

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Construction

Thème :

***EFFETS DE CHOC SUR LE DÉLAMINAGE
DES MATÉRIAUX COMPOSITES***

Présentée par: **TIBERKAK Rachid**
Magister en Génie Mécanique

Devant le jury :

Mabrouk BOUABDELLAH	Président	Professeur	ENP
Gerard MAURICE	Examineur	Professeur	Univ. Nancy, France
Abdelkader NOUR	Examineur	Professeur	UMBB
Krimo AZZOUAOUI	Examineur	Maître de Conférences	USTHB
Kamel NECIB	Examineur	Maître de Conférences	EMP
Said RECHAK	Directeur de Thèse	Professeur	ENP

DEDICACES

A mes parents.

A ma femme et mes enfants.

A mes frères et sœurs.

A toute ma famille.

A tous mes amis.

REMERCIEMENTS

Mes sincères remerciements vont en tout premier lieu à tous ceux qui m'ont enseigné leur savoir, avec notamment beaucoup de patience. Grâce à eux je peux également aujourd'hui en faire bénéficier à d'autres, qui comme moi, aimeraient satisfaire leur curiosité pour ces sciences apparemment complexes.

Je tiens ensuite à exprimer ma profonde gratitude au Professeur **RECHAK Saïd** qui ma permis d'achever une longue scolarité en co-encadrant cette thèse. Tout au long de nos échanges, j'ai pu apprécier leurs expériences et encouragements, mais aussi profiter de leur savoir dans de nombreux domaines, dont la dynamique des structures, matériaux composites, la mécanique de la rupture et vibrations.

J'adresse mes plus vifs remerciements au Professeur **Mabrouk BOUABDELLAH** qui nous a fait l'honneur d'accepter la présidence de mon jury de thèse ainsi qu'aux Professeurs **Gerard MAURICE**, **Abdelkader NOUR**, **Kamel NECIB** et **Krimo AZZOUAOUI** pour avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je remercie chaleureusement les enseignants et les travailleurs de département de mécanique de l'université Saad Dahleb de Blida ainsi que leurs homologues de département de mécanique de l'école nationale polytechnique.

Je pense naturellement à tous ceux qui m'ont cordialement et substantiellement aidé à faire face à de nombreux obstacles numériques et techniques durant la réalisation de cette thèse en particulier M. **Bachene mourad**.

Je ne saurais oublier mes autres amis et ma famille, qui ont partagé mes difficultés, tristesses et joies pendant de nombreuses années. Mes pensées vont en particulier vers mes parents, ma femme, mes petites filles Douaa et Alaa, mes frères et sœurs qui m'ont beaucoup encouragé tout au long de ma scolarité.

En fin, je n'oublie pas tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

ملخص : الصفائح المركبة المحتوية على ألياف دون إتلاف تحت تأثير تصادم سرعات منخفضة درست عدديا باستعمال طريقة العناصر المنتهية. في الجزء الأول قوة التصادم المطبقة في مركز الصفيحة و انتقال نقطة التصادم ثم حسابهم خلال مرحلة التحميل و التفريغ. النتائج العددية ثم الحصول عليها عن طريق برنامج معلوماتي ثم تطويره بعناية و اهتمام. في المرحلة الثانية من هذا البحث تم دراسة و تحليل الإجهادات الديناميكية. الإجهادات الديناميكية ثم حسابها في كل نقاط قوص و في مختلف ما بين الطيات. عبارات التحطم استعملت من أجل التنبأ بحصول الإتلاف وهذا لمختلف اتجاهات الألياف.

الكلمات المفاتيح : الصفائح المركبة , تصادم , سرعات منخفضة , طريقة العناصر المنتهية, إتلاف .

Résumé : Les plaques composites à base de fibres sans endommagement, sous l'effet de choc à petites vitesses sont numériquement étudiées par éléments finis. Dans la première partie, la force de contact appliquée au centre de la plaque et la déflexion maximale sont calculées durant la phase de chargement et de déchargement. Les résultats numériques sont obtenus par le biais d'un programme en éléments finis développé par nos soins. Dans la deuxième partie de ce travail de recherche une étude de l'analyse dynamique des contraintes est réalisée. Les contraintes dynamiques normales et de cisaillements sont calculées aux points de Gauss et à différentes interfaces. Les critères de rupture appropriés (Fissuration de la matrice et de délaminage) sont utilisés afin de prédire l'initiation de l'endommagement et ce pour plusieurs séquences d'empilements.

Mots clés: Matériaux composites, délaminage, Méthode des éléments finis, loi de contact, algorithme de Newmark.

Abstract: The fiber-reinforced composite plates subjected to low velocity impact are studied by the use of finite element analysis (FE). The contact force and the central deflection are calculated in conjunction with the loading and unloading processes. The dynamic stress analysis is carried out by the use of a constitutive equation of composite laminates without damage. Stresses are calculated at nine Gaussian points of each element of each interface and then averaged. At first, threshold velocities are evaluated for different stacking sequence to predict matrix crack initiation. Then, the impact induces damage at higher impact velocity including matrix cracking is predicted by the appropriate failure criteria (Matrix cracking and delamination).

Keywords: Finite element analysis, fiber-reinforced plates, low velocity, contact law, Newmark's integration scheme.

NOTATIONS PRINCIPALES

a	: Longueur de la plaque.
$\{a\}$: Vecteur de déplacements globaux.
$\{a_e\}$: Vecteur de déplacements élémentaires.
A_{ij}	: Coefficients de rigidité en membrane.
b	: Largeur de la plaque.
B_{ij}	: Coefficients de rigidité en membrane-flexion.
$[B_L]$: Matrice d'interpolation des déformations.
D_{ij}	: Coefficients de rigidité en flexion.
E_1	: Module d'Young longitudinal.
E_2	: Module d'Young transversal.
E_i	: Module de Young de l'impacteur.
F_m	: Force maximale de contact avant la phase de déchargement.
F_c	: Force de contact.
F_{ij}	: Coefficients de rigidité en cisaillement.
$\{F\}$: Force extérieure équivalente.
G_{12}	: Module de cisaillement longitudinal.
G_{13}	: Module de cisaillement transversal.
G_{23}	: Module de cisaillement transversal.
h	: Epaisseur de la plaque.
$[J]$: Matrice Jacobienne.
k	: Constante élastique.
$[K]$: Matrice de rigidité globale.
LM	: Connectivité des éléments.
m_p	: Masse de l'impacteur.
$[M]$: Matrice de masse globale.
M_{xx}, M_{yy}	: Moments de flexion.
M_{xy}	: Moment de torsion.
NPLY	: Nombre de plis du stratifié.

NELEM	: Nombre d'éléments du maillage.
NPGS	: Nombre de points de Gauss.
N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}	: Résultantes en membrane.
$[N]$: Fonctions d'interpolation de déplacements.
$Q(x, y)$: Résultante en cisaillement.
$[Q]$: Matrice de rigidité d'un pli exprimée dans le repère principal (1,2,3).
$[\bar{Q}]$: Matrice de rigidité d'un pli exprimée dans le repère du stratifié (x, y, z) .
R	: Rayon de l'impacteur.
$\{R\}$: Vecteur des forces nodales externes.
$[T]$: Matrice de changement de base des contraintes.
$[T']$: Matrice de changement de base des déformations.
u	: Déplacement suivant l'axe x .
$\{u\}$: Vecteur de déplacement.
$\{\ddot{u}\}$: Vecteur de l'accélération.
v	: Déplacement suivant l'axe y .
w	: Déplacement suivant l'axe z .
(x, y, z)	: Axes liés au stratifié.
θ	: Angle que fait le repère (1,2) avec le repère (x, y) .
ϑ_x	: La rotation de la normale à la surface moyenne autour de l'axe x .
ϑ_y	: La rotation de la normale à la surface moyenne autour de l'axe y .
(1,2,3)	: Axes principaux liés au pli.
$\{\psi\}$: Résultante des forces internes et externes.
σ	: Contraintes normales.
τ	: Contraintes tangentielles.
ε_L	: Déformations linéaires.
ε_{NL}	: Déformations non linéaires.
κ	: Déformations en courbure.
ρ	: Masse volumique

γ	: Déformations angulaires.
α_{ij}	: Facteurs de correction en cisaillement.
ν_{12}, ν_{21}	: Coefficients de Poisson.
w_i	: Déplacement de l'impacteur.
ν_i	: Coefficient de poisson de l'impacteur.
α_m	: Indentation maximale.
α_0	: Indentation permanente causée par l'impacteur dans la plaque.
α_{cr}	: Indentation critique.
$\sigma_{ii}^t, \sigma_{ii}^c$: Contraintes à la rupture en traction et en compression.
σ_{12}^r	: Contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan du pli.
$\varepsilon_{ii}^t, \varepsilon_{ii}^c$: Déformations à la rupture en traction et en compression.
ε_{12}^r	: Déformation à la rupture en cisaillement dans le plan du pli.
(ξ, η)	: Systèmes d'axes local.

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Matériau composite unidirectionnel	9
Figure 1.2 : Principaux matériaux de renfort	9
Figure 1.3 : Différentes familles de matrice.....	10
Figure 1.4 : Schéma d'une plaque stratifiée.....	12
Figure 1.5 : Directions principales dans un pli.....	13
Figure 1.6 : Changement de repère dans un pli.....	15
Figure 1.7 : Stratifié symétrique.....	20
Figure 2.1 : Description de phénomène de choc.....	27
Figure 2.2 : Schématisation de phénomène de choc.....	27
Figure 2.3 : Elément de référence à 9 nœuds.....	41
Figure 3.1 : Enchaînement des opérations de calcul d'un programme en éléments finis....	60
Figure 3.2 : Système de numérotation pour un même nombre d'éléments.....	63
Figure 3.3 : Plaque discrétisée en éléments finis.....	64
Figure 3.4 : Répartition des degrés de liberté actifs.....	65
Figure 3.5 : Structure de la matrice de rigidité globale.....	67
Figure 3.6 : Organigramme de calcul.....	74
Figure 3.7 : Variation de la force de contact pour 6.14 Kg et 1.76 m/s.....	76
Figure 3.8 : Variation de la force de contact pour 6.14 Kg et 2.68 m/s.....	76
Figure 4.1 : Variation de la vitesse de l'impacteur.....	79
Figure 4.2 : Variation de la force de contact pour 0.314 Kg et 2.92 m/s.....	79
Figure 4.3 : Variation de la déflexion maximale pour 0.314 Kg et 2.92 m/s.....	80
Figure 4.4 : Variation de la force de contact pour trois configurations différentes.....	81
Figure 4.5 : Variation de la force de contact pour trois configurations différentes.....	82
Figure 4.6 : Variation de la force de contact pour 0.314 Kg et 2.92 m/s.....	83
Figure 4.7 : Variation de la déflexion maximale pour 0.314 Kg et 2.92 m/s.....	83
Figure 4.8 : Variation de la force de contact pour trois vitesses différentes du projectile...84	
Figure 4.9 : Variation de la déflexion maximale pour trois vitesses différentes du projectile.....	84
Figure 4.10: Variation de la force de contact pour trois masses différentes du projectile...84	
Figure 4.11: Modèle par FEM.....	87

Figure 4.12: Distribution des contraintes au premier pli.....	89
Figure 4.13: Distribution des contraintes au dernier pli.....	89
Figure 4.14: Distribution des contraintes au plan moyen.....	90
Figure 4.15: Distribution des contraintes en deux endroits différents.....	91
Figure 4.16: Stratifié déformé pour R=12.7mm.....	92
Figure 4.17: Stratifié déformé pour R=6.35mm.....	93
Figure 4.18: Stratifié déformés pour R=6.35mm.....	94
Figure 4.19:Prédiction de la fissuration de la matrice à différents temps du premier pli.....	96
Figure 4.20: Prédiction de la fissuration de la matrice à différents temps de deuxième pli.....	97
Figure 4.21: Prédiction de la fissuration de la matrice à différents temps du pli 5.....	98
Figure 4.22: Prédiction de la fissuration de la matrice à différents temps du pli 9.....	99
Figure 4.23: Prédiction de la fissuration de la matrice à différents temps du pli 10.....	100
Figure 4.24: Distribution de contraintes à l'interface 1.....	101
Figure 4.25: Distribution de contraintes à l'interface 2.....	101
Figure 4.26: Distribution de contraintes à l'interface 5.....	102
Figure 4.27: Distribution de contraintes à l'interface 6.....	102
Figure 4.28: Distribution de contraintes à l'interface 18.....	102
Figure 4.29: Distribution de contraintes à l'interface 19.....	102
Figure A1.1:Changement de base.....	106

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1: Propriétés Mécaniques et géométriques de la plaque composite et de l'impacteur	75
Tableau 4.1: Les valeurs de la force maximale pour trois plaques de dimensions différentes et pour différentes masses de l'impacteur.....	83
Tableau 4.2: Les valeurs de la force maximale pour trois plaques de dimensions différentes et pour différentes masses de l'impacteur	85
Tableau 4.3: Plus petites vitesses causant l'initiation de la fissuration de la matrice pour différentes séquences d'empilement.....	86
Tableau 4.4: Le premier point de Gauss fissuré.....	87
Tableau 4.5: Position de la fissuration de la matrice, $[0/90_2/0]$	88
Tableau 4.6: Position de la fissuration de la matrice, $[0_2/90_2/0_2]$	88
Tableau 4.7: Position de la fissuration de la matrice, $[0_2/90_4/0_2]$	89
Tableau 4.8: Propriétés Mécaniques et géométriques de la plaque composite et de l'impacteur.....	91
Tableau 4.9: Les valeurs de la force maximale pour trois plaques de dimensions différentes et pour différentes masses de l'impacteur	95

TABLE DE MATIERES

INTRODUCTION ET ETAT DE L'ART.....	1
Chapitre I : COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE DES PLAQUES STRATIFIEES....	8
1.1 INTRODUCTION.....	8
1.2 PROPRIETES REMARQUABLES DU MATERIAU COMPOSITE.....	10
1.3 ANALYSE MACROSCOPIQUE DES STRATIFIES.....	11
1.3.1 Hypothèses fondamentales.....	11
1.3.2 Champ de déplacements.....	12
1.3.3 Relations contraintes déformations	13
1.3.4 Résultantes des forces et des moments.....	17
1.3.4.1 Résultantes en membrane.....	17
1.3.4.2 Résultantes en cisaillement.....	17
1.3.4.3 Moments de flexion et de torsion.....	18
1.4 EQUATION CONSTITUTIVE D'UN STRATIFIE.....	18
1.5 CAS PARTICULIERS.....	20
1.6 MATRICE DE RIGIDITE.....	21
1.7 MECANISMES D'ENDOMMAGEMENT ET DE RUPTURE DANS LES COMPOSITES.....	22
1.7.1 Cas des plis unidirectionnels.....	23
Chapitre II : FORMULATION EN ELEMENTS FINIS DU PROBLEME DE CHOC DANS LES MATERIAUX COMPOSITES.....	24
2.1 INTRODUCTION.....	24
2.2 DESCRIPTION DE PROCESSUS DE CONTACT.....	25
2.3 CALCUL DE LA FORCE DE CONTACT.....	25
2.4 SOLUTION DES EQUATIONS D'EQUILIBRES DANS L'ANALYSE DYNAMIQUE.....	29
2.4.1 Algorithme de Newmark.....	29
2.4.2 Méthode de Newton Raphson.....	31
2.5 ENDOMMAGEMENT ET CRITERES DE RUPTURES.....	32

2.5.1 Critères de Rupture.....	33
2.5.1.1 Critère de la contrainte maximale.....	33
2.5.1.2 Critère de la déformation maximale.....	34
2.5.1.3 Critère de Hill.....	35
2.5.1.4 Critère de Tsai-Hill.....	35
2.5.1.5 Critère de Hoffman	36
2.5.1.6 Critère Tsai-Wu	36
2.5.1.7 Critère de Hashin.....	37
2.6 ANALYSE PAR ELEMENT FINIS.....	39
2.6.1 Historique.....	39
2.6.2 Introduction.....	40
2.6.3 Discrétisation.....	41
2.6.4 Formulation de Mindlin.....	41
2.6.5 Analyse non linéaire par la méthode des éléments finis.....	42
2.6.5.1 Champ de déformations.....	42
2.6.5.2 Champ de déplacements élémentaires.....	47
2.6.5.3 Champ de déformations élémentaires.....	49
2.7 MATRICE DE RIGIDITE.....	53
2.7.1 Principe du travail virtuel.....	53
2.8 MATRICE DE MASSE.....	57
2.9 CHOIX DU NOMBRE DE POINTS D'INTEGRATION.....	58
Chapitre III : IMPLEMENTATION NUMERIQUE ET PRESENTATION DU CODE DE CALCUL.....	59
3.1 INTRODUCTION.....	59
3.2 INTRODUCTION DES DONNEES.....	61
3.2.1 Données mécaniques.....	61
3.2.2 Données géométriques.....	61
3.3 CONSTRUCTION DE LA MATRICE DE RIGIDITE.....	65
3.4 CONSTRUCTION DE LA MATRICE MASSE.....	68
3.5 RESOLUTION.....	68
3.5.1 Calcul de la force de contact.....	68
3.5.2 Calcul du déplacement w_s	70

3.5.3 Prédiction d'endommagement.....	71
3.6 VALIDATION DES RESULTATS.....	75
3.7 CONCLUSION.....	76
Chapitre IV : APPLICATIONS ET INTERPRETATIONS DES RESULTATS.....	77
4.1 INTRODUCTION.....	77
4.2 ETUDES PARAMETRIQUES.....	78
4.2.1 Influence des conditions aux limites.....	79
4.2.2 Influence des séquences d'empilement.....	80
4.2.3 Influence des dimensions de la plaque.....	82
4.2.4 Influence de la vitesse de l'impacteur.....	83
4.2.5 Influence de la masse de l'impacteur.....	84
4.3 PREDICTION D'ENDOMMAGEMENT CAUSE PAR LE CHOC.....	85
4.3.1 Analyse d'endommagement	85
4.3.1.1 Prédiction de la fissuration de la matrice.....	85
4.4 CONTRAINTES DYNAMIQUES AUX INTERFACES.....	89
4.5 CONFIGURATIONS DEFORMEES.....	91
4.6 PREDICTION DES DIMENSIONS DE LA FISSURATION DE LA MATRICE.....	95
4.7 DISTRIBUTION DES CONTRAINTES SANS CONSIDERATION D'ENDOMMAGEMENT.....	101
CONCLUSION GENERALE.....	103
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	106
Annexe1 : MATRICES DE CHANGEMENT DE BASE.....	110
Annexe 2 : FICHER DE RESULTATS.....	115
Annexe 3 : PROGRAMME DE PREDICTION DE LA FISSURATION DE LA MATRICE.....	120

INTRODUCTION ET ETAT DE L'ART

Les matériaux occupent une place considérable dans la vie quotidienne et jouent un rôle très important dans le développement de véritables nouveaux matériaux conçus dans le but de répondre à des besoins industriels de plus en plus exigeants.

Le choix d'un matériau composite pour la réalisation d'une pièce mécanique n'est plus réservé à des applications spécifiques produites à faible unité comme les satellites, le sport de compétition, les voitures de luxe...etc. Des domaines comme le génie civil, l'automobile, les loisirs envisagent désormais l'emploi de matériaux composites comme moyen d'innovation et d'augmentation des performances de leurs produits. Bien sûr, l'aéronautique demeure le principal demandeur de matériaux légers et performants.

Les matériaux composites comme leur nom l'indique, sont composés de deux ou de plusieurs constituants de façon à améliorer les qualités des produits désirés, spécialement leurs propriétés mécaniques. Dans ce cadre, des structures composites, en particulier des plaques composites sont utilisées dans différents secteurs industriels.

L'inhomogénéité et l'anisotropie des matériaux composites rendent leurs mécanismes d'endommagement nombreux et complexes. Comme tout autre matériau usuel, les matériaux composites ne peuvent s'échapper aux différentes causes de dégradation.

Parmi les modes de dégradation les plus rencontrés dans les matériaux composites; on cite (*i*) les craquèlements dans la matrice et (*ii*) les décohésions aux interfaces fibres-matrices. Ces modes de dégradation se propagent pour donner naissance à quatre principaux types de fractures:

- Fissuration transverse de la matrice.
- Fissuration longitudinale de la matrice.
- Rupture des fibres.
- Délaminage.

Ces endommagements sont la conséquence des chargements de service (statique et fatigue) ou des chargements accidentels (impact). Depuis quelques années, de nombreuses études portent sur la « Surveillance de Santé des Structures ». La plupart de ces études concernent la mesure des endommagements : localisation et étendue de zones délaminées suite à un impact ; rupture de fibres...etc. Si ces mesures permettent de connaître l'état de la structure, elles ne permettent pas de savoir si les endommagements mesurés sont acceptables ou s'ils nécessitent une intervention (arrêt de l'appareil, réparation,...).

Ces modes entraînent la dégradation de la structure jusqu'à la rupture totale de la structure. Cette dégradation peut être étudiée d'une manière globale sur la structure (étude macromécanique) et par une dégradation locale des plis (étude micromécanique).

Le mauvais étalement de l'adhésif entre les plis et/ou la répartition aléatoire des constituants qui composent le matériau peut causer un problème de délaminage; ce dernier résulte d'une séparation des plis et dépend de plusieurs paramètres qui peuvent être classés en deux catégories:

- Paramètres intrinsèques qui dépendent du matériau lui-même.
- Paramètres extrinsèques qui dépendent des conditions d'essais ou de fonctionnement des structures.

Le problème de choc a été traité par un grand nombre d'auteurs tel que C. T. Sun et *al* [1-5]. C. T. Sun [1] a proposé la loi de contact de Hertz modifiée et par la suite il a appliqué cette loi pour l'analyse des stratifiés composite soumis au choc à petite vitesse. Tan et Sun [2] ont développé leur propre programme en élément finis pour l'analyse de la réponse au choc dans les stratifiés composite. Ils ont réalisé des tests de choc à petites vitesses en utilisant des pendules. Après ces études C. T. Sun et ses collaborateurs [3,4] ont continué à présenter des résultats analytiques sur la réponse au choc à petites vitesses dans les composites stratifiés sous différentes conditions de chargement. Le phénomène de déminage et de la propagation de fissure dû au choc a été traité par Rechak [5]. L'auteur propose une technique expérimentale la mesure de la vitesse de propagation de fissure.

Tiberkak et ses collaborateurs [6-9] ont étudié le phénomène d'endommagement dans les stratifiés composites soumis au choc. Les auteurs après une formulation mathématique suivi d'un développement et une mise au point d'un logiciel de calcul en FORTRAN, présentent la force et la déflexion maximale des plaques composites avec différents empilements [6]. Le calcul des contraintes dynamiques aux interfaces ainsi que la

prédiction de l'initiation de fissure dans la matrice ont aussi fait l'objet d'une étude [7]. Les auteurs ont aussi prédit et ce selon une étude paramétrique, la vitesse minimale de choc causant l'initiation de la fissure pour des stratifiés avec différentes configurations [8]. Dans [9], les auteurs ont révélé: (i) La vitesse critique d'impact provoquant l'initiation de la fissuration de la matrice diminue avec l'augmentation du paramètre n du stratifié de type $[0_m/90_n/0_m]$. (ii) L'initiation de la fissuration de la matrice dans les stratifiés ayant un nombre élevé de plis orientés à 90^0 apparaît à une faible vitesse en comparaison avec celle des stratifiés ayant un nombre moins élevé des plis orientés à 90^0 .

Fukunaga et ses collaborateurs [10-13] ont travaillé sur le problème de choc des matériaux composites, avec ou sans endommagement. Les auteurs ont utilisé la méthode des éléments finis pour étudier la réponse dynamique des stratifiés composite. Ils concluent que : (i) la rigidité de la plaque stratifiée devient inférieure avec la réduction de la distance entre le délaminage et le plan moyen de la plaque et (ii) le délaminage dans les matériaux composites a une influence significative sur les fréquences d'ordre plus supérieur que sur les fréquences normales d'ordre inférieur. (iii) L'influence des dimensions de la plaque sur la taille de délaminage n'est pas évidente, sauf si la vitesse de choc est relativement élevée. (iv) la force de contact avec plusieurs délaminages est beaucoup plus petite que celle d'une plaque composite avec un seul délaminage ou sans délaminage.

Krishnamurthy et ses collaborateurs ont étudié le problème d'endommagement dans les matériaux composites [14,15] où l'influence de quelques paramètres tels que, la masse et la vitesse de l'impacteur, la courbure de la structure et les séquences d'empilement ont fait l'objet. La réponse au choc d'une structure cylindrique composite délaminée a été déterminée par deux méthodes qui sont la série de Fourier classique et la méthode des éléments finis. Les endommagements, à savoir la fissuration de la matrice et le délaminage, sont étudiés par l'utilisation du modèle semi empirique de Choi Chang [16,17]. La matrice de rigidité est modifiée pendant chaque pas de temps pour tenir compte de ces endommagements. Une réduction de la raideur des plis endommagés a été également prise en compte. Quelques conclusions ont été tirées à partir de cette étude, qui sont : (i) L'intensité de l'impact est principalement dominée par la masse et la vitesse de l'impacteur. (ii) L'orientation des plis représente le paramètre le plus influant sur la réponse au choc. (iii) La force de contact et le déplacement ne sont pas affectés par les conditions aux limites.

La réponse au choc à petites vitesses des plaques composites sans endommagement, est présentée par Züleyha et al [18] où l'influence des dimensions d'une plaque composite verre-E/époxyde d'orientation $(0/90/0/90)_s$ et à base de fibres est étudiée. Une simulation numérique utilisant le code 3DIMPACT est entreprise pour le calcul la force de contact et prédire l'initiation de la fissuration de la matrice et de délaminage. Les auteurs aboutissent aux conclusions suivantes : (i) la force change avec le changement de la masse de l'impacteur, (ii) la durée de contact augmente avec la diminution de la largeur du stratifié, (iii) la surface de délaminage de la plaque de dimensions $150\text{ mm} \times 100\text{ mm}$ est plus grande que celles des plaques de dimensions $150\text{ mm} \times 150\text{ mm}$ et $150\text{ mm} \times 50\text{ mm}$.

Shiuh-Chuan et ses collaborateurs [19], ont traités le cas des plaques et coques composites soumises au choc à petites vitesses par le logiciel commercial ANSYS/LS-DYNA. La force de contact et la déflexion maximale sont calculées par la loi modifiée de contact de Hertz durant la phase de chargement et de déchargement. Dans le cas des stratifiés composites les endommagements causés par le choc, comprenant la fissuration de la matrice et le délaminage, sont prédits par des critères de rupture. Les résultats numériques montrent que la force de contact augmente et la déflexion diminue pour les structures avec une plus grande rigidité. Les auteurs montrent que la force de contact est proportionnelle à la vitesse de l'impacteur. Cependant, la période de contact dépend de la rigidité de la structure stratifiée.

Le phénomène de contact a été aussi traité par Mili et Necib [20]. Le comportement des plaques composite circulaires minces E-glace/époxyde sous l'effet choc d'un impacteur en aluminium à petites vitesses ($0.53\text{--}3.1\text{ m/s}$) est examiné. Les auteurs attribuent la différence entre les résultats théoriques et expérimentaux augmente comme avec l'augmentation de la vitesse aux pertes de frottement. Ils constatent par ailleurs que les forces de contact et les déflexions centraux sont proportionnelles à la vitesse de l'impacteur. Cependant, quand la vitesse diminue, la durée de déflexion est plus importante que le temps de contact. Il est aussi rapporté qu'à une même vitesse d'impact, la plaque composite présente un même comportement dynamique et ce pour différent ordre d'empilement du stratifié.

Des études des contraintes et des endommagements dans les stratifiés composites ont été faites par Dazhi Jiang et Dongwei Shu [21]. L'analyse des contraintes indique que les seuils des endommagements ont des effets significatifs sur les composantes des

contraintes, c'ad σ_{yz} , σ_{xz} et σ_{zz} . Aucun effet n'a été remarqué sur les composantes des contraintes quand les seuils des endommagements sont plus grands que 0,06%.

La prédiction et la propagation des endommagements dans les coques composites soumises au choc ont été étudiées par Zhao et Cho [22]. Les modes des endommagements considérés sont la fissuration de la matrice, la rupture des fibres, et de délaminage. Les auteurs concluent: (i) La propagation des endommagements procède différemment dans les plaques que dans les coques composites. Pendant que la force de contact s'accumule, les endommagements apparaissent au pli supérieur en premier lieu, puis se propagent dans les plis inférieurs dans les coques. (ii) la réponse dynamique et les endommagements dus au choc des coques composites sont sensibles à la séquence d'empilement et au nombre d'interfaces. (iii) l'énergie de choc joue un rôle essentiel dans l'analyse des endommagements. La séquence d'empilement, le rayon de courbure et l'épaisseur des stratifiés composites sont des facteurs importants à affecter des zones endommagées causées par le choc.

Le travail réalisé par Parhi et al [23] vise à analyser les endommagements des plis des plaques composites stratifiés avec des délaminages multiples arbitrairement localisés soumis à des charges aussi bien statique transversale que de choc. Les auteurs rapportent que les délaminages influencent de manière significative les endommagements du premier pli des plaques composites stratifiées. Ils observent aussi qu'une augmentation du nombre de délaminages a pour conséquence la diminution de la charge transversale en flexion. Dans le cas du choc, ce même effet a pour conséquence la diminution de la vitesse critique d'impact causant l'endommagement du premier pli.

Dans l'étude faite par Hou et al [24], le logiciel commercial LS-DYNA3D est utilisé. Un critère amélioré tenant compte de l'interaction entre les contraintes en compression transversale (the out-of-plane), des contraintes de cisaillement inter laminaire, et les contraintes de compression est proposé. Les auteurs comparent et discutent les résultats obtenus par les différents critères aux résultats expérimentaux.

Bien qu'un très grand nombre de travaux ont été publiés dans ce domaine montrant ainsi l'importance des phénomènes de rupture des matériaux composites, un certain nombre de ces phénomènes restent encore non révélés ou mal cernés.

Dans le présent travail, les endommagements des plaques composites à base de fibres sous l'effet de choc à petites vitesses sont analysés. Un développement de la formulation de la méthode des éléments finis dans la modélisation du problème de contact entre plaque et impacteur est présenté. Sur la base de ce développement mathématique, un logiciel en éléments finis est élaboré par nos soins. Ce logiciel écrit en Fortran, permet d'effectuer plusieurs tâches, à savoir, l'analyse des contraintes, les réponses vibratoires des plaques, et le phénomène de choc dans les matériaux anisotropes. Il est aisément installable et exécutable sur un micro-ordinateur du type Pentium IV possédant des caractéristiques moyennes. Les éléments de Lagrange à 9-nœuds avec prise en compte de l'effet du cisaillement transverse sont utilisés dans la présente étude. Chaque nœud possède cinq degrés de liberté $(u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi})$. 3x3 points de Gauss sont utilisés pour le calcul des termes en membrane et en flexion, et 2x2 points de Gauss sont utilisés pour le calcul des termes en cisaillement transverse. Pour la matrice masse 3x3 points de Gauss permettent d'obtenir des matrices de masses consistantes. Ces matrices peuvent être diagonalisées en utilisant la règle de Lobatto. L'approche utilise la loi de contact de Hertz modifiée, et l'impacteur est considéré comme étant un corps rigide. Pour la phase de chargement et de déchargement, l'algorithme de Newmark est utilisé pour la résolution des deux équations dynamique régissant le mouvement de la plaque et de l'impacteur. La force de contact et la déflexion maximale au centre de la plaque sont calculées durant la phase de chargement et de déchargement, et ce en fonction de plusieurs paramètres tels que: la vitesse de l'impacteur, les conditions aux limites, le rayon de l'impacteur, ainsi que les séquences d'empilements.

La première étape du travail consiste à valider le programme développé par rapport aux résultats expérimentaux et numériques existant dans la littérature [25] où de bonnes concordances sont obtenues. En second lieu, une étude paramétrique est effectuée permettant de tirer certaines conclusions:

- (i) La force de contact augmente avec l'augmentation de la vitesse de contact,
- (ii) La force de contact augmente avec l'augmentation de la masse et du rayon de l'impacteur,
- (iii) Une légère différence concernant la force de contact et la déflexion maximale est remarquée et ce pour les deux types de conditions aux limites,
- (iv) Il est révélé que la force de contact augmente avec l'augmentation de l'épaisseur des plis d'orientation 90° indiquant que la structure composite devient moins rigide.

(v) il est aussi révélé que la vitesse critique d'impact provoquant l'initiation de la fissuration de la matrice diminue avec l'augmentation du paramètre n du stratifié de type $[0_m/90_n/0_m]$.

La vitesse d'impact critique causant l'initiation de la fissuration de la matrice est aussi calculée dans une seconde partie de ce travail de recherche. L'endroit de l'initiation de la fissuration de la matrice est déterminé pour différents stratifiés de séquences d'empilement différentes.

Dans une troisième étape, une analyse comprenant les endommagements de la matrice et du délaminage est effectuée. L'initiation de la fissuration de la matrice est attribuée aux contraintes dynamiques de traction, tandis que le délaminage de la première interface est dû essentiellement aux contraintes de cisaillement inter laminaire. Enfin une analyse des contraintes dynamiques est entreprise, les critères de rupture sont incorporés et les surfaces délaminées sont par conséquent tracées.

