



Ecole Nationale Polytechnique  
Département de Génie Civil  
Laboratoire de Génie Sismique  
et de Dynamique des Structures



## Thèse de Doctorat en Sciences en Génie Civil

Intitulée

# Evaluation de la Sécurité des Fondations Superficielles reposant sur des Sols Sableux à Paramètres Corrélés

Présentée par :

**LAKEHAL Saadi**

Ingénieur d'Etat en Génie Civil, Ecole Nationale Polytechnique  
Magister en Génie Civil, Ecole Nationale Polytechnique

### Composition du Jury :

<b>Président Mr.</b>	Smain BELKACEMI	Professeur ENP
<b>Directeur de Thèse</b>	Boualem TILIOUINE	Professeur ENP
<b>Examineur</b>	Noureddine BOURAHLA	Professeur ENP
<b>Examineur</b>	Abdelkarim BOURZAM	Professeur USTHB
<b>Examineur</b>	Khaled SANDJAK	MCA UMBB
<b>Examineur</b>	. Mouloud OUANANI	MCA U.DJELFA
<b>Invité</b>	Malek HAMMOUTENE	Professeur ENP

**ENP 2020**





Ecole Nationale Polytechnique  
Département de Génie Civil  
Laboratoire de Génie Sismique  
et de Dynamique des Structures



## Thèse de Doctorat en Sciences en Génie Civil

Intitulée

### Evaluation de la Sécurité des Fondations Superficielles reposant sur des Sols Sableux à Paramètres Corrélés

Présentée par :

**LAKEHAL Saadi**

Ingénieur d'Etat en Génie Civil, Ecole Nationale Polytechnique  
Magister en Génie Civil, Ecole Nationale Polytechnique

#### Composition du Jury :

<b>Président Mr.</b>	Smain BELKACEMI	Professeur	ENP
<b>Directeur de Thèse</b>	Boualem TILIOUINE	Professeur	ENP
<b>Examineur</b>	Noureddine BOURAHLA	Professeur	ENP
<b>Examineur</b>	Abdelkarim BOURZAM	Professeur	USTHB
<b>Examineur</b>	Khaled SANDJAK	MCA	UMBB
<b>Examineur</b>	Mouloud OUANANI	MCA	U.DJELFA
<b>Invité</b>	Malek HAMMOUTENE	Professeur	ENP

**ENP 2020**

### ملخص:

تم تقديم دراسة احتمالية لتحليل وتصميم الاساسات السطحية الصلبة على أساس التربة الرملية لمجموعة من الاختلافات المتوقعة في خصائص التربة. يتم استخدام التعبيرات المبسطة لعوامل قدرة الحمل من نموذج القدرة الاستيعابية القصوى لـ Terzaghi جنبًا إلى جنب مع تحليل الموثوقية لتسهيل حساب مؤشر موثوقية Hasofer-Lind واحتمال فشل الأساس المدروس. في القسم الأول تم تأثير الارتباط المتبادل بين قيم المتغيرات العشوائية للزاوية الفعالة للاحتكاك الداخلي  $\phi'$  والوزن النوعي للتربة  $\gamma$  على توزيع احتمال القدرة القصوى للحمل وعلى احتمال تنفيذ فشل الأساس المدروس باستخدام تقنية محاكاة مونت-كارلو. تعتبر حالتان التوزيعات الناظمية وغير الناظمية. بالإضافة إلى ذلك، يتم إجراء مقارنة بين نتائج الموثوقية وتلك الخاصة بأساليب FORM و SORM لمتغيرات التربة المترابطة، ويظهر أن تطبيق هذه الطرق يقلل بشكل كبير من المتطلبات من حيث وقت التنفيذ ومساحة الذاكرة. في الجزء الثاني ندرس آثار الزيادة في الحمل المطبق على سلامة الأساس، وكذلك تحليل الحساسية للخصائص المترابطة للتربة على عكس ما يحدث في التربة الناعمة، يتبين أن الزيادة في الارتباط الإيجابي بين متغيرات التربة تزيد من احتمال فشل الأساس. لأغراض تحديد الأبعاد، تتم مقارنة قيم عرض الأساس المحسوب باستخدام مقارنة قيم عرض الأساس المحسوبة باستخدام نهج التصميم التقليدية والموثوقية وإعطاء استنتاجات ذات أهمية عملية.

**الكلمات المفتاحية:** التحليل الاحتمالي. الارتباط. تصميم قائم على الموثوقية. فشل قدرة التحمل. أساسات سطحية. التربة الرملية.

### Abstract

A probabilistic study of the analysis and design of rigid shallow foundations resting on sandy soils is presented for a range of expected variations of soil properties. Simplified expressions of bearing capacity factors derived from Terzaghi's ultimate bearing capacity model are used in conjunction with reliability analysis in order to facilitate the calculation of Hasofer-Lind reliability index and foundation failure probability. First, the influence of cross-correlation between random variables values of effective angle of internal friction  $\phi'$  and soil unit weight  $\gamma$  on the probability distribution of ultimate bearing capacity and on foundation failure probability is investigated using Monte Carlo simulation. Both cases of normal and lognormal distributions are considered. Further, a comparison of the reliability results with those of FORM and SORM methods for correlated input soil variables is performed and it is demonstrated that the application of these methods significantly reduces the CPU time and memory requirements. Next, the effects of increasing applied load on foundation safety along with a sensitivity analysis of the correlated soil properties are examined. Contrary to  $c'-\phi'$  soils, results for increasing positive cross-correlation between the input soil variables are shown to increase foundation failure probability. For design purposes, values of the foundation breadth calculated using the conventional and reliability-based design approaches are compared and conclusions of practical interest are given.

**Keywords:** Probabilistic analysis; Correlation; Reliability-based design; Bearing capacity failure; Shallow foundations; sandy soils.

### Résumé :

Une étude probabiliste de l'analyse et du dimensionnement des fondations rigides superficielles reposant sur des sols sableux est présentée pour une gamme de variations attendues des propriétés du sol. Les expressions simplifiées des facteurs de capacité portante issues du modèle de capacité portante ultime de Terzaghi sont utilisées conjointement avec une analyse de fiabilité afin de faciliter le calcul de l'indice de fiabilité Hasofer-Lind et de la probabilité de défaillance de la fondation étudiée. En premier lieu, l'influence de la corrélation croisée entre les valeurs de variables aléatoires de l'angle effectif du frottement interne  $\phi'$  et du poids spécifique du sol  $\gamma$  sur la distribution de probabilité de la capacité portante ultime et sur la probabilité de défaillance de la fondation étudiée est effectuée à l'aide de la technique de simulation de Monte Carlo. Les deux cas de distributions normales et lognormales sont considérés. En outre, une comparaison des résultats de fiabilité avec ceux des méthodes FORM et SORM pour les variables de sol corrélées est effectuée et il est démontré que l'application de ces méthodes réduit considérablement les exigences en termes de temps d'exécution et d'espace mémoire. En second lieu, nous examinons les effets de l'augmentation de la charge appliquée sur la sécurité des fondations, ainsi qu'une analyse de sensibilité des propriétés corrélées du sol. Contrairement à ce qui se passe dans les sols  $c-\phi$ , il est montré que l'augmentation de la corrélation positive entre les variables de sol augmente la probabilité de défaillance de la fondation. Aux fins de la conception, les valeurs de la largeur de la fondation calculées à l'aide des approches de calcul conventionnelles et de conception, basées sur la théorie de fiabilité sont comparées et des conclusions présentant un intérêt pratique sont fournies.

**Mots-clés:** Analyse probabiliste; Corrélation; fiabilité; Sécurité des fondations superficielles; Sols sableux.

# Remerciements

---

Nous remercions notre Dieu **ALLAH**, le Tout Puissant de nous avoir donné le courage, la force, la patience et la volonté pour mener à terme ce travail.

«من لا يشكر الناس لا يشكر الله»

«*Quiconque qui ne remercie pas les gens, ne remercie pas ALLAH*»

Cette thèse de Doctorat en sciences est l'aboutissement d'un travail de recherche effectué au sein du laboratoire de Génie Sismique et de Dynamique des Structures L.G.S.D.S, sis à l'Ecole Nationale Polytechnique, sous la direction du Professeur Tiliouine Boualem.

Aujourd'hui, au terme de ce modeste travail, j'aimerais exprimer toute ma gratitude et toute ma reconnaissance à mon Directeur de Thèse, le Professeur Tiliouine. Boualem., qui m'a donné la possibilité d'effectuer cette recherche dans le domaine du Génie Civil. Je tiens vivement à le remercier pour sa disponibilité, pour l'aide précieuse apportée durant nos discussions, pour ses conseils éclairés, et surtout pour sa longue patience durant tout le parcours de cette recherche.

D'autre part, je tiens à remercier le professeur Hammoutene. M, pour ses suggestions, ses conseils et ses précieuses observations.

Je remercie également le professeur BELKACEMI. S. qui m'a fait l'honneur et le privilège de présider le jury, le professeur BOURAHLA. N, le professeur BOURZAM. A, et les Maitres de conférences, SANDJAK. K et OUANANI. M, pour avoir accepté de faire partie du jury de thèse et d'en examiner tous les aspects scientifiques et techniques. Qu'ils trouvent ici, le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Je tiens aussi à associer également mes remerciements à tous les membres du Laboratoire LGSDS et en particulier Messieurs HAMMOUTENE Malek, OUANANI Mouloud et CHEMALI Badr Eddine pour leurs aides et leurs conseils.

Enfin, dans le souci de n'oublier personne, que tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, que ce soit par leurs amitiés, leurs conseils ou leur soutien moral, trouvent ici dans ces quelques lignes l'expression de ma profonde gratitude.

## Dédicaces

---

*Je dédie ce modeste Travail de Recherche à :*

- La mémoire de mes Parents*
- Toute ma famille*
- Tous mes frères et sœurs*
- Tous mes amis et mes collègues de travail*

S. LAKEHAL

# TABLE DES MATIERES

Liste des tableaux	
Liste des figures	
Liste des notations	
<b>Introduction Générale</b>	12
1. Problématique	13
2. Objectifs	16
2. Organisation de la thèse	17
<b>1. Eléments de Théorie des Probabilités</b>	19
1.1 Introduction	20
1.2 Expérience stochastique, événement	20
1.2.1 Expérience stochastique	20
1.2.2 Espace fondamental et événement	21
1.3 Le langage de la théorie des probabilités	21
1.3.1 La famille des événements	21
1.3.2 Notion de probabilité	24
1.3.3 Exemple d'espaces probabilisés	26
1.4 Caractéristiques de la distribution de probabilité	26
1.4.1 Variable aléatoire	26
1.4.2 Fonction de répartition : CDF	27
1.4.3 Fonction de densité de probabilité : PDF	27
1.4.4 Densité conjointe et fonctions de distribution	28
1.5 Paramètres de base d'une variable aléatoire	28
1.5.1. Moyenne, variance	28
1.5.1Covariance	29
1.6. Indépendance, dépendance et coefficient de corrélation	29
1.7 Distributions de probabilités communes	31
1.7.1 Distribution gaussienne	32
1.7.2 Distribution lognormale	33

<b>2. Concepts de Base de la Fiabilité</b>	35
2.1 Indice de fiabilité	36
2.2 Probabilité de défaillance	38
2.3 Le facteur de sécurité central et sa relation avec l'indice de fiabilité pour les variables normales corrélées	39
2.3.1 Évaluation de la fiabilité	39
2.3.2 R et S sont des variables normales	40
2.3.3 R et S sont des variables lognormales	43
2.4 Simulation Monte Carlo (MCS)	45
2.5 Facteurs de sensibilité et facteurs d'omission	46
<b>3. Variabilité des Paramètres Géotechniques et Distribution de Probabilité de la Capacité Portante Ultime</b>	49
3.1 Variabilité des paramètres géotechniques	49
3.2 Distribution de probabilité de la capacité portante ultime	50
3.2.1. Modèle déterministe de la capacité portante ultime	50
3.2.2 Modèle probabiliste de la capacité portante ultime en utilisant la méthode de simulation de Monte Carlo	51
3.2.2.1 Le modèle probabiliste à paramètres non-corrélés	51
3.2.2.2 Le modèle probabiliste de la capacité portante ultime à paramètres corrélés	54
<b>4. Effets de la Variabilité du Sol et Sécurité de la Fondation</b>	57
4.1 Effets de la variabilité du sol sur la variabilité de la capacité portante ultime	58
4.2 Sécurité de la fondation	59
4.2.1 Probabilité de défaillance de la fondation obtenue par simulation de Monte Carlo pour deux cas de distributions de probabilité, normale et lognormale	59
4.2.2 Comparaison de la probabilité de défaillance de la fondation pour des variables de sol non-corrélées et corrélées normales et lognormales	60
4.3 Influence d'une charge appliquée variable et analyse de sensibilité	62
4.4 Comparaison des résultats	65
Comparaison des résultats des calculs déterministes et fiabilistes	65



<b>Conclusion Générale</b>	68
<b>Références Bibliographiques</b>	71
<b>Annexes</b>	75

## Liste des tableaux

<b>Tableau 1.1</b>	Propriétés des mesures centrales (moyennes) et de dispersion .....	31
<b>Tableau 3.1</b>	Probabilité de défaillance $P_f$ (%) de la capacité portante ultime.....	51
<b>Tableau 3.2</b>	Probabilité de défaillance $P_f$ (%) de la capacité portante Ultime- non-corrélés et corrélés.....	54
<b>Tableau 4.1</b>	Probabilité de défaillance de fondation en utilisant les méthodes MCS, FORM (HL), SORM.....	61
<b>Tableau 4.2</b>	Indice de fiabilité, probabilité de défaillance $P_f$ , points de calcul et facteurs de sensibilité.....	63
<b>Tableau 4.3</b>	Comparaison des calculs déterministes et probabilistes de la largeur de base de la fondation.....	66

**Listes des figures**

<b>Fig. 1.1</b>	Densité de probabilité de la limite élastique de l'acier.....	23
<b>Fig. 1.2</b>	Schéma d'une variable aléatoire.....	24
<b>Fig. 1.3(a)</b>	Fonction de densité de probabilité.....	25
<b>Fig. 1.3(b)</b>	Fonction de répartition(CDF).....	25
<b>Fig. 1.4</b>	les ellipses d'égale densité.....	28
<b>Fig. 1.5(a)</b>	Corrélation linéaire négative.....	30
<b>Fig. 1.5(b)</b>	Corrélation linéaire positive.....	30
<b>Fig. 1.6</b>	Fonction de densité de la loi normale.....	32
<b>Fig. 2.1</b>	Représentation de l'indice de Hasofer-Lind.....	37
<b>Fig. 2.2</b>	Distribution de la marge de sécurité.....	41
<b>Fig. 3.1</b>	Fonction de distribution de probabilité (PDF) de la capacité portante ultime.....	52
<b>Fig. 3.2</b>	Fonction de répartition (CDF) de la capacité portante.....	53
<b>Fig. 3.3</b>	Probabilité de défaillance de la capacité portante ultime.....	53
<b>Fig. 3.4</b>	Distribution de probabilité de la capacité portante ultime des paramètres corrélés et non corrélés.....	55
<b>Fig. 3.5</b>	Illustration de la corrélation entre l'angle de frottement effectif et le poids spécifique du sol.....	55
<b>Fig. 4.1</b>	Coefficient de variation de la capacité portante Ultime en fonction de $CoV_{\phi}$ et $CoV_{\gamma}$ .....	58
<b>Fig. 4.2</b>	Coefficient de variation de la capacité portante ultime pour différents coefficients de corrélation.....	59

<b>Fig. 4.3</b>	Probabilité de défaillance de la capacité portante ultime pour différents $CoV_{\varphi}$ '.....	59
<b>Fig. 4.4</b>	Indice de fiabilité en fonction du facteur de sécurité.....	64
	.	
<b>Fig. 4.5</b>	Comparaison entre les calculs déterministes et fiabilistes.....	67

---

# Notations

Les principales notations utilisées dans la présente thèse sont rassemblées ci-après, les autres notations seront définies au fur et à mesure de leur apparition dans chaque chapitre

$m$ ou $\mu$ :	Moyenne ou espérance mathématique
$\sigma_x$ :	Ecart-type
$\sigma^2$ :	Variance
$F_X(x)$ :	Fonction de répartition : CDF
$f_X(x)$ :	Fonction de densité de probabilité(PDF)
$f_{xy}(x,y)$ :	PDF conjointe des variables aléatoires X et Y
$\sigma_{xy}$ ou $\text{cov}(x,y)$ :	Covariance
$\text{CoV}_x$ ou $V_x$ :	Coefficient de Variation de X
$\rho_{xy}$ :	Coefficient de corrélation
$\Phi(x)$ :	Fonction de répartition de la variable standard normalement distribuée
$\beta_{HL}$ :	Indice de fiabilité de Hasofer-Lind
$\lambda_0$ :	coefficient de sécurité central
$\varphi'$ :	Angle de frottement interne effectif
$\gamma$ :	pois spécifique du sol
$c$ :	La cohésion du sol
$q_{ult}$ :	Capacité portante ultime de la fondation
$N_\gamma, N_q$ et $N_c$ :	Terme de surface, terme de profondeur et terme de cohésion respectivement
$g_q(\varphi', \gamma)$ :	Fonction de performance
$q_{ad}$ :	Capacité portante admissible du sol.
$F$ :	facteur de sécurité
$\gamma_i(\mu_i)$ :	facteurs de sensibilité d'omission

## INTRODUCTION GENERALE

## INTRODUCTION GENERALE

### 1. Problématique

Les fondations superficielles sont des éléments d'infrastructure fréquemment utilisés dans les ouvrages de génie civil. De nombreux projets de génie civil impliquant principalement des bâtiments résidentiels, des structures industrielles à ossature et des murs de soutènement sont construits sur des systèmes de fondation constitués de fondations superficielles reposant sur des sols sableux. Ce type de sol, caractérisé par de très faibles valeurs de cohésion ( $c \approx 0$ ), couvre une grande partie du territoire algérien, en particulier dans les principales villes côtières et dans la partie sud du pays. Par conséquent, l'étude de la capacité portante ultime des fondations superficielles reposant sur des sols sans cohésion revêt une grande importance dans le contexte de leur conception et de leur évaluation de la sécurité.

Sur la base de la capacité portante ultime, la capacité portante admissible peut également être déterminée en utilisant une approche déterministe basée sur un facteur de sécurité global ou sur une approche probabiliste qui répond aux exigences de conception et de sécurité, compte tenu des caractéristiques aléatoires des sols et des charges appliquées. Contrairement au cas des sols  $c'-\phi'$ , la capacité portante ultime d'une fondation superficielle sur un sol sableux est essentiellement fonction de sa résistance inhérente au cisaillement par frottement, généralement exprimée par l'angle de frottement interne  $\phi'$  et le poids spécifique du sol  $\gamma$ .

L'examen de la littérature montre un potentiel relativement élevé d'activités de recherche concernant l'analyse basée sur la fiabilité de nombreux projets d'ingénierie géotechnique couvrant un large éventail d'applications concernant les tassements de fondations (Kayser et Gajan, 2014), la prévision des défaillances des fondations enterrées (e. g. Tani et al., 2017), la stabilité des murs de soutènement (Low, 2005; Viviescas et al., 2017), les talus (e.g. Chowdhury et Xu, 1992), les tunnels peu profonds (e.g. Hamrouni et al., 2017)

et la vulnérabilité physique aux glissements de terrain (e.g. Uzielli et al., 2008), pour n'en citer que quelques-uns.

