sommets.

METHODE UTILISEE

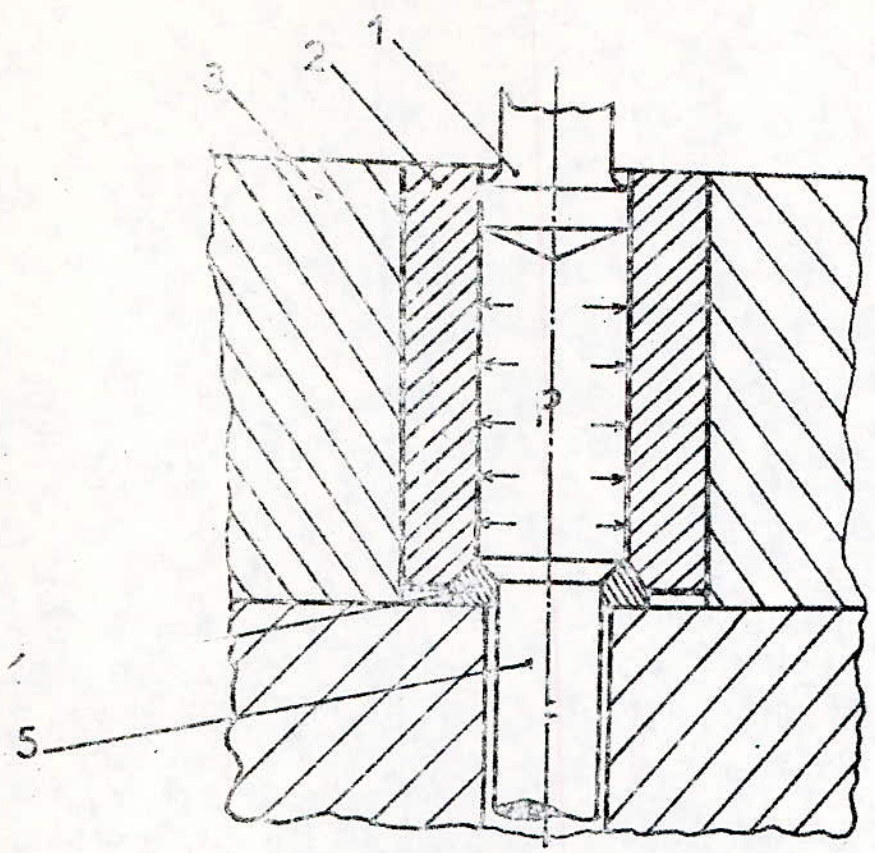
D'après la figure (a), nous constatons que la pression est la même sur toute la hauteur de la matrice. Donc les contraintes seront également identiques dans chaque section transversale. Nous sommes donc en présence d'un problème plan et nous pouvons appliquer les équations de l'élasticité plane.

Les méthodes directes de l'élasticité plane ne permettent pas de trouver la solution. Pour résoudre notre problème nous utilisons la méthode dite de "Muskhelishvili" du nom de son auteur le physicien mathématicien russe de la fin du siècle dernier. Cette méthode consiste à trouver deux fonctions analytiques dites de contraintes.

La recherche des ces deux fonctions nécessite la détermination d'une fonction, qui transforme la matrice en un anneau circulaire dont le cercle intérieur ayant un rayon ρ_1 présente l'image du polygone, et le cercle extérieur ayant un rayon ρ présente l'image du cercle extérieur de la matrice.

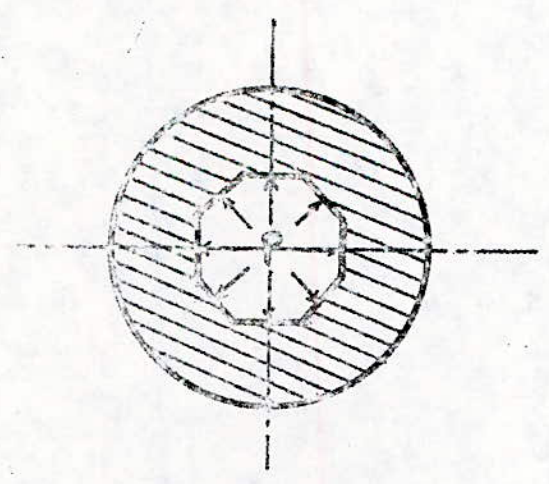
Les contraintes découlent par dérivation de ces deux fonctions.

Nous suivons dans notre étude le cheminement suivant nous développons les équations de l'élasticité plane, pour en tirer les équations de Muskhelishvili, puis dans un deuxième chapitre nous déterminons la fonction de transformation pour différentes formes de matrices. Le dernier chapitre sera consacré à la détermination des contraintes.



- 1 poinçon
- 2 matrice
- 3 Frette
- 4 filière
- 5 piece

FIG: a



RAPPELS MATHÉMATIQUES

1. Fonction de variable complexe

Donnons-nous dans le plan des x, y , un domaine D .

Soit z l'affixe d'un point M de coordonnées x, y appartenant à D . À z faisons correspondre un nombre complexe w suivant une loi déterminée et écrivons

$$w = f(z)$$

Nous définissons ainsi une fonction de la variable complexe z dont le domaine d'existence est D .

2. Fonction analytique

Si la dérivée $f'(z)$ existe en tout point z d'un ouvert connexe R , alors $f(z)$ est dite analytique dans R . Des expressions régulières et holomorphes sont souvent utilisées à la place de analytique.

Une fonction est dite analytique en un point z_0 , s'il existe un voisinage $|z - z_0| < \delta$ en tout duquel $f'(z)$ existe.

3. Transformation conforme

Si $f(z)$ est analytique dans un domaine D , et si $f'(z)$ ne s'annule en aucun point de D , la transformation

$$w = f(z)$$

conserve les angles, on dit que c'est une représentation conforme.

4 Equations de Cauchy-Riemann

Une condition necessaire pour que $w = f(z) = U(x,y) + V(x,y)$ soit analytique dans un ouvert connexe \mathcal{R} est que, dans \mathcal{R} U et V verifient les equations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (a)$$

Si les derivees partielles de (a) sont continues dans \mathcal{R} , alors les equations de Cauchy-Riemann sont les conditions suffisantes pour que $f(z)$ soit analytique dans \mathcal{R} .

5 Fonctions harmoniques et biharmoniques

Si les derivees partielles de u et v par rapport a x et y existent et sont continues dans \mathcal{R} , alors on peut tirer de (a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (b)$$

les conditions (b) definissent l'operateur de Laplace.

Des fonctions telles que $u(x,y)$, $v(x,y)$ qui verifient l'equation de Laplace dans \mathcal{R} sont appelees fonctions harmoniques

$$\nabla^2(u) = 0 \quad , \quad \nabla^2(v) = 0$$

Si $\nabla^2(\nabla^2 u) = 0$, u est dite biharmonique.

I EQUATIONS DE L'ELASTICITE PLANE

Puisque notre problème est plan nous allons utiliser les équations de l'élasticité plane.

Dans le cas général de la théorie de l'élasticité on considère les forces de deux espèces : les forces massiques qui sollicitent les éléments de volume ou de masse des corps, et les forces surfaciques qui agissent sur la surface des éléments qu'on isole en pensée dans le corps (pression).

Dans le problème plan à ces cas correspondent des forces massiques qui agissent sur les aires élémentaires et des forces linéaires qui agissent sur la frontière des éléments.

Dans la théorie de l'élasticité on établit les équations fondamentales suivantes :

1. Equations d'équilibre :

Ces équations donnent des relations entre les composantes de la contrainte.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} + X_i = 0 \quad (i, j = x, y)$$

où σ_{ij} désigne la contrainte, et X_i les composantes des forces de volume

Ceci conduit à deux équations

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X_x = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y_y = 0$$

En notant $\sigma_{xx} = \sigma_x$; $\sigma_{yy} = \sigma_y$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \tau_{xy}$$

$$X_x = X$$
 ; $Y_y = Y$

Nos equations deviennent :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (a)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \quad (b)$$

2 : Equations de Compatibilité :

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = - \frac{\lambda + 2G}{2(\lambda + G)} \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right]$$

où ∇^2 est le Laplacien

mais dans le cas du filage les composantes des forces massiques sont nulles (déformation dite statique)

Avec cette simplification nos equations deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (a) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (b) \\ \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (c) \end{array} \right. \quad (2)$$

Nous introduisons maintenant la fonction dite des contraintes particulièrement commode pour décrire la solution d'un problème plan. Conformément aux equations (2 a) et (2 b) ;

les expressions :

$$- \tau_{xy} dx + \sigma_x dy = dB \quad (3)$$

$$\sigma_y dx - \tau_{xy} dy = dA$$

sont des différentielles de certaines fonctions. L'égalité des contraintes tangentes τ_{xy} et τ_{yx} donne la relation:

$$A dx + B dy = dU \quad (4)$$

C'est la différentielle totale d'une fonction $U(x, y)$ qui est appelée fonction des contraintes. Cette fonction a été introduite par Airy (1862)

Nous deduisons de (3) et (4) les expressions suivantes:

$$\sigma_x = \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (a)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (b) \quad (5)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (c)$$

d'addition de (5 a) et (5 b) donne:

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \nabla^2 U$$

En remplaçant dans (2 c) il vient:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = \nabla^2 \nabla^2 U = \nabla^4 U = 0 \quad (6)$$

$\nabla^4 U = 0$ est la définition d'une fonction biharmonique

Nous voyons maintenant que la détermination des contraintes revient à trouver une fonction biharmonique $U(x, y)$ qui satisfait aux conditions (5)

Notre étude sera donc orientée vers la recherche de $U(x, y)$ pour cela, nous pouvons utiliser les variables complexes et les fonctions analytiques car il a été démontré qu'il est très facile de représenter une fonction biharmonique par deux fonctions analytiques.

UTILISATION DES VARIABLES COMPLEXES

Soit U notre fonction (biharmonique) il est clair que ΔU est harmonique.

Soit $P = \Delta U$ et $Q = \Delta \bar{U}$ ($\Delta \bar{U}$ fonction conjuguée)

Si on pose : $f(z) = P + iQ$

On considère la fonction $\varphi(z) = \frac{1}{4} \int f(z) dz = p + iq$

de sorte que : $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{4} P$; $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{4} Q$

La fonction $P_1 = U - Px - Qy$ est harmonique

Si on désigne par $\chi(z)$ une fonction analytique de partie réelle P_1 alors :

$$U = Px + Qy + P_1 = \operatorname{Re} \left\{ \bar{z} \varphi(z) + \chi(z) \right\}$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$U = \frac{1}{2} \left[\bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(z) + \chi(z) + \bar{\chi}(z) \right] \quad (7)$$

En dérivant (7) par rapport à x et y

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left[\varphi(z) + \bar{z} \varphi'(z) + \bar{\varphi}(z) + z \bar{\varphi}'(z) + \chi'(z) + \bar{\chi}'(z) \right] \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{i}{2} \left[-\varphi(z) + \bar{z} \varphi'(z) + \bar{\varphi}(z) - z \bar{\varphi}'(z) + \chi'(z) - \bar{\chi}'(z) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + \bar{z} \overline{\varphi'(z)} + \psi(z) \quad (9)$$

$$\text{ou } \psi(z) = \chi'(z)$$

En dérivant les expressions (8) par rapport à x et y nous obtenons

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2 \left(\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right) = 4 \operatorname{Re} [\varphi'(z)] \quad (10)$$

ou Re représente la partie réelle

Nous passons à la représentation des contraintes, Des formules (5)

Nous trouvons :

$$\begin{aligned} \sigma_x + i \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -i \frac{\partial}{\partial y} \left(i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (a) \\ \tau_{xy} + i \sigma_y &= - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = i \frac{\partial}{\partial x} \left(i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (b) \end{aligned} \quad (11)$$

En utilisant (9) et en additionnant (11) et retranchant (11 b) de (11 a) nous deduisons les formules qui donnent la représentation des contraintes

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2 \left\{ \varphi'(z) + \overline{\psi'(z)} \right\} = 4 \operatorname{Re} [\varphi'(z)] \quad (a) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2 \left\{ \bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z) \right\} \quad (b) \end{aligned} \quad (12)$$

où $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont des fonctions analytiques

les equations 12 s'appellent equations de Muskhilishvili

La recherche des contraintes se ramène donc à trouver les deux fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$.

