

P0005/05A

République Algérienne démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique

Ecole nationale Polytechnique



وزارة التعليم العالي
و البحث العلمي
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

Département d'électronique

PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du diplôme

D'ingénieur d'état en électronique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Thème

Etude des antennes filaires par la méthode des moments

Travail réalisé par :

Abdelaziz BOUZEGZI
Sofiane BRACI

Proposé et dirigé par :

Dr A. MOKRAOUI
Pr R. AKSAS

Promotion : Juin 2005

*Laboratoire des Télécommunications
Ecole Nationale Polytechnique 10, Avenue Hassen Badi BP182 El-Harrach
16200 Alger (Algérie)*

العنوان: دراسة هوائية خيطية بطريقة العزوم

الملخص: هذا العمل يعنى بتطبيق نموذج رقمي مبني على طريقة العزوم لدراسة هوائية خيطية. بعد برمجة الطريقة الكلاسيكية لحل المعادلات التكاملية للحقل الكهربائي، لاحظنا ان هذه الطريقة تتميز بعدة نقائص سببها الفرضيات المتعلقة بنواة المعادلات التكاملية. لغرض تجاوز هذه النقائص ارتأينا استعمال شكل آخر للنواة، لكن لاحظنا أن هذه الطريقة رغم النتائج الايجابية تتميز بزمن حساب طويل. اقترحنا ان طريقة هجينة أثبتت نجاعتها في دقة النتائج و سرعة الحساب. النتائج الافتراضية الناتجة عن استعمال البرنامج SNEC كانت في توافق كلي مع نتائج برمجتنا المحققة.

الكلمات الأساسية: هوائية خيطية، طريقة العزوم، التيار الكهربائي، النواة الدقيقة.

Titre : Etude des antennes filaire par la méthode des moments.

Résumé : L'objet de cette étude est l'application d'un modèle numérique basé sur la méthode des moments pour l'analyse des structures rayonnantes de type filaire. Nous avons mis à découvert quelques imperfections de l'implémentation classique des équations intégrales du champ électromagnétique. Une autre formulation du problème à été entreprise avec l'utilisation d'une forme exacte du noyau de l'équation intégrale. Confrontés à un temps de calcul important, nous avons proposé une méthode hybride qui réunit précision et vitesse d'exécution. Les simulations obtenues à l'aide du logiciel SNEC sont en parfaite concordance avec les résultats de nos implémentations.

Mots clé : Antenne filaire, équation intégrale du champ électrique, Pocklington, Hallén, méthode des moments, distribution du courant, noyau exact.

Title : Wire antennas analysis based on method of moments.

Abstract :

The full wave analysis of the wire antenna's electrical characteristics is based on the integral equation formulation. The moments method will solve this equation in the spectral domain. The two kernels are usually referred to us the exact and the approximate or reduced kernel. Some shortcomings of the use of moments method procedures with the approximate kernel to solve integral equation for thin wire structures are discussed. The use of the exact kernel formulation needs a long computing time. Therefore, we will present a clover way of computing using a fast hybrid method.

Keywords : Dipole Antennas, Cylindrical Antennas, Method of moment, Pocklington, Hallen Current distribution , Exact kernel

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire des télécommunications du département d'électronique de l'Ecole Nationale Polytechnique, sous la direction de Pr R. AKSAS (Professeur l' E.N.P)

Nous tenons à lui exprimer nos plus sincères remerciements pour ses précieux conseils, son aide et sa patience tout au long de ce travail.

Nous exprimons notre plus sincère gratitude au Dr A. MOKRAOUI, pour son aide et sa disponibilité et qui a rendu possible l'entreprise de ce travail.

Un vif remerciement revient à Dr M. TRABELSI pour l'aide qu'il nous a offert.

Nous tenons à remercier tous nos amis et camarades pour toute leur sincère amitié le long de cinq années d'études.

TABLE DES MATIERES

Liste des symboles.....	5
Introduction.....	7

Chapitre 1 Généralités

1.1 Les antennes filaires.....	11
1.2 Les caractéristiques du champ.....	11
1.2.1 Zones de rayonnement.....	12
1.2.2 Caractéristiques du champ lointain.....	12
1.2.3 Polarisation de l'onde rayonnée.....	13
1.3 Impédance d'entrée.....	14
1.4 Distribution du courant sur une antenne dipôle.....	15
1.5 Méthodes d'analyse.....	17
1.5.1 Méthode des différences finies.....	17
1.5.2 Méthode variationnelle.....	17
1.5.3 Méthode des éléments finis.....	17
1.5.4 Méthode des moments.....	18
1.5.5 Méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD).....	18
1.5.6 Méthode de la f.e.m induite.....	18
1.6 Choix de la méthode.....	18

Bibliographie du chapitre 1

Chapitre 2 Implémentation classique de la méthode des moments

2.1 Formulation de l'équation intégrale.....	23
2.1.1 Le champ électrique généré par une source.....	23
2.1.2 Equation integro-différentielle de Pocklington.....	25
2.1.3 Equation intégrale de Hallén.....	27
Conclusion.....	28
2.2 Méthode des moments.....	29
2.2.1 Les fonctions de base / test.....	31
2.2.1.1 Fonctions à intervalles séparés (Subdomain functions).....	31
2.2.1.2 Fonctions sur domaine entier (Entire domain functions).....	34
2.2.1.3 Choix du type de fonctions.....	34
2.2.2 Modélisation de la source d'excitation.....	34
2.2.2.1 La fente infinitésimale ou «Delta Gap».....	34
2.2.2.2 La boucle magnétique ou «Magnetic Frill».....	35
2.3 Implémentation.....	36
2.3.1 Choix de l'environnement de développement.....	36
2.3.2 Implémentation de l'équation de Hallén.....	36
2.3.3 Implémentation de l'équation de Pocklington.....	37
2.3.4 Comparaison préliminaire des équations intégrales.....	38

2.4 Validation sur le logiciel SNEC.....	47
2.4.1 Le courant	47
2.4.2 Impédance d'entrée et bande passante	47

Conclusion

Bibliographie du chapitre 2

Chapitre 3 Autres approches pour l'application du noyau

3.1 Études des différentes formes du noyau.....	53
3.2 Implémentation des trois formes du noyau	54
3.2.1 Description des graphes.....	56
3.2.2 Interprétation des résultats	56
3.2.3 Conclusion	56
3.3 Implémentation de la formule exacte du noyau appliquée à l'équation intégrale Pocklington	56
3.3.1 Description des graphes	58
3.3.2 Interprétation des résultats.....	58
3.3.3 Conclusion.....	58
3.4 Implémentation de la méthode hybride	58
3.4.1 Description des graphes.....	60
3.4.2 Interprétation des résultats	60
3.4.3 Conclusion.....	60

Bibliographie du chapitre 3

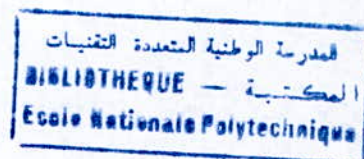
Chapitre 4 Couplage inter-éléments

4.1 Introduction.....	63
4.2 Le champ proche d'une antenne filaire.....	63
4.3 Impédance propre et impédance mutuelle.....	66
4.4 Formulation de l'équation de Hallén pour les dipôles parallèles.....	68
4.4.1 Implémentation	70
4.4.2 Application.....	71
4.4.3 Champ lointain	72
4.5 L'impédance mutuelle par la méthode des moments	73
4.5.1 Discussions.....	76
4.5.2 Conclusion.....	76
4.6 Application : Antenne YAGI-UDA	77
4.6.1 Introduction.....	77
4.6.2 Conception.....	77
4.6.3 Etude des caractéristiques d'une antenne Yagi-Uda.....	78
4.6.3.1 Distribution du courant.....	78
4.6.3.2 Diagramme de rayonnement.....	79
4.6.3.2 La bande passante.....	80

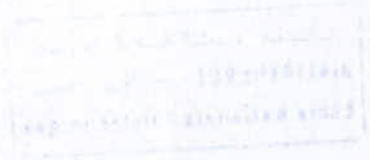
Bibliographie du chapitre 4

ANNEXE

Liste des symboles



ω	Pulsation de l'onde.
λ	Longueur d'onde.
c	Célérité de la lumière dans le vide.
k	Nombre d'onde.
ε_0	Permittivité du vide.
ε	Permittivité du milieu considéré.
ε_r	Permittivité relative du substrat.
μ	Perméabilité du milieu considéré.
η	Impédance d'onde du milieu.
σ	Conductivité du milieu considéré.
l	Longueur de l'antenne filaire.
a	Rayon de l'antenne filaire.
N	Nombre de fonctions de bases.
q	Ordre de sommation de l'expression de Wang.
Z_{mn}	Matrice impédance.
V_m	Vecteur tension.
I_n	Vecteur courant.
Z_{in}	Impédance d'entrée
I_z	Courant axiale suivant z.
I_{in}	Courant au point d'excitation de l'antenne.
J_ν	Fonction de <i>Bessel</i> d'ordre ν .
j_ν	Fonction sphérique de <i>Bessel</i> d'ordre ν .
$h_\nu^{(2)}$	Fonction de <i>Hankel</i> sphérique du deuxième rang d'ordre ν .
\vec{A}	Potentiel vecteur magnétique.
\vec{H}	Champ magnétique.
\vec{B}	Flux magnétique.
\vec{E}	Champ électrique.
Φ_e	Potentiel électrique.
\vec{E}^i	Champ électrique incident.
\vec{E}^s	Champ électrique diffracté.
\vec{J}_s	Densité du courant sur la surface de l'antenne.
ρ	Distance radiale du point de l'excitation vers le point de l'observation.
M_f	Densité du courant magnétique équivalent.
Δ_i	Largeur de la fente infinitésimale.
d	Distance horizontale entre deux dipôles couplés.
h	Distance verticale entre deux dipôles couplés.



Liste des symboles

a	Paramètres du fond
b	Paramètre de bord
c	Écart de la lamelle dans le vide
d	Norme d'ordre
e	Paramètre de l'ordre
f	Paramètres du milieu condensé
g	Paramètres de l'ordre du substrat
h	Paramètre de l'ordre du substrat
i	Impédance d'ordre du milieu
j	Conductivité du milieu condensé
k	Longueur de l'anneau fermé
l	Résonance de l'anneau fermé
m	Norme de l'ordre du substrat
n	Liste de composition de l'expression de W_{eff}
o	Paramètre d'ordre
p	Vecteur d'onde
q	Vecteur d'onde
r	Impédance d'ordre
s	Constante relative aux milieux
t	Constante au point d'excitation de l'anneau
u	Longueur de l'anneau d'ordre
v	Norme d'ordre du substrat
w	Norme d'ordre du substrat
x	Norme d'ordre du substrat
y	Norme d'ordre du substrat
z	Norme d'ordre du substrat
A	Norme d'ordre du substrat
B	Norme d'ordre du substrat
C	Norme d'ordre du substrat
D	Norme d'ordre du substrat
E	Norme d'ordre du substrat
F	Norme d'ordre du substrat
G	Norme d'ordre du substrat
H	Norme d'ordre du substrat
I	Norme d'ordre du substrat
J	Norme d'ordre du substrat
K	Norme d'ordre du substrat
L	Norme d'ordre du substrat
M	Norme d'ordre du substrat
N	Norme d'ordre du substrat
O	Norme d'ordre du substrat
P	Norme d'ordre du substrat
Q	Norme d'ordre du substrat
R	Norme d'ordre du substrat
S	Norme d'ordre du substrat
T	Norme d'ordre du substrat
U	Norme d'ordre du substrat
V	Norme d'ordre du substrat
W	Norme d'ordre du substrat
X	Norme d'ordre du substrat
Y	Norme d'ordre du substrat
Z	Norme d'ordre du substrat

Introduction

Les premiers travaux théoriques sur le rayonnement et la propagation des ondes électromagnétiques ont été accompagnés par l'expérimentation afin d'optimiser les caractéristiques des structures rayonnantes.

Néanmoins, l'étude théorique de structures de plus en plus complexes a conduit à une conception fondée essentiellement sur l'expérimentation. Dans le but de réduire la durée et le coût de conception, de nombreux modèles numériques ont été développés. L'avènement d'outils de calcul performants a encouragé cette tendance.

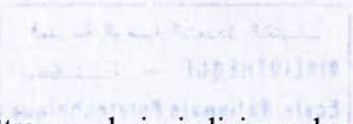
Dans cette optique, la méthode des moments constitue un outil puissant pour l'analyse de plusieurs types d'antennes. Ce travail portera sur l'application de cette méthode à des antennes filaires

Dans un premier lieu, quelques notions fondamentales sur la théorie des antennes seront présentées ainsi que les différentes techniques numériques appliquées dans ce domaine. Nous justifions le choix de la méthode utilisée en procédant à une comparaison entre les différentes techniques usuelles.

Dans le deuxième chapitre, et après avoir formulé les équations intégrales (Hallén et Pocklington) nous nous intéresserons à leur résolution en employant la méthode des moments.

L'implémentation de cette résolution sera effectuée avec plusieurs configurations de fonctions de base et de modèles de sources en adoptant quelques approximations afin de réduire la complexité numérique liée à la résolution du problème.

Une autre implémentation du problème sera exposée au chapitre 3. Nous mettrons l'accent sur les différentes expressions du noyau de convolution de l'équation intégrale. Une étude comparative



permettra un choix judicieux des expressions à implémenter selon la configuration à étudier. Nous proposerons alors une méthode hybride qui rassemble précision et rapidité de calcul.

Enfin, nous utiliserons la méthode des moments pour analyser tout un ensemble de structures rayonnantes en tenant compte du couplage dû à l'effet de proximité. En considérant plusieurs structures rayonnantes (alignements), nous avons constaté la capacité de la méthode des moments à prévoir l'aspect avantageux des caractéristiques obtenues à comparer avec celles des antennes isolées. L'antenne Yagi-Uda représente un cas particulier pouvant être analysé par notre technique. Les résultats obtenus grâce à notre implémentation sont confrontés avec ceux issus du logiciel SNEC.

Dans cette optique, la méthode des moments constitue un outil puissant pour l'analyse de plusieurs types d'antennes. Ce travail porte sur l'application de cette méthode à des antennes

Il est à noter que les différentes techniques numériques appliquées dans ce travail. Nous présentons ainsi que les différentes techniques numériques appliquées dans ce travail. Nous présentons ainsi que les différentes techniques numériques appliquées dans ce travail.

Dans le chapitre suivant, nous présentons les résultats obtenus pour les antennes étudiées. Nous présentons ainsi que les différentes techniques numériques appliquées dans ce travail. Nous présentons ainsi que les différentes techniques numériques appliquées dans ce travail.

Une autre implémentation du problème sera exposée au chapitre 3. Nous présentons ainsi que les différentes techniques numériques appliquées dans ce travail. Nous présentons ainsi que les différentes techniques numériques appliquées dans ce travail.

Chapitre 1

Généralités

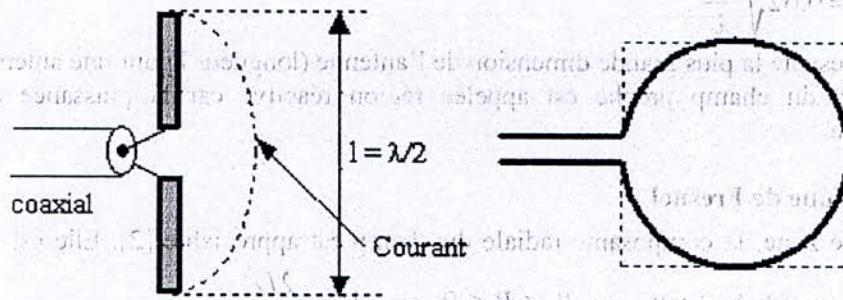
Ce chapitre est destiné à nous familiariser avec les antennes filaires, pour lesquelles nous décrirons quelques caractéristiques de rayonnement telle que la zone de rayonnement, le champ lointain et la polarisation. Un paragraphe sera consacré à l'impédance d'entrée des antennes filaires. Nous exposerons le passage d'une ligne de transmission à une antenne dipôle et la distribution théorique du courant. Nous présenterons par la suite les différentes méthodes d'analyse des antennes, on citera les avantages et les inconvénients. En conclusion, on justifiera les raisons qui ont motivé notre choix de *la méthode des moments*.

Chapitre 1 Généralités

Ce chapitre est destiné à nous familiariser avec les antennes filaires, pour lesquelles nous dérivons quelques caractéristiques de rayonnement telle que la zone de rayonnement, le champ lointain et la radiation. Un paragraphe sera consacré à l'importance d'entrée des antennes filaires. Nous exposons et passons à l'étude de la transmission à une antenne dipôle et la distribution des courants. Nous présentons par la suite les différentes méthodes d'analyse des antennes filaires, les avantages et les inconvénients de chacune, on présentera les raisons qui ont motivé leur choix. On verra également les méthodes de mesure.

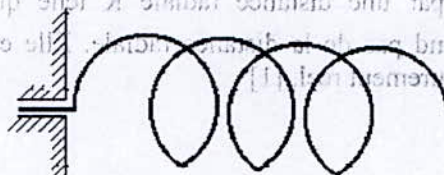
1.1 Les antennes filaires

Les antennes filaires sont des structures rayonnantes couramment utilisées dans diverses applications telles que : la téléphonie, la télémétrie et la télévision. Elles peuvent facilement être embarquées dans des unités mobiles, sur des avions, à bord de navires ou d'automobiles. Elles sont constituées d'un conducteur ou d'un groupement de conducteurs qui peuvent avoir plusieurs formes, dont par exemple : antenne dipôle, antenne cadre circulaire et antenne hélice (figure 1.1), [2]



(a) Dipôle demi onde

(b) Antenne cadre circulaire



(c) Antenne hélice

Figure 1.1 antennes filaires [1]

1.2 Les caractéristiques du champ

Considérons le cas d'une antenne filaire rectiligne de longueur l orientée le long de l'axe Z , centrée à l'origine O des coordonnées (figure 1.2).

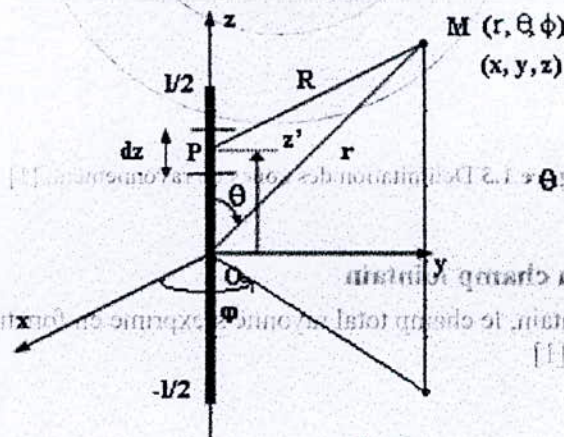


Figure 1.2 antenne filaire rectiligne.

1.2.1 Zones de rayonnement

L'espace entourant l'antenne est subdivisé de trois régions distinctes (figure 1.3) :

1.2.1.1 Région du champ proche (zone réactive)

C'est la région entourant la source de rayonnement. Elle est délimitée par une sphère de

$$\text{rayon } R_1 = 0.62 \sqrt{\frac{D^3}{\lambda}}$$

où D représente la plus grande dimension de l'antenne (longueur l pour une antenne filaire).

La région du champ proche est appelée région réactive car la puissance est purement imaginaire.

1.2.1.2 Zone de Fresnel

Dans cette zone, la composante radiale du champ est appréciable [2]. Elle est délimitée par

$$\text{une distance radiale } R \text{ telle que } R_1 \leq R \leq R_2 \text{ avec } R_2 = \frac{2D^2}{\lambda}$$

1.2.1.3 Région du champ lointain (zone de Fraunhofer)

C'est la région définie par une distance radiale R telle que $R \geq R_2$. Dans cette zone, la puissance totale ne dépend pas de la distance radiale. Elle est entièrement rayonnée car le vecteur de Poynting est purement réel. [1]

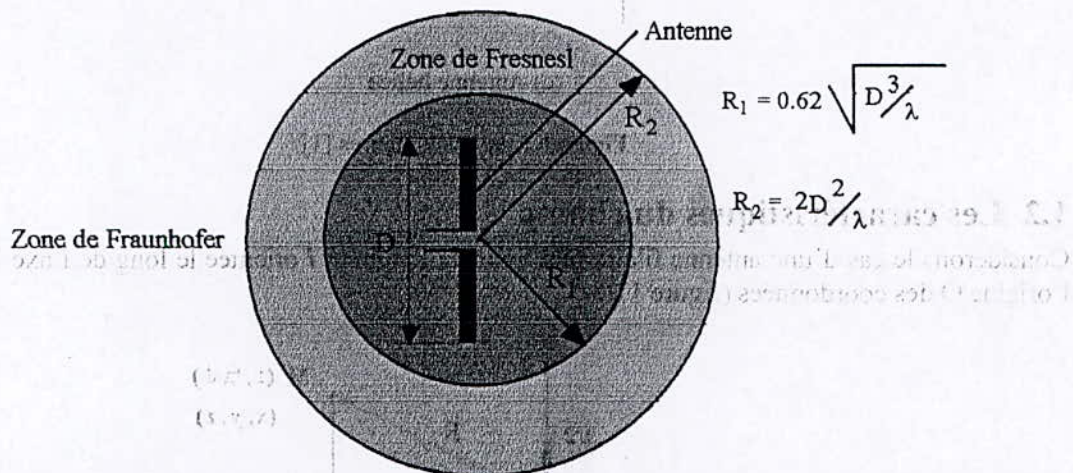


Figure 1.3 Délimitation des zones de rayonnement. [1]

1.2.2 Caractéristiques du champ lointain

Dans la région du champ lointain, le champ total rayonné s'exprime en fonction des sources d'excitations sous la forme : [1]

$$\vec{E} = \frac{jk}{4\pi} \Psi(r) \iiint_{V'} \left\{ \left[\eta(\mathbf{J}_e \wedge \hat{r}) - \vec{J}_m \right] \wedge \hat{r} e^{jk\hat{r} \cdot \mathbf{r}'} \right\} dv' \quad (1.1)$$

$$\vec{H} = \frac{jk}{4\pi} \Psi(r) \iiint_{V'} \left\{ \left[\eta^{-1} (\vec{J}_m \wedge \hat{r}) + \vec{J}_e \right] \wedge \hat{r} e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} \right\} dv' \quad (1.2)$$

Dans cette région, le champ électromagnétique présente une *structure d'onde TEM* par rapport à la direction radiale, ce qui se traduit par

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} (\hat{r} \wedge \vec{E}) \quad (1.3)$$

Dans ces conditions, la valeur moyenne du vecteur de Poynting s'écrit sous la forme

$$\vec{W}_{\text{moy}} = \frac{1}{2} (\vec{E} \wedge \vec{H}^*) = \frac{1}{2\eta} |\vec{E}|^2 \hat{r} = \frac{\eta}{2} |\vec{H}|^2 \hat{r} \quad (1.4)$$

$\psi(r) = \frac{e^{-jk r}}{r}$ est la fonction de *Green* en espace libre.

$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ représente l'impédance d'onde en espace libre.

1.2.3 Polarisation de l'onde rayonnée

La polarisation d'une onde représente la courbe décrite dans le temps par l'extrémité du champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ lorsqu'il varie dans le temps. La polarisation est aussi une caractéristique du champ lointain (structure TEM). Dans le cas d'une onde plane se propageant le long de l'axe z, les composantes du champ électrique \vec{E} de l'onde s'écrivent généralement [1] sous la forme

$$\begin{cases} E_x = E_{x_0} \cos(\omega t \pm kz + \varphi_x) \\ E_y = E_{y_0} \cos(\omega t \pm kz + \varphi_y) \end{cases} \quad (1.5)$$

Expressions valables quelque soit la valeur de la variable z, en prenant z = 0 l'expression (1.5) donne

$$\left(\frac{E_x}{E_{x_0}} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y_0}} \right)^2 - \left(\frac{E_x E_y}{E_{x_0} E_{y_0}} \right) \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi \quad (1.6)$$

où $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$

On distingue trois cas possibles de polarisation :

1. $\Delta\varphi = n\pi$ (multiple pair de $\frac{\pi}{2}$), la *polarisation est dite linéaire*. Les polarisations linéaires

usuellement utilisées sont de type horizontales ou verticales.

2. $\Delta\varphi = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ (multiple impair de $\frac{\pi}{2}$) et $E_{x_0} = E_{y_0}$, la *polarisation est alors circulaire*. Dans le

cas de la radiodiffusion, les émetteurs utilisent des antennes à polarisation circulaire dans le plan horizontal.

3. $\Delta\varphi = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ (multiple impair de $\frac{\pi}{2}$) et $E_{x_0} \neq E_{y_0}$, la polarisation est dite elliptique centrée.

1.3 Impédance d'entrée

L'impédance d'entrée d'une antenne caractérise la charge présentée par cette antenne au circuit d'excitation. L'antenne est alors modélisée par un dipôle électrique au sens de la théorie des circuits. On exprime l'impédance d'entrée sous la forme

$$Z_{in} = R_m + jX_m \quad (1.7)$$

où R_m et X_m représentent respectivement la résistance et la réactance de l'antenne (figure 1.4).

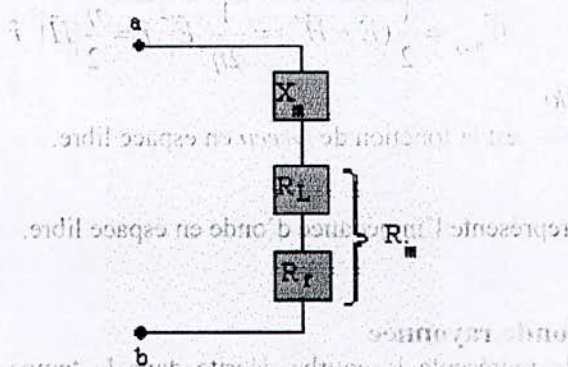


Figure 1.4 schéma représentant la résistance et la réactance d'une antenne

La partie résistive R_m peut être décomposée en une résistance R_L dite de perte et une résistance R_r dite résistance de rayonnement. La résistance d'entrée s'écrit donc

$$R_m = R_r + R_L \quad (1.8)$$

La résistance R_r est une caractéristique du champ lointain, alors que la résistance R_L représente les pertes électriques et diélectriques éventuelles.

La partie imaginaire de l'impédance d'entrée, représente l'énergie réactive contenue dans le champ proche. Ce paramètre est indésirable, on a donc intérêt à l'éliminer. On obtient dans le cas des dipôles ce qu'on appelle des *antennes résonantes*.

Le transfert maximum de puissance de l'émetteur vers l'antenne d'émission (réciproquement de l'antenne de réception vers le récepteur) exige une adaptation d'impédance entre les deux dispositifs. Un récepteur présente généralement, une impédance d'entrée purement réelle. Dans le cas contraire, des circuits d'adaptation permettant de compenser la réactance de l'antenne sont nécessaires. Ce type de circuits présente l'inconvénient de ne permettre l'adaptation que sur une bande de fréquence étroite.

Le calcul de l'impédance d'entrée d'une antenne est généralement complexe. Seules certaines structures rayonnantes simples peuvent être abordées analytiquement. Pour des antennes à géométrie complexe, l'impédance d'entrée est déterminée expérimentalement ou à l'aide de simulateurs perfectionnés.

Le calcul de la résistance d'entrée du dipôle électrique de longueur l finie de la figure 1.2, se fait comme suit

La répartition du courant dans la portion de la ligne de transmission qui se trouve à l'intérieur de la région du champ lointain est telle que les champs rayonnés par les deux conducteurs se compensent. La ligne de transmission est donc parfaite et ne rayonne pas. [2]

1- Dans la région du champ lointain la valeur moyenne du vecteur de Poynting

et les deux conducteurs sont séparés dans la région $z \in [0, \infty[$, de manière à ce qu'ils deviennent une ligne de transmission ouverte. On obtient un dipôle élémentaire en joignant les deux conducteurs par un fil. La distribution du courant qui est effective dans la portion de la ligne de transmission qui est effective est telle que les champs rayonnés par les deux conducteurs se compensent. La ligne de transmission est donc parfaite et ne rayonne pas. [2]

$$\vec{W}_{\text{moy}} = \frac{1}{2} (\vec{E} \wedge \vec{H}^*) = \frac{1}{2\eta} \|\vec{E}\|^2 \hat{r} \quad (1.9)$$

2- L'intensité de rayonnement est définie par l'équation

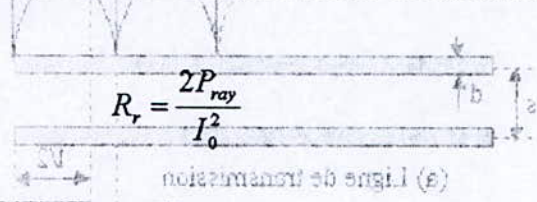
La répartition du courant dans la portion de la ligne de transmission qui est effective est telle que les champs rayonnés par les deux conducteurs se compensent. La ligne de transmission est donc parfaite et ne rayonne pas. [2]

$$U(\theta, \phi) = U(\theta) = r^2 \vec{W}_{\text{moy}} \cdot \hat{r} \quad (1.10)$$

3- La puissance rayonnée dans ces conditions est définie par la relation :

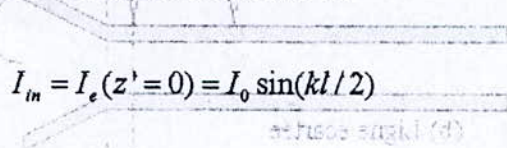
$$P_{\text{ray}} = \frac{\eta}{8\pi^2} I_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f^2(\theta) \sin\theta d\theta d\phi \quad (1.11)$$

4- A partir de la puissance rayonnée on déduit alors la résistance de rayonnement par



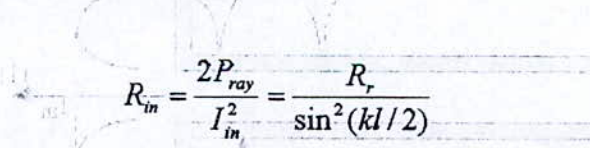
$$R_r = \frac{2P_{\text{ray}}}{I_0^2} \quad (1.12)$$

Sachant que le courant au point d'excitation de l'antenne est



$$I_{in} = I_e(z'=0) = I_0 \sin(kl/2) \quad (1.13)$$

La résistance d'entrée de l'antenne vaut alors



$$R_{in} = \frac{2P_{\text{ray}}}{I_{in}^2} = \frac{R_r}{\sin^2(kl/2)} \quad (1.14)$$

Ces résultats supposent bien sûr une distribution de courant sinusoïdal le long de l'antenne.

