

43/80

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

1ex

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE - المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## PROJET DE FIN D'ETUDES

(En vue de l'obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat)

### SUJET

**programme pour la détermination  
des pulsations propres et  
déformées modales des arbres  
en vibration de torsion**

Proposé par :

M. BOUKABACHE

Etudié par :

M. LAAROSSI

Dirigé par :

M. BOUKABACHE

PROMOTION : JUIN 1986



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE



وزارة التعليم والبحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE



## PROJET DE FIN D'ETUDES

(En vue de l'obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat)

### SUJET

**programme pour la détermination  
des pulsations propres et  
déformées modales des arbres  
en vibration de torsion**

Proposé par :

M. BOUKABACHE

Etudié par :

M. LAAROUSSI

Dirigé par :

M. BOUKABACHE

PROMOTION : JUIN 1986



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR.

وزارة التعليم العالي

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



Département : MECANIQUE.

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات بالجزائر  
الهندسة الميكانيكية

Promoteur : Mohamed. BOUKABACHE.

الموجه : محمد بوكعباش

Elève Ingenieur : Mohammed. LAAROUSSI.

الطالب المهندس : محمد لعروسي

العنوان: وضع برنامج لحساب الترددات الذاتية ودوال تشويه الأعمدة المقابلة لكيفيات الاهتزاز الفعلي.

الملخص: يهدف عملنا هذا الى اختيار طريقة لحساب الترددات الذاتية، ودوال التشويه المقابلة لكيفيات الاهتزاز الفعلي. ان كون الطرق التحليلية المعروفة محدودة حيث يمكن استعمالها فقط عندما يتعلق الأمر بالكيفيتين الاولى والثانية للاهتزاز مثل (طريقة هولزر، ...) جعلنا نختار طريقة عددية ذات تقارب سريع ودقة مقبولة. وقد تم اجراء الحساب بواسطة الناظمة الالكترونية.

TITRE : Programme pour la détermination des pulsations propres et déformées modales des lignes d'arbres en vibration de torsion.

RESUME : L'objet de notre travail consiste à faire le choix d'une méthode de calcul des pulsations propres et déformées modales, en vibration de torsion des lignes d'arbres à  $n$ -degrés de libertés. Les méthodes analytiques connues étant limitées et ne sont opérationnelles que pour le premier et le deuxième mode tel que (Méthode de HOLZER...), nous avons choisi une méthode numérique à convergence rapide et une précision acceptable. Les calculs ont été élaborés sur l'ordinateur.

SUBJECT: Programme for determination of proper pulses and deformed modes in torsional vibration.

ABSTRACT: The purpose of this study is to choose a computational method which can determine the proper pulses and deformed modes, for shafts of  $n$ -degrees of freedom during their torsional vibration. The known analytical methods, which are limited, work only for the first and the second modes (i.e. HOLZER's method...), we choosed one numerical method which converge fast and has acceptable precision. The computation was done in the computer centre.



## DEDICACES

(0)

Je dédie ce modeste travail à :

- La mémoire de mon père tombé au champs d'honneur.
- Ma mère .
- Mes frères et sœurs .
- Toute la Famille .
  
- Tous ceux qui témoignent qu'il n'y a de dieux  
qu'ALLAH et que MOHAMMED est son  
envoyé et son prophète .

Dr. Mohamed

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon promoteur,  
Directeur du Département Génie Mécanique, M<sup>r</sup> M. BOUKABACHE  
pour l'aide et les conseils qu'il m'a donnés pendant cette étude .

Je désire également remercier Messieurs :

M. FAOUSSI

M. KUROWSKI

d'avoir bien voulu accepter d'être membre du jury .

Que tous qui ont contribué à ma formation trouve ici l'expression  
de mes remerciements .

L. Mohammed.

# SOMMAIRE

1. INTRODUCTION .....	1
2. MODELISATION DES LIGNES D'ARBRES .....	4
2.1. caractéristiques du modèle .....	4
2.2. Modélisation des arbres coudés .....	5
2.21. Rigidité torsionnelle d'un coude .....	5
2.22. Moment d'inertie du coude .....	8
2.3. Modélisation des arbres non coudés .....	9
2.31. Arbre long de diamètre constant .....	9
2.32. Arbres époulés .....	40
2.4. Modélisation des accouplements élastiques .....	41
2.5. Modélisation des réducteurs et multiplicateurs .....	42
2.51. Réducteurs et multiplicateurs à transmission interne rigide .....	42
2.52. Réducteurs et multiplicateurs à transmission interne souple .....	43
2.6. Exemple de modélisation .....	44
3. DETERMINATION DES PULSATIONS PROPRES ET DEFORMEES MODALES DES LIGNES D'ARBRES NON RAMIFIEES .....	47
3.1. Hypothèses .....	48
3.2. Différents types de lignes d'arbres non ramifiées .....	49



3.3. Equation du mouvement des disques .....	20
3.4. Choix d'une méthode de résolution du système .....	
<i>différentiel</i> .....	24
3.5. Méthode de Holzer .....	22
3.51. Théorie de la méthode .....	22
3.52. Principe de la méthode .....	25
3.6. Méthode de Rutishauser .....	27
3.61. Propriétés des matrices tridiagonale .....	29
3.62. Algorithme de Rutishauser .....	30
3.63. Application de l'algorithme de Rutishauser .....	31
3.631. Détermination des éléments des matrices $[R]$ et $[S]$ .....	31
3.632. Calcul des éléments de la matrice $[c]$ .....	31
3.633. Relations entre les éléments de $[c]$ et $[c^*]$ .....	33
3.64. Organisation des calculs .....	33
3.641. Description de l'algorithme .....	35
3.642. Organigramme .....	34
3.6421. Premier organigramme .....	34
3.6422. Second organigramme .....	36
3.65. Test de convergence .....	37
3.66. Déformées modales .....	37
3.7. Exemples de calcul des pulsations propres de lignes d'arbres .....	40

3.11 - calcul des pulsations propres d'un vilebrequin quatre  
coudes par les deux méthodes. . . . . 40

#### 4. PROGRAMME RUT .

4.1 - Liste des données . . . . . 49

4.2 - Noms de variables . . . . . 49

4.3 - structure du programme . . . . . 50

4.4 - Organigramme du programme RUT. . . . . 52

4.5 - calcul des pulsations propres du groupe motopropulseur. 60

5 - CONCLUSION . . . . . 64

## NOTATIONS UTILISEES

- $b_2$  : largeur du coude. [mm]  
 $C$  : couple agissant sur un disque. [N.m]  
 $D$  : Diamètre [mm]  
 $E$  : Module d'élasticité longitudinal. [N/m<sup>2</sup>]  
 $G$  : Module d'élasticité transversal. [N/m<sup>2</sup>]  
 $I$  : Moment d'inertie. [Kg.m<sup>2</sup> ou N.m/s<sup>2</sup>]  
 $i, j, n$  : indices.  
 $J$  : moment quadratique de la section par rapport à l'axe. [mm<sup>4</sup>]  
 $K$  : Raideur (rigidité) torsionnelle. [N.m/rad]  
 $L$  : Longueur. [mm]  
 $N$  : vitesse de rotation. [tr/mn]  
 $R$  : Rayon de la poulie. [mm]  
 $R_0$  : entreaxe du coude. [mm]  
 $r$  : Rayon de la manivelle. [mm]  
 $S$  : section transversale de la poulie. [mm<sup>2</sup>]  
 $T$  : Force vive (énergie cinétique).  
 $U$  : Fonction de force (énergie potentiel).  
 $\omega$  : Pulsation [rad/s]  
 $\rho$  : masse volumique. [kg/m<sup>3</sup>]  
 $\theta$  : déplacement angulaire.  
 $\varphi$  : déphasage  
 $\varepsilon$  : précision relative.  
 $\mathcal{G}(\omega)$  : couple résiduel. [N.m]



# TABLE DES FIGURES

Figure 2.1 : Exemple de modèle de ligne d'arbres . . . . . 5

Figure 2.2 : Dimensions caractéristique d'un coude de vilebrequin . . . . . 6

Figure 2.3 : Calcul du moment d'inertie d'un bras de vilebrequin . . . . . 8

Figure 2.4 : Modèle à un disque . . . . . 8

Figure 2.5 : Modélisation d'un arbre long . . . . . 10

Figure 2.6 : Modèle d'un arbre époulé . . . . . 10

Figure 2.7 : Modélisation d'un accouplement . . . . . 11

Figure 2.8 : Modélisation d'un réducteur . . . . . 12

Figure 2.9 : Modèle du réducteur de la Figure 2.8 . . . . . 13

Figure 2.10 : Modélisation d'une transmission par courroie . . . . . 13

Figure 2.11 : Modèle d'une transmission par courroie . . . . . 13

Figure 2.12 : Exemple de ligne d'arbres non ramifiées . . . . . 14

Figure 2.13 : schéma de l'installation de la figure 2.12 . . . . . 15

Figure 2.14 : Modèle de l'installation de la Figure 2.12 . . . . . 16

Figure 3.1 : Schémas des différents types de lignes d'arbres non ramifiées . . . 19

Figure 3.2 : schéma d'une ligne d'arbres libre à ses deux extrémités . . . 22

Figure 3.3 : Allure du comportement du couple résiduel . . . . . 26

Figure 3.4 : Exemple du modèle d'un vilebrequin quatre coudes . 40

Figure 3.5 : Exemple d'une chaîne cinématique du groupe Motopropulseur  
 comportant 2 cardans et un pont moteur . . . . . 50

## INTRODUCTION

Autrefois les machines avaient des dimensions exagérées, une vitesse réduite et un poids élevé; ces machines avaient des fréquences propres supérieures aux fréquences des forces perturbatrices et se comportaient alors, quant aux vibrations, comme si elles étaient parfaitement rigides. Mais avec le développement de la technique, on assiste à un allègement continu des installations et à un accroissement continu des vitesses de travail des machines et de leurs pièces. Ceci a pour effet l'apparition de vibrations dans leurs différents éléments.

Les causes des vibrations sont assez variées depuis le processus technologique, le mode de fonctionnement de la machine jusqu'aux imprécisions d'exécution ou de montage, usures, défauts de fonctionnement, etc ...

La perturbation de l'état d'équilibre dans les milieux continus donne naissance à des ondes qui causent un mouvement oscillatoire appelé vibrations. Les corps en vibrations subissent des déformations périodiques en général élastiques. Au cours de la vibration, le corps en mouvement est soumis à l'action de plusieurs forces extérieures et intérieures, ayant soit le rôle d'entretenir le mouvement, soit de l'empêcher.

Le mouvement ondulatoire peut être périodique, transitoire, ou



aléatoire. Une fonction périodique se répète identique à elle même à intervalle de temps régulier. Elle est décrite par des équations mathématiques précises qui peuvent en simplifier l'analyse; elle est dite "déterministe".

Une vibration transitoire n'est pas continue. Elle se rencontre lors d'un impact et partout où la force d'excitation n'est pas continue. Elle est considérée déterministe.

Les vibrations aléatoires sont les plus fréquentes dans la vie courante; elles caractérisent les machines fonctionnant régulièrement. Elles sont continues mais non périodiques, et contenant beaucoup de composantes de fréquences.

Il existe des moyens très variés pour lutter contre les vibrations dont l'amplitude devient dangereuse pour une certaine partie de la machine.

Les moyens les plus naturels consistent à éliminer les forces extérieures qui peuvent créer le phénomène de vibration. Ce moyen est très limité. On parvient à résoudre le problème des vibrations en modifiant les moments d'inertie des masses et la flexibilité des assemblages. Lorsque ce moyen n'est pas efficace, on ajoute au système des appareils spéciaux pour étouffer les vibrations (amortisseurs de vibrations).

La connaissance des fréquences propres, nous permet de nous éloigner des fréquences de résonances, si nous connaissons les



fréquences d'excitation du système.

Pour l'étude des vibrations de torsion des lignes d'arbres, nous avons adopté parmi les méthodes de calcul des pulsations propres deux méthodes pour s'en convaincre de leurs utilisations.

La rapidité des calculs numériques nous permettra avec la méthode choisie de juger rapidement de l'influence de tel ou tel élément (sur les pulsations propres de la ligne d'arbre) et de faire des choix technologiques qui amélioreront le comportement vibratoire de l'objet en question.

Ainsi les systèmes comprenant des masses liées par des éléments de différentes rigidités sont soumis aux vibrations torsionnelles qui parfois provoquent l'apparition de l'égalité d'une fréquence propre du système avec la fréquence harmonique du couple moteur d'où la résonance.

# MODELISATION DES LIGNES D'ARBRES

## 2.1. Caractéristiques du modèle.

L'état de connaissance à un instant donné de la complexité d'une ligne d'arbre par exemple; conduisent à substituer des modèles auxquels s'appliquent les lois de la physique.

Ainsi il est nécessaire de créer pour une ligne d'arbres, différents modèles pour:

- réaliser l'équilibrage d'un système.
- connaître les fréquences propres des vibrations de torsion, de flexion,...
- déterminer les amplitudes relatives en quelques points particuliers des oscillations de torsion ou de flexion.

Nous allons caractériser des modèles traduisant les  $n$  premières fréquences naturelles de torsion et les amplitudes des oscillations correspondantes.

Les éléments de ces modèles doivent satisfaire à des règles bien connues: proportionnalité entre efforts et déformations, conservation de la masse; pour que les lois de la mécanique leur soient applicables.

Les lignes d'arbres qui sont essentiellement composées de coudes, d'arbres manivelles, d'arbres épaulés, d'accouplements,

de reducteurs seront réduites à des modèles équivalents constitués des disques d'inerties  $I_j$  reliés entre eux par des ressorts de torsion de rigidité torsionnelle  $K_j$ , comme indiqué sur la figure 2.1.

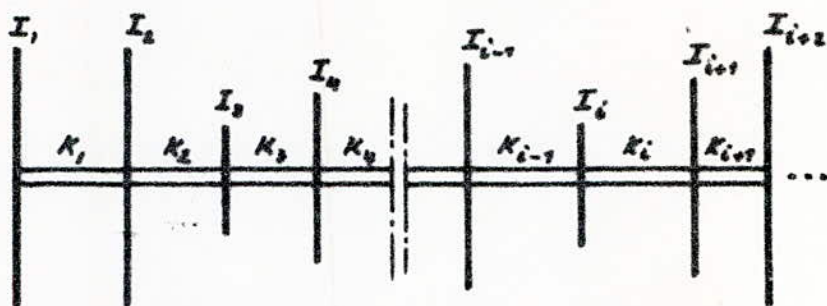


Fig. 2.1

ou:  $I_i$  : moment d'inertie du disque

$K_i$  : rigidité torsionnelle du ressort.

## 2.2. Modélisation des arbres coudés

Les coudes sont réduits à des disques de moment d'inertie  $I_i$  et séparés par des tronçons d'arbres de rigidité torsionnelle  $K_i$ .

### 2.2.1. Rigidité torsionnelle d'un coude

La rigidité torsionnelle dépend des conditions de contraintes aux paliers, en supposant que les paliers comportent un jeu suffisant pour que le déplacement des sections droites soit possible pendant la torsion.