Pour un domaine simplement connexe la détermination des fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ est simple (se trouve dans tous les ouvrages d'élasticité), par contre pour un domaine doublement connexe (notre cas), les deux fonctions φ et ψ se déterminent par la méthode de "N. Muskhilishvili"

Nous allons exposer la méthode dans un autre chapitre

Nous continuons à développer les équations de Muskhelishvili:

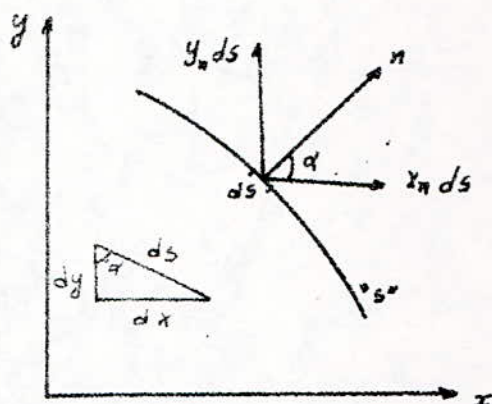
Soit S un contour sur lequel est appliquée une force extérieure, alors la somme des efforts sur S sera:

$$X_n + iY_n = \int_S (x_n + iy_n) ds$$

$$\cos \alpha = \frac{dy}{ds} \quad ; \quad \sin \alpha = -\frac{dx}{ds}$$

$$\text{Avec} \quad X_n = \sigma_x \frac{dy}{ds} - \tau_{xy} \frac{dx}{ds}$$

$$Y_n = \tau_{xy} \frac{dy}{ds} - \sigma_y \frac{dx}{ds}$$



En introduisant la variable complexe

$$z = x + iy \quad ; \quad \bar{z} = x - iy$$

on obtient l'expression suivante

$$x_n + iy_n = -\frac{i}{2ds} \left[(\sigma_x + \sigma_y) dz + (\sigma_y - \sigma_x - 2i\tau_{xy}) d\bar{z} \right]$$

En tenant compte des égalités (12)

$$x_n + iy_n = -\frac{i}{2ds} \left[[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] dz + [z \overline{\varphi''(z)} + \overline{\varphi'(z)}] d\bar{z} \right]$$

que l'on peut mettre sous la forme d'une différentielle totale

$$x_n + iy_n = -\frac{i}{2ds} d \left[\varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\varphi(z)} \right]$$

Nous aurons pour tout le contour "S"

$$\varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\varphi(z)} = i \int_S (x_n + iy_n) ds \quad (13)$$

L'équation (13) est calculable pour un domaine simplement connexe seulement. Pour un domaine doublement connexe il faut se servir d'une transformation conforme et poser que D est l'image d'un domaine D' par la transformation $z = \omega(\xi)$

La fonction $z = \omega(\xi)$ transforme le contour s au contour s' que l'on choisira circulaire, puisque les conditions aux limites pour un cercle sont connues. La variable ξ sera donnée en coordonnées polaires : $\xi = \rho e^{i\theta}$. Il faut dans ce cas exprimer les contraintes en coordonnées polaires

A partir des expressions ci-après :

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha\end{aligned}\quad (*)$$

on obtient les expressions suivantes :

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{r\theta}) e^{2i\alpha}$$

Donc nous trouvons :

$$\begin{cases} \sigma_r + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} [\Phi(z)] & \text{----- (a)} \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2 [\bar{z} \Phi'(z) + \Psi(z)] e^{2i\alpha} & \text{----- (b)} \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{ou } \Phi(z) = \varphi'(z) ; \quad \Psi(z) = \psi'(z)$$

En utilisant la transformation $z = \omega(\xi)$ et en notant

$$\varphi(z) = \varphi_1(\xi) ; \quad \psi(z) = \psi_1(\xi)$$

Nous obtenons le système suivant :

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} [\Phi_1(\xi)]$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \frac{2\xi^2}{\rho^2 \omega'(\xi)} \left[\overline{\omega'(\xi)} \cdot \Phi_1'(\xi) + \Psi_1(\xi) \right] \quad (15)$$

$$\text{avec } \Phi_1(\xi) = \frac{\Phi(\xi)}{\omega'(\xi)} ; \quad \Psi_1(\xi) = \frac{\Psi(\xi)}{\omega'(\xi)}$$

En utilisant la dernière notation l'équation 13 s'écrit

$$\varphi(\xi) + \omega(\xi) \frac{\overline{\varphi'(\xi)}}{\overline{\omega'(\xi)}} + \overline{\psi(\xi)} = i \int_{\xi} (x_n + iy_n) ds = f(\xi) \quad (a)$$

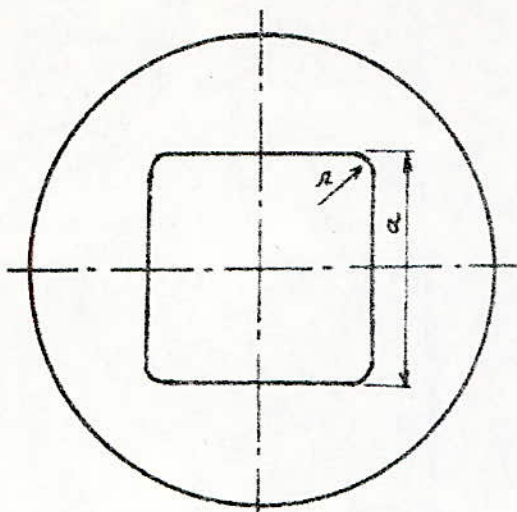
et l'équation conjuguée (16)

$$\overline{\varphi(\xi)} + \overline{\omega(\xi)} \frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)} + \psi(\xi) = i \int_{\xi} (x_n + iy_n) ds = \overline{f(\xi)} \quad (b)$$

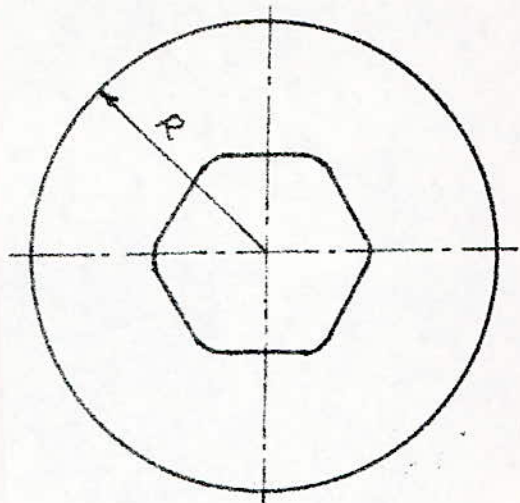
Nous voyons maintenant que la recherche des contraintes pour un domaine doublement connexe nécessite la connaissance de la fonction de transformation $z = \omega(\xi)$ et les deux fonctions analytiques $\varphi(\xi)$ et $\psi(\xi)$.

Nous allons commencer dans le chapitre suivant à déterminer la fonction de transformation pour chaque exemple de matrice (on étudiera cinq exemples).

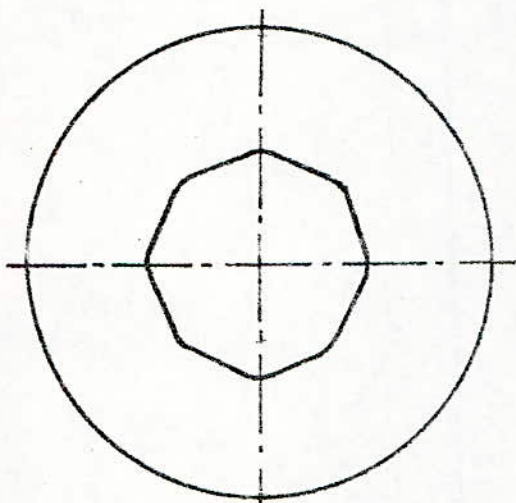
Les fonctions $\varphi(\xi)$ et $\psi(\xi)$ seront déterminées dans un autre chapitre ($\varphi(\xi)$ seulement qui nous intéresse)



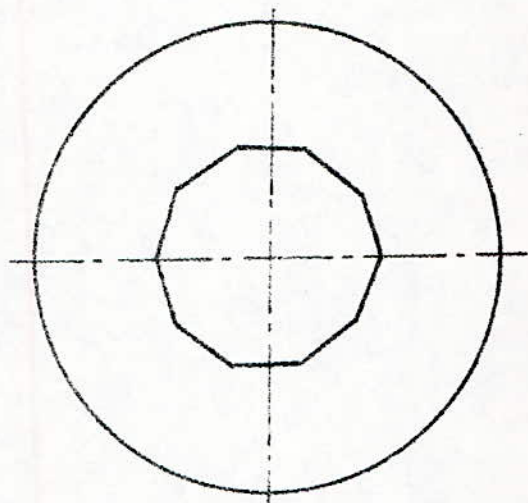
matrice carree



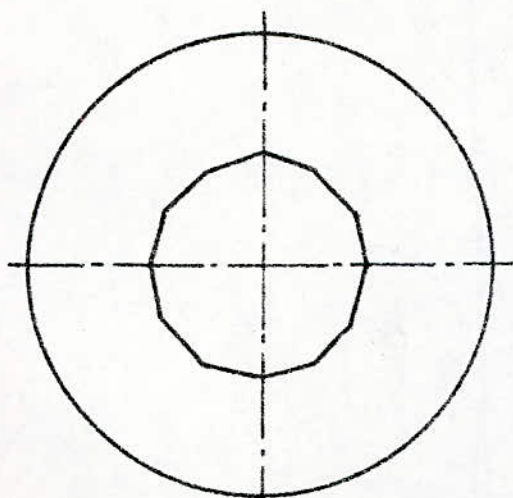
matrice hexagonale



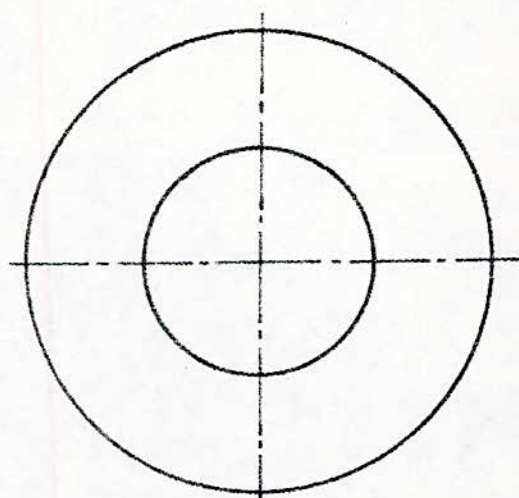
matrice octogonale



matrice decagonale



matrice dodecagonale



matrice circulaire

CHAPITRE II

APPLICATION AU PROBLEME DES MATRICES NON CYLINDRIQUES

II-1 Présentation de la matrice

Nous avons une matrice de filage dont le contour intérieur est un polygone régulier, et le contour extérieur est un cercle, et nous voulons calculer les contraintes produites par une pression intérieure P , pour pouvoir la dimensionner. Nous voulons généraliser la méthode pour tous les polygones réguliers, pour cela nous avons pris plusieurs cas en partant du Carré jusqu'au dodécagone et même plus mais nous ne prendrons que les polygones ayant une symétrie géométrique (nombre d'axes de symétrie entier). Tous les calculs sont pour des dimensions variables, ainsi que pour des pressions différentes. Pour cela nous utilisons un ordinateur et nous élaborons un programme qui détermine la fonction de transformation, et calcule les contraintes en fonction des dimensions de la matrice et des pressions du poinçon.

II-2 Détermination de la fonction de transformation

Pour déterminer la fonction de transformation $z = w(\xi)$ nous utilisons une méthode numérique donnée par les auteurs de [2]. Cette méthode établit une relation

entre un anneau et un domaine doublement connexe quelconque. L'anneau a un rayon extérieur égal à l'unité et un rayon intérieur ρ_1 qui dépend des dimensions de la matrice. Cette transformation est la suivante:

$$Z = \omega(\xi) = \sum_{k_1=-2m}^{2m-1} C_{q_{k_1+1}} \xi^{q_{k_1+1}}$$

où m : représente le nombre des points considérés.

q : le nombre d'axes de symétrie

$\xi = e^{i\theta_j}$ pour le cercle extérieur

$\xi' = \rho_1 e^{i\theta_j}$ pour le cercle intérieur qui sera projeté sur le polygone

$$\theta_j = \frac{\pi}{2qm} (2j-1) \quad (j = 1, \dots, m)$$

les coefficients C_k sont des constants réels qui peuvent être calculés à l'aide des formules suivantes:

$$C_k = \frac{1}{m(1 - \rho_1^{2qm})} \sum_{j=1}^m \left\{ x_j \cos \frac{\pi k (2j-1)}{2qm} + y_j \sin \frac{\pi k (2j-1)}{2qm} - \rho_1^{2qm-k} \left[x'_j \cos \frac{\pi k (2j-1)}{2qm} + y'_j \sin \frac{\pi k (2j-1)}{2qm} \right] \right\}$$

$$k = 1, q+1, \dots, (2m-1)q+1$$

$$C_{-k} = \frac{1}{m(1 - \rho_1^{2qm})} \sum_{j=1}^m \left\{ \rho_1^k \left[x'_j \cdot \cos \frac{\pi k(2j-1)}{2qm} - y'_j \cdot \sin \frac{\pi k(2j-1)}{2qm} \right] \right. \\ \left. - \rho_1^{2qm} \left[x_j \cdot \cos \frac{\pi k(2j-1)}{2qm} - y_j \cdot \sin \frac{\pi k(2j-1)}{2qm} \right] \right\}$$

$$k = q-1, \dots, 2mq-1$$

le rayon ρ_1 est donné par :

$$\rho_1 = \frac{\sum_{j=1}^m \left[x'_j \cdot \cos \frac{\pi(2j-1)}{2qm} + y'_j \cdot \sin \frac{\pi(2j-1)}{2qm} \right]}{\sum_{j=1}^m \left[x_j \cdot \cos \frac{\pi(2j-1)}{2qm} + y_j \cdot \sin \frac{\pi(2j-1)}{2qm} \right]}$$

où $z = x + iy$ sont les points du cercle extérieur images de ξ
 $z' = x' + iy'$ sont les points du cercle intérieur images des ξ'

Application

Nous prenons au premier lieu un cas plus général puis on traite chaque cas à part.