Le présent mémoire de thèse de doctorat est divisé en quatre chapitres. Le premier traite la détermination du champ de déplacements, du champ de déformations et du champ des contraintes, ainsi que la matrice de rigidité. L'équation constitutive décrivant le comportement mécanique des plaques composites stratifiées en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse est aussi présentée. Les équations différentielles gouvernant le phénomène de choc à petites vitesses dans les plaques composites sont présentées au chapitre deux. Le troisième chapitre est consacré au développement d'un programme de calcul permettant notamment l'analyse dynamique des plaques composites soumises au problème d'impact.

La prédiction des endommagements (fissuration de la matrice, délaminage) est ainsi présentée.

L'étude est accomplie par une exploitation des résultats présentés dans le chapitre quatre. Enfin une conclusion dans laquelle sont récapitulés les résultats.

Chapitre I

COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE DES PLAQUES STRATIFIEES

1.1 INTRODUCTION

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes (matrice et renfort) (Figure 1.1), se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. Ils peuvent être classés suivant la forme des composants (composites à fibres, composites à particules) ou suivant la nature des composants (composite à matrice organique, métallique, minérale,....etc.) (Figure 1.2 et 1.3). On appelle maintenant de façon courante "matériaux composites" des arrangements de fibres, les *renforts* qui sont noyés dans une *matrice* dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible. La matrice assure la cohésion et l'orientation des fibres, elle permet également de transmettre les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces. Les renforts, sous forme de fibres (fibres de verre, fibres de carbone, fibres d'aramide, fibres de bore..etc), contribuent uniquement à améliorer la résistance mécanique et la rigidité de la pièce dans laquelle ils sont incorporés.

Dans la conception des pièces en matériaux composites, on utilise généralement la technique de stratification qui consiste à élaborer ces pièces par superposition des plis ou des couches. L'objet d'une telle technique est de réaliser une structure résistante et rigide couplée avec un poids minimum (résistance spécifique et rigidité spécifique élevée).

L'optimisation de la résistance et de la rigidité peut être obtenue par le contrôle de l'orientation des fibres et l'ordre d'empilement de ces dernières [26-28].

L'objet de ce chapitre consiste à développer les équations fondamentales des plaques stratifiées. La théorie utilisée est celle de Yang Norris et Stavsky [29]. La relation contraintes déformations diffère de celle des plaques homogènes du fait de l'existence de couplage entre les déformations planes et en courbures.

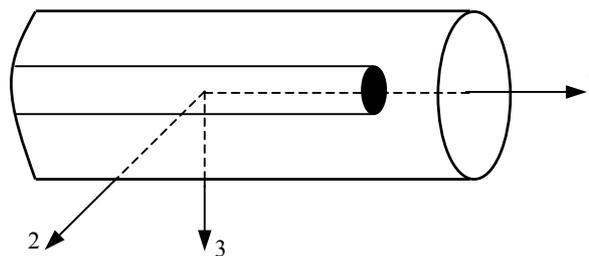


Figure 1.1 Matériau composite unidirectionnel

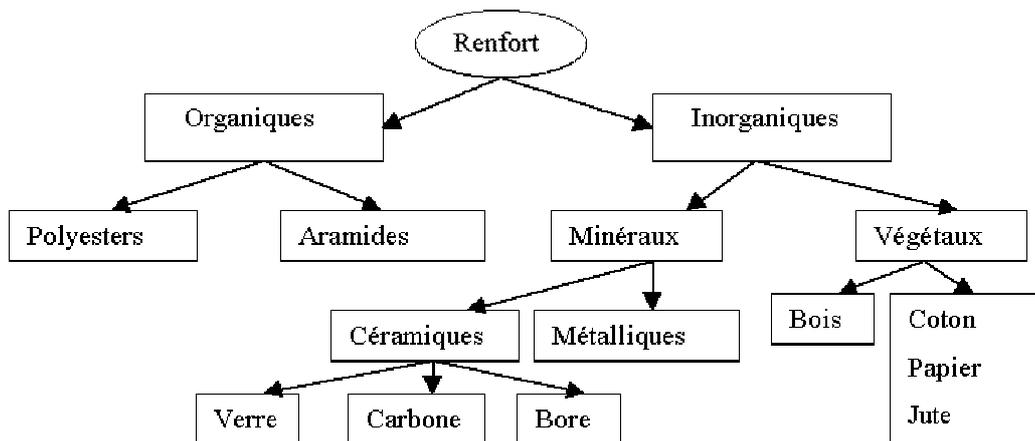


Figure 1.2 Principaux matériaux de renfort

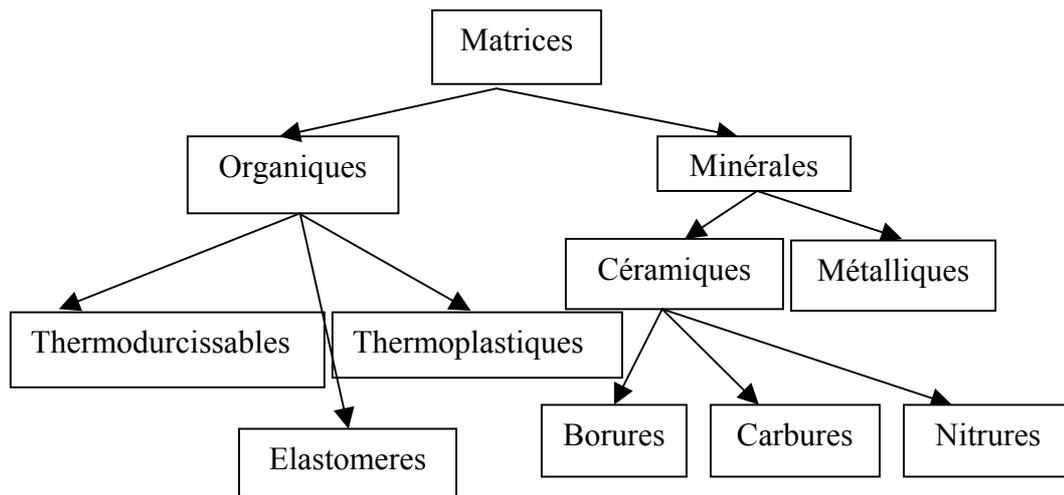


Figure 1.3 Les différentes familles de matrice

1.2 PROPRIETES REMARQUABLES DU MATERIAU COMPOSITE

Les matériaux composites ne se plastifient pas. Leur limite élastique correspond à la limite de rupture. Ceci est très important pour les zones des pièces composites sujettes aux concentrations de contraintes (Trous -Entailles...).

Les matériaux composites sont très résistants à la fatigue et à la chaleur. Ils ont une meilleure tenue au feu que les alliages légers pour une épaisseur identique. Par contre les fumées émises lors de la combustion de certaines matrices s'avèrent toxiques.

Un petit reproche, les matériaux composites vieillissent sous l'action de l'humidité et de la chaleur. Mais ils ne se corrodent pas sauf cas particulier de : Aluminium - Fibre de Carbone, il se produit un phénomène galvanique entraînant des corrosions rapides.

Cependant, ils ont tout de même leurs faiblesses, les résines époxydes ne supportent pas les décapants de peinture, en revanche, graisses, huiles, liquides hydrauliques, peintures, pétrole et solvants sont des produits compatibles sans réel souci.

Les matériaux composites ont une tenue aux impacts et aux chocs moyenne, inférieure à celle des matériaux métalliques.

Avantages des matériaux composites :

- 1 Bonnes propriétés mécaniques
- 2 Gain de masse
- 3 Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage) et réduction du nombre

- d'interfaces (boulonnage, rivetage et soudure sur structures métalliques)
- 4 Grande résistance à la fatigue
- 5 Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf en cas de contact entre de l'aluminium et des fibres de carbone)

Inconvénients des matériaux composites :

- 1 Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température
- 2 Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes
- 3 Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques
- 4 Meilleure tenue au feu que les alliages légers mais émission de fumées parfois toxiques pour certaines matrices.
- 5 Coût parfois prohibitifs (temps et coût études et mise en oeuvre), le gain en coût est surtout valable pour des grandes séries.
- 6 Sensibles aux produits chimiques comme les graisses, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole.

1.3 ANALYSE MACROSCOPIQUE DES STRATIFIES

1.3.1 Hypothèses fondamentales

On considère un stratifié possédant n plis d'orientations différentes (voir Fig.1.4). On définit un système de référence (x, y, z) situé sur la surface moyenne de la plaque dont l'axe z correspond à la direction suivant l'épaisseur. L'étude du comportement globale d'un tel stratifié a pour but de déterminer le champ (i) des déplacements, (ii) des déformations en tout point de la structure et (iii) des contraintes.

Les hypothèses rapportées aux plaques homogènes restent valables aux plaques stratifiées, et sont les suivantes:

1. Les contraintes normales σ_{zz} sont négligeables devant les autres composantes de contraintes, Donc la théorie des plaques stratifiées exige que $\sigma_{zz} = 0$.
2. La normale à la surface moyenne avant déformation reste droite mais pas nécessairement normale à la surface moyenne après déformation. Ceci revient à la prise en compte du cisaillement transverse.

3. Les déplacements sont très petits par rapport à l'épaisseur de la plaque.
4. Les différentes couches composites restent parfaitement collées.

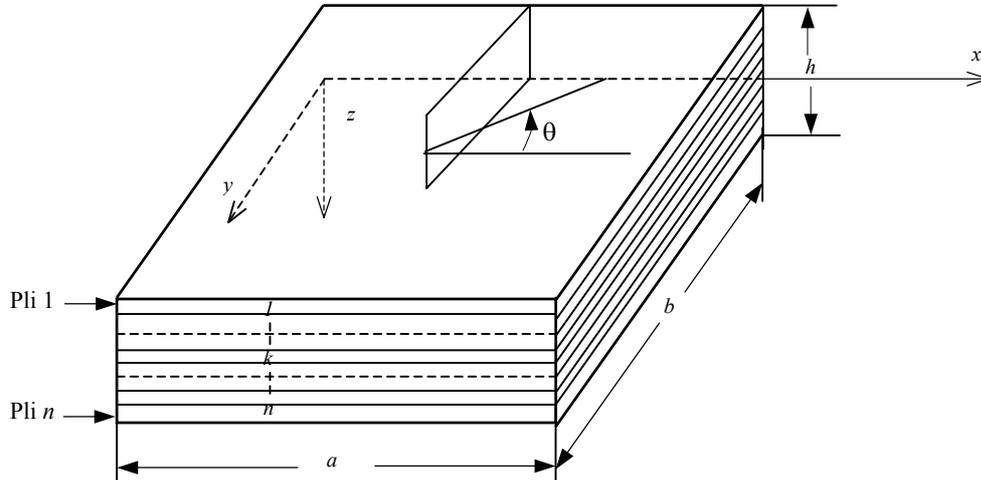


Figure 1.4 Schéma d'une plaque stratifiée

1.3.2 Champ de déplacements

Le champ de déplacements d'un point quelconque $M(x, y, z)$ de la plaque en présence du cisaillement transverse est approché par un polynôme linéaire en z à coefficients en (x, y) de la forme [26,27].

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z \vartheta_x(x, y, t) \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z \vartheta_y(x, y, t) \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Ou :

u, v, w Sont respectivement, les déplacements suivant les directions x, y, z .

u_0, v_0, w_0 Sont respectivement, les déplacements suivant les directions x, y, z d'un point situé sur la surface moyenne de la plaque.

ϑ_x, ϑ_y Sont respectivement, les rotations de la normale à la surface moyenne autour des axes x, y .

1.3.3 Relations contraintes déformations

La loi de Hooke généralisée permet, pour une plaque composite stratifiée, d'écrire la relation entre les contraintes et les déformations. Il est nécessaire d'exprimer cette relation pour chaque pli k à cause de la discontinuité des contraintes interlaminaires. Par souci de simplification, on définit un système d'axes principal (local) (1,2,3) dont l'axe (1) correspond à la direction longitudinale des fibres (Figure 1.5).

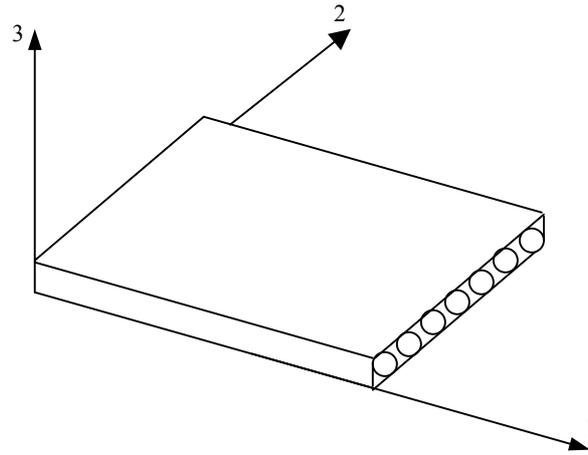


Figure 1.5 Directions principales dans un pli

La relation contrainte déformation par rapport à ce système d'axe s'écrit [23-24]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & Q_{33} & 0 & 0 \\ & \text{Sym} & & Q_{44} & 0 \\ & & & & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}_k \quad (1.2)$$

Où:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{33} &= G_{12}, & Q_{44} &= G_{23}, & Q_{55} &= G_{13} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ou sous forme contractée:

$$\{\sigma_{123}\}_k = [Q] \{\varepsilon_{123}\}_k \quad (1.4)$$

Avec:

E_1 : Module d'Young longitudinal.

E_2 : Module d'Young transversal.

G_{12} : Module de cisaillement longitudinal.

G_{13}, G_{23} : Modules de cisaillement transversaux.

ν_{12}, ν_{21} : Coefficients de Poisson.

$[Q]$: et la matrice de rigidité réduite exprimée dans les axes principaux (1,2,3).

Pour faire l'étude du comportement élastique de l'ensemble du stratifié, il est nécessaire d'exprimer la relation (1.4) par rapport au système d'axes global (x, y, z) , cette opération est effectuée en faisant intervenir les matrices de changement de base des contraintes et des déformations.

Soit donc pour le champ des contraintes:

$$\{\sigma\}_{xyz}^k = [T]^{-1} \{\sigma\}_{123}^k \quad (1.5)$$

Où $[T]$ est la matrice de changement de base des contraintes, elle est donnée par l'expression suivante [Annexe1]:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & -\cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \cos \theta \sin \theta & -2 \cos \theta \sin \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

θ est l'angle que fait le repère (1,2) avec le repère (x, y) .

L'expression du champ des déformations par rapport au repère (x, y, z) s'écrit:

$$\{\varepsilon\}_{xyz}^k = [T']^{-1} \{\varepsilon\}_{123}^k \quad (1.7)$$

Où $[T']^{-1}$ est la matrice de changement de base des déformations, elle est donnée par [Annexe1]:

$$[T'] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & -2 \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 2 \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta \sin \theta & -\cos \theta \sin \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Il est à noter que le changement de base est effectué en faisant une rotation $-\theta$ autour de la direction 3 (Figure 1.6).

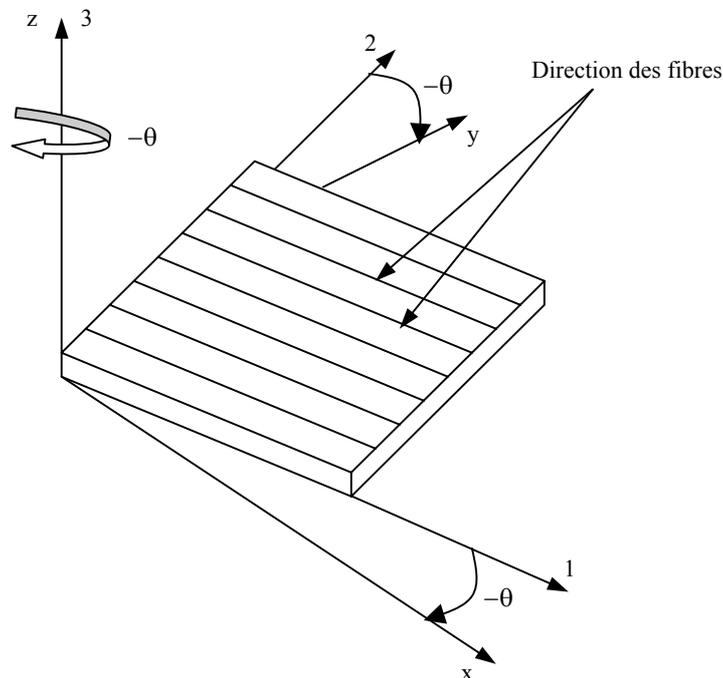


Figure 1.6 Changement de repère dans un pli

Par substitution de (1.4) et (1.7) dans (1.5), la relation contrainte déformation devient:

$$\{\sigma\}_{xyz}^k = [\bar{Q}] \{\varepsilon\}_{xyz}^k \quad (1.9)$$

$[\bar{Q}]$ est la matrice de rigidité réduite d'un composite unidirectionnel ou orthotrope, en dehors de ses axes principaux (x, y, z) .

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [T'] \quad (1.10)$$

Sous la forme développée, cette relation est donnée par:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ & & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & \bar{Q}_{44} & 0 \\ & & & & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_k \quad (1.11)$$

Les éléments de la matrice de rigidité $[\bar{Q}]$ s'écrivent en fonction des coefficients de la matrice dans les axes principaux $[Q]$ et de l'angle θ .

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + (2Q_{11} + 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} - 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{55} \sin^2 \theta + Q_{44} \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \sin \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{44} \sin^2 \theta + Q_{55} \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.3.4 Résultantes des forces et des moments

1.3.4.1 Résultantes en membrane

La discontinuité des contraintes d'un pli à l'autre conduit à écrire le champ des résultantes en membrane, noté $N(x, y)$, sous la forme [26]:

$$\{N(x, y)\} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (1.13)$$

Avec,

N_{xx} , N_{yy} sont les efforts normaux et N_{xy} est l'effort de cisaillement dans le plan (xy).

Sachant que :

$$\{\varepsilon\}_{xyz}^k = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0xx} \\ \varepsilon_{0yy} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad (1.14)$$

En remplaçant les contraintes du pli k exprimées par la relation (1.9) et les déformations exprimées par la relation (1.14), dans la relation (1.13), on aboutit à:

$$\{N(x, y)\} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0xx} \\ \varepsilon_{0yy} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix}_k + \int_{z_{k-1}}^{z_k} z [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}_k \right) dz \quad (1.15)$$

1.3.4.2 Résultantes en cisaillement

De même, les résultantes en cisaillement $Q(x, y)$ sont définies par:

$$\{Q(x, y)\} = \begin{Bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{yy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}_k dz \quad (1.16)$$

1.3.4.3 Moments de flexion et de torsion

Les moments de flexion et de torsion $M(x, y)$ sont donnés par:

$$\{M(x, y)\} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (1.17)$$

Avec,

M_{xx}, M_{yy} sont les moments de flexion et M_{xy} est le moment de torsion.

En procédant de la même manière que dans la section 1.3.4.1, la relation des moments de flexion et de torsion est donnée par:

$$\{M(x, y)\} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0,xx} \\ \varepsilon_{0,yy} \\ \gamma_{0,xy} \end{Bmatrix}_k z dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}_k z^2 dz \quad (1.18)$$

1.4 EQUATION CONSTITUTIVE D'UN STRATIFIE

La combinaison des équations (1.15), (1.16) et (1.18) conduit à reformuler l'équation constitutive du stratifié décrivant le comportement mécanique avec prise en charge de l'effet de cisaillement transverse:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ & & & & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ & & Sym & & & D_{66} & 0 & 0 \\ & & & & & & F_{44} & F_{45} \\ & & & & & & & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0,xx} \\ \varepsilon_{0,yy} \\ \varepsilon_{0,xy} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (1.19)$$

Ou sous forme contractée:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (1.20)$$

Avec:

$$[C] = \begin{bmatrix} [A] & [B] & 0 \\ [B] & [D] & 0 \\ 0 & 0 & [F] \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Et,

$$\{K(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.22)$$

Le vecteur $\{K(x, y)\}$ est appelé vecteur des courbures de la plaque sollicitée en flexion.

Les coefficients de la matrice d'extension $[A]$, de la matrice de couplage $[B]$ et de la matrice de flexion $[C]$ sont définis comme suit:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij})_k (1, z, z^2) dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (1.23)$$

Ou:

$$\begin{aligned} [A_{ij}] &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij}) dz = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij} (z_k - z_{k-1}) \\ [B_{ij}] &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij}) z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ [D_{ij}] &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij}) z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Les coefficients de la matrice de cisaillement $[F]$ sont définis par:

$$[F_{ij}] = \alpha_{ij} \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij})_k dz, \quad i, j = 4, 5 \quad (1.25)$$

Où α_{ij} sont les facteurs de correction en cisaillement permettant d'améliorer la théorie des plaques stratifiées avec cisaillement transverse. La détermination de ces facteurs a fait l'objet de plusieurs recherches [30]. On note que Timoshenko, Reissner et Mindlin ont pris ces facteurs respectivement égaux à $2/3$, $5/6$ et $\pi^2/16$. Il a été remarqué que les résultats obtenus avec des valeurs de $5/6$ sont les plus satisfaisants.

1.5 CAS PARTICULIERS

1 Stratifié doté de la symétrie miroir (stratifié symétrique).

Stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.

Cette condition est caractérisée par:

$$B_{ij} = 0 \Rightarrow [B] = 0 \quad (1.26)$$

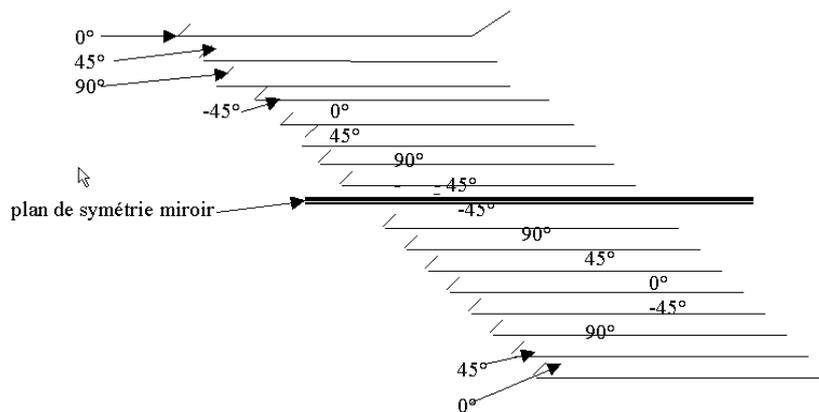


Figure 1.7 Stratifié symétrique

2 Stratifié équilibré.

Stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\vartheta$ que de couches orientées suivant la direction $-\vartheta$.

Dans ce cas :

$$A_{16} = A_{26} = 0 \quad (1.27)$$

3 Stratifié symétrique équilibré.

Dans ce cas l'équation constitutive se réduit à:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & A_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ & & & & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ & & Sym & & & D_{66} & 0 & 0 \\ & & & & & & F_{44} & F_{45} \\ & & & & & & & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0xx} \\ \varepsilon_{0yy} \\ \varepsilon_{0xy} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (1.28)$$

4 Stratifié mince (sans tenir compte du cisaillement transverse).

Dans ce cas:

$$F_{ij} = 0 \quad (i, j = 4, 5) \quad (1.29)$$

1.6 MATRICE DE RIGIDITE

La détermination de la matrice de rigidité nécessite le passage par les étapes suivantes:

1. **Etape1:** Calcul des constantes élastiques d'une composite unidirectionnelle (pli) dans le repère (1,2,3).
2. **Etape2:** Calcul de la matrice de rigidité $[Q_{ij}]$ d'un pli dans le repère local (1,2,3).

3. **Etape 3:** Calcul de la matrice de rigidité $[\bar{Q}_{ij}]$ d'un pli dans le repère du stratifié en utilisant les matrices de passage.
4. **Etape 4:** Calcul des côtes z_k et z_{k-1} de chaque pli dans le repère du stratifié.
5. **Etape 5:** Calcul de la matrice de rigidité $\begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix}$ du stratifié dans le repère (x, y, z) .

1.7 MECANISMES D'ENDOMMAGEMENT ET DE RUPTURE DANS LES COMPOSITES

L'objectif de cette partie est de présenter les différents types d'endommagement pouvant se développer dans une structure composite stratifiée. Comme pour la plupart des matériaux, l'endommagement des composites est dû aux hétérogénéités qui engendrent des concentrations de contrainte. C'est le cas de l'interface entre la fibre et la matrice où l'on peut voir apparaître des décohésions. L'anisotropie provoque également des concentrations de contrainte, notamment à l'interface entre deux plis d'orientations différentes, provoquant des délaminages.

En résumé, la rupture finale d'un composite est le résultat de l'accumulation de divers mécanismes élémentaires, tels que :

- la rupture des fibres
- la rupture transverse de la matrice
- la rupture longitudinale de la matrice
- la rupture de l'interface fibre-matrice
- la rupture interlaminaire ou délaminage.

Généralement, un mécanisme n'est pas isolé, mais divers mécanismes coexistent. Ces mécanismes se développent suivant la nature des matériaux et les conditions de sollicitations mécaniques imposées.

Dans un matériau composite unidirectionnel soumis à des sollicitations mécaniques, la rupture intervient lorsque la contrainte de traction dans une fibre atteint la contrainte ultime de la fibre. La redistribution des contraintes et par conséquent le processus de rupture

résultant, et dépend principalement de :

1. de la contrainte à la rupture des fibres ;
2. de la capacité de la matrice à absorber l'énergie libérée ;
3. des propriétés de l'interface fibres/matrice.

1.7.1 Cas des plis unidirectionnels

Il est difficile de définir un scénario type qui mènerait à la ruine des structures composites stratifiées tant que les mécanismes d'endommagement sont nombreux et complexes [31]. Cependant nous pouvons décrire l'ordre d'apparition des différents endommagements. Dans un premier temps et pour des niveaux de chargement faible on voit apparaître des décohésions entre les fibres et la matrice. Cet endommagement microscopique, est réparti de manière homogène et il évolue progressivement. La deuxième étape est marquée par l'apparition de ruptures transverses, c'est à dire de fissure traversant la totalité d'un pli et se propageant le long des fibres. Suivant la configuration de la structure : orientations des plis, zones de concentration de contrainte, on peut voir apparaître des délaminages sur les bords de la structure. Dans la dernière étape les fissures transverses et les délaminages se propagent, des fibres cassent. Alors, une rupture complète du stratifié apparaît et conduit rapidement à la ruine de la structure.

Chapitre II

FORMULATION EN ELEMENTS FINIS DU PROBLEME DE CHOC DANS LES MATERIAUX COMPOSITES

2.1 INTRODUCTION

Les problèmes dynamiques de contact ont suscité l'attention large due à leur universalité et importance dans beaucoup de domaines d'ingénierie. Ces problèmes sont très complexes due au changement soudain de l'accélération, de la vitesse et des champs de contraintes. Pour des structures simples, comme les bars, quelques analyses théoriques ont été obtenues. Pour des problèmes plus complexes, il est préférable d'employer des méthodes numériques pour l'obtention d'une réponse dynamique approchée.

Actuellement, les méthodes numériques habituelles pour traiter ce genre de problèmes sont basées sur la méthode des éléments finis, avec l'utilisation de l'algorithme d'intégration de Newmark qui semble très utile pour l'analyse des réponses dynamiques des structures. Les stratifiés composites à base de fibres sont très sensibles au choc transversal à faibles vitesses. Il a été montré que ce type de choc cause différents types de fissurations, à savoir : (i) fissuration de la matrice, (ii) fissuration des fibres et (iii) délaminage.

2.2 DESCRIPTION DE PROCESSUS DE CONTACT

L'analyse de contact entre les solides composant un mécanisme est très délicate à mettre en œuvre du fait que les paramètres qui rentrent en jeu sont difficilement maîtrisables. On cite :

- Formes et état des surfaces en contact;
- Répartition des efforts en contact;
- Vitesses relatives;
- Conditions aux limites.

On distingue deux types de contact:

- Contact linéique ou ponctuel: Dans le cas où, le contact se fait selon une petite surface nominale.
- Contact surfacique: Dans le cas où, le contact se fait suivant une surface nominale importante.

2.3 CALCUL DE LA FORCE DE CONTACT

La réponse dynamique due au choc est étudiée avec la considération des prétentions suivantes: (i) négliger les frottements entre les surfaces en contact (l'impacteur et la plaque composite), (ii) négliger l'effet d'amortissement de la plaque composite et (iii) l'impacteur est supposé un corps rigide avec des propriétés isotropes. Le principe du travail virtuel pour le système plaque-impacteur peut être écrit comme [25]:

$$\int_V \{\delta u\}^T \rho \{\ddot{u}\} dV + \int_A \left[\{\delta \varepsilon^0\}^T \{N\} + \{\delta \kappa\}^T \{M\} \right] dA - \int_S \{\delta u\}^T \{T\} dS + \delta w_i m \ddot{w}_i + F \delta \alpha = 0 \quad (2.1)$$

Avec, ρ est la masse volumique de la plaque, V , A et S sont, respectivement, le volume, la surface du plan moyen et la surface de frontière de la plaque considérée. $\{T\}$ est le vecteur force de traction appliquée, w_i est m sont respectivement le déplacement et la masse de l'impacteur. $\{N\}$ et $\{M\}$ sont respectivement, le vecteur des efforts en membrane, donné par la relation (1.15) et le vecteur des moments de flexion et de torsion, donné par (1.18). $\{\varepsilon^0\}$ est le vecteur de déformations au plan moyen. $\{\kappa\}$ est le vecteur des

courbures donné par (1.22). F est la force de contact entre l'impacteur est la cible. α est l'indentation faite par l'impacteur dans la plaque.

Les éléments de Lagrange à 9-nœuds et la théorie des plaques de Mindlin qui tient compte de l'effet du cisaillement transversal sont utilisés dans la formulation par la méthode des éléments finis [10-13]. Chaque nœud possède cinq (05) degrés de liberté $(u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi})$. L'équation dynamique de la plaque en négligeant l'effet d'amortissement est donnée par:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (2.2)$$

Avec $[M]$ et $[K]$ sont respectivement, la matrice de masse et la matrice de rigidité globale de la plaque composite. $\{u\}$ et $\{\ddot{u}\}$ sont respectivement, le vecteur de déplacement et de l'accélération. $\{F\}$ est la force extérieure équivalente. Elle est donnée par:

$$\{F\} = \{0,0,0,\dots,\dots,\dots,F_c,0,0,\dots,\dots\}^T \quad (2.3)$$

Où, F_c est la force de contact.

L'équation dynamique de l'impacteur peut être obtenue en utilisant la deuxième loi de Newton. Elle est donnée par:

$$m_p \ddot{w}_p = -F_c \quad (2.4)$$

Où, m_p est la masse de l'impacteur.

Le signe (-) indique que la force de contact est appliquée dans le sens contraire du déplacement de l'impacteur.

Les figures (2.1) et (2.2) décrivent le phénomène de choc entre les deux structures.

Le déplacement et la vitesse initiale de l'impacteur au moment du contact avec la plaque sont $\dot{w}_p = v_0$ et $w_p = 0$.

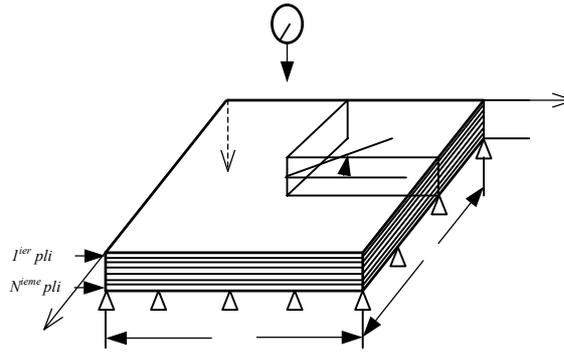


Figure 2.1 : Description de phénomène de choc

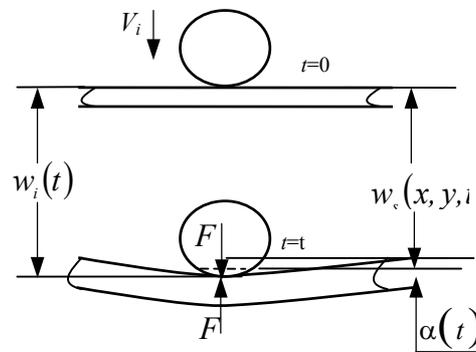


Figure. 2.2 : Schématisation de phénomène de choc,
 (a) Juste avant contact,
 (b) Après contact.

Afin de résoudre les équations (2.2) et (2.4), la force de contact doit être connue. Cette force, appliquée au centre de la plaque, sera calculée par l'utilisation de la loi de contact de Hertz modifiée pour la phase de chargement. Pour la phase de déchargement, elle est calculée à partir des relations de Tan et Sun [2]. Ces lois sont données par:

$$F_c = \begin{cases} k\alpha^{3/2} & \text{Pour le chargement} \\ F_m \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_m - \alpha_0} \right)^q & \text{Pour le déchargement} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\alpha_0 = \begin{cases} \beta(\alpha_m - \alpha_{cr}) & \text{if } (\alpha_m > \alpha_{cr}) \\ 0 & \text{if } (\alpha_m \leq \alpha_{cr}) \end{cases} \quad (2.6)$$

Avec q, β sont des constantes expérimentales et k est la constante élastique dépendant des propriétés mécaniques et géométriques des solides en contact (appelée constante de hertz modifiée). Diverses techniques analytiques et expérimentales pour la détermination de k ont été proposées dans la littérature [14,15,33]:

$$k = \frac{4}{3} \frac{R^{1/2}}{\left[\frac{1-\nu_i^2}{E_i} + \frac{1}{E_2} \right]} \quad (2.7)$$

Avec R, ν_i et E_i sont respectivement, le rayon, le coefficient de poisson, et le module de Young de l'impacteur. E_2 est le module de Young transversal de la plaque (pièce impactée). F_m représente la force maximale de contact avant la phase de déchargement. α_m est la l'indentation maximale. α_0 est l'indentation permanente causée par l'impacteur dans la plaque, et α_{cr} l'indentation critique. A titre d'exemple, on donne les valeurs de α_{cr} pour un composite Graphite/époxyde $\alpha_{cr} = 8.03 \times 10^{-2} mm$ [14], et pour un composite Glace/époxyde $\alpha_{cr} = 1.7 \times 10^{-1} mm$ [12].