1.4 Distribution du courant sur une antenne dipôle

Considérons une ligne de transmission ouverte supposée sans pertes (Fig. 1.5.a). Le mouvement des charges crée un courant incident d'amplitude $I_0/2$ sur chacun des deux conducteurs de cette ligne. Au niveau du circuit ouvert, ce courant subit une réflexion totale et on obtient un courant réfléchi d'amplitude égale, mais en opposition de phase par rapport au courant incident. La combinaison de l'onde incidente et de l'onde réfléchie engendre alors une onde stationnaire de type sinusoïdal sur chaque conducteur. Puisque la ligne est symétrique et que l'espacement S entre les deux conducteurs est très inférieur à la longueur d'onde ($\lambda \ll S$), les champs rayonnés par les deux conducteurs se compensent. La ligne de transmission considérée est donc parfaite et ne rayonne pas. [2]

L'écartement de la ligne dans la portion $z \in [0, l/2]$ (Fig. 1.5.b), change la distribution du courant et les champs rayonnés par les deux conducteurs ne se compensent plus. La ligne commence alors à rayonner au niveau de cette portion.

Si les deux conducteurs sont écartés dans la région $z \in [0, l/2]$, de manière à ce qu'ils deviennent verticaux, on obtient un *dipôle électrique rectiligne*. Dans ce cas on remarque clairement que la partie de la distribution du courant qui était sur la portion de la ligne de transmission où s'est effectué l'écartement, change de position pour se mettre sur le dipôle (Fig. 1.5.c).

Si le rayon 'a' des conducteurs est très faibles ($a \ll \lambda$), la distribution du courant le long du dipôle est sinusoïdale. Elle est toujours nulle aux extrémités ouvertes (impédance infinie). La forme de cette distribution dépend de la longueur de chaque bras du dipôle. Pour un dipôle centré (alimentation symétrique), la figure 1.6 illustre la distribution du courant pour cinq valeurs de la longueur l du dipôle. Pour un dipôle de longueur $l < \lambda/50$ (doublet de Hertz), le courant est pratiquement constant le long du conducteur (Fig. 1.6.a). Pour un dipôle de faible longueur (généralement $\lambda/50 < l < \lambda/10$), on peut utiliser l'approximation ($\sin(kl/2) \cong kl/2$) et la forme de la distribution du courant (Fig. 1.6.b) le long du dipôle devient linéaire.

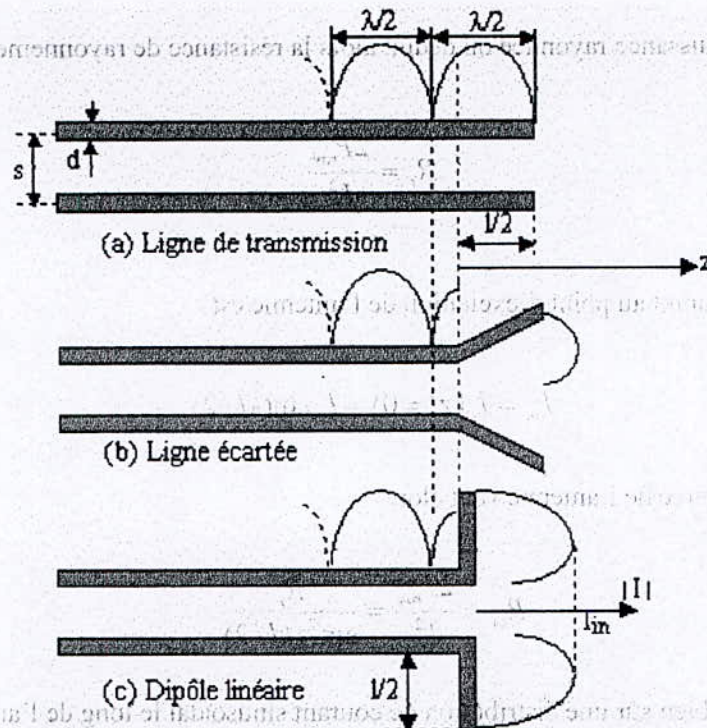


Figure 1.5 distribution spatiale du courant. [1]

À cause de la variation spatiale cyclique [2], la variation de la distribution du courant, pour un dipôle de longueur l supérieur à la longueur d'onde λ (Fig. 1.6.e), subit un saut de phase de 180° . La phase au niveau des deux bras du dipôle n'est plus la même et les champs rayonnés ne se renforcent plus et on obtient alors des directions de rayonnement nul au niveau du diagramme de rayonnement.

éléments appelés témoins. Une fois le circuit ainsi possible de trouver les fonctions avec plus de précision et d'implémenter le programme d'analyse avec des algorithmes.

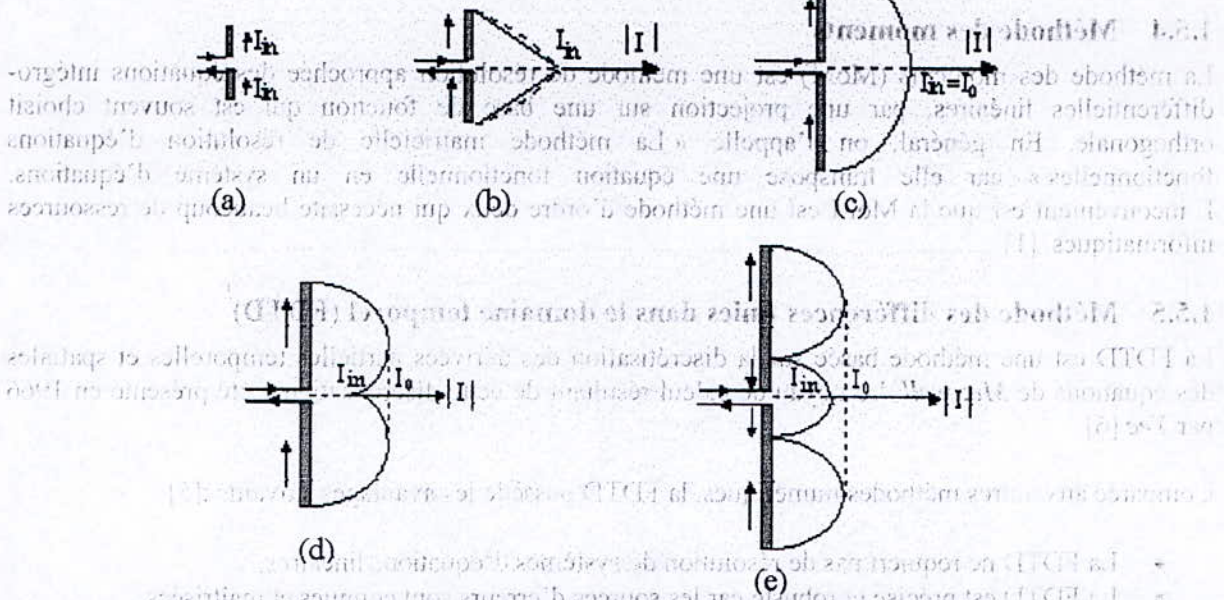


Figure 1.6 distributions du courant le long de dipôles de différentes longueurs.

Si le diamètre 'a' des deux conducteurs est très faible ($\lambda \gg a$), la distribution du courant le long du dipôle est exprimée avec une bonne approximation pour une fonction sinusoïdale donne une valeur nulle aux deux extrémités.

1.5 Méthodes d'analyse

Dans le but de rendre possible la résolution et l'implémentation de certaines équations, il est nécessaire de faire appel aux différentes méthodes d'analyse, dont certaines seront présentées dans ce qui suit :

1.5.1 Méthode des différences finies

Le principe de cette méthode consiste à remplacer les dérivées impliquées dans les différentes équations différentielles de *Maxwell* régissant le problème du rayonnement, par une approximation utilisant les *différences finies*. Elle permet de faciliter et de réduire le temps de traitement numérique des équations, grâce à la discrétisation des variables continues. [3]

1.5.2 Méthode variationnelle

L'approche variationnelle a été proposée en 1979 par *Uzunoglu*. Son étude porte sur un dipôle horizontal. Cette étude repose sur deux étapes principales :[4]

- la dérivation des fonctions de green exactes.
- L'utilisation d'une distribution de courant présumée afin de déterminer une expression variationnelle de l'impédance d'entrée.

L'approche de *Rayleigh-Ritz* est le fruit des travaux du *Lord Rayleigh* en 1870 et *Ritz* en 1909. Elle consiste à faire une approximation des fonctions par des combinaisons linéaires de fonction connues. [3]

1.5.3 Méthode des éléments finis

Initialement, la *méthode des éléments finis* était utilisée dans le domaine de la mécanique et du génie civil, puis, son utilisation a été étendue au domaine de l'analyse des structures électromagnétiques. Elle consiste à faire le traitement des équations régissant le problème sur plusieurs sous-intervalles

élémentaires appelés *éléments finis*. Il devient alors possible de traiter les fonctions avec plus de précision et d'implémenter le programme d'analyse avec plus de simplicité. [6]

1.5.4 Méthode des moments

La méthode des moments (MoM) est une méthode de résolution approchée des équations intégral-différentielles linéaires, par une projection sur une base de fonction qui est souvent choisit orthogonale. En général, on l'appelle « La méthode matricielle de résolution d'équations fonctionnelles » car elle transpose une équation fonctionnelle en un système d'équations. L'inconvénient est que la MoM est une méthode d'ordre deux qui nécessite beaucoup de ressources informatiques. [1]

1.5.5 Méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD)

La FDTD est une méthode basée sur la discrétisation des dérivées partielles temporelles et spatiales des équations de *Maxwell*. Le noyau de calcul résultant de cette discrétisation a été présenté en 1966 par *Yee* [6].

Comparée aux autres méthodes numériques, la FDTD possède les avantages suivants :[5]

- La FDTD ne requiert pas de résolution de systèmes d'équations linéaires.
- La FDTD est précise et robuste car les sources d'erreurs sont connues et maîtrisées.
- Prend en charge la non-linéarité des systèmes.
- Méthode d'ordre 1, ce qui permet d'étudier des objets de grande taille.

Les inconvénients de cette méthode sont :

- Ambiguïté lors de la modélisation des interfaces.
- Inexistence d'un absorbant (virtuel) fonctionnant de manière efficace dans les conditions
versatiles.

Cette méthode est particulièrement utilisée dans les domaines suivants :

- Analyse des circuits micro-ondes,
- Analyse des structures rayonnantes,
- Etude des phénomènes transitoires liés aux ondes électromagnétiques (EMP),
- Association du simulateur avec des logiciels d'analyse de circuits.

1.5.6 Méthode de la f.e.m induite

C'est une méthode classique d'analyse pour le calcul de l'impédance propre et l'impédance mutuelle. Elle consiste à intégrer le vecteur de Poynting sur la surface de l'antenne et d'en déduire sa résistance de rayonnement. Cependant, son utilisation est limitée aux antennes qui présentent un diamètre négligeable. [1]

1.6 Choix de la méthode

Le choix d'une méthode d'analyse parmi celles que nous venons de présenter, est guidé par les critères suivants :

- La méthode choisit doit être démunie d'approximations ou d'hypothèses trop contraignantes pour notre travail.
- Nous avons tenté de sélectionner la méthode la mieux documentées : Il faut comprendre pourquoi la méthode est susceptible de fonctionner dans tel ou tel cas.
- La richesse des informations que la méthode est censée fournir concernant les champs proches et lointains.

- Il ne faut pas que la méthode soit lourde en temps de calcul, surtout dans le cas de l'étude des antennes à géométrie simple (étude qui nous a été proposée).

Nous avons opté pour la méthode des moments pour sa précision, sa simplicité et surtout parce qu'elle nécessite moins d'espace mémoire en comparaison avec d'autres méthodes.

Bibliographie du chapitre1

- [1] C.A.Balanis, "Antenna theory : Analysis and design", Harper & Row, Publishers, 1996.
- [2] R.Aksas, "Antennes et propagation", notes de cours, ENP, Année universitaire 2004-2005.
- [3] Robert Collin, Francis Zucker, ' Antenna theory ', Mc Graw Hill, 1969.
- [4] A.Mokraoui, « Analyse d'une structure rayonnante microruban de forme rectangulaire à l'aide de la méthode de l'équation intégrale dans le domaine spectral » *Thèse d'ingénieur*, juillet 1997, Ecole nationale polytechnique.
- [5] A.Mokraoui, « Contribution à l'amélioration des performances des antennes TSA. Analyse par des méthode numérique » *Thèse de doctorat*, février 2005, Ecole nationale polytechnique.
- [6] K.S.Yee « numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media », IEEE trans antennas and propagation, Vol14, 1966,pp.302-307

Il ne faut pas que la méthode soit fondée en temps de calcul, surtout dans le cas de l'étude des machines à géométrie simple (étude qui nous a été proposée).

Il faut avoir égard pour l'emploi des machines pour sa simplicité et surtout parce qu'elle nécessite moins d'expérimentations en comparaison avec d'autres méthodes.

Bibliographie de chapitre

- [1] G. A. Brankin, "A simple method for analyzing job design", *Journal of Roy. Statistical Soc. Ser. B*, vol. 28, no. 1, pp. 1-11, 1966.
- [2] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication", *Biometrika*, vol. 28, pp. 51-71, 1935.
- [3] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. II", *Biometrika*, vol. 28, pp. 75-90, 1935.
- [4] A. J. Viterbi, "A simple method for analyzing job design", *Journal of Roy. Statistical Soc. Ser. B*, vol. 28, no. 1, pp. 1-11, 1966.
- [5] A. J. Viterbi, "A simple method for analyzing job design. II", *Journal of Roy. Statistical Soc. Ser. B*, vol. 28, no. 2, pp. 1-11, 1966.
- [6] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. III", *Biometrika*, vol. 28, pp. 91-106, 1935.
- [7] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. IV", *Biometrika*, vol. 28, pp. 107-122, 1935.
- [8] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. V", *Biometrika*, vol. 28, pp. 123-138, 1935.
- [9] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. VI", *Biometrika*, vol. 28, pp. 139-154, 1935.
- [10] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. VII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 155-170, 1935.
- [11] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. VIII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 171-186, 1935.
- [12] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. IX", *Biometrika*, vol. 28, pp. 187-202, 1935.
- [13] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. X", *Biometrika*, vol. 28, pp. 203-218, 1935.
- [14] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XI", *Biometrika*, vol. 28, pp. 219-234, 1935.
- [15] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 235-250, 1935.
- [16] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XIII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 251-266, 1935.
- [17] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XIV", *Biometrika*, vol. 28, pp. 267-282, 1935.
- [18] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XV", *Biometrika*, vol. 28, pp. 283-298, 1935.
- [19] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XVI", *Biometrika*, vol. 28, pp. 299-314, 1935.
- [20] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XVII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 315-330, 1935.
- [21] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XVIII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 331-346, 1935.
- [22] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XIX", *Biometrika*, vol. 28, pp. 347-362, 1935.
- [23] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XX", *Biometrika*, vol. 28, pp. 363-378, 1935.
- [24] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XXI", *Biometrika*, vol. 28, pp. 379-394, 1935.
- [25] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XXII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 395-410, 1935.
- [26] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XXIII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 411-426, 1935.
- [27] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XXIV", *Biometrika*, vol. 28, pp. 427-442, 1935.
- [28] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XXV", *Biometrika*, vol. 28, pp. 443-458, 1935.
- [29] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XXVI", *Biometrika*, vol. 28, pp. 459-474, 1935.
- [30] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XXVII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 475-490, 1935.
- [31] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XXVIII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 491-506, 1935.
- [32] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XXIX", *Biometrika*, vol. 28, pp. 507-522, 1935.
- [33] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XXX", *Biometrika*, vol. 28, pp. 523-538, 1935.
- [34] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XXXI", *Biometrika*, vol. 28, pp. 539-554, 1935.
- [35] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XXXII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 555-570, 1935.
- [36] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XXXIII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 571-586, 1935.
- [37] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XXXIV", *Biometrika*, vol. 28, pp. 587-602, 1935.
- [38] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XXXV", *Biometrika*, vol. 28, pp. 603-618, 1935.
- [39] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XXXVI", *Biometrika*, vol. 28, pp. 619-634, 1935.
- [40] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XXXVII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 635-650, 1935.
- [41] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XXXVIII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 651-666, 1935.
- [42] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XXXIX", *Biometrika*, vol. 28, pp. 667-682, 1935.
- [43] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XL", *Biometrika*, vol. 28, pp. 683-698, 1935.
- [44] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XLI", *Biometrika*, vol. 28, pp. 699-714, 1935.
- [45] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XLII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 715-730, 1935.
- [46] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XLIII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 731-746, 1935.
- [47] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XLIV", *Biometrika*, vol. 28, pp. 747-762, 1935.
- [48] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XLV", *Biometrika*, vol. 28, pp. 763-778, 1935.
- [49] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XLVI", *Biometrika*, vol. 28, pp. 779-794, 1935.
- [50] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XLVII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 795-810, 1935.
- [51] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XLVIII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 811-826, 1935.
- [52] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. XLIX", *Biometrika*, vol. 28, pp. 827-842, 1935.
- [53] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. L", *Biometrika*, vol. 28, pp. 843-858, 1935.
- [54] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LI", *Biometrika*, vol. 28, pp. 859-874, 1935.
- [55] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 875-890, 1935.
- [56] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LIII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 891-906, 1935.
- [57] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LIV", *Biometrika*, vol. 28, pp. 907-922, 1935.
- [58] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LV", *Biometrika*, vol. 28, pp. 923-938, 1935.
- [59] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LVI", *Biometrika*, vol. 28, pp. 939-954, 1935.
- [60] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LVII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 955-970, 1935.
- [61] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LVIII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 971-986, 1935.
- [62] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LIX", *Biometrika*, vol. 28, pp. 987-1002, 1935.
- [63] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LX", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1003-1018, 1935.
- [64] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXI", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1019-1034, 1935.
- [65] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1035-1050, 1935.
- [66] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXIII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1051-1066, 1935.
- [67] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXIV", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1067-1082, 1935.
- [68] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXV", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1083-1098, 1935.
- [69] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXVI", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1099-1114, 1935.
- [70] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXVII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1115-1130, 1935.
- [71] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXVIII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1131-1146, 1935.
- [72] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXIX", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1147-1162, 1935.
- [73] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXX", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1163-1178, 1935.
- [74] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXI", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1179-1194, 1935.
- [75] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1195-1210, 1935.
- [76] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXIII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1211-1226, 1935.
- [77] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXIV", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1227-1242, 1935.
- [78] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXV", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1243-1258, 1935.
- [79] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXVI", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1259-1274, 1935.
- [80] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXVII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1275-1290, 1935.
- [81] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXVIII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1291-1306, 1935.
- [82] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXIX", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1307-1322, 1935.
- [83] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXX", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1323-1338, 1935.
- [84] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXXI", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1339-1354, 1935.
- [85] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXXII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1355-1370, 1935.
- [86] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXXIII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1371-1386, 1935.
- [87] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXXIV", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1387-1402, 1935.
- [88] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXXV", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1403-1418, 1935.
- [89] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXXVI", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1419-1434, 1935.
- [90] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXXVII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1435-1450, 1935.
- [91] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXXVIII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1451-1466, 1935.
- [92] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXXIX", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1467-1482, 1935.
- [93] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXXX", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1483-1498, 1935.
- [94] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXXXI", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1499-1514, 1935.
- [95] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXXXII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1515-1530, 1935.
- [96] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXXXIII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1531-1546, 1935.
- [97] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXXXIV", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1547-1562, 1935.
- [98] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXXXV", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1563-1578, 1935.
- [99] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXXXVI", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1579-1594, 1935.
- [100] R. A. Fisher, "The design for comparing treatments with replication. LXXXXVII", *Biometrika*, vol. 28, pp. 1595-1610, 1935.

CHAPITRE 2

Implémentation classique de la méthode des moments

Dans ce chapitre, nous procéderons à la formulation de l'équation intégrale dont l'inconnu est le courant le long de l'élément filaire. Nous proposerons ensuite, la méthode des moments comme outil de résolution des équations formulées. Nous implémenterons cette méthode avec différentes configurations de fonctions de base et de modèles de source. L'analyse des résultats obtenus nous conduira à la comparaison entre ces approches.

CHAPITRE 2

Implémentation classique de la méthode des moments

Le but de ce chapitre est de présenter la méthode des moments (MM) et de montrer comment elle est implémentée dans un langage de programmation. La MM est une méthode classique pour résoudre des problèmes de valeurs propres et de valeurs singulières. Elle est basée sur la décomposition en valeurs propres et est particulièrement efficace pour les matrices creuses. Le chapitre est divisé en deux parties : la première présente la théorie de la MM et la seconde présente son implémentation dans un langage de programmation.

2.1 Formulation de l'équation intégrale

Dans l'analyse des problèmes du rayonnement des antennes, la procédure usuelle consiste à spécifier les sources (cause) pour en déduire les champs rayonnés (effet).

2.1.1 Le champ électrique généré par une source

Pour calculer les composantes du champ électromagnétique à partir d'une source donnée (électrique ou magnétique), on fait appel à des fonctions auxiliaires (fonctions potentielles).

A partir de l'équation de Maxwell $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ et de l'identité vectorielle $\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{A}) \equiv 0$, on en déduit que l'induction magnétique dérive du rotationnel d'un vecteur arbitraire \vec{A} appelé potentiel vecteur magnétique [3], formulé par

$$\nabla \wedge \vec{A} = \vec{B} \quad (2.1)$$

Le champ magnétique est relié au flux magnétique \vec{B} par la relation

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.2)$$

où μ est la perméabilité magnétique du milieu.

A l'aide de l'équation de Maxwell

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

et des équations précédentes, on peut écrire en régime harmonique

$$\nabla \wedge \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} = -j\omega \nabla \wedge \vec{A} \quad (2.4)$$

ou encore

$$\nabla \wedge [\vec{E} + j\omega \vec{A}] = 0 \quad (2.5)$$

Sachant que toute fonction potentiel scalaire Φ_s vérifie l'identité vectorielle

$$\nabla \wedge (-\nabla \Phi_s) = 0 \quad (2.6)$$

on en déduit que

$$\vec{E} + j\omega \vec{A} = -\nabla \Phi_s \quad (2.7)$$

ou encore

$$\vec{E} = -\nabla \Phi_s - j\omega \vec{A} \quad (2.7.a)$$

A partir de l'identité vectorielle

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \quad (2.8)$$

on peut écrire

$$\vec{\nabla} \wedge (\mu \vec{H}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \quad (2.8.a)$$

Pour un milieu homogène, (2.8.a) devient

$$\mu \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \quad (2.9)$$

En introduisant l'équation de Maxwell-Ampère

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + j\omega \epsilon \vec{E} \quad (2.10)$$

dans l'équation (2.9) on obtient

$$\mu \vec{J} + j\omega \mu \epsilon \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \quad (2.11)$$

Remplaçons l'équation (2.7.a) dans l'équation (2.11)

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{\nabla}(j\omega \mu \epsilon \Phi_e) \quad (2.12)$$

avec : $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$

Afin que Φ_e soit défini de manière unique, soit la condition (ou jauge) de Lorenz qui s'exprime sous la forme

$$\Phi_e = -\frac{1}{j\omega \epsilon \mu} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (2.13)$$

L'introduction de (2.13) dans (2.12) conduit à l'équation différentielle reliant la source et le potentiel vecteur \vec{A}

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (2.14)$$

L'expression (2.14) représente l'équation de Helmholtz

En vertu de l'équation (2.13) l'équation (2.7.a) devient

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} - j\frac{1}{\omega \mu \epsilon} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad (2.15)$$

ou encore

$$\vec{E} = -j\frac{1}{\omega \mu \epsilon} [k^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})] \quad (2.16)$$

La résolution de l'équation de Helmholtz (2.14) permet, compte tenu de (2.16), de déterminer le champ \vec{E} de l'onde.

2.1.2 Equation integro-différentielle de Pocklington

Considérons une antenne filaire rectiligne de longueur L , de rayon a , dirigée suivant l'axe z , et excitée par un champ incident \vec{E}^i . Ce champ génère une densité de courant \vec{J}_s sur la surface de l'antenne qui à son tour produira un champ électrique diffracté \vec{E}^s (s pour Scattered Electric Field).

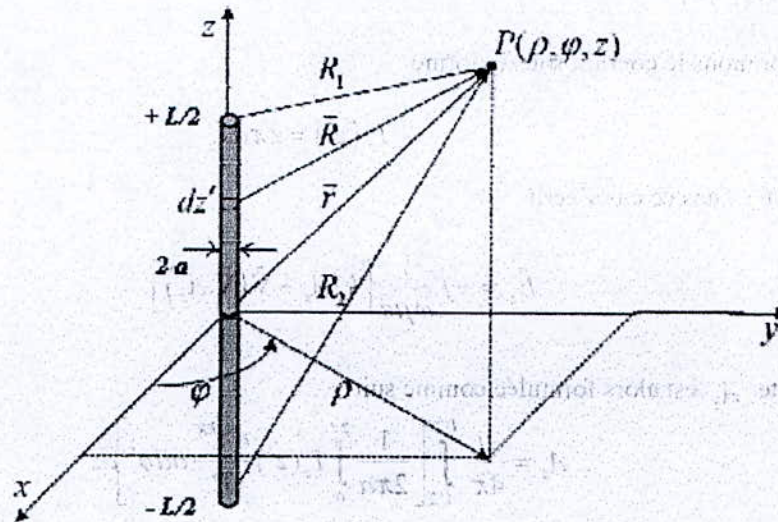


Figure 2.1 Représentation du dipôle en coordonnées cylindriques

En tout point de l'espace, le champ électrique total s'écrit

$$\vec{E}^{tot}(\vec{r}) = \vec{E}^i(\vec{r}) + \vec{E}^s(\vec{r}) \quad (2.17)$$

Considérons un point d'observation sur la surface de l'élément filaire. Le métal étant supposé parfaitement conducteur, la composante tangentielle du champ électrique total est nulle, ce qui se traduit par

$$E_z^{tot}(\vec{r} = \vec{r}_s) = E_z^i(\vec{r} = \vec{r}_s) + E_z^s(\vec{r} = \vec{r}_s) = 0 \quad (2.18)$$

D'où

$$E_z^s(\vec{r} = \vec{r}_s) = - E_z^i(\vec{r} = \vec{r}_s) \quad (2.18.a)$$

Pour l'antenne illustrée par la figure 2.1, la solution de l'équation de Helmholtz (2.14) est donnée comme suit

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S J_z \frac{e^{-jkR}}{R} dS' = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} J_z \frac{e^{-jkR}}{R} a d\phi' dz' \quad (2.19)$$

Si on néglige le rayon 'a' par rapport à la longueur d'onde λ , la densité de courant J ne dépendra pas de l'angle ϕ [1] et on pourra poser les approximations suivantes :

- ◆ Les courants transversaux peuvent être négligés par rapport aux courants axiaux sur le fil conducteur.
- ◆ La variation circonférentielle du courant axial peut être négligée.
- ◆ Le courant peut être représenté sur l'axe du fil conducteur.

Les conditions aux limites seront imposées seulement dans la direction axiale, ce qui justifie le passage de (2.17) à (2.18) et (2.19).