L'une des principales préoccupations de l'analyse et du calcul des fondations est de fournir une évaluation probabiliste de leur capacité portante ultime, ce qui inclut le caractère aléatoire des variables composantes, est basée sur un indice de fiabilité ou un critère de probabilité de défaillance. Plusieurs chercheurs ont mené des études probabilistes sur la capacité portante ultime de fondations superficielles filantes reposant sur des sols ou des roches. Cherubini (1990) a présenté une solution analytique de la capacité portante d'un sol pulvérulent pour des fondations superficielles filantes, en considérant l'angle de frottement effectif comme une variable aléatoire normale uniquement. Easa (1992) a élaboré une solution probabiliste «exacte» de la capacité portante ultime d'un sol pulvérulent pour des fondations superficielles, en considérant à la fois l'angle de frottement effectif et le poids spécifique du sol comme des variables aléatoires normales non corrélées. Des études probabilistes de la capacité portante de fondations filantes rigides sur des sols cohérents ont été réalisées par divers chercheurs (e.g. Griffiths et al., 2002; Lingwanda, 2018), tandis qu'une évaluation de la fiabilité de la capacité portante de fondations superficielles reposant sur des sols  $c'$ - $\phi'$  ou des rochers ont été étudiés respectivement par (e.g. Cherubini, 2000; Youssef et al., 2008) et par (e.g. Mao et al., 2012), entre autres.

La fiabilité de la capacité portante ultime des fondations superficielles peut être évaluée à l'aide de plusieurs méthodes d'analyse probabiliste (par exemple, Madsen et al., 2006). Méthodes d'estimation ponctuelle (par exemple, Rosenblueth, 1981), méthodes locales telles que les méthodes de fiabilité du premier et second ordre (FORM et SORM) (e.g. Hasofer-Lind, 1974) et méthodes d'échantillonnage telles que la technique de simulation de Monte Carlo et ses variantes (par exemple, Ching, 2011) sont les méthodes les plus couramment utilisées pour estimer la probabilité de défaillance des structures géotechniques. Plus récemment, les méthodes des éléments finis stochastiques, les méthodes de lignes de glissement stochastiques (Puła et Zaskórski, 2015; Johari et al., 2017), ainsi que la méthodologie de surface de



réponse couplée à des méthodes d'algorithmes génétiques (Hamrouni et al., 2018) ont également été utilisées avec succès pour évaluer la probabilité de défaillance des systèmes étudiés.

Cependant, la plupart de ces méthodes de fiabilité font appel à des techniques numériques fastidieuses voire parfois sophistiquées sur le plan mathématique, plutôt difficiles à comprendre pour les ingénieurs. De plus, les équations classiques de prédiction de la capacité portante ultime des fondations superficielles (e.g. Terzaghi, 1943; Kumbhojkar, 1993), utilisées conjointement avec une approche probabiliste sont difficiles à appliquer, car les dérivées des variances par les méthodes de premier et second ordre sont laborieuses (par exemple Sivakumar et al., 2007). Ainsi, alors que des mathématiques rigoureuses sont parfois nécessaires au développement de ces méthodes fiabilistes, il est nécessaire de développer une approche simplifiée mais suffisamment précise, fondée sur les probabilités, pour l'analyse et le calcul fiabiliste des fondations superficielles, répondant à la fois à des critères de dimensionnement et de fiabilité. Ceci est particulièrement pertinent dans la mesure où le niveau de fiabilité imposé par les codes de calcul pour les états limites ultimes (Eurocode 1, 2003, par exemple) n'est pas d'une importance capitale.

Traditionnellement, l'analyse et le dimensionnement des ouvrages en géotechnique sont fondés sur des approches déterministes. Les aléas et incertitudes des différents paramètres (caractéristiques du sol, chargement, etc.) sont pris en compte de manière simplifiée sous la forme d'un facteur de sécurité global. Celui-ci est souvent appelé facteur d'ignorance car il représente notre ignorance des incertitudes sur les différents paramètres. Pour tenir compte des aléas et incertitudes inhérents aux paramètres, la théorie de la fiabilité est actuellement de plus en plus utilisée en géotechnique. Ceci est devenu possible grâce aux avancées importantes concernant la quantification des incertitudes des paramètres du sol. Au cours de la dernière décennie, la théorie de la fiabilité a été appliquée au problème de l'analyse et du dimensionnement des fondations superficielles par un certain nombre de

chercheurs. La plupart de ces études ont considéré l'incertitude d'un seul paramètre (comme par exemple le module d'Young, la cohésion ou l'angle de frottement interne du sol). D'autres auteurs ont modélisé les incertitudes des différents paramètres par des variables aléatoires et ont effectué une analyse fiabiliste des fondations à l'état limite ultime en utilisant des modèles déterministes simplifiés basés sur des formules empiriques des facteurs de capacité portante. L'avantage de ces approches est leur facilité de mise en œuvre ; cependant, elles aboutissent à des solutions approchées

## **2. Objectifs**

Dans le cadre de ce travail, nous présentons des méthodes d'approche d'analyse et de calcul déterministe et fiabiliste des fondations superficielles filantes reposant sur des sols sableux. Les effets de la variabilité du sol sur la capacité portante ultime et la sécurité des fondations sont notamment étudiés. Deux distributions statistiques (normale et lognormale) des paramètres de sol sont considérées. La théorie de la fiabilité est utilisée conjointement avec un modèle déterministe simplifié de la capacité portante ultime de Terzaghi pour mettre au point une méthode simple et précise permettant de réaliser une analyse probabiliste et un dimensionnement efficaces des fondations superficielles reposant sur des sols sableux. Les implications d'une éventuelle corrélation croisée entre les paramètres de sol sur les distributions de probabilité de la capacité portante ultime et sur les estimations de probabilité de défaillance des fondations sont examinées en détail à l'aide de la technique de simulation de Monte Carlo. En outre, une comparaison des résultats de fiabilité avec ceux des méthodes Hasofer-Lind FORM et SORM ainsi que des méthodes de Mean value FORM est effectuée. Enfin, aux fins de dimensionnement, les valeurs de la largeur de la fondation calculées à l'aide d'approches de calcul conventionnel et de calcul fiabiliste pour une probabilité de défaillance cible, sont comparées et des conclusions présentant un intérêt pratique sont formulées.

### 3. Organisation de la thèse

Après une introduction qui présente l'énoncé du problème avec ses objectifs, l'organisation de cette thèse, qui résume l'ensemble des résultats obtenus durant le parcours de recherche, est structurée en plusieurs chapitres :

Le chapitre 1 sera un chapitre introductif en théorie des probabilités et statistiques, la connaissance de ces notions de base est indispensable pour la compréhension de la suite des autres chapitres.

Le chapitre 2 décrit quelques méthodes et approches fiabilistes qu'on a utilisées et montre comment évaluer la fiabilité d'un ouvrage et la relation qui existe entre l'indice de fiabilité et Le facteur de sécurité central.

Le chapitre 3 montre la distribution de probabilité de la capacité portante ultime, du modèle déterministe pour évaluer la capacité portante ultime des fondations superficielles au modèle probabiliste à paramètres non-corrélés et corrélés en utilisant la méthode de simulation de Monte Carlo pour les deux distributions normale, puis lognormale et l'effet de la corrélation sur les résultats obtenus.

Au chapitre 4, nous présentons les effets de la variabilité du sol sur la variabilité de la capacité portante ultime. Ces effets sont illustrés à l'aide de figures pour les deux cas considérés de distributions normales et lognormales des variables de sol et comment la variabilité de la capacité portante ultime augmente pratiquement de manière linéaire avec l'augmentation de la corrélation ces deux cas de distributions. Comparaison avec FORM, SORM et la technique de simulation de Monte Carlo.

On montre aussi dans ce chapitre l'influence d'une charge verticale centrée variable sur la sécurité de la fondation avec l'analyse de sensibilité.

Le dernier paragraphe sera consacré à la comparaison des calculs déterministes et fiabilistes

Enfin, compte tenu des résultats obtenus, on retrouve les principales conclusions retenues et des recommandations pour de futures recherches.

Pour plus d'illustration et une meilleure compréhension, deux annexes sont jointes à la fin du présent document :

L'annexe A, est consacrée au calcul des dérivées des facteurs de capacité portante pour un sol pulvérulent.

Dans l'annexe B, on retrouve la fonction de performance et les équations de Rackwitz-Fiessler.

# ELEMENTS DE THEORIE DES PROBABILITES

## **CHAPITRE 1**

# **ELEMENTS DE THEORIE DES PROBABILITES**

### **1.1 Introduction**

Le calcul des probabilités est l'étude des phénomènes aléatoires. Pour certains, les probabilités ont la réputation d'être une branche difficile à comprendre. L'expérience montre que les difficultés se situent rarement au niveau des concepts mathématiques introduits, mais le plus souvent au niveau de la construction d'un modèle probabiliste permettant l'étude d'une situation concrète donnée.

Or les probabilités se prêtent, peut être mieux que toute autre branche mathématique, à développer l'aptitude à la modélisation mathématique, démarche scientifique qui doit occuper une place de premier plan dans la formation de tout Ingénieur.

Les origines du calcul des probabilités remontent au 17<sup>ème</sup> siècle. Pendant une première période, elles ne constituaient en effet guère plus qu'une collection de méthodes combinatoires et algébriques. Depuis cette époque, les probabilités ont trouvé un nombre croissant d'application dans des domaines scientifiques (problème de statistiques démographiques, en théorie des erreurs et en biologie). Au 20<sup>ème</sup> siècle, un nombre croissant de disciplines qui s'étendent des sciences naturelles et techniques jusqu'aux sciences sociales et économiques, utilisant des méthodes probabilistes et statistiques.

Cette extension de la théorie des probabilités au-delà des jeux de hasard n'a été possible que grâce à un développement théorique auquel de nombreux mathématiciens ont contribué.

### **1.2 Expérience stochastique, événement**

#### **1.2.1 Expérience stochastique**

Une expérience est dite stochastique ou aléatoire s'il est impossible de prévoir son résultat. En principe, on admet qu'une expérience stochastique peut être répétée indéfiniment dans des conditions identiques avec un résultat variable d'une réalisation à une autre.

Si l'on jette un d s dans l'air, il est certain, que le d  va retomber en faisant apparaître un 6. Supposant que l'on répète l'expérience plusieurs fois, soit  $n_s$  le nombre de succès (apparition du nombre 6) et soit  $n$  le nombre total de jets. On observe empiriquement que le rapport  $f = n_s / n$ , qu'on appelle fréquence relative devient stable à la longue et se rapproche d'une limite. C'est sur cette stabilité que repose toute la théorie des probabilités.

### 1.2.2 Espace fondamental et événement

En théorie des probabilités, on introduit un ensemble  $\Omega$  dont les éléments  $\omega$  symbolisent les différentes épreuves, résultats ou éventualités d'une expérience aléatoire.

L'ensemble noté en général  $\Omega$  de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'espace fondamental ou univers de cette expérience. On appelle un événement tout sous ensemble de  $\Omega$ .

## 1.3 Le langage de la théorie des probabilités

En théorie des probabilités on s'intéresse à certains sous-ensembles  $A$  de  $\Omega$  appelés événements à chacun desquels on effectue un nombre compris entre 0 et 1, ce nombre atteste la fréquence de production de l'événement au cours d'expériences successives. Plus précisément on identifie la famille des événements auxquels on s'intéresse à une famille  $P(\Omega)$  de parties de l'ensemble  $\Omega$  (espace fondamental).

### 1.3.1. La famille des événements

La famille  $P(\Omega)$  a les propriétés suivantes :

1) la partie vide  $P(\Omega)$  ;

2)  $P(\Omega)$  : l'événement certain,

3)   tout événement  $E$ , on peut associer l'événement contraire  $\bar{E}$ ,

4)   toute suite  $E_1, E_2, \dots, E_n$  d'événements, on peut associer l'événement  $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ , qui se produit si l'un au moins des événements  $E_1, E_2, \dots, E_n$  se produit et l'événement qui ne se produit pas dans le cas contraire. De même, on peut définir l'événement  $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$  comme étant l'événement se produisant si tous les événements  $E_1, E_2, \dots, E_n$  se produisent simultanément.

### 1.3.2 Notion de probabilité

On effectue à tout événement  $E$  une probabilité  $P(E)$ , nombre compris entre 0 et 1 de façon que l'on ait :

- 1)  $P(\emptyset) = 0$  ;
- 2)  $P(\Omega) = 1$ ,
- 3) Si les événements  $E_1, E_2, \dots, E_n$  sont disjoints, autrement dit, si deux quelconques d'entre eux ne peuvent se produire simultanément :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

### 1.3.2. Exemple d'espaces probabilisés

#### 1.3.2.1 Exemple(a)

Soient  $m_1$  un nombre réel et  $\sigma_1 > 0$  avec  $\sigma_1$ : écart type

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \quad (1.1)$$

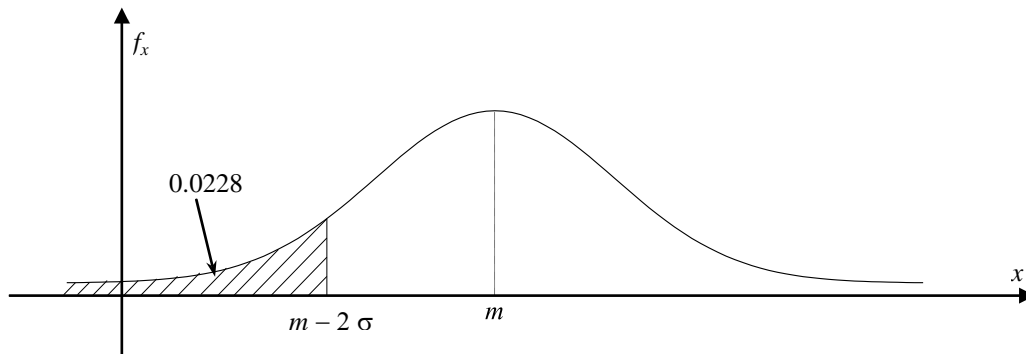
Pour tout intervalle  $I_1 = ]a_1, b_1[$  on pose :

$$P(I_1) = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x) dx \quad (1.2)$$

On démontre que parmi toutes les familles parties de la droite  $\mathfrak{R} = \Omega$  contenant les intervalles  $I$  et possédant les propriétés §1.3.1, il en existe une  $P_B(\mathfrak{R})$  plus petite que toutes les autres. Si  $I_1, I_2, \dots, I_n$  sont des intervalles ouverts disjoints avec  $I_i = ]a_i, b_i[$ ,  $\cup I_i$  est un événement appartenant à la famille  $P_B(\mathfrak{R})$  telle que :

$$P(\cup I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_i}^{b_i} f_1(x) dx \quad (1.3)$$





**Figure 1.1** Densité de probabilité de la limite élastique de l'acier

On obtient ainsi une probabilité  $P$  de densité  $f(x)$ . Cette dernière peut être utilisée si on s'intéresse à la limite élastique de l'acier (en  $\text{Kg}/\text{mm}^2$ ) fabriqué pendant une période donnée. Le nombre  $m$  est appelé la moyenne de la limite élastique définie par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx = m_1 \quad (1.4)$$

Plus  $\sigma$  est grand, plus la dispersion de la limite élastique est grande. Cette dispersion des valeurs de cette distribution de probabilité est mesurée par  $\sigma^2$ , appelé la variance

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f_1(x) dx = \sigma_1^2 \quad (1.5)$$

En effet, les aciéristes donnent à leurs productions seulement le paramètre  $m - 2\sigma$  défini comme :

$$\int_{-\infty}^{m-2\sigma} f_1(x) dx = 0.0228 \quad (1.6)$$

On peut dire que la limite élastique a une probabilité d'environ 0.0228 inférieure à  $m - 2\sigma$ . Notons que l'exemple ci-dessus peut être généralisé en remplaçant  $f$  par une fonction positive quelconque dont l'intégrale (sur toute la droite) est égale à 1.

### 1.3.3.2. Exemple (b)

Nous généralisons l'exemple précédent au cas de plusieurs variables :

On se donne un vecteur  $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  de l'espace  $\mathfrak{R}^n$  à  $n$  dimensions.

On définit le produit scalaire :

$$\vec{m} \cdot \vec{x} = (m, x) = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n$$

des vecteurs  $m$  et  $x$  (où  $x$  est un vecteur arbitraire). On se donne une matrice symétrique  $[V] = n^2$  c'est à dire un tableau symétrique de  $n^2$  nombres  $V_{ij}$ . On note  $[B]$  la matrice inverse de  $[V]$ . On suppose que la matrice  $[V]$  soit définie positive, autrement dit pour tout vecteur  $x$  non nul on a l'inégalité :

$$(V, x) = \sum_{i,j=1}^n V_{ij} x_i x_j > 0 \tag{1.7}$$

Soit  $|V|$  le déterminant de la matrice  $[V]$ , on pose alors :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}[B(x-m), x-m]} \tag{1.8}$$

Cette expression généralise (1).

## 1.4. Caractéristiques de la distribution de probabilité

### 1.4.1. Variable aléatoire

Une variable aléatoire est définie comme une fonction qui représente les événements en intervalles sur l'axe des nombres réels.

La définition d'une variable aléatoire peut être schématisée de la manière suivante : une grandeur physique mesurée par un nombre (résistance, température, vitesse du vent, . . .) est dite aléatoire si elle dépend du hasard. Autrement dit, une grandeur physique  $X_1$  peut être caractérisée par une application définie sur le hasard  $\Omega$  à valeurs réelles

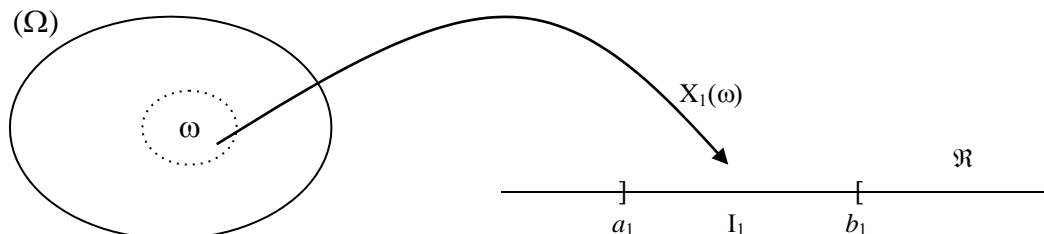


Figure 1.2 Schéma d'une variable aléatoire

" $X_1 \in I_1$ " est la partie de  $\Omega$ , formée par les points  $\omega$  de  $\Omega$ , tels que  $a_1 < X_1 < b_1$ . Une variable aléatoire  $X$  prend diverses valeurs  $x$  dans l'intervalle:  $-\infty < x < +\infty$ . Les variables aléatoires sont des valeurs mesurables dans l'espace de probabilité associé à des événements d'expériences.

**1.4.2. Fonction de répartition (CDF) :**

Si  $X$  est une variable aléatoire, on appelle fonction de répartition de  $X$ , la fonction  $F_X(x)$  telle que :

$$\forall x, F_X(x) = P(X < x) = P(X \in ]-\infty, x[) \tag{1.9}$$

La CDF est une fonction croissante de  $x$ .