L'indentation α , définie comme étant la différence entre le déplacement de l'impacteur est le déplacement du point de contact de la plaque (Fig.2.1). Elle est donnée par la relation suivante:

$$\alpha(t) = w_i(t) - w_s(t) \quad (2.8)$$

Où $w_i(t)$ et $w_s(t)$ sont respectivement, le déplacement de l'impacteur et le déplacement du point de contact à la surface moyenne.

A l'instant $(n+1)$ les deux équations (2.2) et (2.4) deviennent:

$$m_i \ddot{w}_{i(n+1)} = -F_{c(n+1)} \quad (2.9)$$

$$[M] \{\ddot{u}_{(n+1)}\} + [K] \{u_{(n+1)}\} = \{F_{(n+1)}\} \quad (2.10)$$

Ces deux équations sont couplées, et leur résolution peut être faite par intégration numérique.

2.4 SOLUTION DES EQUATIONS D'EQUILIBRES DANS L'ANALYSE DYNAMIQUE

La résolution des équations dynamiques couplées non linéaires de la plaque et de l'impacteur est possible par le biais des méthodes numériques. Plusieurs algorithmes d'intégration dans le temps sont donnés dans la littérature afin de surmonter la difficulté précédente. Parmi ces algorithmes on cite, l'algorithme de Rung-Kutta, les algorithmes multipas, l'algorithme de Newmark et de Wilson- θ .

2.4.1 Algorithme de Newmark

En 1959 Newmark [34], a proposé l'algorithme le plus populaire pour la résolution des problèmes dans la dynamique des structures. Dans cet algorithme, les interpolations relient les positions, les vitesses, et les accélérations de l'étape n à l'étape $n+1$. Ces paramètres à l'étape $n+1$ sont donnés par:

$$v_{n+1} = v_n + \Delta t (1 - \gamma) a_n + \gamma a_{n+1} \quad (2.11)$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta) a_n + 2\beta a_{n+1}] \quad (2.12)$$

Avec x_n , v_n et a_n sont respectivement les vecteurs des positions, des vitesses, et des accélérations à l'étape n . Δt est l'incrément du temps. β et γ sont les paramètres qui définissent la méthode. Cette méthode est implicite, sa stabilité est garantie pour $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$, elle est inconditionnellement stable pour un pas de temps Δt quelconque.

La règle trapézoïdale est un cas particulier de cette famille pour lequel $\beta = \frac{1}{4}$ et $\gamma = \frac{1}{2}$. La méthode de l'accélération linéaire suppose une variation linéaire de l'accélération dans l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$. Cette méthode correspond aux valeurs ; $\beta = \frac{1}{6}$ et $\gamma = \frac{1}{2}$. Les équations dynamiques (2.9) et (2.10) peuvent être résolues avec x_{n+1} en tant qu'inconnues primaires, en substituant a_{n+1} et v_{n+1} en termes de x_n , v_n , a_n et x_{n+1} . Les équations (2.11) et (2.12) peuvent être alors écrites comme suit:

$$a_{n+1} = \frac{I}{\beta \Delta t^2} (x_{n+1} - x_n) - \frac{I}{\beta \Delta t} v_n - \left(I - \frac{I}{2\beta} \right) a_n \quad (2.13)$$

$$v_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (x_{n+1} - x_n) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) v_n - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t a_n \quad (2.14)$$

Pour résoudre l'équation de l'impacteur on pose: $\ddot{w}_{p(n+1)} = a_{n+1}$, et en substituant l'équation (2.13) dans l'équation (2.9), on aura:

$$m_i \left[\frac{I}{\beta \Delta t^2} (w_{i(n+1)} - w_{i(n)}) - \frac{I}{\beta \Delta t} \dot{w}_{i(n)} - \left(I - \frac{I}{2\beta} \right) \ddot{w}_{i(n)} \right] = -F_{c(n+1)} \quad (2.15)$$

De cette dernière équation on tire:

$$w_{i(n+1)} = w_{i(n)} + \Delta t \dot{w}_{i(n)} + \beta \Delta t^2 \left(-1 + \frac{1}{2\beta} \right) \ddot{w}_{i(n)} - \frac{\beta \Delta t^2}{m_i} F_{c(n+1)} \quad (2.16)$$

A l'étape $(n+1)$ la force de contact pour la phase de chargement est donnée par la première relation de l'équation (2.5), et α est donnée par la relation (2.8). En substituant (2.16) dans (2.8) on abouti à:

$$\alpha = \left(w_{i(n)} + \Delta t \dot{w}_{i(n)} + \beta \Delta t^2 \left(-1 + \frac{1}{2\beta} \right) \ddot{w}_{i(n)} - \frac{\beta \Delta t^2}{m_i} F_{c(n+1)} - w_{s(n+1)} \right) \quad (2.17)$$

En remplace (2.17) dans la première relation de (2.5), on obtient l'expression de la force de contact dans la phase de chargement:

$$F_{c(n+1)} = K \left(w_{i(n)} + \Delta t \dot{w}_{i(n)} + \beta \Delta t^2 \left(-1 + \frac{1}{2\beta} \right) \ddot{w}_{i(n)} - \frac{\beta \Delta t^2}{m_i} F_{c(n+1)} - w_{s(n+1)} \right)^{3/2} \quad (2.18)$$

Posons,

$$q_1 = w_{i(n)} + \Delta t \dot{w}_{i(n)} + \beta \Delta t^2 \left(-1 + \frac{1}{2\beta} \right) \ddot{w}_{i(n)}, \quad q_2 = \frac{\beta \Delta t^2}{m_i} \quad (2.19)$$

La relation (2.18) devient :

$$F_{c(n+1)} = K(q_1 - q_2 F_{c(n+1)} - w_{s(n+1)})^{3/2} \quad (2.20)$$

Pour la phase de déchargement et à l'étape $(n+1)$, la force de contact est donnée par:

$$F_{c(n+1)} = K_1(q_1 - q_2 F_{c(n+1)} - w_{s(n+1)} - \alpha_0)^q \quad (2.21)$$

Avec,

$$K_1 = \frac{F_m}{(\alpha_m - \alpha_0)^q} \quad (2.22)$$

Les deux équations (2.20) et (2.21) sont des équations non linéaires, et leurs résolutions nécessitent l'utilisation des méthodes itératives telle que la méthode de Newton-Raphson.

2.4.2 Méthode de Newton Raphson

La méthode de Newton-Raphson est une méthode itérative consiste à trouver la solution de l'équation $f(x)=0$ en utilisant la forme de la solution suivante:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (2.23)$$

Pour la phase de chargement la relation (2.20) de la force de contact peut être écrite sous la forme :

$$G(F_{c(n+1)}) = F_{c(n+1)} - K(q_1 - q_2 F_{c(n+1)} - w_{s(n+1)})^{3/2} = 0 \quad (2.24)$$

D'après la relation (2.23), la solution de l'équation (2.24) peut être donnée par:

$$F_{c(n+1)} = F_{c(n)} - \frac{G(F_{c(n)})}{G'(F_{c(n)})} \quad (2.25)$$

Avec;

$$G(F_{c(n)}) = F_{c(n)} - K(q_1 - q_2 F_{c(n)} - w_{s(n)})^{3/2} \quad (2.26)$$

Et;

$$G'(F_{c(n)}) = 1 + \frac{3}{2} K q_2 (q_1 - q_2 F_{c(n)} - w_{s(n)})^{1/2} \quad (2.27)$$

En substituant (2.26) et (2.27) dans (2.25) on aboutit à:

$$F_{c(n+1)} = F_{c(n)} - \frac{F_{c(n)} - K(q_1 - q_2 F_{c(n)} - w_{s(n)})^{3/2}}{1 + \frac{3}{2} K q_2 (q_1 - q_2 F_{c(n)} - w_{s(n)})^{1/2}} \quad (2.28)$$

Pour la phase de déchargement la relation (2.21) peut être écrite sous la forme suivante:

$$H(F_{c(n+1)}) = F_{c(n+1)} - K_1(q_1 - q_2 F_{c(n+1)} - w_{s(n+1)} - \alpha_0)^q = 0 \quad (2.29)$$

De même que pour la phase de chargement, la force de contact pour la phase de déchargement est donnée par:

$$F_{c(n+1)} = F_{c(n)} - \frac{F_{c(n)} - K_1(q_1 - q_2 F_{c(n)} - w_{s(n)} - \alpha_0)^{3/2}}{1 + q K q_2 (q_1 - q_2 F_{c(n)} - w_{s(n)} - \alpha_0)^{q-1}} \quad (2.30)$$

2.5 ENDOMMAGEMENT ET CRITERES DE RUPTURES

Comme tout autre matériau usuel, les matériaux composites ne peuvent échapper aux différentes causes de dégradation.

Parmi les modes de dégradation les plus rencontrés dans les matériaux composites; on cite (i) les craquements dans la matrice et (ii) les décohésions aux interfaces fibres-matrices. Ces modes de dégradation se propagent pour donner naissance à quatre principaux types de fractures:

- Fissuration transverse de la matrice.
- Fissuration longitudinale de la matrice.
- Délaminage.
- Rupture des fibres.

Le mode d'endommagement le plus à craindre dans les matériaux composites soumis au choc à petites vitesses et le délaminage associé à des fissures transverses dans la matrice. Son étendue et sa distribution dépendent des caractéristiques mécaniques et géométriques de la plaque.

La fissuration de la matrice peut se produire, soit par fissuration transverse lorsque la contrainte en traction dans la matrice atteint la contrainte à la rupture de la matrice, soit par fissuration longitudinale lorsque la contrainte de cisaillement dans la matrice atteint la contrainte en cisaillement à la rupture, généralement au voisinage d'une fibre. Ce dernier mode de rupture appelé « splitting », se produit lorsque la contrainte de décohesion est supérieure à la contrainte en cisaillement à la rupture de la matrice. Dans le cas contraire, il se produit une rupture par décohesion de l'interface fibre-matrice [26].

2.5.1 Critères de Rupture

Les critères de rupture ont pour objectifs de permettre au concepteur d'avoir une évaluation de la résistance mécanique des stratifiés. Connaissant un état de contrainte σ (resp. ε), on cherche à réaliser une condition du type :

$$f(\sigma) \text{ (resp. } g(\varepsilon)) \leq 1 \quad (2.31)$$

Avec, $f(\sigma)$ et $g(\varepsilon)$ sont respectivement, fonction scalaire du tenseur des contraintes et des déformations. Il existe de nombreuses expressions de cette fonction, les plus connues étant celles de la contrainte maximale, et déformation maximale de Hill, de Tsai- Hill, de Tsai-Wu et de Hoffman.

2.5.1.1 Critère de la contrainte maximale

Ce critère reste très utilisé pour la recherche des premières solutions technologiques dans la conception d'une pièce composite.

Il est rarement utilisé seul mais souvent couplé avec le critère de déformation maximale.

En contrainte plane :

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11}^t} &\leq 1 \text{ si } \sigma_{11} \geq 0 \\
 \frac{|\sigma_{11}|}{\sigma_{11}^c} &\leq 1 \text{ si } \sigma_{11} \leq 0 \\
 \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22}^t} &\leq 1 \text{ si } \sigma_{22} \geq 0 \\
 \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22}^c} &\leq 1 \text{ si } \sigma_{22} \leq 0 \\
 \frac{|\sigma_{12}|}{\sigma_{12}^r} &\leq 1
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Avec, $\sigma_{11}^t, \sigma_{11}^c$ sont respectivement, la contrainte à la rupture suivant l'axe longitudinal en traction et en compression. $\sigma_{22}^t, \sigma_{22}^c$ sont respectivement, la contrainte à la rupture suivant l'axe transversal en traction et en compression. σ_{12}^r est la contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan du pli.

La connaissance des contraintes limites dans les différentes directions implique la détermination rapide de l'état des limites, et ne fait pas de distinction entre les différents modes de rupture de l'unidirectionnel.

2.5.1.2 Critère de la déformation maximale

Ce critère est assez similaire au critère de la contrainte maximale.

En déformation plane :

$$\begin{aligned}
 \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}^f} &\leq 1 \text{ si } \varepsilon_{11} \geq 0 \\
 \frac{|\varepsilon_{11}|}{\varepsilon_{11}^c} &\leq 1 \text{ si } \varepsilon_{11} \leq 0 \\
 \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{22}^f} &\leq 1 \text{ si } \varepsilon_{22} \geq 0 \\
 \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{22}^c} &\leq 1 \text{ si } \varepsilon_{22} \leq 0
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\frac{|\varepsilon_{12}|}{\varepsilon_{12}^r} \leq 1$$

Avec, $\varepsilon_{11}^t, \varepsilon_{11}^c$ sont respectivement, la déformation à la rupture suivant l'axe longitudinal en traction et en compression. $\varepsilon_{22}^t, \varepsilon_{22}^c$ sont respectivement, la déformation à la rupture suivant l'axe transversal en traction et en compression. ε_{12}^r est la déformation à la rupture en cisaillement dans le plan du pli.

2.5.1.3 Critère de Hill

Le critère de Hill est l'un des premiers critères de rupture appliqués aux matériaux anisotropes. Ce critère a été formulé en disant que l'état limite de contraintes d'un matériau anisotrope est atteint lorsque l'égalité suivante est vérifiée:

$$F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = 1 \quad (2.34)$$

Cette égalité constitue le critère de Hill, rapporté aux axes principaux (1,2,3). Les paramètres F, G, H, L, M et N sont des paramètres caractéristiques du matériau considéré, qui sont reliés aux contraintes à la rupture $\sigma_{11}^r, \sigma_{22}^r$ et σ_{12}^r . Dans le cas d'un état de contraintes planes dans le plan (1,2) d'un pli: $\sigma_3 = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, le critère de Hill se simplifie.

2.5.1.4 Critère de Tsai-Hill

Ce critère, est une généralisation de Von Mises réservé aux matériaux homogène et isotrope, de type quadratique exprimé en contrainte plane, et écrit dans le repère (1,2) :

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11}^r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22}^r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^r}\right)^2 - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{(\sigma_{11}^r)^2} \leq 1 \quad (2.35)$$

Avec,

- $\sigma_{11}^r = \sigma_{11}^c$ si $\sigma_{11} \leq 0$

- $\sigma_{11}^r = \sigma_{11}^t$ si $\sigma_{11} \geq 0$
- $\sigma_{22}^r = \sigma_{22}^t$ si $\sigma_{22} \leq 0$
- $\sigma_{22}^r = \sigma_{22}^c$ si $\sigma_{22} \geq 0$

2.5.1.5 Critère de Hoffman

Ce critère est une généralisation du critère de Hill. Il admet que la rupture du matériau se produit lorsque l'égalité suivante est vérifiée:

$$C_1(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + C_2(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + C_3(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + C_4\sigma_{11} + C_5\sigma_{22} + C_6\sigma_{33} + C_7\sigma_{23}^2 + C_8\sigma_{13}^2 + C_9\sigma_{12}^2 = 1 \quad (2.38)$$

Les constantes C_i , $i = 1 \dots 9$ sont caractéristiques du matériau et reliées aux contraintes à la rupture du matériau.

2.5.1.6 Critère de Tsai-Wu

Ce critère fait intervenir deux tenseurs de résistance. La rupture d'un matériau anisotrope est atteinte lorsque l'égalité suivante est vérifiée:

$$F_{ij}\sigma_i\sigma_j + F_i\sigma_i = 1 \quad i, j = 1 \dots 6 \quad (2.36)$$

Pour un état de contraintes planes, ce critère réduit à:

$$F_{11}\sigma_1^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 = 1 \quad (2.36a)$$

Avec,

$$F_{11} = \frac{1}{X_T X_C}, \quad F_{12} = -\frac{1}{2}(X_T X_C Y_T Y_C)^{1/2}$$

$$F_{22} = \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}, \quad F_{66} = \frac{1}{S^2} \quad (2.36b)$$

$$F_1 = \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}, \quad F_2 = \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}$$

Avec, X_T et X_C sont les contraintes normales à la traction, Y_T et Y_C sont les forces normales à la compression, S est la force de cisaillement dans le plan.

2.5.1.7 Critère de Hashin

Il existe une distinction nette entre les 4 modes de rupture

- rupture de fibre en traction
- rupture de fibre en compression
- rupture de la matrice en traction
- rupture de la matrice en compression.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11}^t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^r}\right)^2 &\leq 1 \quad \text{si } \sigma_{11} \leq 1 \\ \frac{|\sigma_{11}|}{\sigma_{11}^c} &\leq 1 \quad \text{si } \sigma_{11} \leq 0 \\ \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22}^t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^r}\right)^2 &\leq 1 \quad \text{si } \sigma_{22} \geq 1 \\ \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_-}{\sigma_{22}^c} \left(\frac{\sigma_{22}^t}{2\sigma_{12}^t} - 1\right) + \left(\frac{\langle \sigma_{22} \rangle}{2\sigma_{12}^r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^r}\right)^2 &\leq 1 \quad \text{si } \sigma_{22} \leq 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Différents laboratoires de recherches sur les structures composites, en partenariat avec des industriels principalement rattachés au domaine de l'aérospatiale ont développé des critères beaucoup plus sophistiqués qui tiennent compte des différents modes de rupture. Citons dans ce cadre les critères développés par CT Sun et *al* [35]:

- rupture des fibres:

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{S_f^2}\right) \geq 1 \quad (2.39)$$

- fissuration de la matrice:

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}^2}{S_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{23}}{S_{m23}}\right)^2 \geq 1 \quad \text{si } \sigma_{22} \geq 0 \quad (2.40)$$

- écrasement de la matrice:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{-\sigma_{22}}{S_{12}}\right)^2 + \frac{Y_C^2 \sigma_{22}}{4S_{12}^2 Y_C} - \frac{\sigma_{22}}{Y_C} + \left(\frac{\sigma_{12}^2}{S_{12}}\right)^2 \geq 1 \quad (2.41)$$

Avec, X_T et Y_T sont respectivement les contraintes en traction dans la direction 1 et 2. X_C et Y_C sont respectivement les contraintes en compression dans la direction 1 et 2; S_{12} la contrainte de cisaillement dans le plan (1,2); S_f contrainte de cisaillement qui cause la rupture des fibres; S_{m23} contrainte de cisaillement dans la section (2-3) qui cause la rupture de la matrice.

Choi *et al* [17] ont proposé un critère pour la prédiction de la rupture dans la matrice, donné par:

$$\left(\frac{{}^n\bar{\sigma}_{22}}{{}^nX_2}\right)^2 + \left(\frac{{}^n\bar{\sigma}_{23}}{{}^nS_i}\right)^2 = e_M^2 \quad (2.42)$$

$$e_M \geq 1 \quad \text{Rupture}$$

$$e_M < 1 \quad \text{Pas de rupture}$$

$${}^nX_2 = {}^nX_{2T} \quad \text{if } \bar{\sigma}_{22} \geq 0$$

$${}^nX_2 = {}^nX_{2C} \quad \text{if } \bar{\sigma}_{22} < 0$$

Avec les indices 2 et 3 sont les axes du repère local. S_i est la résistance à la rupture en cisaillement. X_{2t} et X_{2c} sont respectivement, la résistance à la rupture transversale en traction et en compression. $\bar{\tau}_{23}$ et $\bar{\sigma}_{22}$ sont respectivement les contraintes moyennes interlaminaire et transversale.

Si la fissuration de la matrice est prévue dans un pli du stratifié, un délaminage peut être initié à partir de cette fissure. Choi et Chang [16] ont proposé un critère pour la prédiction de délaminage causé par un choc à petites vitesses. Ce critère est exprimé par :

$$D_a \left[\left(\frac{{}^n \bar{\tau}_{23}}{{}^n S_{in}} \right)^2 + \left(\frac{{}^{n+1} \bar{\tau}_{13}}{{}^{n+1} S_{in}} \right)^2 + \left(\frac{{}^{n+1} \bar{\sigma}_{22}}{{}^{n+1} X_2} \right)^2 \right] = e_D^2$$

$$e_D \geq 1 \quad \text{Rupture} \quad (2.43)$$

$$e_D < 1 \quad \text{Pas de rupture}$$

$${}^{n+1} X_2 = {}^{n+1} X_{2T} \quad \text{if} \quad \bar{\sigma}_{22} \geq 0$$

$${}^{n+1} X_2 = {}^{n+1} X_{2C} \quad \text{if} \quad \bar{\sigma}_{22} < 0$$

Avec D_a est une constante empirique du matériau tirée à partir de l'expérience. Les indices inférieurs 1,2 et 3 sont les coordonnées locales d'un pli du stratifié. Les indices supérieurs n et $n+1$ correspondent aux plis inférieur et supérieur de l'interface n . $\bar{\tau}_{23}$ et $\bar{\sigma}_{22}$ sont respectivement les contraintes moyennes interlaminaire et transversale des plis n et $n+1$. $\bar{\tau}_{13}$ est la contrainte moyenne longitudinale du pli ($n+1$).

Les dommages est survient lorsque les valeurs de e_M et e_D atteint l'unité.

2.6 ANALYSE PAR ELEMENT FINIS

2.6.1 Historique

Dans un papier paru en 1943, le mathématicien Courant a établi une solution polynomial pour le problème de torsion [36], son travail n'a pas été noté par des ingénieurs et le procédé était impraticable en raison du manque de calculateurs numériques. Dans les années 50, l'apparition des ordinateurs et les besoins de l'industrie aéronautique ont provoqué un développement rapide de la mécanique des structures. Le nom "finite element" a été inventé en 1960. A partir de 1960 la validité mathématique de cette méthode des éléments finis (MEF) a été identifiée et a été innovée pour inclure le transfert de la chaleur et d'autres secteurs, et par conséquent la MEF a subit un développement rapide dans plusieurs directions, telles que: (i) la méthode est reformulée à partir des considérations énergétiques et variationnelles, (ii) création des éléments de haute précision et (iii) utilisation de la méthode pour résoudre les problèmes non linéaires et non stationnaires dans différents domaines. Le grand logiciel de la MEF d'usage universel a commencé à apparaître dans les années 70. A la fin des années 1980 le logiciel était

disponible sur des micro-ordinateurs. Par la mi-année 90, approximativement 40000 papiers et livres concernant la méthode et ses applications ont été édités. L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères, tels que les projets spatiaux, aéronautiques, ainsi que les projets nuisible à notre environnement. Actuellement, de nombreux programmes généraux de calcul sont disponibles pour utiliser industriellement la méthode des éléments finis. Citons par exemple NASTRAN, ADINA et ANSYS.

Les sciences de l'ingénieur permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis est la plus utilisée pour résoudre ce type d'équations aux dérivées partielles. Elle fait appel aux trois domaines suivants:

- Sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles.
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur.

2.6.2 Introduction

La méthode des éléments finis (M.E.F), comme outil de calcul, est très répandue dans les industries et est couramment adoptée dans la résolution de problèmes dans divers domaines scientifiques, tels que : analyse des structures, constructions aéronautiques et navales, génie mécanique, génie civil, et autres. Elle permet de ramener les problèmes des milieux continus à des problèmes discrets à un nombre fini de paramètres inconnus (forces, déplacements) qui sont déterminés par application de critères énergétiques.

Le principe consiste à discrétiser une structure en un nombre fini d'éléments interconnectés entre eux par des nœuds, chaque nœud est repéré par ses coordonnées par rapport à un système d'axe.

L'analyse dynamique des plaques stratifiées par la méthode des éléments finis consiste à développer les équations du mouvement et déterminer par la suite la force de contact et le déplacement du point de contact en utilisant des éléments bidimensionnels pour la discrétisation de ces plaques.

2.6.3 Discrétisation

Considérons la plaque de la figure 1.1, la surface moyenne de cette plaque est discrétisée en un nombre fini d'éléments quadrilatères isoparamétriques à 9 nœuds, chaque nœud possède cinq (05) degrés de liberté (trois déplacements et deux rotations).

Il est intéressant d'utiliser à la place du système de coordonnées physiques un système de coordonnées naturelles ou intrinsèques. Ceci permet de définir une transformation du domaine physique de l'élément en un domaine géométrique simple sans dimensions. Ce système est défini par des axes parallèles aux cotés de l'élément, les coordonnées des nœuds de sommets prennent des valeurs unitaires +1 ou -1, les nœuds d'interfaces prennent les valeurs 0 et 1 ou -1 (Figure 2.1).

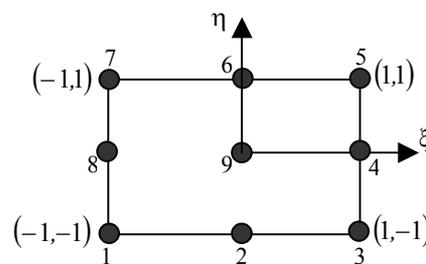


Figure 2.3 Élément de référence à 9 nœuds

2.6.4 Formulation de Mindlin

Les éléments de Lagrange à 9-nœuds et la théorie des plaques de Mindlin qui prise en compte l'effet du cisaillement transversal sont utilisés dans la formulation par la méthode des éléments finis. Les éléments finis basés sur la théorie des plaques de Mindlin exigent seulement la continuité C^0 du déplacement latéral et des rotations indépendantes. C'est un important avantage par rapport à la théorie classique des plaques de Kirchhoff où la continuité C^1 est exigée.

2.6.5 Analyse non linéaire par la méthode des éléments finis

2.6.5.1 Champ de déformations

Une plaque stratifiée composite de longueur a , de largeur b et d'une épaisseur t avec n plis arbitrairement orientés est considérée. Le plan $x - y$ coïncide avec le plan moyen de la plaque composite et l'axe z est orienté le long de la direction transversale. Les déplacements u, v et w d'un point M quelconque de coordonnées $M(x, y, z)$ dans le stratifié sont donnés par la relation (1.1).

Le champ de déformations déduit du champ de déplacements peut être obtenu en dérivant le champ de déplacements une fois par rapport aux variables x, y et z . Les équations suivantes définissent le champ de déformations connu sous le nom de champ de Green-Lagrange [37-39].

Les déformations dans le plan sont données par:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]\end{aligned}\quad (2.44)$$

Les déformations angulaires sont exprimées par la relation suivante:

$$\begin{aligned}\gamma_{yz} &= \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} + \left[\theta_x \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \theta_y \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\ \gamma_{xz} &= \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} + \left[\theta_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \theta_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]\end{aligned}\quad (2.45)$$

Et les déformations en courbures sont représentées par:

$$\begin{aligned}
 \kappa_{xx} &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \\
 \kappa_{yy} &= \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \kappa_{xy} &= \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Les équations (2.44), (2.45) et (2.46) peuvent être écrites sous la forme matricielle contractée suivante [39]:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_L\} + \{\varepsilon_{NL}\} \tag{2.47}$$

Avec,

$$\{\varepsilon_L\} = \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_L^p\} \\ \{\varepsilon_L^b\} \\ \{\varepsilon_L^s\} \end{Bmatrix} \tag{2.48}$$

$\{\varepsilon_L^p\}$ est le vecteur des déformations linéaires dans le plan, il est donné par:

$$\{\varepsilon_L^p\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{2.49}$$

$\{\varepsilon_L^b\}$ est le vecteur des déformations linéaires en flexion. Son expression est :

$$\{\varepsilon_L^b\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (2.50)$$

$\{\varepsilon_L^s\}$ est le vecteur des déformations linéaires en cisaillement. Il s'écrit comme suit :

$$\{\varepsilon_L^s\} = \left\{ \begin{array}{c} \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (2.51)$$

$\{\varepsilon_{NL}\}$ est le vecteur des déformations non linéaires décrit par ses trois composantes vectorielles :

$$\{\varepsilon_{NL}\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\varepsilon_{NL}^p\} \\ \{\varepsilon_{NL}^b\} \\ \{\varepsilon_{NL}^s\} \end{array} \right\} \quad (2.52)$$

Les composantes de celui-ci sont données par les équations (2.53), (2.54), (2.55).

Pour le vecteur des déformations non linéaires dans le plan :

$$\{\varepsilon_{NL}^p\} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ 2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \end{array} \right\} \quad (2.53)$$

Pour le vecteur des déformations non linéaires en flexion:

$$\{\varepsilon_{NL}^b\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (2.54)$$

Et pour le vecteur des déformations non linéaires en cisaillement:

$$\{\varepsilon_{NL}^s\} = \left\{ \begin{array}{l} \theta_x \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \theta_y \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \theta_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \theta_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{array} \right\} \quad (2.55)$$

Considérons maintenant la variation de l'équation (2.47), [40]:

$$d\{\varepsilon\} = d\{\varepsilon_L\} + d\{\varepsilon_{NL}\} \quad (2.56)$$

La variation de la partie non linéaire de cette équation peut être obtenue avec l'utilisation des équations (2.53) à (2.55). Les parties non linéaires de ces équations peuvent être re-exprimées comme [37-39]:

$$\{\varepsilon_{NL}\} = \frac{1}{2}[A]\{\theta\} \quad (2.57)$$

Le vecteur $\{\theta\}$ peut être représenté en termes de déplacements nodaux:

$$\{\theta\} = [G]\{\delta\} \quad (2.58)$$

La variation différentielle de l'équation (2.57) donne :

$$d\{\varepsilon_{NL}\} = \frac{1}{2}d[A]\{\theta\} + \frac{1}{2}[A]d\{\theta\} \quad (2.59)$$

Par utilisation des propriétés spéciales de $[A]$ et $\{\theta\}$, l'équation précédente peut être écrite sous la forme suivante:

$$d\{\varepsilon_{NL}\} = [A]d\{\theta\} \quad (2.60)$$

Tenant compte de l'équation (2.58), l'équation (2.60) peut être écrite sous la forme suivante:

$$d\{\varepsilon_{NL}\} = [A][G]d\{\delta\} \quad (2.61)$$

De l'équation (2.57), les déformations non linéaires peuvent être données par :

$$\{\varepsilon_{NL}\} = [A][G]\{\delta\} \quad (2.62)$$

Les deux matrices $[A]$ et $[G]$ sont données par:

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 & \frac{\partial w}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} & \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} & \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} & \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 \\ \vartheta_x & 0 & \vartheta_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 & \vartheta_x & 0 & \vartheta_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

$$\text{Avec, } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

2.6.5.2 Champ de déplacements élémentaires

Les déplacements élémentaires peuvent être définis par les approximations suivantes:

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{i=1}^{NN} N_i u_{0i} & v_0 &= \sum_{i=1}^{NN} N_i v_{0i} & w_0 &= \sum_{i=1}^{NN} N_i w_{0i} \\ \vartheta_x &= \sum_{i=1}^{NN} N_i \vartheta_{xi} & \vartheta_y &= \sum_{i=1}^{NN} N_i \vartheta_{yi} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Où N_i sont les fonctions d'interpolations des déplacements, elles doivent être choisies de manière qu'elles vérifient la complétude et la continuité inter-élément. Pour un élément à 9 nœuds, ces fonctions sont définies comme suit [39]:

Pour les nœuds des sommets :

$$\xi_i = \pm 1 \quad ; \quad \eta_i = \pm 1 \quad N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)\xi\eta\xi_i\eta_i$$

Pour les nœuds d'interfaces :

$$\xi_i = 0 \quad ; \quad \eta_i = \pm 1 \quad N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)\eta\eta_i$$

$$\xi_i = \pm 1 \quad ; \quad \eta_i = 0 \quad N_i = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)\xi\xi_i$$

Pour le nœud du centre :

$$N_i = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

Les expressions (2.65) peuvent être réarrangées sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \mathfrak{G}_x \\ \mathfrak{G}_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{NN} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0i} \\ v_{0i} \\ w_{0i} \\ \mathfrak{G}_{xi} \\ \mathfrak{G}_{yi} \end{Bmatrix} \quad (2.66)$$

Ou sous forme contractée:

$$\{a\} = \sum_{i=1}^{NN} [N_i(\xi, \eta)] \{\delta\} \quad (2.67)$$

Avec:

- $\{a\}$: le vecteur des déplacements élémentaires,
- $\{\delta\}$: le vecteur de déplacements nodaux,
- NN : le nombre de nœuds par élément,
- $[N_i]$: la matrice d'interpolation des déplacements exprimée en terme de coordonnées naturelles.

Tenant compte des parties linéaire des équations (2.44), (2.45) et (2.46), les vecteurs des déformations généralisés peuvent être écrits sous la forme suivante:

$$\{\varepsilon_L\} = [B_L] \{\delta\} \quad (2.68)$$

La variation de cette équation est donnée par:

$$d\{\varepsilon_L\} = [B_L] d\{\delta\} \quad (2.69)$$

Avec $[B_L]$ est la matrice d'interpolation des déformations linéaires.