Soit une matrice dont le contour intérieur est un polygone régulier ayant q axes de symétrie ($2q$ côtés) on établit les relations qui donnent les coordonnées des m points du polygone, puis du cercle extérieur en fonction de l'angle α . Puisque il y a une symétrie nous pouvons faire l'étude complète sur un seul pan du polygone, c'est à dire sur un angle de $\frac{\pi}{q}$

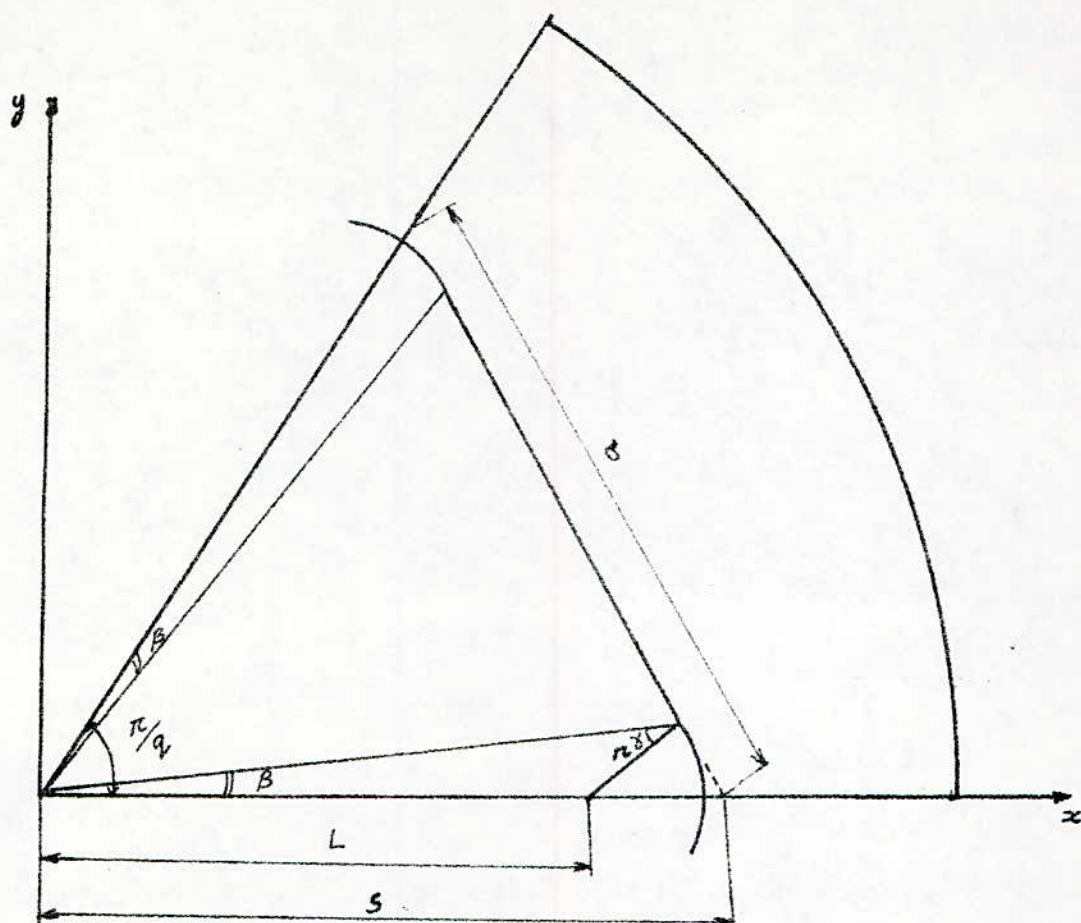


FIG 1

a : cote du polygone

r : rayon de courbure

R : rayon du cercle exterieur

$$L = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{2q}} - \frac{r}{\cos \frac{\pi}{2q}} \quad (\text{voir annexes})$$

Les m points decouperent le pan en $(m-1)$ parties egales.

Pour que la transformation soit precise il faudra donc que

$$\beta > \frac{\pi}{q(m-1)} \quad , \text{ soit } m > \frac{\pi}{q\beta} + 1$$

nous voyons que m depend de l'angle β (des dimensions de la matrices)

$$\text{tg } \beta = \frac{r \sin \frac{\pi}{2q}}{\frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{2q}} - \frac{r}{\cos \frac{\pi}{2q}} + r \cos \frac{\pi}{2q}}$$

D'après la figure (1) notre parr se compose de 3 parties

1 pour $0 \leq \alpha \leq \beta$

$$x'_j = r \cdot \cos \alpha \cdot \left(\frac{L}{r} \cos \alpha + \cos \delta \right)$$

$$y'_j = x'_j \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\delta = \operatorname{Arcsin} \left(\frac{L}{r} \sin \alpha \right)$$

$$x_j = R \cos \alpha$$

$$y_j = R \sin \alpha$$

2 pour $\beta < \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \beta$

$$x'_j = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{2q}} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2q} \right)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2q} \right) + \operatorname{tg} \alpha$$

$$y'_j = x'_j \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$x_j = R \cdot \cos \alpha$$

$$y_j = R \cdot \sin \alpha$$

3 pour $\frac{\pi}{2} - \beta < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$$x'_j = r \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \delta \right) \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}$$

$$y'_j = x'_j \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\delta = \operatorname{Arcsin} \left(\frac{L}{r} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right)$$

$$x_j = R \cdot \cos \alpha$$

$$y_j = R \cdot \sin \alpha$$

Nous avons ainsi déterminé les coordonnées des m points pour le polygone et pour le cercle. Nous pouvons maintenant calculer les coefficients C_k de la fonction de transformation à l'aide des formules précédentes en fonction des dimensions r , a , R et q . Les valeurs des coefficients seront vérifiées à l'aide d'une partie du programme.

CAS PARTICULIERS

Nous allons maintenant étudier les cas particuliers suivants :

- 1 matrice à trou carré
- 2 matrice à trou hexagonal
- 3 matrice à trou octogonal
- 4 matrice à trou décagonal
- 5 matrice à trou dodécagonal

1. MATRICE CARREE

Pour une matrice à trou carré le nombre d'axes de symétrie est $q = 2$

On détermine la fonction de transformation pour les dimensions suivantes :

$$a = 10 \text{ mm} ; r = 2 \text{ mm} , R = 30 \text{ mm}$$

Le nombre minimum de points est $m = 8$

Nous faisons des essais pour $m = 8, 10, 12, 16, 24, 30$

Ces essais montrent que plus m est proche de 8 plus la transformation du carré est meilleure, plus m est loin de 8 plus

** MATRICE A TROU CARRE **

Le nombre de points m doit etre superieur ou egal a 8
POINTS DE LA MATRICE

	XI(I)	YI(I)	XJ(I)	YJ(I)
1	6.242641	0	30	0
2	5.751515	1.312746	29.24784	6.675629
3	4.77267	2.298397	27.02907	13.01651
4	3.933893	3.137175	23.45495	18.7047
5	3.137174	3.933893	18.70469	23.45495
6	2.298396	4.772671	13.01651	27.02907
7	1.312744	5.751515	6.67562	29.24784
8	0	6.242641	0	30

Rho1= 44.84245 / 239.5046 = .18723

	CK(J)		CMK(J)
1	29.93808	1	-4.463911E-08
3	1.907349E-06	3	3.555865E-03
5	-1.135729	5	-9.599648E-11
7	-2.861023E-06	7	1.137893E-06
9	-.6022847	9	-4.959225E-30
11	-1.192093E-07	11	7.233032E-10
13	-.4571624	13	-5.694995E-17
15	6.258488E-06	15	1.068069E-12
17	-.4199047	17	1.304236E-19
19	-5.483627E-06	19	1.804242E-15
21	-.4518757	21	-3.909075E-22
23	-2.384186E-06	23	2.164207E-18
25	-.5856126	25	-4.611414E-25
27	-8.344197E-06	27	-2.657446E-21
29	-1.057789	29	1.332317E-27

VERIFICATION

	ZXI	ZYI	ZXJ	ZYJ
1	6.287902	0	28.20362	0
2	5.888233	.768189	28.9589	5.093734
3	5.029844	1.903656	28.0577	12.56912
4	4.147593	3.14787	23.92506	19.04963
5	3.147869	4.147592	19.04962	23.92506
6	1.903654	5.029843	12.56911	28.0577
7	.7681866	5.888233	5.093728	28.95879
8	2.540396E-07	6.287903	4.259586E-07	28.20362

tableau (1)

la transformation du cercle extérieure est bonne, mais comme c'est le carré qui nous intéresse nous prendrons $m = 8$. Avec $m = 8$, $w(\xi)$ comporte 32 termes, or le tableau (1) montre que les valeurs des coefficients C_k deviennent négligeables à partir de C_{-7} et C_7 . L'influence des termes supérieurs est vraiment très faible par rapport aux premiers. Pour vérifier que les ordres de grandeur des coefficients ne dépendaient pas des dimensions de la matrice nous avons fait des essais avec d'autres dimensions, les résultats ont été les mêmes.

Donc notre fonction de transformation s'écrira :

$$\bar{z} = w(\xi) = \sum_{k=-4}^4 C_{2k+1} \xi^{2k+1}$$

et ceci quelles que soient les dimensions de la matrice.

2 MATRICE HEXAGONALE

Pour une matrice hexagonale le nombre d'axes de symétrie est $\rho = 3$. On détermine la fonction de transformation pour les mêmes dimensions. Le nombre de points minimum est $m = 12$.

$w(\xi)$ comporte 48 termes, or le tableau (2) montre que les coefficients C_k deviennent négligeables à partir de C_{-11} et C_{13} , l'influence des autres termes est très faible, donc nous prendrons seulement ces coefficients pour la fonction de transformation.

** MATRICE A TROU HEXAGONAL **

Le nombre de points m doit etre superieur ou egal a 11
POINTS DE LA MATRICE

	XI(I)	YI(I)	XJ(I)	YJ(I)
1	9.690599	0	30	0
2	9.474288	.9046848	29.86416	2.851681
3	8.998671	1.734352	29.45786	5.677538
4	8.550477	2.510647	28.78479	8.451977
5	8.122579	3.25179	27.85104	11.14987
6	7.706269	3.972858	26.66506	13.7468
7	7.293731	4.687397	25.23761	16.21923
8	6.877422	5.408464	23.5816	18.54477
9	6.449523	6.149608	21.71202	20.70237
10	6.001329	6.925904	19.64582	22.67249
11	5.520622	7.752631	17.4017	24.43728
12	4.8453	8.392305	15	25.98076

Rho1 = 109.3637 / 359.8651 = .303902

	DK(J)		CMK(J)
1	29.98876	2	-3.302923E-08
4	-2.702077E-06	5	1.049728E-03
7	-.4665135	8	-1.734635E-11
10	-7.947286E-07	11	2.422835E-07
13	-.2395545	14	-1.821999E-14
16	3.496806E-06	17	8.861751E-11
19	-.1688985	20	4.844209E-17
22	-3.019969E-06	23	4.644434E-14
25	-.1376737	26	9.893688E-21
28	2.662341E-06	29	3.399144E-17

VERIFICATION

	ZXI	ZYI	ZXJ	ZYJ
1	9.637134	0	29.28373	0
2	9.491551	.577925	29.40884	2.335371
3	9.124494	1.292041	29.52574	5.073106
4	8.683507	2.166673	29.16947	8.152924
5	8.26914	3.107213	28.19843	11.16373
6	7.866879	3.999432	26.87392	13.85198
7	7.397049	4.813203	25.43313	16.34751
8	6.825497	5.60768	23.7673	18.83869
9	6.218147	6.436802	21.64538	21.18504
10	5.681186	7.256026	19.15631	23.03349
11	5.246271	7.930963	16.72691	24.30112
12	4.818568	8.346005	14.64187	25.36046

tableau (2)

La fonction de transformation s'écrit :

$$z = w(\xi) = \sum_{k_1=-4}^4 C_{3k_1+1} \xi^{3k_1+1}$$

3- MATRICE OCTOGONALE

Pour une matrice à trou octogonale, le nombre d'axes de symétrie est $q = 4$. Pour les mêmes dimensions précédentes le nombre de points minimum est $m = 16$

La meilleure transformation de l'octogone s'obtient pour ce nombre de points. La fonction de transformation $w(\xi)$ devra comporter 64 termes, un examen des valeurs du tableau

(3) montre que les coefficients C_k qui doivent être pris seront de C_{-15} à C_{17} , les autres n'ont pas d'influence et ceci pour n'importe quelles dimensions.

La fonction de transformation s'écrit donc :

$$z = w(\xi) = \sum_{k_1=-4}^4 C_{4k_1+1} \xi^{4k_1+1}$$

** MATRICE A TROU OCTOGONAL **

Le nombre de points m doit etre superieur ou egal a 15
POINTS DE LA MATRICE

	XI(I)	YI(I)	XJ(I)	YJ(I)
1	12.90085	0	30	0
2	12.78526	.6700473	29.95888	1.570079
3	12.52054	1.315962	29.83566	3.135854
4	12.26123	1.941988	29.63065	4.693034
5	12.00837	2.552457	29.34443	6.237351
6	11.76037	3.151181	28.97778	7.764572
7	11.51577	3.7417	28.5317	9.27051
8	11.27318	4.327367	28.00742	10.75104
9	11.03125	4.911429	27.40637	12.2021
10	10.78866	5.497096	26.7302	13.61972
11	10.54406	6.087615	25.98076	15
12	10.29606	6.686339	25.16012	16.33917
13	10.04319	7.296807	24.27051	17.63356
14	9.783885	7.922834	23.31438	18.87961
15	9.514342	8.566752	22.29435	20.07392
16	9.122275	9.122275	21.21321	21.21321

Rho1= 198.6623 / 479.9454 = .413927

	CK(J)		CMK(J)
1	29.99659	3	-1.268156E-07
5	-3.218651E-06	7	6.441988E-04
9	-.2536732	11	4.917842E-11
13	-3.218651E-06	15	1.707911E-07
17	-.1287629	19	3.453211E-14
21	-1.788139E-06	23	7.23877E-11
25	-8.855833E-02	27	-1.082131E-17
29	1.981854E-06	31	3.895813E-14

VERIFICATION

	ZXI	ZYI	ZXJ	ZYJ
1	12.82092	0	29.61479	0
2	12.75548	.4715823	29.64901	1.354433
3	12.57827	.9955538	29.71041	2.803886
4	12.33668	1.599251	29.70262	4.382913
5	12.08224	2.2737	29.53718	6.047111
6	11.84598	2.981969	29.18702	7.708065
7	11.6269	3.681716	28.69364	9.294716
8	11.3996	4.348442	28.12565	10.79589
9	11.13555	4.985926	27.52168	12.25399
10	10.82483	5.618101	26.86183	13.71711
11	10.48494	6.26781	26.08876	15.1879
12	10.15119	6.935692	25.1619	16.60998
13	9.854194	7.592509	24.10212	17.90373
14	9.598146	8.190218	22.99109	19.02578
15	9.352949	8.686029	21.92276	20.0073
16	9.065761	9.065761	20.94083	20.94083

Tableau (3)

4 MATRICE DECAGONALE

Dans le cas d'une matrice à trou decagonal, le nombre d'axes de symétrie est $q = 5$.