**1.4.3. Fonction de densité de probabilité (PDF) :**

La fonction mathématique qui décrit la distribution d'une variable aléatoire sur l'espace échantillon de la variable aléatoire continue,  $X$ , est appelée fonction de densité de probabilité.

Si la loi de  $X$  admet une densité  $f_x$  on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_x(x) dx \tag{1.10}$$

d'où  $F'_X(x) = f_X(x)$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

(pour les nombres réels  $a$  et  $b$ )

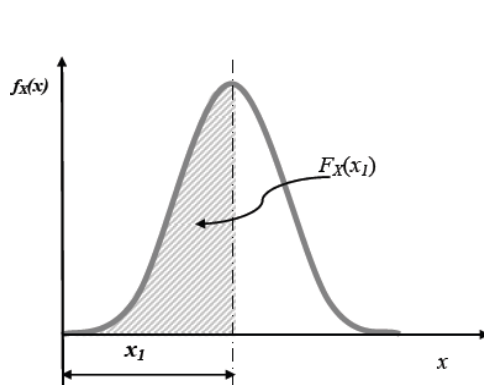


Fig.1.3a. Fonction de densité de probabilité

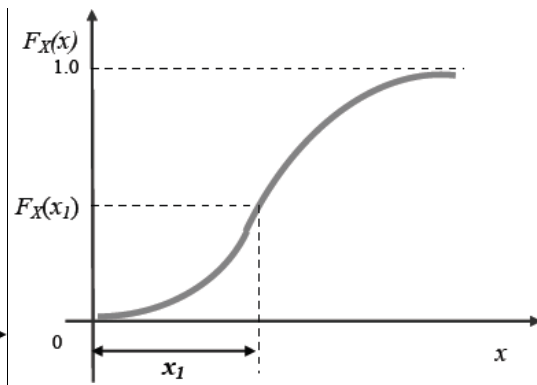


Fig.1.3b. Fonction de répartition(CDF)

### 1.4.4. Densité conjointe et fonctions de distribution

La probabilité conjointe exprime la probabilité que deux événements aléatoires ou plus se produisent simultanément. En général, s'il y a  $n$  variables aléatoires, le résultat est un vecteur aléatoire à  $n$  dimensions. Par exemple, la probabilité du cas bidimensionnelle est calculée comme :

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_c^d \int_a^b f_{xy}(x, y) dx dy \quad (1.11)$$

où  $f_{xy}(x, y)$  est la PDF conjointe des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ .

## 1.5 Paramètres de base d'une variable aléatoire

### 1.5.1. Moyenne, variance

Supposons que la variable aléatoire  $X$  a pour loi  $f_1(x_1) dx_1$ , on écrit :

$$X \sim f_1(x_1) dx_1 \quad (1.12)$$

La moyenne de la population, également appelée valeur attendue ou moyenne, est utilisée pour décrire la tendance centrale d'une variable aléatoire. Ceci est une moyenne pondérée de toutes les valeurs qu'une variable aléatoire peut prendre.

Si  $f_1(x)$  est la densité de probabilité fonction de  $x_1$ , On définit alors la moyenne de  $X$  (ou espérance mathématique de  $X$ ) par :

$$\bar{X} = m_1 = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_1) f_1(x_1) dx_1 \quad (1.13)$$

Selon la définition d'une variable aléatoire, toute fonction d'une variable aléatoire est elle-même une variable aléatoire. Par conséquent, si  $g(x)$  est une fonction arbitraire de  $x$ , la valeur attendue de  $g(x)f_x(x)$  est définie par :

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_x(x) dx \quad (1.14)$$

L'opérateur  $E[.]$ , Possède les propriétés utiles suivantes:

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendants

$$E[XY] = E[X].E[Y]$$

Et si  $C$  est une constante

$$E[c] = c \text{ et } E[cX] = cE[X]$$

Mais en général

$$E[g(X)] \neq g(E[X])$$

On définit la variance de X par :

$$\sigma^2(x) = \text{Var}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^2 f_1(x) dx \quad (1.15)$$

La variance,  $V(X)$  ou, est un deuxième moment central de X.

$$\sigma^2(x) = E[(x - \mu_x)^2] = E(x^2) - \mu_x^2 \quad (1.16)$$

Une mesure de la variabilité de la variable aléatoire est généralement donnée par une quantité connue sous le nom d'écart-type. L'écart-type est une racine carrée de la variance:  $\sigma_x = \sqrt{V(x)}$

le non-dimensionnement de l'écart type entrainera le coefficient de Variation,  $\text{CoV}_x$ , indique le degré d'incertitude relatif.

$$\text{CoV}_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x}$$

il est toujours positif par convention même si la moyenne est négative

### 1.5.2. La Covariance

Si deux variables aléatoires (X et Y) sont corrélées, la probabilité de X peut être affectée par la valeur prise par Y. Dans ce cas, la covariance  $\sigma_{xy}$ , peut être utilisée comme une mesure décrivant une association linéaire entre deux variables aléatoires:

$$\sigma_{xy} = \text{cov}(x, y) = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f_{xy}(x, y) dx dy \quad (1.18)$$

### 1.6. Indépendance, dépendance et coefficient de corrélation

Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires. On note  $f_1(X_1)$ ,  $f_2(X_2)$ ,  $f(X_1, X_2)$  les densités de  $X_1$ ,  $X_2$  et de la loi conjointe respectivement. On dit que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendants si :

$$f(X_1, X_2) = f_1(X_1) \cdot f_2(X_2) \quad (1.19)$$

Une méthode plus générale pour définir l'indépendance de deux variables aléatoires consiste à définir d'abord l'indépendance de deux événements  $E_1$

et  $E_2$ .

$$E_1 \text{ et } E_2 \text{ indépendants} \Leftrightarrow P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) \quad (1.20)$$

Puis l'on définit l'indépendance des deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  par la condition : quelque soient les intervalles  $I_1$  et  $I_2$ , les événements " $X_1 \in I_1$ " et " $X_2 \in I_2$ " sont indépendants. Graphiquement, cela se traduit par le fait que les ellipses d'égale densité ont des axes parallèles aux axes de coordonnées (figure 1.4)

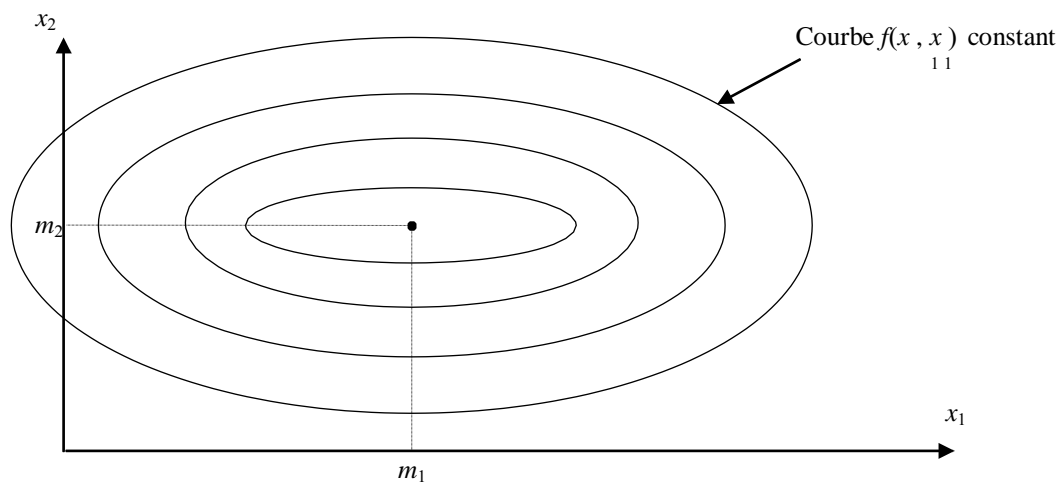


Figure 1.4 les ellipses d'égale densité

Dans le cas particulier où  $X_1$  et  $X_2$  sont gaussiennes l'expression de  $f$ , donnée par l'équation (1.8), avec  $n = 2$ , montre que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendants si, et seulement si,  $V_{12} = 0$ .

Au contraire, si ces ellipses ont des directions d'axes obliques et si elles s'allongent dans une certaine direction, ceci correspond à une certaine liaison entre  $X_1$  et  $X_2$ . Plus précisément, pour tout nombre réel  $k$ , on a, puisque l'intégrale d'une fonction positive est un nombre positif :

$$\iint [(x_2 - m_2) - k(x_1 - m_1)]^2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \geq 0 \quad (1.21)$$

En développant le crochet, on voit que cette relation équivaut à :

$$k^2 \sigma^2(x_2) - 2k \text{Cov}(X_1, X_2) + \sigma^2(X_1) \geq 0 \quad (1.22)$$

par conséquent

$$| \text{Cov}(X_1, X_2) | \leq \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} \quad (1.23)$$

Dans le cas particulier où l'on a une égalité, l'équation (1.22) admet la racine double  $k_0$ :

$$(x_2 - m_2) - k_0(x_1 - m_1) = 0 \quad (1.24)$$

Soit :

$$(x_2 - m_2) = k_0(x_1 - m_1)$$

d'où une relation de dépendance entre les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$ .

Le coefficient de corrélation est une mesure adimensionnelle de la corrélation. Le coefficient de corrélation linéaire, généralement notée  $\rho$  quantifie la force du lien linéaire entre les deux caractères d'une distribution, on le définit par

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (1.25)$$

Si  $x$  et  $y$  sont statistiquement indépendants, les variables ne sont pas corrélées et la covariance est égale à 0. Par conséquent, le coefficient de corrélation égal à 1 indique une corrélation parfaite.

Selon sa définition, le coefficient de corrélation aura toujours une valeur qui se situe dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .

Plus la valeur du coefficient de corrélation linéaire est près de 1 ou -1, plus le lien linéaire entre les deux variables est fort.

A l'inverse, plus sa valeur est près de 0, plus le lien linéaire entre les deux variables est faible.

Le coefficient de corrélation linéaire d'une distribution peut donner une idée de l'allure qu'a le nuage de points et inversement. Le signe du coefficient, positif ou négatif, indique le sens de la pente de la droite de régression. Pour bien comprendre le coefficient de corrélation, voici des nuages de points qui les représentent:

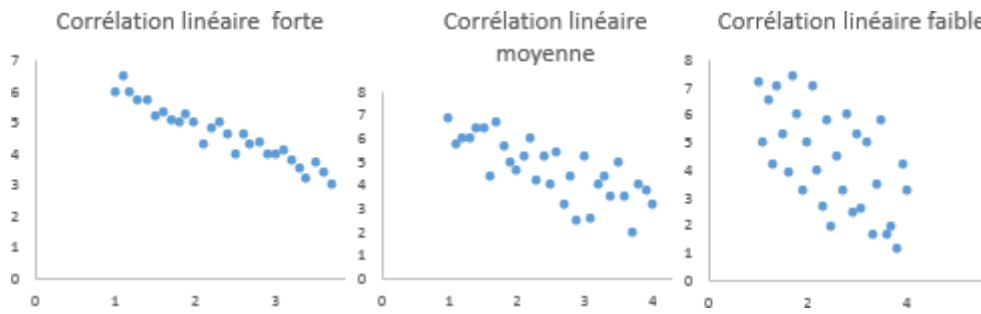


Figure 1.5a Corrélation linéaire négative

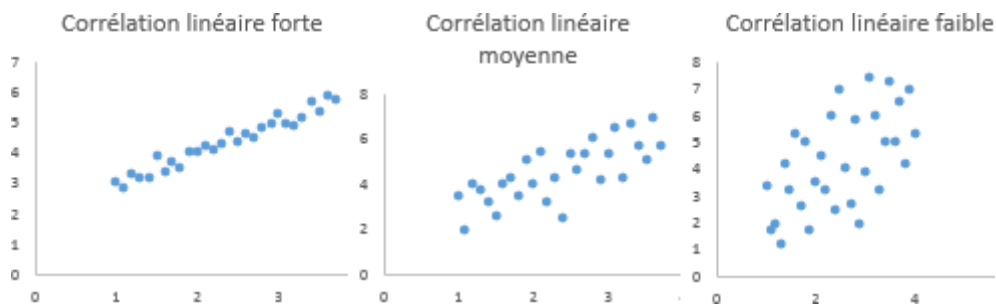


Figure 1.5b Corrélation linéaire positive

En conclusion, on a toujours  $-1 \leq \rho_{xy} \leq +1$

Lorsque  $|\rho_{xy}|$  est petit, les variables X et Y sont "peu" dépendantes : elles sont même indépendantes si  $\rho_{xy} = 0$  dans le cas gaussien (Lemaire, 2005). Lorsque  $|\rho_{xy}|$  est grand, les variables X et Y sont "très" dépendantes : elles sont même liées si  $\rho_{xy} = \pm 1$ .



Tableau 1.1: Propriétés des mesures centrales (moyennes) et de dispersion (variances)

Moyenne	$E[a_0] = a_0, E[a_1 X_1] = a_1 E[X_1]$ $E[X_1 X_2] = E[X_1] E[X_2]$ $E[a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2] = a_0 + a_1 E[X_1] + a_2 E[X_2]$
Variance	$\text{Var}[a_0] = 0, \text{Var}[a_1 X_1] = a_1^2 \text{Var}[X_1]$ $\text{Var}[a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2]$ $= a_1^2 \text{Var}[X_1] + a_2^2 \text{Var}[X_2] + 2 a_1 a_2 \text{Cov}(X_1, X_2)$ $= a_1^2 \text{Var}[X_1] + a_2^2 \text{Var}[X_2] + 2 a_1 a_2 \rho_{X_1 X_2} \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}$ $\text{Cov}(a_1 X_1, X_2) = a_1 \text{Cov}(X_1, X_2)$ $\text{Cov}(X_1, X_2 + X_3) = \text{Cov}(X_1, X_2) + \text{Cov}(X_1, X_3)$ $\text{Cov}(a_1 + X_1, a_2 + X_2) = \text{Cov}(X_1, X_2)$

En général : si  $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ , la variance de Y est :

$$\text{Var}[Y] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j); i \neq j$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \rho_{ij} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j}$$

## 1.7 Distributions de probabilités communes

En évaluant la fiabilité en géotechnique, plusieurs types de distributions de probabilité standardisées sont utilisés pour modéliser les paramètres de conception ou les variables aléatoires.

La sélection de la fonction de distribution est une partie essentielle pour l'obtention des caractéristiques probabilistes des différents paramètres des sols. La sélection d'un type de distribution dépend de :

- La nature du problème
- Les hypothèses sous-jacentes associées à la distribution
- La forme de la courbe entre  $f_X(x)$  (ou  $F_X(x)$ ) et X obtenue après

- La commodité et la simplicité offertes par la distribution dans les calculs

La sélection ou la détermination des fonctions de distribution des variables aléatoires est connue comme une tolérance statistique. En général, les premiers moments (moyenne, variance, asymétrie, etc.) de la distribution doivent être estimés et appariés grâce à l'utilisation de plusieurs techniques, y compris l'approximation de la série de Taylor, la méthode Taguchi et la méthode de Monte Carlo.

### 1.7.1 Distribution gaussienne

La distribution gaussienne (ou normale) est utilisée dans beaucoup d'ingénierie et de domaine de sciences en raison de sa simplicité et sa commodité. Elle constitue une base théorique du théorème de la limite centrale. Le théorème de la limite centrale stipule que de nombreuses distributions aléatoires suivent asymptotiquement une distribution normale lorsque la taille de l'échantillon devient grande. La distribution Gaussienne est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right] \quad ; \quad -\infty < x < +\infty \quad (1.26)$$

où les paramètres de la distribution  $\mu_x$  et  $\sigma_x$  indiquent la moyenne et l'écart type de la variable X, respectivement, et X est identifié par  $N(\mu_x, \sigma_x)$

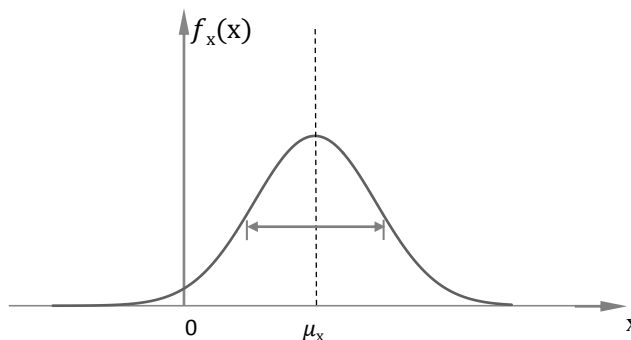


Figure 1.6. Fonction de densité de la loi normale

La distribution gaussienne est symétrique par rapport à sa moyenne et a des points d'inflexion à  $x = \mu_x \pm \sigma_x$

La distribution gaussienne peut être normalisée en posant  $t = (x - \mu_x) / \sigma_x$  pour donner la distribution normale standard  $N(0,1)$ . La fonction de densité de la variable normalement distribuée standard  $t$  est donnée par :

$$f_t(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}t^2\right], \quad -\infty < t < +\infty \quad (1.27)$$

La notation  $\Phi(x)$  est couramment utilisée par la fonction de répartition de la variable standard normalement distribuée  $t$  et est donnée par :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \quad (1.28)$$

### 1.7.1 Distribution lognormale

La distribution log-normale joue un rôle important dans la conception probabiliste, car les valeurs négatives des phénomènes d'ingénierie sont parfois physiquement impossibles.

Les utilisations typiques de la distribution log-normale se trouvent dans les descriptions de la fatigue, la corrosion, taux de défaillance et autres phénomènes impliquant un large éventail de données.

La variable aléatoire  $X$  est log-normale si  $Y = \text{Log}(x)$  est normalement distribué. Une variable aléatoire lognormale est définie pour les valeurs positives. Les relations suivantes sont importantes en application :

$$\sigma_{\log X}^2 = \log(V_X^2 + 1) \quad (1.29)$$

$$\mu_{\log X} = \log \mu_X - \frac{1}{2} \sigma_{\log X}^2 \quad (1.30)$$

## Conclusion

Avant d'aborder les concepts de fiabilité qui utilisent comme mesure l'estimation d'une probabilité, nous avons jugé nécessaire de faire un bref rappel sur les théories de probabilité. Pour résoudre les problèmes de fiabilité, il est logique de faire appel au calcul des probabilités. La nature aléatoire des paramètres d'entrée des sols et l'évaluation des différentes incertitudes exigent une bonne maîtrise et des connaissances de ces notions de base en théorie des probabilités et statistiques et la modélisation des aléas par des variables aléatoires. Ces connaissances sont indispensables pour

modéliser les paramètres de conception, pour la sélection des fonctions de distribution, pour le calcul des fréquences comme l'informatique est indispensable en numérique.

## CONCEPTS DE BASE DE LA FIABILITE

## **CHAPITRE 2**

### **CONCEPTS DE BASE DE LA FIABILITE**

La théorie de la fiabilité a comme objectif d'étudier l'aptitude de dispositifs techniques (machines, équipements, éléments,... etc.) à accomplir une fonction requise et le bon fonctionnement d'une structure (ou ouvrage) dans des conditions données et pour une durée de vie donnée.

Par définition, la fiabilité c'est la probabilité d'une structure (ou d'un dispositif quelconque) de fonctionner correctement sans défaillance dans des conditions déterminées et pour une période de temps définie. C'est aussi la sécurité que garantit une structure pour une période de temps définie. Il est logique de faire appel au calcul des probabilités pour résoudre des problèmes de fiabilité

Deux grandeurs sont communément employées dans la littérature pour l'évaluation de la fiabilité d'un ouvrage : l'indice de fiabilité et la probabilité de défaillance.