L'angle de torsion produit par le couple  $M_t$  sera donné par :

$$\theta = \left( \frac{1}{K_t} + \frac{1}{K_m} + \frac{1}{K_b} \right) \cdot M_t$$

avec :

$$K_t = \frac{(d_t^4 - d_{it}^4)}{32 \cdot L_t} \cdot G \quad : \text{rigidité torsionnelle du fourillon.}$$

$$K_m = \frac{(d_m^4 - d_{im}^4)}{32 \cdot L_m} \cdot G \quad : \text{rigidité torsionnelle du maneton.}$$

$$K_b = \frac{L_b \cdot b^3}{24 \cdot R} \cdot E \quad : \text{rigidité torsionnelle du bras-manivelle.}$$

les dimensions sont indiqués sur la figure 2.2 .

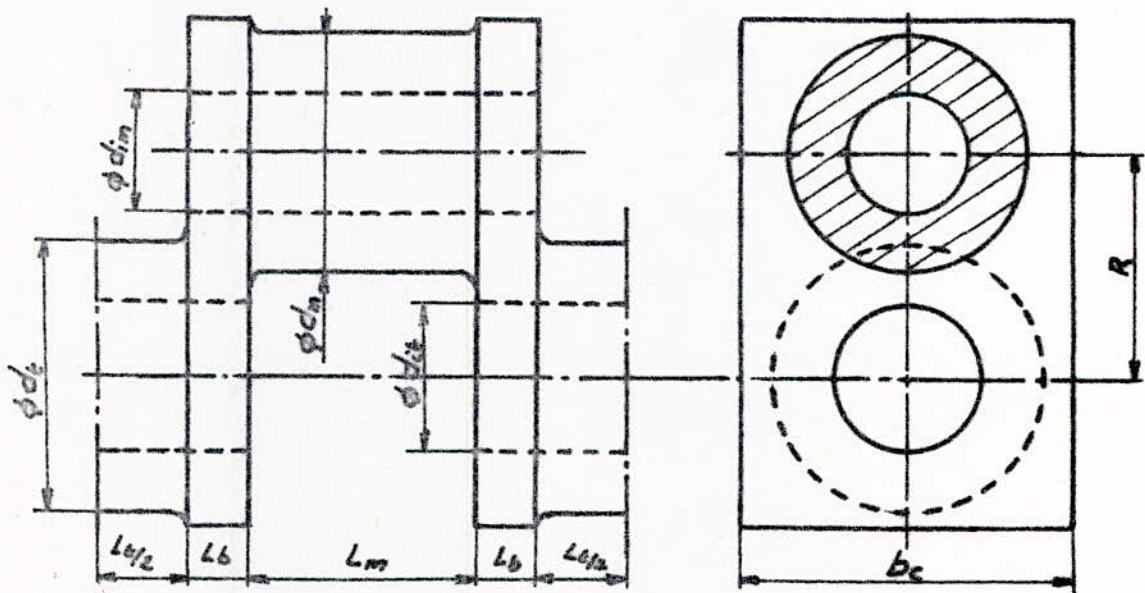


Fig 2.2

donc pour le calcul des vibrations de torsion du vilebrequin, on remplace chaque manivelle par un arbre équivalent de section uniforme, de diamètre égal à celui du tourillon et de rigidité torsionnelle  $K$ , telle que :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_t} + \frac{1}{K_m} + \frac{1}{K_b}$$

et de longueur équivalente  $L_e$  donnée par :

$$L_e = \frac{G \cdot J}{K} \quad \text{avec} \quad J = \frac{\pi \cdot D_e^4}{32}$$

avec :

- $G$  : module d'élasticité transversal du matériau de l'arbre.
- $J$  : moment quadratique de la section par rapport à son axe.
- $D_e$  : Diamètre équivalent égal à celui du tourillon.

En remplaçant les expressions de  $K_t$ ,  $K_m$  et  $K_b$  On trouve la longueur équivalente de l'arbre rectiligne qui est égale à :

$$L_e = \left[ \frac{L_t}{d_t^4 - d_{it}^4} + \frac{L_m}{d_m^4 - d_{im}^4} + 0,93 \frac{R}{L_b \cdot b^3} \right] \cdot D_e$$

Pour obtenir une longueur équivalente du modèle de diamètre  $D_e$  telle que celui-ci ait la même rigidité torsionnelle que le coude réel, il faut donc modifier sensiblement certains termes en se base sur l'expérience, c'est ainsi que des formules empiriques ont été données

- par :
- Formule de Corter
  - Formule de Kerwilson
  - Formule de Timoshenko
  - Formule de Tuplin.
  - ⋮

## 2.22 - Moment d'inertie du coude

Le moment d'inertie du coude  $I_c$  est donné par la méthode de Wilson :

$$I_c = I_m + I_t + 2 \cdot I_b$$

avec :

$$I_t = \frac{\rho \cdot \pi}{64} \cdot (d_t^4 - d_{it}^4) \cdot L_t \quad : \text{moment d'inertie du tourillon} \\ \text{par rapport à l'axe du vilebrequin.}$$

$$I_m = \frac{\rho \pi}{64} \left[ \frac{d_m^4 - d_{im}^4}{16} + R^2 (d_m^2 - d_{im}^2) \right] \cdot L_m \quad : \text{moment d'inertie du maneton} \\ \text{par rapport à l'axe du vilebrequin.}$$

$$I_b = \rho \frac{2\pi}{360} \cdot \sum (\beta L_b r^3) dr \quad : \text{moment d'inertie du bras,}$$

où :  $\rho$  : masse volumique du matériau.

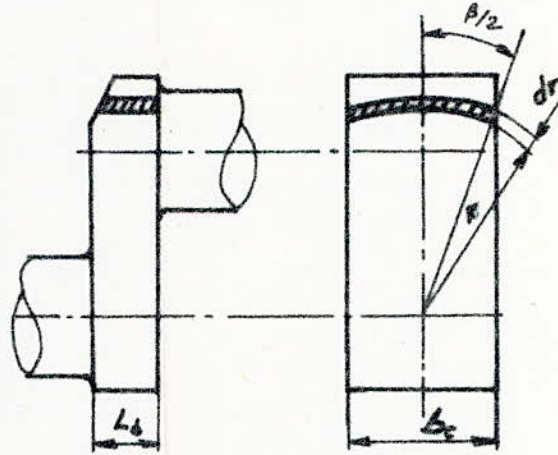


Fig 2.3

## 2.221 - Modèle à un disque.

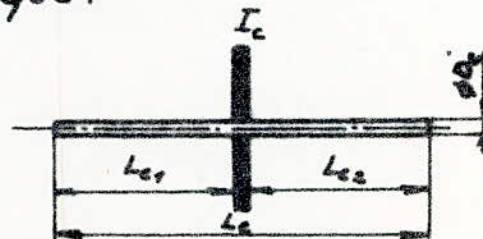


Fig 2-4



Le modèle à un disque est constitué par un arbre, sans masse de diamètre  $D_e$  et de longueur  $L_e$ , portant un disque d'épaisseur nulle et d'inertie  $I_c$ , tel que :

$$I_c = I_t + I_m + I_{b_1} + I_{b_2} .$$

$I_{b_1}, I_{b_2}$  ; sont les moments d'inertie des bras 1 et 2.

Les longueurs  $L_{e_1}$  et  $L_{e_2}$  sont les longueurs équivalentes des deux demi coudes, elles sont différentes lorsque le coude est dissymétrique.

Remarque : On peut modéliser un coude par deux disques au lieu d'un seul.

## 2.3. Modélisation des arbres non coudés

### 2.3.1. Arbre long de diamètre constant.

Lorsque le moment d'inertie d'un arbre par rapport à son axe n'est pas négligeable vis à vis des autres inerties de la ligne d'arbre, on remplacera cet arbre par une série de tronçons, sans masse séparés par des disques d'inertie  $I'$ . Si  $I$  est le moment d'inertie de l'arbre par rapport à son axe et  $K$  sa rigidité torsionnelle, le moment d'inertie  $I'$  de chacun des  $n$  disques du modèle sera égal à  $\frac{I}{n}$  et la rigidité torsionnelle  $K'$  des  $(n+1)$  tronçons est égale à  $(n+1).K$ .

avec :  $K = \frac{GJ}{L}$

le modèle ainsi construit est : (voir Fig 2.5)

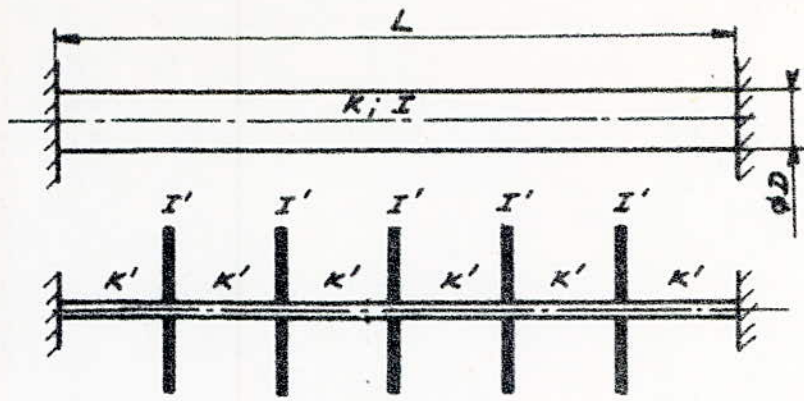


Fig 2.5

Le comportement vibratoire du modèle est pratiquement semblable à celui de l'arbre réel pour  $n$  grand. Dans la pratique, pour limiter le temps de calcul, on choisira  $n$  de telle sorte que les inertie  $I'$  soient égales ou supérieures à la plus petite inertie de l'installation.

Les pulsations propres de cet arbre sont égales à :

$$\omega_p = \frac{p \cdot \pi}{L} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

### 2.32 - Arbres épaulés.

Considérons l'arbre épaulé représenté ci-dessous :

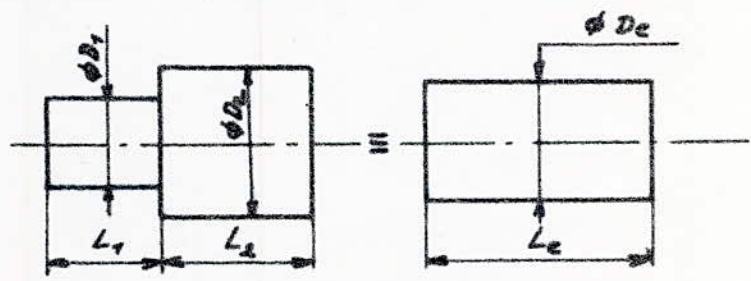


Fig 2.6

La longueur  $L_e$  de l'arbre équivalent de même raideur et de diamètre  $D_e$  est égale à :

$$L_e = L_1 \left( \frac{D_e}{D_1} \right)^4 + L_2 \left( \frac{D_e}{D_2} \right)^4$$

## 2.4 - Modélisation des accouplements élastiques.

soit l'accouplement représenté par la figure 2.



Fig 2.7

Le modèle d'un accouplement est constitué généralement de deux disques de moment d'inertie  $I_1$  et  $I_2$  séparés par un arbre de rigidité torsionnelle  $K$ .

$I_1$  et  $I_2$  : sont les moments d'inertie des deux parties d'accouplement.

$K$  : est la rigidité torsionnelle de l'accouplement ou couple nominal qu'il doit transmettre.

La longueur équivalente  $L_e$  de l'accouplement pour un diamètre  $D_e$  est égale à :

$$L_e = \frac{G \cdot \pi}{32 \cdot K} \cdot D_e^4.$$

Remarque : si les moments d'inertie  $I_1$  et  $I_2$  sont très faibles par rapport à ceux des autres disques de la ligne d'arbre ils peuvent être négligés.



## 2.5 Modélisation des réducteurs et multiplicateurs

### 2.51 Réducteurs et multiplicateurs à transmission interne rigide.

Ce sont les réducteurs ou multiplicateurs constitués par des trains d'engrenages, des pignons et des chaînes dont l'élasticité des dents ou des maillons est négligeable.

Considérons le réducteur schématisé sur la figure 2.8

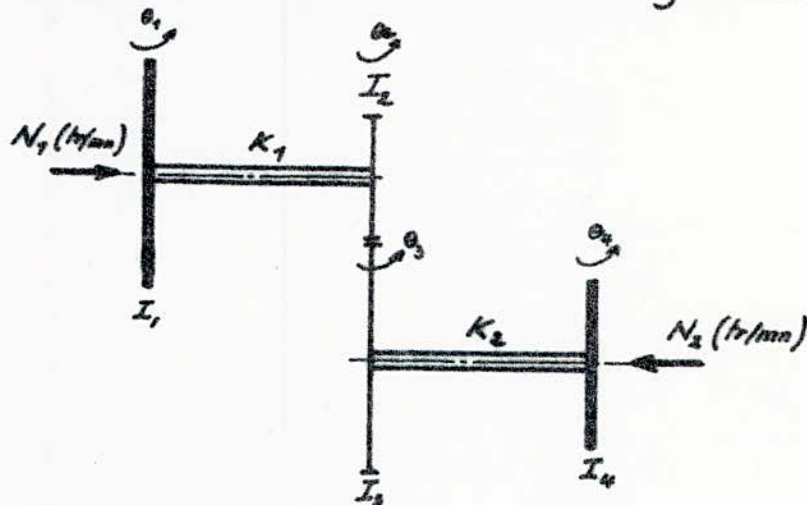


Fig 2.8

soient :

$I_2$  et  $I_3$  : les moments d'inertie des pignons du réducteur.

$I_1$  et  $I_4$  : les moments d'inertie des disques placés à l'entrée et à la sortie du réducteur.

$K_1$  et  $K_2$  : les rigidités des arbres d'entrée et sortie.

$N_1$  et  $N_2$  : vitesses de rotation des arbres d'entrée et de sortie.

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$  et  $\theta_4$  : les paramètres indiquant la position angulaire des disques 1, 2, 3 et 4.

Nous obtenons le modèle équivalent ramené à la ligne d'arbre tournant à la même vitesse  $N_1$ , tel que :

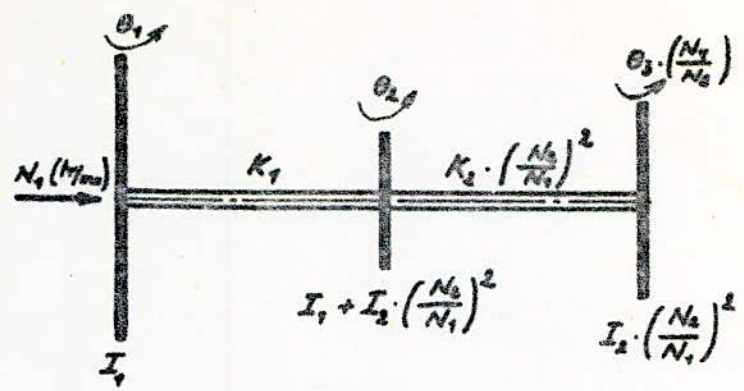


Fig 2.9

2.52 - Réducteurs et multiplicateurs à transmission interne souple.

prenons par exemple la transmission par courroie schématiser

par :

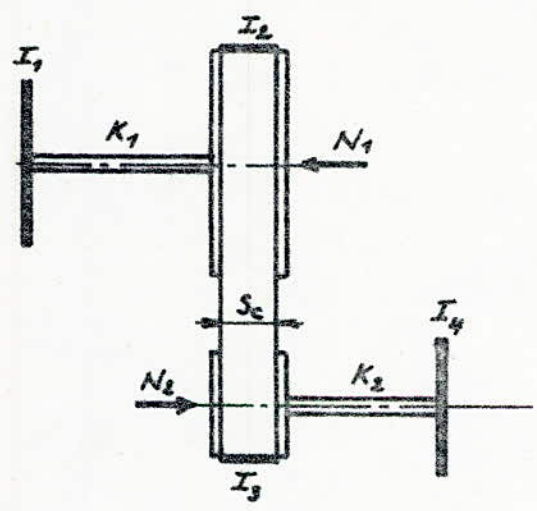


Fig 2.10

Le schéma équivalent ramené à la ligne d'arbre tournant à  $N_1$  sera :

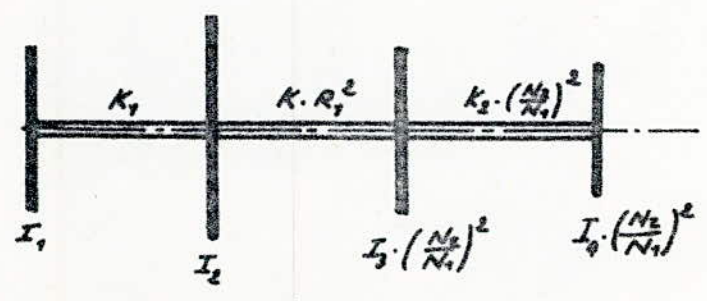


Fig 2.11

avec :  $R_1$  : rayon de la poulie 1

$$K = \frac{E_c \cdot S_c}{L_c} \cdot \mu$$
 : raideur de la courroie .