Nous allons déterminer la fonction de transformation pour les dimensions de base précédente.

Le nombre de points est $m = 18$

pour ce nombre la fonction $w(\xi)$ comporte 72 termes or le tableau (4) montre que les coefficients C_{25} , C_{29} , C_{-23} , C_{-27} et C_{-31} ont des valeurs très petites et peuvent être négligés devant les autres coefficients notre fonction s'écrira donc :

$$\bar{z} = w(\xi) = \sum_{k=-4}^4 C_{5k+1} \xi^{5k+1}$$

et ceci pour toutes les dimensions

5-MATRICE DODECAGONALE

Pour une matrice à trou dodecagonal, le nombre d'axes de symétrie est $q = 6$. pour les mêmes dimensions géométriques précédentes, nous allons déterminer la fonction de transformation.

Le nombre de points minimum est $m = 22$

Avec ce nombre $w(\xi)$ devra comporter 88 termes,

un examen du tableau (5) montre que les coefficients C_{37} , C_{-29} , C_{-35} et C_{-41} ont une influence négligeable par rapport aux autres.

** MATRICE A TROU DECAGONAL **

Le nombre de points m doit etre superieur ou egal a 18
POINTS DE LA MATRICE

	XI(I)	YI(I)	XJ(I)	YJ(I)
1	16.07742	0	30	0
2	15.98804	.5911861	29.97951	1.108545
3	15.80016	1.170077	29.91808	2.215576
4	15.61544	1.739567	29.81578	3.319581
5	15.43353	2.298457	29.67275	4.419052
6	15.25385	2.851439	29.48919	5.512486
7	15.0759	3.399126	29.26536	6.598391
8	14.89916	3.943073	29.00155	7.675284
9	14.72314	4.484794	28.69814	8.741694
10	14.54737	5.025772	28.35552	9.796162
11	14.37135	5.567492	27.97417	10.83725
12	14.19461	6.111439	27.55461	11.86354
13	14.01666	6.659127	27.09742	12.87362
14	13.83698	7.212108	26.60321	13.86612
15	13.65507	7.771999	26.07267	14.83968
16	13.47035	8.340488	25.50652	15.79297
17	13.28209	8.919257	24.90552	16.72469
18	13.0069	9.450068	24.27051	17.63356

$$Rho1 = 282.0059 / 539.9694 = .5222628$$

	CK(J)		CMK(J)
1	29.9983	4	-1.734349E-07
6	-4.874336E-06	9	7.491633E-04
11	-.1783993	14	2.975392E-12
16	-1.536475E-06	19	3.627712E-07
21	-9.029884E-02	24	2.335812E-13
26	7.947286E-08	29	2.839013E-10

VERIFICATION

	ZXI	ZYI	ZXJ	ZYJ
1	16.00914	0	29.82064	0
2	15.96458	.4405426	29.81465	1.037687
3	15.84177	.9149895	29.79436	2.085388
4	15.66877	1.444204	29.75313	3.151243
5	15.47919	2.02877	29.68113	4.239943
6	15.29887	2.650649	29.56697	5.351726
7	15.1368	3.282697	29.39959	6.482097
8	14.98438	3.901398	29.17005	7.622318
9	14.82284	4.496746	28.87315	8.760589
10	14.63504	5.074705	28.50821	9.883739
11	14.4158	5.651305	28.07936	10.97914
12	14.17545	6.241437	27.59485	12.03651
13	13.93506	6.848035	27.06585	13.04939
14	13.71541	7.457137	26.50472	14.01594
15	13.52519	8.041489	25.92305	14.93904
16	13.35408	8.571321	25.32992	15.82557
17	13.17456	9.027342	24.73051	16.68511
18	12.95167	9.40994	24.12542	17.52814

la fonction de transformation peut se mettre sous la forme:

$$z = w(\rho) = \sum_{k=-4}^4 C_{6k+1} \rho^{6k+1}$$

pour des matrices ayant plus de 12 cotés le nombre des coefficients diminue et deviennent de plus en plus négligeables sauf le coefficient C_1 , qui lui devient proche de la valeur du rayon extérieur R , par exemple pour $q = 40$ le seul coefficient qui reste est C_1 . Ceci est justifié théoriquement, car notre matrice devient presque circulaire et on peut mettre la fonction de transformation sous la forme simple suivante

$$z = w(\rho) = C_1 \rho \approx R \rho$$

** MATRICE A TROU DODECAGONAL **

Le nombre de points m doit etre superieur ou egal a 21
POINTS DE LA MATRICE

	XI(I)	YI(I)	XJ(I)	YJ(I)
1	19.24796	0	30	0
2	19.18986	.4785653	29.99068	.7479208
3	19.06358	.9514236	29.96271	1.495377
4	18.93823	1.419224	29.91612	2.241903
5	18.81406	1.882631	29.85092	2.987035
6	18.69091	2.342274	29.76718	3.730312
7	18.56859	2.798764	29.66493	4.471268
8	18.44696	3.252696	29.54423	5.209446
9	18.32586	3.704651	29.40518	5.944384
10	18.20513	4.155203	29.24784	6.675629
11	18.08463	4.604913	29.07232	7.402722
12	17.96421	5.054344	28.87873	8.125214
13	17.84371	5.504054	28.66719	8.842655
14	17.72298	5.954605	28.43782	9.554599
15	17.60188	6.406561	28.19078	10.26061
16	17.48025	6.860492	27.92622	10.96023
17	17.35793	7.316982	27.64429	11.65304
18	17.23477	7.776626	27.34518	12.33861
19	17.11106	8.240033	27.02907	13.01651
20	16.98526	8.707833	26.69615	13.68632
21	16.85819	9.180481	26.34665	14.34762
22	16.66922	9.623981	25.98076	15

Rho1= 415.607 / 659.9831 = .6297238

	CK(J)		CMK(J)
1	29.99923	5	-2.296579E-07
7	-4.920093E-06	11	1.32154E-03
13	-.1199209	17	-8.012528E-10
19	-7.369301E-07	23	1.66784E-06
25	-6.045698E-02	29	2.726329E-12

VERIFICATION

	ZXI	ZYI	ZXJ	ZYJ
1	19.17439	0	29.88063	0
2	19.14943	.3752345	29.8775	.7093483
3	19.07868	.7665748	29.86747	1.422236
4	18.97345	1.185945	29.84869	2.141788
5	18.84895	1.638164	29.81828	2.870339
6	18.72018	2.120139	29.77265	3.609144
7	18.59797	2.622363	29.70788	4.3582
8	18.48658	3.132308	29.62011	5.116202
9	18.38335	3.638227	29.50598	5.880624
10	18.28069	4.132774	29.36297	6.647947
11	18.16941	4.614668	29.18968	7.413957
12	18.04251	5.088288	28.98599	8.174159
13	17.89793	5.561258	28.75306	8.924188
14	17.73956	6.04088	28.49324	9.660209
15	17.576	6.530634	28.20987	10.37929
16	17.41751	7.027941	27.90688	11.07962
17	17.27222	7.524	27.58845	11.76071
18	17.14275	8.005789	27.25857	12.42335
19	17.02446	8.459673	26.92063	13.0695
20	16.90591	8.875476	26.57712	13.70205
21	16.77152	9.249757	26.22936	14.32444
22	16.60552	9.5872	25.87739	14.94032

CHPITRE III

CALCUL DES CONTRAINTES

Nous avons vu au debut de ce projet que si on arrive a determiner les deux fonctions analytiques $\varphi(\xi)$ et $\overline{\varphi(\xi)}$, les contraintes seront calculees facilement a l'aide des equations. Nous allons donc dans ce chapitre determiner ces deux fonctions et plus particulierement la fonction $\varphi(\xi)$.
Reecrivons l'equation 16

$$\varphi(\xi) + w(\xi) \cdot \frac{\overline{\varphi'(\xi)}}{w'(\xi)} + \overline{\varphi(\xi)} = i \int_s (x_n + iy_n) ds = f(\xi)$$

prenons l'egalite $i \int_s (x_n + iy_n) ds = f(\xi)$

En derivant les deux membres nous aurons:

$$i(x_n + iy_n) ds = f'(\xi) d\xi \quad (17)$$

Cette ecriture est valable et juste car l'integrale est finie
A quoi egale la quantite ds ?

Nous avons vu que $\sin \alpha = -\frac{dx}{ds}$; $\cos \alpha = +\frac{dy}{ds}$

nous tirons les relations suivantes

$$dx = -\sin \alpha \cdot ds$$

$$dy = \cos \alpha \cdot ds$$

multipliant la deuxieme egalite par i et additionnant les deux expressions :

$$dx + i dy = i(\cos \alpha + i \sin \alpha) ds$$

or nous savons que $dx + i dy = dz$

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$$

Donc nous tirons : $dz = i e^{i\alpha} ds$

$$\Rightarrow ds = \frac{1}{i} e^{-i\alpha} dz$$

Nous remplaçons la valeur de ds dans (17)

$$i(x_n + iy_n) \frac{1}{i} e^{-i\alpha} dz = f'(\xi) d\xi$$

$$(x_n + iy_n) e^{-i\alpha} dz = f'(\xi) d\xi$$

La quantité $(x_n + iy_n)$ peut se mettre sous la forme

$$(x_n + iy_n) = (\sigma_e + i\tau_{e\theta}) e^{i\alpha} \quad (\text{changement de repère})$$

Donc notre équation devient :

$$(\sigma_e + i\tau_{e\theta}) dz = f'(\xi) d\xi$$

mais nous savons déjà que $dz = w'(\xi) d\xi$

$$\Rightarrow (\sigma_e + i\tau_{e\theta}) w'(\xi) = f'(\xi) \quad (18)$$

Le terme $(\sigma_e + i\tau_{e\theta})$ exprime l'état de contrainte
 La fonction $w(\xi)$ est une fonction analytique, il en découle
 que $f(\xi)$ soit aussi une fonction analytique, qui peut être
 représentée par une série de Laurent :

$$f(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_k \xi^k \quad (19)$$

Si nous intégrons l'expression (18) et nous faisons l'égalité avec
 (19) nous aurons

$$f(\xi) = \sum B_k \xi^k = (\sigma_e + i\tau_{e\theta}) w(\xi) = \sum_k (\sigma_e + i\tau_{e\theta}) C_k \xi^k$$

La comparaison des termes ayant les mêmes puissances donne :

$$B_k = (\sigma_e + i\tau_{e\theta}) C_k \quad (20)$$

Dans le cas du filage, le métal déformé ne tourne pas dans la matrice de forme polygonale, donc le terme $\tau_{\theta\theta}$ sera nul. L'expression (20) s'écrit alors tout simplement

$$B_k = \sigma_p C_k$$

σ_p est la contrainte normale, elle est égale en module à la pression intérieure appliquée sur le contour de la matrice, finalement nous trouvons pour les coefficients B_k la formule simple suivante

$$B_k = -P C_k$$

les C_k sont réels \Rightarrow les B_k sont aussi réels.

Voyons maintenant l'utilité des coefficients B_k
reecrivons l'équation (16-b)

$$\overline{\varphi(\xi)} + \overline{\omega(\xi)} \cdot \frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)} + \varphi(\xi) = \overline{f(\xi)}$$

Nous allons maintenant écrire cette expression sur les deux contours $\rho = 1$ et $\rho = \rho_1$

Multiplions l'expression par le terme $\omega'(\xi)$

$$\omega'(\xi) \cdot \overline{\varphi(\xi)} + \overline{\omega(\xi)} \cdot \varphi'(\xi) + \omega'(\xi) \cdot \varphi(\xi) = \omega'(\xi) \cdot \overline{f(\xi)} \quad (21)$$

où :

$$\omega(\xi) = \sum_k C_k \xi^k \quad ; \quad \omega'(\xi) = \sum_k k C_k \xi^{k-1}$$

$$\overline{\omega(\xi)} = \sum_k C_k \overline{\xi}^k$$

$$\overline{\xi} = \rho e^{-i\theta} = \frac{\rho}{e^{i\theta}} = \frac{\rho^2}{\xi}$$

$$\varphi(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \xi^n \quad ; \quad \overline{\varphi(\xi)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \overline{a_n} \overline{\xi}^{-n}$$

Nous allons maintenant écrire cette expression sur les deux contours

$$\psi'(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} n a_n z^{n-1} \quad ; \quad f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_l z^l \quad ; \quad \bar{f}(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_l \bar{z}^{-l}$$

En remplaçant dans (21) toutes les fonctions par leurs expressions sous forme de sommes ou de séries.

L'égalité (21) devient :

$$\begin{aligned} \sum_k k c_k z^{k-1} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{a}_n \bar{z}^{-n} + \sum_k c_k \bar{z}^{-k} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} n a_n z^{n-1} + \omega'(z) \cdot \psi(z) = \\ = \sum_k k c_k z^{k-1} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} B_l \bar{z}^{-l} \quad (22) \end{aligned}$$

Il est possible de multiplier deux sommes différentes ; leur produit est une double somme.