#### **2.1 Indice de fiabilité**

L'indice de fiabilité d'un ouvrage est une mesure de sa sûreté qui prend en compte les incertitudes inhérentes aux différentes variables d'entrée. L'indice de fiabilité le plus utilisé est celui de Hasofer et Lind (1974). Il est défini comme étant la distance minimale, exprimée en nombre d'écart-types, entre le point représentant les valeurs moyennes des variables aléatoires et la surface d'état limite (Fig. 2.1)

La surface d'état limite  $G(x) = 0$  sépare l'espace des variables aléatoires en deux domaines : un domaine de défaillance  $F$  défini par  $G(x) \leq 0$  et un domaine de sûreté où  $G(x) > 0$ .

L'approche classique pour le calcul de l'indice de fiabilité  $H_L$  consiste à ramener la surface d'état limite dans un espace de variables aléatoires non corrélées, normales, centrées et réduites. Le passage des variables non-normales aux variables normales est réalisé par des transformations isoprobabilistes (Lemaire, 2005). La décorrélation s'effectue par une rotation des axes du repère physique vers des nouveaux axes colinéaires avec les axes principaux de l'ellipsoïde de dispersion unitaire. Une translation est

ensuite effectuée pour ramener le centre de l'ellipsoïde au niveau de l'origine du repère, ce qui permet d'obtenir des variables centrées. Enfin, une normalisation des différentes variables aléatoires est réalisée en divisant chacune de ces variables par son écart-type. Dans ce nouveau repère, appelé repère des variables standard non corrélées, l'ellipse (dans le cas de deux variables aléatoires) de dispersion unitaire initiale devient un cercle centré à l'origine de rayon égal à l'unité. La distance minimale entre l'origine et la surface d'état limite représente l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind.

Récemment, une interprétation intuitive de l'indice de fiabilité a été suggérée par Low (1997) et Low et Tang (1997b, 2004) où le concept d'une ellipse homothétique amène à une méthode simple et directe pour le calcul de l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind dans l'espace physique des variables aléatoires.

Il est important de mentionner ici que si les écarts types des variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  augmentent (ce qui traduit une plus grande incertitude sur les paramètres), l'ellipse de dispersion unitaire s'agrandit et le ratio des axes (i.e. indice de fiabilité) de l'ellipse de dispersion critique à l'ellipse de dispersion unitaire diminue indiquant un niveau de fiabilité plus faible.

Cette capacité de l'indice de fiabilité à refléter le degré d'incertitude des paramètres est une des raisons qui fait qu'il est plus rationnel que le facteur de sécurité traditionnel.

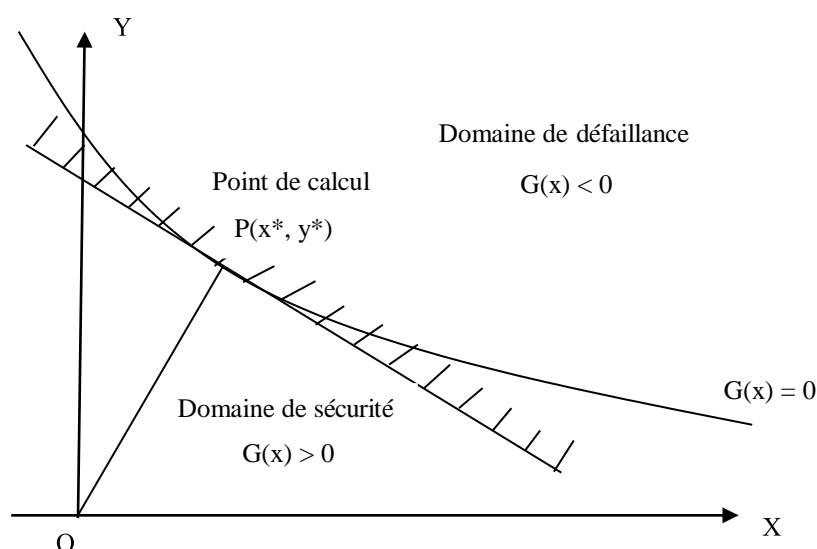


Figure 2.1. Représentation de l'indice de Hasofer-Lind : la distance  $OP^*$  est l'indice

## 2.2 Probabilité de défaillance

Etant donné un vecteur  $X$  de  $n$  variables aléatoires et une fonction de performance définie par  $G(x)$ , la probabilité de défaillance  $P_f$  est définie par :

$$P_f = \int_{G(x) \leq 0} f_x(x) dx \quad \text{pour } G(x) \leq 0 \quad (2.1)$$

où  $f_x(x)$  est la fonction densité de probabilité conjointe  $f_x$  des variables aléatoires  $X$ . En introduisant la fonction indicatrice  $I(x)$  définie par :

$$I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } G(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } G(x) > 0 \end{cases}$$

L'intégrale qui donne la probabilité de défaillance (éq. 33) peut s'écrire :

$$P_f = \int_{\Omega} I(x) f_x(x) dx \quad \text{sur tout } \Omega \quad (2.2)$$

où  $\Omega$  est le domaine entier. L'évaluation analytique de cette intégrale est très difficile, voire impossible dans la plupart des cas. Plusieurs méthodes ont été suggérées dans la littérature pour le calcul de la probabilité de défaillance. La méthode FORM (*First Order Reliability Method*) et la méthode SORM (*Second Order Reliability Method*) fournissent des solutions approchées. Cependant, les méthodes de simulation telles que la méthode de Monte-Carlo (MC) ou la méthode du tirage d'importance (*Importance Sampling*, IS) donnent une bonne estimation de la probabilité de défaillance. Toutefois, ces méthodes sont numériquement très consommatrices en temps d'exécution.

A partir de la méthode FORM et de l'indice de fiabilité de Hasofer et Lind, la probabilité de défaillance peut être approchée par :  $P_f \approx \Phi(-\beta_{HL})$

où  $\Phi(x)$  est la fonction de répartition d'une variable standard. Dans cette méthode, la fonction d'état limite est approchée par un hyperplan (approximation du premier ordre) tangent à la surface d'état limite au point de défaillance le plus probable appelé « point de calcul » (*design point*).



## 2.3 Le facteur de sécurité central et sa relation avec l'indice de fiabilité pour les variables normales et lognormales corrélées

L'analyse de fiabilité évalue la probabilité de défaillance structurelle en déterminant si les fonctions à l'état limite sont dépassées. Cependant, l'analyse de fiabilité ne se limite pas au calcul de la probabilité de défaillance. L'évaluation de diverses propriétés statistiques, telles que les fonctions de distribution de probabilité et les intervalles de confiance des réponses structurelles, joue un rôle important dans l'analyse de fiabilité.

### 2.3.1 Évaluation de la fiabilité structurelle

Lorsqu'une structure (ou une partie d'une structure) dépasse une limite spécifique, la structure (ou une partie de la structure) n'est pas en mesure de fonctionner comme requis, alors la limite spécifique est appelée état limite. La structure sera considérée comme non fiable si la probabilité de défaillance de l'état limite de la structure dépasse la valeur requise.

Généralement; L'état limite ou la fonction de performance  $Z = G(R, S) = R - S$  indique généralement la marge de sécurité entre la résistance  $R$  et la charge  $S$  et la probabilité de défaillance  $P_f$  de la fondation filante superficielle peut être définie comme :

$$P_f = P(R \leq S) = P(G(R, S) \leq 0) \quad (2.3)$$

Le problème de fiabilité structurelle de base ne considère qu'un seul effet de charge  $S$  supporté par une résistance  $R$ . Chacun est décrit par une fonction de densité de probabilité connue,  $f_S()$  et  $f_R()$  respectivement. Comme indiqué,  $S$  peut être obtenu à partir de la charge  $Q$  appliquée grâce à une analyse structurale (déterministe ou avec des composants aléatoires). Il est important que  $R$  et  $S$  soient exprimés dans les mêmes unités.

$R(X)$  et  $S(X)$  sont tous deux des fonctions de variables aléatoires  $X$ . La notation  $G(X) < 0$  désigne la région de défaillance. De même,  $G(X) = 0$  et  $G(X) > 0$  indiquent respectivement la surface de rupture et la région de sécurité.

$G(X)$  est appelée «fonction d'état limite ou fonction de performance » et la probabilité de défaillance est identique à la probabilité de rupture de l'état limite.

### 2.3.2 R et S sont des variables normales

L'exemple le plus notable est lorsque la résistance R et la charge S sont des variables aléatoires normales avec des moyennes  $\mu_R$  et  $\mu_S$  et des variances  $\sigma_R^2$  et  $\sigma_S^2$  respectivement.

Il s'ensuit que la marge de sécurité Z a une moyenne  $\mu_Z$  et une variance  $\sigma_Z^2$  donnée par :

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_S \quad (2.4a)$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho_{RS}\sigma_R\sigma_S \quad (2.4b)$$

où  $\rho_{RS}$  est le coefficient de corrélation linéaire entre R et S, et  $\sigma_R$  et  $\sigma_S$  sont les écarts-types de R et S, respectivement.

L'indice de sécurité ou l'indice de fiabilité  $\beta$  est défini comme :

$$\beta = \mu_Z / \sigma_Z = (\mu_R - \mu_S) / (\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho_{RS}\sigma_R\sigma_S)^{1/2} \quad (2.5)$$

Si la résistance et la charge ne sont pas corrélées ( $\rho_{RS} = 0$ ), l'indice de fiabilité devient

$$\beta = \mu_Z / \sigma_Z = (\mu_R - \mu_S) / (\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^{1/2} \quad (2.6)$$

L'indice de sécurité indique la distance entre la marge de sécurité moyenne et  $Z = 0$ . La figure 2.2 montre une illustration géométrique de l'indice de fiabilité dans un cas unidimensionnel.

L'idée derrière l'indice de fiabilité est que la distance entre la mesure de l'emplacement et la surface d'état limite fournit une bonne mesure de la fiabilité. La distance est mesurée en unités du paramètre d'échelle d'incertitude.

$Z = R - S$  est représenté sur la figure 2.2 dans laquelle la région de défaillance  $Z \leq 0$  est représentée en traits hachurés et identifie la probabilité de défaillance.

Lorsque les variables aléatoires R et S suivent une distribution normale, la défaillance de la fondation superficielle filante est définie comme :

$$Z = R - S \leq 0$$

un cas particulier où R et S sont non corrélées, La fonction de performance Z est également normalement distribuée, puisqu'elle est une fonction linéaire de R et S et l'expression du facteur de sécurité central  $\lambda_0$  est donnée par :

$$\lambda_0 = \mu_R / \mu_S \quad (2.7)$$

Ainsi, la fonction de densité de probabilité de la fonction d'état limite ou de la fonction de performance est :

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma_Z \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu_Z}{\sigma_Z} \right)^2 \right] \quad (2.8)$$

et la probabilité de défaillance peut s'écrire:  $P_f = P(Z \leq 0)$  ou

$$P_f = \int_{-\infty}^0 f_Z(z) dz \quad (2.9)$$

Lorsque la distribution est normale standard  $Z = 0$  :

$$P_f = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sigma_Z \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{0 - \mu_Z}{\sigma_Z} \right)^2 \right] dz \quad (2.10)$$

$$P_f = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sigma_Z \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta^2 \right] dz = 1 - \phi(\beta) = \phi(-\beta) \quad (2.11)$$

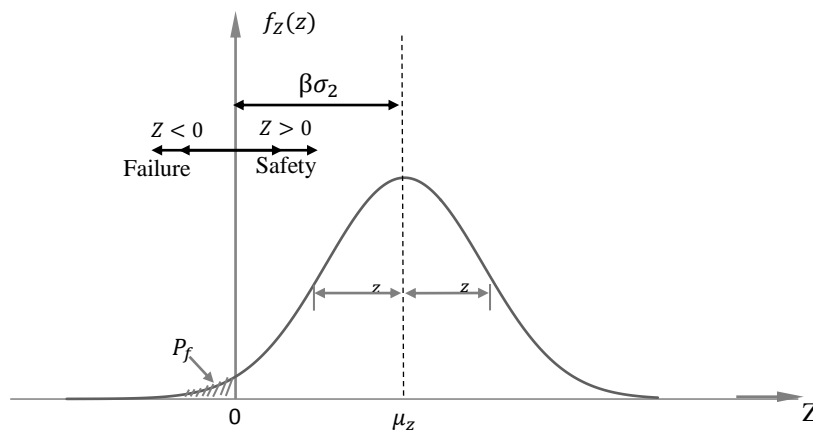


Figure 2.2. Distribution de la marge de sécurité  $Z=R-S$ .

où  $\phi(x)$  est la fonction de distribution normale standard (moyenne nulle et variance unitaire)  
 et  $\beta = \mu_Z / \sigma_Z$  est défini comme l'indice de fiabilité ( Benjamin et Cornell, 2014).

En utilisant (2.4) et (2.10), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
 P_f &= \phi \left( \frac{-(\mu_R - \mu_S)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho_{RS}\sigma_R\sigma_S}} \right) \\
 &= \phi \left( \frac{-(\mu_R - \mu_S)}{\sqrt{V_R^2\mu_R^2 + V_S^2\mu_S^2 - 2\rho_{RS}V_R\mu_RV_S\mu_S}} \right) = \phi(-\beta)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Division par  $\mu_S$  et introduisons le facteur de sécurité central

$$\lambda_0 = \frac{\mu_R}{\mu_S} \tag{2.13}$$

dans Eq.A4, on obtient l'expression suivante pour  $\lambda_0$  :

$$\lambda_0 = \frac{(1 - \beta^2\rho_{RS}V_RV_S) + \sqrt{\Delta}}{1 - \beta^2V_R^2} \tag{2.14}$$

avec  $\Delta = \beta^4(\rho_{RS}^2 - 1)V_R^2V_S^2 + \beta^2(V_R^2 + V_S^2 - 2\rho_{RS}V_RV_S)$ .

où  $V_R$  et  $V_S$  sont les coefficients de variation des variables aléatoires R et S respectivement [Benjamin et Cornell, 2014].

### 2.3.3 R et S sont des variables lognormales

Lorsque R et S sont décrits par une distribution lognormale, la défaillance est défini comme  $Z = R / S < 1$ , un résultat exactement parallèle est obtenu et la probabilité de ruine est donnée par:

$$P_f = P(R \leq S) \text{ ou } P_f = P(R \leq S) \quad (2.15)$$

Dans le cas où R et S sont dépendants:

$$P_f = P(R \leq S) = P\left(\frac{R}{S} \leq 1\right) = P\left(\log \frac{R}{S} \leq 0\right) = P(\log R - \log S \leq 0)$$

ou

$$P_f = \phi\left(\frac{-(\overline{\log R} - \overline{\log S})}{\sqrt{\sigma_{\log R}^2 + \sigma_{\log S}^2 - 2\rho_{RS} \sigma_{\log R} \sigma_{\log S}}}\right) = \phi(-\beta) \quad (2.16)$$

et si  $\log R$  et  $\log S$  ont une distribution normale R et S ont une distribution lognormale, on obtient:

$$\sigma_{\log R}^2 = \log(V_R^2 + 1) \quad \text{et} \quad \sigma_{\log S}^2 = \log(V_S^2 + 1) \quad (2.17)$$

Selon (2.17) , on obtient :

$$P_f = \phi\left(\frac{-(\overline{\log R} - \overline{\log S})}{\sqrt{\log(V_R^2 + 1)(V_S^2 + 1) - 2\rho_{RS} \sqrt{\log(V_R^2 + 1)(V_S^2 + 1)}}}\right) \quad (2.18)$$

$$\overline{\log R} = \mu_{\log R} = \log \mu_R - \frac{1}{2} \sigma_{\log R}^2 \quad \text{and} \quad \overline{\log S} = \mu_{\log S} = \log \mu_S - \frac{1}{2} \sigma_{\log S}^2$$

Pour des coefficients de variation inférieurs à 0,2, on peut considérer la variance des variables  $\log R$  and  $\log S$  respectivement égales à  $V_R^2$  et  $V_S^2$  donc:

$$P_f = \phi\left(\frac{-(\log \mu_R - \log \mu_S)}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2 - 2\rho_{RS} \sqrt{V_S^2 \times V_R^2}}}\right) \quad (2.19)$$

Finalement l'expression du coefficient central  $\lambda_0$  est égale à:

$$\lambda_0 = e^{-\phi_{\rho_f}^{-1} \sqrt{V_R^2 + V_S^2 - 2\rho_{RS} \sqrt{V_S^2 \times V_R^2}}} \quad (2.20)$$

Lorsque R et S sont corrélés

### Relation entre $\lambda_0$ et $\beta$ indice de fiabilité

$$P_f = \phi\left(\frac{-\log^{\mu_R/\mu_S}}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2 - 2\rho_{RS} V_R V_S}}\right) = \phi(-\beta) \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{\log^{\mu_R/\mu_S}}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2 - 2\rho_{RS} V_R V_S}}$$

$$\lambda_0 = e^{\beta \sqrt{V_R^2 + V_S^2 - 2\rho_{RS} V_R V_S}} \quad (2.21)$$

$$\rho_{RS} = 0 \quad \lambda_0 = e^{\beta \sqrt{V_R^2 + V_S^2}} \quad (2.21a)$$

$$\rho_{RS} = -1 \quad \lambda_0 = e^{\beta \sqrt{V_R^2 + V_S^2 + 2V_R V_S}} \quad (2.21b)$$

$$\rho_{RS} = -1/2 \quad \lambda_0 = e^{\beta \sqrt{V_R^2 + V_S^2 + V_R V_S}} \quad (2.21c)$$

## 2.4 Simulation de Monte Carlo (MCS)

### Méthodes d'échantillonnage

Un avantage fondamental des méthodes d'échantillonnage est leur utilisation directe d'expériences pour obtenir des solutions mathématiques ou des informations probabilistes concernant des problèmes dont les équations du système ne peuvent pas être résolues facilement par des procédures connues.

La simulation de Monte Carlo, provient des travaux de recherche de Neumann et Ulam en 1949 . La simulation de Monte Carlo (MCS) est connue comme une méthode d'échantillonnage aléatoire simple ou une méthode d'essai statistique qui réalise des réalisations basées sur des ensembles d'échantillonnage générés de manière aléatoire pour des variables incertaines. L'application de la méthode de Monte Carlo aux problèmes d'analyse probabiliste est relativement récente, devenant pratique seulement avec l'avènement des ordinateurs. Il s'agit d'un puissant outil mathématique pour déterminer la probabilité approximative d'un événement spécifique qui est le résultat d'une série de processus stochastiques. La méthode de Monte Carlo consiste en la génération numérique de variables et de fonctions aléatoires, l'analyse statistique des résultats des essais et des techniques de réduction des variables. Ces procédures mathématiques permettent de simuler une réalisation d'une variable aléatoire de loi donnée.