$E_c$  : module d'élasticité longitudinal de la courroie .

$S_c$  : section transversale de la courroie .

$L_c$  : longueur du lien tendu .

$\mu$  : coefficient  $1 < \mu < 2$  .

Remarque: Il existe des modèles complexes relatifs aux schémas, équivalents de différentiels ou de boudes et qui donnent plusieurs ramifications. Ces types sortent du cadre de notre exposé.

### 2.6. Exemple de modélisation

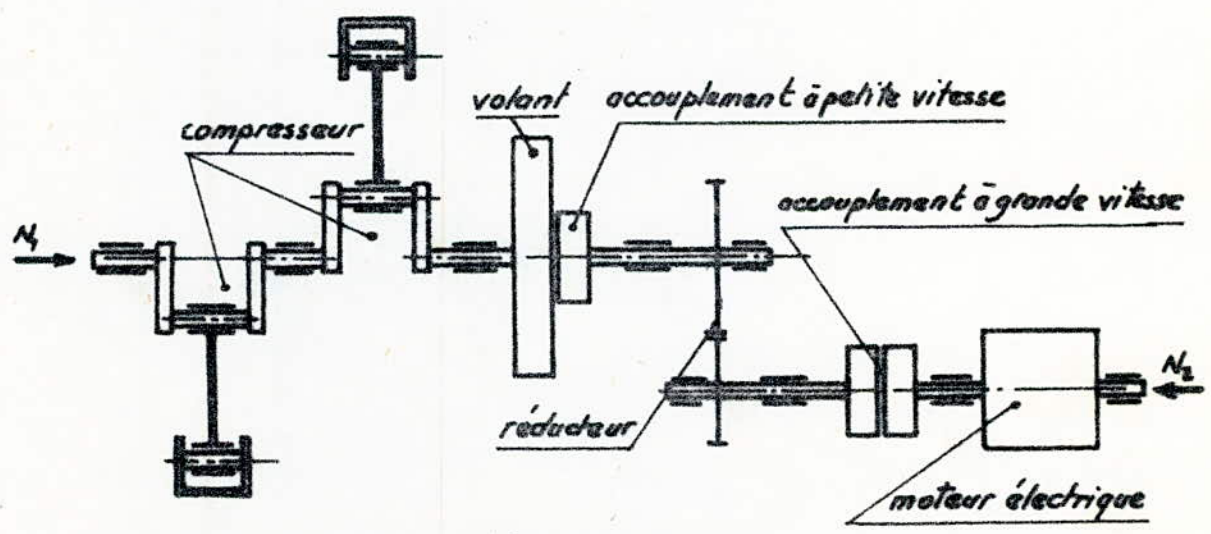


Fig 2.12



La modélisation de cette installation peut se faire en deux étapes pour faire apparaître clairement les inerties et les raideurs des différents éléments

Première étape: modélisation des éléments de l'installation.  
voir figure 2.13.

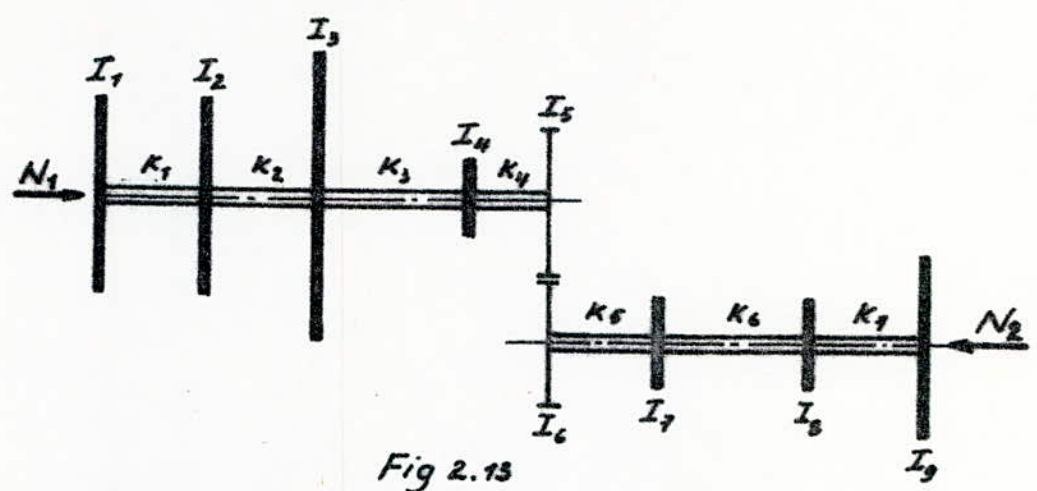


Fig 2.13

avec:

- $I_1$ : moment d'inertie de la première manivelle et de l'équipage mobile associé.
- $I_2$ : moment d'inertie de la deuxième manivelle et de l'équipage mobile associé.
- $I_3$ : moment d'inertie du volant et du demi accouplement lié à ce volant.
- $I_4$ : moment d'inertie du demi-accouplement lié à l'arbre de réducteur.
- $I_5$ : moment d'inertie de la roue du réducteur.
- $I_6$ : moment d'inertie du pignon du réducteur.
- $I_7; I_8$ : moment d'inertie des deux parties de l'accouplement.
- $I_9$ : moment d'inertie du rotor du moteur électrique.
- $K_i \quad i \in [1, 7]$ : sont les rigidités torsionnelles des tronçon d'arbres et les éléments constituant l'installation.

Deuxième étape: tous les éléments du modèle précédent seront ramenés

à la même vitesse  $N_1$ , voir figure 2.14.

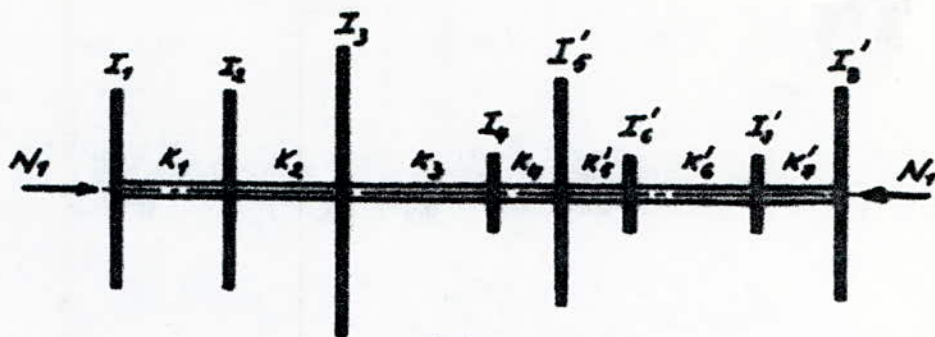


Fig 2.14

les valeurs des inerties et des raideurs modifiées seront :

$$I'_5 = I_5 + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$$

$$I'_6 = I_6 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$$

$$I'_7 = I_7 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$$

$$I'_8 = I_8 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$$

$$K'_5 = K_3 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$$

$$K'_6 = K_6 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$$

$$K'_7 = K_7 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$$

# DETERMINATION DES PULSATIONS PROPRES ET DEFORMEES MODALES DES LIGNES D'ARBRES NON RAMIFIEES

De nombreuses méthodes ont été utilisées pour la recherche des pulsations propres et les modes propres, et augmentent en nombre avec le développement des moyen de calcul et les progrès en analyse numérique. On peut cependant les classer en trois catégories :

## a. Méthodes énergétiques :

parmi ces méthodes on peut citer :

- la méthode de RAYLEIGH
- la méthode de RAYLEIGH-RITZ
- la méthode des fonctions d'influence .

## b. Méthodes Dérivées des équations intégrales :

parmi celles-ci on peut citer :

- la méthode de GALERKIN .
- la méthode des coefficients d'influences .

## c. Méthodes dérivées des équations différentielles :



On peut citer :

- La méthode de HOLZER.
- La méthode de MYKLESTAD.
- La méthode des matrices de transfert.

De plus il existe certaines méthodes telles que : méthode de JACOBI, RUTISHAUSER, HESSENBERG...

Avant d'appliquer certaines méthodes pour la recherche des pulsations propres et les déformées modales nous prenons quelques hypothèses.

### 3.1. Hypothèses.

- Le système obéit à la loi de HOOKE (les déformations sont proportionnelles aux efforts).
- Seules les déformations de torsion sont prises en compte.
- Le système est conservatif.
- L'axe de rotation est un axe du référentiel fixe.
- Les centres de gravités des disques appartiennent à l'axe de rotation.
- L'axe de rotation est un axe principal d'inertie.
- Les paliers seront considérés comme des liaisons de types rotatoire parfaits. Le moment des actions mécaniques des paliers sur l'arbre a une composante nulle sur l'axe de rotation.

Nous limitons notre étude aux lignes d'arbres non ramifiées.

### 3.2 Différents types de lignes d'arbres non ramifiées

Trois types de lignes d'arbres peuvent se présenter :

- Lignes d'arbres dont les deux extrémités sont libres.
- Lignes d'arbres encastrees à une extrémité, libre à l'autre.
- Lignes d'arbres encastrees à ses deux extrémités. (voir Fig 3.1)

les encastrements traduisent généralement des vitesses de glissement

nulles.

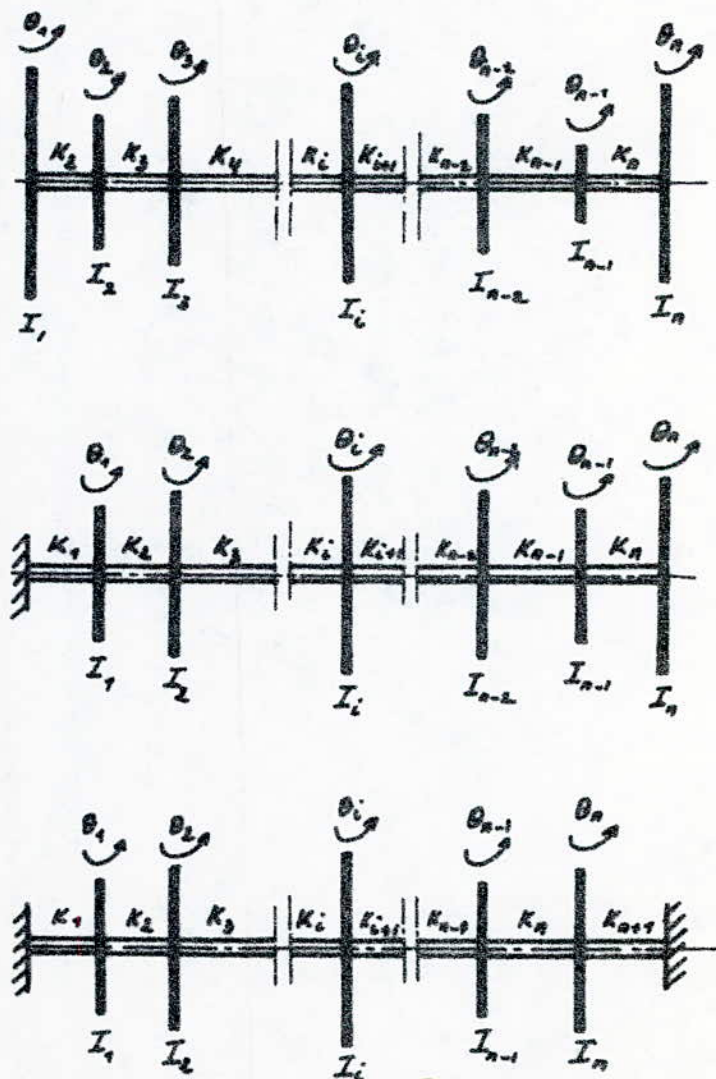


Fig 3.1

où :

$\theta_i$  : rotation du disque  $i$  par rapport au référentiel .

$I_i$  : moment d'inertie du disque  $i$  par rapport à son axe .

$K_i$  : raideur torsionnelle du ressort séparent les disques  $i-1$  et  $i$ , avec  $i$  suivant les 3 cas tel que :

$i \in [2, n]$  pour un arbre dont les extrémités sont libres .

$i \in [1, n]$  pour un arbre encastré à une extrémité et libre à l'autre .

$i \in [1, n+1]$  pour un arbre encastré à ses deux extrémités .

### 3.3. Equation du mouvement des disques

La mise en équation est faite à partir du cas où l'arbre est encastré à ses deux extrémités . Nous déduirons de ses équations celles relatives aux arbres encastrés à une extrémité et libre à l'autre ou libres aux deux extrémités, en faisant, simplement, soit  $K_{n+1} = 0$ , soit  $K_1 = K_{n+1} = 0$ .

La force vive d'un tel système peut être exprimée par :

$$2T = \sum_{i=1}^{i=n} I_i \dot{\theta}_i^2$$

L'énergie potentiel (ou fonction de force) s'exprime par :

$$U = -\frac{K_1}{2} \theta_1^2 - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{K_{i+1}}{2} (\theta_i - \theta_{i+1})^2 - \frac{K_{n+1}}{2} \theta_n^2 .$$

Appliquons l'équation de Lagrange :  $\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial T}{\partial \theta_i} = \frac{\partial U}{\partial \theta_i}$

Nous obtiendrons le système différentiel du second ordre, à coefficients constants et sans second membre :



$$I_1 \ddot{\theta}_1 + (K_1 + K_2) \theta_1 - K_2 \theta_2 = 0$$

$$I_i \ddot{\theta}_i - K_i \theta_{i-1} + (K_i + K_{i+1}) \theta_i - K_{i+1} \theta_{i+1} = 0 \quad \forall i \in [2, n-1]$$

$$I_n \ddot{\theta}_n - K_n \theta_{n-1} + (K_n + K_{n+1}) \theta_n = 0$$

Pour chercher les pulsations propres du système différentiel précédent, nous adoptons les solutions de la forme :

$$\theta_i = X_i \sin(\omega t + \varphi) ; \quad X_i : \text{sont les amplitudes relatives des vecteurs propres.}$$

La substitution de ces valeurs dans le système différentiel nous donne un système différentiel à  $n$  équations linéaires et homogènes en  $x_1, x_2, \dots, x_n$  qui n'est résoluble que si son déterminant est nul (d'après la théorie des équations linéaires)

### 3.4 - Choix d'une méthode de résolution du système différentiel

La recherche des pulsations propres des systèmes à 1, 2, 3 ou 4 degrés de liberté ne présente aucune difficulté sur le plan du calcul numérique ou analytique, par contre lorsque le nombre de degrés de liberté est grand, les méthodes classiques sont difficilement applicables, tel que la méthode de HOLZER que nous détaillerons par suite.