La relation (22) peut prendre la forme :

$$\begin{aligned} \sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} k c_k \bar{a}_n z^{k-1} \bar{z}^{-n} + \sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k n a_n \bar{z}^{-k} z^{n-1} + \omega'(z) \psi(z) = \\ = \sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} k c_k B_l z^{k-1} \bar{z}^{-l} \end{aligned}$$

Comme nous avons un domaine doublement connexe, nous écrivons cette relation deux fois, une fois sur le contour intérieur avec $\rho = \rho_1$, et une fois sur le contour extérieur avec $\rho = 1$

a. sur le contour intérieur :

$$\text{dans ce cas } \bar{z} = \rho_1^2 z^{-1}$$

$$\begin{aligned} \sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} k c_k \bar{a}_n \rho_1^{k-1} (\rho_1^2 z^{-1})^{-n} + \sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k n a_n \rho_1^{-k} z^{n-1} + \omega(z) \psi'(z) = \\ = \sum_k k c_k B_l \rho_1^{k-1} \rho_1^{2l} z^{-l} \end{aligned}$$

$$\sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} k C_k \bar{a}_n \rho_1^{2n} \rho_1^{k+n-1} \xi^{k+n-1} + \sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k n a_n \rho_1^{2k} \rho_1^{n-k-1} \xi^{n-k-1} + \omega'(\rho) \psi(\rho)$$

$$= \sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} k C_k B \rho_1^2 \xi^{k-l-1}$$

En multipliant les deux membres par ξ on aura :

$$\sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} k C_k \bar{a}_n \rho_1^{2n} \rho_1^{k+n} \xi^{k+n} + \sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k n a_n \rho_1^{2k} \rho_1^{n-k} \xi^{n-k} + \xi \cdot \omega'(\rho) \cdot \psi(\rho)$$

$$= \sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} k C_k B \rho_1^2 \xi^{k-l} \quad (23 a)$$

b sur le contour extérieur

dans ce cas $\bar{\rho} = \frac{1}{\rho} = \rho^{-1}$

d'expression (23 a) s'écrira dans ces conditions sous la forme

$$\sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} k C_k \bar{a}_n \xi^{k+n} + \sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k n a_n \xi^{n-k} + \xi \cdot \omega'(\rho) \cdot \psi(\rho) =$$

$$= \sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} k C_k A \xi^{k-l} \quad (23 b)$$

Pour éliminer le terme $\xi \omega'(\rho) \psi(\rho)$ des deux expressions (23 a) et (23 b) nous soustrairons (23 a) de (23 b)

$$\sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} k C_k \bar{a}_n (1 - \rho_1^{2n}) \xi^{k+n} + \sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k n a_n (1 - \rho_1^{2k}) \xi^{n-k}$$

$$= \sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} k C_k (A - B \rho_1^2) \xi^{k-l} \quad (24)$$

posons : $f = k+n$; $g = n-k$; $h = k-l$

l'égalité (24) s'écrit alors :

$$\sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} k C_k \bar{a}_{f-k} (1 - \rho_1^{2(f-k)}) \xi^f + \sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k (g+k) a_{g+k} (1 - \rho_1^{2k}) \xi^g =$$

$$= \sum_k \sum_{-\infty}^{+\infty} k C_k (A_{k-h} - B_{k-h} \rho_1^2) \xi^h$$

En comparant les coefficients accompagnant les termes ayant la même puissance m nous trouvons :

$$\sum_k k C_k \bar{a}_{m-k} (1-p_1)^{2(m-k)} + \sum_k C_k (m+k) a_{m+k} (1-p_1)^{2k} \\ = \sum_k k C_k (A_{k-m} - B_{k-m} p_1^2)$$

$$m = -\infty \dots +\infty$$

pour notre cas A_{k-m} sont nuls, l'expression devient

$$\sum_k k C_k \bar{a}_{m-k} (1-p_1)^{2(m-k)} + \sum_k C_k (m+k) a_{m+k} (1-p_1)^{2k} = -\sum_k k C_k p_1^2 B_{k-m} \\ m = -\infty \dots +\infty$$

$$\bar{a} = \alpha - i\beta, \quad a = \alpha + i\beta$$

Nous allons donc résoudre ce système d'équation pour trouver \bar{a}_n et a_n coefficients de la fonction $\varphi(p)$ nous écrivons l'équation précédente sous la forme :

$$\sum_k k C_k \alpha_{m-k} (1-p_1)^{2(m-k)} + \sum_k C_k (m+k) \alpha_{m+k} (1-p_1)^{2k} = -\sum_k k C_k p_1^2 B_{k-m} \\ - \sum_k k C_k \beta_{m-k} (1-p_1)^{2(m-k)} + \sum_k C_k (m+k) \beta_{m+k} (1-p_1)^{2k} = 0 \\ m = -\infty \dots +\infty$$

les valeurs de k sont limitées ; il faut donc limiter m . Nous savons que les valeurs des k sont fonctions de q nous prendrons donc des valeurs de m en fonction de q

soit m varie de $-3 \times q$ jusqu'à $3 \times q$, avec un pas de q , donc nous aurons 7 valeurs de m .

Finalement nous sommes en présence d'un système d'équation de 7×7 . La résolution de ce système se fait à l'aide du sous programme (Algorithme de Gauss)

La solutions des deux systèmes précédents pour différentes formes de matrices montre que les valeurs des β sont très petites devant les valeurs des α , donc pour la suite des calculs nous ne garderons que les α . La fonction $\varphi(s)$ peut s'écrire:

$$\varphi(s) \approx \sum_n \alpha_n s^n$$

Nous avons établi (15)

$$\sigma_0 + \sigma_e = 4 \operatorname{Re} \left[\frac{\varphi'(s)}{\omega'(s)} \right]$$

Voyons maintenant comment s'écrire la partie $\operatorname{Re} \left[\frac{\varphi'(s)}{\omega'(s)} \right]$

$$\frac{\varphi'(s)}{\omega'(s)} = \frac{\varphi'(s) \cdot \overline{\omega'(s)}}{\omega'(s) \cdot \overline{\omega'(s)}} = \frac{\varphi'(s) \cdot \overline{\omega'(s)}}{|\omega'(s)|^2}$$

le terme $|\omega'(s)|^2 = |\overline{\omega'(s)}|^2$ étant réel

Développons le numérateur:

$$\varphi'(s) \cdot \overline{\omega'(s)} = [\operatorname{Re} \varphi'(s) + i \operatorname{Im} \varphi'(s)] \cdot [\operatorname{Re} \overline{\omega'(s)} + i \operatorname{Im} \overline{\omega'(s)}]$$

ou Re : représente la partie réelle

Im : représente la partie imaginaire

$$\begin{aligned} \varphi'(\xi) \cdot \overline{\omega'(\xi)} &= \operatorname{Re} \varphi'(\xi) \cdot \operatorname{Re} \overline{\omega'(\xi)} - \operatorname{Im} \varphi'(\xi) \cdot \operatorname{Im} \overline{\omega'(\xi)} \\ &\quad + i \left\{ \operatorname{Re} \varphi'(\xi) \cdot \operatorname{Im} \overline{\omega'(\xi)} + \operatorname{Im} \varphi'(\xi) \cdot \operatorname{Re} \overline{\omega'(\xi)} \right\} \end{aligned}$$

Nous ne conservons que la partie réelle :

$$\operatorname{Re} \varphi'(\xi) \cdot \operatorname{Re} \overline{\omega'(\xi)} - \operatorname{Im} \varphi'(\xi) \cdot \operatorname{Im} \overline{\omega'(\xi)}$$

Voyons maintenant comment s'écrire $\operatorname{Re} \varphi'(\xi)$ et $\operatorname{Im} \varphi'(\xi)$

Nous avons vu que $\varphi(\xi)$ peut se mettre sous la forme :

$$\varphi(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \xi^n \quad \Rightarrow \quad \varphi'(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} n a_n \xi^{n-1}$$

or nous savons que : $a_n = \alpha_n + i\beta_n$; $\xi = \rho_1 e^{i\theta}$

$$\Rightarrow \varphi'(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} n (\alpha_n + i\beta_n) \rho_1^{n-1} (\cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta)$$

... développons encore cette expression :

$$\begin{aligned} \varphi'(\xi) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} n \rho_1^{n-1} [\alpha_n \cos(n-1)\theta - \beta_n \sin(n-1)\theta] \\ &\quad + i \sum_{-\infty}^{+\infty} n \rho_1^{n-1} [\alpha_n \sin(n-1)\theta + \beta_n \cos(n-1)\theta] \end{aligned}$$

$$\varphi'(\xi) = \operatorname{Re} \varphi'(\xi) + i \operatorname{Im} \varphi'(\xi)$$

En égalisant les parties réelle et imaginaire nous trouvons :

$$\operatorname{Re} \varphi'(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} n \rho_1^{n-1} [\alpha_n \cos(n-1)\theta - \beta_n \sin(n-1)\theta]$$

$$\operatorname{Im} \varphi'(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} n \rho_1^{n-1} [\alpha_n \sin(n-1)\theta + \beta_n \cos(n-1)\theta]$$

Or nous avons dit que les β_n sont négligeables devant les valeurs des α_n , les deux parties réelle et imaginaire peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\operatorname{Re} \varphi'(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} n \rho_1^{n-1} \alpha_n \cos(n-1)\theta$$

$$\operatorname{Im} \varphi'(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} n \rho_1^{n-1} \alpha_n \sin(n-1)\theta$$

Voyons maintenant comment s'écrire les deux parties de $\overline{w'(z)}$.

$$\text{Soit } \overline{w'(z)} = \operatorname{Re} \overline{w'(z)} + i \operatorname{Im} \overline{w'(z)}$$

Nous savons déjà que $w'(z)$ s'écrit sous la forme

$$\overline{w'(z)} = \sum_k k C_k \bar{z}^{k-1} \quad \bar{z} = \rho_1 e^{-i\theta}$$

$$\overline{w'(z)} = \sum_k k C_k \rho_1^{k-1} e^{-i(k-1)\theta}$$

$$\overline{w'(z)} = \sum_k k C_k \rho_1^{k-1} \cos(k-1)\theta - i \sum_k k C_k \rho_1^{k-1} \sin(k-1)\theta$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires nous trouvons :

$$\operatorname{Re} \overline{w'(z)} = \sum_k k C_k \rho_1^{k-1} \cos(k-1)\theta$$

$$\operatorname{Im} \overline{w'(z)} = -\sum_k k C_k \rho_1^{k-1} \sin(k-1)\theta$$

Nous avons calculé au début du programme les deux expressions $\operatorname{Re} w'(z)$ et $\operatorname{Im} w'(z)$, il est donc inutile de recalculer $\operatorname{Re} \overline{w'(z)}$ et $\operatorname{Im} \overline{w'(z)}$ car

$$\operatorname{Re} \overline{w'(z)} = \operatorname{Re} w'(z)$$

$$\operatorname{Im} \overline{w'(z)} = -\operatorname{Im} w'(z)$$

l'expression (15) s'écrit finalement :

$$|w'(z)|^2 (\sigma_\theta + \sigma_p) = 4 \left\{ \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} n \rho_n^{n-1} \alpha_n \cos(n-1)\theta \right) \cdot \left(\sum_k k C_k \rho_k^{k-1} \cos(k-1)\theta \right) - \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} n \rho_n^{n-1} \alpha_n \sin(n-1)\theta \right) \cdot \left(\sum_k k C_k \rho_k^{k-1} \sin(k-1)\theta \right) \right\}$$

la contrainte de traction σ_θ s'obtient :

$$\sigma_\theta = \frac{4 \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} n \rho_n^{n-1} \alpha_n \cos(n-1)\theta \right) \left(\sum_k k C_k \rho_k^{k-1} \cos(k-1)\theta \right)}{|w'(z)|^2}$$

$$\frac{4 \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} n \rho_n^{n-1} \alpha_n \sin(n-1)\theta \right) \left(\sum_k k C_k \rho_k^{k-1} \sin(k-1)\theta \right)}{|w'(z)|^2} - \sigma_p$$

pour que cette expression soit calculable, il faut limiter les valeurs de n .

un examen des valeurs α_n montre que ces valeurs deviennent négligeables après 7 ou 8 termes, la convergence est rapide c'est pour cette raison que nous décidons de ne prendre que les premiers termes.

Avec cette hypothèse nous pouvons calculer les valeurs des contraintes de traction sur le contour intérieur du polygone (matrice).

La valeur de σ_p est prise égale à la pression intérieure.

Maintenant il faut vérifier que le programme donne les bonnes valeurs, comment faire cette vérification? Il est facile de transformer les polygone en cercles

En faisant annuler la grandeur L . les contraintes pour un cercle sont déterminées par la méthode de Lamé

$$\sigma_{\theta} = P \frac{r^2}{R^2 - r^2} \left[1 + \frac{R^2}{x^2} \right] \quad r \leq x \leq R$$

pour trouver la contrainte sur le cercle intérieur nous prendrons $x = r$.

la relation précédente s'écrit :

$$\sigma_{\theta} = P \frac{r^2}{R^2 - r^2} \left[1 + \frac{R^2}{r^2} \right]$$

Nous prenons un exemple de matrice : Soit la matrice à trou hexagonal. Si nous voulons transformer cette matrice en un cercle le rayon de courbure r doit prendre la valeur suivante (en faisant annuler L)

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

soit $r = 8.660254 \text{ mm}$, pour $a = 10 \text{ mm}$

la contrainte de traction s'obtient ainsi

$$\sigma_{\theta} = P \cdot \frac{(8.660254)^2}{30^2 - (8.660254)^2} \left[1 + \frac{30^2}{(8.660254)^2} \right]$$

$$\sigma_{\theta} = 1.1818 P$$

pour $P = 700 \text{ MPa}$

$$\sigma_{\theta} = 827.2727 \text{ MPa}$$

1 - Verification

La contrainte de traction σ_0 pour une matrice circulaire est constante d'après la formule de Lamé, elle vaut pour l'exemple précédent :

$$\sigma_0 = 827.2727 \text{ MPa}$$

Voyons maintenant les valeurs données par l'ordinateur. Le tableau (6) montre les résultats obtenus.