La procédure de calcul de MCS est assez simple:

- 1) Sélectionnez un type de distribution pour la variable aléatoire
- 2) Générer un ensemble d'échantillonnage à partir de la distribution

Effectuer des simulations à l'aide de l'ensemble d'échantillonnage généré La méthode de Monte Carlo, par exemple consiste à simuler des réalisations de la fonction de performance et à compter le nombre des événements de défaillances obtenus. Si  $n$  est nombre des simulations, on admet que la fréquence des événements de défaillances tend vers la probabilité de défaillance lorsque  $n \rightarrow \infty$  :

$$P_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{nombre des événements où } G(X) < 0}{\text{nombre total des événements simulés}}$$

Une telle procédure présente l'intérêt de la simplicité, à condition de savoir simuler une variable aléatoire de loi donnée, mais possède une convergence très lente (en  $\sqrt{n}$ ), d'autant que le nombre des simulations doit être supérieur à l'inverse de la probabilité de défaillance

## 2.5 Facteurs de sensibilité et facteurs d'omission

Les facteurs de sensibilité représentent l'importance relative des variables aléatoires dans un calcul fiabiliste. Il existe plusieurs formes de ces facteurs dans la littérature (Lemaire, 2005).

Si les variables aléatoires sont corrélées, les indices utilisés pour déterminer l'indice de Hasofer-Lind n'ont plus un sens physique dû à la transformation de l'espace physique corrélé à l'espace standard non corrélé (Melchers, 1999 ; p. 101). Dans ce cas, un autre facteur, appelé « facteur d'omission » peut être utilisé ; il représente l'erreur relative commise dans le calcul de l'indice de fiabilité quand une variable aléatoire est remplacée par sa valeur moyenne déterministe. Ce facteur

$$\text{est donné par : } \gamma_i(\mu_i) = \frac{\beta_{HL}(x_i = \mu_i)}{\beta_{HL}} \quad (2.22)$$

où  $\beta_{HL}$  est la valeur de l'indice de fiabilité déterminée quand tous les paramètres sont considérés comme des variables aléatoires et est l'indice de fiabilité calculé en remplaçant  $x_i$  par sa valeur moyenne déterministe.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé d'une manière succincte, quelques méthodes et approches fiabilistes qu'on a utilisées, l'indice de fiabilité avec la probabilité de défaillance sur lesquels on s'appuie pour évaluer la fiabilité et la sécurité d'un ouvrage, la capacité de l'indice de fiabilité à refléter le degré d'incertitude des paramètres est une des raisons qui fait qu'il est plus rationnel que le facteur de sécurité traditionnel. Les facteurs de sensibilité et facteurs d'omission qui sont d'une grande importance pour l'analyse fiabiliste.

Pour le calcul de la probabilité de défaillance, la méthode FORM (*First Order*



*Reliability Method*) et la méthode SORM (*Second Order Reliability Method*) fournissent des solutions approchées, la méthode de simulation de Monte Carlo (MCS) donne une bonne estimation de la probabilité de défaillance malgré sa consommation en temps d'exécution. Enfin on a montré les relations qui existent entre le facteur de sécurité central et l'indice de fiabilité pour les deux cas de distributions normales et lognormales, variables corrélées ou non corrélées.

VARIABILITE DES PARAMETRES GEOTECHNIQUES ET  
DISTRIBUTION DE PROBABILITE DE LA CAPACITE PORTANTE  
ULTIME

## **CHAPITRE 3**

# **VARIABILITE DES PARAMETRES GEOTECHNIQUES ET DISTRIBUTION DE PROBABILITE DE LA CAPACITE PORTANTE ULTIME**

### **3.1. Variabilité des paramètres géotechniques**

L'analyse de la fiabilité des fondations nécessite entre autres que le coefficient de variation (CoV) des paramètres géotechniques soit connu. Ce paramètre sans dimension représente une mesure pratique de la dispersion des données autour de la moyenne de l'échantillon (e.g. Benjamin et Cornell, 2014).

Malgré le manque de données expérimentales sur la variabilité des sols sableux, diverses valeurs de coefficients de variation de l'angle effectif de frottement interne et le poids spécifique du sol peuvent toutefois être trouvées dans la littérature spécialisée. Des estimations des coefficients de variation peuvent être établies (lorsque suffisamment de données ne sont pas disponibles) sur la base des valeurs publiées ou de la «règle des trois sigma» (e.g. Duncan, 2000). Dans la plage des valeurs communes attendues de l'angle de frottement interne effectif,  $\phi'$ , pour les sols sableux ( $20^\circ < \phi' < 40^\circ$ ), le  $\text{CoV}_{\phi'}$  varie généralement entre 5 et 15%. (e.g. Phoon et Kulhawy, 1999a, 1999b; Forest et Orr, 2010) et peut atteindre 25% (Becker, 1996).

Pour le poids spécifique du sol,  $\gamma$ , le coefficient de variation peut atteindre 10% (par exemple, Forrest et Orr, 2010), voire parfois même davantage (par exemple, Phoon & Kulhawy, 1999b; Becker, 1996). De plus, peu de données sont disponibles pour quantifier les corrélations entre  $\phi'$  et  $\gamma$  (e.g. Parker et al., 2008). Il est à noter qu'une corrélation positive pour la paire de variables de sol  $\phi'$  et  $\gamma$  implique que les deux variables ont tendance à prendre simultanément de grandes valeurs ou de petites valeurs. Un coefficient de corrélation positif pour ces variables aléatoires pour les sols sableux est le plus souvent supposé dans la littérature (par exemple, Chowdhury et Xu, 1992; Sivakumar Babu et Srivastava, 2007).

Des données expérimentales montrant une corrélation positive entre  $\phi'$  et  $\gamma$  supérieure à 70% peuvent être trouvées dans les rares références disponibles (Matsuo et Kuroda, 1974; Ameratunga et al., 2016). Dans cette étude, les valeurs illustratives utilisées pour les moments statistiques des variables de sol et leur coefficient de corrélation  $\rho_{\phi'\gamma}$  sont les suivantes:  $\mu_{\phi'}=25^\circ$ ;  $\mu_{\gamma}=19.61\text{kN/m}^3$ ;  $\text{CoV}\phi' = 10, 15, 20$  et  $25\%$ ;  $\text{CoV}\gamma = 0, 3, 7$  et  $10\%$ ;

et  $\rho_{\phi'\gamma} = 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60$  and  $70\%$ .

### 3.2. Distribution de probabilité de la capacité portante ultime

#### 3.2.1. Modèle déterministe de la capacité portante ultime

Sur la base d'un critère de rupture par cisaillement, Terzaghi développa en 1943 un modèle général pour évaluer la capacité portante ultime des fondations superficielles, utilisant trois facteurs de capacité portante  $N_c$ ,  $N_q$  et  $N_\gamma$ , tous dépendant de l'angle de frottement interne du sol et présentés sous forme graphique. Krizek (1965) a ensuite approché commodément ces facteurs de capacité portante pour  $\phi' = 0$  à  $35^\circ$  comme suit:

$$N_c = \frac{228+4.3\phi'}{40-\phi'}, N_q = \frac{40+5\phi'}{40-\phi'} \text{ et } N_\gamma = \frac{6\phi'}{40-\phi'} \quad (3.1)$$

$$q_{ult} = \frac{(228+4.3\phi')c+(40+5\phi')q+3\phi'\gamma B}{40-\phi'} \quad (3.2)$$

où  $q = \gamma.D$  est la surcharge,  $\phi'$  l'angle de frottement interne effectif (en degrés),  $\gamma$  le poids spécifique du sol,  $D$  la profondeur de la base de la fondation et  $B$  la largeur de la fondation.

Pour les sols sableux ( $c \approx 0$ ), l'expression  $q_{ult}$  de la capacité portante ultime des fondations superficielles filantes devient:

$$q_{ult} = \frac{(40+5\phi')\gamma D + 3\phi'\gamma B}{40-\phi'} \quad (3.3)$$

Il convient de noter que l'équation (3.3) présente des écarts non-négligeables par rapport à la formule de Terzaghi de la capacité portante des fondations superficielles pour les valeurs de  $\phi'$  au-delà de  $35^\circ$ . Cependant, comme nous le verrons plus loin, elle fournit un moyen simple et précis pour effectuer une analyse et un calcul fiables de fondations reposant sur des sols pulvérulents, conjointement

avec le modèle de Terzaghi de prédiction classique d'évaluation de la capacité portante ultime pour des valeurs de  $\varphi' \leq 35^\circ$ .

Les expressions analytiques des dérivées du premier ordre et des dérivées du second ordre correspondant aux facteurs de capacité portante nécessaires pour une analyse fiabiliste des fondations reposant sur des sols pulvérulents basées sur les solutions déterministes simplifiées de Krizek sont données à l'Annexe A.

### 3.2.2 Modèle probabiliste de la capacité portante ultime en utilisant la méthode de simulation de Monte Carlo

#### 3.2.2.1. Le modèle probabiliste à paramètres non-corrélés

Pour examiner les effets des coefficients de variation des variables de sol sur la probabilité de défaillance des fondations, un exemple numérique incluant les deux cas de distribution normale et lognormale des propriétés du sol non corrélées est considéré avec  $B = 2\text{m}$  et  $D = 0,5\text{m}$ . Sur la base de la technique de simulation de Monte Carlo, nous générons  $N$  échantillons aléatoires de paramètres de sol avec des caractéristiques probabilistes présumées à partir desquelles nous calculons les statistiques d'échantillon requises pour les estimations de probabilité de défaillance.

Si  $N_f$  est le nombre de cycles de simulation lorsque  $g_q(\varphi', \gamma)$  est inférieur à zéro,

la probabilité de défaillance de base peut être estimée par la formule  $p_f = \frac{N_f}{N}$ .

**Tableau 3.1**

Probabilité de défaillance  $P_f$  (%) de la capacité portante ultime pour les distributions de probabilité normale et lognormale des paramètres de sol non corrélés ( $\mu_\varphi = 25^\circ$ ;  $\mu_\gamma = 19.61 \text{ kN/m}^3$ )

Cov $\phi$ (%)	Normal variables				Lognormal variables			
	Cov $\gamma$ (%)				Cov $\gamma$ (%)			
	0	3	7	10	0	3	7	10
10	$\approx 0$	$\approx 0$	$\approx 0$	0.002	$\approx 0$	$\approx 0$	$\approx 0$	$\approx 0$
15	0.120	0.130	0.150	0.196	0.003	0.004	0.008	0.016
20	1.157	1.187	1.252	1.376	0.151	0.161	0.209	0.288
25	3.498	3.507	3.637	4.121	0.961	0,988	1.112	1.313

Le tableau 3.1 présente la distribution des probabilités de défaillance de la capacité portante ultime pour les variables non corrélées ( $\rho_{\varphi', \gamma} = 0$ ), normales et lognormales données par la méthode de simulation de Monte Carlo (MCS) pour les valeurs illustratives des paramètres de sol à l'aide de la fonction de performance  $g_q(\varphi', \gamma)$  suivante:

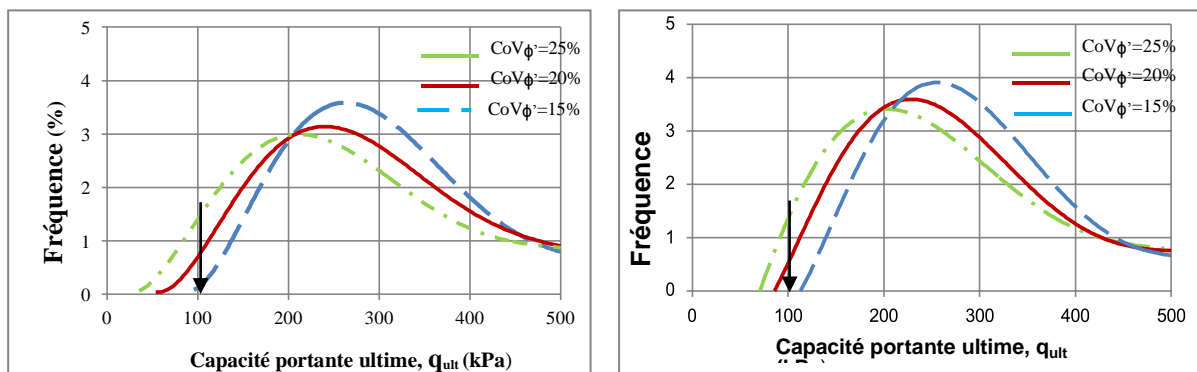
$$g_q(\varphi', \gamma) = q_{ult}(\varphi', \gamma) - q_{ad} \tag{3.4}$$

où  $q_{ad}$  représente la capacité portante admissible du sol.

Les résultats obtenus pour  $CoV_\gamma = 0$ , (i.e. Poids spécifique du sol considéré déterministe) correspondent pratiquement à la solution d'Easa (Easa, 1992) basée uniquement sur la distribution de probabilité normale de paramètres de sol non corrélés. La capacité portante admissible  $q_{ad}$  correspondant à la capacité portante ultime déterministe (Eq.3.3) avec un facteur de sécurité  $F = 3$ , est de 101,3 kPa. (c.à.d. = 303.9 kPa) for  $\phi = 25^\circ$  et  $\gamma = 19.61 \text{ kN/m}^3$ .

Il est clair que les variations du poids spécifique du sol ont un effet considérable sur la probabilité de défaillance, en particulier lorsque le coefficient de variation du poids spécifique du sol est relativement grand ( $CoV_\gamma = 10\%$ ) et que l'angle de frottement effectif est inférieur ou égal à 15%. Par exemple, dans le cas de la distribution normale des paramètres de sol et pour  $CoV_\gamma = 10\%$  et  $CoV_{\phi'} = 15\%$ , la probabilité de défaillance, est égale à 0,196%, contre 0,12% lorsque  $\gamma$  est considéré comme déterministe. Cela représente une augmentation de 63% de  $P_f$ . Pour les mêmes incertitudes des variables de sol et pour le cas d'une distribution lognormale, l'augmentation de  $P_f$  atteint plus de quatre fois la probabilité de défaillance, lorsque  $\gamma$  est déterministe.

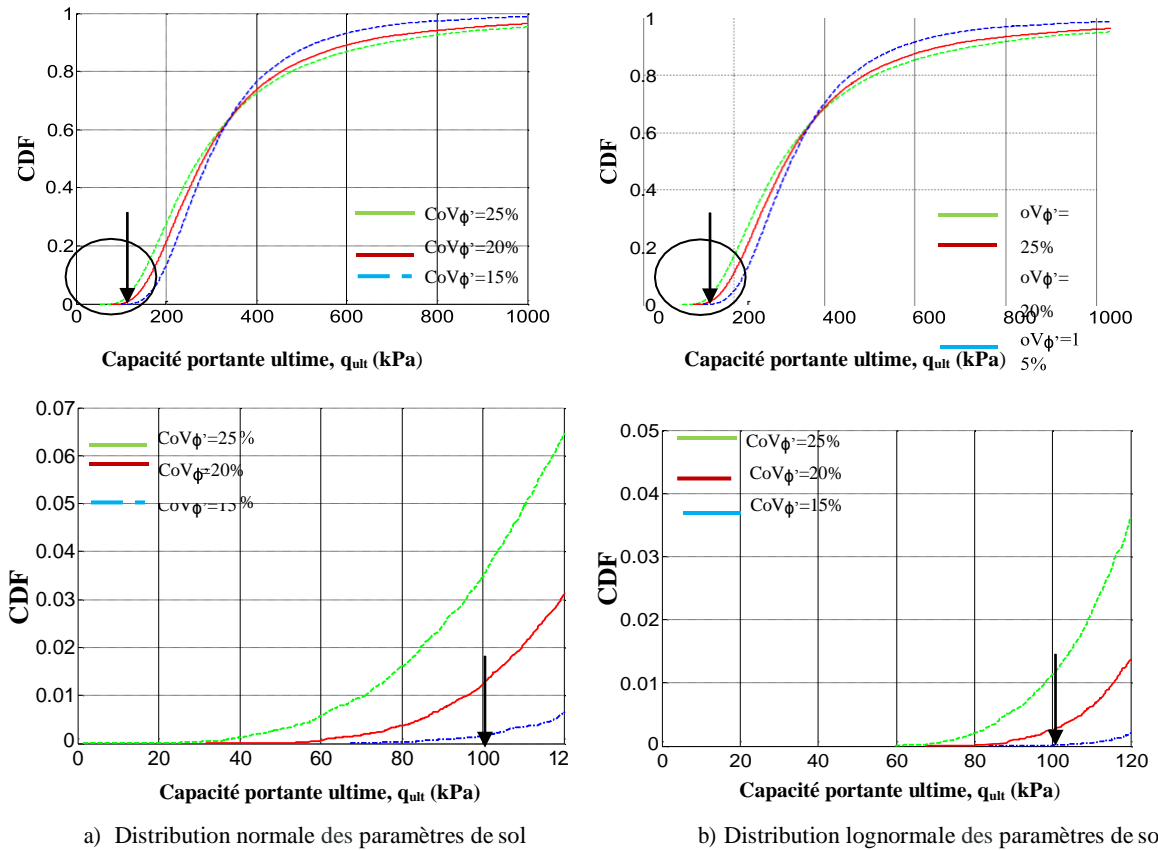
Si l'on considère la figure 3.1, on observe pour une distribution normale des paramètres de sol une PDF de la capacité portante ultime plus étalée que pour une distribution lognormale. Il est également important de noter que pour évaluer la sécurité de la fondation, les branches inférieures du CDF tracées à la Fig. 3.2 doivent être examinées en détail.



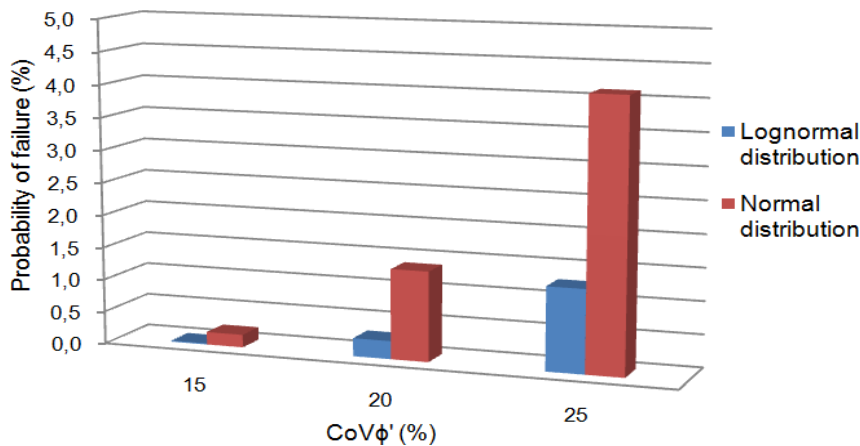
a) Distribution normale des paramètres de sol

b) Distribution lognormale des paramètres de sol

**Fig. 3.1.** Fonction de distribution de probabilité (PDF) de la capacité portante ultime utilisant la MCS pour des distributions (a) normale et (b) lognormale des paramètres de sol ( $\mu_{\phi'} = 25^\circ$ ;  $\mu_\gamma = 19.61 \text{ kN/m}^3$ ,  $CoV_\gamma = 10\%$ )



**Fig. 3.2.** Fonction de répartition (CDF) de la capacité portante ultime utilisant la MCS pour des distributions (a) normale et (b) log-normale des paramètres de sol ( $\mu_{\phi'}=25^\circ$ ;  $\mu_\gamma=19.61 \text{ kN/m}^3$ ,  $\text{CoV}\gamma=10\%$ )



**Fig. 3.3.** Probabilité de défaillance de la capacité portante ultime pour différents  $\text{CoV} \phi'$  en supposant des distributions normales et lognormales des variables de sol ( $\mu_{\phi'}=25^\circ$ ;  $\mu_\gamma=19.61 \text{ kN/m}^3$ ,  $\text{CoV}\gamma=10\%$ )

La figure 3.3 présente l'effet de  $\text{CoV}\phi'$  sur la probabilité de défaillance  $P_f$  de la capacité portante ultime pour les distributions normales et lognormales. On peut constater que le faible changement des valeurs de  $\text{CoV}\phi'$  affecte fortement la

probabilité de défaillance  $P_f$  de la capacité portante ultime, en particulier dans le cas de la distribution normale des paramètres de sol.