Ainsi, nous exprimons le courant sous la forme :

$$I_z(z') = 2\pi a J_z \tag{2.20}$$

L'équation (2.16), dans ce cas s'écrit

$$\vec{E}_z = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \left[k^2 \vec{A}_z + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}_z) \right] \tag{2.21}$$

et la composante A_z est alors formulée comme suit

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \left[\frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} I_z(z') \frac{e^{-jkR}}{R} a d\phi' \right] dz' \tag{2.22}$$

avec

$$R = \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos(\phi - \phi') + (z - z')^2} \tag{2.22.a}$$

ρ est la distance radiale du point de l'excitation vers le point de l'observation.

En tenant compte de la symétrie de l'antenne par rapport à l'axe z , le point d'observation ne dépendra pas de ϕ , on posera, pour simplifier les expressions, $\phi = 0$

Pour un point situé sur la surface ($\rho = a$), l'équation (2.22) devient

$$A_z(\rho = a) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} I_z(z') G(z, z') dz' \tag{2.23}$$

avec

$$G(z, z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} d\phi' \tag{2.23.a}$$

et

$$R(\rho = a) = \sqrt{4a^2 \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right) + (z - z')^2} \tag{2.23.b}$$

La fonction G représente la forme exacte du noyau de l'équation intégrale.

En introduisant l'équation (2.23) dans (2.19), la composante tangentielle du champ rayonné devient :

$$E_z^s(\rho = a) = -j \frac{1}{\omega \varepsilon} \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \int_{-l/2}^{l/2} I_z(z') G(z, z') dz' \quad (2.24)$$

En tenant compte de l'équation (2.18), nous obtenons :

$$\int_{-l/2}^{l/2} I_z(z') \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G(z, z') dz' = -j \omega \varepsilon E_z^i(\rho = a) \quad (2.25)$$

L'expression précédente représente l'équation intégral-différentielle de Pocklington. Elle relie le champ électrique incident avec le courant généré dans la structure.

2.1.3 Equation intégrale de Hallén

Dans cette partie, nous allons présenter une autre forme de l'équation intégrale en utilisant les équations (2.18.a et 2.19).

Dans cette optique, nous supposons $l \gg a$ et $a \ll \lambda$. Dans ces conditions, les effets des surfaces des deux extrémités seront considérés négligeables. Nous prenons en considération le cas particulier d'un champ incident \vec{E}^i concentré dans un petit segment de longueur b au centre de l'antenne.

En combinant les équations (2.16) et (2.18.a) nous obtenons

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z = \begin{cases} -j \omega \varepsilon \mu E_z^i & -\frac{b}{2} \leq z \leq \frac{b}{2} \\ 0 & \frac{b}{2} \leq |z| \leq \frac{l}{2} \end{cases} \quad (2.26)$$

Quand b tend vers zéro, on exprime le champ incident au centre comme de l'antenne étant la limite de la tension qui y est appliquée

$$V_g = \lim_{b \rightarrow 0} b E_z^i \quad (2.27)$$

En utilisant la théorie des distributions, l'équation (2.27) s'exprime comme suit

$$E_z^i = V_g \delta(z) \quad (2.28)$$

L'équation (2.26) se réduit alors à

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z = -j \omega \varepsilon \mu V_g \delta(z) \quad (2.29)$$

En tout point sur l'antenne, tel que $z \neq 0$, on a

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z = 0 \quad (2.30)$$

La symétrie de la distribution du courant conduit à un potentiel A_z symétrique. La solution de l'équation différentielle (2.26) sera de la forme :

$$A_z(z) = B \cos(kz) + C \sin(k|z|) \tag{2.31}$$

B et C sont des constantes à déterminer.

En intégrant l'équation (2.29) au voisinage de zéro, on peut écrire :

$$\left. \frac{\partial A_z}{\partial z} \right|_{z=0^+} = -j\omega\epsilon\mu V_g \tag{2.32}$$

Ou encore

$$\left. \frac{\partial A_z}{\partial z} \right|_{0^-} = Ck \cos(0^+) - C(-k) \cos(0^-) = -j\omega\epsilon\mu V_g$$

d'où

$$2Ck = -j\omega\epsilon\mu V_g$$

Finalement

$$C = -j\sqrt{\mu\epsilon} \frac{V_g}{2}$$

En tenant compte de la valeur de C et de l'expression de A_z , l'expression finale sera :

$$\int_{-l/2}^{l/2} I_z(z') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz' = -j\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[B_1 \cos(kz) + \frac{V_g}{2} \sin(k|z|) \right] \tag{2.33}$$

où : B_1 est une constante à déterminer à partir des conditions aux limites.

L'expression (2.33) représente l'équation intégrale de Hallén pour le cas d'une représentation par fente infinitésimale du champ incident.

Conclusion :

Comme mentionné au premier chapitre, plusieurs méthodes numériques peuvent être appliquées pour résoudre l'équation intégrale. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à l'application de la méthode des moments en exploitant la facilité de son implémentation.

2.2 Méthode des moments

La méthode des moments est une technique numérique de résolution approchée des équations integro-différentielles linéaires par projection sur une base de fonctions qui est souvent choisie orthogonale. Elle transforme ces équations en un système matriciel facile à résoudre numériquement [14].

Les deux classes d'équations peuvent être mises sous la forme générale d'une équation à opérateur linéaire :

$$L(f) = g \quad (2.34)$$

où L est un opérateur linéaire pouvant être différentiel, intégral ou intégro-différentiel.

f est une fonction inconnue

g est une fonction représentant la source d'excitation.

La méthode consiste à décomposer la fonction f en série de fonctions de bases connues pondérées par des coefficients à déterminer. Cela peut être résumé algébriquement par l'équation suivante :

$$f \approx \hat{f} = \sum_{n=1}^N a_n f_n \quad (2.35)$$

où a_n sont les coefficients à déterminer.

N est le nombre de fonctions de bases f_n choisies. La fonction f peut être obtenue d'une manière plus exacte si N tend vers l'infini. En terme d'implémentation, et selon la capacité des calculateurs utilisés, il est nécessaire de s'arrêter à une valeur finie de N .

L'introduction de l'équation (2.35) dans (2.34) donne :

$$L\left(\sum_{n=1}^N a_n f_n\right) = g \quad (2.36)$$

En tenant compte de la linéarité de l'opérateur, on peut écrire l'équation (2.36) sous la forme :

$$\sum_{n=1}^N a_n L(f_n) = g \quad (2.37)$$

On projette l'équation (2.37) sur un espace de fonctions connues (fonction de test) w_m ; cette projection est réalisée à l'aide d'un produit intérieur défini dans notre cas comme suit :

$$\langle g, w \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} w^* g \, dl \quad (2.38)$$

Généralement, le produit intérieur de f et g sur un domaine donné est un scalaire qui satisfait les conditions suivantes :

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle \tag{2.39}$$

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle \tag{2.40}$$

$$\langle f, f^* \rangle > 0 \quad \text{si } f \neq 0 \tag{2.41}$$

$$\langle f, f^* \rangle = 0 \quad \text{si } f = 0 \tag{2.42}$$

α, β sont des scalaires arbitraires. f, g, h sont des fonctions du même espace de fonctions.

L'introduction de ces fonctions de test donne l'équation suivante :

$$\sum_{n=1}^N a_n \langle w_m, L(f_n) \rangle = \langle w_m, g \rangle \quad m = 1, \dots, N \tag{2.43}$$

L'équation (2.43) s'écrit de manière matricielle sous la forme :

$$[Z_{m,n}][I_n] = [V_m] \tag{2.44}$$

Tels que : $[Z_{m,n}] = \langle w_m, L(f_n) \rangle$ est la matrice impédance.

$[V_m] = \langle w_m, g \rangle$ est le vecteur tension.

$[I_m] = \langle a_n \rangle$ est le vecteur courant à déterminer

Ce système peut être exprimé plus explicitement sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \langle w_1, L(f_1) \rangle & \dots & \langle w_1, L(f_N) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_N, L(f_1) \rangle & \dots & \langle w_N, L(f_N) \rangle \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle w_1, g \rangle \\ \vdots \\ \langle w_N, g \rangle \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

L'équation intégrale initiale est finalement substituée (selon 2.43) par le système d'équations linéaires précédent.

2.2.1 Les fonctions de base / test

Les fonctions de base et de test sont linéairement indépendantes. Cependant, pour atteindre un certain degré de précision, ces fonctions doivent être choisies de telle sorte que la solution puisse être approximée convenablement avec le plus petit ensemble de fonctions de base. Ce choix est déterminant lors de l'utilisation de la MoM. Il dépendra d'un compromis entre plusieurs facteurs [4] :

- ◆ La précision numérique désirée
- ◆ La nature de l'équation intégrale : Dans beaucoup de cas, l'emploi de fonctions de base adéquates peut réduire la complexité des intégrales à calculer.
- ◆ Des fonctions qui vérifient certains critères de continuité pour donner une bonne correspondance à des phénomènes physiques continus [11].
- ◆ La forme géométrique de la structure étudiée.

On distingue deux catégories de fonctions de base ou de test :

2.2.1.1 Fonctions à intervalles séparés (Subdomain functions)

Elles sont des fonctions définies sur des sous-intervalles [1]. Elle sont plus simples à implémenter mais il en faut un nombre important afin d'approcher la fonction exacte. Nous en citerons quelques types :

◆ L'impulsion de Dirac

Considérée comme la fonction la plus simple, elle est utilisée généralement comme fonction de test. Elle offre la possibilité d'éliminer une intégration lors de l'évaluation des éléments de la matrice impédance. La méthode qui utilise une Dirac en tant que fonction de test est dite méthode du point coïncident ou « point matching » en anglais [5].

◆ la fonction rectangulaire

L'avantage de cette fonction est la facilité de son implémentation Par contre elle manque de précision (figure(2.2)).

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

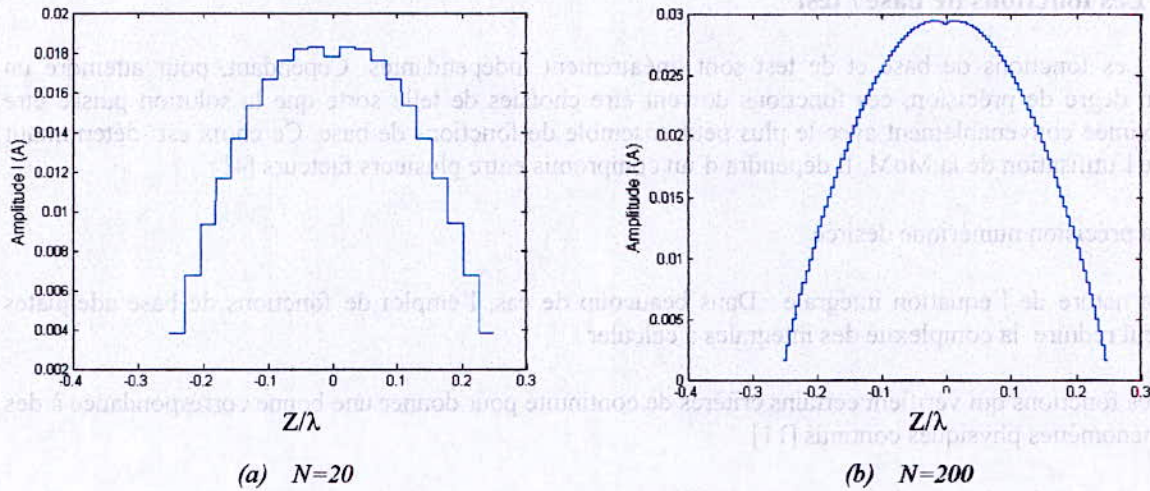


Figure 2.2 Distribution du courant en fonction du nombre de fonction de base de type rectangulaire $L = 0.5\lambda, a = 0.001\lambda, \text{fréquence } f = 300\text{Mhz}$

◆ *La fonction triangle (Piecewise linear)*

Elle est décrite par l'expression suivante :

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ \frac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - x_n} & x_n \leq x \leq x_{n+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Contrairement à la fonction rectangulaire, ces fonctions présentent des intervalles qui se chevauchent. Ceci permet d'assurer la continuité. Ces fonctions sont adéquates pour imposer les conditions aux limites.

◆ *La fonction sinus (piecewise sinusoidal)*

Cette fonction est définie sur deux intervalles distincts comme suit :

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin[k(x - x_{n-1})]}{\sin[k(x_n - x_{n-1})]} & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ \frac{\sin[k(x_{n+1} - x)]}{\sin[k(x_{n+1} - x_n)]} & x_n \leq x \leq x_{n+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

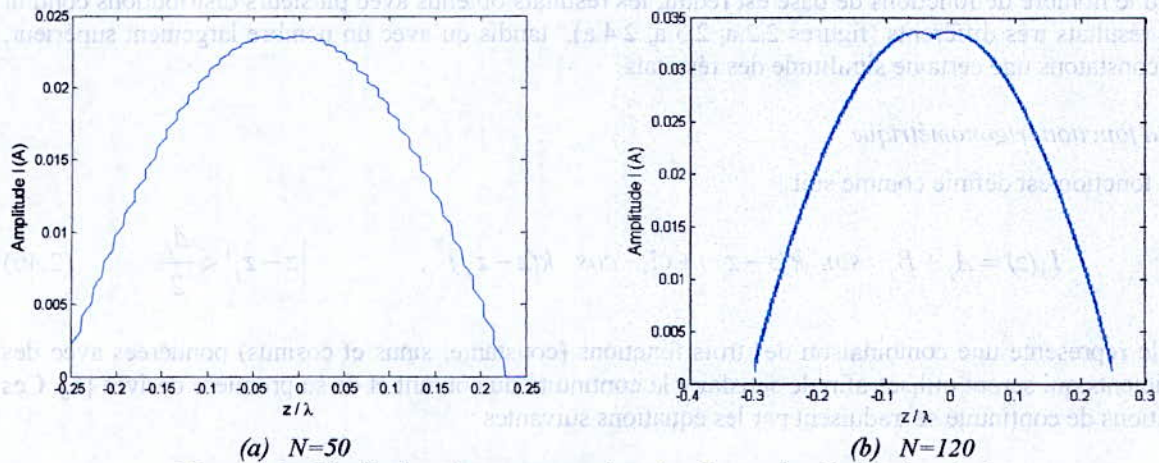


Figure 2.3 Distribution du courant en fonction du nombre de fonction de sinus
 $L = 0.5\lambda, a = 0.001\lambda, \text{fréquence } f = 300\text{Mhz}$

Elle présente une grande similitude avec la fonction triangulaire. De plus, elle est plus proche de l'allure ondulatoire du courant. Par conséquent, un ensemble très réduit de fonctions de base permet une bonne reconstitution de la solution.

◆ *La fonction cosinus tronqué*

Cette fonction est définie sur un seul intervalle comme suit :

$$g_n(x) = \begin{cases} \cos \left[k \left(x - \frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right) \right] & -\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

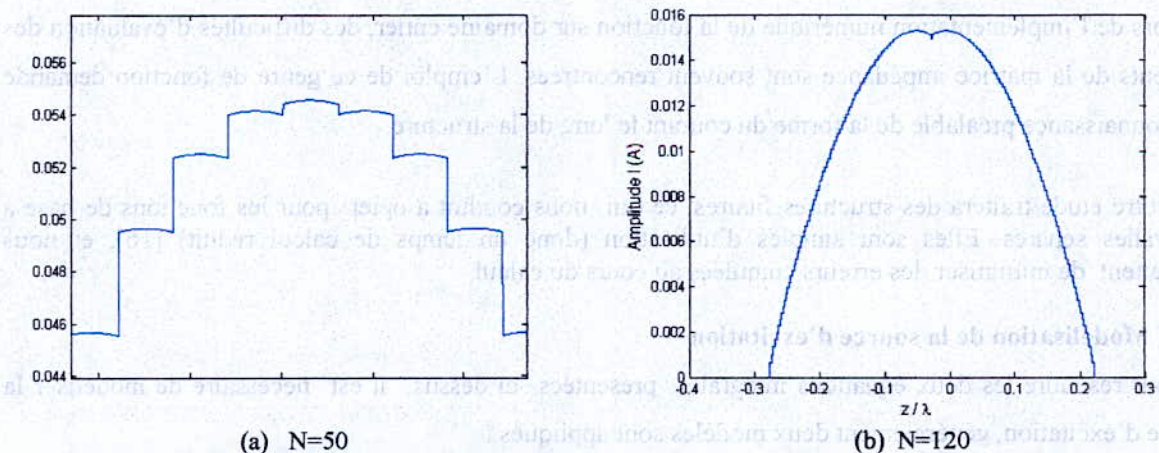


Figure 2.4 Distribution du courant en fonction du nombre de fonction de base de type cosinus tronqué
 $L = 0.5\lambda, a = 0.001\lambda, \text{fréquence } f = 300\text{Mhz}$

La fonction cosinus tronqué présente des discontinuités entre les sous intervalles, (figure (2.4)). Il faut prendre un plus grand nombre de fonctions pour atteindre une forme approchée du courant.

Quand le nombre de fonctions de base est réduit, les résultats obtenus avec plusieurs distributions conduit à des résultats très différents (figures 2.2.a, 2.3.a, 2.4.a), tandis qu'avec un nombre largement supérieur, nous constatons une certaine similitude des résultats.

◆ *La fonction trigonométrique*

Cette fonction est définie comme suit :

$$I_j(z) = A_j + B_j \sin k(z - z_j) + C_j \cos k(z - z_j) , \quad |z - z_j| < \frac{\Delta_j}{2} \quad (2.46)$$

Elle représente une combinaison de trois fonctions (constante, sinus et cosinus) pondérées avec des coefficients qui seront utilisés afin de satisfaire la continuité du courant et de sa première dérivée [6]. Ces conditions de continuité se traduisent par les équations suivantes :

$$\begin{cases} I_n \left(z_n - \frac{\Delta}{2} \right) = I_{n-1} \left(z_{n-1} + \frac{\Delta}{2} \right) \\ \frac{\partial I_n}{\partial z} \Big|_{z=z_n - \frac{\Delta}{2}} = \frac{\partial I_{n-1}}{\partial z} \Big|_{z=z_{n-1} + \frac{\Delta}{2}} \end{cases} \quad (2.47)$$

2.2.1.2 Fonctions sur domaine entier (Entire domain functions)

Chaque fonction est définie sur toute l'étendue de la structure étudiée. Dans cette catégorie, nous pouvons citer plusieurs exemples : une série de puissance (I, x, x^2, x^3, \dots), fonctions rationnelles, polynômes de Tschebyscheff, Legendre ou Maclaurin. Ce type de fonctions donne de bons résultats avec un nombre réduit d'inconnus.

2.2.1.3 Choix du type de fonctions :

Lors de l'implémentation numérique de la fonction sur domaine entier, des difficultés d'évaluation des éléments de la matrice impédance sont souvent rencontrées. L'emploi de ce genre de fonction demande une connaissance préalable de la forme du courant le long de la structure.

Notre étude traitera des structures filaires, ce qui nous conduit à opter pour les fonctions de base à intervalles séparés. Elles sont simples d'utilisation (donc un temps de calcul réduit) [16], et nous permettent de minimiser les erreurs cumulées au cours du calcul.

2.2.2 Modélisation de la source d'excitation

Pour résoudre les deux équations intégrales présentées ci dessus, il est nécessaire de modéliser la source d'excitation, généralement deux modèles sont appliqués :

2.2.2.1 La fente infinitésimale ou «Delta Gap»

Ce modèle est simple et couramment utilisé. Il est aussi peu précis notamment lors du calcul de l'impédance d'entrée [1].

Le modèle considère le champ incident comme étant une distribution de Dirac (figure 2.5.a). Ce modèle a, donc, un fondement purement mathématique parce qu'en réalité une telle fonction ne peut exister.

La tension appliquée au point d'excitation est de la forme :

$$E_i = \frac{V_i}{\Delta} \quad (2.48)$$

Où Δ_i est la largeur de la fente (le gap).

2.2.2.2 La boucle magnétique ou « Magnetic Frill »

Le gap d'excitation précédent est remplacé par un courant magnétique dirigé circonférentiellement. Il est équivalent à celui qui existerait dans un anneau rayonnant de rayon intérieur 'a' (généralement choisi comme étant le rayon de l'antenne) et de rayon extérieur 'b' [1].

Du fait qu'une antenne dipôle est généralement alimentée avec une ligne de transmission, le rayon extérieur 'b' sera déterminé à partir de l'expression de l'impédance caractéristique de la ligne de transmission (figure 2.5.b).

Le champ électrique, dans ce cas, est représenté par le mode TEM d'une ligne de transmission coaxiale

$$E_f = \hat{a}_\rho \frac{V_i}{2\rho' \ln(b/a)} \quad a \leq \rho' \leq b \quad (2.49)$$

La densité du courant magnétique équivalent M_f est donnée par

$$M_f = -2\hat{n} \times E_f = -2\hat{a}_z \times \hat{a}_\rho E_\rho = -\hat{a}_\phi \frac{V_i}{\rho' \ln(b/a)} \quad a \leq \rho' \leq b \quad (2.50)$$

Le champ généré par le générateur magnétique sur la surface du fil peut être supposé axial ($\rho = 0$), cela nous conduit à écrire

$$E_z' \left(\rho = 0, -\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2} \right) = -\frac{V_i}{2 \ln(b/a)} \left[\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} - \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} \right] \quad (2.51)$$

avec $R_1 = \sqrt{z^2 + a^2}$ et $R_2 = \sqrt{z^2 + b^2}$

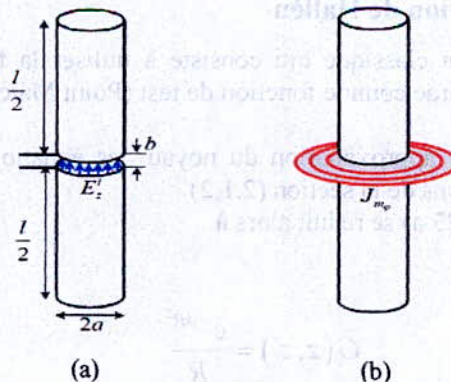


Figure 2.5 Modèles de source

(a) Delta gap (b) Magnetic frill

2.3 Implémentation

Cette implémentation vise l'étude des différentes approches présentées ci-dessus et la comparaison de plusieurs configurations possibles afin de réaliser l'analyse du problème.

Les objectifs de notre étude sont :

- ◆ La comparaison des deux équations intégrales (Hallén et Pocklington).
- ◆ La description de l'effet de la modélisation de la source.
- ◆ L'évaluation du choix d'une fonction de base ou de test.
- ◆ L'analyse de l'impact du nombre de fonctions choisies.

Nous considérons plusieurs combinaisons de fonctions et de modèles de source. En variant le rayon du dipôle, nous tracerons les distributions du courant le long de la structure ainsi que le comportement de l'impédance d'entrée face à l'augmentation du nombre de fonctions de base choisies.

2.3.1 Choix de l'environnement de développement

Afin de nous focaliser essentiellement sur le travail d'analyse de l'antenne filaire, nous avons opté pour un environnement intégré procurant de riches bibliothèques mathématiques. Ainsi le logiciel MATLAB semblait répondre parfaitement à nos attentes. De plus, des commodités très importantes sont fournies afin de visualiser les résultats obtenus.

Les programmes d'analyses écrits par nos soins, sont commandés à partir d'une interface graphique moderne et interactive (annexe 1). Ils pourront être utilisés afin de valider d'autres modèles d'analyse.

Afin de vérifier les conclusions issues de cette étude, on procédera à une comparaison avec le logiciel SNEC (Super Numerical Electromagnetic Code). C'est un logiciel de simulation destiné à l'étude de plusieurs types d'antennes. Il est basé sur la méthode des moments présentée et détaillée dans la référence [18]. La fonction de base employée dans ce logiciel est de type trigonométrique. Le test est effectué à l'aide des fonctions de Dirac uniformément distribuées sur la surface. Ce logiciel applique un modèle de source de type « delta gap ».

2.3.2 Implémentation de l'équation de Hallén

Nous considérons une configuration classique qui consiste à utiliser la fonction rectangulaire comme fonction de base et l'impulsion de Dirac comme fonction de test (Point Matching).

Nous commençons par adopter une approximation du noyau des équations intégrales de Hallén et de Pocklington, en adoptant les conditions de la section (2.1.2)

Le noyau donné par l'expression (2.23.a) se réduit alors à :

$$G(z, z') = \frac{e^{-jkR}}{R} \quad (2.52)$$

avec $R = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$

Le calcul des éléments de la matrice impédance est relativement simple grâce à l'utilisation de la méthode «point matching». La seule difficulté réside dans la détermination de la constante B_1 qui figure dans le second membre de l'équation (2.33). Pour se faire, on procédera comme suit [2] :

L'écriture matricielle de l'équation de Hallén est sous la forme

$$ZI = B_1 \cos + \frac{V_0}{2} \sin \quad (2.53)$$

telle que Z est la matrice impédance dont les éléments sont : $Z_{mn} = \frac{j\eta}{2\pi} \int_{z_{n-1}}^{z_n} G(z_m, z') dz'$

où η est l'impédance d'onde dans l'espace libre et G est le noyau approximee de l'équation intégrale de Hallén.

avec

$$I = \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \quad \cos = \begin{bmatrix} \cos(kz_1) \\ \cos(kz_2) \\ \vdots \\ \cos(kz_N) \end{bmatrix} \quad \sin = \begin{bmatrix} \sin(k|z_1|) \\ \sin(k|z_2|) \\ \vdots \\ \sin(k|z_N|) \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

La condition initiale $I_N = 0$ est exprimée d'une manière matricielle sous la forme suivante :

$$UI = 0 \quad \text{telle que } U = [0, 0, \dots, 0, 1] \quad (2.55)$$

Le vecteur I est obtenu grâce à l'équation (2.53)

$$I = B_1 Z^{-1} \cos + \frac{V_0}{2} Z^{-1} \sin \quad (2.56)$$

La multiplication des deux membres de l'équation (2.56) par U donne

$$UI = B_1 U Z^{-1} \cos + \frac{V_0}{2} U Z^{-1} \sin = 0 \quad (2.57)$$

A partir de l'équation précédente, B_1 devient

$$B_1 = -\frac{V_0 U Z^{-1} \sin}{2 U Z^{-1} \cos} \quad (2.58)$$

2.3.3 Implémentation de l'équation de Pocklington

L'utilisation de la forme générale de l'équation de Pocklington nécessite un développement préliminaire [1] afin de permettre une implémentation facile. Les éléments de la matrice impédance de cette équation sont de forme suivante :

$$Z_{mn} = \int_{z_{n-1}}^{z_n} (\partial_z^2 + k^2) G(z_m - z'') dz'' \quad (2.59)$$

En utilisant la forme approximée du noyau de cette équation intégrale on aboutit à enlever la dérivée seconde. Les éléments de la matrice impédance deviennent alors

$$Z_{mn} = \int_{z_{n-1}}^{z_n} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R^3} \left[(1 + jkR)(2R^2 - 3a^2) + (kaR)^2 \right] dz'' \quad (2.60)$$

avec

$$R = \sqrt{a^2 + (z_m - z'')^2}$$

2.3.4 Comparaison préliminaire des équations intégrales

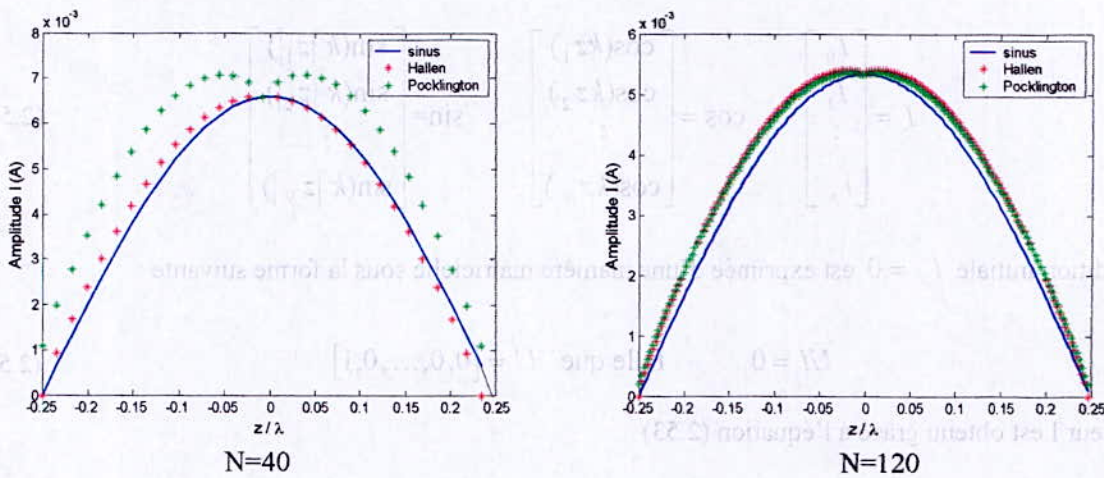


Figure 2.6 Distribution du courant avec Pocklington et Hallén

Les résultats enregistrés avec différents nombres de fonctions de base (figure (2.6)) montrent que la solution de Hallén converge plus rapidement que celle de Pocklington. Cela peut être justifié par le fait que l'équation de Hallén est issue d'une résolution d'une équation différentielle donc elle se rapproche plus de la solution que l'équation de Pocklington.