Pour cela on va choisir dans notre étude parmi toutes les méthodes celle de RUTISHAUSER relative aux matrices quasitriangulaire qui permet de calculer toutes les pulsations propres de torsion d'un système conservatif avec une rapidité importante et une précision acceptable.

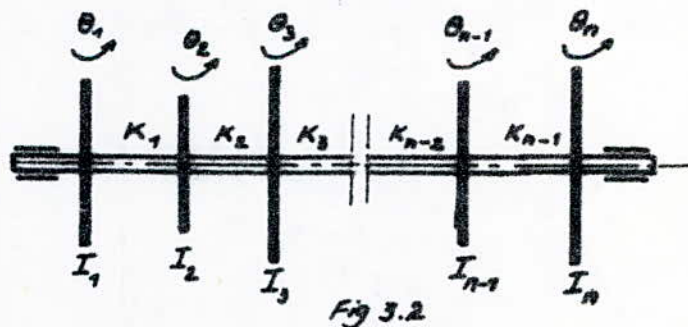
### 3.5\_Méthode de HOLZER

C'est en 1921 que HOLZER a proposé dans la revue *spring-verlog* (Berlin) une méthode de calcul des systèmes en régime harmonique stationnaire où les actions sont caractérisées par une amplitude et une pulsation.

C'est une méthode de discrétisation indiquée pour les milieux à structure en chaîne possédant une fréquence propre nulle. Elle permet de déterminer les fréquences propres du système sans avoir explicitement l'équation caractéristique. De plus, elle fournit directement les déformées puisqu'elle est fondée sur leur détermination.

#### - 3.51\_Théorie de la méthode

Soit un arbre libre portant  $n$  disques. (Figure 3.2)



Soient :

- $I_1, I_2, \dots, I_n$  : les moments d'inertie des masses en mouvement de rotation par rapport à l'axe de l'arbre.
- $K_1, K_2, \dots, K_{n-1}$  : les constantes des rigidités torsionnelles des tronçons d'arbre séparant deux disques.
- $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  : les angles de rotation de ces masses pendant la torsion.



Soient les quantités :

$K_1(\theta_1 - \theta_2)$  ;  $K_2(\theta_2 - \theta_3)$  ; ... ;  $K_{n-1}(\theta_{n-1} - \theta_n)$  : représentent les moments de torsion pour les longueurs précédentes des tronçons d'arbres.

On a : Le couple  $-K_1(\theta_1 - \theta_2)$  agit sur le premier disque.

Le couple  $-K_1(\theta_2 - \theta_1) - K_2(\theta_2 - \theta_3)$  agit sur le deuxième disque.

et ainsi de suite pour le reste des disques.

Les valeurs des couples sont égales aux moments d'inertie de chaque disque par leurs accélérations angulaires.

Donc les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 I_1 \ddot{\theta}_1 &= -K_1(\theta_1 - \theta_2) \\
 I_2 \ddot{\theta}_2 &= -K_1(\theta_2 - \theta_1) - K_2(\theta_2 - \theta_3) \\
 I_3 \ddot{\theta}_3 &= -K_2(\theta_3 - \theta_2) - K_3(\theta_3 - \theta_4) \\
 \text{-----} \\
 I_i \ddot{\theta}_i &= -K_{i-1}(\theta_i - \theta_{i-1}) - K_i(\theta_i - \theta_{i+1}) \quad \forall i \in [2, n-1] \\
 \text{-----} \\
 I_n \ddot{\theta}_n &= -K_{n-1}(\theta_n - \theta_{n-1})
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Si nous additionnons ces équations, nous obtiendrons :

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + I_2 \ddot{\theta}_2 + I_3 \ddot{\theta}_3 + \dots + I_i \ddot{\theta}_i + \dots + I_n \ddot{\theta}_n = 0$$

$$\text{ou : } \sum_{j=1}^n I_j \ddot{\theta}_j = 0 \tag{2}$$

Ce qui indique que le moment des quantités de mouvement du système par rapport à l'axe de l'arbre reste constant pendant la vibration (système libre en rotation). Cette hypothèse revient à exclure toute rotation de l'arbre considéré comme un solide rigide, et ne laisse substituer que le mouvement de vibration du à la torsion de l'arbre.



Les solutions prises pour les équations du système (1) sont de la forme :

$$\theta_1 = X_1 \sin(\omega t + \varphi) ; \theta_2 = X_2 \sin(\omega t + \varphi) ; \dots ; \theta_i = X_i \sin(\omega t + \varphi).$$

où :  $X_i$  : sont les amplitudes relatives

$\omega$  : pulsation naturelle d'oscillation ;  $\varphi$  : déphasage .

En les introduisant dans les équations (1) on aura le système suivant :

$$I_1 X_1 \omega^2 = K_1 (X_1 - X_2)$$

$$I_2 X_2 \omega^2 = K_1 (X_2 - X_1) - K_2 (X_3 - X_2)$$

---


$$I_{n-1} X_{n-1} \omega^2 + \dots + I_n X_n \omega^2 = K_{n-1} (X_{n-1} - X_n)$$

de ces expressions nous déduisons les relations suivantes :

$$X_2 = X_1 - \frac{\omega^2 I_1 X_1}{K_1}$$

$$X_3 = X_2 - \frac{\omega^2 [I_1 X_1 + I_2 X_2]}{K_2}$$

d'où la forme de récurrence suivante :

$$X_n = X_{n-1} - \frac{\omega^2 \sum_{j=1}^{n-1} I_j X_j}{K_{n-1}} \quad (3)$$

Remplaçons ces relations dans l'équation (2) on aura :

$$\omega^2 \sum_{j=1}^{n-1} I_j X_j = 0 \quad (4)$$

Donc l'élimination de  $X_1; X_2; \dots; X_n$  entre les équations donne une équation du  $n^{\text{ième}}$  degré en  $\omega^2$  qui est appelée "équation aux pulsation". Cette équation admet une racine  $\omega^2 = 0$  (c'est à dire que l'arbre est libre en torsion) et  $(n-1)$  solutions qui correspondent aux  $(n-1)$  modes principaux de vibration du système .

### 3.52 - Principe de la méthode .

Le principe de HOLZER pour la détermination des modes et des pulsations propres est le suivant :

Choisissons une valeur aussi approchée que possible de la pulsation propre cherchée . Pour cela, on fait une approximation de la première valeur propre par le procédé des approximations successives . En partant d'une hypothèse grossière sur la fréquence , cette hypothèse basée sur la plus basse des fréquences , peut consister à remplacer un nombre de disques par un seul disque , dont le moment d'inertie est la somme de tous les moments d'inertie des disques regroupés et dont la rigidité torsionnelle est égale à la résultante des inverses des rigidités des tronçons d'arbres séparant les disques . C'est à dire que :

$$I = \sum_{i=1}^n I_i \quad \text{et} \quad \frac{1}{K} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{K_i} \quad n: \text{d'ont le nombre de disque .}$$

Donc on peut situer la première pulsation propre en assimilant l'arbre à un système de deux degrés de liberté dont la pulsation peut être déterminer par :

$$\omega_1 = \sqrt{K \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}}$$

$I_1, I_2$  : moments d'inertie des deux disques du système réduit .

$K$  : rigidité torsionnelle de l'arbre séparant les deux disques .

Donc si  $\omega_1$  est la pulsation propre approchée, le mouvement n'est pas tout à fait une vibration libre .

Supposons arbitrairement que l'amplitude angulaire du premier disque soit égale à 1 radian, donc le couple nécessaire pour faire



vibrer ce disque est :  $C = -I_1 \ddot{\theta}_1 = I_1 \omega_1^2 \sin(\omega_1 t + \varphi)$ .

ce couple ne peut provenir que de l'arbre situé à droite de  $I_1$ ; si  $K_1$  est la rigidité torsionnelle de cet arbre, son angle de torsion est :

$$(I_1/K_1) \omega_1^2 \sin(\omega_1 t + \varphi) \quad (\text{à partir de } I_1 \ddot{\theta}_1 = K_1 \theta_1).$$

qui a pour valeur maximale  $(I_1/K_1) \omega_1^2$ . Puisque l'amplitude du disque n°1 est de 1 radian et que l'arbre se tord de  $(I_1/K_1) \omega_1^2$  radians; le disque n°2 doit vibrer avec une amplitude de  $(1 - \frac{I_1}{K_1} \omega_1^2)$  radians, ce qui nécessite un couple de :  $I_2 \omega_1^2 (1 - \frac{I_1}{K_1} \omega_1^2)$  qui est dû à la différence entre les couples élastiques de l'arbre à gauche et à droite du disque. (obtenu à partir de l'équation :  $I_2 \ddot{\theta}_2 = I_2 \omega_1^2 x_2 \sin(\omega_1 t + \varphi)$ .)

Puisque nous connaissons le couple dans le tronçon d'arbre 1, nous pourrions calculer le couple dans le tronçon d'arbre 2, on calculera alors l'angle de torsion  $\theta_2$ , l'amplitude  $x_3$ , etc...

Ainsi de proche en proche jusqu'au dernier disque.

Comme pour un  $\omega_1$  différent de  $\omega_p$  (pulsation propre), il subsiste un couple résiduel  $\mathcal{E}(\omega^2)$  qu'il faudra minimiser afin de vérifier la relation (\*): 
$$\omega^2 \sum_{j=1}^{n-1} I_j x_j = \mathcal{E}(\omega^2)$$

Si on trouve  $\mathcal{E}(\omega^2) = 0$  alors on peut dire que  $\omega_1$  choisie est une pulsation propre. La grandeur et le signe de  $\mathcal{E}(\omega^2)$  nous indiquent dans quel sens et de combien à peu près nous nous sommes trompés en prenant  $\omega_1$  comme première valeur approchée.

On recommencera le calcul avec une nouvelle valeur de  $\omega$  jusqu'à ce que l'on trouve  $\mathcal{E}(\omega^2) \approx 0$



On interpôle linéairement les deux valeurs approchées dès qu'il apparaît un changement de signe de  $\xi(\omega^2)$  pour mieux encadrer la valeur de la pulsation propre cherchée.

Le comportement du couple résiduel peut se représenter par la figure 3.3.



Fig 3.3

Nous voyons que la courbe passe par l'origine pour  $(\omega^2=0)$  et coupe l'axe  $\omega^2$  aux abscisses donnant les carrés des pulsations propres.

Remarque : Il existe une dizaine de méthodes de calcul numériques manuelles toutes issues de la méthode de HOLZER, pour déterminer les pulsations propres de lignes d'arbres, leurs programmation, possible, conduit généralement à des temps de calcul sur ordinateur important, la précision numérique n'est pas assurée.







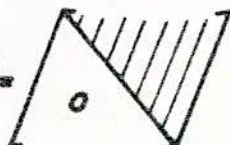


Nous allons adapter l'algorithme de Rutishauser qui s'applique aux matrices particulières dites matrices quasitriangulaires.

### §.62 - Algorithme de Rutishauser

soit  $[C_0]$  une matrice quasitriangulaire:  $[C_0] =$  

soit  $[R]$  une matrice triangulaire inférieure:  $[R] =$  

soit  $[S]$  une matrice triangulaire supérieure:  $[S] =$  

D'après GAUSS, On peut décomposer une matrice quasitriangulaire en un produit  $[R] \times [S]$  d'une façon unique si l'une des matrices  $[R]$  ou  $[S]$  possède des 1 sur sa diagonale principale.

Sous cette condition on peut donc construire la suite matricielle suivante:

$$[C_0] = [R_1] \times [S_1]$$

$$[C_1] = [S_1] \times [R_1] = [R_2] \times [S_2]$$

---


$$[C_n] = [S_n] \times [R_n] = [R_{n+1}] \times [S_{n+1}]$$

Les propriétés des éléments de cette suite sont:

-  $[C_n]$  et  $[C_0]$  ont les mêmes valeurs propres.

-  $[C_1]; [C_2]; \dots; [C_n]$  sont des matrices quasitriangulaires.

- Lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $[C_n]$  tend vers une matrice triangulaire inférieure.

- Les valeurs propres apparaissent donc sur la diagonale principale.

### 3.63 - Application de l'algorithme de Rutishauser.

3.631 - Détermination des éléments des matrices  $[R]$  et  $[S]$ :

Soit:  $[C^{\circ}] = [R] \times [S]$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 C_1^{\circ} & \alpha_2^{\circ} & & \\
 \hline
 1 & C_2^{\circ} & \alpha_3^{\circ} & 0 \\
 \hline
 & & & \\
 \hline
 0 & 1 & C_n^{\circ} & \alpha_n^{\circ} \\
 \hline
 & & 1 & C_n^{\circ} \\
 \hline
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 b_1 & & & \\
 \hline
 1 & b_2 & & 0 \\
 \hline
 & & & \\
 \hline
 0 & 1 & b_{n-1} & \\
 \hline
 & & 1 & b_n \\
 \hline
 \end{array}
 & \times &
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 1 & \beta_2 & & \\
 \hline
 & 1 & \beta_3 & 0 \\
 \hline
 & & & \\
 \hline
 0 & 1 & \beta_n & \\
 \hline
 & & & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Nous obtenons les relations suivantes:

$$C_1^{\circ} = b_1$$

$$\alpha_2^{\circ} = b_1 \times \beta_2$$

$$C_2^{\circ} = \beta_2 + b_2$$

$$\alpha_3^{\circ} = b_2 \times \beta_3$$

$$C_n^{\circ} = \beta_n + b_n$$

$$\alpha_n^{\circ} = b_{n-1} \times \beta_n$$

les éléments  $b_i$  et  $\beta_i$  sont donc obtenus à partir des éléments  $C_i$  et  $\alpha_i$  de la matrice  $[C^{\circ}]$  par:

$$b_1 = C_1^{\circ}$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha_2^{\circ}}{b_1}$$

$$b_2 = C_2^{\circ} - \beta_2$$

$$\beta_3 = \frac{\alpha_3^{\circ}}{b_2}$$

$$b_i = C_i^{\circ} - \beta_i$$

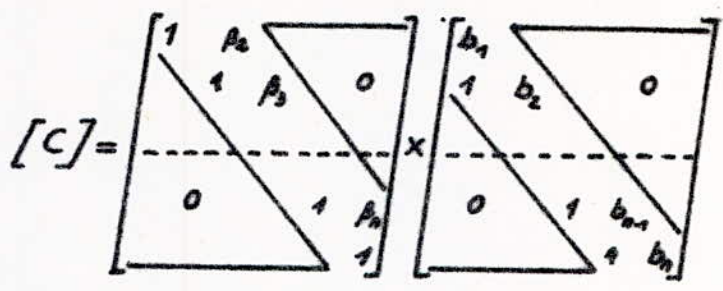
$$\beta_{i+1} = \frac{\alpha_{i+1}^{\circ}}{b_i}$$

$$b_n = C_n^{\circ} - \beta_n$$

3.632 - Calcul des éléments de la matrice  $[C]$ .