### 3.2.2.2 Le modèle probabiliste de la capacité portante ultime à paramètres corrélés

La capacité portante ultime est calculée à l'aide de l'équation (Eq.3.3). Nous considérons le caractère aléatoire de la variation des propriétés du sol, en supposant connues les distributions statistiques de l'angle de frottement interne  $\phi'$  et du poids spécifique du sol  $\gamma$  et en effectuant des simulations de Monte-Carlo pour une corrélation donnée  $\rho_{\phi'\gamma}$  (e.g. Tiliouine et Chemali, 2013 pour plus de détails). Nous utilisons 30 répétitions, chacune contenant 10 000 nombres aléatoires pour  $\phi'$  et  $\gamma$ , à partir desquelles nous calculons les statistiques requises sur la capacité portante ultime de la fondation. Les paramètres de sol sont supposés suivre d'abord une distribution normale, puis une distribution lognormale.

**Tableau 3.2**

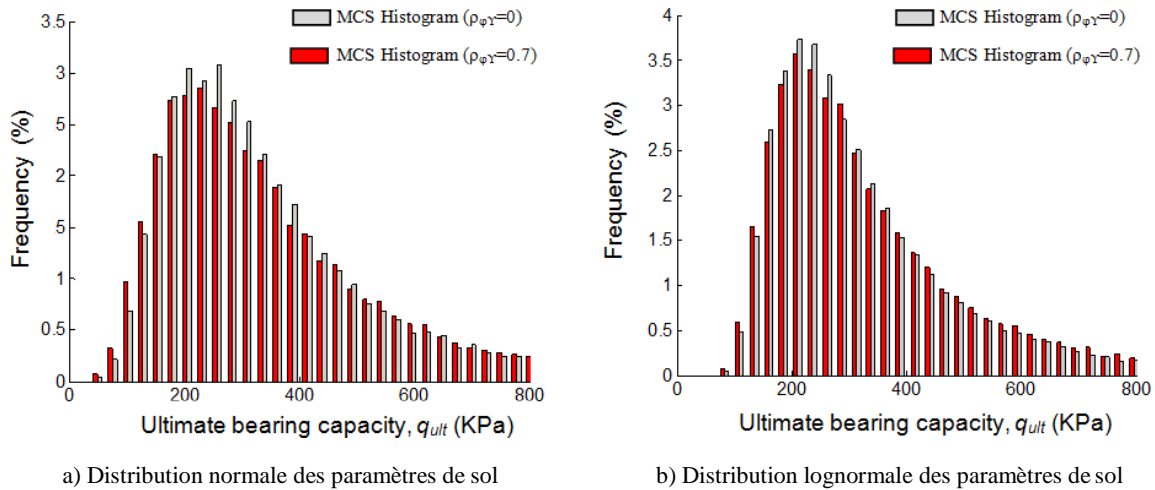
Probabilité de défaillance  $P_f$  (%) de la capacité portante ultime pour les distributions de probabilité normales et lognormales de paramètres de sol non-corrélés et corrélés ( $\mu_{\phi'} = 25^\circ$ ;  $\mu_{\gamma} = 19.61 \text{ kN/m}^3$ ,  $\text{CoV}_{\gamma} = 10\%$ )

CoV $\phi'$ (%)	Variables normales				Variables lognormales			
	$\rho(\phi', \gamma)$				$\rho(\phi', \gamma)$			
	0	0,2	0,5	0,7	0	0,2	0,5	0,7
10	0.002	0,009	0,027	0,051	$\approx 0$	$\approx 0$	0,002	0,005
15	0.196	0,336	0,546	0,698	0,016	0,040	0,108	0,178
20	1.376	1,752	2,368	2,712	0,288	0,445	0,765	1,016
25	4.121	4,91	5,707	6,181	1,313	1,680	2,331	2,785

Pour illustrer l'effet de la corrélation sur la probabilité de défaillance  $P_f$ , le Tableau 3.2 présente les résultats de la probabilité de défaillance calculée pour les valeurs sélectionnées de paramètres statistiques et pour différentes valeurs du degré de corrélation ( $\rho_{\phi'\gamma} = 0, 20, 50$  and  $70\%$ ) pour les distributions normales et lognormales des variables de sol. Il est clair que les variations du coefficient de corrélation ont un effet considérable sur la probabilité de défaillance, en particulier lorsque le degré de corrélation est élevé ( $\rho_{\phi'\gamma} = 0.7$ ). Par exemple, pour  $\mu_{\phi'} = 25^\circ$ ,  $\text{CoV}_{\gamma} = 10\%$ ,  $\text{CoV}_{\phi'} = 20\%$  and  $\rho_{\phi'\gamma} = 0.7$ ,  $P_f = 2.712\%$  tandis que  $P_f = 1.376\%$  lorsque  $\phi'$  et  $\gamma$  sont considérés comme des variables normales non-corrélées. Ceci représente une augmentation de 97% de  $P_f$ .

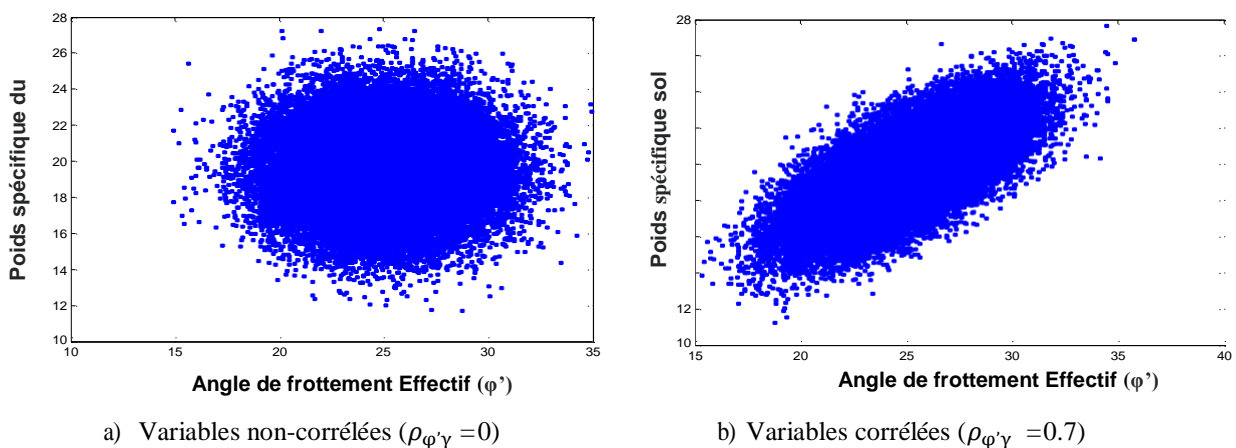
Pour les mêmes valeurs d'incertitude des variables de sol et pour le cas de la distribution log-normale, l'augmentation de  $P_f$  est 2,53 plus grande que la probabilité de défaillance lorsque les variables de sol ne sont pas corrélées.





**Fig. 3.4.** Distribution de probabilité de la capacité portante ultime des paramètres corrélés ( $\rho_{\phi\gamma}=0.7$ ) et non corrélés par simulation de Monte Carlo (MCS) ( $\mu_{\phi'}=25^\circ$  -  $CoV_{\phi'}=15\%$  ;  $\mu_{\gamma}=19.61 \text{ kN/m}^3$  -  $CoV_{\gamma}=10\%$ )

Les fonctions de densité de probabilité (PDF) de la capacité portante ultime  $h(q_{ult})$  présentées à la figure 3.4 ont également été établies par simulations de Monte Carlo pour  $\mu_{\phi'}= 25^\circ$ ,  $\mu_{\gamma}=19.61 \text{ KN/m}^3$ ,  $CoV_{\phi'} = 15$  et  $CoV_{\gamma} = 10\%$  ,  $B=2\text{m}$  et  $D=0.50\text{m}$  pour  $\phi'$  and  $\gamma$  supposés être d'abord non corrélés puis corrélés ( $\rho_{\phi'\gamma} = 0.7$ ). Nous considérons d'abord le cas d'une distribution normale (Fig. (3.4a)), puis le cas d'une distribution lognormale des variables de sol (Fig. (3.4b)). Ces distributions sont basées sur 30 répliques, chacune contenant 10 000 nombres aléatoires pour  $\phi'$  and  $\gamma$ . L'effet de la corrélation entre  $\phi'$  et  $\gamma$  est clairement montré dans les mêmes figures en comparant les résultats de simulation obtenus dans les deux cas de paramètres non corrélés ( $\rho_{\phi'\gamma} = 0$ ) et corrélés ( $\rho_{\phi'\gamma} = 0.7$ )



**Fig.3.5.** Illustration de la corrélation entre l'angle de frottement effectif et le poids spécifique du sol: a) Variables non-corrélées  $\rho_{\phi'\gamma} = 0$  et b) Variables corrélées  $\rho_{\phi'\gamma} = 0.7$ ; ( $\mu_{\phi'}=25^\circ$  -  $CoV_{\phi'}=15\%$  ;  $\mu_{\gamma}=19.61 \text{ kN/m}^3$  -  $CoV_{\gamma}=10\%$ )

L'effet de corrélation entre la paire de valeurs échantillonnées de l'angle de frottement interne et le poids spécifique du sol pour deux valeurs extrêmes de corrélation  $\rho_{\phi',\gamma} = 0$  et  $\rho_{\phi',\gamma} = 0.7$  est illustré dans les deux diagrammes de dispersion tracés respectivement sur les Figures (3.5a) et (3.5b).

La figure 3.5 montre également le rôle joué par la corrélation en comparant les nuages de points simulés correspondant aux deux propriétés de sol sableux considéré pour les valeurs de corrélation sélectionnées. Bien qu'il n'existe manifestement pas de relation fonctionnelle bien définie entre les deux propriétés du sol (absence de corrélation linéaire) dans le diagramme de dispersion de la figure 5 (a), il est clair que la dispersion des points échantillonnés ( $\phi'$ ,  $\gamma$ ) par rapport à la droite de régression de la figure 3.5(b) est d'autant plus petite que la corrélation est plus grande. La figure 3.5(b) montre également que la corrélation positive pour la paire de variables  $\phi'$  and  $\gamma$  implique que les deux variables tendent à prendre simultanément en considération des valeurs élevées (c'est-à-dire haut-haut) ou petites (c.-à-d. bas / bas).

## Conclusion

les effets des coefficients de variation des variables de sol sur la probabilité de défaillance des fondations pour les deux cas de distribution normale et lognormale des propriétés du sol non corrélées ont été examinés, cela montre que les variations du poids spécifique du sol ont un effet considérable sur la probabilité de défaillance. De plus un faible changement des valeurs de  $CoV_{\phi'}$  affecte fortement la probabilité de défaillance  $P_f$  de la capacité portante ultime en particulier dans le cas de la distribution normale. L'effet de la corrélation sur la probabilité de défaillance  $P_f$  est illustré, on remarque que les variations du coefficient de corrélation ont un grand effet sur la probabilité de défaillance, en particulier lorsque le degré de corrélation est élevé. Pour les mêmes valeurs d'incertitude des variables de sol et pour le cas de la distribution normale ou lognormale, défaillance lorsque les variables de sol ne sont pas corrélées. L'augmentation  $P_f$  est plus grande que la probabilité de de  $P_f$  est 2.53 plus grande que la probabilité de défaillance lorsque les variables de sol ne sont pas corrélées.

## EFFETS DE LA VARIABILITE DU SOL ET SECURITE DE LA FONDATION

## CHAPITRE 4

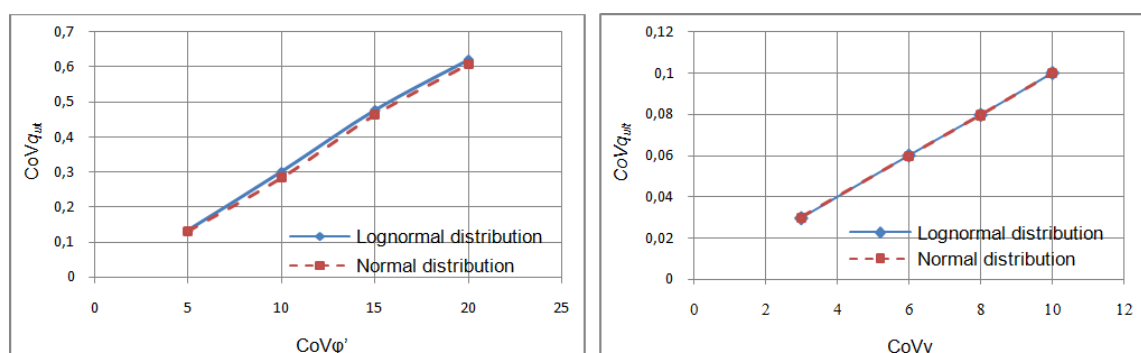
# EFFETS DE LA VARIABILITE DU SOL ET SECURITE DE LA FONDATION

La modélisation de la capacité portante d'une semelle filante de fondation superficielle est l'un des problèmes classiques de la géotechnique. L'objectif de cette étude est d'étudier l'effet de la variabilité du sol sur la variabilité de la capacité portante et la sécurité d'une semelle de fondation superficielle.

Les propriétés physiques et mécaniques d'un sol présentent toutes une certaine variabilité naturelle dont l'origine vient de la complexité des processus géologiques naturels mis en jeu (érosion, transport, dépôt, transformation physico-chimique) qui mènent à la constitution d'un sol. A cette variabilité se rattache une incertitude sur chacun des paramètres usuellement utilisés pour quantifier la variabilité naturelle : moyenne, variance, ...etc.

### 4.1. Effets de la variabilité du sol sur la variabilité de la capacité portante ultime

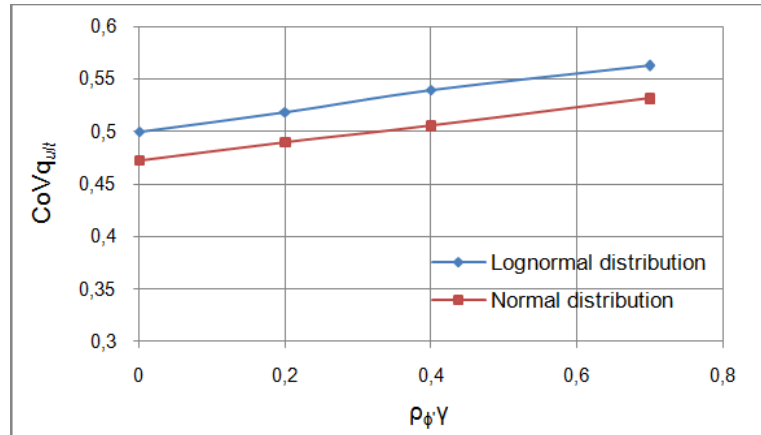
L'effet de la variabilité des paramètres du sol sur la variabilité de la capacité portante ultime du sol peut être illustré à l'aide des Fig. 4.1 (a) et (b) pour les deux cas considérés de distributions normales et lognormales des variables de sol. Il est clair que la variabilité de la capacité portante est beaucoup plus sensible à l'angle de frottement interne  $\varphi'$  qu'au poids spécifique  $\gamma$  du sol. Cette variabilité augmente linéairement pour les valeurs croissantes de  $\gamma$  et de  $\varphi'$  dans une moindre mesure (voir Eq.3).



a)  $CoVq_{ult}$  fonction de  $CoV\varphi'$   
 ( $\mu_{\varphi'}=25^\circ$ ;  $\mu_{\gamma}=19.6$  kN/m<sup>3</sup>,  $CoV\gamma=0$ )

b)  $CoVq_{ult}$  fonction de  $CoV\gamma$   
 ( $\mu_{\varphi'}=25^\circ$ ;  $\mu_{\gamma}=19.61$  kN/m<sup>3</sup>,  $CoV\varphi'=0$ )

**Fig. 4.1.** Coefficient de variation de la capacité portante ultime en fonction de  $CoV\varphi'$  et  $CoV\gamma$  pour des distributions normales et lognormales des paramètres de sol.

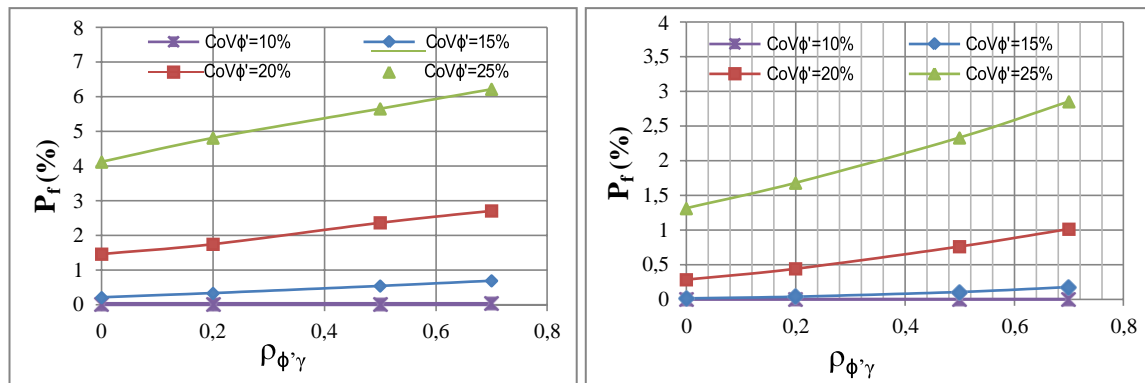


**Fig. 4.2.** Coefficient de variation de la capacité portante ultime pour différents coefficients de corrélation pour les distributions normales et lognormales ( $\mu_{\phi}=25^{\circ}$ ,  $CoV_{\phi}=15\%$ ;  $\mu_{\gamma}=19.61 \text{ kN/m}^3$ ,  $CoV_{\gamma}=10\%$ )

Il est également intéressant de noter à partir de la figure 4.2 que la variabilité de la capacité portante ultime augmente pratiquement de manière linéaire avec l'augmentation de la corrélation positive entre les variables de sol pour les deux cas de distributions normales et lognormales.

#### 4.2. Sécurité de la fondation

##### 4.2.1. Probabilité de défaillance de la fondation obtenue par simulation de Monte Carlo pour deux cas de distributions de probabilité, normale et lognormale des variables de sol



a) Distribution normale des paramètres de sol

b) Distribution lognormale des paramètres de sol

**Fig. 4.3.** Probabilité de défaillance de la capacité portante ultime pour différents  $CoV_{\phi}$  en supposant des distributions de probabilité normale et lognormale non corrélées et corrélées des variables de sol:

a) distribution normale, b) distribution lognormale ( $\mu_{\phi}=25^{\circ}$ ;  $\mu_{\gamma}=19.61 \text{ kN/m}^3$ ,  $CoV_{\gamma}=10\%$ )

Les figures 4.3 (a) et (b) montrent que la probabilité de défaillance augmente presque linéairement pour une corrélation positive croissante entre l'angle de frottement interne effectif et le poids spécifique du sol. La probabilité de défaillance augmente également de manière significative avec l'augmentation du coefficient de variation de l'angle de frottement. Des tendances similaires sont

également observées pour les variables aléatoires lognormales corrélées  $\phi'$  et  $\gamma$ ; mais avec une probabilité de défaillance plus faible.