Il faut souligner que l'équation de Hallén impose des conditions initiales. Ces conditions permettent d'approcher la solution exacte sur les deux extrémités [8], ce qui lui garanti une certaine vitesse de convergence.

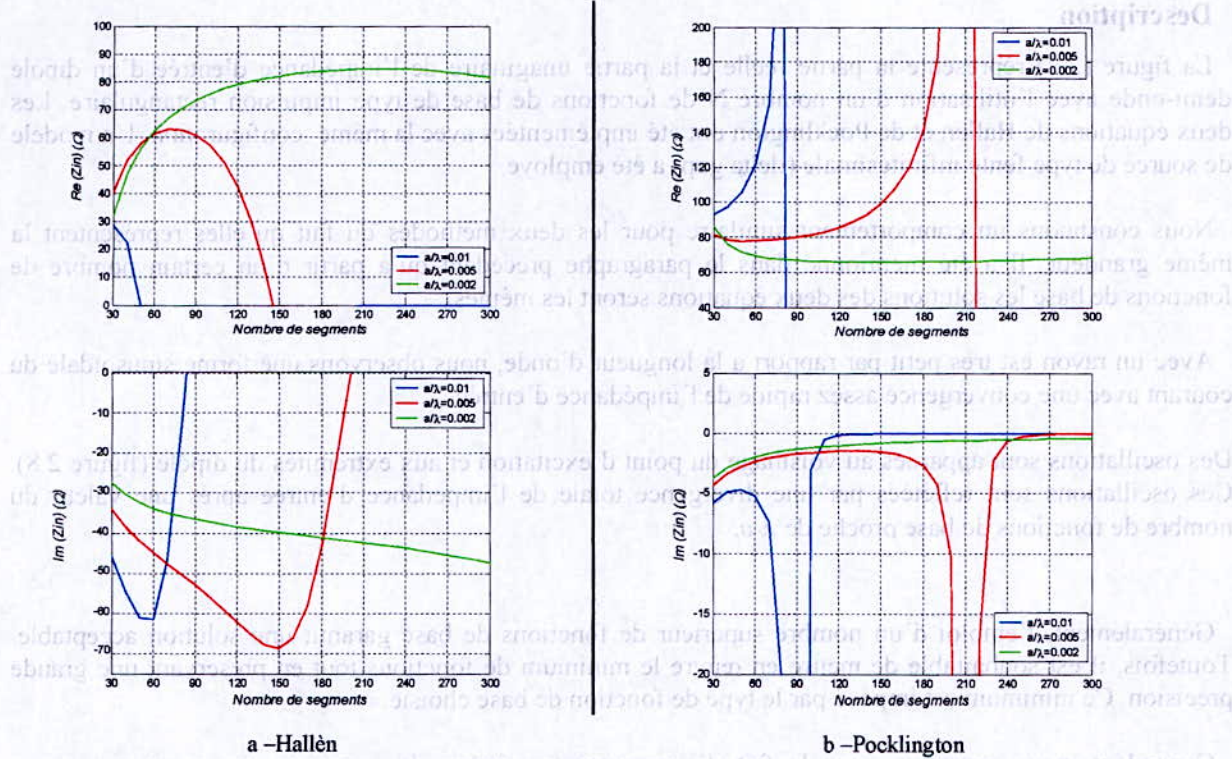


Figure 2.7 Impédance d'entrée d'une antenne dipôle demi-onde en fonction du nombre de fonctions de base N avec une modélisation par fente infinitésimale. Fonctions de base : **rectangulaire**. Fonctions de test **Dirac**.

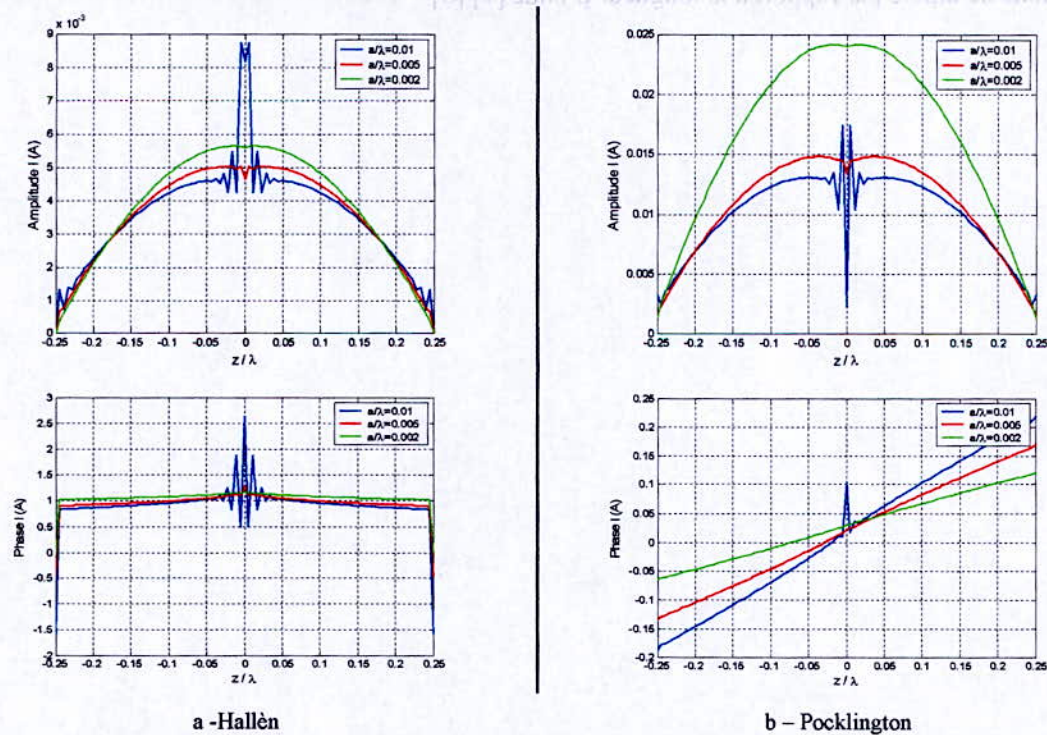


Figure 2.8 Distribution du courant sur antenne dipôle demi-onde ($N=80$) avec une modélisation par fente infinitésimale. Fonctions de base : **rectangulaire**. Fonctions de test **Dirac**.

Description

La figure (2.7) représente la partie réelle et la partie imaginaire de l'impédance d'entrée d'un dipôle demi-onde avec l'utilisation d'un nombre N de fonctions de base de type impulsion rectangulaire. Les deux équations de Hallén et de Pocklington ont été implémentées avec la même configuration. Un modèle de source de type fente infinitésimale (delta gap) a été employé.

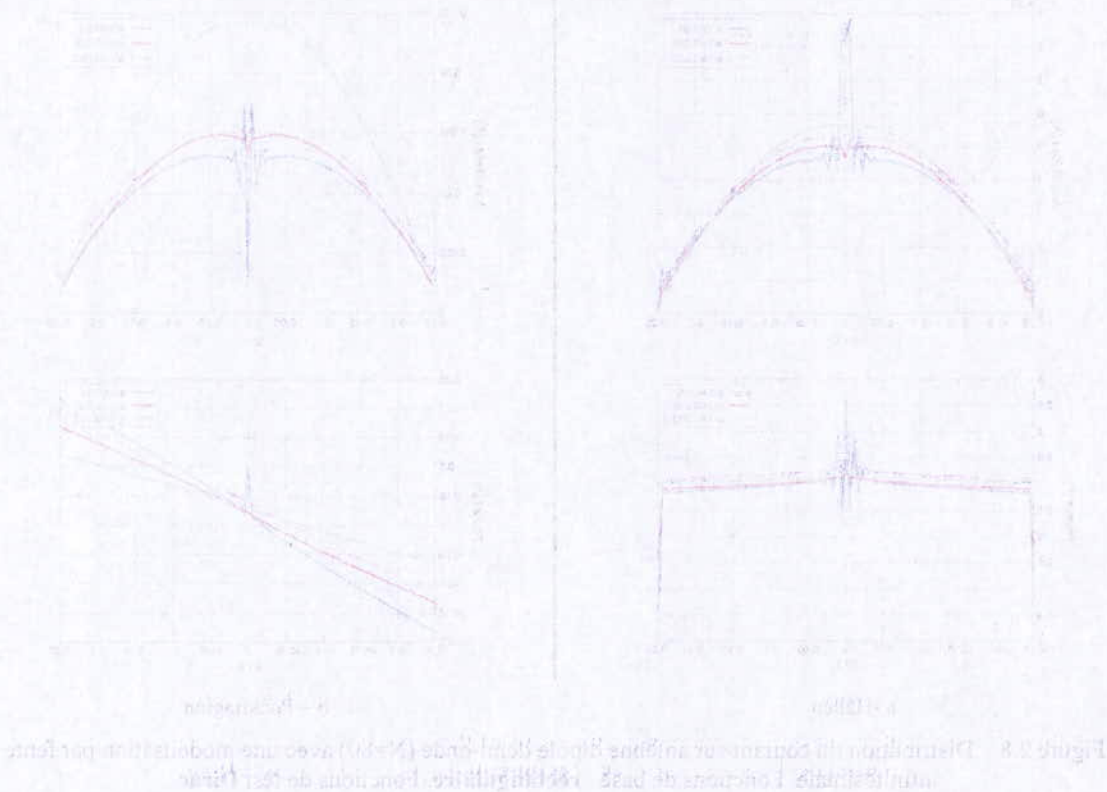
Nous constatons un comportement similaire pour les deux méthodes du fait qu'elles représentent la même grandeur. Il a été mentionné dans le paragraphe précédent qu'à partir d'un certain nombre de fonctions de base les solutions des deux équations seront les mêmes.

Avec un rayon est très petit par rapport à la longueur d'onde, nous observons une forme sinusoïdale du courant avec une convergence assez rapide de l'impédance d'entrée.

Des oscillations sont apparues au voisinage du point d'excitation et aux extrémités du dipôle (figure 2.8). Ces oscillations sont reflétées par une divergence totale de l'impédance d'entrée après une valeur du nombre de fonctions de base proche de λ/a .

Généralement, l'emploi d'un nombre supérieur de fonctions de base garantit une solution acceptable. Toutefois, il est souhaitable de mettre en œuvre le minimum de fonctions tout en préservant une grande précision. Ce minimum est imposé par le type de fonction de base choisie.

Cependant, nous constatons que le fait d'augmenter le nombre de segments ne constitue pas une condition suffisante car intervient un autre facteur déterminant dans ce genre d'analyses, c'est le rapport des dimensions de dipôle par rapport à la longueur d'onde [7] [8].



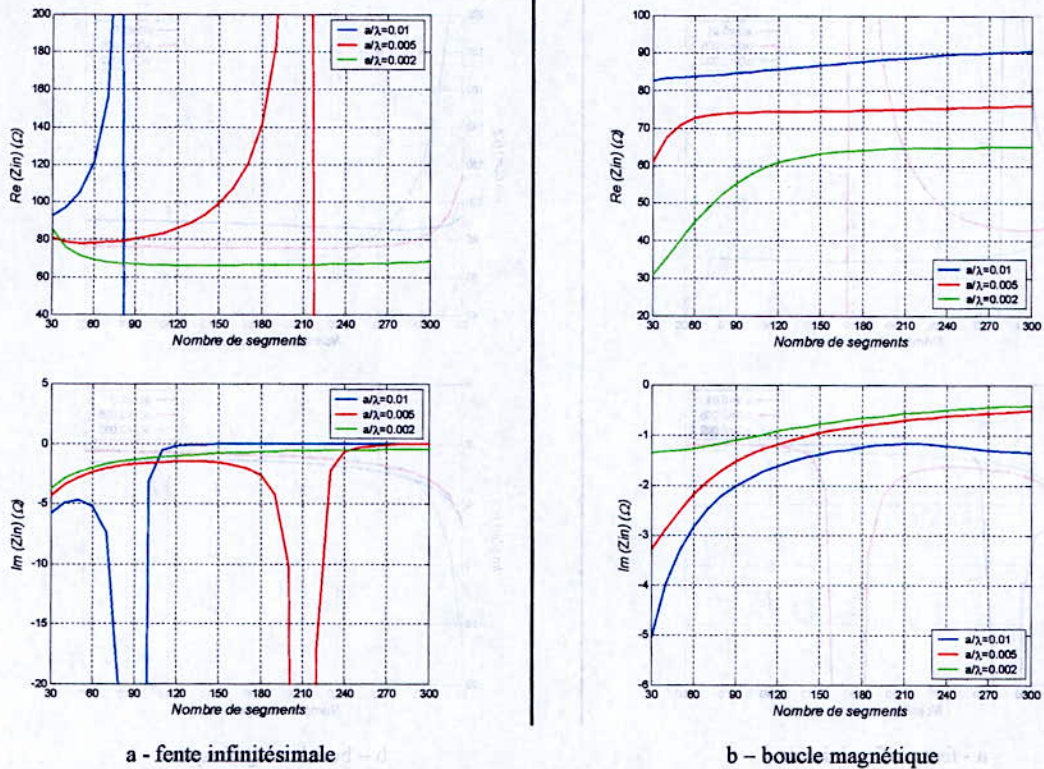


Figure 2.9 Impédance d'entrée d'une antenne dipôle demi-onde en fonction du nombre de fonctions de base N en utilisant l'équation de Pocklington. Fonctions de base : Piecewise sinus. Fonctions de test Dirac

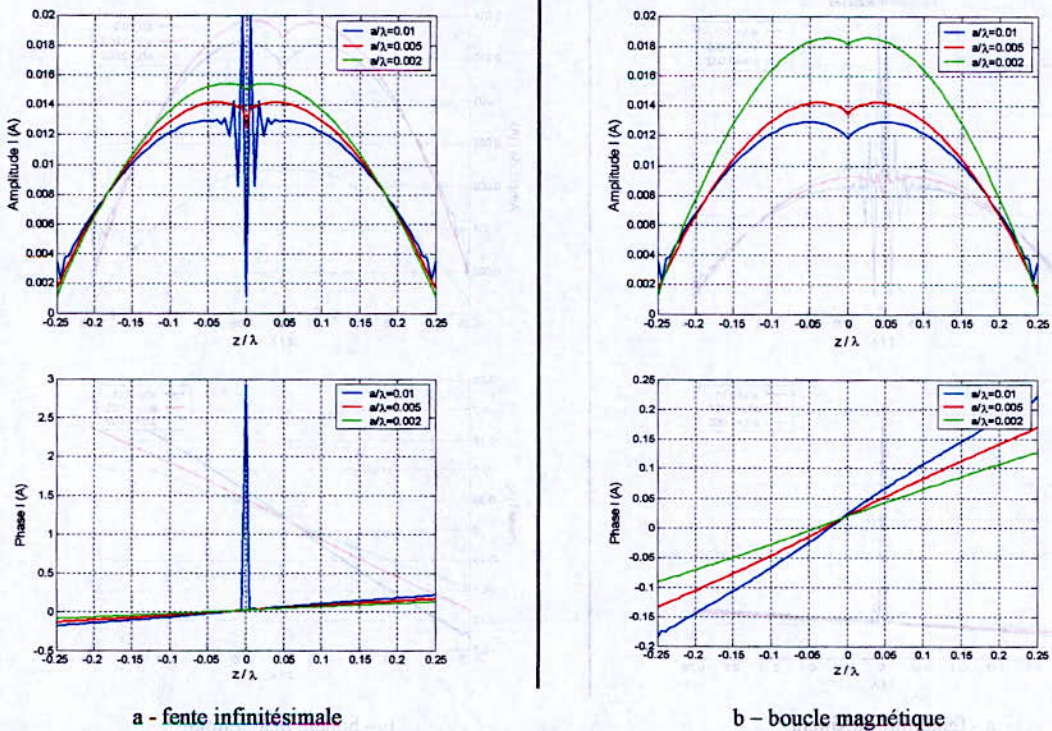


Figure 2.10 Distribution du courant sur une antenne dipôle demi-onde ($N=80$) en utilisant Pocklington. Fonctions de base : Piecewise sinus. Fonctions de test Dirac

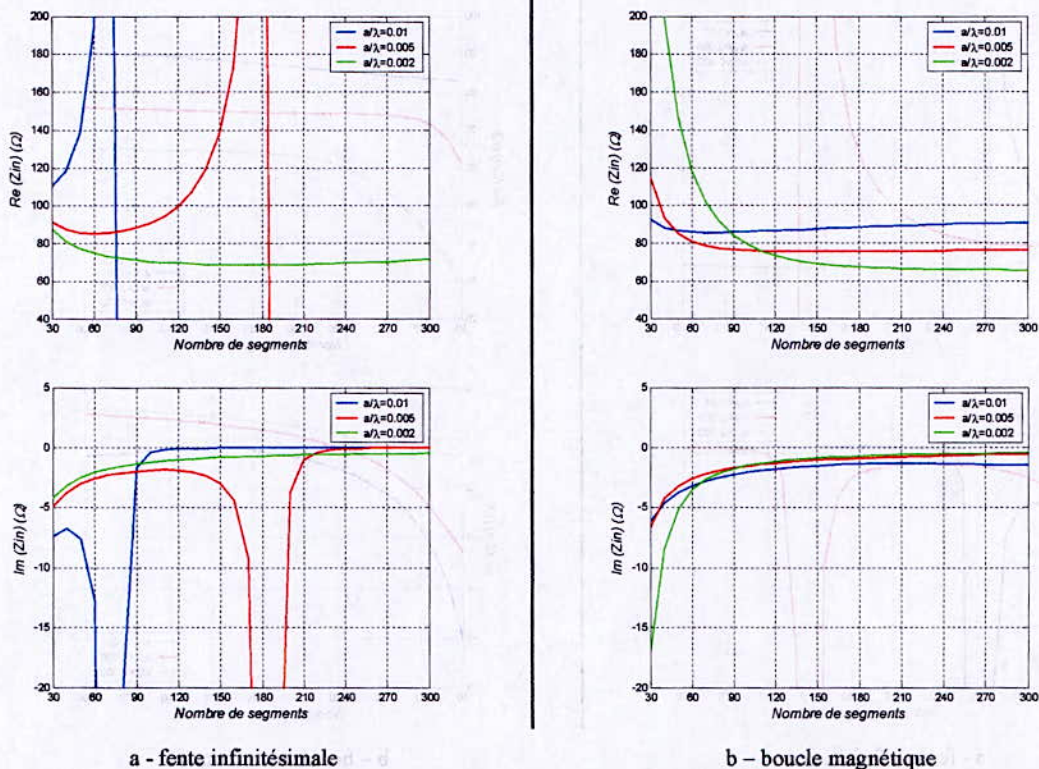


Figure 2.11 Impédance d'entrée d'une antenne dipôle demi-onde en fonction du nombre de fonctions de base N en utilisant l'équation de Pocklington. Fonctions de base : **Piecewise sinus**. Fonctions de test **Piecewise sinus**

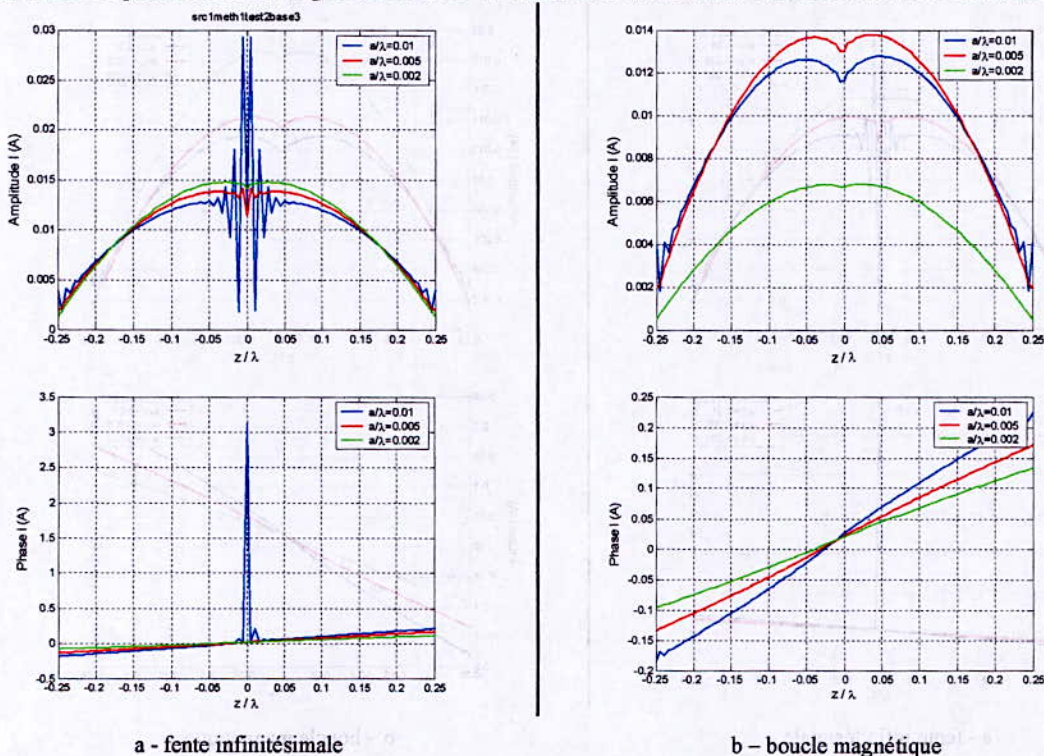


Figure 2.12 Distribution du courant sur antenne dipôle demi-onde ($N=80$) en utilisant l'équation de Pocklington. Fonctions de base : **Piecewise sinus**. Fonctions de test **Piecewise sinus (Galerkin)**

- *delta gap / magnétique frill*

La figure (2.9) représente l'impédance d'entrée pour deux modèles de sources différents. Nous constatons la même divergence pour un nombre important de fonctions de base avec le modèle de la fente infinitésimale. Par contre, une convergence est remarquée pour le deuxième modèle avec des distributions du courant similaires pour tous les rayons choisis (sans oscillations).

Le modèle de source «delta gap» utilisé en premier lieu, a souvent donné une précise résolution des équations intégrales (EFIE), grâce à sa simplicité et son large domaine d'application. L'inconvénient majeur de ce modèle est la supposition d'une concentration du champ électrique dans le point d'alimentation [12]. Avec un espacement suffisant entre les segments, ce modèle donne des résultats acceptables grâce à l'absence d'interaction entre la source et les segments voisins. Cependant, avec des segments plus petits, cette interaction sera plus accentuée, d'où l'apparition des oscillations au voisinage du point d'excitation. Par conséquent, il en découle une divergence de l'impédance d'entrée calculée à partir du courant.

Une analyse des extrémités d'un dipôle montre un champ électrique important en ces points. Dans le cas d'un filament électrique, ce champ a des effets négligeables sur les distributions du courant. Cependant, le fait de négliger les effets des extrémités dans le cas d'une structure cylindrique résonnantes peut conduire à l'apparition des oscillations constatées sur les figures (2.8,2.10, 2.12) [20].

Un traitement rigoureux [17] doit prendre en considération une approximation précise du courant surfacique et de la distribution des charges aux extrémités (figure(2.13)).

Contrairement au modèle précédemment décrit, le générateur «magnetic frill» a donné d'excellents résultats en termes de courant et d'impédance pour les divers rayons employés. Cela peut être justifié par le fait que ce modèle dépend du rayon du dipôle, donc il présente une variation liée aux changements de dimension [10]. De plus, il impose une distribution de tension qui varie uniformément le long de la structure.

Malgré ses limites, le modèle «delta gap» a donné une convergence rapide avec des rayons négligeables du filament. Dans ces conditions, ce modèle reste le plus adéquat pour représenter la source d'excitation.

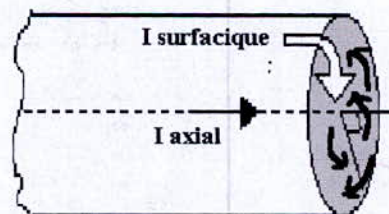


Figure 2.13 Courant de surface à l'extrémité de dipôle

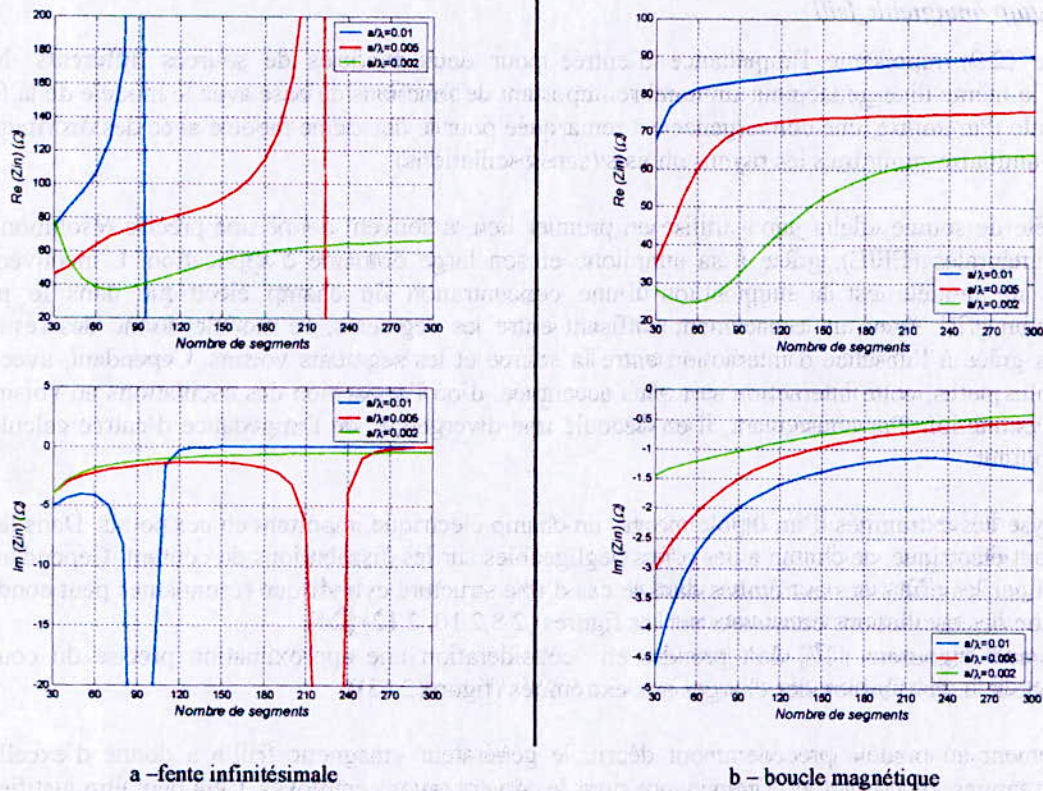


Figure 2.14 Impédance d'entrée d'une antenne dipôle demi-onde en fonction du nombre de fonctions de base N en utilisant l'équation de Pocklington. Fonctions de base : **cosinus tronqué**. Fonctions de test **Dirac**