En substituant les équations (2.62) et (2.68) dans (2.56), on obtient :

$$d\{\varepsilon\} = [B_L]d\{\delta\} + [A][G]d\{\delta\} \quad (2.70)$$

Et,

$$d\{\varepsilon\} = ([B_L] + [A][G])d\{\delta\} \quad (2.71)$$

Finalement,

$$d\{\varepsilon\} = ([B_L] + [B_{NL}])d\{\delta\} = [\bar{B}]d\{\delta\} \quad (2.72)$$

Avec, $[B_{NL}] = [A][G]$, est la matrice d'interpolation des déformations non linéaires. Et $[\bar{B}] = [B_L] + [B_{NL}]$

2.6.5.3 Champ de déformations élémentaires

Tenant compte du champ des déformations et les champs des déplacements élémentaires, la relation déformations déplacements élémentaires dans le cas linéaire s'écrit:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x0} &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, & \varepsilon_{y0} &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, & \gamma_{xy0} &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ \kappa_x &= \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}, & \kappa_y &= \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y}, & \kappa_{xy} &= \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Tenant compte de l'équation (2.65), ces équations peuvent être écrites sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{x0} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i}{\partial x} u_{0i} & \varepsilon_{y0} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i}{\partial y} v_{0i} & \gamma_{xy0} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i}{\partial y} u_{0i} + \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i}{\partial x} v_{0i} \\
 \kappa_x &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i}{\partial x} \vartheta_{xi} & \kappa_y &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i}{\partial x} \vartheta_{yi} & \kappa_{xy} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i}{\partial y} \vartheta_{xi} + \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i}{\partial x} \vartheta_{yi} \\
 \gamma_{xz} &= \sum_{i=1}^{NN} N_i \vartheta_{xi} + \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i}{\partial x} w_{0i} & \gamma_{yz} &= \sum_{i=1}^{NN} N_i \vartheta_{yi} + \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i}{\partial y} w_{0i}
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

Ces expressions peuvent être écrites sous les formes matricielles suivantes:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^{NN} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0i} \\ v_{0i} \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^{NN} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vartheta_{xi} \\ \vartheta_{yi} \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^{NN} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{0i} \\ \vartheta_{xi} \\ \vartheta_{yi} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

Ou sous forme:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{NN} [B_L] \begin{Bmatrix} u_{0i} \\ v_{0i} \\ w_{0i} \\ \vartheta_{xi} \\ \vartheta_{yi} \end{Bmatrix} \tag{2.76}$$

Où:

- ε_0 sont les déformations en membrane,
- κ sont les déformations en courbure,
- γ sont les déformations en cisaillement transverse.
- $[B_L]$ est la matrice d'interpolation des déformations, elle est donnée par:

$$[B_L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Les termes $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ et $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ sont définis par:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (2.78)$$

Où $[J]$ est la matrice Jacobienne, elle permet le passage du système de coordonnées cartésiennes au système de coordonnées naturelles. Elle est définie par:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

La matrice $[J]^{-1}$ est la matrice inverse de la matrice Jacobienne, elle est donnée par:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|\Delta|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

$|\Delta|$ est le déterminant de la matrice Jacobienne :

$$|\Delta| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (2.81)$$

Avec:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} y_i \end{aligned} \quad (2.82)$$

Les notations ci-dessous sont utilisées dans les sections suivantes du chapitre:

$$\begin{aligned} \{a\} &= [N]\{a_e\} \\ \{\varepsilon\} &= [B]\{a_e\} \end{aligned} \quad (2.83)$$

Où:

$$\begin{aligned} [N] &= [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_{NN}] \\ [B] &= [B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_{NN}] \\ \{a_e\} &= \{\{\delta_1\} \quad \{\delta_2\} \quad \dots \quad \{\delta_{NN}\}\} \end{aligned} \quad (2.84)$$

2.7 Matrice de rigidité

2.7.1 Principe du travail virtuel

L'équation d'équilibre des forces internes et externes est obtenue en appliquant le principe du travail virtuel [32,39]. Cette équation est donnée par:

$$\{\psi\} d\{\delta\}^T = \int_A d\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dA - \{R\} d\{\delta\}^T = \{0\} \quad (2.85)$$

Où,

$\{\delta\}$ est le vecteur de déplacements nodaux;

$\{R\}$ le vecteur des forces nodales externes;

$\{\psi\}$ la résultante des forces internes et externes.

En remplace l'équation (2.72) dans l'équation (2.85) on aboutit à:

$$\{\psi\} d\{\delta\}^T = \int_A d\{\delta\}^T [\bar{B}]^T \{\sigma\} dA - \{R\} d\{\delta\}^T = \{0\} \quad (2.86)$$

Où,

$$\{\psi\} = \int_A [\bar{B}]^T \{\sigma\} dA - \{R\} = \{0\} \quad (2.87)$$

Cette dernière équation est une équation d'équilibre non linéaire à résoudre par la procédure d'itérations de Newton-Raphson. Dans l'équation (2.87) $\{\psi\}$ est une fonction non linéaire en termes de $\{\delta\}$. Si la solution $\{\delta_n\}$ à l'étape n est atteinte, la solution à $n+1$ peut être obtenue en utilisant le développement en série de Taylor :

$$\{\psi\}_{n+1} = \{\psi\}_n + \frac{\partial \{\psi\}_n}{\partial \{\delta\}_n} \Delta \{\delta\}_n = \{0\} \quad (2.88)$$

Et,

$$\{\delta\}_{n+1} = \{\delta\}_n + \Delta \{\delta\}_n \quad (2.89)$$

La matrice de rigidité tangentielle est définie par:

$$\frac{\partial \{\psi\}_n}{\partial \{\delta\}_n} = [K]_T \quad (2.90)$$

Donc,

$$\{\psi\}_n + [K]_T \Delta \{\delta\}_n = \{0\} \quad (2.91)$$

La matrice de rigidité tangentielle est déterminée par l'utilisation de la variation différentielle de l'équation (2.87):

$$d\{\psi\} = \int_A d[\bar{B}]^T \{\sigma\} dA + \int_A [\bar{B}]^T d\{\sigma\} dA \quad (2.92)$$

Le vecteur de contraintes $\{\sigma\}$ est donné par la loi de Hooke généralisée:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (2.93)$$

Et la différentielle de l'équation (2.92) donne :

$$d\{\sigma\} = [C]d\{\varepsilon\} \quad (2.94)$$

La matrice de rigidité $[C]$ est donnée au chapitre 1 par l'équation (1.21).

Après remplacement de $[A][G]$ par $[B_{NL}]$, en multipliant l'équation (2.72) par la matrice $[C]$, on aura:

$$[C]d\{\varepsilon\} = [C]([B_L] + [B_{NL}])d\{\delta\} \quad (2.95)$$

Sachant que:

$$d[\bar{B}] = d[B_L] + d[B_{NL}] = d[B_{NL}] \quad (2.96)$$

Utilisant les équations (2.93) à (2.96) dans l'équation (2.92) on aboutit à:

$$\begin{aligned} d\{\psi\} &= \int_A (d[B_{NL}]^T) \{\sigma\} dA + \int_A ([B_L] + [B_{NL}])^T [C] ([B_L] + [B_{NL}]) d\{\delta\} dA \\ &= ([K_\sigma] + [K_L] + [K_{NL}]) d\{\delta\} \end{aligned} \quad (2.97)$$

Avec,

$$[K_L] = \int_A [B_L]^T [C] [B_L] dv \quad (2.98)$$

$$[K_{NL}] = \int_A [B_L]^T [C] [B_{NL}] dv + \int_A [B_{NL}]^T [C] [B_L] dv + \int_A [B_{NL}]^T [C] [B_{NL}] dv \quad (2.99)$$

et,

$$[K_\sigma] = \int_A [G]^T \{S_0\} [G] dv \quad (2.100)$$

La matrice $[S_0]$ est définie par [37]:

$$S_0 = \begin{bmatrix} N & & & & & \\ 0 & N & & & & \\ 0 & 0 & N & & & \\ M & 0 & 0 & N_2 & & \\ 0 & M & 0 & 0 & N_2 & \\ 0 & 0 & M & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

Avec,

$$N = \begin{bmatrix} N_{xx} & N_{xy} \\ N_{xy} & N_{yy} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{xy} & M_{yy} \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} \bar{N}_{xx} & \bar{N}_{xy} \\ \bar{N}_{xy} & \bar{N}_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

Finalement, la matrice globale, peut être écrite sous la forme suivante:

$$[K_T] = [K_L] + [k_\sigma] + [K_{NL}] \quad (2.103)$$

Avec $[K_\sigma]$ est la matrice de rigidité géométrique, elle est symétrique. $[K_T]$ étant la matrice de rigidité tangentielle (Globale).

Les matrices de rigidité linéaires élémentaires définies par la relation (2.104) sont symétriques d'ordre 45×45 (9 nœuds x 5 degrés de liberté par nœud).

La forme de la matrice de rigidité élémentaire est donnée comme suit:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}] & 0 & [K^{15}] \\ & [K^{22}] & [K^{23}] & 0 & [K^{25}] \\ & & [K^{33}] & [K^{34}] & [K^{35}] \\ & & & [K^{44}] & [K^{45}] \\ & & & & [K^{55}] \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

Sym

Les éléments de la matrice $[K^{\alpha\beta}]$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 5$) sont donnés par les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} k_{ij}^{11} &= A_{11}S_{ij}^\xi + A_{16}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + A_{66}S_{ij}^\eta & k_{ij}^{33} &= F_{44}S_{ij}^\xi + F_{45}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + F_{55}S_{ij}^\eta \\ k_{ij}^{12} &= A_{12}S_{ij}^\xi + A_{16}S_{ij}^{\xi\eta} + A_{26}S_{ij}^\eta + A_{66}S_{ij}^{\xi\eta} & k_{ij}^{34} &= F_{44}S_{ij}^{\xi\eta} + F_{45}S_{ij}^{\eta\eta} \\ k_{ij}^{14} &= B_{11}S_{ij}^\xi + B_{16}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + B_{66}S_{ij}^\eta & k_{ij}^{35} &= F_{45}S_{ij}^{\xi\eta} + F_{55}S_{ij}^{\eta\eta} \\ k_{ij}^{15} &= B_{12}S_{ij}^{\xi\eta} + B_{16}S_{ij}^\xi + B_{26}S_{ij}^\eta + B_{66}S_{ij}^{\xi\eta} & k_{ij}^{44} &= D_{11}S_{ij}^\xi + D_{16}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + D_{66}S_{ij}^\eta + F_{55}S_{ij}^0 \\ k_{ij}^{22} &= A_{22}S_{ij}^\eta + A_{26}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + A_{66}S_{ij}^{\xi\eta} & k_{ij}^{45} &= D_{12}S_{ij}^\xi + D_{16}S_{ij}^{\xi\eta} + D_{26}S_{ij}^\eta + D_{66}S_{ij}^{\xi\eta} + F_{45}S_{ij}^0 \\ k_{ij}^{24} &= B_{16}S_{ij}^\xi + B_{66}S_{ij}^{\xi\eta} + B_{12}S_{ij}^{\xi\eta} + B_{26}S_{ij}^\eta & k_{ij}^{55} &= D_{66}S_{ij}^\xi + D_{26}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + D_{22}S_{ij}^\eta + F_{55}S_{ij}^0 \\ k_{ij}^{25} &= B_{66}S_{ij}^\xi + B_{26}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + B_{22}S_{ij}^\eta \end{aligned} \quad (2.105)$$

Où:

$$S_{ij}^{\xi\eta} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} |\Delta| d\xi d\eta, \quad S_{ij}^{00} = S_{ij}, \quad S_{ij}^{\xi\xi} = S_{ij}^\xi \quad (i, j = 1, 9) \quad (2.106)$$

Les quantités S_{ij} peuvent être évaluées en utilisant l'intégration numérique dans le domaine (ξ, η) . Généralement, pour les éléments de la famille de Lagrange basés sur la théorie de Mindlin, la technique de l'intégration réduite ou sélective sont recommandées, ceci permet d'éviter la dégradation de la précision provoquée par les problèmes numériques (ces deux techniques sont basées sur les points d'intégrations de Gauss).

La matrice de rigidité globale $[K]$ est obtenue par assemblage des matrices de rigidité élémentaires, l'assemblage s'effectue en additionnant terme à terme les éléments des matrices élémentaires communs en nœud et en degré de liberté.

2.8 MATRICE DE MASSE

Deux classes principales peuvent être envisagées pour la représentation des masses: les masses cohérentes et les masses concentrées.

- La représentation cohérente des masses consiste à calculer les matrices de masse élémentaires en choisissant pour la discrétisation spatiale de l'énergie cinétique les mêmes fonctions d'interpolation que pour l'énergie de déformation. Cette méthode conduit généralement à des matrices masses symétriques mais non diagonales. Les matrices masse élémentaires sont calculées d'après l'expression ci-dessous (2.107) par intégration numérique, dans ce cas, on peut utiliser la même méthode d'intégration que pour les matrices de rigidité élémentaires.
- La technique des masses concentrées consiste à discrétiser les masses soit au niveau élémentaire, soit au niveau de la structure complète de manière à obtenir une matrice de masse diagonale.

En effet, on peut obtenir des matrices de masse diagonale par différentes façons:

- Soit en affectant aux différents nœuds de chaque élément des masses concentrées égales de manière à respecter la masse totale de l'élément.
- Soit en diagonalisant par diverses méthodes des matrices de masse cohérentes. En effet, il existe des méthodes d'intégration numériques qui permettent d'obtenir des matrices de masse cohérentes diagonales une technique qui sera exploitée dans cette étude.

La matrice masse élémentaire est donnée par l'expression suivante:

$$[M_e] = \int_{\Omega_e} [N]^T [\bar{m}] [N] d\Omega_e \quad (2.107)$$

Où $[\bar{m}]$ est la matrice d'inertie. Elle donnée par:

$$[\bar{m}] = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

Avec:

$$I_i = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^i \rho^k dz \quad i = 0, 1, 2 \quad (2.109)$$

Où n représente le nombre de plis constituant le stratifié.

2.9 CHOIX DU NOMBRE DE POINTS D'INTEGRATION

Le choix du nombre de points d'intégration dépend du type de l'élément utilisé et de la matrice élémentaire que l'on construit. Pour chaque type d'élément il existe un nombre minimum de points d'intégration en dessous duquel la matrice reste singulière malgré l'introduction des conditions aux limites. Dans notre cas, 3x3 points de Gauss sont utilisés pour le calcul des termes en membrane et en flexion, et 2x2 points de Gauss sont utilisés pour le calcul des termes en cisaillement transverse. Pour la matrice masse 3x3 points de Gauss permettent d'obtenir des matrices de masses consistantes diagonales.

Chapitre III

IMPLEMENTATION NUMERIQUE ET PRESENTATION DU CODE DE CALCUL

3.1 INTRODUCTION

L'analyse des structures par éléments finis nécessite l'exécution de plusieurs opérations de calcul avant d'arriver aux résultats requis. Pour un problème de grande taille, le temps de calcul nécessaire pour effectuer ces opérations devient très important, il est donc indispensable de développer judicieusement un code de calcul en optimisant les temps d'exécution.

Un programme d'éléments finis est constitué généralement de quatre blocs principaux [9]:

1. Lecture, vérification des données décrivant le maillage (nœuds, éléments), les paramètres physiques (modules d'élasticité, etc), les sollicitations et les conditions aux limites.
2. Construction des matrices de rigidité et de masse élémentaires ainsi que le vecteur des sollicitations élémentaires, puis assemblage de toutes ces matrices et vecteurs pour former les matrices globales et vecteurs globaux des sollicitations.
3. Résolution du système d'équations après prise en compte des conditions aux limites.
4. Impression des résultats après calcul éventuel des variables additionnelles (contraintes, réactions, ...).

Le présent chapitre a pour but de présenter les différents modules du programme de calcul développé par nos soins pour l'analyse statique et dynamique des plaques composites. Il est écrit en langage Fortran sous formes modulaires. Les relations programmées ont été développées aux chapitres précédents. L'enchaînement des opérations de calcul est illustré sur la figure 3.1.

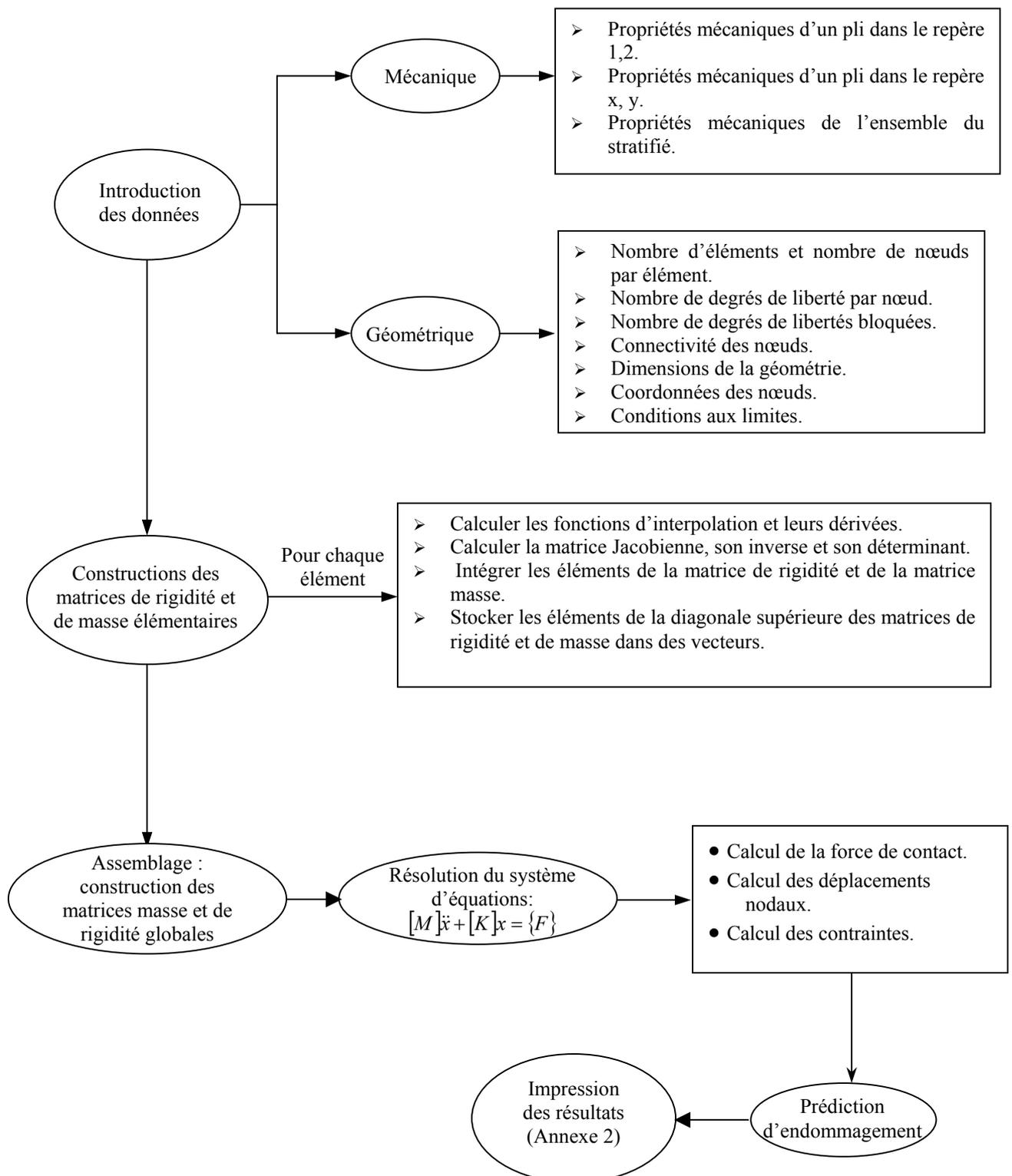


Figure 3.1 Enchaînement des opérations de calcul d'un programme en éléments finis

3.2 INTRODUCTION DES DONNEES

Les données peuvent être classées en deux catégories principales: (i) les données nécessaires pour le calcul des matrices de rigidité et de masse du stratifié et (ii) les données décrivant la géométrie de la plaque et la façon dont elle est fixée dans l'espace.

3.2.1 Données mécaniques

Le calcul des matrices de rigidité et de masse du stratifié nécessite l'introduction des données suivantes:

- a) Module d'élasticité (Young) longitudinal E_1 .
- b) Module d'élasticité (Young) transversal E_2 .
- c) Module de cisaillement longitudinal G_{12} .
- d) Coefficient de Poisson μ_{12} .
- e) Masse volumique ρ .
- f) Epaisseur du pli.
- g) Nombre de plis.
- h) Orientation des fibres de chaque pli.

La détermination des coefficients de ces matrices s'effectue en trois étapes:

1. Calcul des coefficients de rigidité d'un pli dans les axes 1,2.
2. Calcul des coefficients de rigidité d'un pli dans les axes x,y .
3. Calcul des coefficients de rigidité de l'ensemble du stratifié.

3.2.2 Données géométriques

La géométrie de la plaque peut être complètement définie en précisant les données suivantes:

- a) Nombre d'éléments, nombre de nœuds par élément.
- b) Nombre de degrés de liberté par nœud.
- c) Nombre de degrés de liberté bloqués.

- d) Connexions des nœuds: La géométrie de chaque élément doit être spécifiée en donnant une liste systématique des point nodaux qui le définisse. L'ordre de numérotation des nœuds influe directement sur la structure de la matrice de rigidité globale et par conséquent sur le temps du calcul requis pour la résolution du système d'équations.

Généralement, la matrice de rigidité est une matrice symétrique bandée, la largeur de cette bande L est donnée par la relation suivante [38]:

$$L = 2[mn + (n-1)] + 1 \quad (3.1)$$

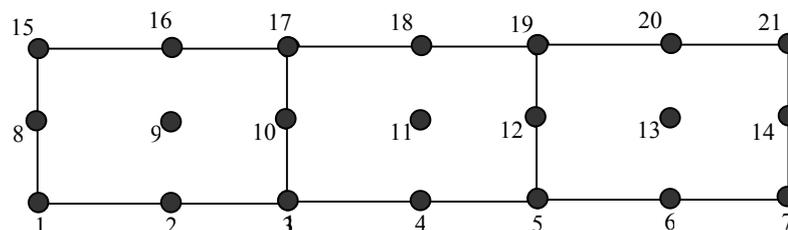
Où:

n Représente le nombre de degrés de liberté par nœud.

m La différence maximale entre les numéros de deux nœuds adjacents.

Donc, pour une matrice de rigidité peu dispersée, il est nécessaire de minimiser la largeur de bande en intervenant sur l'ordre de la numérotation. La figure 3.2 montre, que pour un même nombre d'éléments, deux types de numérotation sont possibles:

Cas (a):



$$m = 7, n = 5$$

$$L = 79$$

Cas (b):

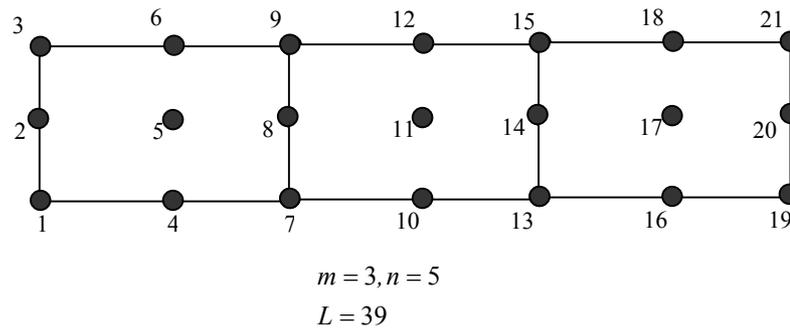


Figure 3.2 Système de numérotation pour un même nombre d'éléments

Il est clair que la matrice de rigidité du cas (a) est plus dispersée que celle du cas (b). Ceci demande nécessairement beaucoup plus d'espace mémoire et aussi d'avantages de calcul. De ce fait, on remarque la grande importance dans la numérotation des nœuds composant la structure afin d'assurer une bonne gestion de la mémoire et du coût de calcul.

- e) Coordonnées des nœuds: Chaque nœud est défini par ses coordonnées par rapport au système d'axes (x, y) . Ces coordonnées sont stockées dans une matrice d'une taille de $NPOIN \times NDIME$ où $NPOIN$ représente le nombre total de nœuds constituant le maillage et $NDIME = 2$.
- f) Conditions aux limites: Chaque nœud possède 5 degrés de liberté, trois déplacements et deux rotations. Un degré de liberté est identifié par une valeur égale à zéro lorsqu'il est actif, et d'une valeur égale à un lorsqu'il est bloqué. Ces valeurs sont stockées dans une matrice d'identification ID de dimension $NDLN \times NPOIN$ où $NDLN$ représente le nombre de degrés de liberté par nœud. Cette matrice sera modifiée par la suite afin de déduire le nombre total des équations à résoudre.

Pour illustrer la procédure d'introduction des conditions aux limites, on considère un exemple d'une plaque encastree sur ses deux côtés. Pour faciliter la compréhension, la plaque est discrétisée en neuf éléments où chaque élément possède 4 nœuds dont le nombre de degrés de liberté par nœud est égal à trois; un déplacement w et deux rotations ϑ_x et ϑ_y (les déplacements u et v sont considérés nuls).

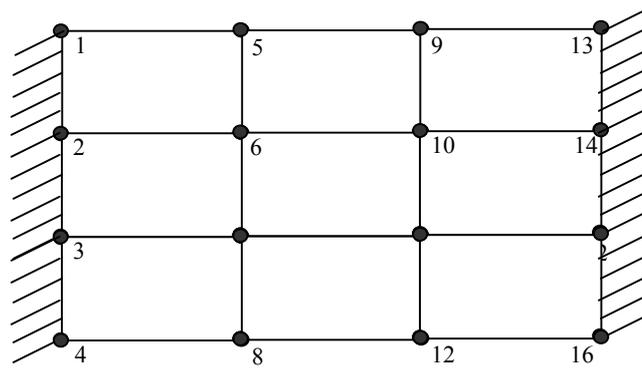


Figure 3.3. Plaque discrétisée en éléments finis.

Les nœuds 1, 2, 3, 4, 13, 14, 15 et 16 sont bloqués dans toutes les directions. La matrice d'indentification s'écrit dans ce cas:

$$[ID] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Le nombre total des zéros dans ID représente le nombre total des équations à résoudre. La matrice d'indentification modifiée s'obtient en remplaçant chaque zéro dans (3.2) par le numéro de l'équation qui lui correspond. Les valeurs (1) dans l'équation (3.2) sont remplacées par les valeurs nulles (0), cette opération est effectuée colonne par colonne. La matrice d'indentification modifiée s'écrit donc:

$$[ID] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 & 20 & 23 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

D'où on tire le nombre total des équations à résoudre qui est égal à 24.

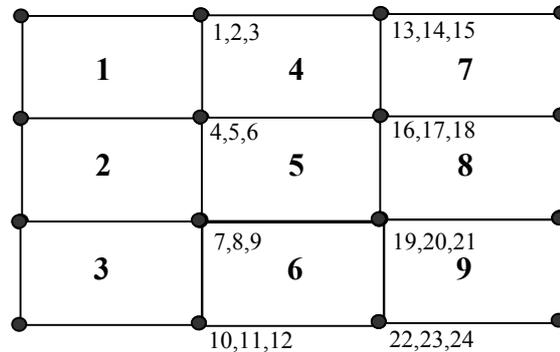


Figure 3.4. Répartition des degrés de liberté actifs

3.3 CONSTRUCTION DE LA MATRICE DE RIGIDITE

Les matrices de rigidité élémentaires $[K_e]$ dans le cas linéaire peuvent être calculées à partir de la relation (2.94) du chapitre 2. Pour chaque élément nous avons besoin d'effectuer les opérations suivantes:

1. Initialiser $[K_e]$ à zéro.
2. Pour chaque point d'intégration (ξ_i, η_i) :
 - a) Calculer les fonctions d'interpolations ainsi que leurs dérivées.
 - b) Calculer la matrice Jacobienne, son inverse et son déterminant.
 - c) Calculer les éléments K_{ij} de la matrice de rigidité élémentaires.

La technique de l'intégration sélective est utilisée pour évaluer les éléments K_{ij} . 3x3 points de Gauss sont utilisés pour le calcul des termes en membrane et en flexion, et 2x2 points de Gauss pour le calcul des termes en cisaillement transverse.

A cause de la symétrie des matrices de rigidité élémentaires, on ne mémorise que les éléments de la triangulaire supérieure, ces éléments sont stockés dans un vecteur de dimension $NEVAB \times NEVAB / 2$ où $NEVAB$ représente le nombre de variables par élément (nombre de degrés de liberté total par élément). D'autre part, on définit un vecteur de

connectivité des éléments LM qui permet de mémoriser les degrés de liberté élémentaires. Pour l'exemple précédent, le vecteur LM de chaque élément est défini comme suit:

$$\begin{aligned}
 LM_1 &= [0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 5 \ 6 \ 1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\
 LM_2 &= [0 \ 0 \ 0 \ 7 \ 8 \ 9 \ 4 \ 5 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\
 LM_3 &= [0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 11 \ 12 \ 7 \ 8 \ 9 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\
 LM_4 &= [4 \ 5 \ 6 \ 16 \ 17 \ 18 \ 13 \ 14 \ 15 \ 1 \ 2 \ 3]^T \\
 LM_5 &= [7 \ 8 \ 9 \ 19 \ 20 \ 21 \ 16 \ 17 \ 18 \ 4 \ 5 \ 6]^T \\
 LM_6 &= [10 \ 11 \ 12 \ 22 \ 23 \ 24 \ 19 \ 20 \ 21 \ 7 \ 8 \ 9]^T \\
 LM_7 &= [16 \ 17 \ 18 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 13 \ 14 \ 15]^T \\
 LM_8 &= [19 \ 20 \ 21 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 16 \ 17 \ 18]^T \\
 LM_9 &= [22 \ 23 \ 24 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 19 \ 20 \ 21]^T
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

La matrice de rigidité globale $[K]$ s'obtient par assemblage des matrices de rigidité élémentaires, elle est symétrique et bandée, la méthode de stockage la plus efficace pour $[K]$ est celle de « la ligne de ciel » (traduit du mot anglosaxon sky line). Elle consiste à mémoriser les termes de la matrice par des colonnes à hauteur variables, ces hauteurs sont déterminées à partir des vecteurs de connectivité des éléments LM , elles sont données par la formule suivante:

$$H_i = i - L_i \tag{3.5}$$

Où L_i représente le premier élément non nul de la colonne i et H_i représentent la hauteur de la même colonne.

Les adresses des termes situées sur la diagonale de $[K]$ doivent être aussi mémorisées dans un vecteur afin de déterminer le début des colonnes.

Considérons le cas de la plaque de la figure 3.3, on veut déterminer la hauteur de la colonne 12, ce numéro représente aussi le numéro du degré de liberté actif dans $[K]$, et il est commun aux éléments 3 et 6 (Figure 3.4). Ainsi, la plus petite valeur non nulle de ces éléments dans les vecteurs LM est égal à 7. Cette valeur correspond à la ligne du premier élément non nul dans la colonne 12, c'ad. $L_{12} = 7$, d'où on tire la hauteur de cette colonne qui égale à 5.

3.4 CONSTRUCTION DE LA MATRICE MASSE

Les matrices de masses élémentaires peuvent être calculées à partir de la relation (2.104). La règle de Lobatto est utilisée pour intégrer les termes de ces matrices.

Les positions de ces points sont les suivants [41]:

$$P(1) = 0 \quad P(2) = 1 \quad P(3) = -1 \quad (3.7)$$

Par contre, les coefficients de pondérations correspondants sont:

$$W(1) = 1.33333333333 \quad W(2) = 0.33333333333 \quad W(3) = 0.33333333333 \quad (3.8)$$

L'assemblage de la matrice de masse et sa mise en mémoire sont les mêmes que celle de la matrice de rigidité.

3.5 RESOLUTION

3.5.1 Calcul de la force de contact

L'utilisation des conditions aux limites permet le calcul d'une valeur approximative de la force de contact (F_c). Pour la phase de chargement en utilisant la relation (2.28). Cette force est appliquée au nœud considéré, et le déplacement (w_s) de la plaque causé par cette force sera le prochain inconnu à déterminer par la résolution de l'équation dynamique de la plaque donnée par la relation (2.2). Pour cette valeur de (w_s), la force (F_c) est recalculée en utilisant la relation (2.28). Le processus est répété jusqu'à ce que l'exactitude exigée sera atteinte. La valeur de (F_c) ainsi obtenue correspond à la convergence, et est utilisée pour calculer l'accélération, la vitesse et le déplacement de l'impacteur pour les utiliser à l'étape itérative suivante.

Une fois que la vitesse de l'impacteur s'annule, et que la force de contact atteigne son maximum, un calcul pour la phase de déchargement sera réalisé en utilisant les mêmes procédures de calcul utilisées lors de la phase de chargement.

En résumé, la force de contact est calculée selon les étapes de l'algorithme ci-dessous :

$$1. \text{ conditions initiales (à } t=0) : w_s = 0, \dot{w}_s = 0, F_c = 0, \dot{w}_p = v_0, w_p = 0 \quad (3.9)$$

$$2. t = t + \Delta t$$

3. pour $i = 1$, (première itération).

i) Calcul de F_c pour la phase de chargement en utilisation de la relation suivante:

$$F_{1c(n+1)} = F_{c(n)} - \frac{F_{c(n)} - K(q_1 - q_2 F_{c(n)} - w_{s(n)})^{3/2}}{1 + \frac{3}{2} K q_2 (q_1 - q_2 F_{c(n)} - w_{s(n)})^{1/2}}$$

ii) Détermination de déplacement de la plaque w_s par résolution de l'équation:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\}$$

iii) Avec w_s calculé, on recalcule la force de contact $F_{2c(n+1)}$ en utilisant la même relation précédente.