Soit:  $[C] = [S] \times [R]$



Les éléments  $C_{ij}$  de la matrice sont donnés par les relations:

$$C_{i,i} = b_i + \beta_{i+1} \quad \forall i \in [1, n-1]$$

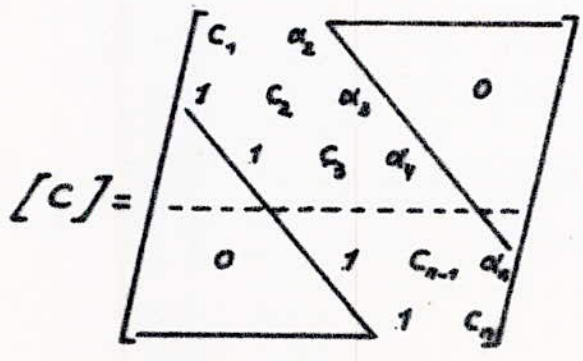
$$C_{n,n} = b_n$$

$$C_{i+1,i} = 1 \quad \forall i \in [1, n-1]$$

$$C_{i,i+1} = \beta_{i+1} \times b_i \quad \forall i \in [1, n-1]$$

$$C_{i,j} = 0 \quad \begin{cases} \text{si } i > j+2 \\ \text{ou } j > i+2 \end{cases}$$

La matrice  $[c]$  obtenue est une matrice tribande possédant des 1 sous la diagonale principale comme la matrice  $[c^*]$  soit :



### 3.633 - Relations entre les éléments de $[c]$ et $[c^0]$ .

Elles sont obtenues à partir des relations précédentes que nous résumons ci-dessous :

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= c_1^0 \\ b_i &= c_i^0 - \beta_i \\ \beta_{i+1} &= \frac{\alpha_{i+1}}{b_i} \end{aligned} \right\} \quad [I]$$

et :

$$\left. \begin{aligned} c_i &= \beta_{i+1} + b_i \\ \alpha_{i+1} &= \beta_{i+1} \times b_{i+1} \\ c_n &= b_n \end{aligned} \right\} \quad [II]$$

### 3.64 - Organisation des calculs.

#### 3.641 - Description de l'algorithme.

Les données sont :

- Les éléments  $\alpha_i^0$  et  $c_i^0$  de la matrice de départ  $[c^0]$ .

On calcule :

- Les  $b_i$  et  $\beta_i$  des matrices  $[R]$  et  $[S]$  en fonction des  $\alpha_i^0$  et  $c_i^0$  (à partir de I).
- Les  $c_i$  et  $\alpha_i$  de la matrice  $[c]$  en fonction des  $b_i$  et  $\beta_i$  (à partir de II).
- On transpose le tableau  $[c]$  dans le tableau  $[c^0]$ .

d. On examine les termes situés au-dessus de la diagonale principale ou on examine la variation relative des termes de la diagonale principale. Deux cas peuvent se présenter :

- .. Les  $\alpha_i^0$  sont pratiquement nuls (où la variation relative des termes de la diagonale principale est négligeable); alors les  $C_i^0$  sont les valeurs propres de la matrice de départ.
- .. Les  $\alpha_i^0$  sont différents de zéro (où la variation relative des termes de la diagonale principale est importante); alors on recommence le même processus à partir de a.

### 3.642. Organigrammes .

Les noms des variables indicées seront notés :

$b(I)$  pour  $b_i$

$c(I)$  pour  $C_i$

$a(J)$  pour  $\alpha_j$

$\beta(J)$  pour  $\beta_j$

etc ...

#### 3.6421 - premier organigramme (Fig 3.4) :

Afin de limiter le nombre de mémoires utilisées au cours du calcul on remarque que :

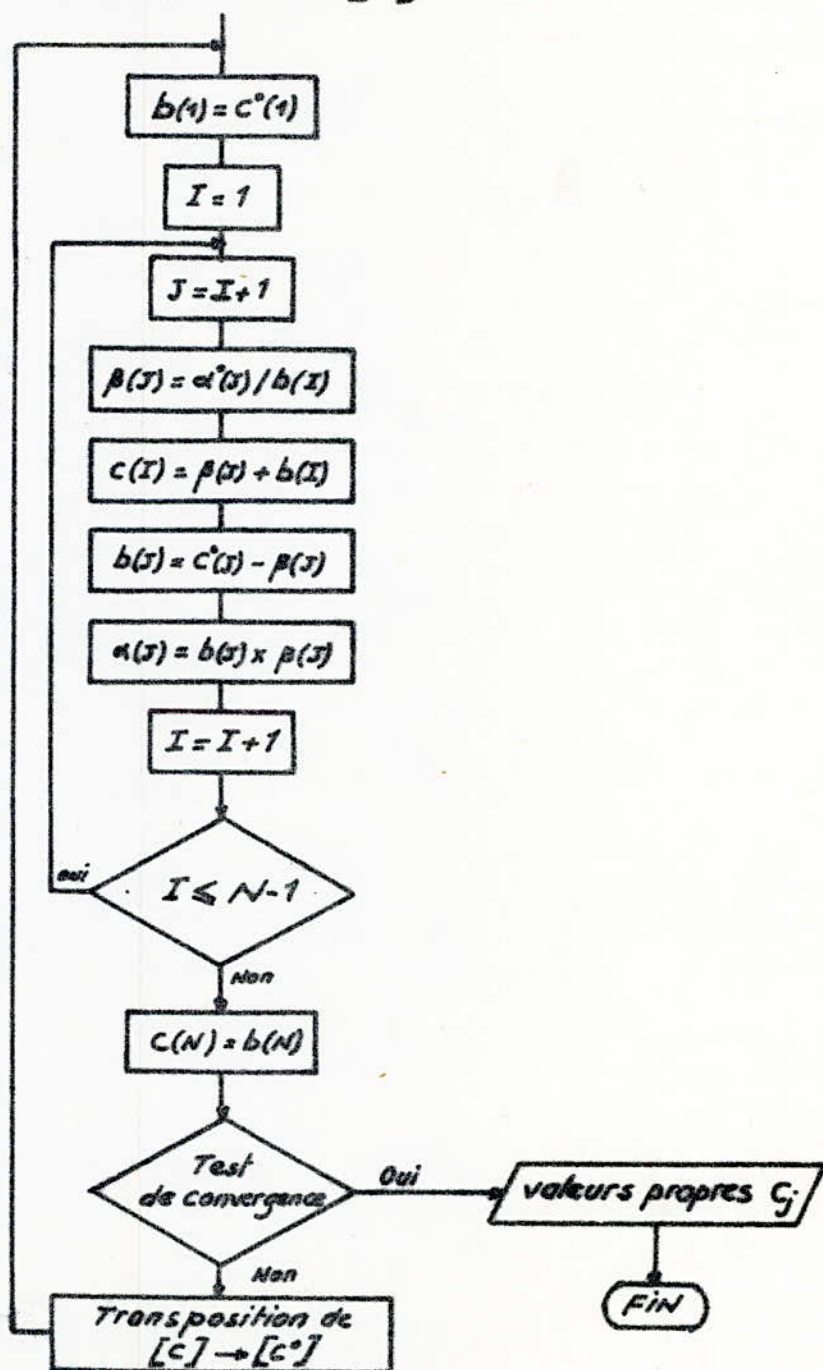
- Le contenu de  $b(1) \dots b(I)$  peut être détruit après le calcul de  $c(I)$ .
- Le contenu de  $\beta(J)$  peut être détruit lorsque  $a(J)$  est calculé.



- On peut détruire le contenu de  $c^{\circ}(x)$  lorsqu'il est calculé.

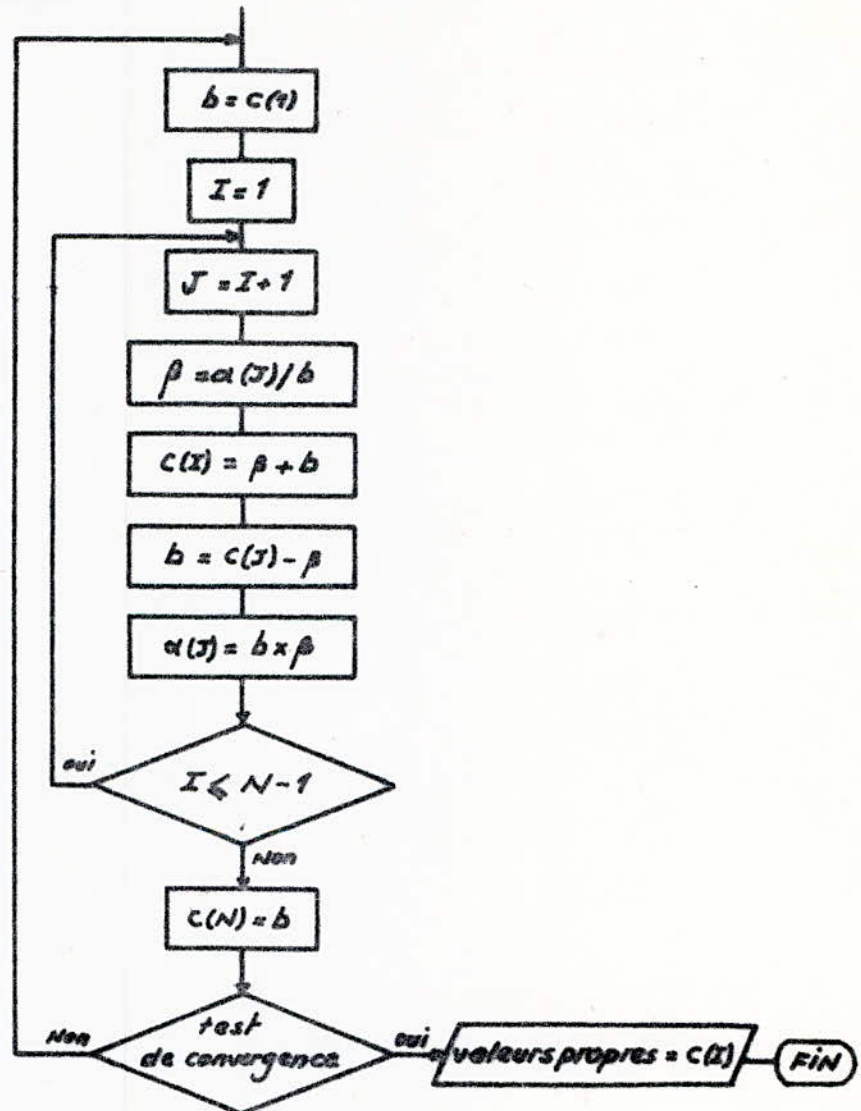
- il est de même pour  $a^{\circ}(x)$ .

On peut donc utiliser des variables non indicées pour  $b$  et  $\beta$  et la transposition des tableaux  $[c^{\circ}]$  et  $[c]$  peut se faire au fur et à mesure du calcul des éléments de  $[c]$ .



3.6422 - second organigramme (Fig 3.5) :

L'organigramme peut être simplifié en tenant compte des remarques précédentes, il prend l'aspect suivant :



A partir de cet organigramme nous avons créé le programme final qui serait donné par la suite.

Ce programme permet de déterminer les valeurs des pulsations propres des lignes d'arbres non ramifiées.

### 3.65. Test de convergence .

Les termes  $C_i$  ; situés sur la diagonale principale, ne seront strictement égaux aux valeurs propres qu'après un nombre infini d'itérations

La précision désirée pour le calcul des pulsations propres est telle qu'il suffit d'examiner la variation de la différence entre l'élément  $C_i$ , calculé à l'itération  $K$ , et le même élément, calculé à l'itération  $K+1$ .

Le test d'arrêt peut être formulé de la façon suivante .

$$\frac{\sum_{i=1}^n |C_i^K - C_i^{K+1}|}{\sum_{i=1}^n C_i^{K+1}} < \varepsilon$$

En prenant  $\varepsilon = 10^{-8}$ , les valeurs propres de la matrice sont obtenues avec une précision suffisante pour le calcul des pulsations propres des lignes d'arbres.

### 3.66. Déformées modales .

Les valeurs propres de la matrice aux pulsations étant connues, il est possible de déterminer les vecteurs propres correspondants, Ces derniers caractérisent les déformées modales (ou les amplitudes relatives des disques) des divers modes de vibration.



La matrice  $\bar{o}$  utiliser pour le calcul des composantes des vecteurs propres, est celle définie par le produit  $[M]^{-1}[L]$ .

Les composantes des vecteurs propres étant définies  $\bar{o}$  un coefficient près il est donc nécessaire de se fixer une composante par exemple; l'amplitude du disque  $n^{\circ}1$  sera prise égale  $\bar{o}$  1 radian.

Les composantes des vecteurs propres sont obtenues à partir de l'équation :

$$[[C] - \omega_i^2 [1]](X_i) = (0).$$

avec :

- $\omega_i$  : est la pulsation propre  $n^{\circ}i$
- $[1]$  : est la matrice unité
- $(X_i)$  : est matrice colonne des composantes  $X_{i,1}; X_{i,2}; \dots; X_{i,n}$  du vecteur propre associé  $\bar{o}$  la valeur propre  $\omega_i^2$ .
- $(0)$  : est la matrice colonne composée d'éléments tous nuls.

Nous obtenons ainsi les  $n$  relations suivantes :

$$(i) \quad \left( \frac{K_1 + K_2}{I_1} - \omega_i^2 \right) X_{i,1} - \frac{K_2}{I_1} X_{i,2} = 0$$

$$(j) \quad -\frac{K_j}{I_j} X_{i,j-1} + \left( \frac{K_j + K_{j+1}}{I_j} - \omega_i^2 \right) X_{i,j} - \frac{K_j}{I_j} X_{i,j+1} = 0 \quad \forall j \in [2, n-1]$$

$$(n) \quad -\frac{K_n}{I_n} X_{i,n-1} + \left( \frac{K_n + K_{n+1}}{I_n} - \omega_i^2 \right) X_{i,n} = 0$$

en posant :  $X_{i,1} = 1$  radian nous obtenons :

$$X_{i,2} = \frac{1}{K_2} (K_1 + K_2 - I_1 \omega_i^2) \cdot 1$$

$$x_{i,j+1} = \frac{1}{K_{j+1}} \left[ (x_{ij} - x_{i,j-1}) K_j + (K_{j+1} - I_j \omega_i^2) x_{ij} \right] \quad \forall j \in [2, n-1].$$

La relation (n) inutilisée est automatiquement vérifiée, elle permet de contrôler la précision des calculs numériques.

*Remarque :* la méthode de Rutishauser, à convergence simple, peut être programmée sur petite calculatrice, car elle nécessite un faible nombre de registres.

### 3.7. Exemple de calcul des pulsations propres de lignes d'arbres.

3.7.1. calcul des pulsations propres d'un vilebrequin quatre coudes par les deux méthodes.