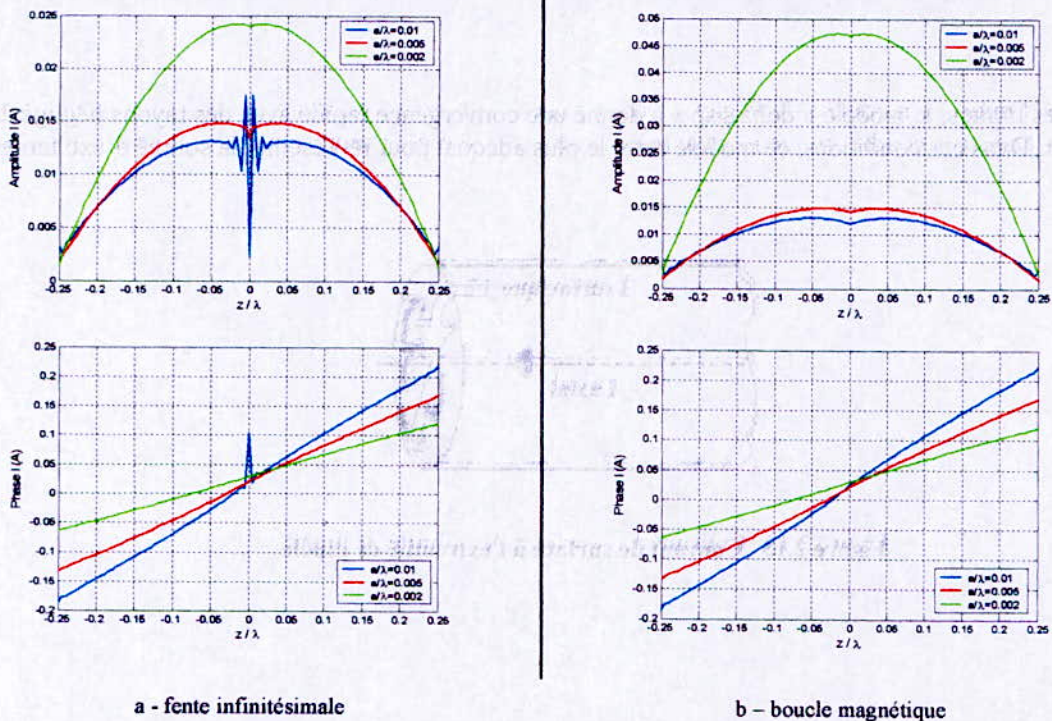
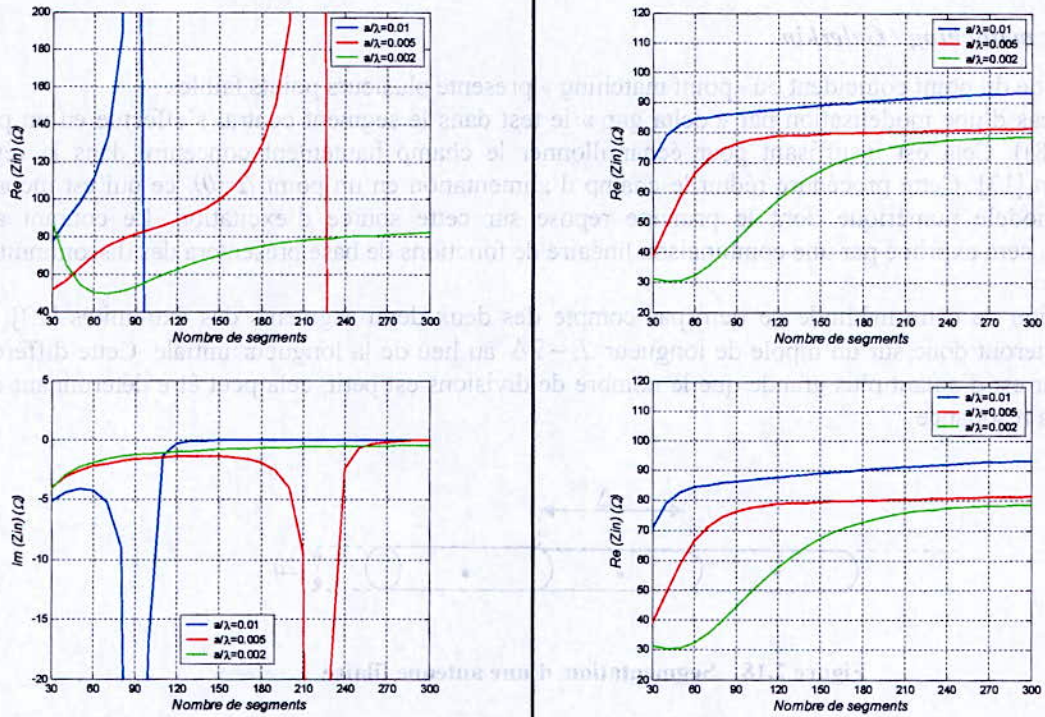


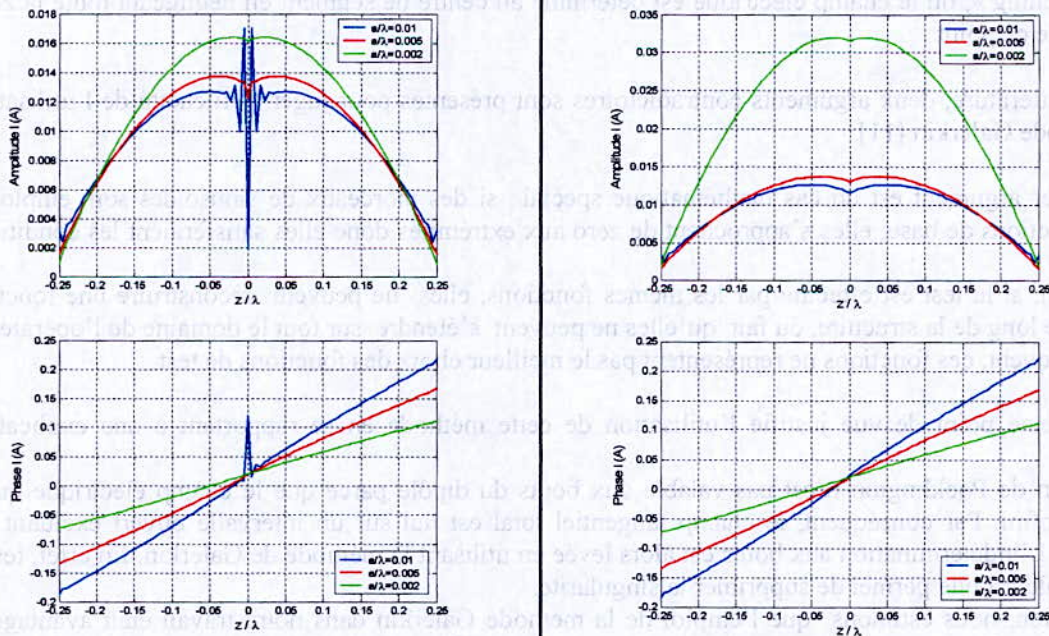
Figure 2.15 Distribution du courant sur antenne dipôle demi-onde ($N=80$) en utilisant l'équation de Pocklington. Fonctions de base : **cosinus tronqué**. Fonctions de test **Dirac**



a - fente infinitésimale

b - boucle magnétique

Figure 2.16 Impédance d'entrée d'une antenne dipôle demi-onde en fonction du nombre de fonctions de base avec l'équation de Pocklington. Fonctions de base : **cosinus tronqué**. Fonctions de test **cosinus tronqué**



a - fente infinitésimale

b - boucle magnétique

Figure 2.17 Distribution du courant sur antenne dipôle demi-onde (N=80) avec l'équation de Pocklington. Fonctions de base : **cosinus tronqué**. Fonctions de test **cosinus tronqué**

- **Point mathching / Galerkin**

La méthode du point coïncident ou «point matching» présente plusieurs points faibles :

Dans le cas d'une modélisation par « delta gap » le test dans le segment central s'effectue en un point (figure (2.8)). Cela est insuffisant pour échantillonner le champ hautement concentré dans la région d'excitation [13]. Cette procédure réduit le champ d'alimentation en un point ($z=0$), ce qui est incorrect dans un modèle numérique dont le principe repose sur cette source d'excitation. Le courant ainsi reconstitué, sera exprimé par une combinaison linéaire de fonctions de base présentera des discontinuités.

L'utilisation de cette méthode ne tient pas compte des deux demi segments des extrémités [19]. Les calculs porteront donc sur un dipôle de longueur $L - 2\Delta$ au lieu de la longueur initiale. Cette différence de longueur est d'autant plus grande que le nombre de divisions est petit, cela peut être déterminant dans le cas de la résonance.

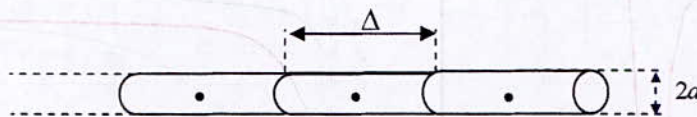


Figure 2.18 Segmentation d'une antenne filaire

Par ailleurs, la méthode Galerkin et malgré ses calculs complexes (doubles intégrales), donne une meilleure représentation de la solution. Elle permet de tester sur toute la longueur du segment. Elle prend en compte toutes les variations du champ le long du domaine d'intégration contrairement à la méthode «point matching», où le champ électrique est déterminé au centre de segment en négligeant toute la zone en dehors de ce point

Dans la littérature, deux arguments contradictoires sont présentés pour juger l'efficacité de l'utilisation de la méthode Galerkin [11].

Le premier argument est un cas mathématique spécial : si des morceaux de sinusoides sont employés comme fonctions de base, elles s'approchent de zéro aux extrémités donc elles satisferaient les conditions aux limites.

Cependant, si le test est effectué par les mêmes fonctions, elles ne peuvent reconstruire une fonction constante le long de la structure, du fait qu'elles ne peuvent s'étendre sur tout le domaine de l'opérateur.

Par conséquent, ces fonctions ne représentent pas le meilleur choix des fonctions de test.

Le deuxième point de vue justifie l'utilisation de cette méthode en se rapportant à une explication physique.

L'équation de Pocklington n'est pas valable aux bouts du dipôle parce que le champ électrique qui y règne est infini. Par conséquent, le champ tangentiel total est nul sur un intervalle ouvert excluant les extrémités. L'indétermination aux bouts est alors levée en utilisant la méthode de Galerkin. En effet, tester avec une valeur nulle permet de supprimer la singularité.

En conclusion, nous estimons que l'emploi de la méthode Galerkin dans notre travail était avantageux parce qu'elle offre une meilleure représentation du courant. Elle remplace également les conditions aux limites pour le cas de l'équation intégrale de Pocklington.

En somme, les arguments présentés ci-dessus nous indiquent qu'il est nécessaire d'opter pour un choix judicieux des fonctions de base et de test afin de mieux modéliser la distribution du courant.

2.4 Validation sur le logiciel SNEC

Nous allons procéder à quelques simulations sur le logiciel SNEC dans le but de vérifier l'exactitude de nos implémentations.

2.4.1 Le courant

Afin de percevoir l'effet du rayon du dipôle sur la distribution du courant, plusieurs cas de figures incluant des valeurs de rayons différents sont envisagés (figure 2.19).

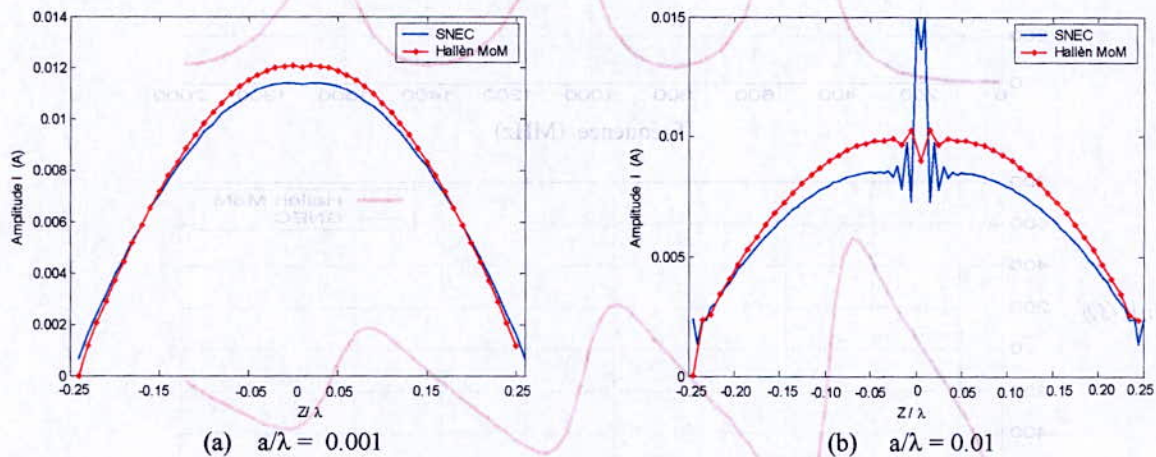


Figure 2.19 Distribution de courant en utilisant SNEC

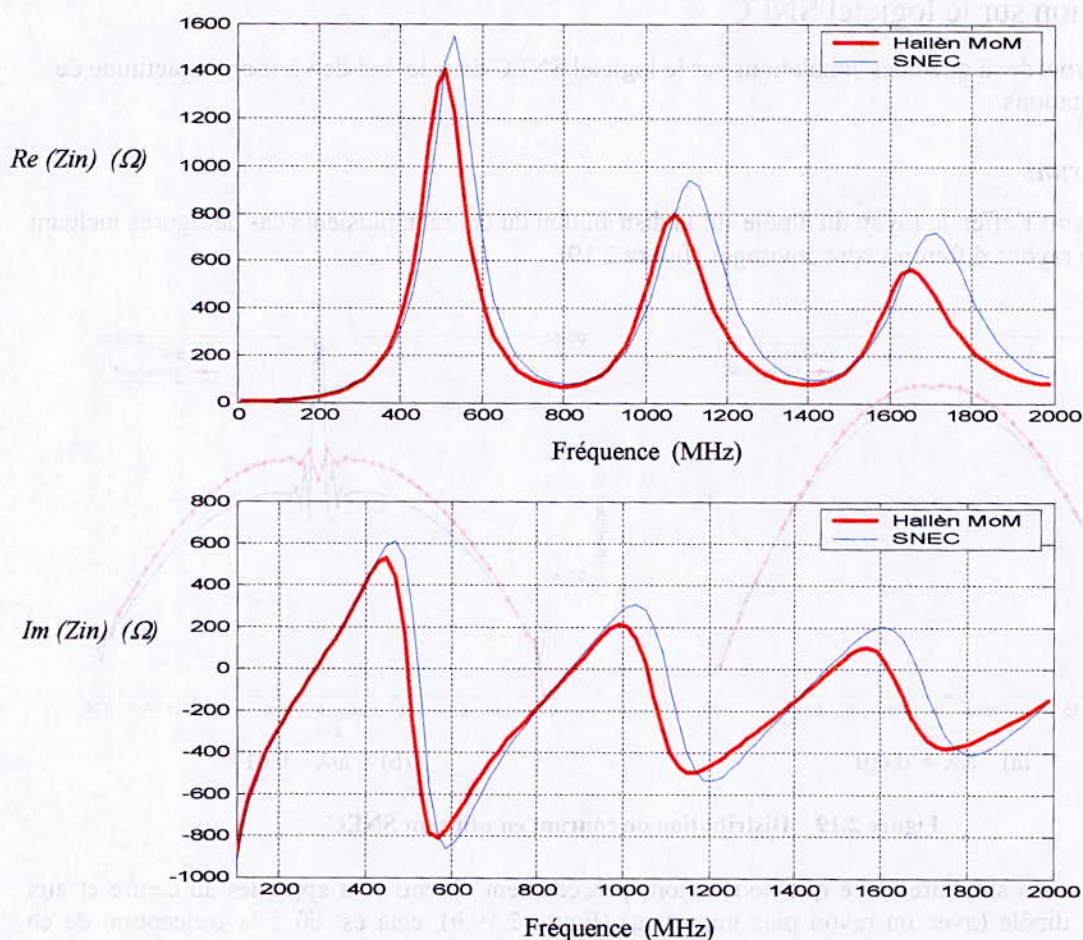
Des oscillations similaires à ce que nous avons précédemment obtenu sont apparues au centre et aux extrémités du dipôle (avec un rayon plus important) (figure 2.19.b), cela est dû à la conception de ce logiciel. En effet, fondé sur l'utilisation de la méthode des moments [18], ses concepteurs ont adopté les mêmes approximations concernant la supposition d'un courant axial et la non considération des effets des surfaces latérales. De plus ils ont adopté un modèle de source de type fente infinitésimale (delta gap) que nous avons constaté ses limites dans la section précédentes.

Ce logiciel présente alors les mêmes limitations que notre implémentation à savoir, un domaine restreint aux antennes de faible diamètre.

2.4.2 Impédance d'entrée et bande passante

La détermination des variations de l'impédance d'entrée en fonction de la fréquence est d'une importance capitale lors de l'étude des antennes

Les figures suivantes représentent les parties réelles et imaginaires de l'impédance d'entrée d'un dipôle déterminées à partir de notre implémentation de l'équation intégrale de Hallén. Ces résultats sont confrontés avec ceux issus du logiciel SNEC.



**Figure 2.20 Impédance d'un dipôle en fonction de la fréquence ($a/\lambda = 0.001$)
 $L = 0.5$ m**

Nous constatons :

- Une grande similitude entre le résultat obtenu à partir de notre implémentation de l'équation de Hallén avec celui tracé à l'aide du logiciel SNEC. Il faut noter que les calculs sont effectués pour un rayon négligeable du dipôle.
- Les points de résonance correspondent à une partie imaginaire de l'impédance d'entrée nulle. La première résonance est située au voisinage d'une fréquence de 300MHz avec une partie réelle de l'impédance d'entrée égale à environ 75Ω .
- D'autres points de résonance sont observés à des fréquences multiples impaires de 300Mhz (ce qui est équivalent à des longueurs multiples impaires de $\lambda/2$).
- La courbe de la figure (2.20) présente des pics à des fréquences multiples paires de 300MHz (ce qui correspond à des longueurs égales à $\lambda, 2\lambda, \dots$), ce sont des fréquences d'anti-résonance avec une partie imaginaire nulle. Théoriquement, ces fréquences d'anti-résonance doivent présenter une impédance infinie à cause de la valeur nulle du courant au point d'alimentation (figure2.21). Mais en réalité, il existe toujours un petit courant qui circule dans le circuit d'excitation.

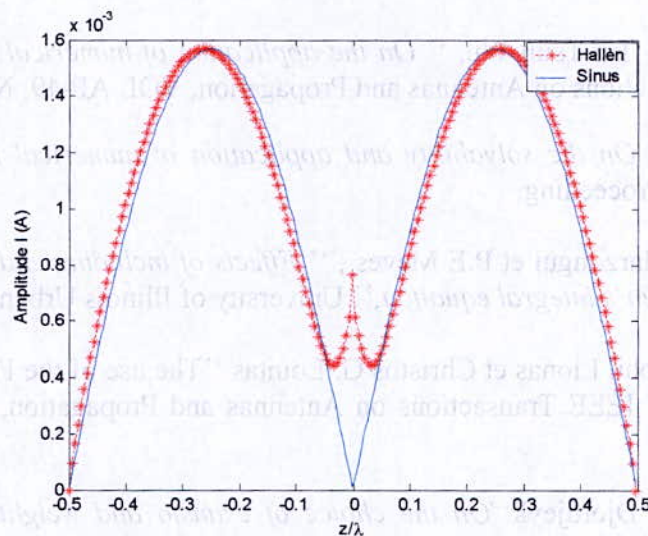


Figure 2.21 La distribution de courant pour un dipôle de longueur $L=\lambda$

Conclusion

La convergence de la solution dépend de plusieurs facteurs tels que :

- Le choix des fonctions (base / test).
- Le modèle de source utilisé.
- Le nombre de subdivisions utilisées.

Les deux approches (Pocklington et Hallén) présentent des imperfections quand le rayon du dipôle augmente. Ceci est dû à l'approximation grossière qui a été opérée lors de la simplification de l'expression du noyau (équation 2.52).

Bibliographie du chapitre 2 :

- [1] C.A.Balanis, *ANTENNA THEORY : Analysis and design* , Harper & Row, Publishers, 1996.
- [2] Sophocles J. Orfanidis, *Electromagnetic Waves and Antennas*, Rutgers University www.ece.rutgers.edu/orfanidi/ewa
- [3] R.Aksas, *Antennes et propagation* , notes de cours, ENP, année 2004-2005.
- [4] TAPAN K .SARKAR, " *A note on the choice of weighting functions in the Method of Moments,*" IEEE Transactions on Antennas and Propagation, VOL AP-33, No 4, April 1985.
- [5] C.A KLEIN et R.MITTRA, " *The effect of different testing functions in the Moment Method Solution of Thin-Wire Antenna Problems,*" IEEE Transactions on Antennas and Propagation, March 1975.
- [6] Yu SHUAN YEH , Kenneth K. MEI " *Theory of Conical Equiangular-spiral Antennas Part I – Numerical Technique ,*" IEEE Transactions on Antennas and Propagation, VOL AP-15, No 5, September 1967.

- [7] George Fikioris et Tai Tsun Wu, " *On the application of numerical methods to Hallén's Equation,*" IEEE Transactions on Antennas and Propagation, VOL AP-49, No 3, March 2001.
- [8] George Fikioris, " *On the solvability and application of numerical methods to Hallén's equation ,*" MMET 02 Proceeding.
- [9] A.B Kouki, A.M Marzougui et P.E Meyes , " *Effects of including end caps in the Moment Method Solution of Hallén's integral equaiton,*" University of Illinois Urbana IL61801
- [10] George Fikioris, John Lionas et Christos G. Louitas "The use of the Frill Generator in thin wire integral equation," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, VOL AP-51, No 8, August 2003.
- [11] Tapan Sarkar, R Djordjevk' *'On the choice of exansio and weighting functions in the numerical solution of operator equations ,*" IEEE Transactions on Antennas and Propagation, VOL AP-33, No 9, September 1975.
- [12] G Tjihuis, Peng Zhongui " *Transient excitation of a straight thin wire segment : a new look for an old problem,*" IEEE Transactions on Antennas and Propagation, VOL 40, No 10, October1992.
- [13] Wilson Pearson et M. Butler, " *Inadequacies of collocation solutions to Pocklington type models of thin wire structures,*" IEEE Transactions on Antennas and Propagation, VOL AP-34, No 9, August 1974.
- [14] R .F Harrington , " *Field computation by Moment Methods,*" New York, Mc Millan, 1958, PP 68-74
- [15] M.Kalundzija, Tapan Sarkar " *On the choice of optimal basis functions for MoM / SIE, MoM /VIE, FEM and Hybrid Methods ,*" IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1998 0-7803-4478-2/98
- [16] M.Kalundzija, " *Comparison of a class of subdomain and entire domain basis functions automatically satisfying KCL ,*" IEEE Transactions on Antennas and Propagation, VOL AP-44, No 10, October 1996
- [17] M.Kalundzija, " *Effect of a wire end in thin wire analysis ,*" University of Belgrade.
- [18] G.J Burke , A.J Poggio, " *Numerical Electromagnetic Code (NEC) "*, Lawrence Livermore Laboratory.
- [19] M. Butler et D.R Wilton, " *Analysis of various Numerical Techniques Applied to thin wire scatterers ,*" IEEE Transactions on Antennas and Propagation, July1975.
- [20] L. Pearson, M butler, " *Some Weaknesses of delta function testing in Methodof Moments solutions to Pocklington type models*" , University of Mississippi.

Chapitre3

Autres approches pour l'application du **noyau**

Nous nous proposons dans ce chapitre d'appliquer à l'équation intégrale de *pocklington*, une autre forme du noyau plus précise que celle utilisée jusqu'à présent. On commencera par comparer les trois formes du noyau pour déterminer les conditions qui dicteront le choix optimal d'une des expressions proposées lors l'application de *l'expression de Wang* aux deux équations intégrales. Une analyse rigoureuse et approfondie de ces résultats, nous permettra de déterminer les avantages ainsi que les inconvénients liés à l'utilisation d'une telle approche. Enfin, on proposera une approche hybride qui permettra d'améliorer les résultats et la vitesse d'exécution du programme d'analyse.

Chapitre 3

Autres approches pour l'application du

NOYAU

Vous nous proposez dans ce chapitre d'appliquer à l'équation générale de Poisson une autre forme du noyau plus précise que celle utilisée jusqu'à présent. On commencera par comparer les trois formes du noyau pour déterminer les conditions qui doivent être choisies pour obtenir les expressions proposées pour l'application de l'équation de Poisson aux deux conditions aux limites. Les résultats obtenus et approchés de ces résultats nous permettront de déterminer les avantages ainsi que les inconvénients liés à l'utilisation d'une telle approche. Enfin, on pourra une approche hybride qui permettra d'obtenir les résultats de la vitesse d'exécution du programme d'analyse.

3.1 Études des différentes formes du noyau

Dans le but de faciliter la compréhension du comportement des différentes formes du noyau, nous allons procéder à une étude comparative de ces expressions.

Nous avons vu au chapitre 2 qu'en prenant $\phi' = 0$ et $\rho = a$, l'expression du noyau s'écrit

$$G(z - z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR_0}}{R_0} d\phi \quad (3.1)$$

avec

$$R_0 = \sqrt{R^2 - 2a^2 \cos \phi}$$

et

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + 2a^2}$$

La relation (3.1) représente la forme exacte du noyau (G exacte). Cependant, il est impossible d'appliquer cette forme aux équations intégrales (*Hallen et Pocklington*), car son intégrand présente une singularité au point où la source coïncide avec l'observation ($z = z'$).

Par ailleurs, en considérons le rayon 'a' très petit devant la longueur d'onde et celle de l'antenne, nous avons abouti dans ce qui précède à la forme approximée du noyau (G approximé), qui s'écrit

$$G(z - z') = \frac{e^{-jk\sqrt{(z-z')^2 + a^2}}}{\sqrt{(z - z')^2 + a^2}} \quad (3.2)$$

Nous avons montré au chapitre précédent que l'utilisation de cette forme n'est valable que pour un rayon très petit.

Dans ce qui suit, nous allons exposer le développement proposé par Wang [1] qui permet l'éliminer la singularité sans aucune approximation

En faisant appel à la formule de *Watson* [2], la relation (3.1) devient

$$k^{1/2} R_0^{1/4} J_{-1/2}(kR_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k^2 a^2 \cos \phi)^m}{m!} (kR)^{\frac{1-2m}{2}} J_{-1/2+m}(kR) \quad (3.3)$$

$$k^{1/2} R_0^{1/4} J_{1/2}(kR_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-k^2 a^2 \cos \phi)^m}{m!} (kR)^{\frac{1-2m}{2}} J_{1/2-m}(kR) \quad (3.4)$$

où J_ν est la fonction de *Bessel* d'ordre ν .

D'après les équations (3.3) et (3.4), on obtient

$$\cos(kR_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k^2 a^2)^m \cos^m \phi}{m! (kR)^{m-1}} J_{m-1}(kR) \quad (3.5)$$

$$\sin(kR_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (k^2 a^2)^m \cos^m \phi}{m! (kR)^{m-1}} j_{-m}(kR) \quad (3.6)$$

où j_ν est la fonction sphérique de *Bessel* d'ordre ν .

En multipliant la relation (3.6) par le nombre imaginaire j ($j = \sqrt{-1}$) et en l'additionnant avec la relation (3.5), on obtient

$$e^{-jkR_0} = e^{-jkR} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(k^2 a^2)^m h_{m-1}^{(2)}(kR)}{m! (kR)^{m-1}} \cos^m \phi \quad (3.7)$$

où $h_\nu^{(2)}$ représente la fonction de *Hankel* sphérique du deuxième rang d'ordre ν .

En combinant la relation (3.1) et la relation (3.7), nous obtenons la représentation finale (selon Wang) du noyau de convolution

$$G(z-z') = \frac{e^{-jkR}}{R} - jk \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k^2 a^2)(2n-1)!!}{(2n)!(2n)!!} \frac{h_{2n}^2(kR)}{(kR)^{2n}} \quad (3.8)$$

Werner [3] a simplifié la relation (3.8), alors, l'expression de Wang (*G Wang*) devient

$$G(z) = \frac{e^{-jkR}}{R} \left[1 - \binom{1/2}{n} jk \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{u=0}^{2n} \frac{(2n-1)!!}{(2j)^u} D(n,u) \frac{(ka)^{4n}}{(kR)^{2n+u}} \right] \quad (3.9)$$

où

$$\binom{x}{n} = \begin{cases} \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} & n > 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

et

$$D(n,u) = \frac{(2n+u)!}{u! 2n! (2n-u)!}$$

Lors de l'implémentation, on limite la première somme à un ordre égale a 'q', l'expression de Wang devient

$$G(z) = \frac{e^{-jkR}}{R} \left[1 - \binom{1/2}{n} jk \sum_{n=1}^q \sum_{u=0}^{2n} \frac{(2n-1)!!}{(2j)^u} D(n,u) \frac{(ka)^{4n}}{(kR)^{2n+u}} \right] \quad (3.10)$$

3.2 Implémentation des trois formes du noyau

La figure 3.1 représente la variation des trois formes du noyau en fonction de la distance 'z', pour une valeur du rayon 'a' faible pouvant être négligée et une valeur plus importante non négligeable.

La figure 3.2 représente l'influence du rayon de l'antenne sur les trois expressions du noyau et la distance z comme paramètre.