Nous constatons que l'écart est négligeable, les fluctuations sont dues aux valeurs des α_n et β_n que nous avons négligé. Les résultats sont donc acceptables, et le programme est correct.

Nous allons utiliser le programme pour des matrices réellement polygonales (non cylindriques), nous faisons deux séries d'essais :

1^{ère} série : Nous conservons la pression intérieure constante et nous varions le rayon de courbure r

2^{ème} série : Nous gardons le rayon de courbure r constant et nous varions la pression intérieure p

Les pages suivantes montrent ces deux essais.

SIGMA TETA

003.9041
 003.299
 002.5846
 001.8005
 000.9875
 000.1847
 000.4205
 000.7503
 000.1769
 000.7289
 000.4217
 000.2656
 000.2656
 000.4217
 000.7289
 000.1769
 000.7503
 000.4205
 000.1847
 000.9875
 001.8005
 002.5846
 003.299
 003.9041

valeurs de la contrainte dans le cercle

TABLEAU 6

CARRÉ

0
 -4.511249E-02
 -6.836405E-05
 381.1008
 -1.073905E-03
 -13.67303
 -4.745146E-03

HEXAGONE

0
 -3.731141E-02
 -4.294921E-05
 1069.233
 -2.21697E-03
 -13.86536
 -1.770747E-02

OCTOGONE

0
 -.0464797
 1.47615E-04
 2172.39
 8.914566E-03
 -12.58814
 .1091373

DECAGONE DECAGONE

0
 -9.767777E-02
 4.456598E-05
 3941.968
 1.628662E-04
 -11.90149
 3.659351E-03

DODECAGONE

0
 -.2989248
 -7.030241E-05
 6906.725
 -6.266682E-03
 -9.679006
 -.112279

CERCLE

0
 -3.279809E-03
 -4.129211E-05
 954.4238
 -2.764958E-03
 -12.4422
 -2.252068E-02

Valeurs de alfa E(I) pour differentes matrices

a=10, P=700, r=2. r=8.660254 pour le cercle

tableau 7

r=2 P1=700

822.975
 762.9103
 752.1632
 756.9766
 756.9766
 752.1632
 762.9103
 822.9751

r=6 P1=700

~~860.9222~~
~~749.1821~~
~~739.4203~~
~~747.7959~~
~~749.1821~~
~~739.4205~~
~~749.4834~~
~~758.9815~~

r=3 P1=700

791.3328
 759.9693
 749.7516
 752.1743
 752.1742
 749.7516
 759.9693
 791.3329

r=8 P1=700

~~879.0992~~
~~817.4826~~
~~817.8106~~
~~831.6326~~
~~985.7434~~
~~879.7767~~
~~831.7556~~
~~822.3349~~

r=4 P1=700

771.3086
 752.7481
 745.1337
 747.8095
 747.8095
 745.1337
 752.7481
 771.3087

MATRICE CARREE

Tableau (8)

r=2

P1=700
 923.9744
 909.6816
 882.8559
 861.5199
 849.8667
 843.1956
 843.1956
 849.8666
 861.5199
 882.855
 909.6816
 923.9746

r=5 P1=700

877.3274
 971.8309
 859.9122
 847.9729
 839.7201
 835.6611
 835.6611
 839.72
 847.9728
 859.8121
 871.881
 877.3276

r=4 P1=700

902.0859
 892.5116
 873.0619
 856.0337
 845.1978
 840.1478
 840.1478
 845.1978
 856.0336
 873.0619
 892.5118
 902.0862

r=2 P1=700

854.539
 851.7901
 845.2316
 838.087
 832.626
 829.7781
 829.7781
 832.626
 838.0869
 845.2316
 851.7902
 854.5392

MATRICE HEXAGONALE

Tableau (9)

r=4

1094.643
 1086.248
 1065.542
 1041.273
 1019.804
 1003.684
 993.2671
 988.2081
 988.2081
 993.2671
 1003.684
 1019.804
 1041.273
 1065.542
 1086.248
 1094.643

r=8

1048.428
 1044.035
 1032.632
 1018.139
 1004.17
 992.8852
 985.1934
 981.3372
 981.3372
 985.1935
 992.8854
 1004.17
 1018.139
 1032.632
 1044.035
 1048.428

r=6

1072.509
 1066.202
 1050.25
 1030.809
 1012.897
 998.9852
 989.7736
 985.2356
 985.2356
 989.7736
 998.9854
 1012.897
 1030.809
 1050.251
 1066.202
 1072.51

r=2

1111.954
 1101.702
 1076.915
 1048.745
 1024.579
 1006.882
 995.6437
 990.2406
 990.2406
 995.6437
 1006.882
 1024.579
 1048.745
 1076.916
 1101.702
 1111.954

MATRICE OCTOGONALE

P=700

tableau 10

r=4

1403.797
 1390.192
 1356.262
 1315.805
 1279.378
 1251.628
 1233.507
 1224.653
 1224.653
 1233.507
 1251.628
 1279.379
 1315.806
 1356.263
 1390.194
 1403.798

r=8

1356.376
 1346.992
 1322.886
 1292.755
 1264.24
 1241.573
 1226.306
 1218.708
 1218.708
 1226.306
 1241.573
 1264.241
 1292.756
 1322.887
 1346.994
 1356.377

r=6

1381.809
 1370.264
 1341.065
 1305.479
 1272.694
 1247.231
 1230.37
 1222.064
 1222.064
 1230.37
 1247.231
 1272.694
 1305.479
 1341.066
 1370.264
 1381.81

MATRICE DECAGONALE

P=700

tableau 11

r=4

1910.777
 1889.41
 1835.597
 1770.444
 1710.837
 1664.815
 1634.471
 1619.562
 1619.562
 1634.472
 1664.815
 1710.838
 1770.445
 1835.598
 1889.412
 1910.779

1887.036
 1867.815
 1818.992
 1759.072
 1703.461
 1659.996
 1631.083
 1616.8
 1616.8
 1631.083
 1659.996
 1703.462
 1759.074
 1818.994
 1867.817
 1887.038

r=8

1858.732
 1841.916
 1798.771
 1744.959
 1694.148
 1653.837
 1626.727
 1613.246
 1613.247
 1626.727
 1653.837
 1694.149
 1744.96
 1798.772
 1841.917
 1858.734

MATRICE DODECAGONALE

P=700

tableau 12

INTERPRETATION

ere Serie

D'après les tableaux (8), (9), (10), (11) et (12)

nous constatons que la contrainte σ_0 varie continuellement, elle est minimale au milieu du pan, maximale aux coins du polygone, ce qui correspond à une concentration de contrainte.

Influence du rayon de courbure

Un examen des résultats des tableaux précédents montre que le rayon de courbure a une influence considérable sur les valeurs de σ_0 plus le rayon est petit, plus la valeur $\sigma_{0\max}$ maximale est importante, si nous calculons le coefficient C , dit facteur de concentration défini par la relation suivante :

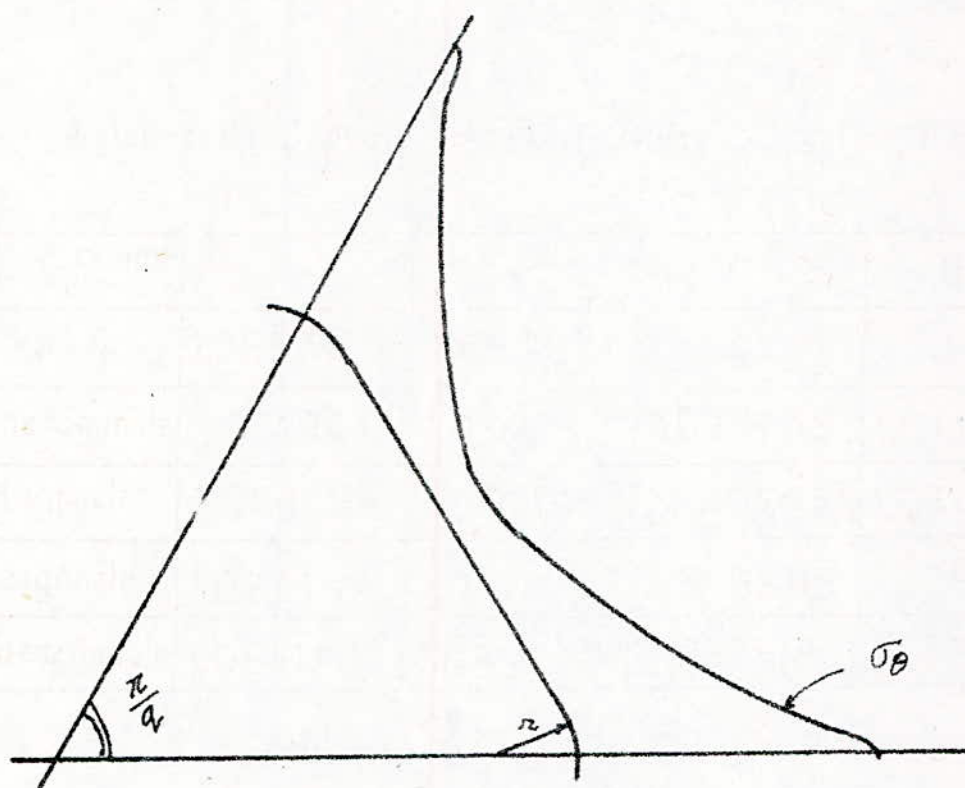
$$C = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{moy}}}$$

pour différentes formes de matrices, et pour différents rayons de courbure, nous constatons que ce coefficient augmente quand r diminue. Voir tableau (A) (page suivante)

Valeurs de C pour $P=700$ Mpa ; $\alpha=10$, $R=30$

matrice \ r(mm)	2	4	6	8
carree	1.06336	1.022617	—	—
hexagonale	1.051944	1.039062	1.025639	1.014882
octogonale	1.064496	1.056010	1.045501	1.034613
decagonale	1.083067	1.074140	1.065905	1.056590
dodecagonale	1.094123	1.089079	1.082618	1.075007

tableau (A)



Variation de σ_{θ} le long du pan

P=800

881.4956
 860.2834
 851.5813
 854.6394
 854.6394
 851.5813
 860.2834
 881.4956

P=1200

1322.243
 1290.425
 1277.372
 1281.959
 1281.959
 1277.372
 1290.425
 1322.243

P=1000

1101.87
 1075.354
 1064.477
 1068.299
 1068.299
 1064.477
 1075.354
 1101.87

P=1400

1542.617
 1505.496
 1490.267
 1495.619
 1495.619
 1490.267
 1505.496
 1542.617

MATRICE CARREE

r=4

tableau 13

P=800

1030.955
 1020.013
 997.785
 978.3241
 965.9403
 960.1689
 960.1689
 965.9402
 978.324
 997.785
 1020.013
 1030.956

P=1200

1546.433
 1530.02
 1496.678
 1467.486
 1448.911
 1440.253
 1440.253
 1448.91
 1467.486
 1496.678
 1530.02
 1546.433

P=1000

1288.694
 1275.017
 1247.231
 1222.905
 1207.425
 1200.211
 1200.211
 1207.425
 1222.905
 1247.231
 1275.017
 1288.695

P=1400

1804.172
 1785.023
 1746.124
 1712.067
 1690.396
 1680.296
 1680.296
 1690.396
 1712.067
 1746.124
 1785.024
 1804.172

MATRICE HEXAGONALE

r=4

tableau 14

P=800

1251.02
 1241.427
 1217.762
 1190.027
 1165.49
 1147.068
 1135.163
 1129.381
 1129.381
 1135.163
 1147.068
 1165.49
 1190.027
 1217.762
 1241.427
 1251.021

P=1200

1876.53
 1862.14
 1826.643
 1785.04
 1748.235
 1720.602
 1702.744
 1694.071
 1694.071
 1702.744
 1720.602
 1748.235
 1785.04
 1826.644
 1862.14
 1876.531

P=1000

1563.775
 1551.783
 1522.203
 1487.533
 1456.862
 1433.835
 1418.953
 1411.726
 1411.726
 1418.953
 1433.835
 1456.863
 1487.534
 1522.203
 1551.784
 1563.776

P=1400

2189.285
 2172.496
 2131.084
 2082.547
 2039.607
 2007.369
 1986.534
 1976.416
 1976.416
 1986.534
 2007.369
 2039.607
 2082.547
 2131.084
 2172.497
 2189.286

matrice octogonale

tableau 15

P=800

1604.339
 1588.792
 1559.013
 1503.777
 1462.147
 1430.431
 1409.722
 1399.603
 1399.603
 1409.722
 1430.432
 1462.147
 1503.778
 1559.014
 1588.793
 1604.341

P=1200

2406.509
 2383.187
 2325.02
 2255.666
 2193.22
 2145.647
 2114.583
 2099.405
 2099.405
 2114.583
 2145.648
 2193.22
 2255.667
 2325.022
 2383.189
 2406.511

P=1000

2005.424
 1985.989
 1937.517
 1879.721
 1827.683
 1788.033
 1762.152
 1749.504
 1749.504
 1762.152
 1788.04
 1827.684
 1879.722
 1937.518
 1985.991
 2005.426

P=1400

2807.594
 2780.385
 2712.523
 2631.61
 2558.756
 2503.255
 2467.013
 2449.306
 2449.306
 2467.013
 2503.255
 2558.757
 2631.611
 2712.525
 2780.387
 2807.596

matrice decagonale

tableau 16

P=800

2183.746
 2159.326
 2097.825
 2023.364
 1955.242
 1902.646
 1867.967
 1850.928
 1850.928
 1867.968
 1902.646
 1955.243
 2023.366
 2097.827
 2159.328
 2183.748

P=1200

3275.619
 3238.989
 3146.738
 3035.047
 2932.864
 2853.968
 2801.951
 2776.391
 2776.391
 2801.952
 2853.969
 2932.865
 3035.048
 3146.74
 3238.993
 3275.622

P=1000

2729.682
 2699.157
 2622.281
 2529.205
 2444.053
 2378.307
 2334.959
 2313.66
 2313.659
 2334.96
 2378.307
 2444.054
 2529.207
 2622.284
 2699.161
 2729.685

P=1400

3821.555
 3778.82
 3671.194
 3540.887
 3421.674
 3329.63
 3268.943
 3239.123
 3239.123
 3268.943
 3329.63
 3421.676
 3540.889
 3671.197
 3778.824
 3821.559

matrice dodécaédrique

tableau 17

2^{eme} Serie

Pour voir l'influence de la pression, nous calculons les coefficients C pour différentes matrices, et pour différentes pressions à rayon constant. Le tableau (B) regroupe les résultats.

$$a = 10 \text{ mm} \quad r = 4 \text{ mm} \quad R = 30 \text{ mm}$$

	800	1000	1200	1400
carree	1.022617	1.022617	1.022617	1.022617
hexagonale	1.039062	1.039062	1.039062	1.039062
octogonale	1.056010	1.056010	1.056010	1.056010
decagonale	1.074140	1.074140	1.074140	1.074140
dodecagonale	1.089079	1.089079	1.089079	1.089079

tableau (B)

Nous constatons que la concentration est indépendante de la pression, car le fait de la concentration est dû à la forme de la matrice (dimensions, aussi) et non à la pression.