4. vérification du test de convergence.

$$|F_{2c(n+1)} - F_{1c(n+1)}| \leq \zeta$$

5. si non ; $i = i + 1$ et retour à l'étape 3i) pour recalculer la force de contact en utilisant w_s calculé à l'étape 3ii).

6. si oui ; calculer le déplacement, la vitesse et l'accélération de l'impacteur par les relations suivantes:

$$w_{p(n+1)} = w_{p(n)} + \Delta t \dot{w}_{p(n)} + \beta \Delta t^2 \left(-1 + \frac{1}{2\beta} \right) \ddot{w}_{p(n)} - \frac{\beta \Delta t^2}{m_p} F_{c(n+1)} \quad (3.10)$$

$$\ddot{w}_{p(n+1)} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (w_{p(n+1)} - w_{p(n)}) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{w}_{p(n)} - \left(-1 + \frac{1}{2\beta} \right) \ddot{w}_{p(n)} \quad (3.11)$$

$$\dot{w}_{p(n+1)} = w_{p(n)} + \Delta t (I - \gamma) \ddot{w}_{p(n)} + \gamma \ddot{w}_{p(n+1)} \quad (3.12)$$

7. Prédire l'endommagement.

8. aller à l'étape 2.

3.5.2. Calcul du déplacement w_s

Le calcul de déplacement w_s de la structure au nœud (point) de contact se fait à partir de l'équation dynamique de la plaque donnée par la relation (2.2).

Sachant que:

$$\ddot{u}_{(n+1)} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(u_{(n+1)} - u_{(n)}) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_{(n)} - \left(-1 + \frac{1}{2\beta}\right)\ddot{u}_{(n)} \quad (3.13)$$

En substituant cette dernière équation dans la relation (2.2), on aboutit à:

$$\left(\frac{1}{\beta\Delta t^2}[M] + [K]\right)\{u_{(n+1)}\} = \{F\} + [M]\left(\frac{1}{\beta\Delta t^2}\{u_{(n)}\} + \frac{1}{\beta\Delta t}\{\dot{u}_{(n)}\} - \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\{\ddot{u}_{(n)}\}\right) \quad (3.14)$$

Cette équation peut être écrite sous la forme suivante :

$$[\bar{K}]\{u_{(n+1)}\} = \{\bar{G}(t)\} \quad (3.15)$$

Avec,

$$\begin{aligned} [\bar{K}] &= \left(\frac{1}{\beta\Delta t^2}[M] + [K]\right) \\ \{\bar{G}(t)\} &= [M]\left(\frac{1}{\beta\Delta t^2}\{u_{(n)}\} + \frac{1}{\beta\Delta t}\{\dot{u}_{(n)}\} - \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\{\ddot{u}_{(n)}\}\right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Et, $\{\bar{G}(t)\} = \{\dots, \dots, w_s, \dots, \dots\}$

La détermination de w_s nécessite le calcul de $[\bar{K}]$ et $\{\bar{G}(t)\}$.

L'algorithme ci-dessous résume les étapes de calcul du déplacement w_s :

1. Calcul de la matrices de rigidité et de la matrice masse $[K]$ et $[M]$.
2. Choisir la méthode de calcul (Méthode de Newmark, Méthode de Wilson- θ) c.à.d :
fixer les valeurs de β et γ .

3. Formation de la matrice de rigidité efficace $[\bar{K}]$ et du vecteur force efficace $\{\bar{G}\}$.
4. Triangularisation de $[\bar{K}] = LDL^T$.
5. Spécifier les conditions initiales en : déplacements, vitesses et accélérations de la plaque.
6. détermination de vecteur déplacement de la plaque par la résolution de l'équation $LDL^T \{u_{(n+1)}\} = \{\bar{G}(t)\}$.
7. Une fois $\{u_{(n+1)}\}$ est calculé, on tire la valeur de w_s et on calcule le vecteur vitesse et le vecteur accélération.
8. On passe à l'étape suivante $t + \Delta t$.

3.5.3 Prédiction d'endommagement

Le programme développé permet aussi de prédire l'endommagement de la structure. On peut par conséquent déterminer d'une façon qualitative, le numéro du pli, le numéro de l'élément et le numéro du point de Gauss où l'endommagement peut avoir naissance. Cette prédiction d'endommagement est résumée dans les étapes algorithmiques suivantes:

1. Calcul des vecteurs de déplacements, de vitesses et d'accélération de la structure (plaque composite).
2. Pour NP=1, NPLY
3. Pour NE=1, NELEM
4. Pour IPGS=1, NPGS
5. Pour JPGS=1, NPGS
6. Calculer les déformations en utilisant la relation (2.68).
7. Calculer les contraintes en chaque point de Gauss dans le repère local de chaque pli.
8. Evaluer la moyenne de chaque contrainte suivant l'épaisseur de la structure.
9. Injecter les valeurs des contraintes dans les critères de fissuration données par les relations (2.42) et (2.43).
10. Si le premier critère de fissuration (fissuration de la matrice est vérifié), on passe au deuxième critère de fissuration (délaminage). Si ce deuxième critère est vérifié aller à l'étape 17.
11. Si non
12. JPGS=JPGS+1 (jusqu'à ce que JPGS=NPGS) aller à 6
13. IPGS=IPGS+1 (jusqu'à ce que IPGS=NPGS) aller à 6

14. $NE=NE+1$ (jusqu'à ce que $NE=NELEM$) aller à 4
15. $NP=NP+1$ (jusqu'à ce que $NP=NPLY$) aller à 4
16. Aller à l'étape 2 de la section (3.5.1).
17. Fin du programme

Avec:

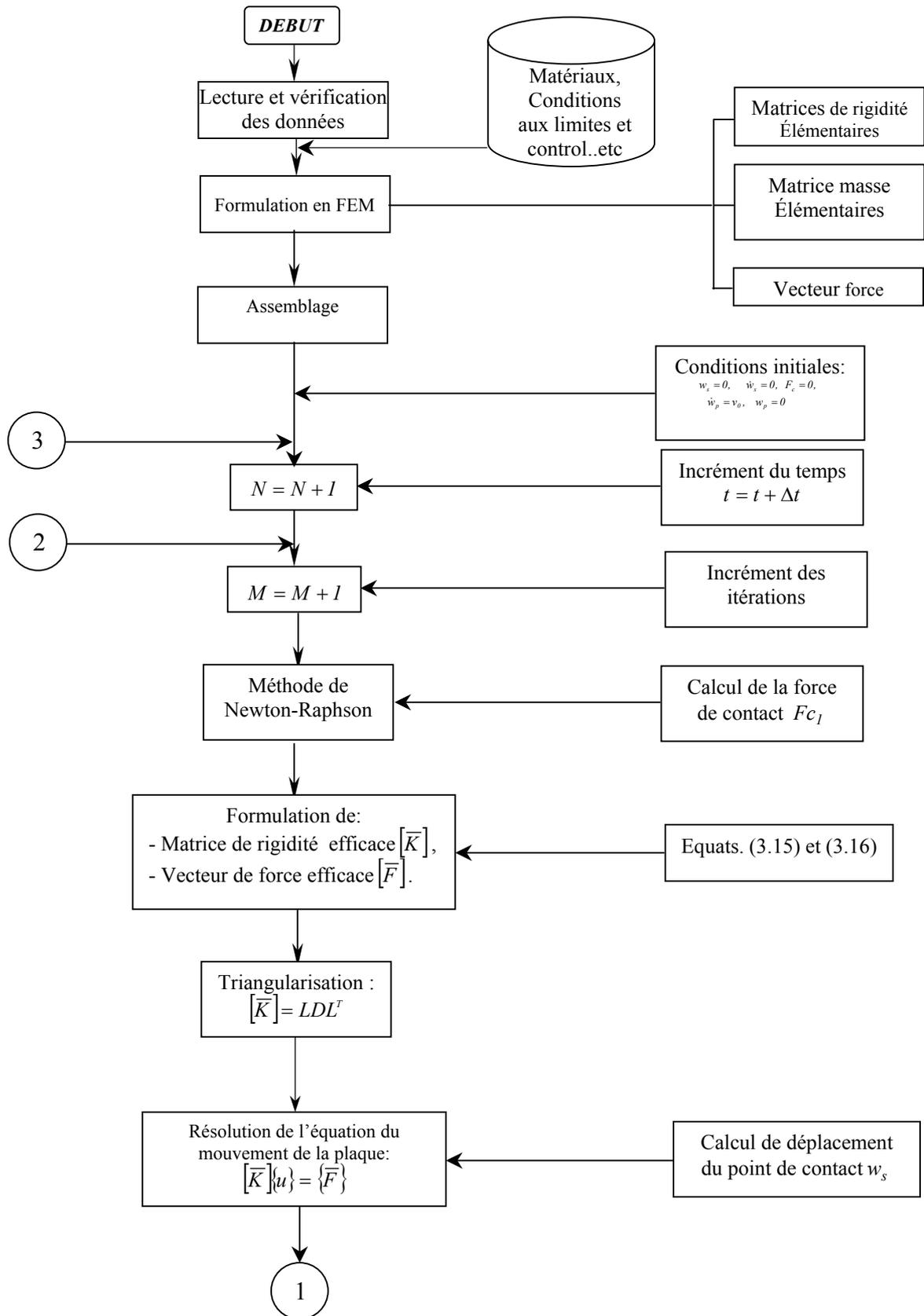
NPLY : représente le nombre de plis du stratifié.

NELEM : représente le nombre d'éléments du maillage.

NPGS : représente le nombre de points de Gauss.

Le programme qui permet la prédiction de la fissuration de la matrice est donné dans l'annexe 3.

L'enchaînement de toutes ces opérations de calcul est illustré sur la figure (3.6).



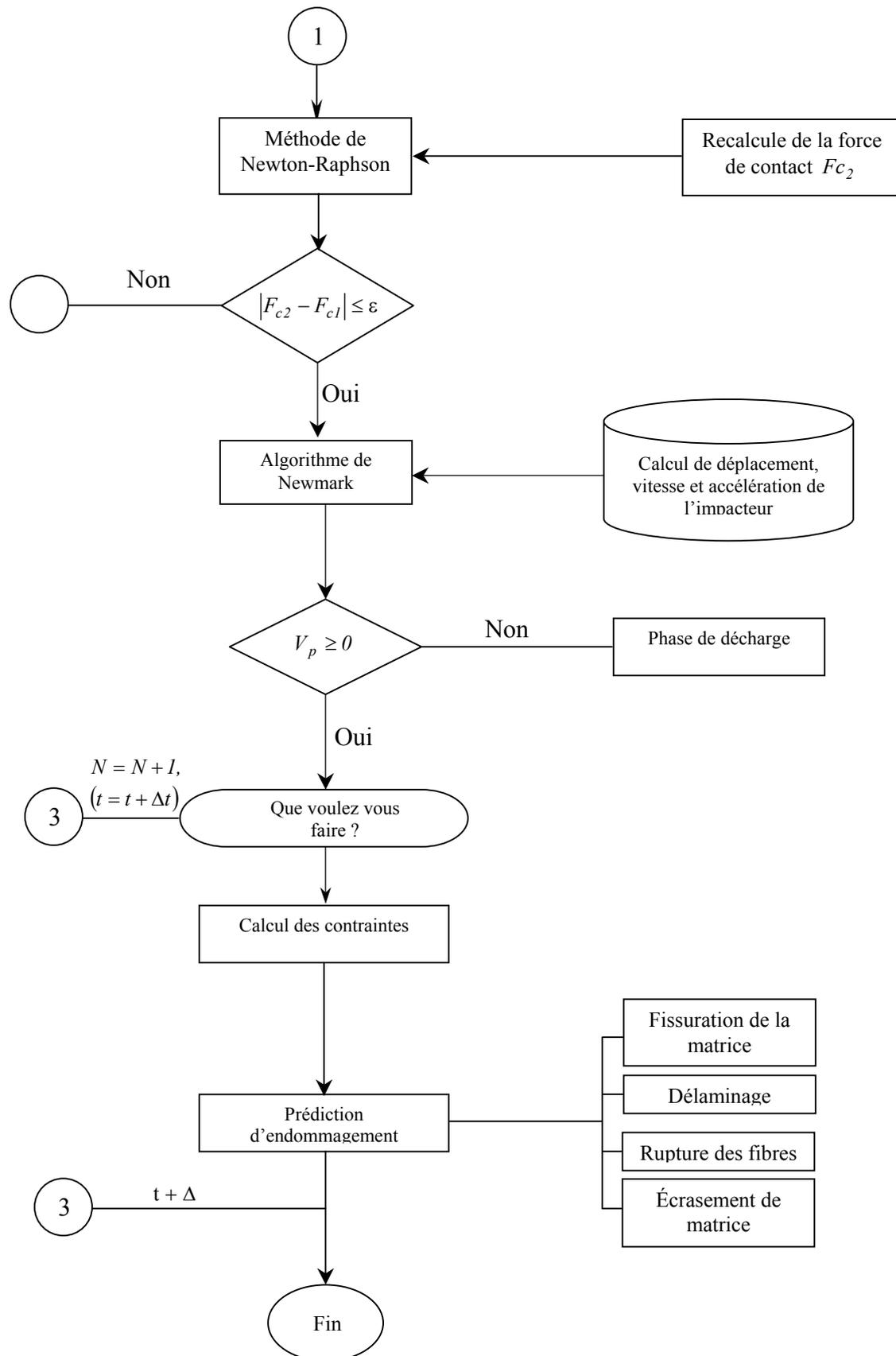


Figure 3.6. Organigramme de calcul

3.6 VALIDATION DES RESULTATS

Pour valider les résultats obtenus par le programme développé en éléments finis, nous avons traité des applications de certains travaux de recherches de la littérature consultée. L'étude comparative est effectuée par rapport aux résultats numériques et expérimentaux de la référence [25].

L'application traitée concerne donc le cas d'une plaque en matériaux simplement appuyée sur ces quatre cotés et soumise à une force d'impact par un impacteur en acier. Les propriétés géométriques et mécaniques de la plaque composite et de l'impacteur utilisés dans cette section sont données dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1: Propriétés Mécaniques et géométriques de la plaque composite et de l'impacteur

<u>Propriétés de la plaque</u>		<u>Propriétés de l'impacteur</u>
$E_1 = 129 \text{ GPa}, E_2 = 7.5 \text{ GPa},$		Rayon de la sphère de
$G_{12} = 3.5 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.33$		
$\rho = 1540 \text{ Kg m}^{-3}$		Module de Young $E = 207 \text{ GPa}$
l'impacteur $R = 12.7 \text{ mm}$		
Conditions aux limites	Appuis simples	Coefficient du Poisson $\nu = 0.3$
Dimensions	$0.127 \times 0.0762 \times 0.00465 \text{ m}^3$	
Séquences d'empilement	$[45/90/-45/0]_{3s}$	

La valeur de la constante de Hertz $k = 0.6 \times 10^9 \text{ N/m}^{3/2}$, la masse de l'impacteur $M = 6.14 \text{ Kg}$ et les vitesses de l'impacteur au contact $V_p = 1.76, 2.68 \text{ m/s}$ sont utilisées dans cette application. Le maillage utilisé dans ce cas contient 165 éléments (15×11) éléments avec un nombre totale des nœuds égale à 713. Chaque nœud possède 5 degrés de liberté. La force de contact est appliquée sur la face supérieure à l'élément numéro 83 au point de Gauss ($ipgs = 2$ et $jpgs = 2$) avec un nombre total de points de Gauss ($NPGS = 3$).

Les Figures (3.7) et (3.8) montrent la force de contact de la plaque composite par rapport au temps. Il est observé que les résultats de la présente étude sont en bonnes concordances avec les résultats obtenus à partir des simulations numériques et expérimentales.

3.7 CONCLUSION

Ce chapitre a été dévoué à la présentation de l'outil numérique développé par nos soins. Il est composé de plusieurs sous programmes. Il permet aussi bien le calcul statique entre le flambement que le calcul dynamique et spécialement la réponse dynamique due au choc. Le logiciel est écrit en langage Fortran et il est simple d'utilisation. Les applications des littératures traitées par le présent logiciel d'éléments finis montrent bien l'exactitude de celui-ci.

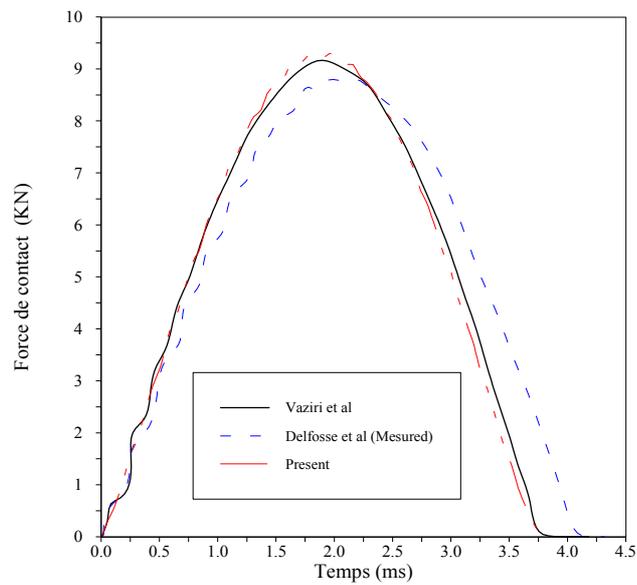


Fig.3.7 Variation de la force de Contact pour 6.14 Kg et 1.76 m/s

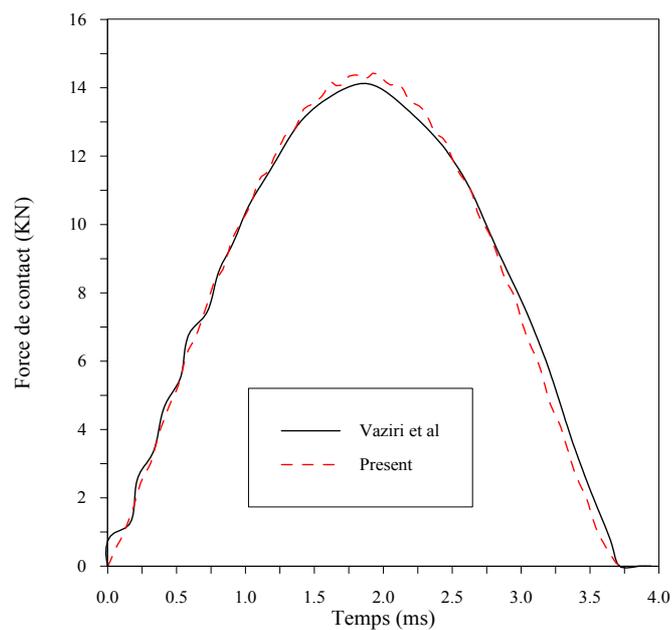


Fig.3.8 Variation de la force de Contact pour 6.14 Kg et 2.68 m/s

Chapitre IV

APPLICATIONS ET INTERPRETATIONS DES RESULTATS

4.1 INTRODUCTION

Dans le but de faire une analyse de la réponse dynamique des plaques stratifiées soumises au choc à petites vitesses, nous avons établi un programme de calcul écrit en FORTYRAN qui calcule la force de contact, la déflexion maximale et les contraintes dynamiques, et qui nous permette à faire une analyse des endommagements de toutes structures composite à base de fibres unidirectionnelles de différentes caractéristiques mécaniques et diverses séquences d'empilement.

Dans le présent travail, les plaques considérées sont des composites constituées de plusieurs plis de mêmes caractéristiques mécaniques et géométriques, mais d'orientations des fibres différentes par rapport aux axes de référence de la plaque considérée. Les caractéristiques mécaniques sont déterminées en appliquant la théorie d'élasticité plane. Ces caractéristiques sont notées par E_1 (module d'élasticité longitudinale (N/mm^2)), E_2 (module d'élasticité transversale (N/mm^2)), G_{12} (module de cisaillement (N/mm^2)) et ν_{12} (coefficient de Poisson major). Elles sont fixées ultérieurement.

La variation de la force de contact, de la déflexion maximale, des contraintes dynamiques et de la prédiction d'endommagement sont numériquement étudiées en utilisant notre code de calcul. Ces grandeurs sont calculées sous l'effet d'un choc à petites vitesses avec un impacteur considéré comme un corps rigide de forme sphérique. La force de contact, la déflexion maximale, les contraintes dynamiques et la prédiction

d'endommagement due à la force de contact appliquée au centre de la plaque, sont calculées durant la phase de chargement et de déchargement, et ce en fonction de plusieurs paramètres tels que: la vitesse de l'impacteur, les conditions aux limites (encastrement ou appuis simples), les dimensions de la plaque, la masse et la vitesse de l'impacteur ainsi que les séquences d'empilements.

4.2 ETUDES PARAMETRIQUES

Dans une première partie de cette section et dans le but d'étudier la réponse dynamique d'une plaque composite soumise au choc à petites vitesses, nous procédons à une étude paramétriques par la variation de plusieurs paramètres tels que: (i) la vitesse et la masse de l'impacteur, (ii) les conditions aux limites (encastrement ou appuis simples), (iii) les séquences d'empilements, et (iv) les dimensions de la plaque et de l'impacteur. Ainsi, nous étudions la variation de la force de contact et celle de la déflexion maximale sous différentes configurations de choc.

La figure 1 montre la variation de la vitesse de l'impacteur avec une vitesse initiale égale à 2.92 m/s . La plaque considérée est en appuis simples. Les propriétés mécaniques et géométriques de la plaque et de l'impacteur utilisées sont celles utilisées dans la section 3.7 (tableau 3.1). Les paramètres utilisés dans la loi de contact entre la plaque et l'impacteur sont $q = 2.5$, $\beta = 0.094$, $\alpha_{cr} = 1.7 \times 10^{-4} \text{ m}$ [12]. D'après cette figure nous constatons que la vitesse de l'impacteur (v_p) passe par deux phases, (i) dans la première phase la vitesse $v_p \in [v_{p0} = 2.92 \text{ m/s}, 0 \text{ m/s}]$, cette phase représente la phase de chargement, (ii) dans la deuxième phase la vitesse $v_p \in [0 \text{ m/s}, \approx -v_{p0} = -2.92 \text{ m/s}]$, elle devient négative ce qui explique que l'impacteur a changé le sens de son mouvement. Cette phase représente la phase de déchargement.

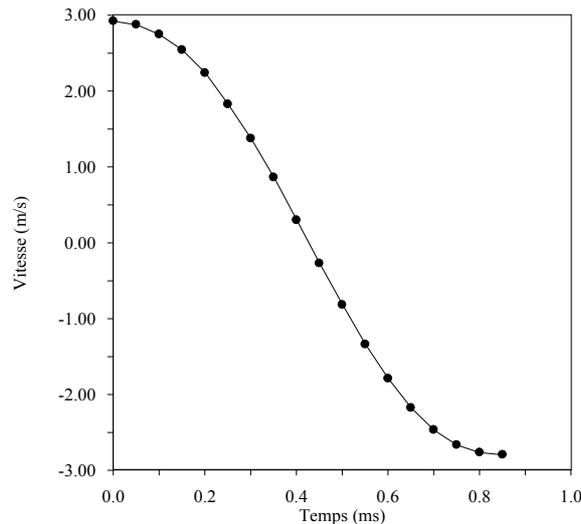


Fig. 4.1 Variation de la vitesse du projectile

4.2.1 Influence des conditions aux limites

Dans le but d'étudier l'influence des conditions aux limites sur le comportement dynamique d'une plaque composite à base de fibres, une petite vitesse de 2.92 m/s est utilisée. Deux types de conditions aux limites sont considérés, encastremets et appuis simples. Les propriétés mécaniques et géométriques de la plaque et de l'impacteur utilisées sont celles utilisées dans la section précédente. Les paramètres utilisés dans la loi de contact entre la plaque et l'impacteur sont ceux utilisés dans la section précédente.

Les deux figures (4.2) et (4.3) illustrent la variation de la force de contact et celle de la déflexion maximale. Le type de conditions aux limites semble ne pas avoir une influence significative sur la force de contact et la déflexion maximale.

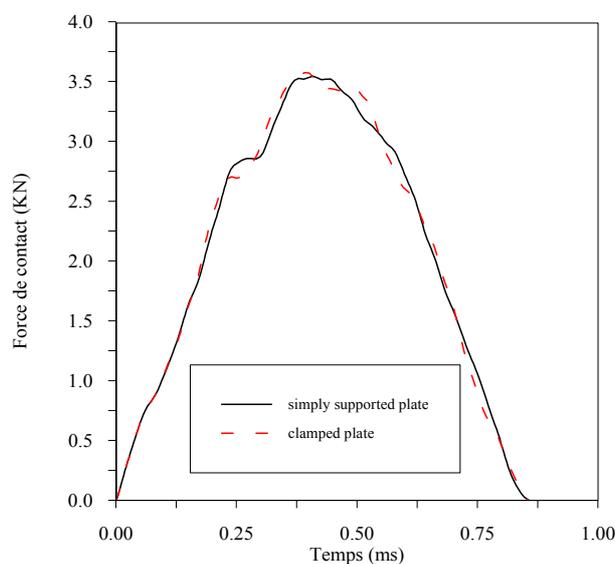


Fig.4.2 Variation de la force de contact pour 0.314 Kg et 2.92 m/s

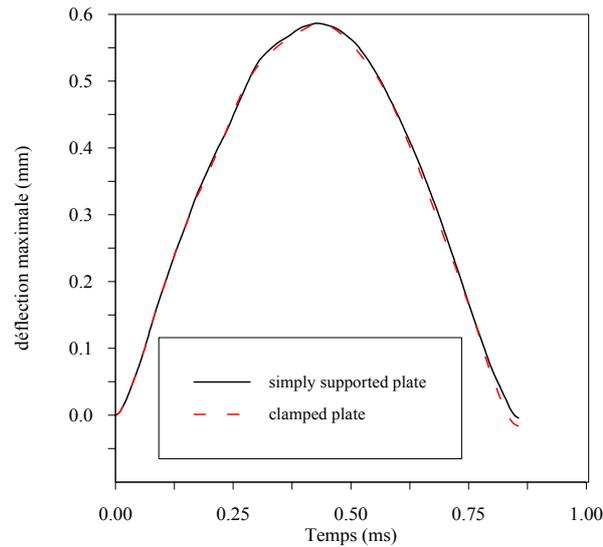


Fig.4.3 Variation de la deflection maximale pour 0.314 Kg et 2.92 m/s

4.2.2 Influence des séquences d'empilement

L'influence des séquences d'empilement sur le comportement dynamique d'une plaque encadrée sur les quatre côtés, de dimension $0.127 \times 0.0762 \text{ m}^2$ soumise au choc à petites vitesses est discutée pour différentes configurations. La vitesse et la masse de l'impacteur utilisées dans cette section sont 2.92 m/s et 0.314 Kg . Les configurations considérées sont:

i) $[0/90_n/0]$ avec $n = 2,3,4$. Avec l'épaisseur d'un seul pli égale à 1.27 mm .

La figure (4.4) montre les résultats obtenus pour cette application. On constate d'après cette figure que la force de contact augmente avec l'augmentation de l'épaisseur du pli orienté à 90° ce qui indique que la plaque devient moins rigide (i.e: la force de contact maximale pour la configuration $[0/90_4/0]$ est supérieure en comparaisant avec celles des autres configurations $[0/90_3/0]$ et $[0/90_2/0]$).

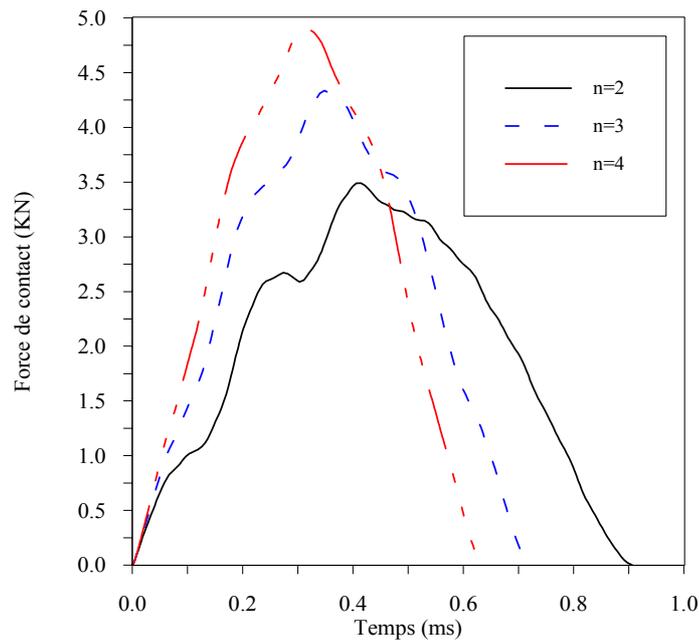


Fig.4.4 Variation de la force de contact pour trois configurations différentes

ii) $[0_n / 90_m / 0_n]$ avec $n = 1, 2, 3$ et $m = 2, 4, 6$. Avec une épaisseur totale du stratifié égale à 4.65 mm .

Dans ces configurations, trois types (03) des plaques composites sont considérées par le changement du pourcentage des fibres orientées à 90° :

Une plaque composite contient 25% de fibres orientées à 90° $[0_3 / 90_2 / 0_3]$

Une plaque composite contient 50% de fibres orientées à 90° $[0_2 / 90_4 / 0_2]$

Une plaque composite contient 75% de fibres orientées à 90° $[0 / 90_6 / 0]$

Certaines conclusions peuvent être tirées, qui sont:

1. La force de contact augmente avec l'augmentation du pourcentage des fibres orientées à 90° .
2. Cette observation est toujours vraie lorsqu'on compare la figure (4.4) $n = 4$ (L'épaisseur totale des plis orientés à 90° est égale à 5.08 mm) au figure (4.5) avec la configuration $[0 / 90_6 / 0]$ (L'épaisseur totale des plis orientés à 90° est égale à 3.49 mm), les forces de contact sont respectivement égales à ($\approx 4.8 \text{ KN}$) et ($\approx 3.6 \text{ KN}$).

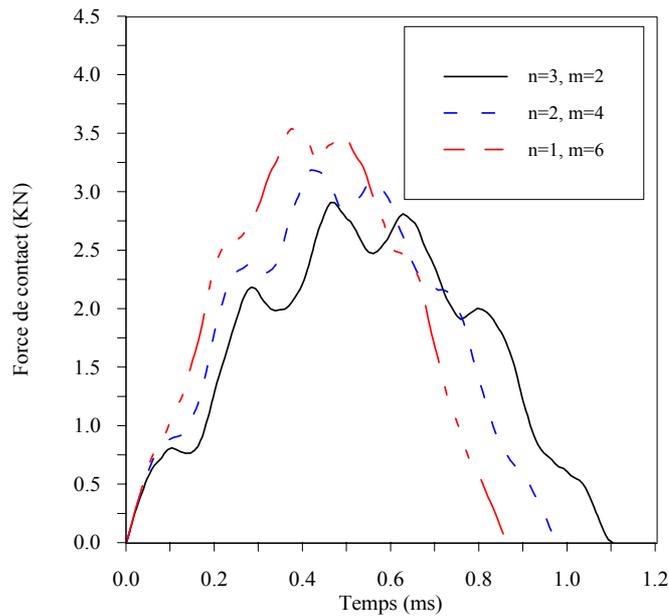


Fig.4.5 Variation de la force de contact pour trois configurations différentes

4.2.3 Influence des dimensions de la plaque

Les figures (4.6) et (4.7) illustrent l'influence des dimensions de la plaque sur la force de contact et la déflexion centrale. Trois types de dimensions d'un stratifié de séquences d'empilement $[0_2/90_4/0_2]$ sont considérés dans la présente section: $150 \times 150 \text{ mm}^2$, $150 \times 100 \text{ mm}^2$, et $150 \times 50 \text{ mm}^2$. Les côtés de dimensions (50 mm , 100 mm et 150 mm) de la plaque sont encadrés et l'autre côté de dimension (150 mm) est libre. Deux différentes masses de l'impacteur (0.314 kg , et 1.2 kg) sont considérées. La vitesse de l'impacteur au choc est maintenue égale à 2.92 m/s . A partir des figures suivantes, il est clairement observer que la durée de contact est affectée par la masse de l'impacteur. La durée de contact augmente avec l'augmentation de la masse de l'impacteur. Cependant la durée de contact est plus grande pour une plaque avec les plus petites dimensions ($150 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$) indépendamment de la masse de l'impacteur. Le tableau (4.1) montre les forces de contact maximales pour des différentes masses de l'impacteur et pour les trois plaques de différentes dimensions. Indépendamment de la masse de l'impacteur, la force de contact est minimale pour le cas de la plaque de dimensions petites.