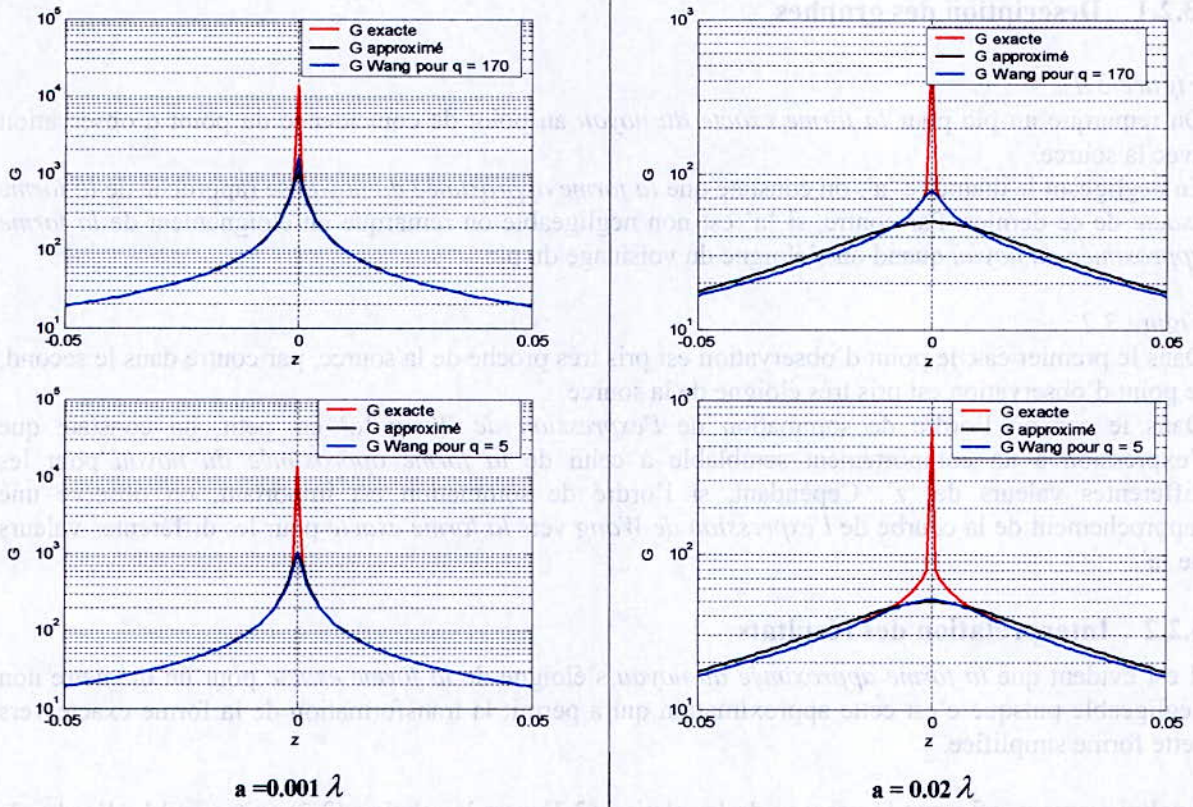


Figure 3.1 variation des trois formes du noyau en fonction de la distance séparant la source du point d'observation 'z'.

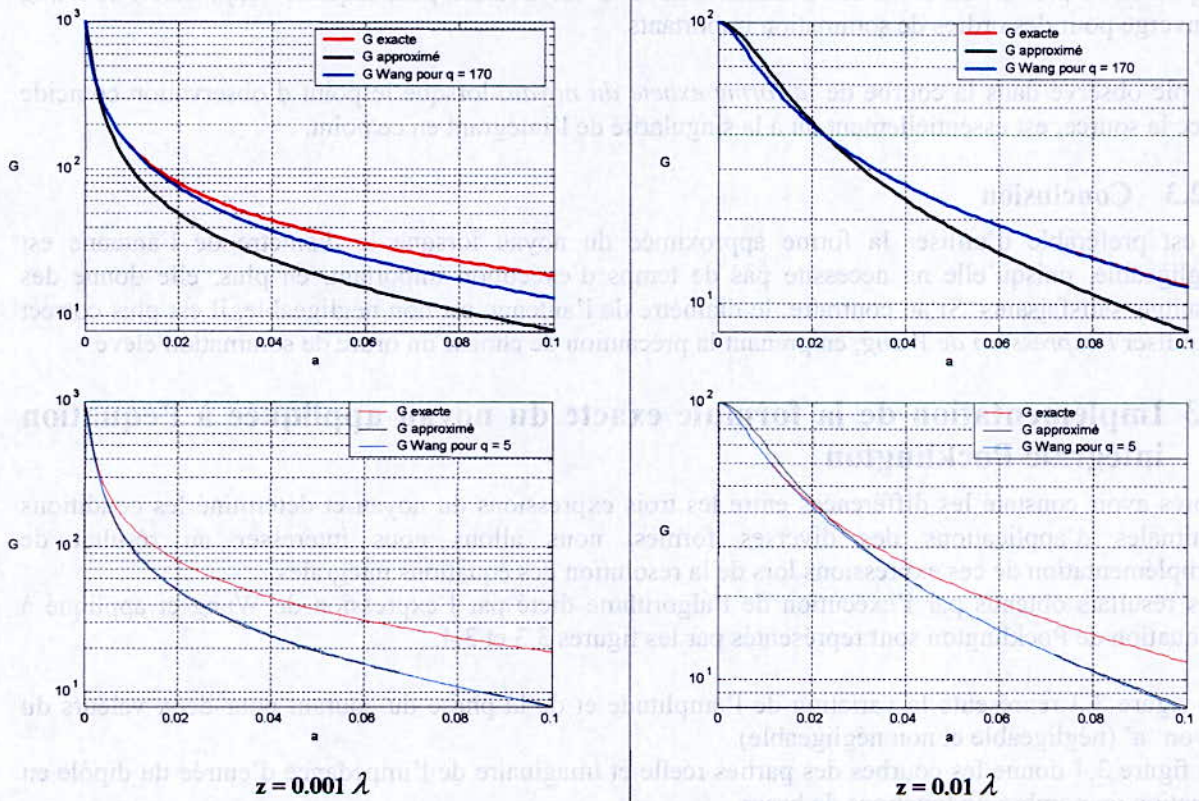


Figure 3.2 variation des trois formes du noyau en fonction du rayon de l'antenne dipôle 'a'.

3.2.1 Description des graphes

Figure 3.1

On remarque un pic pour *la forme exacte du noyau* au point de coïncidence du point d'observation avec la source.

En négligeant le diamètre 'a', on constate que *la forme approximée du noyau* se rapproche de *la forme exacte* de ce dernier. Par contre, si 'a' est non négligeable on remarque un éloignement de *la forme approximée du noyau* quand on s'éloigne du voisinage du pic.

Figure 3.2

Dans le premier cas, le point d'observation est pris très proche de la source, par contre dans le second, le point d'observation est pris très éloigné de la source.

Dans le cas où l'ordre de sommation de *l'expression de Wang* 'q' est petit, on constate que l'expression a un comportement semblable à celui de *la forme approximée du noyau* pour les différentes valeurs de 'z'. Cependant, si l'ordre de sommation est important, on observe une rapprochement de la courbe de *l'expression de Wang* vers *la forme exacte* pour les différentes valeurs de 'a'.

3.2.2 Interprétation des résultats

Il est évident que *la forme approximée du noyau* s'éloigne de *la forme exacte* pour un diamètre non négligeable puisque c'est cette approximation qui a permis la transformation de la forme exacte vers cette forme simplifiée.

Analytiquement, afin que le passage de la relation (3.1) vers la relation (3.7) soit possible, l'ordre de sommation doit être infini. Donc pour approcher au maximum la première relation, il est très important de prendre un ordre de sommation élevé. C'est la raison pour laquelle *l'expression de Wang* converge pour des ordres de sommation importants.

Le pic observé dans la courbe de *la forme exacte du noyau*, lorsque le point d'observation coïncide avec la source, est essentiellement dû à la singularité de l'intégrand en ce point.

3.2.3 Conclusion

Il est préférable d'utiliser la forme approximée du noyau lorsque le diamètre de l'antenne est négligeable, puisqu'elle ne nécessite pas de temps d'exécution important, en plus, elle donne des résultats satisfaisants. Si au contraire, le diamètre de l'antenne est non négligeable, il est plus correct d'utiliser *l'expression de Wang*, en prenant la précaution de choisir un ordre de sommation élevé.

3.3 Implémentation de la formule exacte du noyau appliquée à l'équation intégrale Pocklington

Après avoir constaté les différences entre les trois expressions du noyau et déterminé les conditions optimales d'applications des diverses formes, nous allons nous intéresser au résultat de l'implémentation de ces expressions lors de la résolution des équations intégrales.

Les résultats obtenus par l'exécution de l'algorithme dicté par l'expression de Wang et appliqué à l'équation de Pocklington sont représentés par les figures 3.3 et 3.4.

La figure 3.3 représente la variation de l'amplitude et de la phase du courant pour deux valeurs du rayon 'a' (négligeable et non négligeable).

La figure 3.4 donne les courbes des parties réelle et imaginaire de l'impédance d'entrée du dipôle en fonction du nombre de fonctions de bases.

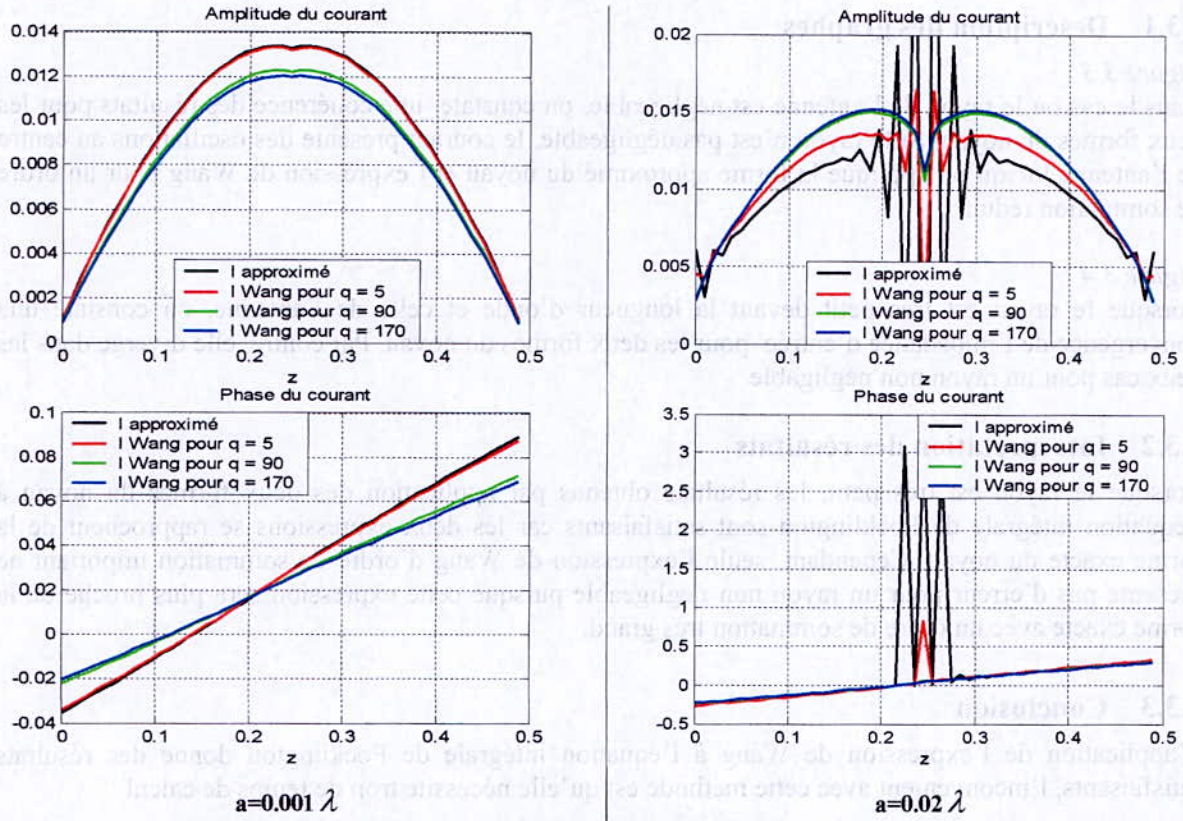


Figure 3.3 distribution du courant le long du dipôle pour un nombre de fonctions de base $N = 51$. Equation intégrale Pocklington. Fonctions de base Piecewise sinus. Fonctions de test impulsion Dirac.

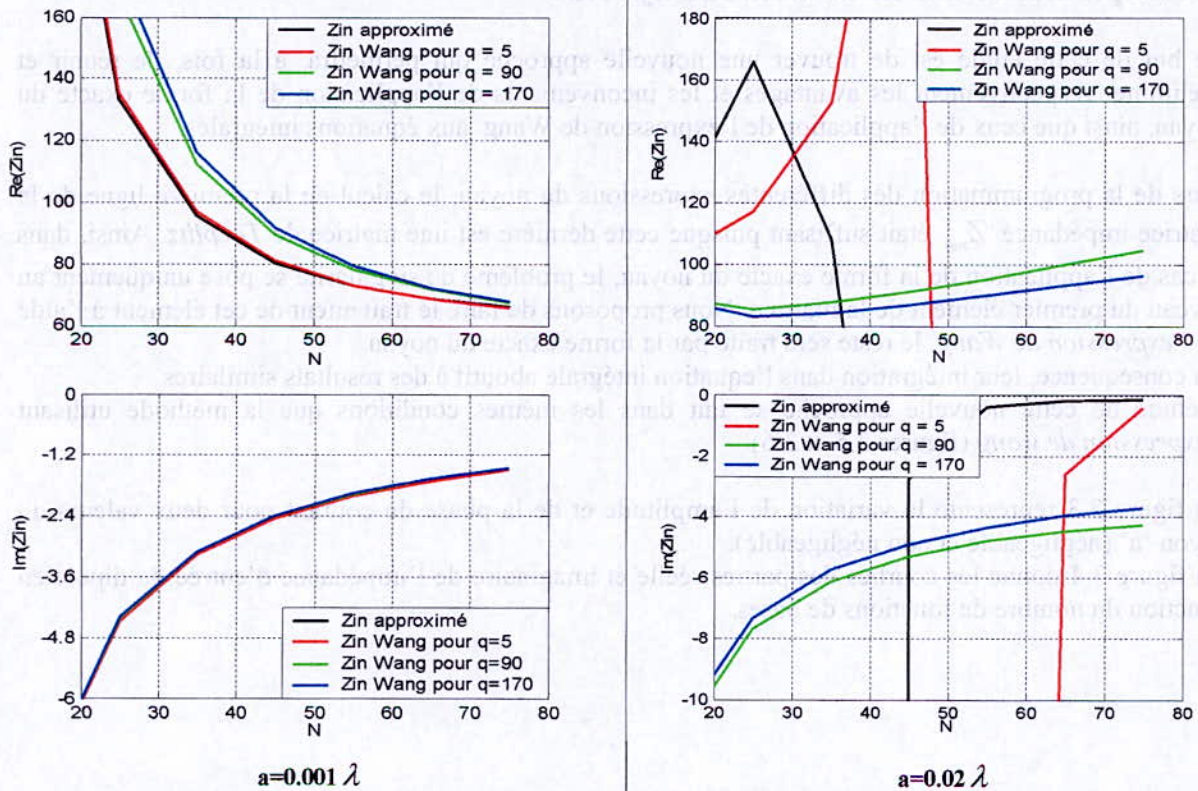


Figure 3.4 impédance d'entrée d'une antenne dipôle demi onde en fonction du nombre de fonctions de base N . Equation intégrale Pocklington. Fonctions de base Piecewise sinus. Fonctions de test impulsion Dirac.

3.3.1 Description des graphes

Figure 3.3

Dans le cas où le rayon de l'antenne est négligeable, on constate une cohérence des résultats pour les deux formes du noyau. Si le rayon n'est pas négligeable, le courant présente des oscillations au centre de l'antenne lorsqu'on applique la forme approximé du noyau et l'expression de Wang pour un ordre de sommation réduit.

Figure 3.4

Lorsque le rayon est très petit devant la longueur d'onde et celle de l'antenne, on constate une convergence de l'impédance d'entrée pour les deux formes du noyau. Par contre, elle diverge dans les deux cas pour un rayon non négligeable.

3.3.2 Interprétation des résultats

Lorsque le rayon est très petit, les résultats obtenus par application des deux formes du noyau à l'équation intégrale de Pocklington sont satisfaisants car les deux expressions se rapprochent de la forme exacte du noyau. Cependant, seule l'expression de Wang d'ordre de sommation important ne présente pas d'erreur pour un rayon non négligeable puisque cette expression sera plus proche de la forme exacte avec un ordre de sommation très grand.

3.3.3 Conclusion

L'application de l'expression de Wang à l'équation intégrale de Pocklington donne des résultats satisfaisants, l'inconvénient avec cette méthode est qu'elle nécessite trop de temps de calcul.

3.4 Implémentation de la méthode hybride

Le but de cette étude est de trouver une nouvelle approche qui permettra, à la fois, de réunir et d'éliminer respectivement les avantages et les inconvénients de l'application de la forme exacte du noyau, ainsi que ceux de l'application de l'expression de Wang aux équations intégrales.

Lors de la programmation des différentes expressions du noyau, le calcul de la première ligne de la matrice impédance Z_{nm} était suffisant puisque cette dernière est une matrice de *Toeplitz*. Ainsi, dans le cas de l'application de la forme exacte du noyau, le problème de singularité se pose uniquement au niveau du premier élément de la matrice. Nous proposons de faire le traitement de cet élément à l'aide de l'expression de Wang, le reste sera traité par la forme exacte du noyau.

En conséquence, leur intégration dans l'équation intégrale aboutit à des résultats similaires.

L'étude de cette nouvelle approche se fait dans les mêmes conditions que la méthode utilisant l'expression de wang (figures 3.5 et 3.6).

La figure 3.3 représente la variation de l'amplitude et de la phase du courant pour deux valeurs du rayon 'a' (négligeable et non négligeable).

La figure 3.4 donne les courbes des parties réelle et imaginaire de l'impédance d'entrée du dipôle en fonction du nombre de fonctions de bases.

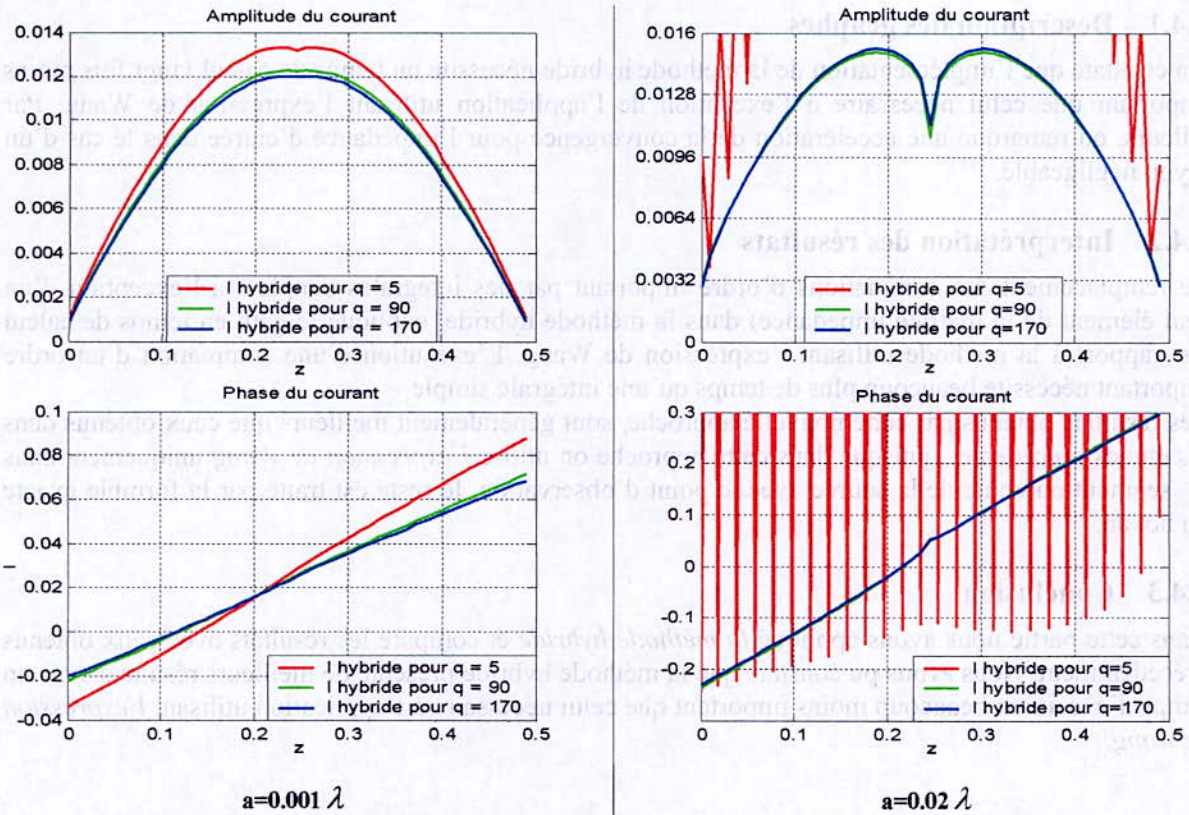


Figure 3.5 représente le courant en fonction de la distance z pour un nombre de fonctions de base $N=51$. équation intégrale Pocklington avec la méthode hybride. Fonctions de base *Piecewise sinus*. Fonctions de test *impulsion Dirac*.

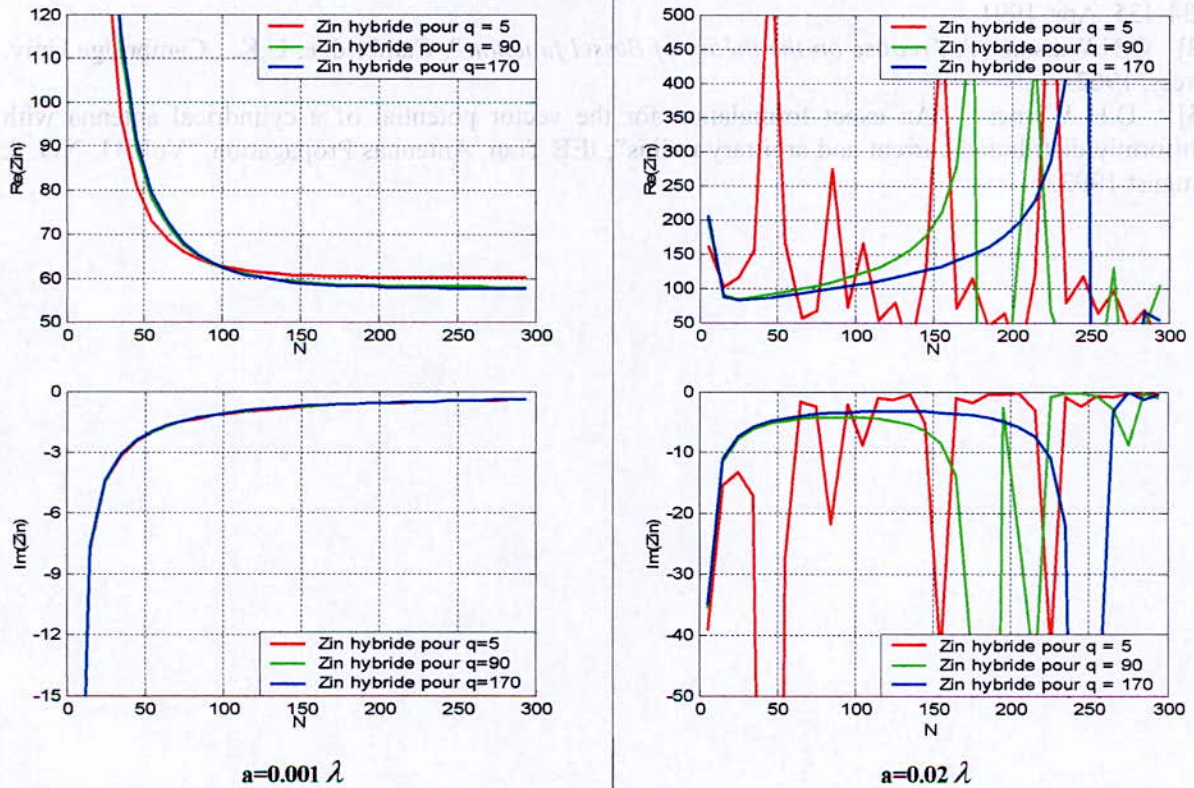


Figure 3.6 représente l'impédance d'entrée d'une antenne dipôle demi onde en fonction du nombre de fonctions de base N . Pocklington équation intégrale. Fonctions de base *Piecewise sinus*. Fonctions de test *impulsion Dirac*.

3.4.1 Description des graphes

On constate que l'implémentation de la méthode hybride nécessite un temps de calcul vingt fois moins important que celui nécessaire à l'exécution de l'application utilisant l'expression de Wang. Par ailleurs, on remarque une accélération de la convergence pour l'impédance d'entrée dans le cas d'un rayon négligeable.

3.4.2 Interprétation des résultats

Le remplacement des sommations d'ordre important par des intégrales simples (à l'exception d'un seul élément de la matrice impédance) dans la méthode hybride, explique le gain en temps de calcul par rapport à la méthode utilisant l'expression de Wang. L'exécution d'une sommation d'un ordre important nécessite beaucoup plus de temps qu'une intégrale simple.

Les résultats obtenus par cette nouvelle approche, sont généralement meilleurs que ceux obtenus dans les études précédentes, puisque dans cette approche on utilise *l'expression de Wang* uniquement dans le segment où coïncide la source avec le point d'observation, le reste est traité par la formule exacte du noyau.

3.4.3 Conclusion

Dans cette partie nous avons appliqué *la méthode hybride* et comparé les résultats avec ceux obtenus précédemment. Nous avons pu constater que la méthode hybride présente de meilleurs résultats avec un temps d'exécution beaucoup moins important que celui nécessaire à l'application utilisant *l'expression de wang*.

Bibliographie du chapitre3

- [1] W.Wang, "The exact kernel for cylindrical antenna", IEE Tran. Antennas Propagat., Vol. 39, pp. 434-435, Apr. 1991.
- [2] G.N.Watson, "A *Treatise on the théory of Bessel function*". Cambridge, U.K. : Cambridge Univ. Press, 1962.
- [3] D.H Werner "An exact formulation for the vector potential of a cylindrical antenna with uniformly distributed current and arbitrary radius", IEE Tran. Antennas Propagation,. Vol. 41. NO. 8. August 1993.

Chapitre 4

Couplage inter-éléments

Ce chapitre traitera le cas d'une disposition de dipôles parallèles. Nous commencerons par formuler une expression générale de l'impédance mutuelle caractérisant le phénomène du couplage. Après avoir généralisé l'équation de Hallén pour cette disposition, nous nous intéresserons à l'application de la méthode des moments pour la résoudre. Les résultats obtenus seront comparés à quelques simulations à l'aide du logiciel SNEC en traitant un type particulier d'antennes à large bande.

Chapitre 4 Couplage inter-éléments

Le couplage inter-éléments est une notion qui se définit par la relation entre les degrés de liberté des éléments qui sont connectés à un nœud commun. Les degrés de liberté des éléments qui sont connectés à un nœud commun sont regroupés dans un vecteur global. Les degrés de liberté des éléments qui sont connectés à un nœud commun sont regroupés dans un vecteur global. Les degrés de liberté des éléments qui sont connectés à un nœud commun sont regroupés dans un vecteur global.

4.1 Introduction

Dans les chapitres 2 et 3, nous avons introduit la notion d'impédance d'entrée en supposant que le dipôle rayonne dans un milieu infini. Cependant, la présence d'un obstacle ou d'une autre antenne au voisinage de ce dipôle modifie la distribution du courant [1], l'impédance d'entrée et le champ rayonné. Ainsi, les caractéristiques d'une antenne ne dépendent pas uniquement de son propre courant mais aussi des courants des éléments avoisinants.

Considérons un élément rayonnant dépourvu de source d'excitation (non alimenté). Il est possible d'observer la présence d'un courant induit par d'autres sources rayonnantes disposées au voisinage de ce dernier, c'est le phénomène de *couplage*. Ces éléments sont appelés *parasites* et modifient considérablement les performances des antennes à géométrie complexe.

Dans ce qui suit, nous mettrons l'accent sur ces performances et les avantages que présentent ces structures par rapport aux antennes isolées.

4.2 Le champ proche d'une antenne filaire

La connaissance du champ proche au voisinage d'une antenne est primordiale pour l'étude de phénomène de couplage. Ainsi nous entamons ce chapitre par la détermination des expressions des différentes composantes du champ proche mentionnées sur la figure (4.1).

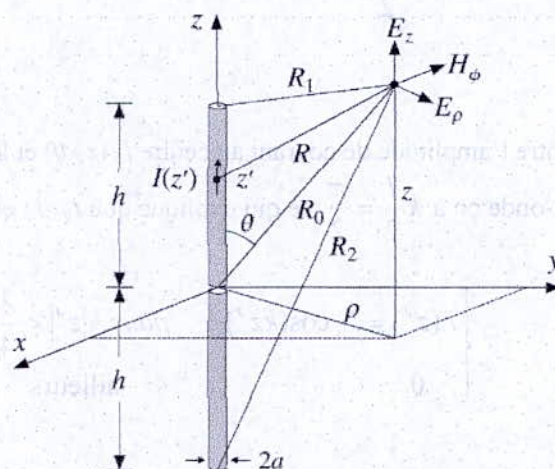


Figure 4.1 Configuration de l'antenne à analyser

Comme il a été montré au chapitre 2, les composantes du champ peuvent être extraites à partir d'une composante du vecteur potentiel magnétique $A_z(z, \rho)$ donnée par [1]

$$A_z(z, \rho) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} I(z') \frac{e^{-jkR}}{R} dz' \quad (4.1)$$

avec :

$$R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$$

Les composantes E_z , E_ρ et H_ϕ sont écrites en fonction de A_z comme suit

$$j\omega\mu\epsilon E_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_z + k^2 A_z \quad (4.2.a)$$

$$j\omega\mu\epsilon E_\rho = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial z} A_z \quad (4.2.b)$$

$$\mu H_\phi = -\frac{\partial}{\partial \rho} A_z \quad (4.2.c)$$

Dans ce qui suit on admettra les notations suivantes : $\frac{\partial}{\partial z} = \partial_z$ et $\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \partial_z^2$

Au cours de ce développement on suppose une distribution sinusoïdale du courant le long de l'antenne (dipôle demi-onde de rayon négligeable)

$$\begin{cases} I(z') = I_0 \frac{\sin\left(k\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right)}{\sin k\frac{l}{2}} = I_m \sin\left(k\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right) & \text{pour } |z'| < \frac{l}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.2)$$

Il faut distinguer ici entre l'amplitude de courant au centre I_0 ($z=0$) et le courant maximum I_m .