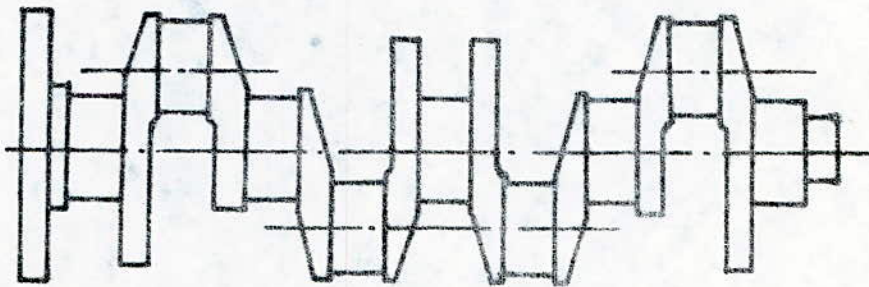


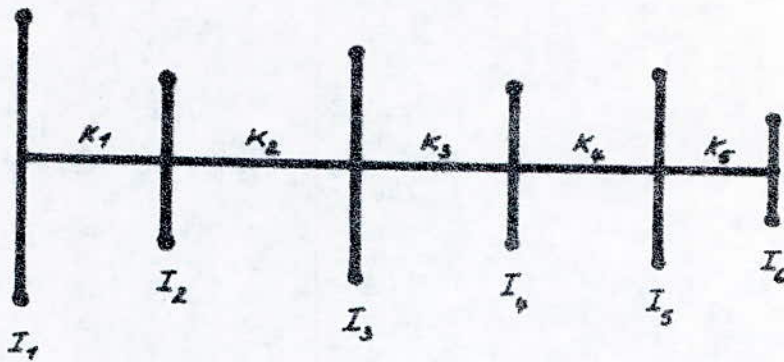
Fig 3.4

Les moments d'inerties des éléments du vilebrequin sont consignés dans le tableau ci-dessous.

élément du vilebrequin	Moment d'inertie en $N.m.s^2$
Tourillon	$0,16 \cdot 10^{-3}$
Bras extrême avec contre poids	$0,30 \cdot 10^{-2}$
Bras central avec contre poids	$0,302 \cdot 10^{-2}$
Bras sans contre poids	$0,102 \cdot 10^{-2}$
Bras à deux chen freins	$0,745 \cdot 10^{-2}$
Maneton	$0,7 \cdot 10^{-3}$
Extrémité côté poulie	$0,4 \cdot 10^{-4}$
Volant.	0,15018



Le modèle du système construit est :



Les caractéristiques inertielles et torsionnelles du modèle sont données dans le tableau suivant :

INERTIES (N.m.s <sup>2</sup> )	RAIDEURS (N.m/rd)
$I_1 = 0,15010$	$K_1 = 0,646 \cdot 10^6$
$I_2 = 0,488 \cdot 10^{-2}$	$K_2 = 0,378 \cdot 10^6$
$I_3 = 0,4625 \cdot 10^{-2}$	$K_3 = 0,378 \cdot 10^6$
$I_4 = 0,4625 \cdot 10^{-2}$	$K_4 = 0,378 \cdot 10^6$
$I_5 = 0,488 \cdot 10^{-2}$	$K_5 = 0,172 \cdot 10^6$
$I_6 = 0,120 \cdot 10^{-3}$	

Tableau. 2.

### a. Méthode de HOLZER.

On va commencer à faire une hypothèse sur les pulsations des deux premiers modes. pour cela on va regrouper deux coudes du vilebrequin ensemble, deux autres avec l'élément de l'extrémité côté poulie, et ramener à une seule les élasticités (rigidités) de l'ensemble du vilebrequin tel que :

$$\frac{1}{K'} = \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_5} + \frac{1}{K_3} + \frac{1}{K_4} \quad ; \quad I_2' = I_2 + I_3 \quad ; \quad I_3' = I_4 + I_5 + I_6$$

Ceci nous conduit au modèle suivant : Fig.

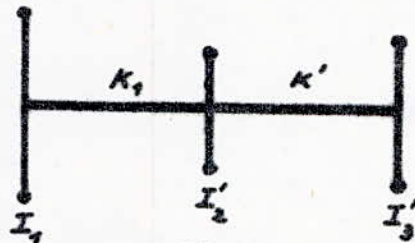


Fig. 3.5

avec ces trois disques, en appliquant l'équation aux pulsations donnée au chapitre 3 on obtient l'équation du 3<sup>ème</sup> degré en  $\omega^2$  donnée par :

$$\omega^2 \left[ I_1 I_2' I_3' \omega^4 - [(I_1 I_2' + I_1 I_3') K_1 + (I_2' I_3' + I_2 I_3) K'] \omega^2 + K_1 K' (I_1 + I_2' + I_3') \right] = 0$$

L'une des racines étant nulle (arbre libre en torsion), les deux autres racines sont celles de l'équation du second degré en  $\omega^2$ .

avec les valeurs du tableau. 2 on trouve que :

$$K' = 0,0654 \cdot 10^6$$

$$I_2' = 0,9505 \cdot 10^{-2}$$

$$I_3' = 0,9625 \cdot 10^{-2}$$

en introduisant ces valeurs dans l'équation précédente et en la résolvant on trouve les valeurs des pulsations :

$$\omega_1 = 2560 \text{ rd/s.}$$

$$\omega_2 = 8922 \text{ rd/s.}$$

Si  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les pulsations propres du système, nous trouverons  $\xi(\omega^2) \approx 0$ , ( $\xi(\omega^2) = \omega^2 \sum_{j=1}^{n-1} X_j I_j$ ), mais elles ne les sont pas; ce qui nous oblige à faire des tâtonnements avec des petits pas jusqu'à ce que  $\xi(\omega^2)$  subit un changement de signe dont on minimisera sa valeur afin de mieux s'approcher de la pulsation propre cherchée.

Pour cela on se servira d'un programme qui déterminera les valeurs les plus proches des pulsations propres du système.

Afin de mieux saisir les résultats de la méthode. Nous allons dresser dans des tableaux; les résultats des trois premiers modes de vibration.

Nous avons commencé à faire des tâtonnements à partir des valeurs  $\omega_1$  et  $\omega_2$  déjà trouvées, mais ceci nous a conduit à avoir un grand nombre de tableaux avant que le changement de  $\xi(\omega^2)$  se produise, pour cela nous avons dressé que les trois tableaux où  $\xi(\omega^2)$  a subit son changement de signe.

Donc, nous pouvons déduire à partir de ces tableaux les valeurs des pulsations cherchées.



Les valeurs des pulsations propres pour les trois premiers modes seront donc :

$$\omega_1 \approx 3495,3 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 \approx 5728,25 \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 \approx 14526,8 \text{ rad/s}.$$

Avec la même procédure nous pouvons aller jusqu'au dernier mode de vibration.

### b. Méthode de Rutishauser.

Ce même exemple est traité par la méthode de Rutishauser. Les résultats sont obtenus à l'aide du programme RUT qui donne directement les valeurs des pulsations propres du système.

(voir page 51).

Avec cette méthode, nous traitons l'exemple du groupe motopropulseur (figuré dans la page 58).

```

1 | =====
2 |                                     PROGRAMME HOL
3 |                                     =====
4 |
5 |      CALCUL DES PULSATIONS PROPRES ET DEFORMEES MODALES DES
6 |      LIGNES D'ARBRES NON RAMIFIEES EN VIBRATION DE TORSION
7 |      METHODE DE HOLZER
8 |      =====

```

```

10 DIM AI(30),AK(30),X(30),S(30),E(30)
20 INPUT "NOMBRE DE DISQUES ";N
30 FOR I=1 TO N
40 PRINT " I=";I
50 INPUT " AI(I)=";AI(I)
60 INPUT " AK(I)=";AK(I)
70 NEXT I
80 INPUT " OMEGA=";W
85 INPUT " PAS= ";P
88 W=W+P
90 X(1)=1
100 S(1)=AI(1)*X(1)
103 E(1)=(W^2)*S(1)
105 FOR I=2 TO N
115 S(I)=S(I-1)+AI(I-1)*X(I-1)
120 X(I)=X(I-1)-((W^2)*S(I))/AK(I-1)
125 E(I)=(W^2)*S(I)
128 NEXT I
257 PRINT " W ";W
258 PRINT " I", "AI(I)", "AK(I)", "X(I)", "S(I)", "E(I)"
260 FOR I=1 TO N
262 PRINT I , AI(I), AK(I), X(I), S(I),E(I)
268 NEXT I
270 PRINT " LA PULSATION TROUVEE EST W= ";W
280 INPUT " VOULEZ VOUS CHANGER LA VALEUR DE OMEGA OUI/NON ";L$
290 PRINT
300 IF L$="NON" THEN 306
303 INPUT " NOUVELLE VALEUR DE OMEGA EST=";W
305 PRINT
306 INPUT " VOULEZ VOUS CHANGER LA VALEUR DU PAS OUI/NON ";M$
307 PRINT
308 IF M$="NON" THEN 340
310 INPUT " NOUVELLE VALEUR DU PAS EST=";P
315 PRINT
320 W=W+P
325 GO TO 90
330 PRINT
340 PRINT " FIN "
350 END

```



RESULTATS DES TROIS TATONNEMENTS POUR LE PREMIER MODE

=====

LA PULSATION CHOISIE EST W 3494 (rd/s)

=====

I	INERT(I)	RAID(I)	X(I)	S(I)	E(I)
1	.1501	646000	1	.1501	.183242E+07
2	.00488	378000	-4.67314	.3002	.366485E+07
3	.004625	378000	-13.632	.277395	.338645E+07
4	.004625	378000	-20.5546	.214347	.261675E+07
5	.00488	172000	-24.407	.119282	.14562E+07
6	.00012	0	-24.4195	.175826E-03	2146.49

=====

AVEC W=3495 (rd/s)

=====

I	INERT(I)	RAID(I)	X(I)	S(I)	E(I)
1	.1501	646000	1	.1501	.183348E+07
2	.00488	378000	-4.6764	.3002	.366695E+07
3	.004625	378000	-13.6399	.277379	.33882E+07
4	.004625	378000	-20.5648	.214295	.261762E+07
5	.00488	172000	-24.4162	.119183	.145582E+07
6	.00012	0	-24.4184	.316277E-04	386.334

=====

AVEC W= 3495.5 (rd/s)

=====

I	INERT(I)	RAID(I)	X(I)	S(I)	E(I)
1	.1501	646000	1	.1501	.1834E+07
2	.00488	378000	-4.67802	.3002	.3668E+07
3	.004625	378000	-13.6438	.277371	.33890E+07
4	.004625	378000	-20.5699	.214269	.26181E+07
5	.00488	172000	-24.4207	.119133	.14556E+07
6	.00012	0	-24.4179	.40233E-04	-491.59



4

RESULTATS POUR LE DEUXIEME MODE

=====

PREMIER TATONNEMENT ;W=9727 (rd/s)

=====

I	INERT(I)	RAID(I)	X(I)	S(I)	E(I)
1	.1501	646000	1	.1501	.142016E+08
2	.00488	378000	-42.9679	.3002	.284033E+08
3	.004625	378000	-65.6245	.9052E-01	.854617E+08
4	.004625	378000	-12.3107	-.212997	-.201526E+08
5	.00488	172000	55.2546	-.269934	-.255397E+08
6	.00012	0	55.415	-.2915E-03	-27582.6

=====

DEUXIEME TATONNEMENT W=9728.5 (rd/s)

=====

I	INERT(I)	RAID(I)	X(I)	S(I)	E(I)
1	.1501	646000	1	.1501	.14206E+08
2	.00488	378000	-42.9814	.3002	.28412E+08
3	.004625	378000	-65.6284	.9045E-01	.85606E+08
4	.004625	378000	-12.2772	-.213081	-.201668E+08
5	.00488	172000	55.2911	-.269863	-.255408E+08
6	.00012	0	55.3145	-.424981E-04	-4022.18

=====

TROISIEME TATONNEMENT: W= 9729 (rd/s)

=====

I	INERT(I)	RAID(I)	X(I)	S(I)	E(I)
1	.1501	646000	1	.1501	.142075E+08
2	.00488	378000	-42.986	.3002	.284149E+08
3	.004625	378000	-65.6298	.904284E-01	.855935E+07
4	.004625	378000	-12.266	-.213109	-.201715E+08
5	.00488	172000	55.3034	-.269839	-.255412E+08
6	.00012	0	55.2808	.410676E-04	3887.19

RESULTATS POUR LE TROISIEME MODE

PREMIER TATONNEMENT: W=14526 (rd/s)

I	INERT(I)	RAID(I)	X(I)	S(I)	E(I)
1	.1501	646000	1	.1501	.31678E+08
2	.00488	378000	-97.0551	.3002	.633436E+08
3	.004625	378000	- 2.24476	-.173429	-.365943E+08
4	.004625	378000	97.1975	-.174561	-.368332E+08
5	.00488	172000	-56.2986	.274977	.580215E+08
6	.00012	0	-56.5933	.24023E-03	50691

DEUXIEME TATONNEMENT: W=14526.5 (rd/s)

I	INERT(I)	RAID(I)	X(I)	S(I)	E(I)
1	.1501	646000	1	.1501	.31674E+08
2	.00488	378000	-97.0618	.3002	.633479E+08
3	.004625	378000	-.226501	-.173462	-.366038E+08
4	.004625	378000	97.1936	-.174509	-.368248E+08
5	.00488	172000	-56.3319	.275011	.580326E+08
6	.00012	0	-56.469	.11176E-03	23583.2

TROISIEME TATONNEMENT: W= 14527 (rd/s)

I	INERT(I)	RAID(I)	X(I)	S(I)	E(I)
1	.1501	646000	1	.1501	.316762E+08
2	.00488	378000	-97.0686	.3002	.633523E+08
3	.004625	378000	-.208237	-.173495	-.366132E+08
4	.004625	378000	97.1898	-.174458	-.368165E+08
5	.00488	172000	-56.3651	.275045	.580438E+08
6	.00012	0	-56.3445	-.167787E-04	-3540.87



# PROGRAMME RUT

Le programme permet de calculer toutes les pulsations propres et déformées modes en vibration de torsion d'une ligne d'arbres non ramifiée.

## 4.1 - Liste des données

$N$ : Nombre de disques du modèle.

$\epsilon$ : Valeur minimale, pour laquelle on arrête les calculs, de la variation relative des éléments de la diagonale principale de la matrice  $[c]$  d'une itération à l'autre. ( $\epsilon = 10^{-8}$ ).

$INERT(I); I=1, N$ : Valeurs des moments d'inerties des disques du modèle. (unité:  $N.m.s^2$ ).

$RAID(I); I=1, N+1$ : Rigidités torsionnelles des tronçons d'arbres séparant deux disques du modèle (unité:  $N.m/rod$ ).

## 4.2 - Noms de variables

$C(I)$ : Tableau des éléments de la diagonale principale ( $I=1, N$ ) de la matrice  $[c]$ .

$ALPHA(I)$ : Tableau des éléments de la diagonale principale de la matrice  $[c]$ ;  $[I=2, N]$

$D(I)$ : Tableau des éléments de la diagonale principale de la matrice  $[c]$  calculée à l'itération précédente.



A et B : éléments des matrices  $[R]$  et  $[S]$

S1 : somme de la variation de chaque élément de la diagonale principale de l'itération  $j$  à l'itération  $j+1$ .

S2 : somme des éléments de la diagonale principale à l'itération  $j+1$ .

Q : variation relative des éléments de la diagonale principale de l'itération  $j$  à l'itération  $j+1$ . (Test d'arrêt ou de convergence).

OM(II) : Tableau des pulsations propres (en rd/s).

TM(II) : Tableau des pulsations propres (en tr/min).

X(I,J) : Tableau des composantes des vecteurs propres.

I : numéro du mode propre.

J : numéro du disque

ITYP : si ITYP = 1 ; la ligne d'arbre est libre à ses deux extrémités.

si ITYP = 2 ; l'une, ou même des extrémités de la ligne d'arbre est encastrée.