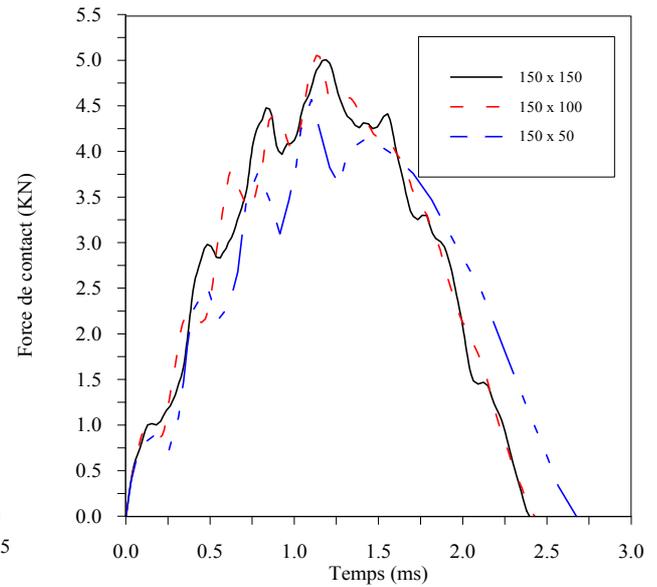
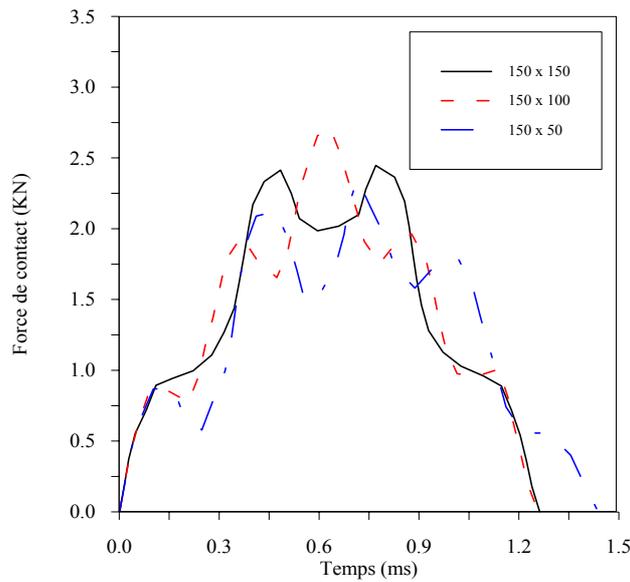


Fig.4.6 Variation de la force de contact pour 0.314Kg et 2.92m/s Fig.4.7 Variation de la force de contact pour 1.2 Kg et 2.92 m/s

Tableau 4.1: Les valeurs de la force maximale pour trios plaques de dimensions différentes et pour différentes masses de l'impacteur.

Dimensions de la plaque (mm)	Force de contact	
	maximale (N) pour 0.314 Kg	maximale (N) pour 1.2 Kg
150 x 150	2458	5010
150 x 100	2773	5071
150 x 50	2372	4578

4.2.4 Influence de la vitesse de l'impacteur

Afin d'étudier l'influence de la vitesse de l'impacteur sur le comportement au choc d'une plaque, la force de contact et la déflexion maximale sont calculées à des vitesses (0.85, 1.6 et 2.92 m/s). Les propriétés de la plaque et celles de l'impacteur sont les mêmes utilisées dans la section 3.7. La force de contact et la déflexion maximale sont proportionnelles à la vitesse de choc durant la phase de chargement d'une plaque stratifiée en appuis simples (figures (4.8) et (4.9)). A la fin de la phase de déchargement les courbes de la force de contact et celle de la déflexion centrale sont renversées.

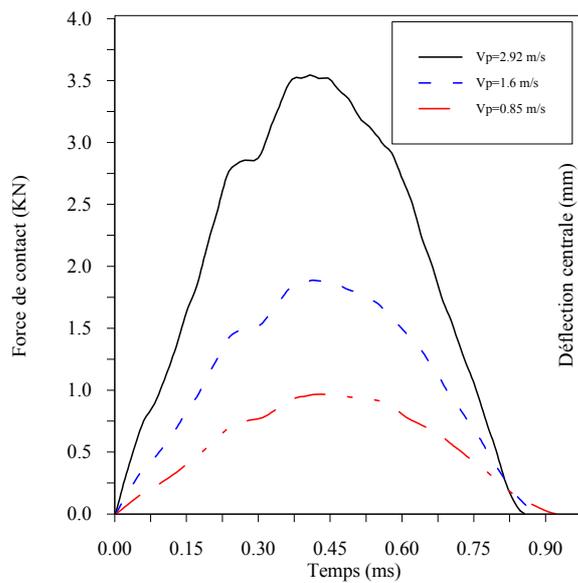


Fig.4.8 Variation de la force de contact pour trois vitesses différentes de l'impacteur

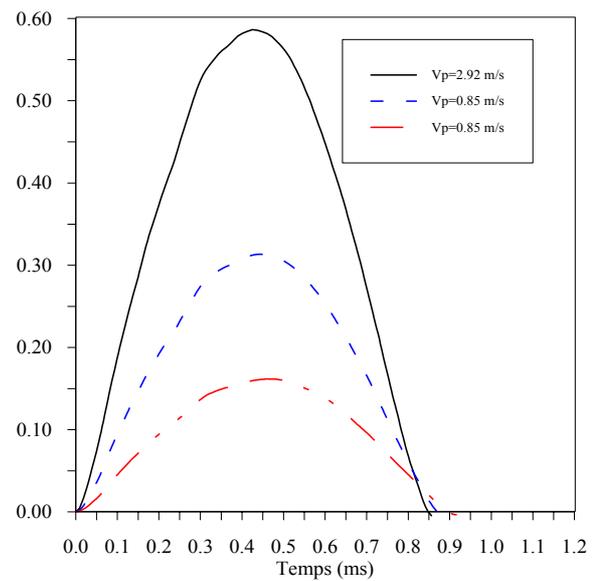


Fig.4.9 Variation de la déflexion centrale pour trois vitesses différentes de l'impacteur

4.2.5 Influence de la masse de l'impacteur

Il a été observé que la force de contact ne varie pas de la même manière que lorsqu'on double ou on triple la masse de l'impacteur. Aussi, il a été observé que la durée de contact augmente avec l'augmentation de la masse de l'impacteur (Figure (4.10)). Il est important de noter que l'augmentation de la masse de l'impacteur a une petite influence sur la force de contact dans un domaine linéaire du temps $[0, \approx 200 \text{ s}]$. Dans ce cas la masse de l'impacteur est égale à $M = 0.157 \text{ Kg}$.

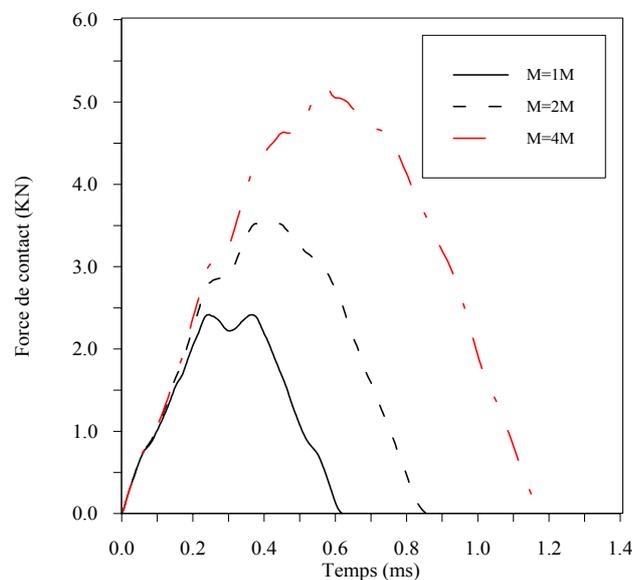


Fig.4.10 Variation de la force de contact pour trois masses différentes de l'impacteur

4.3 PREDICTION D'ENDOMMAGEMENT CAUSE PAR LE CHOC

Une fois le modèle numérique est validé, on présente la prédiction de l'endommagement des plaques composites soumises à une vitesse d'impact spécifique. Donc, on calcul les contraintes en chaque point de Gauss en utilisant le modèle numérique développé. Ces contraintes sont injectées dans les critères d'endommagement développés par Choi et Chang et donnés par les relations (2.42 et 2.43) pour prédire l'endommagement dans la structure considérée.

4.3.1 Analyse d'endommagement

4.3.1.1 Prédiction de la fissuration de la matrice

Pour prédire la fissuration de la matrice, les contraintes dynamiques sont calculées aux points de Gauss qui sont au nombre de neuf (09) de chaque élément. Le critère d'endommagement donné par la relation (2.42) est appliqué à chaque point de Gauss. Les composantes des contraintes σ_{22} et τ_{23} sont seules concernées dans la prédiction de la fissuration de la matrice.

Les propriétés de la plaque composites et celles de l'impacteur et les paramètres du matériau utilisées dans les critères de ruptures sont donnés par le tableau (4.2).

Tableau 4.2: Propriétés Mécaniques et géométriques de la plaque composite et de l'impacteur

<u>Propriétés de la plaque</u>	
$E_1 = 144.8 \text{ GPa}$, $E_2 = 9.65 \text{ GPa}$, $G_{12} = G_{13} = 7.10 \text{ GPa}$, $G_{23} = 5.92 \text{ GPa}$	
$\nu_{12} = 0.30$, $\rho = 1389.2 \text{ Kg m}^{-3}$	
Conditions aux limites	Appuis simples
<u>Résistances du pli</u>	
$Y_T = 55.20 \text{ MPa} = X_{2T}$, $D_a = 1.8 - 2.0$, $Y_C = 294.0 \text{ MPa} = X_{2C}$, $S_T = 32.94 \text{ MPa}$	
$S_L = 101.1 \text{ MPa}$	
<u>Propriétés de l'impacteur</u>	
$R = 6.35 \text{ mm}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$	
$\rho = 7870 \text{ Kg m}^{-3}$	

Différentes séquences d'empilement sont considérées. La plaque est en appuis simples sur les quatre cotés. Les dimensions de la plaque sont 127 mm x 76.2 mm et l'épaisseur de chaque pli est $t_{pli} = 0.465\text{mm}$. L'incrément du temps utilisé est de $\Delta t = 0.27 \mu\text{s}$. En utilisant un maillage de 15×11 éléments. La force de contact est appliquée sur la face supérieure de la plaque à l'élément numéro 83 au point de Gauss ($ipgs = 2$ et $jpgs = 2$) avec un nombre total de points de Gauss ($NPGS = 3$).

Le tableau 4.3 montre les possibilités de la fissuration de la matrice aux différents points de Gauss.

Une étude paramétrique est faite dans l'ordre de déterminer la plus petite vitesse qui cause l'initiation de la matrice pour différentes séquences d'empilement. Pour ces séquences d'empilement, on varié le pourcentage des fibres orientées à 0° et les fibres orientées à 90° . D'après le tableau 4.3, le stratifié de séquence d'empilement $[0_2 / 90_2 / 0_2]$ la fissuration de la matrice apparaît à une vitesse d'impact de (7.40 m/s) par contre pour le stratifié de séquence d'empilement $[0_2 / 90_5 / 0_2]$ l'initiation de la fissuration apparaît à une vitesse d'impact (6.70 m/s) . Ceci peut être attribué au fait que l'augmentation des plis orientés a 90° réduit la rigidité du stratifié.

Tableau 4.3: Faibles vitesses causant l'initiation de la fissuration de la matrice pour différentes séquences d'empilement.

Séq. Empil.	Vit. Endomm. $v_p (m/s)$	$t (\mu\text{s})$	$F_c (N)$	$\bar{\sigma}_{22} (MPa)$	$\bar{\tau}_{23} (MPa)$
$0_2/90_5/0_2$	6.70	31.86	1110.45	11.40	-32.24
$0_2/90_4/0_2$	6.80	32.40	989.86	13.48	-31.94
$0_2/90_3/0_2$	7.00	28.62	834.23	-5.170	32.96
$0_2/90_2/0_2$	7.40	28.35	695.96	-5.226	32.93
$0_3/90_2/0_3$	7.15	30.24	951.20	20.46	-30.61
$0_3/90_3/0_3$	7.00	31.59	1087.86	18.25	-31.11
$0_3/90_4/0_3$	6.95	32.13	1219.70	15.81	-31.59

Le tableau 4.4 montre, pour les mêmes configurations du tableau 4.3, le premier point de Gauss ou la fissuration de la matrice peut être s'initie. D'après ce tableau, pour les stratifiés de séquences d'empilements $[0_2 / 90_5 / 0_2]$, $[0_2 / 90_4 / 0_2]$, $[0_3 / 90_2 / 0_3]$ $[0_3 / 90_3 / 0_3]$ et $[0_3 / 90_4 / 0_3]$ la fissuration de la matrice commence dans le dernier pli

orienté à 0^0 par contre pour les autres stratifiés la fissuration commence dans le pli orienté à 90^0 qui est proche du plan moyen. Ceci peut être expliqué par les résultats du tableau 4.3. Nous remarquons que pour les configurations citées ci-dessus les valeurs de $\bar{\sigma}_{22}$ sont importantes devant les valeurs de $\bar{\tau}_{23}$, ce qui signifie que la fissuration dans les derniers plis est causée par la flexion des structures c-a-d par les $\bar{\sigma}_{22}$. Dans le deuxième cas les valeurs de $\bar{\sigma}_{22}$ sont petites devant les valeurs de $\bar{\tau}_{23}$. Dans cette région la fissuration est due au cisaillement c-a-d aux valeurs de $\bar{\tau}_{23}$.

Tableau 4.4: Le premier point de Gauss fissuré.

Séq.Empi.	Nu. Pli	Nu. Ele.	IPGS	JPGS
$0_2/90_5/0_2$	9	83	3	1
$0_2/90_4/0_2$	8	83	3	1
$0_2/90_3/0_2$	3	83	1	3
$0_2/90_2/0_2$	3	83	1	3
$0_3/90_2/0_3$	8	83	3	1
$0_3/90_3/0_3$	9	83	3	1
$0_3/90_4/0_3$	10	83	3	1

Dans la présente section, nous intendons de déterminer l'apparition de fissures dans les différents plis en utilisant une vitesse d'impact plus élevée que la vitesse d'initiation de la fissuration de la matrice. Celle-ci est égale à 12 m/s .

La figure (4.11) montre les détails d'une discrétisation par éléments finis autour du point de contact. Ainsi, nous expliquons dans la même figure les notations des points de Gauss ipjs et jpjs.

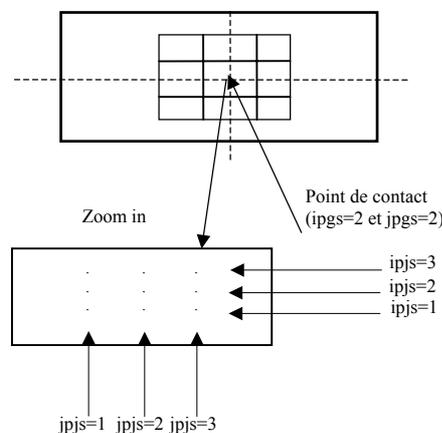


Fig.4.11 Modèle par FEM

Le tableau 4.5 montre que pour la configuration $[0/90_2/0]$ l'initiation de la fissuration de la matrice apparaît dans l'élément 83 ($ipgs = 1, jpgs = 3$) du pli 2 et 3 à $14.04 \mu s$, alors que pour le plis 4 elle s'initie à $14.31 \mu s$.

Une étude numérique quantitative (tableau 4.6) montre que pour la configuration $[0_2/90_2/0_2]$ l'initiation de la fissuration de la matrice apparaît dans l'élément 83 ($ipgs = 1, jpgs = 3$) du pli 3 et 4 à $11.34 \mu s$, alors que pour le plis 6 elle s'initie à $12.42 \mu s$. Tableau 4.7 montre que la fissuration de la matrice dans le stratifié $[0_2/90_4/0_2]$ apparaît au pli 3 dans l'élément 83 au point de Gauss ($ipgs=1$ and $jpgs=3$) avec une importante valeur de cisaillement transversale ($\bar{\tau}_{23} = 33.67 MPa, \bar{\sigma}_{22} = -3.75 MPa$). La prochaine fissuration est observée au pli 4 au même instant. Plus tard, la fissuration de la matrice s'initie aux plis 7 et 8 avec une contrainte normale $\bar{\sigma}_{22}$ qui varie d'une valeur $-3.75 MPa$ à une valeur de $10.21 MPa$ indiquant que la flexion est le mode de fissuration le plus dominant.

Tableau 4.5: Position de la fissuration de la matrice, $[0/90_2/0]$.

Nu. Pli	Nu. Ele.	IPGS	JPGS	$t(\mu s)$	$\bar{\sigma}_{22}$ (MPa)	$\bar{\tau}_{23}$ (MPa)
2	83	1	3	14.04	-3.88	33.28
2	83	2	3	14.04	-3.88	-33.28
3	83	1	3	14.04	-1.29	33.28
3	83	2	3	14.04	-1.29	-33.28
1	83	3	1	14.31	-18.43	-33.28
1	83	3	2	14.31	-18.43	33.28
4	83	3	1	14.31	3.68	-33.28
4	83	3	2	14.31	3.68	33.28

Tableau 4.6: Position de la fissuration de la matrice, $[0_2/90_2/0_2]$.

Nu. Pli	Nu. Ele.	IPGS	JPGS	$t(\mu s)$	$\bar{\sigma}_{22}$ (MPa)	$\bar{\tau}_{23}$ (MPa)
3	83	1	3	11.34	-3.62	33.73
3	83	2	3	11.34	-3.62	-33.73
4	83	1	3	11.34	-1.21	33.73
4	83	2	3	11.34	-1.21	-33.73
6	83	3	1	12.42	13.74	-32.52
6	83	3	2	12.42	13.74	32.52

Tableau 4.7: Position de la fissuration de la matrice, $[0_2/90_4/0_2]$.

Nu pli.	Nu. Ele.	IPGS	JPGS	$t(\mu s)$	$\bar{\sigma}_{22}$ (MPa)	$\bar{\tau}_{23}$ (MPa)
3	83	1	3	12.69	-3.75	33.67
3	83	2	3	12.69	-3.75	-33.67
4	83	1	3	12.69	-2.25	33.67
4	83	2	3	12.69	-2.25	-33.67
5	83	1	3	12.69	-0.75	33.67
5	83	2	3	12.69	-0.75	-33.67
6	83	1	3	12.69	0.75	33.67
6	83	2	3	12.69	0.75	-33.67
7	83	3	1	12.96	6.13	-32.94
7	83	3	2	12.96	6.13	32.94
8	83	3	1	12.96	10.21	-32.94
8	83	3	2	12.96	10.21	32.94

4.4 CONTRAINTES DYNAMIQUES AUX INTERFACES

Dans ce qui suit, le stratifié de séquences d'empilement $[0_2/90_4/0_2]$ avec les mêmes propriétés utilisées dans la section précédente est considéré. L'objectif est de calculer les composantes ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}, \tau_{13}$ et τ_{23}) à la surface supérieure du premier pli et à l'interface entre les plis 7 et 8 à un point situé directement sous le point de contact. Les résultats obtenus sont montrés dans les figures (4.12) et (4.13).

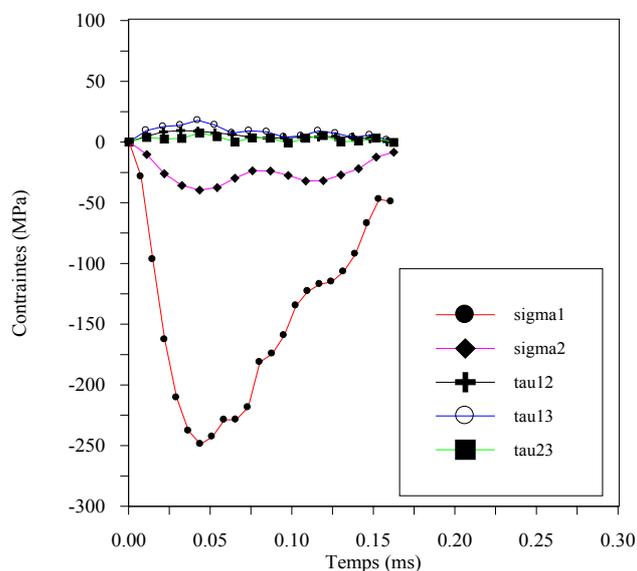


Fig.4.12 Distribution des contraintes au premier pli

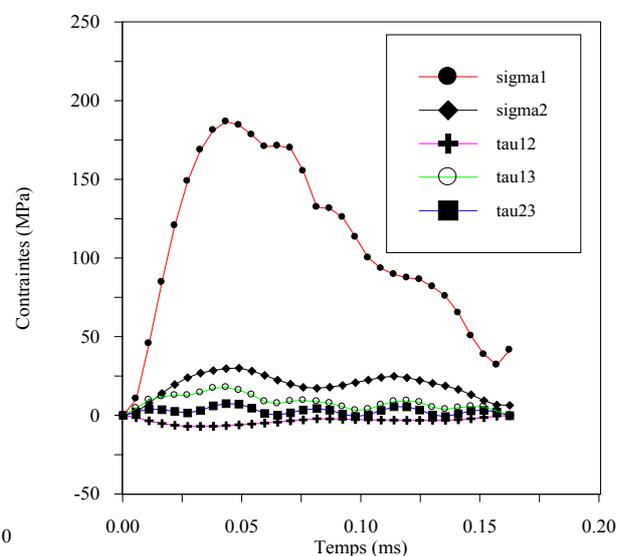


Fig.4.13 Distribution des contraintes au dernier pli

A partir de ces figures, il est clairement observé que les contraintes dans le premier pli (pli supérieur) sont négatives tandis que dans le dernier pli (pli inférieur) sont positives. Les composantes des contraintes τ_{12} , τ_{13} et τ_{23} sont plus petites que pour les composantes des contraintes σ_1 et σ_2 . La figure (4.14) montre la variation des contraintes au plan moyen du stratifié au point situé juste sous le point de contact.

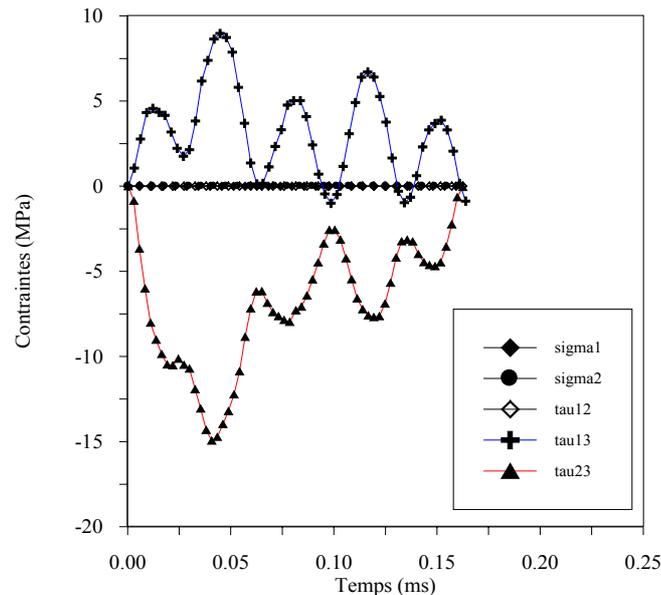


Fig.4.14 Distribution des contraintes au plan moyen

La figure ci-dessus montre que les composantes des contraintes (σ_1 , σ_2 et τ_{12}) au plan moyen sont négligeables (σ_1 , σ_2 et $\tau_{12} \approx 0$). Les autres composantes (τ_{13} et τ_{23}) ne sont pas négligeables, elles ont des valeurs supérieures aux composantes (σ_1 , σ_2 et τ_{12}). Ceci signifie que ces deux (τ_{13} et τ_{23}) composants contribuent plus dans la prévision de la fissuration de la matrice en comparaison aux autres composantes (σ_1 , σ_2 et τ_{12}).

La figure (4.15) montre la variation des contraintes d'un stratifié de séquences d'empilement $[0_2/90_4/0_2]$, sans endommagement, à deux endroits différents. Le premier endroit (Pli 2, Élément 83, IPGS 2 et JPGS 2)₁ et situé directement sous le point de contact. Le deuxième endroit (Pli 2, Élément 83, IPGS 3 et JPGS 1)₂, ce dernier et un peu loin du point de contact. Cette figure montre que la composante des contraintes τ_{23} au

deuxième endroit est beaucoup plus élevée qu'au premier endroit, ceci signifie que la fissuration de la matrice apparaît loin du point de contact.

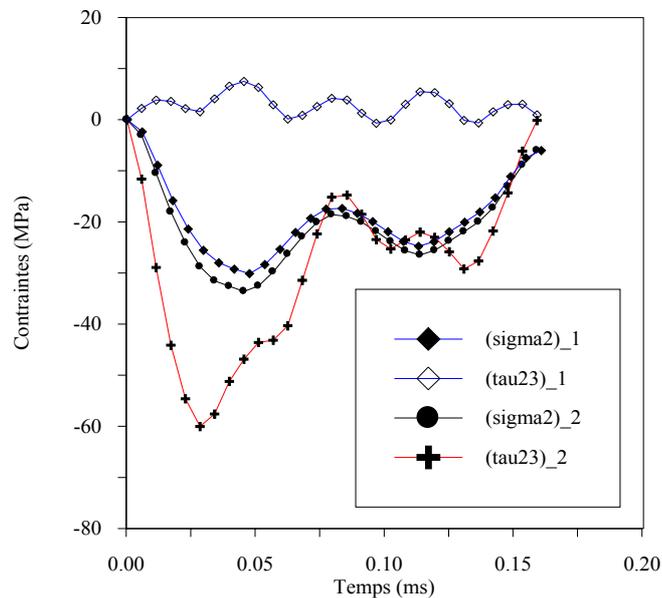


Fig.4.15 Distribution des contraintes en deux endroits différents

4.5 CONFIGURATIONS DEFORMEES

Les configurations déformées sont montrées dans la figure (4.16) pour $t = 50, 150, 200, 600$ et $903 \mu s$. La vitesse de l'impacteur égale à $2.92 m/s$. Les propriétés mécaniques de la plaque et de l'impacteur utilisées sont montrées sur le tableau suivant:

Tableau 4.8: Propriétés Mécaniques et géométriques de la plaque composite et de l'impacteur

<u>Propriétés de la plaque</u>		<u>Propriétés de l'impacteur</u>
$E_1 = 129 \text{ GPa}$, $E_2 = 7.5 \text{ GPa}$, $G_{12} = 3.5 \text{ GPa}$,		$R = 12.7 \text{ mm}$, $E = 207 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$
$\nu_{12} = 0.33$		
$\rho = 1540 \text{ Kg m}^{-3}$		
Conditions aux limites	Appuis simples	
Dimensions	$0.2 \times 0.15 \times 0.004 \text{ m}^3$	
Séquences d'empilement	$[45/90/-45/0]_{3s}$	

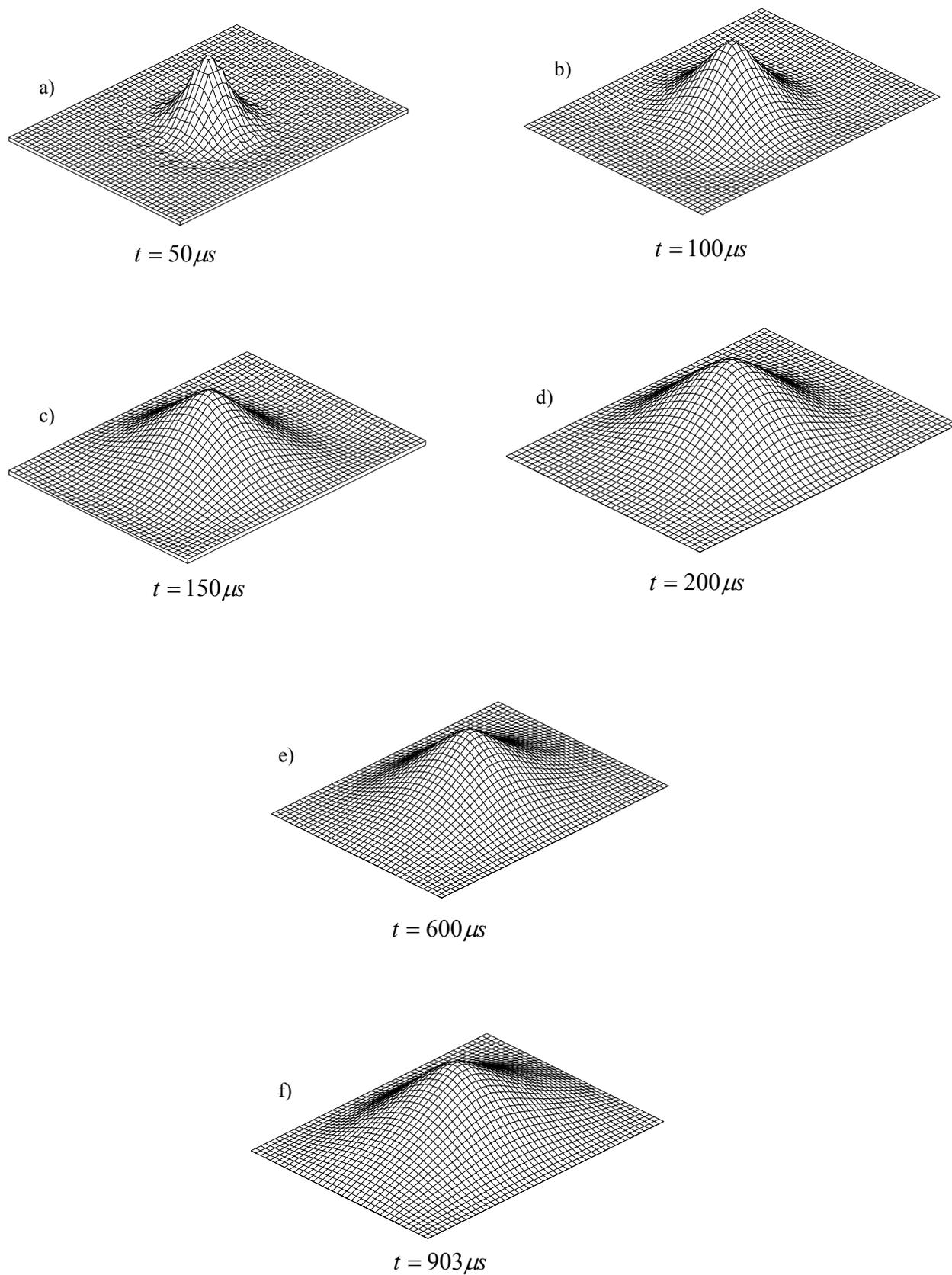
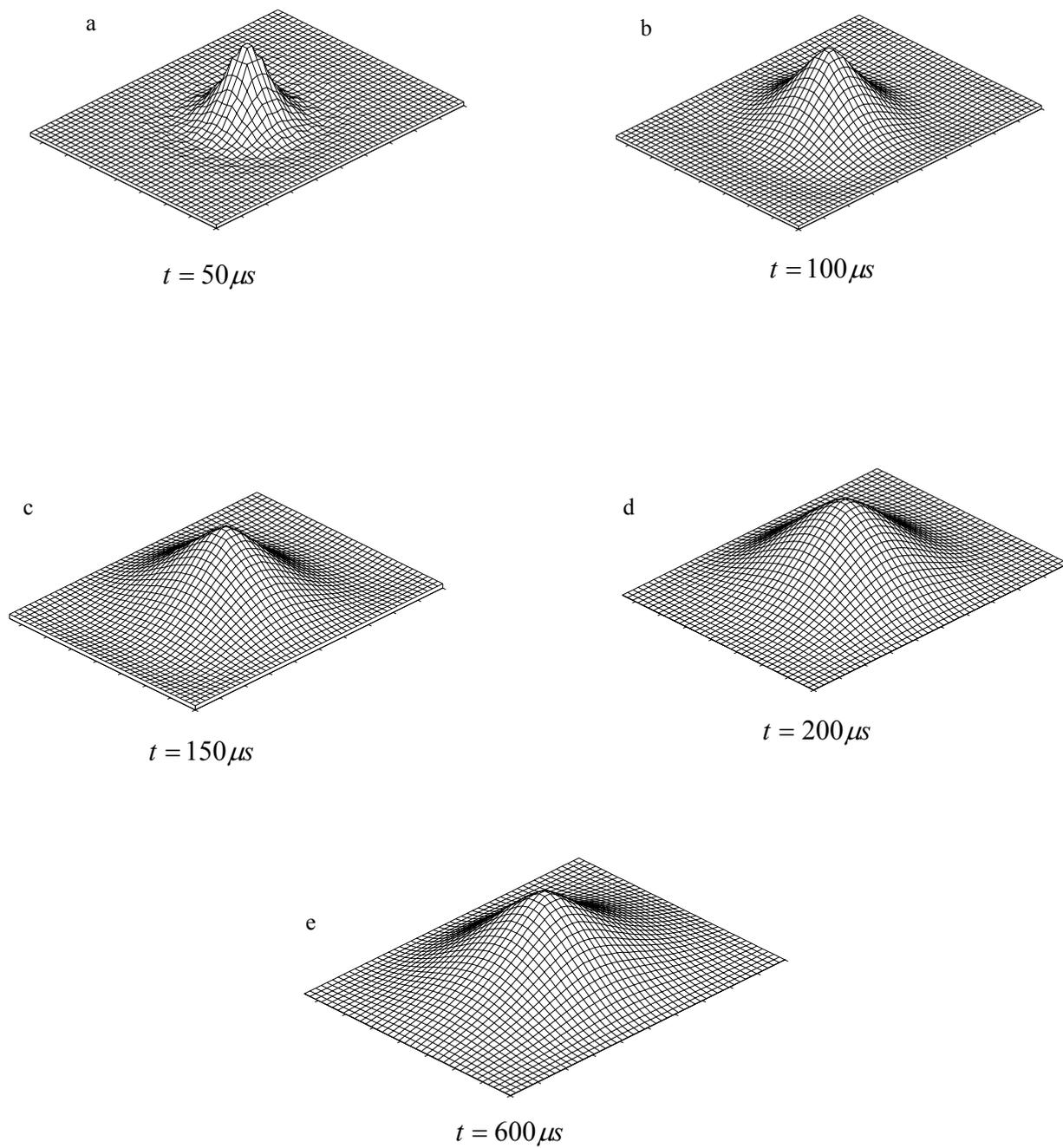


Figure 4.16. Stratifié déformé pour R=12.7mm

Figure 4.17. Stratifié déformé pour $R=6.35\text{mm}$

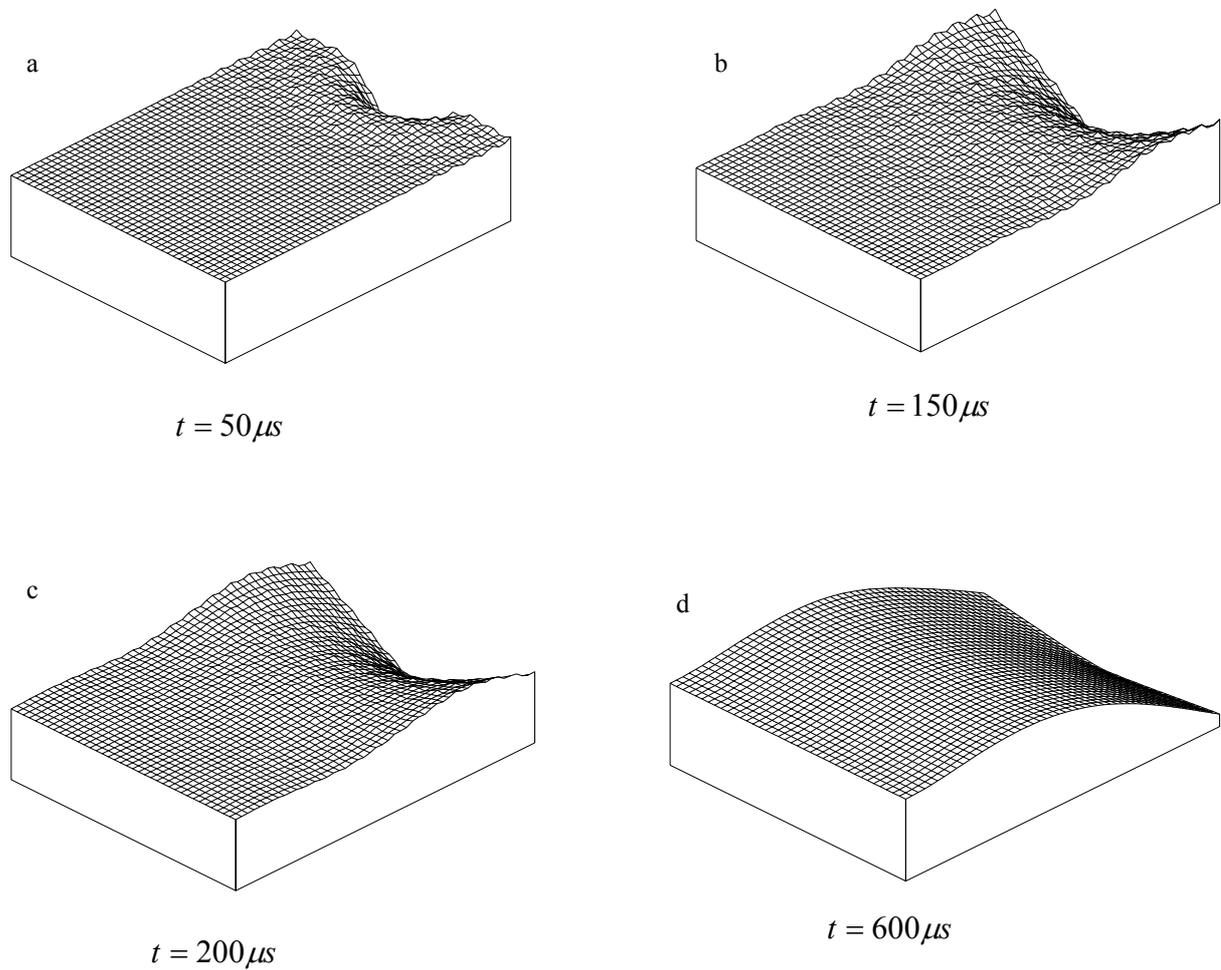


Figure 4.18. Stratifié déformés pour $R=6.35\text{mm}$

Les déformées représentées sur les figures 14.16 (a,b,c,d,e) et les figures 14.17 (a,b,c,d,e) sont tracées durant la phase de chargement par contre la déformée représentée sur la figure 14.16 (f) est tracée durant la phase de déchargement. Nous remarquons d'après ces figures que les déformées sont symétriques car la force de contact est appliquée au centre de la plaque et la surface déformée augmente avec l'augmentation du temps de contact. Cette surface déformée avec le temps prend la forme de l'impacteur qui a une forme sphérique.