Pour des dipôles demi-onde on a $k\frac{l}{2} = \frac{\pi}{2}$ ce qui explique que $I_0 = I_m$ et le courant devient

$$\begin{cases} I(z') = I_0 \cos(kz') & \text{pour } |z'| < \frac{\lambda}{4} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

En combinant les équations (4.1) et (4.2.a) on forme l'équation intégrale de Pocklington vue précédemment

$$\frac{\mu}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} I(z') (\partial_z^2 + k^2) G(z - z') dz' = j\omega\mu\epsilon E_z \quad (4.3)$$

où $G(z - z') = \frac{e^{-jkR}}{R}$ et E_z la composante suivant z du champ proche.

On utilise l'identité différentielle suivante

$$I(\partial_z^2 + k^2)G - G(\partial_z^2 + k^2)I = \partial_z [I\partial_z G - G\partial_z I] \quad (4.4)$$

Supposé sinusoïdal, le courant satisfait l'équation de Helmholtz

$$\left(\partial_z^2 + k^2\right)I(z') = 0 \quad (4.5)$$

En vertu des équations (4.4) et (4.5), l'intégrand de l'équation (4.3) devient

$$I(z')\left(\partial_z^2 + k^2\right)G(z-z') = \partial_z \left[I(z')\partial_z G(z-z') - G(z-z')\partial_z I(z') \right] \quad (4.6)$$

Le courant vérifie les conditions aux limites, donc, l'intégration du premier terme du deuxième membre de l'équation (4.7) devient

$$\int_{-h}^h \partial_z \left[I(z')\partial_z G(z-z') \right] dz' = I(h)\partial_z G(z-h) - I(-h)\partial_z G(z+h) = 0$$

Comme $\partial_z I(z')$ présente une discontinuité en $z'=0$ (effet de la fente infinitésimale), le second terme sera intégré comme suit

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \partial_z \left[G(z-z')\partial_z I(z') \right] dz' &= \left(\int_{-h}^0 + \int_0^h \right) \partial_z \left[G(z-z')\partial_z I(z') \right] dz' \\ &= \left[G(z)I'(0^-) - G(z+h)I'(-h) \right] + \left[G(z-h)I'(h) - G(z)I'(0^+) \right] \\ &= kI_m \left[2 \cos kh G(z) - G(z-h) - G(z+h) \right] \end{aligned}$$

où, à partir de (4.2), $I'(0^\pm) = \mp kI_m \cos kh$ et $I'(\pm h) = \mp kI_m$

La composante du champ proche suivant z est finalement

$$E_z(z, \rho) = \frac{-j\eta I_m}{4\pi} \left[\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} - 2 \cos kh \frac{e^{-jkR_0}}{R_0} \right] \quad (4.7)$$

η est l'impédance d'onde.

$R_0 = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ est la distance séparant le point d'observation et le centre du dipôle

$R_1 = \sqrt{\rho^2 + (z-h)^2}$ $R_2 = \sqrt{\rho^2 + (z+h)^2}$ sont les distances séparants le point d'observation des deux extrémités respectivement.

De la même façon les autres composantes peuvent être déterminées aisément comme suit

$$H_{\phi}(z, \rho) = \frac{jI_m}{4\pi} \left[e^{-jkR_1} + e^{-jkR_2} - 2 \cos kh e^{-jkR_0} \right] \quad (4.8)$$

et :

$$E_{\rho}(z, \rho) = \frac{-j\eta I_m}{4\pi\rho} \left[(z-h) \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + (z+h) \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} - 2z \cos kh \frac{e^{-jkR_0}}{R_0} \right] \quad (4.9)$$

4.3 Impédance propre et impédance mutuelle

Considérons deux dipôles (1) et (2) parallèles séparés horizontalement d'une distance d et verticalement d'une distance b (figure 4.2).

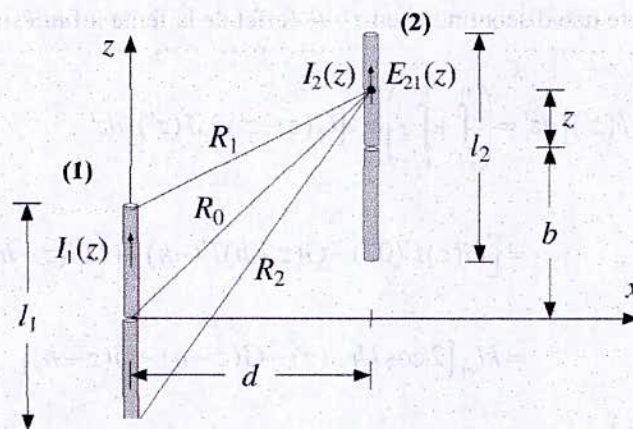


Figure 4.2 Alignement de dipôles parallèles

L'excitation est faite uniquement sur le dipôle (1). Il en découle, par couplage, une tension V_{21} dans le dipôle (2). L'impédance mutuelle est définie alors comme suit :

$$Z_{21} = \frac{V_{21}}{I_1} \quad (4.10)$$

où I_1 est le courant d'entrée du dipôle (1).

En général, si les deux dipôles sont alimentés on peut écrire [3]

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \quad (4.11)$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

Z_{11} et Z_{22} sont les impédances propres des deux antennes et sont définies comme étant leurs impédances d'entrée dans le cas où elles seraient isolées.

Si le dipôle (2) n'est pas alimenté et la composante suivant z du champ électrique généré par le dipôle 1 et incident sur le dipôle 2 est $E_{21}(z)$. La tension induite dans le dipôle 2 est donnée par

$$V_{21} = -\frac{1}{I_2} \int_{-h_2}^{h_2} E_{21}(z) I_2(z) dz \quad (4.12)$$

où $h_2 = \frac{l_2}{2}$

A partir de la définition (4.11) on peut exprimer l'impédance mutuelle comme suit

$$Z_{21} = -\frac{1}{I_1 I_2} \int_{-h_2}^{h_2} E_{21}(z) I_2(z) dz \quad (4.13)$$

I_1 et I_2 sont les courants d'entrée des dipôles 1 et 2.

A partir de l'équation (4.7) le champ $E_{21}(z)$ est donné par

$$E_{21}(z) = \frac{-j\eta I_{m1}}{4\pi} \left[\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} - 2 \cos kh_1 \frac{e^{-jkR_0}}{R_0} \right] \quad (4.14)$$

avec :

$$\begin{aligned} R_0 &= \sqrt{d^2 + b^2} \\ R_1 &= \sqrt{d^2 + (z + b - h_1)^2} \\ R_2 &= \sqrt{d^2 + (z + b + h_1)^2} \end{aligned}$$

l'impédance mutuelle devient alors

$$Z_{21} = \frac{j\eta}{4\pi \sin kh_1 \sin kh_2} \int_{-h_2}^{h_2} F(z) dz \quad (4.15)$$

avec :

$$F(z) = \left[\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} - 2 \cos kh_1 \frac{e^{-jkR_0}}{R_0} \right] \sin(k(h_2 - |z|)) \quad (4.16)$$

L'expression (4.15) représente l'impédance mutuelle déduite de la méthode EMF [2]. Cette méthode suppose que la distribution du courant est sinusoïdale.

L'impédance propre peut être déduite facilement de l'équation (4.15) en posant

$$d = 0 \quad l_1 = l_2 \quad b = 0 :$$

$$Z_{11} = \frac{j\eta}{4\pi \sin^2 kh_1} \int_{-h_1}^{h_1} F(z) dz$$

avec

$$F(z) = \left[\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} - 2 \cos kh_1 \frac{e^{-jkR_0}}{R_0} \right] \sin(k(h_1 - |z|))$$

$$\text{et} \quad R_0 = \sqrt{a^2 + z^2} \quad R_1 = \sqrt{a^2 + (z - h_1)^2} \quad R_2 = \sqrt{a^2 + (z + h_1)^2}$$

4.4 Formulation de l'équation de Hallén pour les dipôles parallèles

Considérons deux dipôles parallèles (figure 4.3). Le centre de l'antenne d'indice p ($p = 1, 2$) se situe en (x_p, y_p) . Les tensions d'alimentation, les courants, les longueurs, et les rayons sont respectivement V_p , I_p , L_p et a_p .

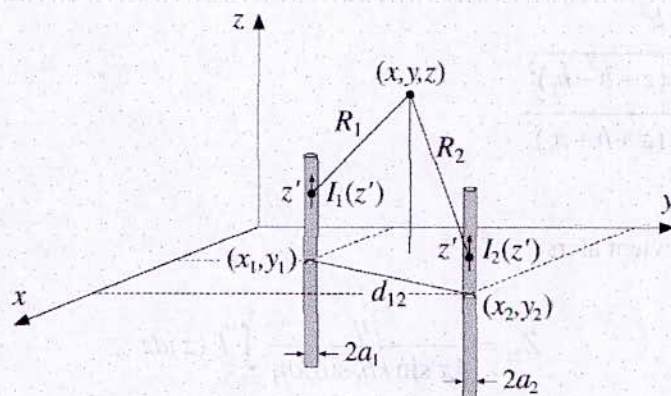


Figure 4.3 Couplage entre dipôles parallèles

En admettant les approximations du paragraphe 2.1.2, la densité du courant total aura une seule composante suivant z :

$$J_z(x', y', z') = I_1(z') \delta(x' - x_1) \delta(y' - y_1) + I_2(z') \delta(x' - x_2) \delta(y' - y_2) \quad (4.16)$$

Le potentiel vecteur magnétique est donné sous la forme

$$A_z(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{e^{-jkR}}{R} J_z(x', y', z') dx' dy' dz', \quad R = |r - r'| \quad (4.17)$$

En introduisant l'équation (2.17) dans (2.18) nous écrivons

$$A_z(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-h_1}^{h_1} \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} I_1(z') dz' + \frac{\mu}{4\pi} \int_{-h_2}^{h_2} \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} I_2(z') dz' \quad (4.18)$$

où R_1 et R_2 sont les distances qui séparent un point z' sur chaque dipôle du point d'observation (x, y, z) (figure 4.3).

telles que

$$R_1 = \sqrt{(z - z')^2 + (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

et

$$R_2 = \sqrt{(z - z')^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

La composante suivant z du champ électrique induit est

$$j\omega\epsilon\mu E_z = (\partial_z^2 + k^2) A_z \quad (4.19)$$

En utilisant l'équation

$$V(x, y, z) = 2j\epsilon A_z(x, y, z) \quad (4.20)$$

on réécrit l'équation (4.20) sous la forme suivante

$$(\partial_z^2 + k^2) V(x, y, z) = -2kE_z(x, y, z) \quad (4.21)$$

On note par $V_1(z)$ et $V_2(z)$ les valeurs de $V(x, y, z)$ sur les surfaces de l'antenne 1 et 2 respectivement.

On obtient :

$$V_1(z) = V_{11}(z) + V_{12}(z) \quad (4.22)$$

$$V_2(z) = V_{21}(z) + V_{22}(z)$$

En généralisant pour K éléments l'expression (4.22) devient

$$(\partial_z^2 + k^2) \sum_{q=1}^K V_{pq}(z) = -2k \sum_{q=1}^K E_{pq}(z) = 2kV_p \delta(z) \quad (4.23)$$

avec

$$V_{pq}(z) = \frac{j\eta}{2\pi} \int_{-L_q/2}^{L_q/2} G_q(z-z') I_q(z') dz' \quad (4.24)$$

où

$$G_{pq}(z-z') = \frac{e^{-jkR_{pq}}}{R_{pq}} \quad (4.25)$$

$$\text{et } R_{pq} = \sqrt{(z-z')^2 + d_{pq}^2} \text{ avec } d_{pq} = \begin{cases} \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2} & \text{si } p \neq q \\ a_p & \text{si } p = q \end{cases}$$

L'expression (4.24) représente l'équation de Hallén généralisée.

4.4.1 Implémentation

Dans ce qui suit, on expose la solution numérique de l'équation de Hallén généralisée au couplage. On met en œuvre la méthode des moments avec une configuration classique (fonctions de base rectangulaires, fonctions de test Dirac).

Pour l'élément p , la relation (2.29) peut s'écrire comme suit [1]

$$(\partial_z^2 + k^2)V_p(z) = 2kV_p\delta(z) \quad p = 1, 2, \dots, K \quad (4.26)$$

où V_p est définie comme étant la somme des vecteurs potentiels générés par les K courants dans le dipôle p

$$V_p(z) = \sum_{q=0}^K V_{pq}(z) = \frac{j\eta}{2\pi} \sum_{q=0}^K \int_{-L_q/2}^{L_q/2} G_{pq}(z-z') I_q(z') dz' \quad (4.27)$$

où G_{pq} est définie par (4.20).

D'après le développement exposé au paragraphe 2.3.2, la solution de l'équation (4.27) sera de la forme

$$V_p(z) = C_p \cos(kz) + V_p \sin|kz| \quad -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \quad (4.28)$$

En combinant les équations (4.28) et (4.29) on obtient les équations de Hallén d'un système d'éléments couplés

$$\frac{j\eta}{2\pi} \sum_{q=0}^K \int_{-L_q/2}^{L_q/2} G_{pq}(z-z') I_q(z') dz' = C_p \cos(kz) + V_p \sin|kz| \quad -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \quad (4.29)$$

Les K constantes C_1, C_2, \dots, C_k seront déterminées en imposant les conditions aux limites pour les K courants

$$I_p \left(\frac{L_p}{2} \right) = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K \quad (4.30)$$

Le système matriciel final sera alors

$$\sum_{q=0}^K Z_{pq} I_q = C_p \cos_p + V_p \sin_p \quad (4.31)$$

ou plus explicitement

$$\begin{bmatrix} [Z_{11}] & [Z_{12}] & \dots & [Z_{1K}] \\ [Z_{21}] & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ [Z_{K1}] & \dots & \dots & [Z_{KK}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I_1] \\ [I_2] \\ \vdots \\ [I_K] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 [\cos_1] \\ C_2 [\cos_2] \\ \vdots \\ C_K [\cos_K] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 [\sin_1] \\ V_2 [\sin_2] \\ \vdots \\ V_K [\sin_K] \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

4.4.2 Application

On suppose trois dipôles de même longueurs et de diamètres égaux (figure 4.4), alignés sur le même axe et séparés d'une distance $d = \lambda/4$. On admet que seul le premier dipôle est alimenté avec une tension V_1 . Dans ce cas, ce dipôle sera défini comme étant le «pilote», les autres sont des «directeurs» ou éléments parasite.

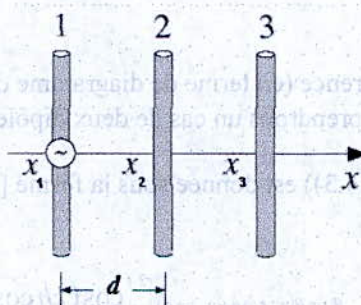


Figure 4.4 Trois dipôles couplés

Nous proposons de représenter la distribution du courant le long de chaque dipôle. Pour se faire, nous considérons deux rayons différents (figure 4.5).

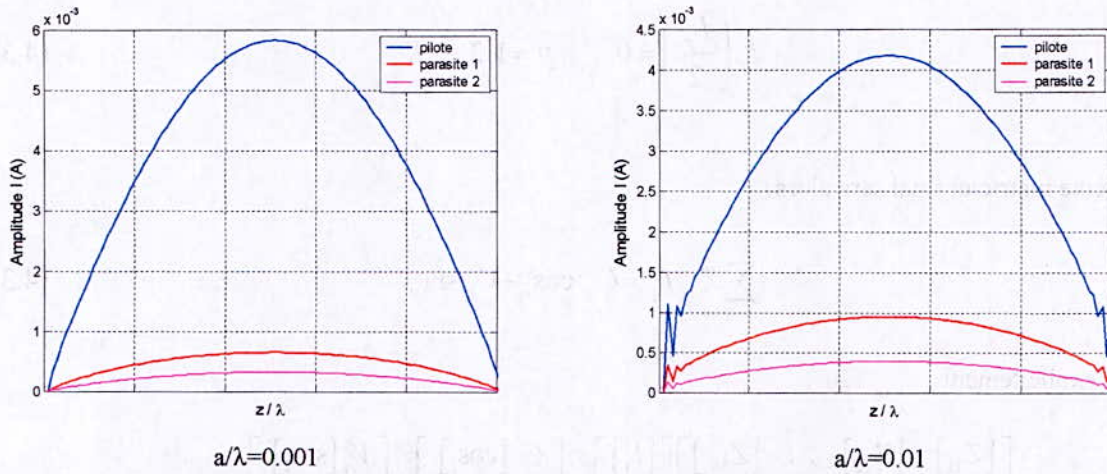


Figure 4.5: Distribution du courant dans le pilote et les parasites ($d = 0.2 \lambda$)

Il est clair que l'amplitude du courant dans le pilote est beaucoup plus importante que le long des éléments parasites. Le courant garde la même allure que le courant principal avec une diminution de l'amplitude en s'éloignant du pilote. Donc la distance qui sépare les dipôles s'avère très importante.

Le phénomène des ondulations au niveau des extrémités de chaque dipôle est constaté avec des rayons importants (pour les mêmes raisons expliquées dans le chapitre 2). De ce fait, les résultats obtenus dans les chapitres 2 et 3 (forme exacte du noyau) peuvent être appliqués dans le cas de couplage des antennes filaires.

4.4.3 Champ lointain

Nous allons à présent constater la différence (en terme de diagramme de rayonnement) entre un dipôle et un ensemble de dipôles couplés. Nous prendrons un cas de deux dipôles séparés d'une distance $d = \lambda/4$.

Le gain normalisé d'un réseau (figure (4.3)) est donnée sous la forme [1].

$$g(\theta, \phi) = \left| \sum_{p=1}^K I_p e^{jk \sin \theta (x_p \cos \phi + y_p \sin \phi)} \right|^2 \left| \frac{\cos(kh \cos \theta) - \cos kh}{\sin kh \sin \theta} \right|^2 \quad (4.33)$$

pour deux dipôles alignés sur l'axe des x on aura

$$g(\theta, \phi) = \left| I_1 + I_2 e^{jk \sin \theta (d \cos \phi)} \right|^2 \left| \frac{\cos(kh \cos \theta) - \cos kh}{\sin kh \sin \theta} \right|^2 \quad (4.34)$$

L'implémentation de cette expression a donné les diagrammes résumés dans la figure présentée ci-dessous

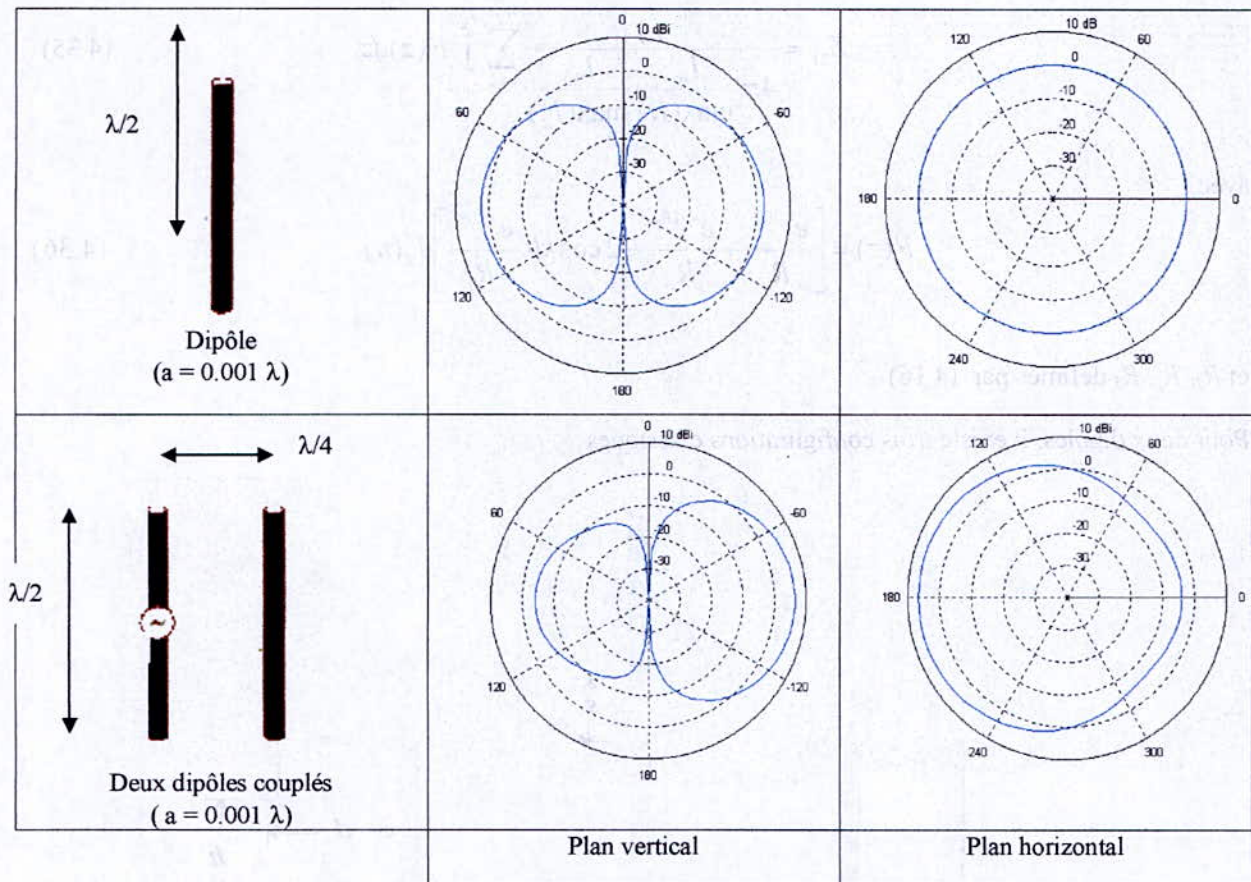


Figure 4.6 : Amélioration de la directivité par le couplage ($f = 300\text{MHz}$)

Nous constatons que l'élément parasite annule la symétrie remarquée dans le cas d'un dipôle isolé. Donc le phénomène de couplage apporte un certain avantage en directivité.

4.5 L'impédance mutuelle par la méthode des moments

Comme il a été démontré dans le chapitre 2, la supposition d'un courant sinusoïdal le long d'un dipôle est généralement imprécise. De ce fait, l'expression de l'impédance mutuelle donnée par l'équation (4.16), et basée sur cette supposition, ne sera qu'approximative [2]. Pour une évaluation plus précise de cette expression, on utilisera la méthode des moments.

Pour se faire, on procède par une segmentation de tous les dipôles avec le même nombre de subdivisions. En suivant la procédure de la section (4.3.1) un vecteur courant sera calculé avec comme éléments les courants dans chaque segment.

L'expression (4.15) devient

$$Z_{21} = \frac{j\eta}{4\pi} \frac{I_{10} I_{20}}{\max(I_1) \max(I_2)} \sum_{n=2}^M \int_{z_{n-1}}^{z_n} F(z) dz \tag{4.35}$$

avec

$$F(z) = \left[\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} - 2 \cos kh_1 \frac{e^{-jkR_0}}{R_0} \right] I_2(n) \tag{4.36}$$

et R_1, R_2, R_3 définies par (4.16)

Pour deux dipôles, il existe trois configurations classiques

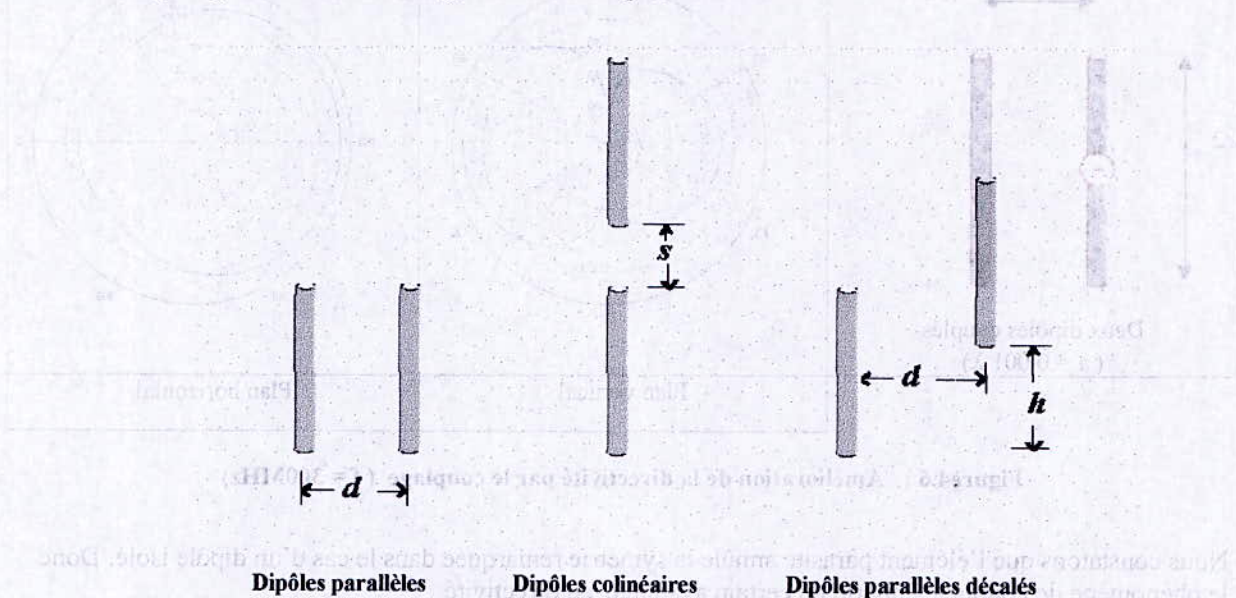


Figure 4.7 : Les trois configurations pour deux dipôles

On se propose de tracer les variations de l'impédance mutuelle en fonction des différents espacements entre les éléments avec les trois configurations. La méthode des moments et la méthode EMF seront employées.

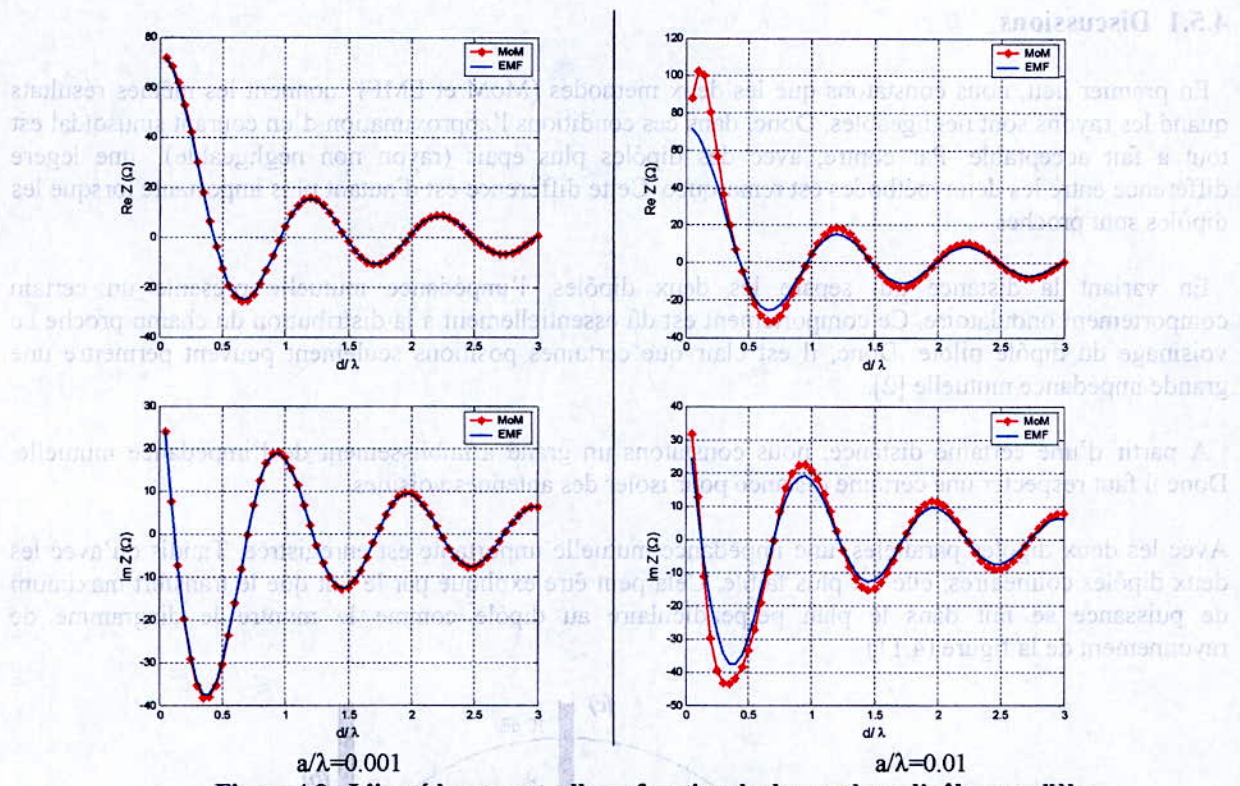


Figure 4.8 : L'impédance mutuelle en fonction de d pour deux dipôles parallèles.