#### 4.2.2. Comparaison de la probabilité de défaillance de la fondation estimée à l'aide de différentes méthodes de calcul de fiabilité pour des variables de sol non-corrélées et corrélées normales et lognormales

A des fins de comparaison, le Tableau 4.1 indique également la probabilité de défaillance et le temps d'exécution CPU calculés à l'aide de la méthode de simulation de Monte Carlo (MCS), des méthodes Hasofer-Lind FORM(HL), SORM(HL) et de la méthode FORM (MV) pour deux lois de distributions normale et lognormale des variables de sol avec les valeurs de caractéristiques géotechniques suivantes:

$$\mu_{\phi'} = 25^\circ, \mu_{\gamma} = 19.61 \text{KN/m}^3, \text{CoV}\phi' = 20 \text{ and } 25\% \text{ and } \text{CoV}\gamma = 10\%.$$

Il est à noter que lors de l'utilisation des méthodes Hasofer-Lind FORM et FORM (MV), la probabilité de défaillance  $P_f$  est calculée à partir de l'indice de fiabilité  $\beta$  correspondant à chaque méthode par la relation  $P_f = \Phi(-\beta)$ , où  $\Phi(z)$  est la fonction de répartition de la variable normale standard. Cependant, lors de l'utilisation de SORM, la formule suivante  $P_f = \Phi(-\beta)(1 + k_j\beta)^{-1/2}$  doit être utilisée afin de prendre en compte la courbure de la surface de réponse au point MPP (c'est-à-dire le point de calcul le plus probable) (e.g. Lemaire, 2005 pour plus de détails). Dans le cas des variables lognormales également, les paramètres de sol lognormalement distribués doivent être transformés en variables normales équivalentes  $N(\mu_{eq}, \sigma_{eq})$  en utilisant la procédure de Rackwitz et Fiessler (Rackwitz et Fiessler, 1978). Les équations de transformation de Rackwitz et Fiessler sont données à sont données en Annexe B.

On voit que les valeurs de probabilité de défaillance utilisant FORM et SORM basées sur les solutions simplifiées de Krizek sont en excellent accord avec celles de la technique de simulation de Monte Carlo contrairement aux résultats de la valeur moyenne FORM suggérant que cette dernière devrait être ignorée dans la pratique. Il convient aussi de noter que le temps de calcul nécessaire pour estimer la probabilité de défaillance en utilisant le modèle original de Terzaghi pour évaluer la capacité portante ultime au moyen de la méthode de

Monte Carlo MCS (763,12 secondes) est 4,35 fois supérieur à celui nécessaire pour les solutions simplifiées de Krizek (175,2 secondes).

Il est également significatif que le temps de calcul nécessaire pour générer la probabilité de défaillance par simulation de Monte Carlo à l'aide des solutions simplifiées de Krizek (175,2 s) soit 1510 fois supérieur à celui requis pour FORM (HL) (0,116 s) et 815 fois supérieur à celui requis pour SORM (HL). (0,215 sec), avec un ordinateur portable présentant les caractéristiques suivantes: Processeur Intel® Core™ i5 M 520 à 2,40 GHz.

Il est à noter que la probabilité de défaillance ainsi que le temps d'exécution CPU correspondant au modèle original de Terzaghi, estimés en utilisant les méthodes de fiabilité FORM (HL), SORM (HL) et FORM (MV) ne sont pas inclus dans le Tableau 3 car les analyses probabilistes utilisées conjointement avec les équations de prédiction de Terzaghi de la capacité portante ultime des fondations superficielles ne sont pas pratiques, pour ne pas dire extrêmement difficiles à réaliser.

En effet, le calcul des dérivées pour l'estimation des variances par les méthodes probabilistes du premier et du second ordre constitue une tâche numérique redoutable! (voir les expressions mathématiques explicites nécessaires uniquement pour calculer le facteur de capacité portante de Terzaghi  $N_\gamma$  (Kumbhojkar, 1993), nonobstant le calcul de ses dérivées première et seconde par rapport aux variables de sol  $\phi'$  et  $\gamma$ ).

Ceci explique également pourquoi, dans cette recherche, il est proposé d'utiliser les expressions analytiques expressément développées dans l'annexe A de cette thèse pour le calcul approximatif des dérivées des facteurs de capacité portante  $N_\gamma$  et  $N_q$  en vue d'effectuer des analyses et des dimensionnements fiabilistes performants de fondations superficielles reposant sur des sols sableux

**Tableau 4.1**

Probabilité de défaillance de fondation en utilisant les méthodes MCS, Hasofer-Lind FORM (HL), SORM (HL) et valeur moyenne FORM (MV) pour les variables de sol corrélées ( $\mu_\phi = 25^\circ$ ;  $\mu_\gamma = 19.61 \text{ kN/m}^3$  -  $\text{CoV}_\gamma = 10\%$ ;  $\rho_{\phi,\gamma} = 0.7$ )

CoV $\phi'$ (%)	$P_f$ (%)									
	Variables normales					Variables lognormales				
	MCS (Terzaghi)	MCS* (Krizek)	FORM* (HL)	SORM* (HL)	FORM* (MV)	MCS (Terzaghi)	MCS* (Krizek)	FORM* (HL)	SORM* (HL)	FORM* (MV)
20	3.03	2.71	2.56	2.58	12.94	1.05	1.031	1.017	1.027	12.70
25	6.13	5.54	5.37	5.42	17.68	2.91	2.85	2.81	2.83	17.31
CPUtime(sec)	763.12	175.2	0.116	0.215	0.1	763.12	175.2	0.126	0.226	0.12

\*: Méthodes probabilistes utilisant les solutions simplifiées de Krizek

### 4.3. Influence d'une charge appliquée variable et analyse de la sensibilité

Les principaux résultats de l'étude de l'influence d'une charge verticale centrée variable  $P_s$  sur la sécurité de la fondation sur un sol sableux à caractéristiques aléatoires sont résumés dans le Tableau 4.2, dans lequel le facteur de sécurité  $F$ , l'indice de fiabilité Hasofer-Lind  $\beta_{HL}$ , les points de conception correspondants  $(\varphi^*, \gamma^*)$  et la probabilité de défaillance  $P_f$  pour différentes valeurs de la charge appliquée variant de manière croissante à partir de petites valeurs jusqu'à la charge ultime déterministe,  $P_{ult} = q_{ult}.B$ , sont présentés. La fonction de performance suivante a été utilisée

$$g_p(\varphi', \gamma) = P_{ult}(\varphi', \gamma) - P_s \quad (4.1)$$

$$P_{ult} = \frac{(40+5\varphi')\gamma BD + 3\varphi'\gamma B^2}{40-\varphi'} \quad (4.2)$$

Les facteurs de sensibilité d'omission (e.g. Madsen, 1988) correspondants de l'angle de frottement interne et du poids spécifique du sol sont calculés à l'aide de l'équation 4.3 et présentés dans le même tableau. Ces facteurs de sensibilité traduisent l'erreur relative dans le calcul de la fiabilité quand une variable aléatoire ( $\varphi'$  ou  $\gamma$ ) est remplacée par sa valeur moyenne et peuvent être déterminés à partir de l'équation suivante:

$$\gamma_i(\mu_i) = \frac{\beta_{HL}(x_i=\mu_i)}{\beta_{HL}} \quad (4.3)$$

où  $\beta_{HL}$  = valeur de l'indice de fiabilité calculé lorsque tous les paramètres sont considérés comme des variables aléatoires, et  $\beta_{HL}(x_i = \mu_i)$  est l'indice de fiabilité déterminé lorsque  $x_i$  est remplacée par sa valeur moyenne déterministe  $\mu_i$ . Tous ces résultats sont présentés pour des paramètres de sol, normaux et lognormaux, corrélés et non-corrélés.

Le Tableau 4.2 montre clairement que l'indice de fiabilité diminue avec l'augmentation de la charge appliquée jusqu'à s'annuler pour une charge appliquée égale à la charge ultime déterministe.

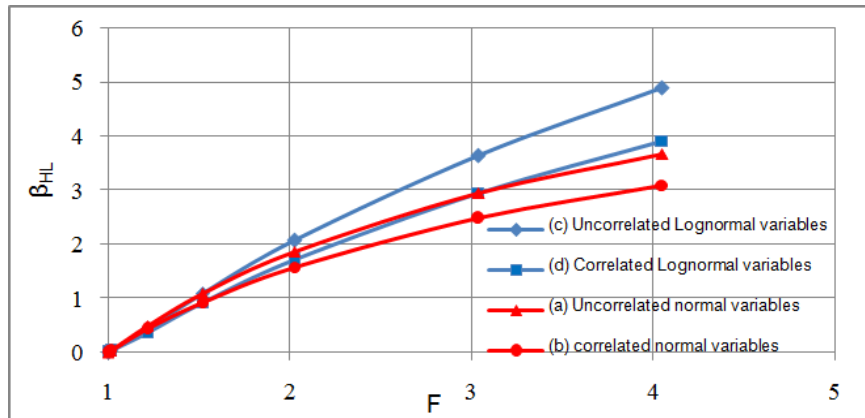


**Tableau 4.2**

Indice de fiabilité, probabilité de défaillance  $P_f$ , points de calcul et facteurs de sensibilité ( $\mu_\phi=25^\circ$ -  $CoV_\phi=15\%$ ;  $\mu_\gamma=19.61$  kN/m<sup>3</sup>-  $CoV_\gamma=10\%$ ;  $\rho_{\phi,\gamma}=0.7$ ) pour deux distributions de probabilité des variables du sol  $\phi$  et  $\gamma$

F	Ps(KN/m)	$\Phi^*(deg)$	$\gamma^*(KN/m^3)$	$\beta_{HL}$	$Y(\mu_\gamma)$	$Y(\mu_\phi)$	$P_f$ (%)
<b>(a) variables normales non-corrélées</b>							
4,05	150	11,75	17,68	3,67	1,03	2,05	0,012
3,04	200	14,40	17,98	2,95	1,04	2,28	0,159
2,03	300	18,29	18,56	1,87	1,04	2,71	3,074
1,52	400	21,07	19,02	1,09	1,04	3,14	13,786
1,22	500	23,19	19,35	0,50	1,04	3,55	30,854
1,01	600	24,88	19,59	0,033	1,033	3,965	48,684
1,00	607,91	25,00	19,61	0,00	-	-	50,000
<b>(b) variables normales non-corrélées (<math>\rho_{\phi,\gamma}=0.7</math>)</b>							
4,05	150	13,58	16,26	3,10	1,22	2,43	0,097
3,04	200	15,84	16,92	2,48	1,23	2,70	0,657
2,03	300	19,17	17,92	1,58	1,23	3,21	5,705
1,52	400	21,57	18,63	0,93	1,22	3,68	17,619
1,22	500	23,41	19,16	0,43	1,21	4,14	33,360
1,01	600	24,90	19,58	0,028	1,196	4,591	48,883
1,00	607,91	25,00	19,61	0,00	-	-	50,000
<b>(c) Variables lognormales non-corrélées</b>							
4,05	150	12,91	15,66	4,88	1,14	2,86	$\approx 0$
3,04	200	15,09	16,79	3,63	1,11	3,05	0,014
2,03	300	18,54	18,13	2,07	1,08	3,40	1,923
1,52	400	21,16	18,85	1,10	1,03	3,77	13,567
1,22	500	23,23	19,28	0,43	1,08	4,39	33,360
1,01	580	24,60	19,50	0,035	1,416	12,060	48,604
1,00	587,84	25,00	19,61	0,00	-	-	50,000
<b>(d) Variables lognormales corrélées (<math>\rho_{\phi,\gamma}=0.7</math>)</b>							
4,05	100	14,04	13,97	3,92	1,42	3,57	0,004
3,04	200	16,12	15,22	2,95	1,37	3,76	0,159
2,03	300	19,26	16,93	1,71	1,31	4,11	4,363
1,52	400	21,59	18,09	0,92	1,23	4,49	17,879
1,22	500	23,41	18,94	0,37	1,26	5,15	35,569
1,01	580	24,61	19,47	0,030	1,644	14,003	48,803
1,00	587,84	25,00	19,61	0,00	-	-	50,000

Ce cas correspond à un état de défaillance déterministe pour lequel  $F = 1$  en utilisant les valeurs moyennes des variables aléatoires. On voit aussi que dans ce cas la probabilité de défaillance est égale à 50%. Il est à noter que les valeurs de la charge appliquée à l'état de défaillance correspondant aux deux distributions supposées pour les paramètres de sol sont légèrement différentes.



**Fig. 4.4.** Indice de fiabilité en fonction du facteur de sécurité pour ( $\alpha=25^\circ$  -  $CoV\phi'=15\%$ ;  $\sigma=19.61$   $kN/m^3$  -  $CoV\gamma=10\%$ ;  $\phi_\gamma=0.7$ )

Il convient également de noter que l'effet du caractère aléatoire de l'angle de frottement interne sur l'indice de fiabilité est beaucoup plus prononcé que celui du poids spécifique du sol, en particulier dans le cas de variables aléatoires lognormales.

On peut également noter dans le même tableau que, pour les valeurs inférieures de la charge appliquée, il existe une différence notable entre les deux valeurs d'indice de fiabilité calculées sur la base de l'hypothèse de distributions normales et lognormales des paramètres de sol. Cependant, cette différence diminue considérablement pour les charges plus élevées. Cette observation est valable pour les variables non-corrélées et corrélées.

Les comparaisons des courbes par rapport à  $F$  pour différentes hypothèses statistiques sont présentées à la figure 4.4. On peut constater que les indices de fiabilité correspondant aux variables non corrélées sont plus grands que ceux des variables corrélées positivement pour les variables normales et lognormales. On peut en déduire que, contrairement aux sols  $c'-\phi'$ , l'hypothèse de paramètres de sol non-corrélés n'est pas conservatrice par rapport à la supposition de paramètres de sol positivement corrélés.

De plus, la Fig. 4.4 montre la variation de l'indice de fiabilité en fonction du facteur de sécurité  $F$ , pour les paramètres de sol indiqués. On voit que pour les petites valeurs du facteur de sécurité, les résultats des variables normales et lognormales sont presque identiques. Cependant, une différence apparaît pour les grandes valeurs du facteur de sécurité.

## 4.4 Comparaison des Résultats

### 4.4.1 Comparaison des résultats des calculs déterministes et fiabilistes

Dans le calcul déterministe traditionnel d'une fondation superficielle filante, la charge appliquée admissible pour calculer la largeur de la fondation B pour un facteur de sécurité cible est déterminée sur la base de la plus petite des deux valeurs obtenues à partir des critères de calcul à deux états limites :

- un critère de rupture par cisaillement à l'état limite ultime
- un critère de tassement à l'état limite de service

Cependant, dans le cas particulier des sols sableux, il est de notoriété publique que ce dernier critère n'est pas prédominant et que, par conséquent, seul le critère de rupture par cisaillement sera considéré dans cette étude. En outre, il convient de noter qu'une telle approche déterministe ignore la variabilité des propriétés du sol. Afin de prendre en compte le caractère aléatoire des variables de sol, une approche de calcul fiabiliste dite "RBD" (Reliability Based Design) a été utilisée avec succès par divers chercheurs (e.g. Kayser et Gajan, 2014; Youssef et al., 2008; Lingwanda, 2018) pour n'en nommer que quelques-uns. Dans cette recherche, la largeur de base de conception B basée sur la fiabilité est déterminée itérativement sur la base d'un indice de fiabilité cible  $\beta_{HL} = 3,8$  (selon Eurocode 1, 2003) et correspondant à un niveau de probabilité de défaillance maximale admissible de l'ordre de  $10^{-4}$  (Meyerhof 1982).

Sur cette base, le Tableau 4.3 présente les valeurs calculées de la largeur probabiliste de la fondation pour les valeurs communes des coefficients de variation des paramètres de sol et des valeurs différentes du coefficient de corrélation variant de zéro à la valeur maximale  $\rho_{\phi\gamma} = 0,7$ . Toutes les valeurs de la largeur probabiliste sont calculées pour un indice de fiabilité  $\beta_{HL} = 3,8$  pour les deux cas de distributions normale et lognormale des paramètres de sol. Les résultats probabilistes numériques sont également présentés sous forme graphique sur la figure 10, avec la largeur déterministe  $B = 2\text{m}$  correspondant à un facteur de sécurité de 3 à des fins de comparaison.

**Tableau 4.3**

Comparaison des calculs déterministes et probabilistes de la largeur de base de la fondation pour les distributions normale et lognormale de paramètres de sol ( $\phi = 25^\circ$ ,  $\gamma = 19.61$  KN/m<sup>3</sup>,  $D_f = 0.5$ m,  $\beta_{HL} = 3.8$ )

a) Variables normales

$\rho_{\phi,\gamma}$	CoV $_{\phi'}=15\%$ , CoV $_{\gamma}=10\%$	CoV $_{\phi'}=10\%$ , CoV $_{\gamma}=7\%$	CoV $_{\phi'}=5\%$ , CoV $_{\gamma}=3\%$	Deterministic Design
0	4,75	3,54	2,67	2,00
0,1	4,81	3,57	2,68	2,00
0,2	4,87	3,60	2,69	2,00
0,3	4,93	3,63	2,69	2,00
0,4	4,99	3,67	2,70	2,00
0,5	5,05	3,70	2,71	2,00
0,6	5,11	3,73	2,72	2,00
0,7	5,17	3,76	2,73	2,00

b) Variables lognormales

$\rho_{\phi,\gamma}$	CoV $_{\phi'}=15\%$ , CoV $_{\gamma}=10\%$	CoV $_{\phi'}=10\%$ , CoV $_{\gamma}=7\%$	CoV $_{\phi'}=5\%$ , CoV $_{\gamma}=3\%$	Deterministic Design
0	3,96	3,36	2,61	2,00
0,1	4,04	3,40	2,63	2,00
0,2	4,11	3,45	2,65	2,00
0,3	4,19	3,49	2,66	2,00
0,4	4,27	3,54	2,68	2,00
0,5	4,34	3,59	2,70	2,00
0,6	4,42	3,63	2,71	2,00
0,7	4,50	3,68	2,73	2,00

On voit que la largeur de calcul probabiliste est plus grande que la largeur déterministe pour les valeurs communes de la variabilité du sol (c.à.d.  $\text{CoV}_{\phi'} = 5$  to  $15\%$ ,  $\text{CoV}_{\gamma} = 3$  à  $10\%$ ,  $0 \leq \rho_{\phi,\gamma} \leq 0.7$ ). La largeur de calcul correspondant à  $\phi'$  et  $\gamma$  des variables normales est supérieure à celle des variables lognormales, quelles que soient les valeurs des coefficients de variation de  $\phi'$  et  $\gamma$  et de leurs coefficients de corrélation. On peut donc en conclure que l'hypothèse d'une distribution normale pour les variables aléatoires est plus conservatrice que celle d'une distribution log-normale et peut conduire à des calculs non économiques, en particulier pour les valeurs élevées du coefficient de variation de l'angle de frottement interne.