Les figures 4.18 (a,b,c,d) représentent les déformées d'un stratifié encastres sur une seule extrémité ($x=0$) et soumis au choc au milieu de l'autre extrémité libre ($x=200\text{mm}$).

4.6 PREDICTION DES SURFACES ENDOMMAGÉES

La simulation numérique de la forme et des dimensions des surfaces fissurées de différents plis d'une plaque composite, de séquences d'empilement ($0_2/90_6/0_2$), de dimensions $127 \times 76.2 \text{ mm}^2$ et de caractéristiques données dans le tableau 4.9, soumise au choc à une vitesse égale à 20 m/s est montrée sur les figures (4.19), (4.20), (4.21), (4.22) et (4.23). Les contraintes sont calculées en chaque point de Gauss et le symbole des astérisques dans ces figures indique l'endroit de l'élément contenant les points de Gauss où la fissuration apparaît. Les figures (4.19a), (4.20a), (4.21a) et (4.22a) sont tracées à un temps $t_1 = 30.51 \mu\text{s}$, les figures (4.19b), (4.20b), (4.21b) et (4.22b) sont tracées à un temps $t_2 = 58.05 \mu\text{s}$ et les figures (4.19c), (4.20c), (4.21c) et (4.22c) sont tracées à un temps $t_3 = 66.69 \mu\text{s}$.

Tableau 4.9: Propriétés Mécaniques et géométriques de la plaque composite et de l'impacteur

Propriétés de la plaque

$$E_1 = 144.8 \text{ GPa}, E_2 = 9.65 \text{ GPa}, G_{12} = G_{13} = 7.10 \text{ GPa}, G_{23} = 5.92 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0.30, \rho = 1389.2 \text{ Kg m}^{-3}$$

Conditions aux limites Appuis simples

Propriétés de l'impacteur

$$R = 12.7 \text{ mm}, E = 200 \text{ GPa}, \nu = 0.3$$

$$\rho = 7870 \text{ Kg m}^{-3}$$

D'après la figure (4.19), nous constatons que la surface fissurée du premier pli subissant le choc augmente d'une valeur $S_1 = 1161,288 \text{ mm}^2$ à $t_1 = 30.51 \mu\text{s}$ à une valeur $S_2 = 1935,48 \text{ mm}^2$ à $t_2 = 58.04999 \mu\text{s}$ puis elle passe à une valeur de $S_3 = 2399,9952 \text{ mm}^2$ à $t_3 = 66.69 \mu\text{s}$.

Les figures tracées montrent que à $t_1 = 30.51 \mu\text{s}$ la surface fissurée est la même pour les plis considérés est égale à $S_1 = 1161,288 \text{ mm}^2$. Cette surface à $t_2 = 58.05 \mu\text{s}$ diminue d'une

valeur $S_2 = 1935,48mm^2$ au pli 1 à une valeur $S_2 = 1780,6416mm^2$ au pli 2 puis augmente à une valeur $S_2 = 1833,8672mm^2$ au pli 5 et finalement elle passe à une valeur $S_2 = 1780,6416mm^2$ aux plis 9 et 10. À $t_3 = 66.69\mu s$ la surface fissurée diminue d'une valeur $S_3 = 2399,9952mm^2$ au pli 1 à une valeur $S_3 = 2038,7056mm^2$ au pli 2 puis à une valeur $S_3 = 1883,8672mm^2$ au pli 5 et finalement à une valeur $S_3 = 1780,6416mm^2$ aux plis 9 et 10. Aux plis 9 et 10 (figures 4.22 et 4.23), les surfaces endommagées sont moins importantes et qu'au-delà d'un temps d'impact supérieur à $58\mu s$, l'endommagement se stabilise.

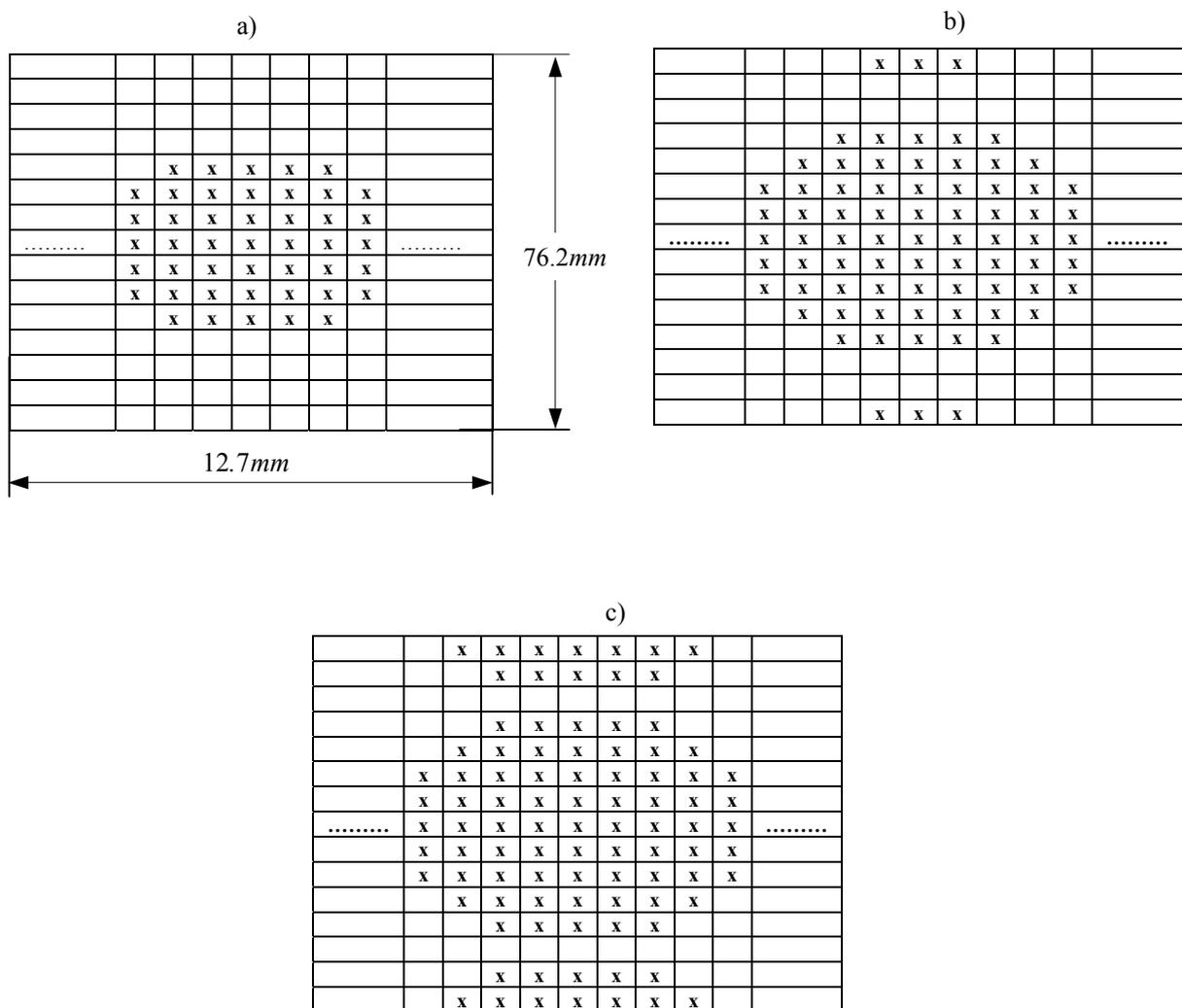


Figure 4.19. Prédiction de la fissuration de la matrice à différents temps du premier pli.

- a) $t_1 = 30.51\mu s$.
- b) $t_2 = 58.05\mu s$.
- c) $t_3 = 66.69\mu s$.

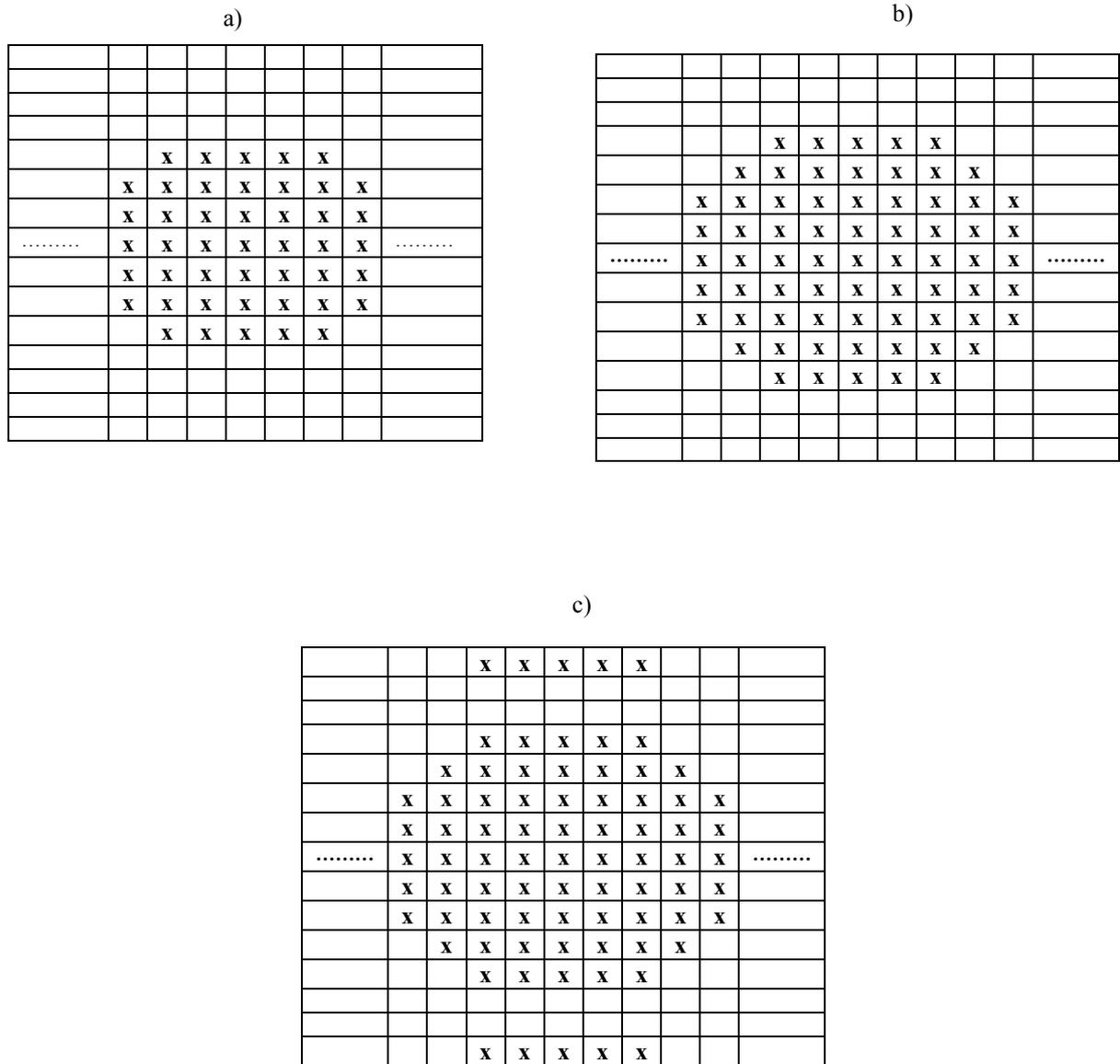


Figure 4.20. Prédiction de la fissuration de la matrice à différents temps de deuxième pli.
 a) $t_1 = 30.51\mu s$.
 b) $t_2 = 58.05\mu s$.
 c) $t_3 = 66.69\mu s$.

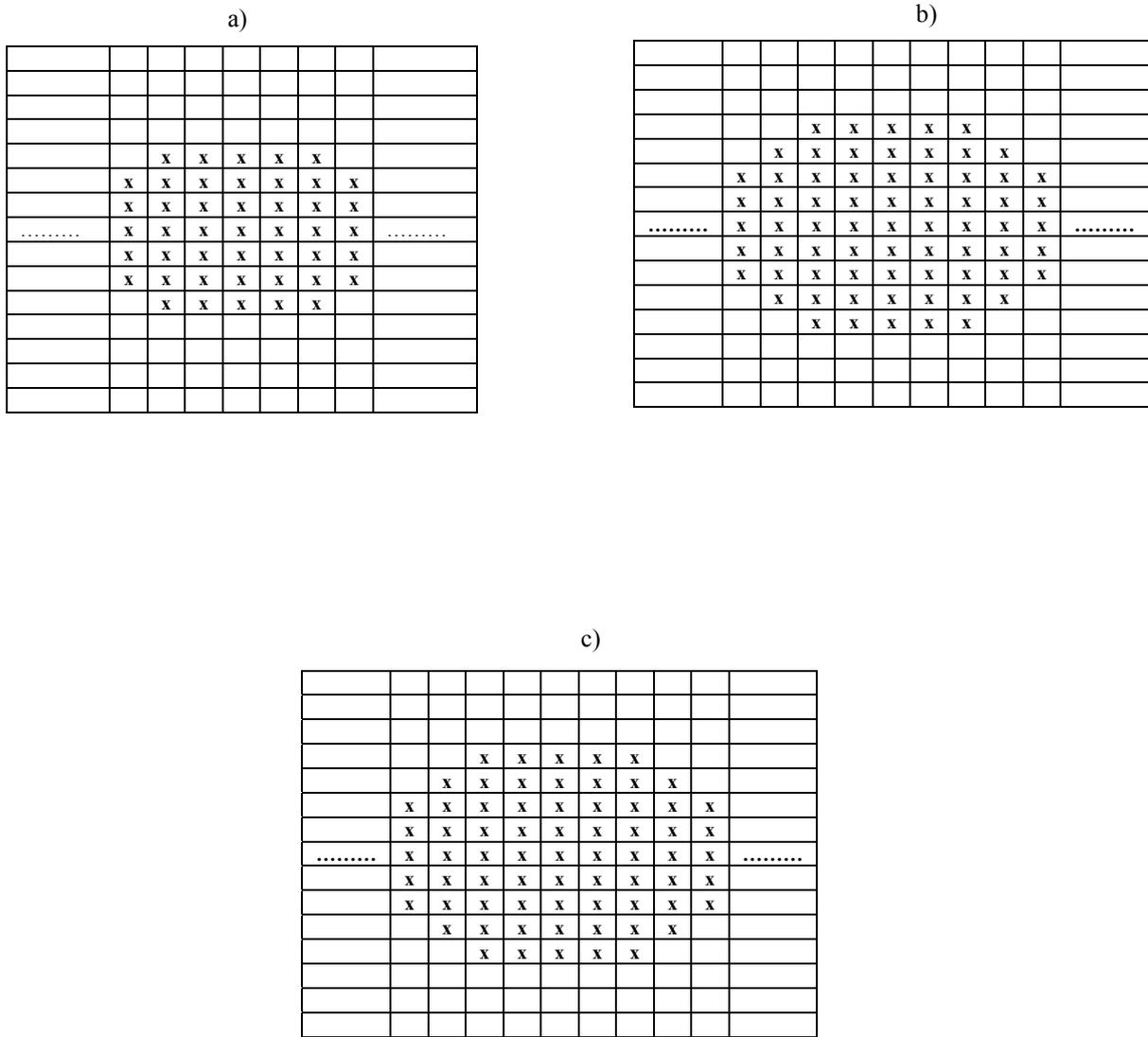


Figure 4.23. Prédiction de la fissuration de la matrice à différents temps du pli 10.
 a) $t_1 = 30.51\mu s$.
 b) $t_2 = 58.05\mu s$.
 c) $t_3 = 66.69\mu s$.

4.7 DISTRIBUTION DES CONTRAINTES DYNAMIQUES AUX INTERFACES

Dans le but d'étudier l'endommagement dans les stratifiés composites, la distribution des contraintes doit être étudiée sans considération d'endommagement. La distribution des contraintes dynamiques aux interfaces nous renseigne sur l'initiation du délaminage. Le stratifié utilisé est de séquences d'empilement $[0/45/0/-45/0]_{2s}$ et admet les mêmes propriétés données dans la section 4.3. La vitesse de l'impacteur égale à $12m/s$, le rayon de l'impacteur est égale à $12.7mm$. Le stratifié considéré est en appuis simple et de dimensions $150 \times 100 \times 9.3mm^3$. Dans le cas de délaminage seules les composantes des contraintes σ_{22} , τ_{13} et τ_{23} , participent à l'endommagement.

Les figures (4.24), (4.25), (4.26) et (4.27) montrent la distribution des contraintes aux interfaces 1, 2, 5, 6, 18 et 19. Aux interfaces 1 et 6, le délaminage est dû aux composantes des contraintes σ_{22} et τ_{13} . Par contre aux interface 2 et 5, le délaminage est dû aux composantes de contraintes σ_{22} , τ_{13} et τ_{23} .

Par comparaison des figures (4.24), (4.25), (4.26) et (4.27) le délaminage peut être s'initie à l'interface 2 avant l'interface 1 et à l'interface 5 avant l'interface 6. Les composantes des contraintes à l'interface 2 sont supérieures à celles des interfaces 5 et 6, expliquant ainsi l'apparition précoce du délaminage à cette interface.

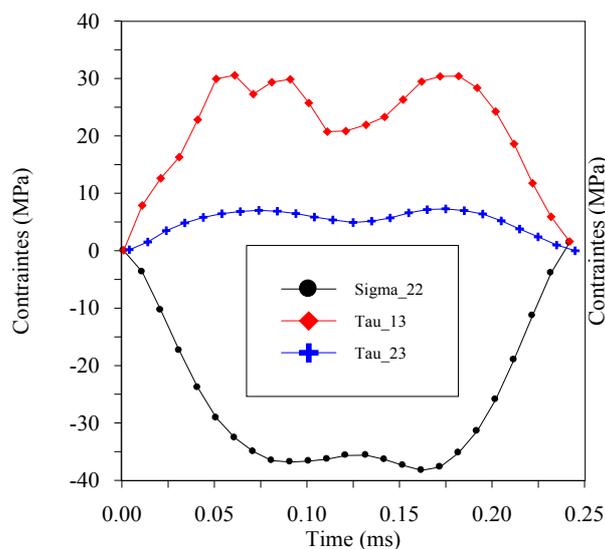


Fig. 4.24 Distribution de contraintes à l'interface 1

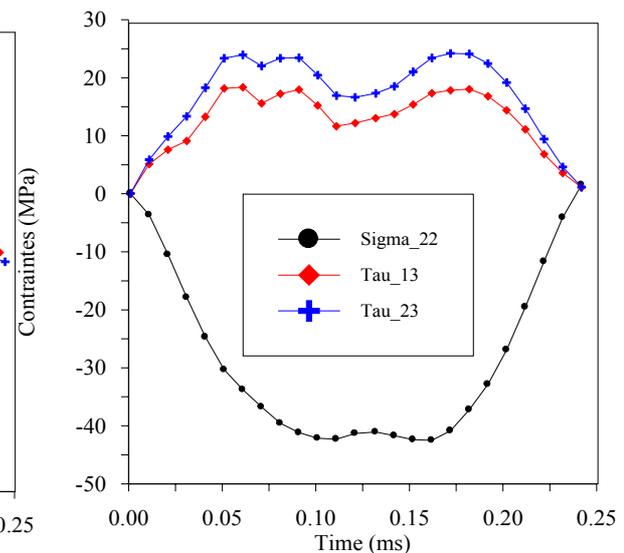


Fig.4.25 Distribution de contraintes à l'interface 2

Les figures (4.28) et (4.29) montrent la distribution des contraintes aux interfaces 18 et 19. À l'interface 18 le délaminage est essentiellement dû aux contraintes σ_{22} et τ_{13} . À l'interface 19 le délaminage est essentiellement dû à la contraintes σ_{22} et à degré moindre aux contraintes τ_{13} et τ_{23} . La prépondérance de la contrainte en flexion σ_{22} au niveau des dernières interfaces permet d'attribuer le phénomène de délaminage à la dite contrainte σ_{22} .

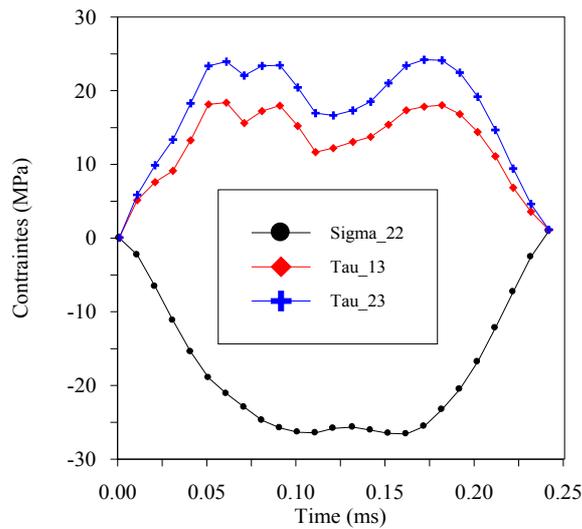


Fig.4.26 Distribution de contraintes à l'interface 5

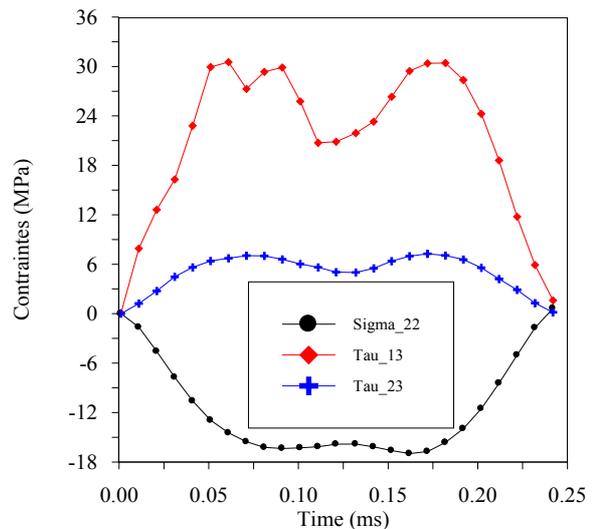


Fig.4.27 Distribution de contraintes à l'interface 6

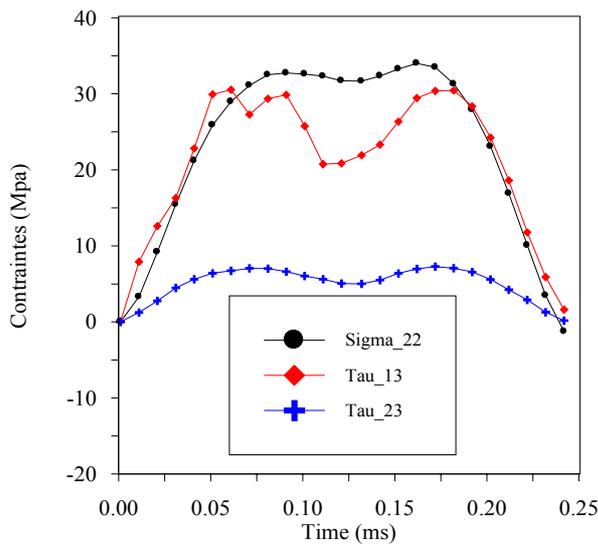


Fig.4.28 Distribution de contraintes à l'interface 18

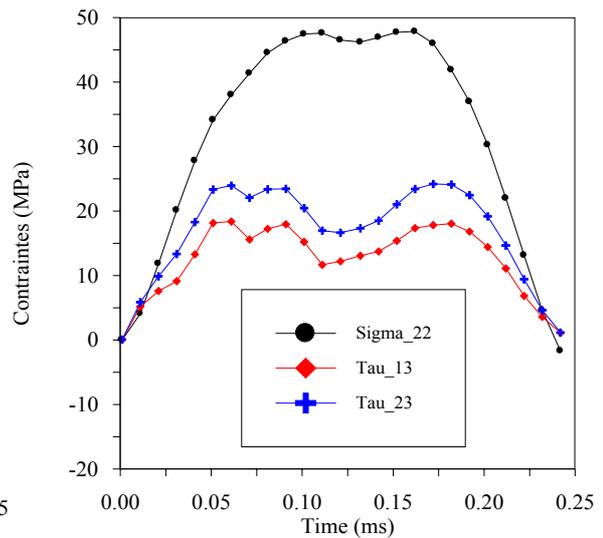


Fig.4.29 Distribution de contraintes à l'interface 19

CONCLUSION GENERALE

L'analyse du comportement dynamique des structures composites en vue de prédire les endommagements est l'une des préoccupations actuelles de beaucoup chercheurs. Bien qu'un nombre de travaux de recherche assez conséquent publiés dans la littérature, les mécanismes des endommagements (fissuration de la matrice, délaminage et rupture des fibres) restent un phénomène non bien cerné.

Le présent travail de thèse de doctorat traite les endommagements dans les plaques composites à base de fibres soumises à des charges dynamiques d'impact. A cet effet, une formulation mathématique en éléments finis est développée. L'approche utilise la loi de contact de Hertz modifiée et l'impacteur est considéré comme étant un corps rigide. Les éléments de Lagrange à 9-nœuds avec prise en compte de l'effet du cisaillement transverse sont utilisés. Pour la phase de chargement et de déchargement, l'algorithme de Newmark est utilisé pour la résolution des deux équations dynamique régissant le mouvement de la plaque et de l'impacteur. Sur cette base, un logiciel de calcul en Fortran est établi pour l'analyse et la prédiction des endommagements dans les structures composites. Le modèle développé dans cette thèse est validé par une confrontation des résultats obtenus aux résultats expérimentaux et numériques de la littérature consultée.

L'étude comparative entreprise dans la présente étude permet déjà de tirer un bon nombre de conclusions:

- (i) La force de contact augmente avec l'augmentation de la vitesse de contact,
- (ii) La force de contact augmente avec l'augmentation de la masse et du rayon de l'impacteur,
- (iii) Une légère différence concernant la force de contact et la déflexion maximale est remarquée et ce pour les deux types de conditions aux limites,
- (iv) Il est révélé que la force de contact augmente avec l'augmentation de l'épaisseur des plis d'orientation à 90^0 indiquant que la structure composite devient moins rigide.

(v) il est aussi révélé que la vitesse critique d'impact provoquant l'initiation de la fissuration de la matrice diminue avec l'augmentation du paramètre n du stratifié de type $[0_m/90_n/0_m]$.

Dans la deuxième grande partie de ce travail de thèse, une analyse des endommagements dans les plaques composites est entreprise. Ainsi les contraintes dynamiques sont calculées à différents points de Gauss d'un élément et aux interfaces. De cette grande partie de travail certaines conclusions sur l'initiation de la fissuration de la matrice peuvent être tirées qui sont:

- (i) L'initiation de la fissuration de la matrice dans les stratifiés ayant un nombre élevé de plis orientés à 90^0 apparaît à une faible vitesse en comparaison avec celle des stratifiés ayant un nombre moins élevé des plis orientés à 90^0 . Ceci peut être attribué au fait que l'augmentation des plis orientés à 90^0 réduit la rigidité du stratifié.
- (ii) La fissuration dans les derniers plis est peut être causée par la flexion des structures c-a-d par les valeurs de $\bar{\sigma}_{22}$.
- (iii) Il est révélé que la fissuration de la matrice apparaît à un point situé loin de la verticale passant par le point de contact.

Les contraintes dynamiques calculées à chaque point de Gauss nous a permis de simuler numériquement la forme et les dimensions de la surface fissurée de différents plis d'une plaque composite soumise au choc à une vitesse égale à $20m/s$. D'après les figures tracées nous constatons que:

- (i) la surface fissurée du premier pli subissant le choc augmente dans le temps.
- (ii) à un instant donné, la surface fissurée diminue en partant du premier pli au dernier pli.
- (iii) à $t = 30.51\mu s$ la surface fissurée dans les deux premiers plis et dans les deux derniers plis sont similaires en formes et en dimensions.
- (iv) Il est révélé aussi qu'à $t = 66,69\mu s$ les éléments situés loin du point de contact (sur les extrémités) sont aussi concernés par la fissuration. Ces éléments fissurés tendent à disparaître en partant du premier pli au dernier pli.

Dans la dernière partie de cette thèse, nous traitons les endommagements dans les stratifiés composites. La distribution des contraintes dynamiques aux interfaces est évaluée montrant ainsi l'initiation qualitative du délaminage. Il est montré que seules les composantes des contraintes σ_{22} , τ_{13} et τ_{23} participent à ce phénomène de délaminage. Les résultats numériques obtenus pour le cas du stratifié considéré montrent que:

(i) Pour les interfaces 1 et 6, le délaminage est dû beaucoup plus aux composantes de contraintes σ_{22} , et τ_{13} . Par contre pour les interfaces 2 et 5 le délaminage est dû à la combinaison des contraintes σ_{22} , τ_{23} et τ_{13} .

(ii) les composantes des contraintes à l'interface 2 sont beaucoup plus importantes que celles aux interfaces 5 et 6, expliquant ainsi l'apparition précoce de délaminage à cette interface.