CONCLUSION

La théorie de déformation plane a été développée dans les années cinquante par N.I. Muskhelishvili, mais celle-ci restait à l'écart de l'application plus de 30 ans vue ses calculs embarrassants et fastidieux.

De nos jours, les machines de calcul sont de plus en plus sophistiquées (ordinateurs) et c'est ce qui a permis la renaissance de cette théorie.

La présente étude montre qu'il est possible - à l'aide d'un ordinateur - d'appliquer la méthode de Muskhelishvili pour un domaine doublement connexe quelconque.

Les résultats ainsi obtenus sont satisfaisants du point de vue de la précision.

Le programme que nous avons élaboré est utilisable pour n'importe quelle matrice polygonale ou même circulaire.

« Nous avons constaté que plus le nombre de côtes est petit plus la variation de la contrainte est importante, cette variation

devient faible dans le cas où le polygone comporte plus de cotés (elle n'existe pas dans le cas d'une matrice circulaire).

pour compléter cette étude nous prévoyons la suite possible suivante :

Une étude généralisée après la pose de la frette en fonction de la pression qu'elle créera en présence de la pression intérieure.

ANNEXES

1 Notations

$a \rightarrow A0$; $r \rightarrow R0$; $R \rightarrow R$; $q \rightarrow Q$

$\pi \rightarrow PI$; $\beta \rightarrow BE$; $\alpha \rightarrow AL$; $m \rightarrow M$

$\gamma \rightarrow GA$;

XI, YI points du polygone

XJ, YJ points du cercle extérieur

$RH1 \rightarrow \rho$, rayon intérieur de l'anneau

SA, RA facteurs servent à faciliter les calculs.

— o —

$C_k \rightarrow CK(J)$; $C_{-k} \rightarrow CMK(J)$

$S1, S2, S3, S4, P1, P2, P3, P4, N, C$

facteurs utilisés pour décomposer les calculs

— o —

ZXI, ZYI : points du polygone calculés par la fonction

ZXJ, ZYJ : points du cercle extérieur calculés par la fonction

— o —

$RWI \rightarrow \operatorname{Re} w'(s)$ composantes réelle et imaginaire de $w'(s)$

$IWI \rightarrow \operatorname{Im} w'(s)$

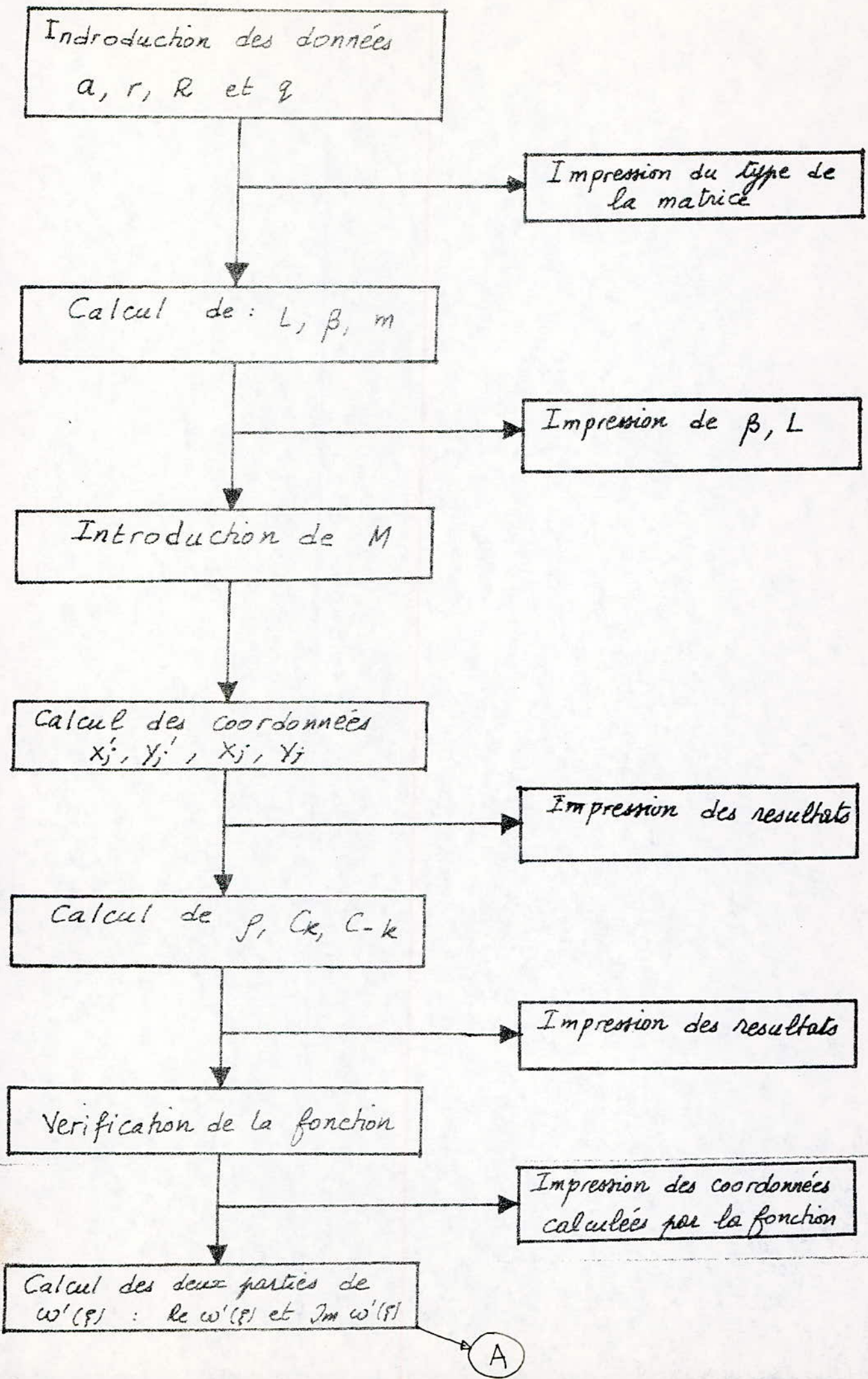
— o —

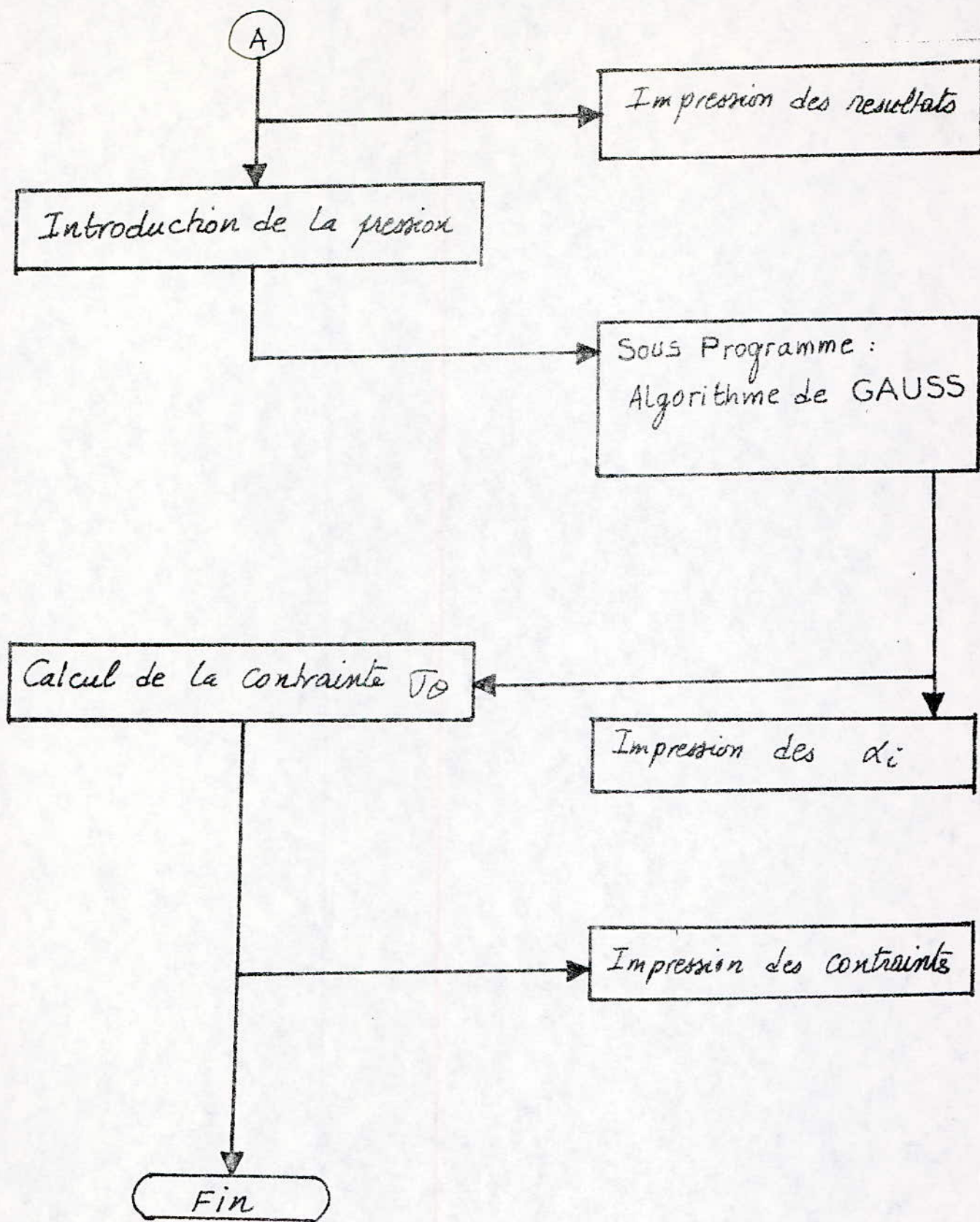
$E(I) \rightarrow \alpha_i$ coefficients de la fonction $\Psi(s)$

S, D, V , des facteurs servent à faciliter la programmation

— o —

$\sigma_0 \rightarrow \text{SIGMA.Teta.}$





ORGANIGRAMME DE CALCUL
 DES CONTRAINTES SUR
 LE CONTOUR INTERIEUR
 des matrices polygonales
 par la methode de :
 "MUSKHELISHVILI"

```

1 PRINT TAB (10);CHR$(27)+"#3";" RAINBOW 100 DIGITAL "
2 PRINT TAB (10);CHR$(27)+"#4";" RAINBOW 100 DIGITAL "
3 PRINT :PRINT
10 REM "*****"
15 REM "*"
20 REM "*"      PROJET DE FIN D'ETUDES- GENIE MECANIQUE      "*"
25 REM "*"              JANVIER 1986                          "*"
30 REM "*****"
35 /
36 /
40 REM "***** SUJET *****"
45 REM "      GENERALISATION DE CALCUL DE RESISTANCE DES      "
50 REM "      MATRICES NON CYLINDRIQUES DE FILAGE              "
55 REM "      A FROID                                           "
60 REM "*****"
65 /
70 REM " Ce programme permet de determiner ,par la methode de "
75 REM " MUSKHELISHVILLI ,les contraintes de traction proudui- "
80 REM " tes par une pression P1 (variable),sur le contour int- "
85 REM " erieur d'une matrice de filage a froid a trou polygonal"
90 REM " [carre ,hexagone,octogone ,decagone ,dodecagone ,et  "
95 REM " meme plus (jusqu'a 80 cotes)];en fonction de ces dim- "
100 REM " ensions a,r ,R (variables).                             "
110 REM "*****"
115 /
185 REM "*****"
190 REM "***** DIMENSIONS DE LA MATRICE en [mm] *****"
200 INPUT"COTE DU POLYGONE a=";A0
210 INPUT"Rayon de courbure r=";R0
220 INPUT"Rayon exterieur R=";R
230 INPUT "Nombre d'axes de symetrie q= ";Q
231 IF Q=2 THEN PRINT "** MATRICE A TROU CARRE **":PRINT
232 IF Q=3 THEN PRINT "** MATRICE A TROU HEXAGONAL **":PRINT
233 IF Q=4 THEN PRINT "** MATRICE A TROU OCTOGONAL **":PRINT
234 IF Q=5 THEN PRINT "** MATRICE A TROU DECAGONAL **":PRINT
235 IF Q=6 THEN PRINT "** MATRICE A TROU DODECAGONAL **":PRINT
240 PI=3.14159265359#
250 SA=PI/2/Q
260 L=A0/(2*SIN(SA))-R0/COS(SA)
270 RA=L/R0
280 BE=ATN(R0*SIN(SA)/(L+R0*COS(SA)))
290 PRINT "Beta=";BE
300 MMIN=PI/Q/BE+1