#### 4.3. Structure du programme.

Les opérations sont faites dans l'ordre suivant :

a. Lecture des données : N ; EPSI ; INERT(I) ; RAID(I) ;

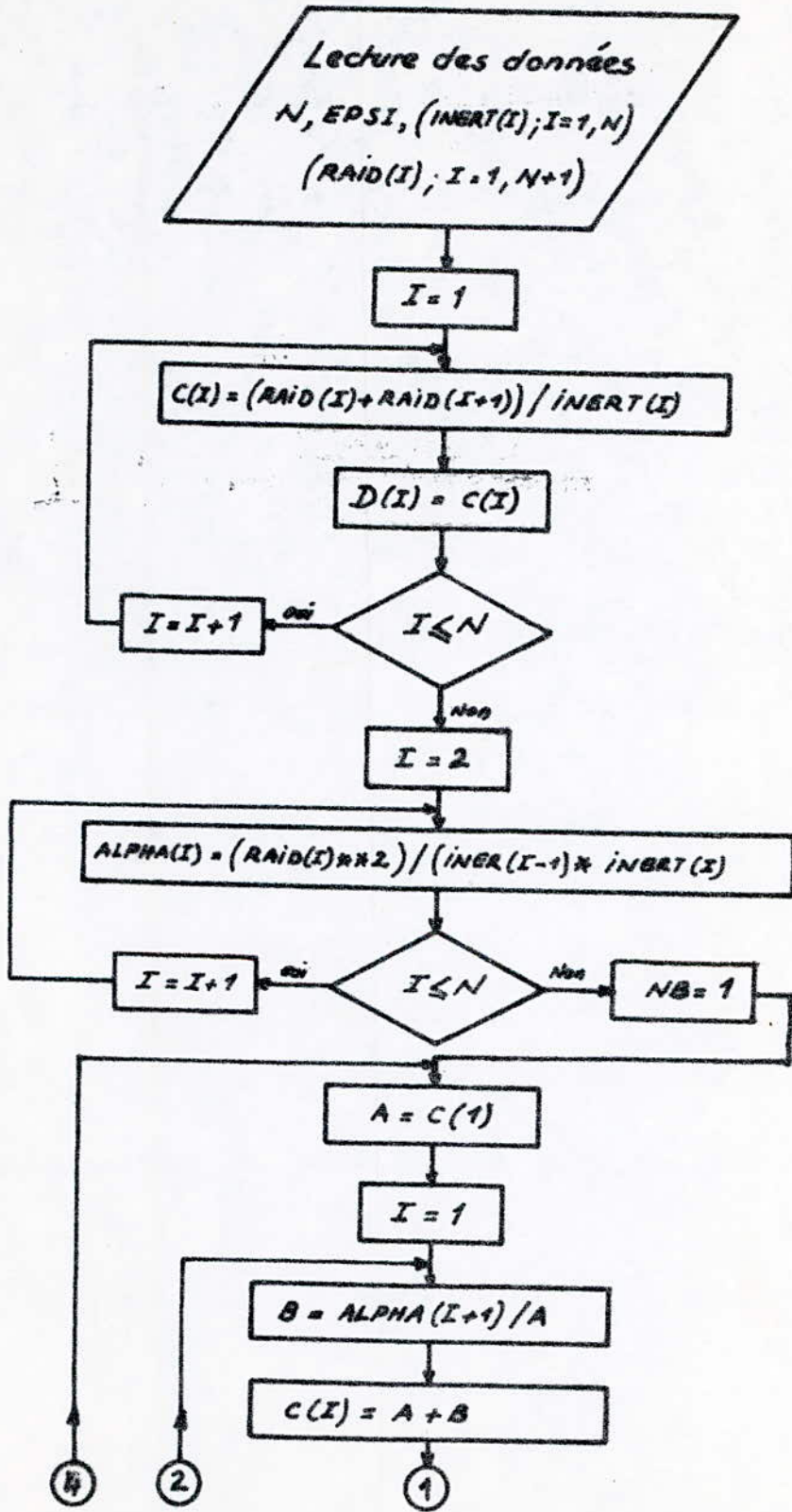
b. Calcul des éléments  $c(I)$  et  $ALPHA(I)$  de la matrice  $[C]$ .

Les éléments  $c$  de la diagonale principale de la matrice  $[C]$  sont rangés dans le tableau  $c(I)$  puis dans le tableau  $\alpha(I)$  afin d'être conservés jusqu'au test de convergence.

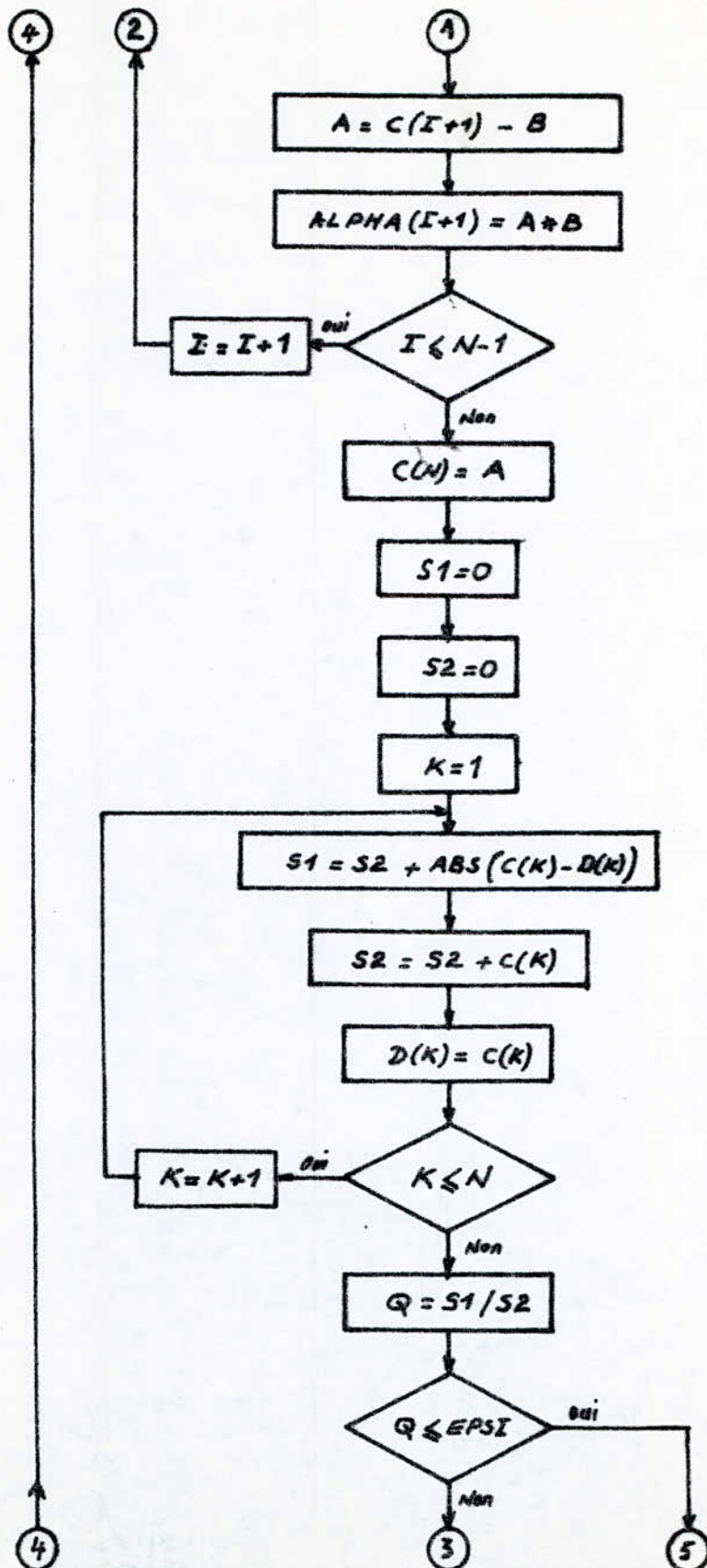
- les éléments et situés au dessus de la diagonale principale de la matrice  $[C]$ , sont rangés dans le tableau  $ALPHA(I)$ .
- c. Construction des éléments de la suite matricielle de Rutishauser.
  - d. Calcul de la variation relative des éléments  $c$  entre l'itération en cours et la précédente.
  - e. Rangement dans le tableau  $D$  des éléments  $c$  de cette itération en vue du calcul de la variation relative des éléments  $c$  au cours de la prochaine itération.
  - f. Test de convergence sur la variation relative des éléments  $c$ . s'il est positif on passe à l'opération suivante, sinon, on recommence l'opération précédente.
  - g. Test de sécurité sur le nombre d'itération (prenons 100 itérations).
  - h. Calcul des pulsations propres. Elles sont égales aux racines carrées des éléments diagonaux  $c(I)$  de la matrice  $[C]$ .
  - i. Caractérisation du type de branche  $ITYP$  en considérant si les valeurs de  $RAID(1)$  et  $RAID(N+1)$  sont toutes les deux nulles.
  - j. Ecriture des pulsations propres par ordre croissant. leur nombre dépend de la valeur de  $ITYP$ . En effet, si la ligne d'arbre est libre à ces deux extrémités, il y a  $N-1$  pulsations propres différentes de zéro. Dans le cas où une, ou même, des extrémités est encastrée, il y a  $N$  pulsations propres différentes de zéro.
  - k. Calcul des déformées modales
  - l. écriture des amplitudes relatives de chaque disque.

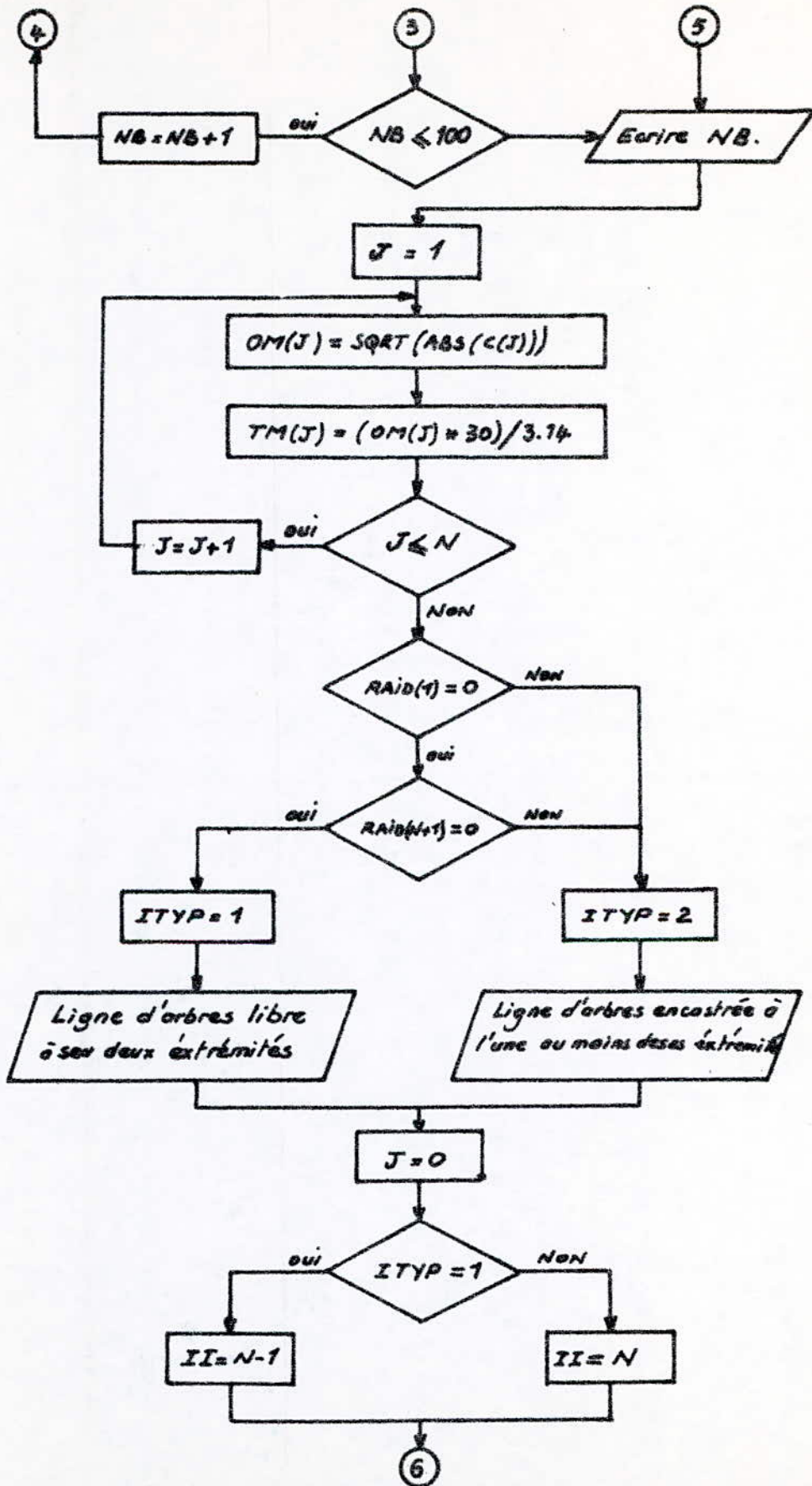


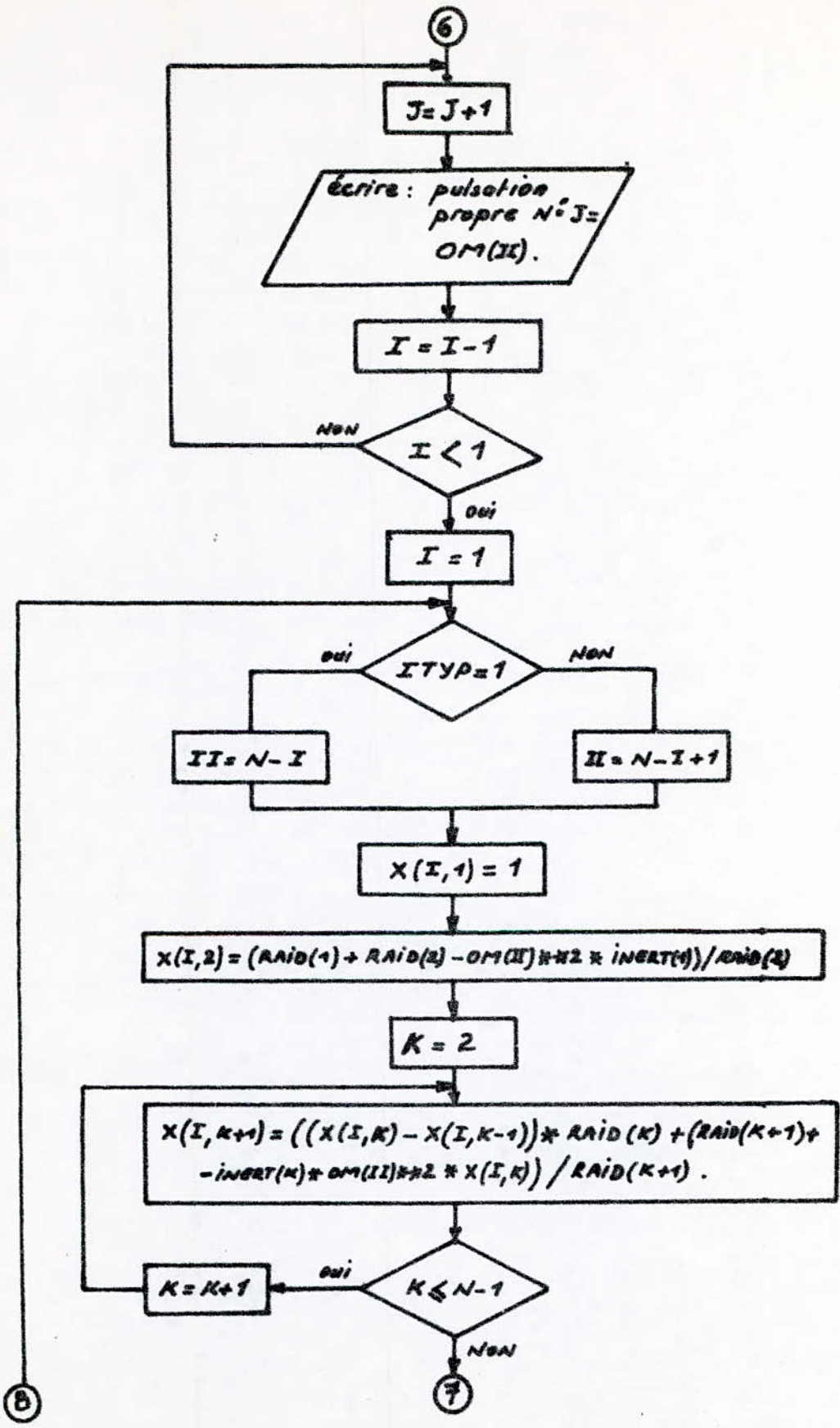
# 4-4 Organigramme du programme RUT.