(iii) la prépondérance de la contrainte en flexion σ_{22} , au niveau de la dernière interface permet d'attribuer le phénomène de délaminage à la dite contrainte σ_{22} .

Références bibliographiques

- [1] Sun C. T. An analytical method for evaluation of impact damage energy of laminated composites. Am. Soc. Test. Mater. 1977;ASTM STP 617:427-40.
- [2] Tan T. M., Sun C.T. Wave propagation in graphite/epoxy laminates due to impact. NASA CR 168057 1982.
- [3] Sun C. T., Chen JK. On the impact of initially stressed composite laminates. J Compos Mater 1985;19:490-504.
- [4] Chen JK, Sun C. T. Dynamic large deflection response of composite laminates subjected to impact. Compos Struct 1985; (4):59-73.
- [5] Rechak S. "Effect of adhesive layers on impact damage and dynamic response in composite laminates". Doctor of Philosophy. PURDUE UNIVERSITY, USA. December 1986.
- [6] Tiberkak R. , Bachene M. , Rechak S. , Necib B. " Analyse dynamique des contraintes et endommagement des plaques composites sous effets de choc par MEF. 18^e Congrès Français de Mécanique CFM'07, du 27 au 31 Aout 2007. Domaine Universitaire De Grenoble. France.
- [7] Tiberkak R., Bachene M., Rechak S. and Necib B.. " Some interpretations on delamination and matrix cracking in composite materials". First National Conference on Mechanics and Engineering Systems NCMES'07 . Boumerdes May 26-27, 2007.
- [8] Tiberkak R., Rechak S. and Bachene M. "The dynamic response of laminate composite plate under low-velocity impact". 25th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences. Hamburg, Germany 3-8 September 2006.
- [9] Tiberkak R., Bachene M., Rechak S. and Necib B., Damage prediction in composite plates subjected to low velocity impact, Composite Structures 83 (2008), 73-82.
- [10] Sekine H., N. Hu, H. Fukunaga, and T. Natsume. Low-velocity impact response of composite laminates with a delamination. Mechanics of Composite Materials and Structures; 1998;5:257-78.

- [11] Li C.F., N. Hu, Y.J. Yin, H. Sekine, H. Fukunaga. Low-velocity impact damage of continuous fiber-reinforced composite laminates. Part I An FEM numerical model Composites: Part A2002;33:1055-62.
- [12] Li C.F., N. Hu, Y.G. Cheng, , H. Fukunaga, H Sekine. Low-velocity impact-induced damage of continuous fiber-reinforced composite laminates. Part II Verification and numerical investigation: Part A2002;33:1063-72.
- [13] N. Hu, H. Sekine, H. Fukunaga, Z.H. Yao. Impact analysis of composite laminates with multiple delaminations. Int J Impact Engng 1999 ;22:633-648.
- [14] Krishnamurthy K.S., Mahajan P., Mittal R.K. Impact response and damage in laminated composite cylindrical shells. Composite Structures 59 (2003) 15–36.
- [15] Krishnamurthy K.S., Mahajan P., Mittal R.K. .A parametric study of the impact response and damage of laminated cylindrical composite shells. Composites Science and Technology 61 (2001) 1655–1669.
- [16] Choi HY, Wu HYT, Chang FK. A new approach toward understanding damage mechanisms and mechanics of laminated composites due to low-velocity impact: part II—analysis. J. Compos Mater 1991;25:1012–38.
- [17] Choi HY, Chang FK. A model for predicting damage in graphite/epoxy laminated composites resulting from low-velocity point impact. J Compos Mater 1992;26:2134–69.
- [18] Züleyha Aslan, Ramazan Karakuzu, Buket Okutan. The response of laminated composite plates under low-velocity impact loading. Composite Structures 59 (2003) 119–127.
- [19] Shiuh-Chuan Her, Yu-Cheng Liang. The finite element analysis of composite laminates and shell structures subjected to low velocity impact. Composite Structures 66 (2004) 277–285.
- [20] Mili F., Necib B. Impact behavior of cross-ply laminated composite plates under low Velocities. Composite Structures 51 (2001) 237-244.
- [21] Dazhi Jiang, Dongwei Shu.Effects of damage thresholds on stresses in composite laminates under transverse impact. Composite Structures 66 (2004) 61–67.
- [22] Zhao G.P., Cho C.D. Damage initiation and propagation in composite shells subjected to impact. Composite Structures xxx (2005) xxx–xxx.
- [23] Parhi P. K., Bhattacharyya S. K. and Sinha P. K. Failure analysis of multiple delaminated composite plates due to bending and impact. Mater. Sci., Vol. 24, No. 2, April 2001, pp. 143–149.

- [24] Hou J.P., Petrinic N., Ruiz C. A delamination criterion for laminated composites under low-velocity impact. *Composites Science and Technology* 61 (2001) 2069–2074.
- [25] Vaziri R., Quan X. and Olson M.D. Impact analysis of laminated composite plates and shells by super finite elements. *Int. J. Impact Engng* Vol.18, Nos 7-8, pp. 765-782, 1996.
- [26] Berthelot. J.M. “Matériaux composites”. *Comportement Mécanique et Analyse des Structures*. Edition Massom (1992).
- [27] Gay D. “Matériaux composites”. Edition Hermes (1989).
- [28] Jean-Jacques B. et Larose S. “Structures en Matériaux composites”. *Techniques de L’Ingénieur*. B5080.
- [29] Yang P. C., Norris C. H. and Stavsky Y. “Elastic wave propagation in heterogeneous plates”. *Int. J. Solids Struct.*, 30,665-684 (1996).
- [30] Whitney J. M. “Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads”. *J. Appl. Mech.* 15, 63-69 (1984).
- [31] Ladevèze, P., *A damage computational method for composite structures*. *Computers and structures*, 1992. 44(1-2): p. 79-87.
- [32] Naidu N.V.S. and Sinha P.K. Nonlinear finite element analysis of laminated composite shells in hydrothermal environments. *Composite Structures* (2005) 69 387-395.
- [33] Ik Hyeon Choi, Cheol Ho Lim. Low-velocity impact analysis of composite laminates using linearized contact law. *Composite Structures* 2004;66:125-32.
- [34] Bathe 1982
- [35] Zheng S., Sun CT. A double-plate finite element model for the impact-induced delamination problem. *Compos Sci Technol* 1995;53:111-8.
- [36] Robert D. Cook. “Finite Element Modeling for Stress analysis”. Copyright by John Wiley & Sons, Inc.
- [37] Naidu N.V.S. and Sinha P.K. Nonlinear finite element analysis of laminated composite shells in hydrothermal environments. *Composite Structures* (2005) 69 387-395.
- [38] Zhang Y. Z., Kim K. S. Geometrically nonlinear analysis of laminate composite plates by two new displacement-based quadrilateral plate elements. *Composite Structures* (2005)

-
- [39] Chattopadhyay B., Sinha P. K. and Mukhopadhyay M.. Geometrically nonlinear analysis of composite stiffened plates using finite elements. *Composite Structures* (1995) 31 107-118.
- [40] Yang T. Y. “Finite element structural analysis” Prentice hall (1986).
- [41] Hinton E. “Numerical method and software for dynamic analysis of plates and shells”. Pineridge Press, Swansea, U.K. (1988).

ANNEXE 1

MATRICES DE CHANGEMENT
DE BASE

A1.1 CHANGEMENT DE BASE

Considérons deux systèmes de références orthonormés (x, y, z) et $(1, 2, 3)$ dont leurs bases sont respectivement $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (Figure A1.1) [26].

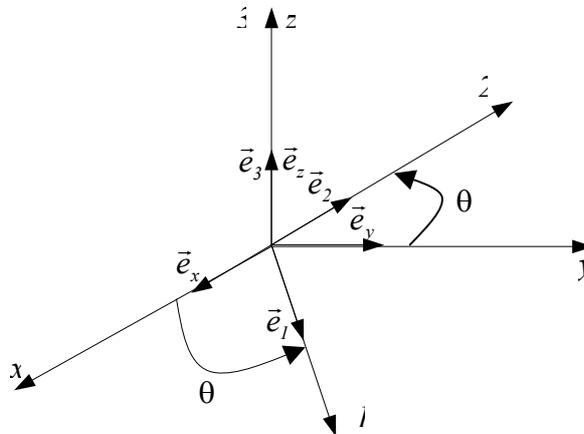


Figure A1.1 Changement de base

Dans le cas d'une rotation θ autour de la direction \vec{e}_z , la relation entre les bases $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ s'écrit:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \vec{e}_x \cos \theta + \vec{e}_y \sin \theta \\
\vec{e}_2 &= -\vec{e}_x \sin \theta + \vec{e}_y \cos \theta \\
\vec{e}_3 &= \vec{e}_z
\end{aligned} \tag{A1.1}$$

Ou sous la forme contractée suivante:

$$\begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{Bmatrix} \tag{A1.2}$$

D'où la matrice de changement de base:

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A1.3}$$

Le passage de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ vers la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ s'effectue par la relation suivante:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_x &= \vec{e}_1 \cos \theta - \vec{e}_2 \sin \theta \\
\vec{e}_y &= \vec{e}_1 \sin \theta + \vec{e}_2 \cos \theta \\
\vec{e}_z &= \vec{e}_3
\end{aligned} \tag{A1.4}$$

Ou sous la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{Bmatrix} = [A^T] \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} \tag{A1.5}$$

Avec:

$$[A^T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A1.6}$$

La matrice $[A^T]$ est la matrice transposée de la matrice $[A]$, elle est égale à son inverse.

A1.2 Matrice de changement de base des contraintes

En tout point M d'un milieu continu, l'état des contraintes est entièrement déterminé par la connaissance du tenseur des contraintes, noté $\sigma(M)_{xyz}$. Ce tenseur défini dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est donné par :

$$[\sigma(M)]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.7})$$

Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, ce tenseur est représenté par :

$$[\sigma]_{123} = [A][\sigma]_{xyz}[A^T] \quad (\text{A1.8})$$

Avec,

$$[\sigma(M)]_{123} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.9})$$

La relation (A1.8) peut être écrite sous la forme développée suivante:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta \\ \sigma_{22} &= \sigma_{xx} \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta \\ \sigma_{33} &= \sigma_{zz} \\ \tau_{12} &= -\sigma_{xx} \cos \theta \sin \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \sigma_{yy} \cos \theta \sin \theta \\ \tau_{23} &= -\tau_{xy} \sin \theta + \tau_{yz} \cos \theta \\ \tau_{13} &= \tau_{xy} \cos \theta + \tau_{yz} \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{A1.10})$$

Cette dernière relation peut être écrite sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 2 \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & -2 \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.11})$$

Ou sous forme contractée:

$$\{\sigma\}_{123} = [T]\{\sigma\}_{xyz} \quad (\text{A1.12})$$

D'où la matrice de changement de base des contraintes:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 2 \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & -2 \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A1.13})$$

A1.3 Matrice de changement de base des déformations

Le tenseur des déformations défini dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est donné par :

$$[\varepsilon(M)]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.14})$$

L'expression (A1.8) reportée au champ de déformations conduit à écrire:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & -\cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 \cos \theta \sin \theta & 2 \cos \theta \sin \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.15})$$

Ou sous forme contractée:

$$\{\varepsilon\}_{123} = [T'] \{\varepsilon\}_{xyz} \quad (\text{A1.16})$$

D'où la matrice de changement de base des déformations:

$$[T'] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & -\cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 \cos \theta \sin \theta & 2 \cos \theta \sin \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A1.17})$$

ANNEXE 2

Fichier de resultats

***** IMPACT ANALYSIS OF LAMINATED PLATE *****

MECHANICAL DATA OF THE PLATE:

LONGITUDINAL YOUNG'S MODULI	E1 (N/m2).....=	1.4480E+12
TRANSVERSE YOUNG'S MODULI	E2 (N/m2).....=	.96500E+10
LONGITUDINAL POISSON RATIO	nu12	= 0.300
LONGITUDINAL SHEAR MODULI	G12 (N/m2).....=	.71000E+10
MASS DENSITY	RO (Kg/m3).....=	1389.200

LAMINATE THICKNESS (m)=	0.3720E-02
NUMBER OF LAYERS=	8

DIRCTION OF LAYER N°: 1.....=	0.
DIRCTION OF LAYER N°: 2.....=	0.
DIRCTION OF LAYER N°: 3.....=	90.
DIRCTION OF LAYER N°: 4.....=	90.
DIRCTION OF LAYER N°: 5.....=	90.
DIRCTION OF LAYER N°: 6.....=	90.
DIRCTION OF LAYER N°: 7.....=	0.
DIRCTION OF LAYER N°: 8.....=	0.

EXTENSIONAL STIFFNESS MATRIX A (Pa.m):

0.2873E+09	0.4480E-06	-0.3699E+00
0.4480E-06	0.2873E+09	-0.1062E+02
-0.3699E+00	-0.1062E+02	0.2641E+08

COUPLING STIFFNESS MATRIX B (Pa.m2):

0.8731E-10	0.5170E-25	-0.4066E-19
0.5170E-25	0.2456E-10	-0.1301E-17
-0.4066E-19	-0.1301E-17	0.5457E-11

BENDING STIFFNESS MATRIX D (Pa.m3):

0.5487E+03	0.1291E-12	-0.1067E-06
0.1291E-12	0.1139E+03	-0.3061E-05

-0.1067E-06 -0.3061E-05 0.3046E+02

SHEAR STIFFNESS MATRIX F (Pa.m):

0.2018E+08 -0.7995E-01
-0.7995E-01 0.2018E+08

GEOMETRIC DATA OF THE PLATE:

NUMBER OF ELEMENTS..... = 9
NUMBER OF NODAL POINTS..... = 49
NUMBER OF RESTRAINED NODES..... = 24

ELEMENT NODAL CONNECTIONS:

ELEM.	NODE NUMBERS								
1	1	2	3	10	17	16	15	8	9
2	3	4	5	12	19	18	17	10	11
3	5	6	7	14	21	20	19	12	13
4	15	16	17	24	31	30	29	22	23
5	17	18	19	26	33	32	31	24	25
6	19	20	21	28	35	34	33	26	27
7	29	30	31	38	45	44	43	36	37
8	31	32	33	40	47	46	45	38	39
9	33	34	35	42	49	48	47	40	41

NODAL POINT COORDINATES:

NODE	X	Y
1	0.0000	0.0000
2	0.0212	0.0000
3	0.0423	0.0000
4	0.0635	0.0000
5	0.0847	0.0000
6	0.1058	0.0000
7	0.1270	0.0000
8	0.0000	0.0127
9	0.0212	0.0127
10	0.0423	0.0127
11	0.0635	0.0127
12	0.0847	0.0127
13	0.1058	0.0127
14	0.1270	0.0127
15	0.0000	0.0254
16	0.0212	0.0254

17	0.0423	0.0254
18	0.0635	0.0254
19	0.0847	0.0254
20	0.1058	0.0254
21	0.1270	0.0254
22	0.0000	0.0381
23	0.0212	0.0381
24	0.0423	0.0381
25	0.0635	0.0381
26	0.0847	0.0381
27	0.1058	0.0381
28	0.1270	0.0381
29	0.0000	0.0508
30	0.0212	0.0508
31	0.0423	0.0508
32	0.0635	0.0508
33	0.0847	0.0508
34	0.1058	0.0508
35	0.1270	0.0508
36	0.0000	0.0635
37	0.0212	0.0635
38	0.0423	0.0635
39	0.0635	0.0635
40	0.0847	0.0635
41	0.1058	0.0635
42	0.1270	0.0635
43	0.0000	0.0762
44	0.0212	0.0762
45	0.0423	0.0762
46	0.0635	0.0762
47	0.0847	0.0762
48	0.1058	0.0762
49	0.1270	0.0762

RESTRAINED NODES :
NODE CODE

1	11111
2	10101
3	10101
4	10101
5	10101
6	10101
7	11111
8	10101
15	10101
22	10101
29	10101
36	10101
14	10101

21 10101
 28 10101
 35 10101
 42 10101
 43 11111
 44 10101
 45 10101
 46 10101
 47 10101
 48 10101
 49 11111

TIME INCREMENT (Second).....=	.10000E-05	DELTAT
IMPACTOR MASS (Kg).....=	.84408E-02	MASS_P
HERTZIAN CONTACT CONSTANT (N/m1.5).....=	.98218E+09	KA
INITIAL IMPACTOR VELOCITY (m/s).....=	12.000	Vp
IMPACT DURATION (Microsec).....=	68.000	ta
CONTACT FORCE (N).....=	394.635	Fc
CENTRAL DEFLECTION (M).....=	.35978E-03	Ws

DISPLACEMENTS

	U	V	W	TETAX	TETAY
1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
2	0.0000E+00	0.1156E-17	0.0000E+00	-0.4086E-04	0.0000E+00
3	0.0000E+00	0.7385E-18	0.0000E+00	-0.3724E-03	0.0000E+00
4	0.0000E+00	0.1035E-17	0.0000E+00	0.4268E-09	0.0000E+00
5	0.0000E+00	0.9762E-18	0.0000E+00	0.3721E-03	0.0000E+00
6	0.0000E+00	0.1087E-17	0.0000E+00	0.4084E-04	0.0000E+00
7	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
8	0.0000E+00	0.1102E-17	0.0000E+00	0.1148E-03	0.0000E+00
9	-0.5331E-19	0.1035E-17	0.1805E-04	-0.2163E-02	-0.2522E-02
10	-0.6217E-20	0.9063E-18	0.8686E-04	-0.3734E-02	-0.1019E-01
11	0.7560E-20	0.1000E-17	0.1328E-03	0.3259E-07	-0.1454E-01
12	0.8797E-20	0.1085E-17	0.8686E-04	0.3734E-02	-0.1019E-01
13	0.2746E-19	0.1015E-17	0.1805E-04	0.2163E-02	-0.2522E-02

14	0.0000E+00	0.3444E-18	0.0000E+00	-0.1148E-03	0.0000E+00
15	0.0000E+00	0.2186E-17	0.0000E+00	-0.8264E-03	0.0000E+00
16	-0.2325E-19	0.9671E-18	0.5535E-04	-0.4921E-02	-0.2965E-02
17	0.3798E-20	0.1024E-17	0.2093E-03	0.8176E-02	-0.5579E-02
18	-0.1479E-20	0.9762E-18	0.3026E-03	0.1364E-06	-0.8346E-02
19	0.1467E-19	0.1118E-17	0.2093E-03	0.8176E-02	-0.5579E-02
20	0.1006E-19	0.1009E-17	0.5534E-04	0.4921E-02	-0.2964E-02
21	0.0000E+00	0.4460E-18	0.0000E+00	0.8260E-03	0.0000E+00
22	0.0000E+00	0.2917E-17	0.0000E+00	-0.2207E-02	0.0000E+00
23	0.1361E-20	0.8670E-18	0.7700E-04	-0.5628E-02	-0.2489E-06
24	0.2687E-20	0.1145E-17	0.2378E-03	0.9275E-02	-0.1831E-06
25	-0.2839E-24	0.9657E-18	0.3598E-03	0.2030E-06	-0.1049E-06
26	-0.2687E-20	0.1135E-17	0.2377E-03	0.9276E-02	0.2981E-07
27	-0.1361E-20	0.1006E-17	0.7699E-04	0.5627E-02	0.2318E-07
28	0.0000E+00	0.4904E-18	0.0000E+00	0.2207E-02	0.0000E+00
29	0.0000E+00	0.2186E-17	0.0000E+00	-0.8267E-03	0.0000E+00
30	0.2591E-19	0.9666E-18	0.5535E-04	-0.4921E-02	0.2965E-02
31	0.1038E-20	0.1023E-17	0.2093E-03	-0.8176E-02	0.5579E-02
32	0.1480E-20	0.9747E-18	0.3026E-03	0.2220E-06	0.8346E-02
33	-0.1951E-19	0.1117E-17	0.2093E-03	0.8176E-02	0.5579E-02
34	-0.1272E-19	0.1008E-17	0.5534E-04	0.4921E-02	0.2964E-02
35	0.0000E+00	0.4461E-18	0.0000E+00	0.8260E-03	0.0000E+00
36	0.0000E+00	0.1102E-17	0.0000E+00	0.1146E-03	0.0000E+00
37	0.5461E-19	0.1035E-17	0.1806E-04	-0.2163E-02	0.2522E-02
38	0.8486E-20	0.9045E-18	0.8686E-04	-0.3734E-02	0.1019E-01
39	-0.7561E-20	0.9975E-18	0.1328E-03	0.1097E-06	0.1454E-01
40	-0.1107E-19	0.1084E-17	0.8686E-04	0.3734E-02	0.1019E-01
41	-0.2876E-19	0.1015E-17	0.1805E-04	0.2163E-02	0.2522E-02
42	0.0000E+00	0.3445E-18	0.0000E+00	-0.1149E-03	0.0000E+00
43	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
44	0.0000E+00	0.1156E-17	0.0000E+00	-0.4086E-04	0.0000E+00
45	0.0000E+00	0.7385E-18	0.0000E+00	-0.3723E-03	0.0000E+00
46	0.0000E+00	0.1035E-17	0.0000E+00	-0.1997E-07	0.0000E+00
47	0.0000E+00	0.9762E-18	0.0000E+00	0.3721E-03	0.0000E+00
48	0.0000E+00	0.1087E-17	0.0000E+00	0.4085E-04	0.0000E+00
49	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

LAYER N°: M=1

ELEMENT N°: IELE=2

IPGS N°: IPGS=3

JPGS N°: JPGS=2

SIGMA_YY (MPa).....= 32.17122

TAU_YZ (MPa).....= 27.06595

ANNEXE 3

PROGRAMME DE PREDICTION DE LA FISSURATION DE LA MATRICE

```

SUBROUTINE Prediction (NPOIN,NDOFN,Nply,NELEM,NNODE)
implicit real*8(A-H,O-Z)
DIMENSION U(NDOFN,NPOIN),ID(NDOFN,NPOIN),TT(NN),Qbar(5,5),IND(100000)
DIMENSION CONT(20,5,500,3,3),SIGMA(20,5,500,3,3),SIGMA_M(20,5,500,3,3)
DATA pi/3.14159265359 /,Yt/55.20e6/,Yc/294e6/,ST/32.94e6/,SL/101.1e6/,Da/1.8/

      IEQNN=1
      DO 101 J=1,NPOIN
      DO 101 I=1,NDOFN
      U(I,J)=0.0
      IF(ID(I,J).EQ.0)GO TO 101
      U(I,J)=TT(IEQNN)
      IEQNN=IEQNN+1
01 CONTINUE
      REWIND 26
!FOR READ TETA AND Qbar
      DO 80 m=1,Nply
      REWIND 4
!FOR READ (IND(I),I=1,9)
      REWIND 27
!FOR READ IELE,IPGS,JPGS,((BO(I,J),I=1,8),J=1,45)
      READ(26,*)mm,teta,Zkm1,((Qbar(I,J),I=1,5),J=1,5)
      C=cos(teta*pi/180)

```

```

      S=sin(teta*pi/180)
!*****L O O P   T H R U   E L E M E N T
S*****
      DO 70 IELE=1,NELEM
!READ ELEMENT DATA
      READ(4,*)(IND(I),I=1,NNODE)
!CHOSE NO. OF GAUSS POINTS
      NPGS=3
!*****LOOP THRU GAUSS
POINTS*****
      DO 30 IPGS=1,NPGS
      DO 30 JPGS=1,NPGS
      READ(27,*)IELES,IPGSS,JPGSS,((BO(I,J),I=1,8),J=1,45)
!CALCULATE TOTAL STRAINS (DU PLAN MOYEN) FROM DISPLACEMENTS
      E(1)=BO(1,1)*U(1,IND(1))+BO(1,6)*U(1,IND(2))+BO(1,11)*U(1,IND(3))+BO(1,
16)*U(1,IND(4))+BO(1,21)*U(1,IND(5))+BO(1,26)*U(1,IND(6))+BO(1,31)*U(1,I
ND(7))+BO(1,36)*U(1,IND(8))+BO(1,41)*U(1,IND(9))
      E(2)=BO(2,2)*U(2,IND(1))+BO(2,7)*U(2,IND(2))+BO(2,12)*U(2,IND(3))+BO(2,
17)*U(2,IND(4))+BO(2,22)*U(2,IND(5))+BO(2,27)*U(2,IND(6))+BO(2,32)*U(2,I
ND(7))+BO(2,37)*U(2,IND(8))+BO(2,42)*U(2,IND(9))

      E(3)=BO(3,1)*U(1,IND(1))+BO(3,2)*U(2,IND(1))+BO(3,6)*U(1,IND(2))+BO(3,7)
*U(2,IND(2))+BO(3,11)*U(1,IND(3))+BO(3,12)*U(2,IND(3))+BO(3,16)*U(1,IND
(4))+BO(3,17)*U(2,IND(4))+BO(3,21)*U(1,IND(5))+BO(3,22)*U(2,IND(5))+BO(
3,26)*U(1,IND(6))+BO(3,27)*U(2,IND(6))+BO(3,31)*U(1,IND(7))+BO(3,32)*U(2
,IND(7))+BO(3,36)*U(1,IND(8))+BO(3,37)*U(2,IND(8))+BO(3,41)*U(1,IND(9))+
BO(3,42)*U(2,IND(9))

      E(4)=Bo(4,4)*U(4,IND(1))+BO(4,9)*U(4,IND(2))+BO(4,14)*U(4,IND(3))+BO(4,1
9)*U(4,IND(4))+BO(4,24)*U(4,IND(5))+BO(4,29)*U(4,IND(6))+BO(4,34)*U(4,IN
D(7))+BO(4,39)*U(4,IND(8))+BO(4,44)*U(4,IND(9))

      E(5)=BO(5,5)*U(5,IND(1))+BO(5,10)*U(5,IND(2))+BO(5,15)*U(5,IND(3))+BO(5

```

$$,20)*U(5,IND(4))+BO(5,25)*U(5,IND(5))+BO(5,30)*U(5,IND(6))+BO(5,35)*U(5,IND(7))+BO(5,40)*U(5,IND(8))+BO(5,45)*U(5,IND(9))$$

$$E(6)=BO(6,4)*U(4,IND(1))+BO(6,5)*U(5,IND(1))+BO(6,9)*U(4,IND(2))+BO(6,10)*U(5,IND(2))+BO(6,14)*U(4,IND(3))+BO(6,15)*U(5,IND(3))+BO(6,19)*U(4,IND(4))+BO(6,20)*U(5,IND(4))+BO(6,24)*U(4,IND(5))+BO(6,25)*U(5,IND(5))+BO(6,29)*U(4,IND(6))+BO(6,30)*U(5,IND(6))+BO(6,34)*U(4,IND(7))+BO(6,35)*U(5,IND(7))+BO(6,39)*U(4,IND(8))+BO(6,40)*U(5,IND(8))+BO(6,44)*U(4,IND(9))+BO(6,45)*U(5,IND(9))$$

$$E(7)=BO(7,3)*U(3,IND(1))+BO(7,4)*U(4,IND(1))+BO(7,8)*U(3,IND(2))+BO(7,9)*U(4,IND(2))+BO(7,13)*U(3,IND(3))+BO(7,14)*U(4,IND(3))+BO(7,18)*U(3,IND(4))+BO(7,19)*U(4,IND(4))+BO(7,23)*U(3,IND(5))+BO(7,24)*U(4,IND(5))+BO(7,28)*U(3,IND(6))+BO(7,29)*U(4,IND(6))+BO(7,33)*U(3,IND(7))+BO(7,34)*U(4,IND(7))+BO(7,38)*U(3,IND(8))+BO(7,39)*U(4,IND(8))+BO(7,43)*U(3,IND(9))+BO(7,44)*U(4,IND(9))$$

$$E(8)=BO(8,3)*U(3,IND(1))+BO(8,5)*U(5,IND(1))+BO(8,8)*U(3,IND(2))+BO(8,10)*U(5,IND(2))+BO(8,13)*U(3,IND(3))+BO(8,15)*U(5,IND(3))+BO(8,18)*U(3,IND(4))+BO(8,20)*U(5,IND(4))+BO(8,23)*U(3,IND(5))+BO(8,25)*U(5,IND(5))+BO(8,28)*U(3,IND(6))+BO(8,30)*U(5,IND(6))+BO(8,33)*U(3,IND(7))+BO(8,35)*U(5,IND(7))+BO(8,38)*U(3,IND(8))+BO(8,40)*U(5,IND(8))+BO(8,43)*U(3,IND(9))+BO(8,45)*U(5,IND(9))$$

!CALCULATE STRESSES FROM MECHANICAL (ELASTIC) STRAINS

DO I=1,5

SIGMA(M,I,IELE,IPGS,JPGS)=0

ENDDO

DO 50 K=1,6

Z=Zkm1-(K-1)*epaispli/5

!LES CONTRAINTES EXPRIMEES DANS LE REPERE GLOBALE (X,Y,Z)

CONT(M,1,IELE,IPGS,JPGS)=Qbar(1,1)*(E(1)+Z*E(4))+Qbar(1,2)*(E(2)+Z*E(5))+Qbar(1,3)*(E(3)+Z*E(6))

CONT(M,2,IELE,IPGS,JPGS)=Qbar(1,2)*(E(1)+Z*E(4))+Qbar(2,2)*(E(2)+Z*E(5))+Qbar(2,3)*(E(3)+Z*E(6))

$$\text{CONT}(M,3,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})=\text{Qbar}(3,1)*(E(1)+Z*E(4))+\text{Qbar}(3,2)*(E(2)+Z*E(5)) \\ +\text{Qbar}(3,3)*(E(3)+Z*E(6))$$

!POUR UN MATERIAU ORTHOTROPE

$$\text{CONT}(M,4,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})=\text{Qbar}(5,5)*E(7)$$

$$\text{CONT}(M,5,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})=\text{Qbar}(4,4)*E(8)$$

!LES CONTRAINTES EXPRIMEES DANS LE REPERE LOCALE (1,2,3)

$$\text{SIGMA}(M,1,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})=\text{SIGMA}(M,1,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})+((C**2)*\text{CONT}(\\ M,1,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})+(S**2)*\text{CONT}(M,2,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})+2*(C*S)*\text{CONT}(M, \\ 3,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS}))$$

$$\text{SIGMA}(M,2,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})=\text{SIGMA}(M,2,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})+((S**2)*\text{CONT}(\\ M,1,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})+(C**2)*\text{CONT}(M,2,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})- \\ 2*(C*S)*\text{CONT}(M,3,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS}))$$

$$\text{SIGMA}(M,3,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})=\text{SIGMA}(M,3,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})+((- \\ C*S)*\text{CONT}(M,1,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})+(C*S)*\text{CONT}(M,2,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})+(C**2- \\ S**2)*\text{CONT}(M,3,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS}))$$

$$\text{SIGMA}(M,4,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})=\text{SIGMA}(M,4,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})+(S*\text{CONT}(M,5,\text{IE} \\ \text{LE},\text{IPGS},\text{JPGS})+C*\text{CONT}(M,4,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS}))$$

50

$$\text{SIGMA}(M,5,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})=\text{SIGMA}(M,5,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})+(C*\text{CONT}(M,5,\text{I} \\ \text{ELE},\text{IPGS},\text{JPGS})-S*\text{CONT}(M,4,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS}))$$

!CONTRAINTES MOYENNES

$$\text{SIGMA_M}(M,1,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})=\text{SIGMA}(M,1,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})/6$$

$$\text{SIGMA_M}(M,2,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})=\text{SIGMA}(M,2,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})/6$$

$$\text{SIGMA_M}(M,3,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})=\text{SIGMA}(M,3,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})/6$$

$$\text{SIGMA_M}(M,4,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})=\text{SIGMA}(M,4,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})/6$$

$$\text{SIGMA_M}(M,5,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})=\text{SIGMA}(M,5,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})/6$$

!MATRIX CRACKING CRITERION

$$\text{IF}(\text{SIGMA_M}(M,2,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS}).\text{GE}.0) \text{ Y}=\text{Yt}$$

$$\text{IF}(\text{SIGMA_M}(M,2,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS}).\text{LT}.0) \text{ Y}=\text{Yc}$$

$$\text{em}=\text{SQRT}(((\text{SIGMA_M}(M,2,\text{IELE},\text{IPGS},\text{JPGS})/\text{Y})**2)+((\text{SIGMA_M}(M,5,\text{IELE},\text{IP} \\ \text{GS},\text{JPGS})/\text{ST})**2))$$

```
IF(em.LT.1) GOTO 30
IF(em.GE.1) THEN
WRITE(*,*) 'M=',M,'IELE=',IELE,'IPGS=',IPGS,'JPGS=',JPGS
ENDIF

30 CONTINUE
70 CONTINUE
80 CONTINUE

150 format(/5X,47hIMPACT DURATION      ta  (Microsec)..=,F10.3)
160 format(/5X,47hCONTACT FORCE      Fc  (N).....=,F10.3)
170 format(/5X,47hCENTRAL DEFLECTION  Ws  (M).....=,E10.5)
180 format(/5X,47hLAYER N°:          M   .....=,I10)
190 format(/5X,47hELEMENT N°:        IELE .....=,I10)
200 format(/5X,47hIPGS N°:           IPGS .....=,I10)
210 format(/5X,47hJPGS N°:           JPGS .....=,I10)
220 format(/5X,47hSIGMA_YY           (MPa).....=,F10.5)
230 format(/5X,47hTAU_YZ             (MPa).....=,F10.5)
2000 format(///,' DISPLACEMENTS
'//,17X,'U',11X,'V',11X,'W',9X,'TETAX',7X,'TETAY'/)
RETURN
END
```