Du point de vue de la conception, il est également important de souligner que les valeurs de  $\text{CoV}_{\phi'}$  et de  $\text{CoV}_{\gamma}$  correspondant à un indice de fiabilité  $\beta_{HL}=3.8$ , acceptables pour le cas étudié sont les suivantes:  $\text{CoV}_{\phi'} = 5\%$  et  $\text{CoV}_{\gamma} = 3\%$ . Ainsi, les valeurs de la largeur de conception probabiliste correspondant aux deux autres cas représentés sur la figure 4.5 doivent être écartées.

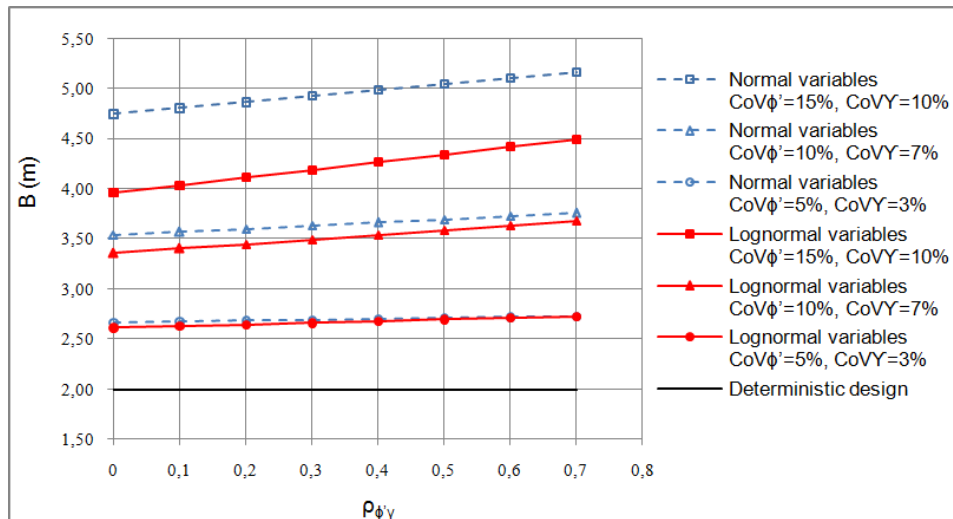


Figure.4.5 Comparison between probabilistic and deterministic designs ( $\mu_{\phi'}=25^\circ$ ;  $\mu_{\gamma}=19.61 \text{ kN/m}^3$ ;  $\beta_{HL}=3.8$ )

## Conclusion

L'effet de la variabilité des paramètres du sol sur la variabilité de la capacité portante ultime du sol a été illustré pour les deux cas considérés de distributions normales et lognormales des variables de sol, il montre clairement que la variabilité de la capacité portante est beaucoup plus sensible à l'angle de frottement interne  $\phi'$  qu'au poids spécifique  $\gamma$  du sol. Il a été démontré que la probabilité de défaillance de la fondation augmente presque linéairement pour des valeurs croissantes de la corrélation positive entre l'angle de frottement interne effectif et le poids spécifique du sol, elle augmente également de manière significative avec l'augmentation du coefficient de variation de l'angle de frottement interne effectif. On note également que l'effet du caractère aléatoire de l'angle de frottement interne sur l'indice de fiabilité est beaucoup plus prononcé que celui du poids spécifique du sol, en particulier dans le cas de variables aléatoires lognormales. L'indice de fiabilité décroît avec l'augmentation de la charge appliquée et est beaucoup plus sensible à  $\phi'$  qu'à  $\gamma$ . Plus le  $\text{CoV}_{\phi'}$  est grand, plus la probabilité de défaillance de la fondation est élevée.

En comparant les résultats de calcul on peut donc en conclure que l'hypothèse d'une distribution normale pour les variables aléatoires est plus conservatrice que celle d'une distribution lognormale et peut conduire à des calculs non économiques.

## CONCLUSIONS GENERALES

## CONCLUSIONS GENERALES

L'analyse de fiabilité et du dimensionnement probabiliste des fondations rigides, peu profondes reposant sur des sols sableux ont été présentées. Pour simplifier l'analyse et le calcul de telles fondations, des expressions simples des facteurs de capacité portante sont utilisées conjointement avec une analyse de fiabilité pour calculer la probabilité de défaillance de la fondation et l'indice de fiabilité, pour la plage de valeurs courantes de l'angle de frottement interne  $\varphi'$  ne dépassant pas  $35^\circ$ .

Tout d'abord, l'influence de la corrélation entre les variables aléatoires de l'angle de frottement interne effectif  $\varphi'$  et le poids spécifique du sol  $\gamma$ , sur la capacité portante de la fondation et par suite sur la probabilité de défaillance a été examinée dans cette recherche. La solution semi-analytique rapportée par Easa (1992) pour des variables normales non corrélées a été élargie afin d'inclure l'effet de la corrélation entre les paramètres du sol à l'aide de la technique de simulation traditionnelle de Monte Carlo pour les deux cas de distribution normale et lognormale des variables aléatoires de sol  $\varphi'$ -  $\gamma$ . De plus, une comparaison des résultats obtenus avec ceux des méthodes de fiabilité FORM et SORM a été effectuée.

Au cours de la seconde étape de l'étude, l'influence de la charge appliquée sur l'indice de fiabilité Hasofer-Lind et le point de conception associé, ainsi qu'une analyse de sensibilité des variables de sol corrélées ont été examinées. Enfin, du point de vue du dimensionnement, les résultats numériques probabilistes sont discutés et les principaux résultats de l'étude sont présentés.

Les résultats présentés dans cette étude permettent de tirer les conclusions suivantes:

- L'incertitude concernant le poids spécifique du sol  $\gamma$  s'est avérée avoir un effet sensible sur la probabilité de défaillance de la fondation, en particulier lorsque  $CoV_\gamma$  est grand et que  $CoV_{\varphi'}$  est faible.

- Il a été démontré que la probabilité de défaillance de la fondation augmente presque linéairement pour des valeurs croissantes de la corrélation positive entre l'angle de frottement interne effectif et le poids spécifique du sol. La probabilité de

défaillance augmente également de manière significative avec l'augmentation du coefficient de variation de l'angle de frottement. Des tendances similaires sont également observées pour les variables aléatoires lognormales corrélées; mais avec une probabilité de défaillance plus faible.

- Les valeurs de probabilité de défaillance utilisant FORM et SORM ont montré un excellent accord avec celles de la technique de simulation de Monte Carlo, contrairement aux résultats de la méthode FORM basée sur des valeurs moyennes, suggérant que cette dernière devrait être écartée dans la pratique.

L'indice de fiabilité décroît avec l'augmentation de la charge appliquée et est beaucoup plus sensible à  $\varphi'$  qu'à  $\gamma$ . Plus le  $CoV\varphi$  est grand, plus la probabilité de défaillance de la fondation est élevée.

- Pour le cas présent d'espèce, la distribution de probabilité choisie des paramètres de sol affecte de manière significative les valeurs de la probabilité de défaillance de la fondation. L'hypothèse de distributions normales pour les variables aléatoires du sol s'est révélée plus conservatrice que celle de distributions lognormales. Autrement dit, l'utilisation d'une loi normale peut conduire à des conceptions non économiques, en particulier pour des coefficients de variation élevés de l'angle de frottement interne.

- Contrairement aux sols  $c'-\varphi'$ , la largeur de fondation calculée de manière probabiliste augmente avec l'augmentation de la corrélation positive entre les paramètres du sol  $\varphi'$  et  $\gamma$  et l'augmentation de leur coefficient de corrélation. Il s'ensuit que l'hypothèse de paramètres non corrélés  $\varphi'$  et  $\gamma$  n'est pas conservatrice par rapport à celle de paramètres corrélés positivement.

En général, l'approche proposée pour l'analyse de fiabilité et le dimensionnement des fondations superficielles reposant sur sols sableux est pratiquement simple et fiable, dans la mesure où elle répond aux exigences de conception et de sécurité, y compris la variabilité des caractéristiques du sol et de la charge appliquée. Elle a également le mérite d'offrir un cadre mathématique plus rationnel que celui de l'approche de conception déterministe standard utilisée dans la pratique courante de l'ingénierie.



## REFERENCES

## Références

- Ameratunga, J. , Sivakugan, N., Das, B., 2016. Correlations of Soil and Rock Properties in Geotechnical Engineering, Developments in Geotechnical Engineering, Springer India.
- Becker, D.E., 1996. Limit states design for foundations. Part II. Development for National Building Code of Canada. *Canadian Geotechnical Journal* 33 (6), 984–1007.
- Benjamin, J.R., Cornell, C.A., 2014. Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers, Dover Books in Engineering, Paperback.
- Cherubini, C., 2000. Reliability evaluation of shallow foundation bearing capacity on  $C'$ ,  $\phi'$  soils. *Can. Geotech J.*, 37(1), 264–269.
- Cherubini, C., 1990. A closed form probabilistic solution for evaluating the bearing capacity of shallow foundations. *Canadian Geotechnical Journal* 27, 526-529.
- Ching, J., 2011. Practical Monte Carlo Based Reliability Analysis and Design Methods for Geotechnical Problems. In S. Mordechai (Eds.), *Applications of Monte Carlo Method in Science and Engineering*, Chapter 31, pp. 757–780. Rijeka, Croatia: In Tech Europe and Shanghai, China: In Tech China.
- Chowdhury, R.N., Xu, D.W., 1992. Reliability index for slope stability assessment—two methods compared. *Reliability Engineering and System Safety* 37, 99–108.
- Easa, S. M., 1992. Exact probabilistic solution of two-parameter bearing capacity for shallow foundations. *Canadian Geotechnical Journal*, 29, 867-870.
- Eurocode 1., 2003. Bases of calculation and Actions on structures, National Application Documents, Appendix A.
- Duncan, JM., 2000. Factors of safety and reliability in geotechnical engineering. *J Geotech Geoenviron Eng.*, 126(4), 307–16.
- Forrest, W.S., Orr, T.L.L., 2010. Reliability of shallow foundations designed to Eurocode7. *Georisk: Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards* 4 (4), 186–207.
- Griffiths, D. V., Fenton, G. A., Manoharan, N., 2002. Bearing capacity of rough rigid strip footing on cohesive soil: Probabilistic study. *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 128 (9), 743–755.
- Hamrouni, A., Sbartai, B., Dias, D., 2018. Probabilistic Study of the Ultimate Seismic Bearing Capacity of Strip Foundations. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering* 10 (4), 717-724.
- Hamrouni, A., Dias, D., Sbartai, B., 2017. Reliability analysis of shallow tunnels using the response surface methodology. *Underground Space* 2 (4), 246-258.
- Hasofer, A. M., Lind, N. C., 1974. Exact and invariant second moment code format. *J. Energy. Mech. Div.* 100 (1), 111–121.
- Johari, A., Hosseini, S. M., Keshavarz, A., 2017. Reliability analysis of seismic bearing capacity of strip footing by stochastic slip lines method. *Computers and Geotechnics* 91, 203-217.
- Kayser, M., Gajan, S., 2014. Application of probabilistic methods to characterize soil variability and their effects on bearing capacity and settlement of shallow foundations: state of the art. *International Journal of Geotechnical Engineering* 8 (4), 352-364.

- Krizek, R.J., 1965. Approximation for Terzaghi's bearing capacity factors. *ASCE Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division* 91(SM2), 1-3.
- Kumbhojkar, A. S. 1993. Numerical evaluation of Terzaghi's N<sub>y</sub>. *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, 119(3):598-607
- Lemaire, M., 2005. *Fiabilité des structures*, Hermès-Lavoisier, Paris.
- Lingwanda, M. I., 2018. Uncertainty, Reliability and Factor of Safety for Bearing Capacity of Shallow Foundations in Cohesive Soils. *International Journal of Computational Engineering Research (IJCER)* 8 (4), 22-29.
- Low, B. K., 1997. Reliability analysis of rock wedges. *Journal of Geotechnical and Geo-environmental Engineering*, ASCE, 123(6):498-505
- Low, B. K., 2005. Reliability-based design applied to retaining walls. *Geotechnique* 55 (1), 63–75.
- Low, B. K., and Tang, W. H., 1997b. "Probabilistic slope analysis using Janbu's generalized procedure of slices." *Comput. Geotech.*, 21(2), 121–142.
- Low, B. K., and Tang, W. H., 2004. "Reliability analysis using object oriented constrained optimization." *Struct. Safety*, 26, 68–89.
- Madsen, H.O., 1988. Omission sensitivity factors. *Struc. Safety* 5, 35- 45
- Madsen, H.O., Krenk, S., Lind, N.C., 2006. *Methods of structural safety*. Dover Publications, INC. Mineola, New York, USA.
- Melchers, R. E., 1999. *Structural reliability analysis and prediction*, 2<sup>nd</sup> Ed., Wiley, New York
- Mao, N., Al-Bittar, T., Soubra, A. H., 2012. Probabilistic analysis and design of strip foundations resting on rocks obeying Hoek–Brown failure criterion. *Int J Rock Mechanics and Mining Sciences* 49, 45–58.
- Matsuo, M. and Kuroda, K. 1974. Probabilistic approach to design of embankments. *Soils and Foundations Japanese Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 14(2): 1-17.
- Meyerhof, G.G., 1982. Limit state designs in geotechnical engineering. *Structural safety* I (7), 67-71.
- Parker, C., Simon, A., Thorne, C.R., 2008. The effects of variability in bank material properties on river bank stability: Goodwin Creek, Mississippi. *Geomorphology* 101, 533–543
- Phoon, K.K., Kulhawy, F.H., 1999a. Characterization of geotechnical variability. *Canadian Geotechnical Journal* 36 (4), 612–624
- Phoon, K.K., Kulhawy, F. H., 1999b. Evaluation of geotechnical property variability. *Can. Geotech. J.* 36 (4), 625–639.
- Puła, W., & Zaskórski, Ł. (2015). Estimation of the probability distribution of the random bearing capacity of cohesionless soil using the random finite element method, *Structure and Infrastructure Engineering Maintenance, Management, Life-Cycle Design and Performance*, 11(5), 707-720.
- Rackwitz, R., Fiessler, B., 1978. Structural reliability under combined random load sequences. *Comput. Struct.* 9 (5), 484–494.
- Rosenblueth, E., 1981. Two-point estimates for probability. *Applied Mathematical Modeling* 5, 329-335.
- Sivakumar Babu, G.L. Srivastava, A., 2007. Reliability analysis of allowable pressure on shallow foundation using response surface method. *Computers and Geotechnics* 34 (3), 187-194.
- Tani, N.K.; Nedjar, D.; Tamine, T.; Hamane, M., 2017. A Probabilistic Assessment for Failure

Prediction of Buried Cracked Spread Foundations. *Arabian Journal for Science and Engineering* **42** (3), 1161–1170

Terzaghi, K., 1943. *Theoretical Soil Mechanics*, Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.

Tiliouine, B, Chemali, B., 2013. On the sensitivity of dynamic response of structures with random damping. *21<sup>st</sup> French Congress of Mechanics*. Bordeaux, 26-30

Uzielli, M., Nadim, F., Lacasse, S., Kaynia, A.M., 2008. A conceptual framework for quantitative estimation of physical vulnerability to landslides. *Engineering Geology*, 102 (3), 251-256.

Viviescas, J., Osorio, J., Cañón, J., 2017. Reliability-based designs procedure of earth retaining walls in geotechnical engineering. *Obras y Proyectos* 2, 50-60.

Youssef, D.S., Soubra, A.H., Low, B.K., 2008. Reliability-based analysis and design of strip foundations against bearing capacity failure. *Journal of Geotechnical and Geo-environmental Engineering* 134 (7), 917-928.

## ANNEXES

**Annexe A**

Calcul des dérivées des facteurs de capacité portante  $N_q$  et  $N_\gamma$  pour un sol pulvérulent.

$$N_q = \frac{40+5\varphi'}{40-\varphi'} \quad (A_1)$$

$$N_\gamma = \frac{6\varphi'}{40-\varphi'} \quad (A_2)$$

$$\frac{\partial N_q}{\partial \varphi'} = \frac{(5 * \varphi' + 40)}{(\varphi' - 40)^2} - \frac{5}{(\varphi' - 40)} \quad (A_3)$$

$$\frac{\partial^2 N_q}{\partial \varphi'^2} = \frac{10}{(\varphi' - 40)^2} - \frac{(2 * (5 * \varphi' + 40))}{(\varphi' - 40)^3} \quad (A_4)$$

$$\frac{\partial N_\gamma}{\partial \varphi'} = \frac{(6 * \varphi')}{(\varphi' - 40)^2} - \frac{6}{(\varphi' - 40)} \quad (A_5)$$

$$\frac{\partial N_\gamma}{\partial \varphi'^2} = \frac{12}{(\varphi' - 40)^2} - \frac{12 * \varphi'}{(\varphi' - 40)^3} \quad (A_6)$$

$$\frac{\partial q_{ult}}{\partial \gamma} = \frac{(5 * \varphi' + 40)D + 3\varphi'B}{(40 - \varphi')} \quad (A_7)$$

$$\frac{\partial^2 q_{ult}}{\partial \gamma^2} = 0 \quad (A_8)$$

$$\frac{\partial q_{ult}}{\partial \varphi'} = \frac{120\gamma B + 240\gamma D}{(40 - \varphi')^2} \quad (A_9)$$

$$\frac{\partial^2 q_{ult}}{\partial \varphi'^2} = \frac{240\gamma B + 480\gamma D}{(40 - \varphi')^3} \quad (A_{10})$$

## Annexe B

### Fonction de performance et équations de Rackwitz-Fiessler

$$g_q(\varphi, \gamma) = q_{ult}(\varphi, \gamma) - q_{ad}$$

où  $q_{ad}$  : la capacité portante admissible, et  $q_{ult}$  : la capacité portante ultime

$$g_p(\varphi, \gamma) = P_u(\varphi, \gamma) - P_s$$

où  $P_s$  : charge appliquée et  $P_u$  : charge ultime de fondation

### Equations de Rackwitz-Fiessler

Les deux équations utilisées pour la transformation de chaque couple  $(\varphi, \gamma)$  de surface d'état limite de l'espace physique en l'espace normal non corrélé standardisé  $(u_1, u_2)$  sont:

$$u_1 = \left( \frac{\gamma - u_\gamma^N}{\sigma_\gamma^N} \right)$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \left[ \left( \frac{\varphi - u_\varphi^N}{\sigma_\varphi^N} \right) - \rho \left( \frac{\gamma - u_\gamma^N}{\sigma_\gamma^N} \right) \right]$$

où  $\rho$  = coefficient de corrélation entre  $\varphi$  et  $\gamma$ .  $u_\gamma^N$ ,  $u_\varphi^N$ ,  $\sigma_\gamma^N$  et  $\sigma_\varphi^N$  sont les moyennes normales équivalentes et les écart- types des variables aléatoires  $\varphi$  et  $\gamma$  respectivement. Ils sont déterminés à partir de l'approche de translation en utilisant les équations suivantes:

$$\frac{\gamma - u_\gamma^N}{\sigma_\gamma^N} = \Phi^{-1}[F_\gamma(\gamma)]$$

$$\frac{\varphi - u_\varphi^N}{\sigma_\varphi^N} = \Phi^{-1}[F_\varphi(\varphi)]$$

où  $F_\gamma$  et  $F_\varphi$  sont les fonctions de répartition non gaussienne de  $\gamma$  et  $\varphi$  et  $\Phi^{-1}$  : inverse de la fonction de répartition normale standardisée.