```

```

310 PRINT "Le nombre de points m doit etre superieur ou egal a";INT(MMIN)
320 INPUT "Nombre de points consideres m";M:PRINT
390 DIM XI(M),YI(M),XJ(M),YJ(M),CK(60),CMK(60)
400 PRINT "L=";L:PRINT
405 PRINT "POINTS DE LA MATRICE "
406 PRINT
410 PRINT TAB(5);"XI(I)";TAB(20);"YI(I)";TAB(35);"XJ(I)";TAB(50);"YJ(I)"
415 PRINT
420 NUM=0
430 DEN=0
440 FOR I=1 TO M
450 AL=PI/Q/(M-1)*(I-1)
460 IF AL>BE THEN 470 ELSE 510
470 IF AL<(PI/Q-BE) THEN 480 ELSE 550
480 XI(I)=(AO/(2*SIN(SA))*TAN(PI/2-SA))/(TAN(PI/2-SA)+TAN(AL))
490 YI(I)=XI(I)*TAN(AL)
500 GOTO 620
510 GA=ATN(RA*SIN(AL)/SQR(1-(RA*SIN(AL))^2))
520 XI(I)=R0*COS(AL)*(COS(GA)+RA*COS(AL))
530 YI(I)=XI(I)*TAN(AL)
540 GOTO 620
550 IF AL=PI/Q THEN 600 ELSE 560
560 GA=ATN(RA*SIN(PI/Q-AL)/SQR(1-(RA*SIN(PI/Q-AL))^2))
570 XI(I)=R0*SIN(PI/Q-AL+GA)*COS(AL)/SIN(PI/Q-AL)
580 YI(I)=XI(I)*TAN(AL)
590 GOTO 620
600 XI(I)=(L+R0)*COS(AL)
610 YI(I)=(L+R0)*SIN(AL)
620 XJ(I)=R*COS(AL)
630 YJ(I)=R*SIN(AL)
650 PRINT I;TAB(5);XI(I);TAB(20);YI(I);TAB(35);XJ(I);TAB(50);YJ(I)
660 '
670 REM "Rayon du cercle interieur de l'anneau"
680 '
690 NUM=NUM+XI(I)*COS(PI*(2*I-1)/2/Q/M)+YI(I)*SIN(PI*(2*I-1)/2/Q/M)
700 DEN=DEN+XJ(I)*COS(PI*(2*I-1)/2/Q/M)+YJ(I)*SIN(PI*(2*I-1)/2/Q/M)
710 NEXT I
750 PRINT:PRINT
760 RH1=NUM/DEN
770 PRINT "Rho1=";NUM;"/";DEN;"=";RH1
780 PRINT:PRINT
790 '
800 REM "Coefficients de la fonction de transformation"
810 '
820 PRINT "Calcul en cours "
830 PRINT TAB(20);"CK(J)";TAB(45);"CMK(J)":PRINT
840 FOR J=1 TO (2*M-1)*Q+1 STEP Q
850 IF J>30 THEN 1050 ELSE 860
860 S1=0:S2=0 : S3=0 :S4=0
870 FOR I=1 TO M
880 P1=COS(PI*J*(2*I-1)/2/Q/M)
890 P2=SIN(PI*J*(2*I-1)/2/Q/M)
900 S1=S1+XJ(I)*P1+YJ(I)*P2

```



```

910 S2=S2+XI(I)*P1+YI(I)*P2
920 P3=COS(PI*(J+Q-2)*(2*I-1)/2/Q/M)
930 P4=SIN(PI*(J+Q-2)*(2*I-1)/2/Q/M)
940 S3=S3+XI(I)*P3-YI(I)*P4
950 S4=S4+XJ(I)*P3-YJ(I)*P4
960 NEXT I
980 CK(J)=S1-S2*RH1^(2*Q*M-J)
982 CK(J)=CK(J)/M
985 N=J+Q-2
986 C=2*Q*M
990 CMK(N)=(S3*RH1^N-S4*RH1^C)
992 CMK(N)=CMK(N)/M
1030 NEXT J
1050 FOR H=1 TO 30 STEP Q
1060 PRINT H;TAB(15);CK(H);TAB(35);(H+Q-2);TAB(40);CMK(H+Q-2)
1070 NEXT H
1080 PRINT;PRINT
1090 /
1100 REM "*****"
1110 REM "   Verification de la fonction"
1120 REM "*****"
1130 PRINT "VERIFICATION "; PRINT
1140 PRINT TAB(8);"ZXI";TAB(25);"ZYI";TAB(40);"ZXJ";TAB(55);"ZYJ"
1145 PRINT
1150 FOR I=1 TO M
1160 AL =PI/Q/(M-1)*(I-1)
1170 ZXI=0;ZYI=0;ZXJ=0;ZYJ=0
1180 FOR H=1 TO M+1 STEP Q
1190 V=Q+H-2
1200 ZXI=ZXI+CK(H)*RH1^H*COS(H*AL)+CMK(V)*COS(V*AL)/RH1^V
1210 ZYI=ZYI+CK(H)*RH1^H*SIN(H*AL)-CMK(V)*SIN(V*AL)/RH1^V
1220 ZXJ=ZXJ+CK(H)*COS(H*AL)+CMK(V)*COS(V*AL)
1230 ZYJ=ZYJ+CK(H)*SIN(H*AL)-CMK(V)*SIN(V*AL)
1240 NEXT H
1250 PRINT I;TAB(5);ZXI;TAB(20);ZYI;TAB(35);ZXJ;TAB(50);ZYJ
1260 NEXT I
1270 PRINT;PRINT
1400 REM "CALCUL DES CONTRAINTES "
1404 DIM RWI(M),IWI(M),RWJ(M),IWJ(M)
1405 PRINT TAB(10);"RWI";TAB(25);"IWI";TAB(40);"RWJ";TAB(55);"IWJ"
1406 PRINT
1410 FOR I=1 TO M
1420 AL=PI/Q/(M-1)*(I-1)
1425 S1=0;S2=0;S3=0;S4=0
1430 FOR H=1 TO 7 STEP Q
1440 V=Q+H-2
1445 C=H-1;E=V+1
1450 S1=S1+CK(H)*H*RH1^C*COS(C*AL)-CMK(V)*V/RH1^E*COS(E*AL)
1460 S2=S2+CK(H)*H*RH1^C*SIN(C*AL)+CMK(V)*V/RH1^E*SIN(E*AL)
1470 S3=S3+CK(H)*H*COS(C*AL)-CMK(V)*V*COS(E*AL)
1480 S4=S4+CK(H)*H*SIN(C*AL)+CMK(V)*V*SIN(E*AL)

```

```

1510 NEXT H
1515 RWI(I)=S1:IWI(I)=S2:RWJ(I)=S3:IWJ(I)=S4
1520 PRINT I;TAB(5);RWI(I);TAB(20);IWI(I);TAB(35);RWJ(I);TAB(50);IWJ(I)
1525 PRINT I;TAB(5);RWI(I);TAB(20);IWI(I);TAB(35);RWJ(I);TAB(50);IWJ(I)
1540 NEXT I
1550 PRINT:PRINT
1560 REM "*****"
1570 REM "      Introduction de la pression interieure      "
1580 REM "*****"
1590 /
1600 INPUT " Pression interieure (P1) en [ MPA ] =";P1
1610 /
1620 PRINT
1630 PRINT " Calcul en cours ";PRINT
1640 GOTO 3220
1650 REM "*****"
1660 REM "  Sous programme de resolution du systeme : A*E=F  "
1670 REM "      ALGORITHME DE GAUSS                          "
1680 REM "*****"
2210 INPUT "N=";N
2220 DIM A(N,N),F(N),E(N)
2230 FOR I=1 TO N
2240 FOR J=1 TO N
2250 INPUT "A(I,J)=";A(I,J)
2260 NEXT J
2270 INPUT "F(I)=";F(I)
2280 NEXT I
2300 FOR H=N TO 2 STEP -1
2310 FOR I=H-1 TO 1 STEP -1
2320 IF A(H,H)<>0 THEN 2440
2330 FOR L=H-1 TO 1 STEP -1
2340 IF A(L,H)<>0 THEN 2355
2350 NEXT L
2355 PRINT "SYSTEME IRREGULIER "
2360 FOR W=1 TO N
2370 G(W)=A(L,W)
2380 A(L,W)=A(H,W)
2390 A(H,W)=G(W)
2400 NEXT W
2410 Q=F(L)
2420 F(L)=F(H)
2430 F(H)=Q
2440 F(I)=F(I)-A(I,H)/A(H,H)*F(H)
2450 FOR J=1 TO H
2460 A(I,J)=A(I,J)-A(I,H)/A(H,H)*A(H,J)
2470 NEXT J
2480 NEXT I
2490 NEXT H
2500 D=1

```

```

2510 FOR I=1 TO N
2520 D=D*A(I,I)
2530 NEXT I
2540 PRINT " LE DETERMINANT EST :D=" ;D
2545 PRINT
2550 IF A(N,N)=0 THEN 2710
2555 E(N)=F(N)/A(N,N)
2570 E(1)=F(1)/A(1,1)
2580 FOR I=2 TO N
2590 S=0
2600 FOR K=1 TO I-1
2610 S=S+A(I,K)*E(K)
2620 NEXT K
2630 E(I)=(F(I)-S)/A(I,I)
2640 NEXT I
2645 RETURN
2650 FOR J=1 TO N
2660 PRINT "E(" ;J ;")=" ;E(J)
2670 NEXT J
2730 STOP
2740 REM "*****"
2750 REM " Calcul des coefficients de la fonction (phi) "
2760 REM "*****"
3220 N=7
3240 FOR I=1 TO N
3250 FOR J=1 TO N
3260 A(I,J)=0:F(I)=0
3270 NEXT J
3280 NEXT I
3290 FOR V=-3*Q TO 3*Q STEP Q
3295 S1=0
3300 FOR K=(1-3*Q ) TO (1+3*Q) STEP Q
3310 I=4+V/Q ;J=4+(K-1)/Q
3320 S=V+K:D=K-V
3330 IF S<0 THEN C=CMK(ABS(S))
3340 IF S>0 THEN C=CK(S)
3350 IF D<0 THEN F=CMK(ABS(D))
3360 IF D>0 THEN F=CK(D)
3370 IF S>(3*Q+1) THEN C=0
3380 IF S<(1-3*Q) THEN C=0
3390 IF D>(1+3*Q) THEN F=0
3400 IF D<(1-3*Q) THEN F=0
3410 A(I,J)=(1-RH1^(2*K))*S*C+(1-RH1^(2*D))*K*F
3420 IF K<0 THEN C=CMK(ABS(K))
3430 IF K>0 THEN C=CK(K)
3431 G=V-K
3432 IF G>0 THEN H=CMK(G)
3433 IF G<0 THEN H=CK(ABS(G))
3434 IF G>(1+3*Q) THEN H=0
3435 IF G<(1-3*Q) THEN H=0
3440 S1=S1+P1*C*H*K*RH1^2
3450 NEXT K
3455 F(1)=S1
3460 NEXT V
3470 GOSUB 2300

```

```

3470 GOSUB 2300
3475 PRINT TAB(10); "E(I)": PRINT
3480 FOR I=1 TO N: PRINT I; TAB(10); E(I): NEXT I
3485 PRINT: PRINT
3486 REM "*****"
3487 REM " Calcul des contraintes ( SIGMA TETA ) en MPA "
3488 REM "*****"
3490 DIM S(M), SIG(M)
3495 PRINT TAB(10); "SIGMA TETA": PRINT: PRINT
3500 FOR I=1 TO M
3510 RFI=0: IFI=0
3520 FOR K=(1-3*Q) TO (1+3*Q) STEP Q
3525 J=4+(K-1)/Q
3530 RFI=RFI+E(J)*K*RH1^(K-1)*COS((K-1)*AL)
3535 IFI=IFI+E(J)*K*RH1^(K-1)*SIN((K-1)*AL)
3540 NEXT K
3550 S(I)=(RFI*RWI(I)+IWI(I)*IFI)/(RWI(I)^2+IWI(I)^2)
3560 SIG(I)=4*S(I)+P1
3570 PRINT I; TAB(10); SIG(I)
3580 NEXT I
4000 END

```


Donc nous tirons :

$$L = S - J = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{2q}} - \frac{r}{\cos \frac{\pi}{2q}}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{d}{h} = \frac{r \cdot \cos \psi}{L + r \sin \psi}$$

l'angle ψ est égale à $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2q}$.

$$\sin \psi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right)$$

Donc :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r \cdot \sin \frac{\pi}{2q}}{L + r \cdot \cos \frac{\pi}{2q}}$$

finalement nous trouvons :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r \cdot \sin \frac{\pi}{2q}}{\frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{2q}} - \frac{r}{\cos \frac{\pi}{2q}} + r \cos \frac{\pi}{2q}}$$

BIBLIOGRAPHIE

- 1 Problèmes de la théorie de l'élasticité
V. Rekatch . Ed MIR 1980
- 2 Résolution des problèmes de l'élasticité plane sur
ordinateur analogique et digital
A.G. UGODCSIKOV et A.E SZTYEPANOV
traduit en hongrois par Elter Palne (Budapest 78)
- 3 Thèse de Mr Zebdi Said juin 85
- 4 Cours de mathématiques supérieures T. III 2^{ème} partie
V. SMIRNOV Edition MIR 1977
- 5 Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable
complexe . M. Lavrentiev. et Chabat Ed MIR 1977
- 6 Cours de mathématiques - tome 1. fascicule 2
J. BASS MASSON 1976
- 7 VARIABLES COMPLEXES cours et problèmes
Murray R. Spiegel Mc Graw-Hill, 1973