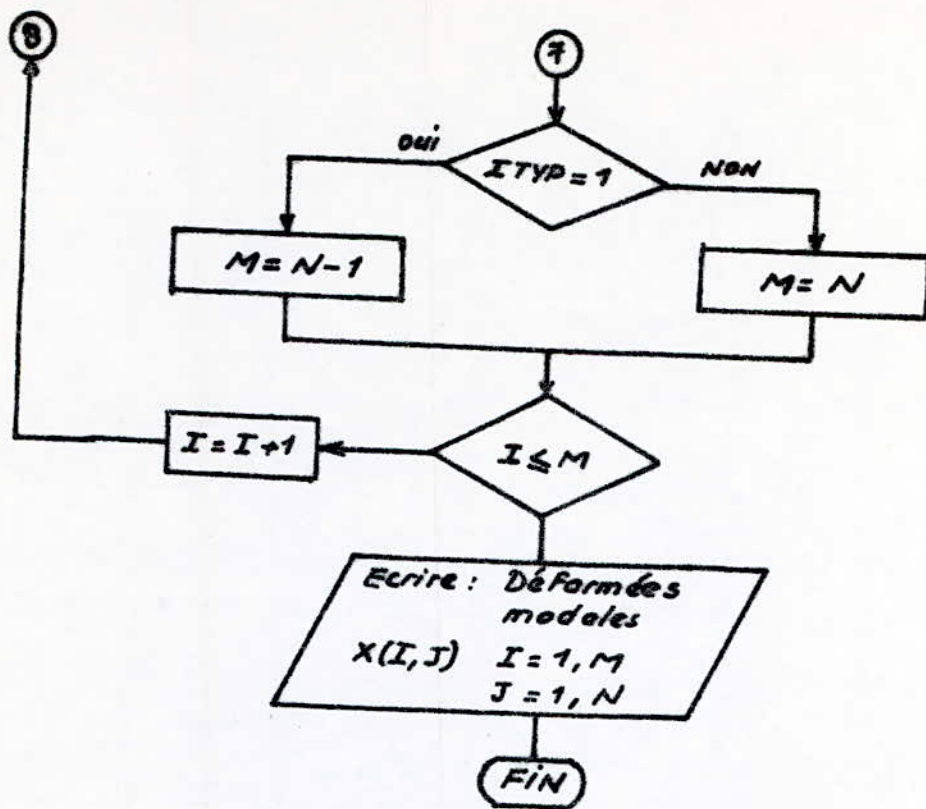












T A B L E A U D E S D O N N E E S

DISQUE No: I	INERT(I)	ARBRE No: I	RAID(I)
1	.1501	1	0
2	.00488	2	646000
3	.004625	3	378000
4	.004625	4	378000
5	.00488	5	378000
6	.00012	6	172000
		7	0

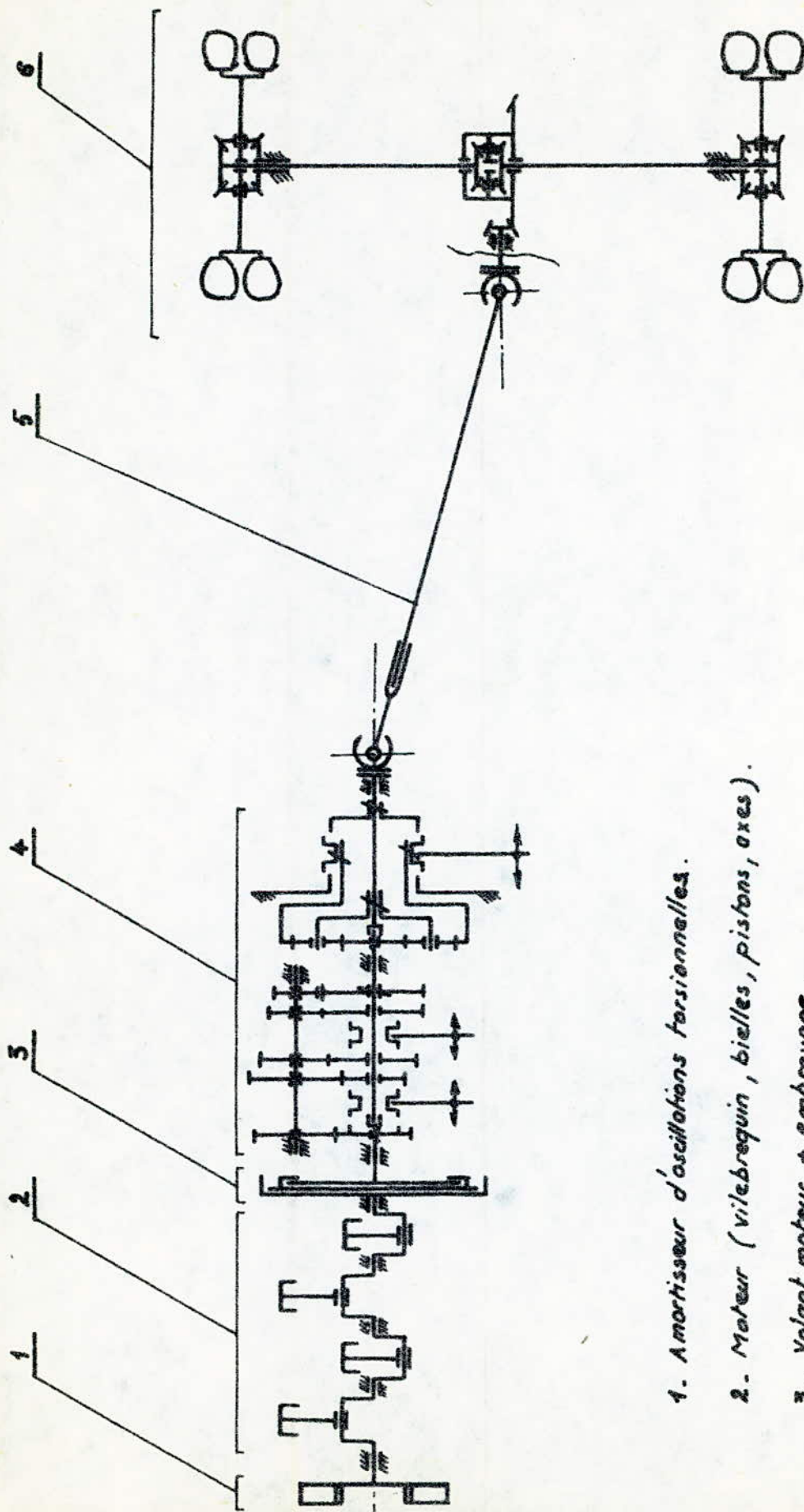
LA LIGNE D'ARBRES EST LIBRE A SES DEUX EXTREMITES

R E S U L T A T S D E S P U L S A T I O N S P R O P R E S

MODE No: J	OMEGA (rd/s)	VITESSE (tr/mn)
1	3558.33	33996.7
2	9719.48	92861.3
3	14518	138707
4	17277.9	165075
5	38349.3	366395

R E S U L T A T S D E S D E F O R M E E S M O D A L E S

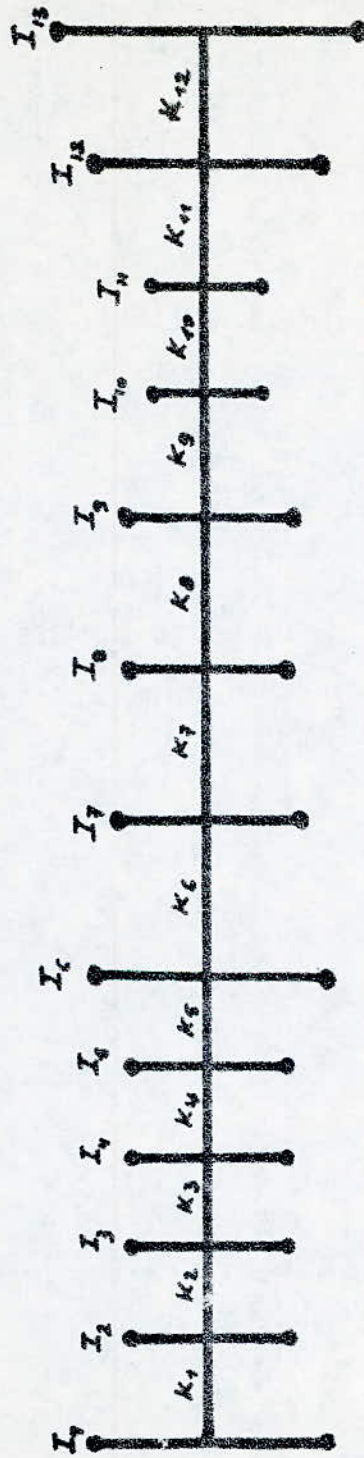
DISQUE No:	A M P L I T U D E S R E L A T I V E S				
	MODE No:1 W=3558.33 (rd/s)	MODE No:2 W=9719.48 (rd/s)	MODE No:3 W=14518 (rd/s)	MODE No:4 W=17277.9 (rd/s)	MODE No:5 W=38349.3 (rd/s)
1	1	1	1	1	1
2	-1.94198	-20.95	-47.9738	-68.363	-340.715
3	-6.65237	-32.912	-1.12848	76.5647	5544.25
4	-10.3322	-6.83225	48.6271	-58.1663	-88335.7
5	-12.4113	27.1446	-27.0221	19.5598	.1407E+07
6	-12.5219	29.06	-31.6801	24.7095	-.5403E+08



1. Amortisseur d'oscillations torsionnelles.
2. Moteur (vilebrequin, bielles, pistons, axes).
3. Volant moteur + embroyage.
4. Boite de vitesse.
5. Arbre de transmission
6. Pont arrière.

Fig. 3.8





*Modèle dynamique du groupe motopropulseur de la figure 3.5*

4.5. calcul des pulsations propres du groupe motopropulseur.

TABLEAUX DES DONNEES  
=====

DISQUE No:1	INERT(I)	ARBRE No:1	RAID(I)
1	.093	1	0
2	.046	2	98039
3	.143	3	.128205E+07
4	.099	4	.140056E+07
5	.099	5	.140056E+07
6	.145	6	.140056E+07
7	2.557	7	.225225E+07
8	.0414	8	18053
9	.0152	9	85455
10	.0018	10	2661
11	.0023	11	1705
12	.0008	12	631
13	2.3706	13	.226
		14	0

LA LIGNE D'ARBRES EST LIBRE A SES DEUX EXTREMITES  
 =====

T A B L E A U X D E S R E S U L T A T S  
 -----

PULSATIONS PROPRES  
 =====

MODE No:J	OMEGA (rd/s)	VITESSE (tr/mn)
1	.689667	6.58918
2	469.956	4490.02
3	618.771	5911.82
4	862.499	8240.44
5	1063.8	10163.7
6	1484.93	14187.2
7	1682.22	16072.2
8	2822.66	26968.1
9	3533.14	33756.1
10	5228.26	49951.6
11	6357.29	60738.5
12	7021.15	67081.1



T A B L E A U X   D E S   D E F O R M E E S   M O D A L E S

=====

DISQUE No:	A M P L I T U D E S   R E L A T I V E S			
	MODE No:1 W=.689667 (rd/s)	MODE No: 2 W=469.956 (rd/s)	MODE No: 3 W=618.771 (rd/s)	MODE No: 4 W=862.499 (rd/s)
1	1	1	1	1
2	1	.790494	.636801	.29433
3	1	.768208	.600279	.232511
4	.999999	.730485	.543381	.158263
5	.999999	.681359	.471777	.075693
6	.999999	.621595	.387404	-.010858
7	.999999	.575592	.325388	-.064159
8	.999924	-23.1693	-25.0575	.046263
9	.999908	-25.7065	-25.7719	.052918
10	.999391	-74.7555	7.65097	.041757
11	.998582	-133.876	56.7215	-.008553
12	.996397	-185.850	110.153	-.121205
13	-.510817	-.449392	.328402	4.24572

DISQUE No:	A M P L I T U D E S   R E L A T I V E S			
	MODE No: 6 W=1484.93 (rd/s)	MODE No: 9 W=3533.14 (rd/s)	MODE No: 11 W=6357.29 (rd/s)	MODE No: 12 W=7021.15 (rd.s)
1	1	1	1	1
2	-1.09169	-10.8415	-37.338	-45.7629
3	-1.16527	-6.5579	13.874	31.6048
4	-.970281	5.50798	3.50182	-56.6499
5	-.624059	13.047	-16.8744	-52.4965
6	-.180569	9.07364	10.956	-21.2853
7	.120849	-.689318	-.244481	.387133
8	-.017961	.076442	1.90317	1.12225
9	-.028099	-.224075	-34.9069	-25.5246
10	.000257	6.10287	6841.49	6306.19
11	.043913	-64.4499	-274333	-312007
12	-.191071	2677.44	.3937E+08	.5489E+08
13	835.106	-.1106E+09	-.5523E+13	-.9424E+13



## CONCLUSION

D'après les résultats obtenus, pour les exemples traités par les deux méthodes, on s'aperçoit que la méthode de HOLZER conduit à des temps de calcul sur ordinateur très importants, de plus la précision numérique n'est pas assurée.

Par contre, la méthode de Rutishouser qui permet de calculer les différentes pulsations et déformées modales des lignes d'arbres en vibration de torsion, nécessite pour son implantation sur ordinateur qu'un nombre réduit d'opérations, de plus elle admet une précision de calcul acceptable. C'est la raison pour laquelle nous choisissons cette dernière solution.

Avec cette méthode, nous avons réussi à établir un programme avec lequel, on peut calculer les pulsations propres et les amplitudes relatives de n'importe quelle ligne d'arbres non ramifiée.



# BIBLIOGRAPHIE

1. *Théorie des vibrations*
2. *Vibrations Mécaniques.*
3. *Technique de l'ingénieur* B. GIRONNET et G. LOURADOUR
4. *Thèse de Magister : Etude des vibrations de torsion du  
groupe Motopropulseur des camions  
SNVI - SONACOME . M. BOKABACHE.*
5. *Thèse d'ingénieur : Dynamique des vibrations d'un moteur  
à explosion . A. Toumi*