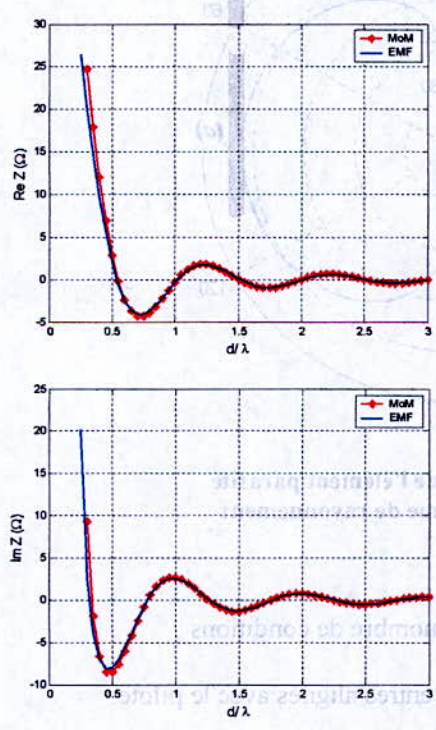


Figure 4.9: Dipôles colinéaires

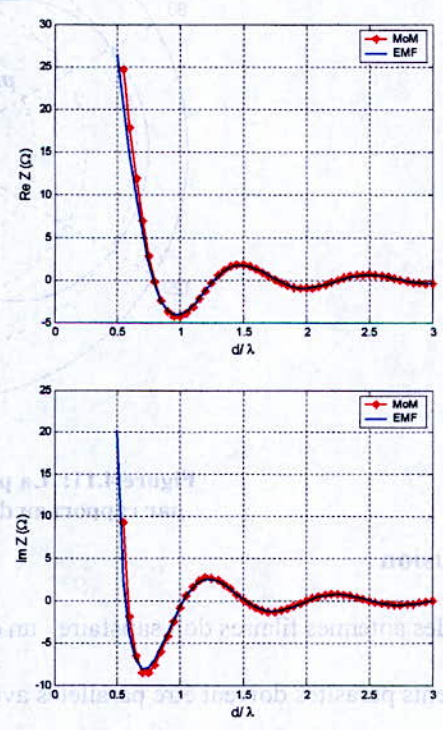


Figure 4.10: Dipôles parallèles décalés

4.5.1 Discussions

En premier lieu, nous constatons que les deux méthodes (MoM et EMF) donnent les mêmes résultats quand les rayons sont négligeables. Donc, dans ces conditions l'approximation d'un courant sinusoïdal est tout à fait acceptable. Par contre, avec des dipôles plus épais (rayon non négligeable) une légère différence entre les deux méthodes est remarquée. Cette différence est d'autant plus importante lorsque les dipôles sont proches.

En variant la distance qui sépare les deux dipôles, l'impédance mutuelle présente un certain comportement ondulatoire. Ce comportement est dû essentiellement à la distribution du champ proche au voisinage du dipôle pilote. Donc, il est clair que certaines positions seulement peuvent permettre une grande impédance mutuelle [2].

A partir d'une certaine distance, nous constatons un grand affaiblissement de l'impédance mutuelle. Donc il faut respecter une certaine distance pour isoler des antennes voisines.

Avec les deux dipôles parallèles, une impédance mutuelle importante est enregistrée. Tandis qu'avec les deux dipôles colinéaires, elle est plus faible. Cela peut être expliqué par le fait que le transfert maximum de puissance se fait dans le plan perpendiculaire au dipôle comme le montre le diagramme de rayonnement de la figure (4.11)

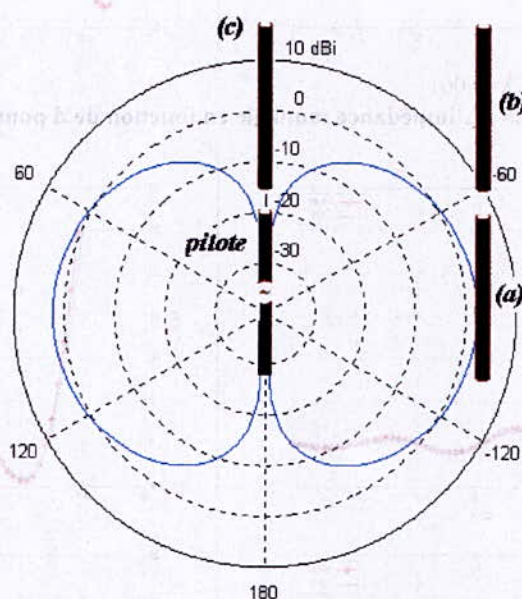


Figure 4.11: La position de l'élément parasite par rapport au diagramme de rayonnement

4.5.2 Conclusion

Le couplage des antennes filaires doit satisfaire un certain nombre de conditions :

- Les éléments parasites doivent être parallèles avec des centres alignés avec le pilote.
- L'espacement entre les éléments doit être choisi convenablement.
- La longueur des éléments est déterminée avec précision

Nous avons constaté que l'approximation utilisée lors de la mise en œuvre de la méthode EMF n'est pas toujours correcte. Cela est corrigé par l'emploi de la méthode des moments qui donne une solution plus exacte en s'adaptant à tous les rayons choisis [6].

Dans le paragraphe suivant, nous allons mettre en application toutes ces conditions avec l'étude d'un type particulier d'antennes qui se base sur le phénomène du couplage.

4.6 Application : Antenne YAGI-UDA

4.6.1 Introduction

L'antenne Yagi-Uda est constituée d'un ensemble de dipôles filaires (figure 4.12). Un seul dipôle est alimenté par le biais d'une ligne de transmission tandis que les autres se comportent comme des éléments parasites où le courant est induit par un couplage mutuel. Un élément est placé derrière le pilote (réflecteur). Son rôle est de réfléchir la puissance rayonnée vers la direction de rayonnement. Il reproduit alors un effet similaire à celui d'un sol parfaitement conducteur.

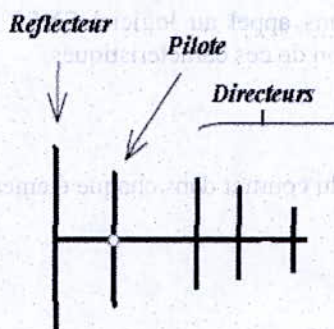


Figure 4.12 : Les éléments d'une antenne Yagi-Uda standard.

Cette antenne est largement utilisée dans la réception des émissions de télédiffusion ce qui la rend très familière à l'échelle grand public. Elle est utilisée dans les bandes de fréquences HF (3-30MHz), VHF (30-300MHz) et UHF (300-3000MHz).

4.6.2 Conception

Les directeurs sont plus courts que le pilote. En général, ce dernier a une longueur légèrement inférieure à $\lambda/2$ (généralement 0.45 à 0.49 λ). Par conséquent, les directeurs seront de longueur 0.4 à 0.45 λ . D'autres part, ces directeurs ne sont pas nécessairement de même longueur ou/et diamètre. Il en est de même pour les espacements inter-éléments.

L'espacement est de 0.3 à 0.4 λ . Généralement, pour des performances optimales, cet espacement n'est pas uniforme. Le réflecteur, plus long que le pilote, est placé à une distance légèrement inférieure à celle qui sépare le pilote du directeur le plus proche.

Les longueurs et les diamètres du réflecteur et des directeurs et leur espacement respectif déterminent la performance d'une antenne de type Yagi-Uda.

Durant des années, les conceptions se faisaient expérimentalement. Cependant, depuis l'avènement de puissants ordinateurs, plusieurs techniques numériques basées sur des formulations théoriques ont été développées afin de déterminer les dimensions géométriques qui réalisent les meilleures performances.

4.6.3 Etude des caractéristiques d'une antenne Yagi-Uda

Nous considérons une antenne Yagi-Uda standard constituée de :

- un pilote de longueur 0.47λ
- un réflecteur de longueur 0.5λ
- quatre directeurs de longueur égale à 0.45λ
- L'espacement entre tous les éléments est de 0.2λ .

Nous nous proposons d'étudier cette antenne et de déterminer la distribution du courant ainsi que le diagramme de rayonnement. Nous faisons appel au logiciel SNEC pour réaliser quelques graphiques interactifs qui donnent une meilleure vision de ces caractéristiques.

4.6.3.1 Distribution du courant

Nous proposons de tracer la distribution du courant dans chaque élément d'une antenne Yagi

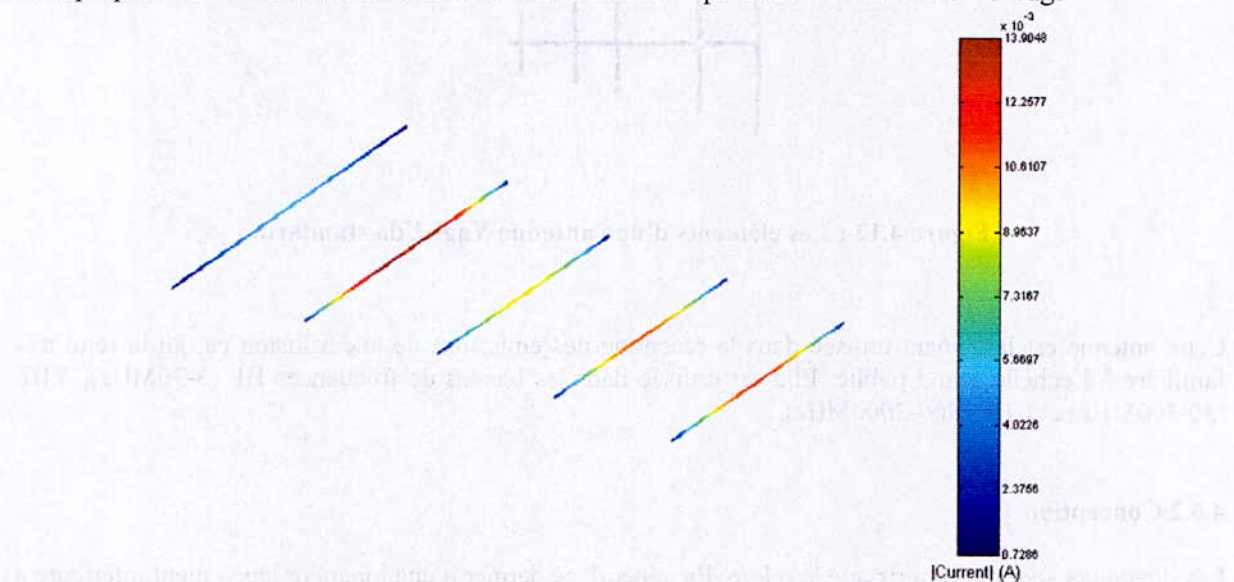


Figure 4.13 : Distribution du courant sur les éléments d'une antenne Yagi (Résultats obtenus grâce au logiciel SNEC)

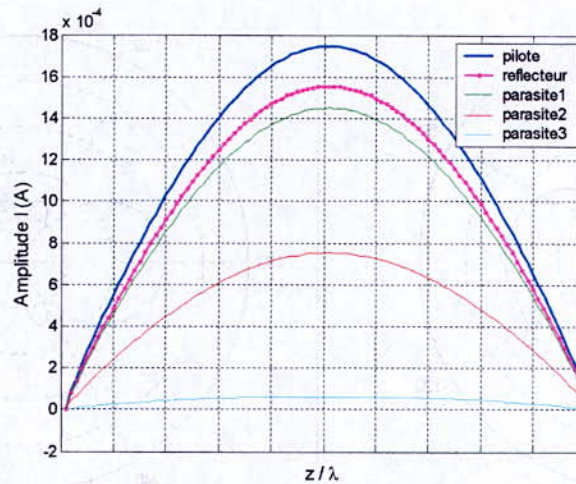


Figure 4.14 : Distribution du courant selon notre implémentation

Les figures 4.13 et 4.14 donnent la même distribution du courant mais avec deux représentations différentes. La première est le résultat de la simulation avec le logiciel SNEC [5] tandis que la deuxième est tracée à partir de l'implémentation de la méthode des moments appliquée au couplage.

Nous constatons que le courant dans le pilote est le plus important. De plus, le courant dans le réflecteur est légèrement supérieur à celui du premier directeur du fait que ce dernier est plus petit que le premier. L'amplitude du courant s'affaiblit en s'éloignant du pilote donc on peut employer un nombre limité de directeurs.

4.6.3.2 Diagramme de rayonnement

La distribution du champ lointain est une caractéristique très importante dans l'étude des antennes. On se propose de tracer le diagramme de rayonnement d'une antenne de type Yagi-Uda par le biais du logiciel SNEC qui offre une représentation en trois dimensions de ce diagramme.

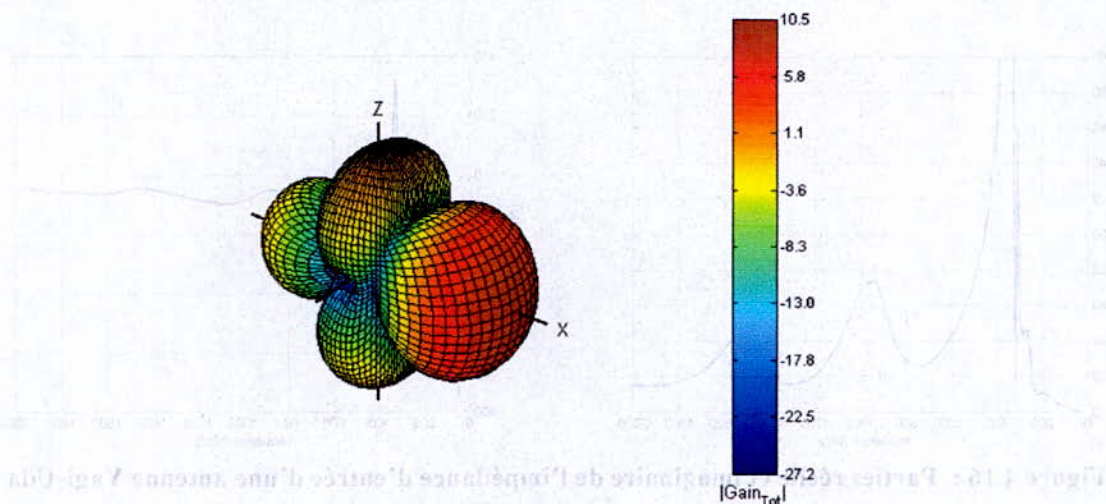


Figure 4.15 : Diagramme de rayonnement en 3 dimensions d'une antenne Yagi-Uda

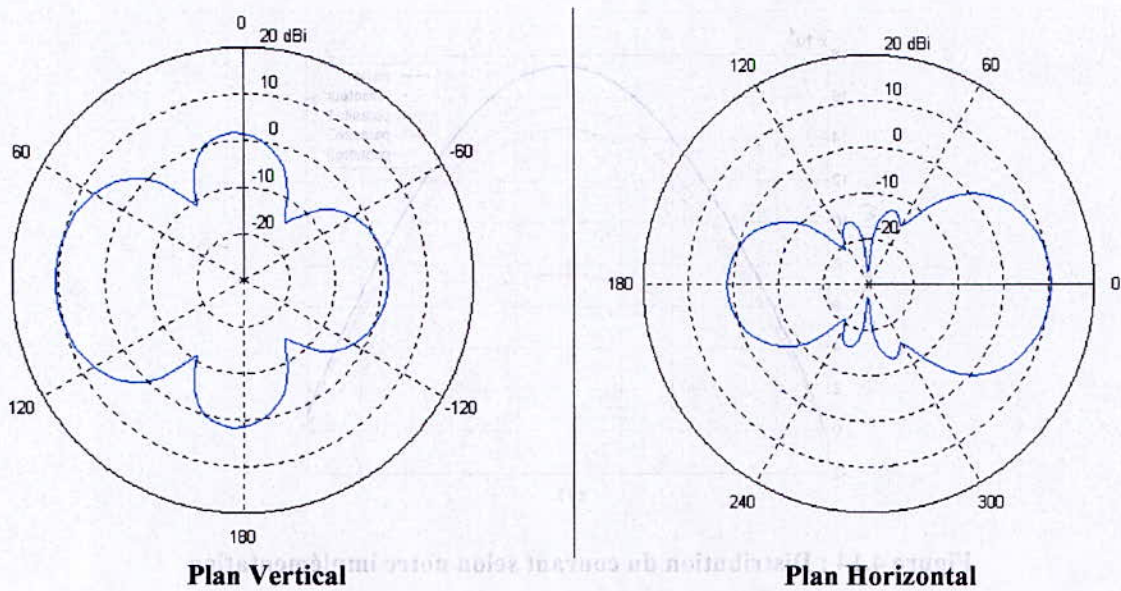


Figure 4.16 : Diagrammes de rayonnement en 2 dimensions

La figure (4.15) représente une vue en trois dimensions du champ lointain d'une antenne Yagi.

Ces diagrammes de rayonnement montrent une caractéristique importante de l'antenne Yagi. On distingue une directivité particulière avec un niveau réduit des lobes secondaires. Cette caractéristique fait de l'antenne Yagi un type particulier et très utilisé.

4.6.3.2 La bande passante

Nous avons mentionné dans le chapitre 2 que le dipôle présente des fréquences de résonance particulières, donc sa bande passante est très réduite.

La figure 4.16 est la représentation de l'impédance d'entrée d'une antenne Yagi-Uda réalisée avec SNEC sur une bande de fréquence de 2000Mhz.

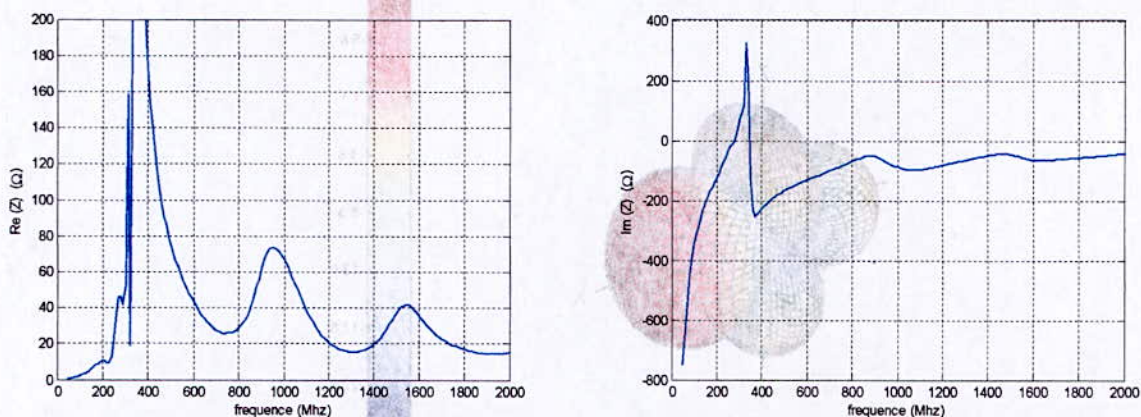


Figure 4.16 : Parties réelle et imaginaire de l'impédance d'entrée d'une antenne Yagi-Uda

Nous constatons qu'il existe une grande différence entre cette représentation de l'impédance d'entrée avec celle d'un dipôle isolé. Les pics de résonance et d'antirésonance disparaissent en donnant lieu à des courbes plus aplaties.

A partir d'une fréquence de 400Mhz l'impédance d'entrée aura des valeurs inférieures à 100Ω . On distingue alors un élargissement de la bande passante. Ce qui représente un atout pour ce type d'antennes.

Les dimensions de l'ensemble pilote-rélecteur influent principalement sur le niveau du lobe arrière et l'impédance d'entrée, alors que les dimensions de l'ensemble des directeurs ainsi que les espacements correspondants influent sur le niveau du lobe arrière, le gain et l'impédance d'entrée et sont considérés comme l'élément clé de l'antenne Yagi.

Conclusion

L'antenne Yagi-Uda étudiée dans cette section offre des caractéristiques particulières. Son diagramme de rayonnement montre une meilleure directivité. Sa large bande passante permet une utilisation dans les applications de radiodiffusion où une large bande de fréquence est allouée.

Bibliographie du chapitre 4

- [1] Sophocles J. Orfanidis, *Electromagnetic Waves and Antennas*, Rutgers University
www.ece.rutgers.edu/orfanidi/ewa
- [2] C.A.Balanis, *ANTENNA THEORY : Analysis and design* , Harper & Row, Publishers, 1996.
- [3] Robert Collin , Francis Zucker, “ *Antenna Theory* ”, McGraw Hill, 1969.
- [4] R.Aksas, *Antennes et propagation* , notes de cours, ENP, année 2004-2005.
- [5] G.J Burke , A.J Poggio, “ *Numerical Electromagnetic Code (NEC)* ”, Lawrence Livermore Laboratory.
- [6] J H Richmond, NH Geary, “ *Mutual impedance between coplanar skew* , ” IEEE Transactions on Antennas and Propagation, May 1970.

Les deux modes de l'oscillateur par rétroaction différentielle sont en fait, à l'instar de l'oscillateur à deux étages à rétroaction simple, des oscillateurs à deux étages à rétroaction simple. Les deux modes de l'oscillateur par rétroaction différentielle sont en fait, à l'instar de l'oscillateur à deux étages à rétroaction simple, des oscillateurs à deux étages à rétroaction simple. Les deux modes de l'oscillateur par rétroaction différentielle sont en fait, à l'instar de l'oscillateur à deux étages à rétroaction simple, des oscillateurs à deux étages à rétroaction simple.

Conclusion

Les deux modes de l'oscillateur par rétroaction différentielle sont en fait, à l'instar de l'oscillateur à deux étages à rétroaction simple, des oscillateurs à deux étages à rétroaction simple. Les deux modes de l'oscillateur par rétroaction différentielle sont en fait, à l'instar de l'oscillateur à deux étages à rétroaction simple, des oscillateurs à deux étages à rétroaction simple.

Bibliographie du chapitre 4

- [1] Srinivasulu, J. "Synthesis of Differential Oscillators". *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1990.
- [2] C. A. Balmain, Ed. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1990.
- [3] Robert L. Carter, "The Design of Differential Oscillators", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1990.
- [4] A. A. Choudhury, "Differential Oscillators", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1990.
- [5] J. J. Ebersole, "Differential Oscillators", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1990.
- [6] J. J. Ebersole, "Differential Oscillators", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1990.

Conclusion générale

Après avoir formulé les équations intégrales représentant le courant sur un élément filaire en fonction du champ incident, nous avons employé la méthode des moments dans le domaine spatial afin de résoudre ces équations.

Dans une première implémentation nous avons admis une approximation du noyau de l'équation intégrale en supposant que le courant est axial. Les résultats de cette implémentation n'ont pas été précis avec des rayons importants de l'antenne filaire. Des anomalies apparaissent sous forme d'oscillations sur la distribution du courant le long de la structure et par conséquent une divergence au niveau de l'impédance d'entrée.

Sachant que ces imperfections proviennent de l'approximation utilisée, nous avons adopté une autre forme du noyau (représentation de Wang). Les résultats ont été satisfaisants sur une large gamme de rayons. Cependant, le temps de calcul était considérable. Nous avons proposé, donc, une alternative qui consiste à limiter l'utilisation de la représentation de Wang sur les éléments qui posent le problème de singularité, les autres éléments étaient calculés à l'aide de la forme exacte du noyau. Cette méthode a réduit le temps d'exécution de $1/N$ (N est le nombre de fonctions de base) et a donné des résultats appréciables. D'autres optimisations sont possibles avec un choix judicieux de la méthode numérique de résolution d'un système matriciel et de la méthode d'intégration numérique utilisée.

Nous avons mis en application la méthode des moments pour l'étude du phénomène de couplage ainsi un cas particulier d'antennes (Yagi-Uda) était traité.

Les résultats obtenus le long de ce travail ont été valorisés par une comparaison avec le logiciel SNEC.

Ce travail peut être complété par un approfondissement de l'analyse d'autres types d'antennes plus complexes (antenne micro-ruban, fractales, hélice,...).

Conclusion générale

Après avoir examiné les résultats obtenus par les différents auteurs, il est évident que la méthode de Wang est la plus performante. Elle permet de déterminer les paramètres de la loi de distribution de la durée de vie d'un produit de manière plus précise et plus fiable que les autres méthodes.

La méthode de Wang est la plus performante car elle permet de déterminer les paramètres de la loi de distribution de la durée de vie d'un produit de manière plus précise et plus fiable que les autres méthodes. Elle permet également de déterminer les paramètres de la loi de distribution de la durée de vie d'un produit de manière plus précise et plus fiable que les autres méthodes.

La méthode de Wang est la plus performante car elle permet de déterminer les paramètres de la loi de distribution de la durée de vie d'un produit de manière plus précise et plus fiable que les autres méthodes. Elle permet également de déterminer les paramètres de la loi de distribution de la durée de vie d'un produit de manière plus précise et plus fiable que les autres méthodes.

La méthode de Wang est la plus performante car elle permet de déterminer les paramètres de la loi de distribution de la durée de vie d'un produit de manière plus précise et plus fiable que les autres méthodes.

La méthode de Wang est la plus performante car elle permet de déterminer les paramètres de la loi de distribution de la durée de vie d'un produit de manière plus précise et plus fiable que les autres méthodes.

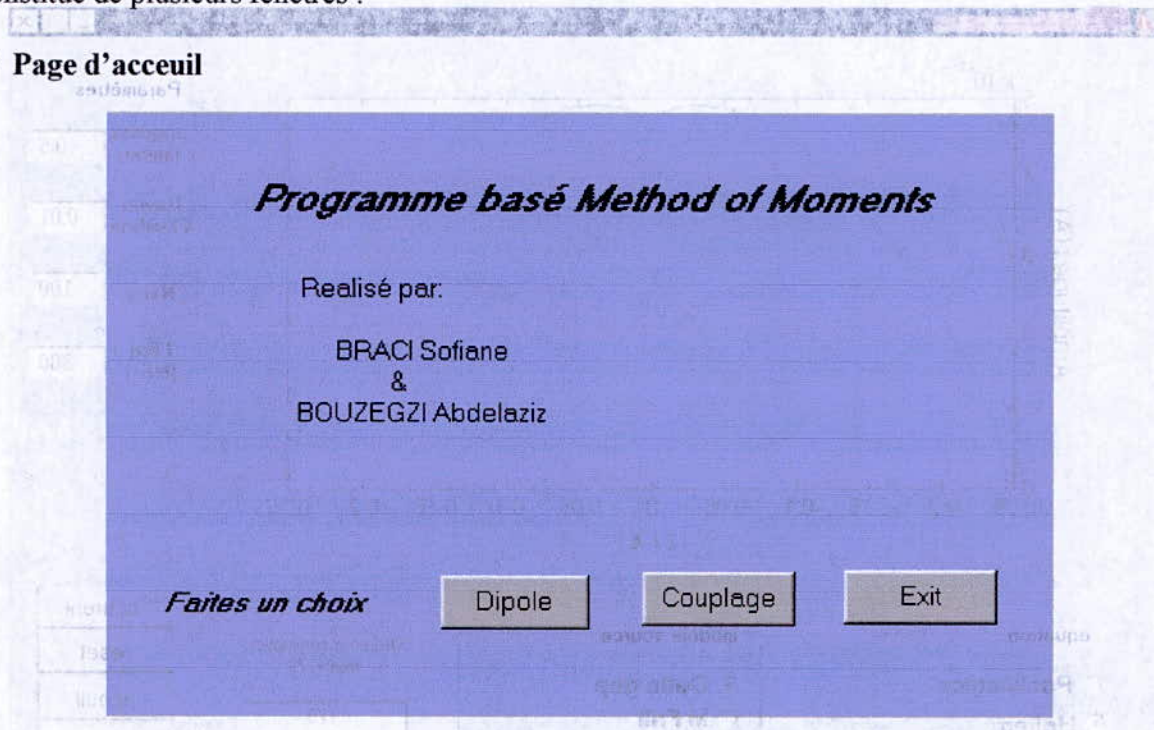
La méthode de Wang est la plus performante car elle permet de déterminer les paramètres de la loi de distribution de la durée de vie d'un produit de manière plus précise et plus fiable que les autres méthodes.

ANNEXE

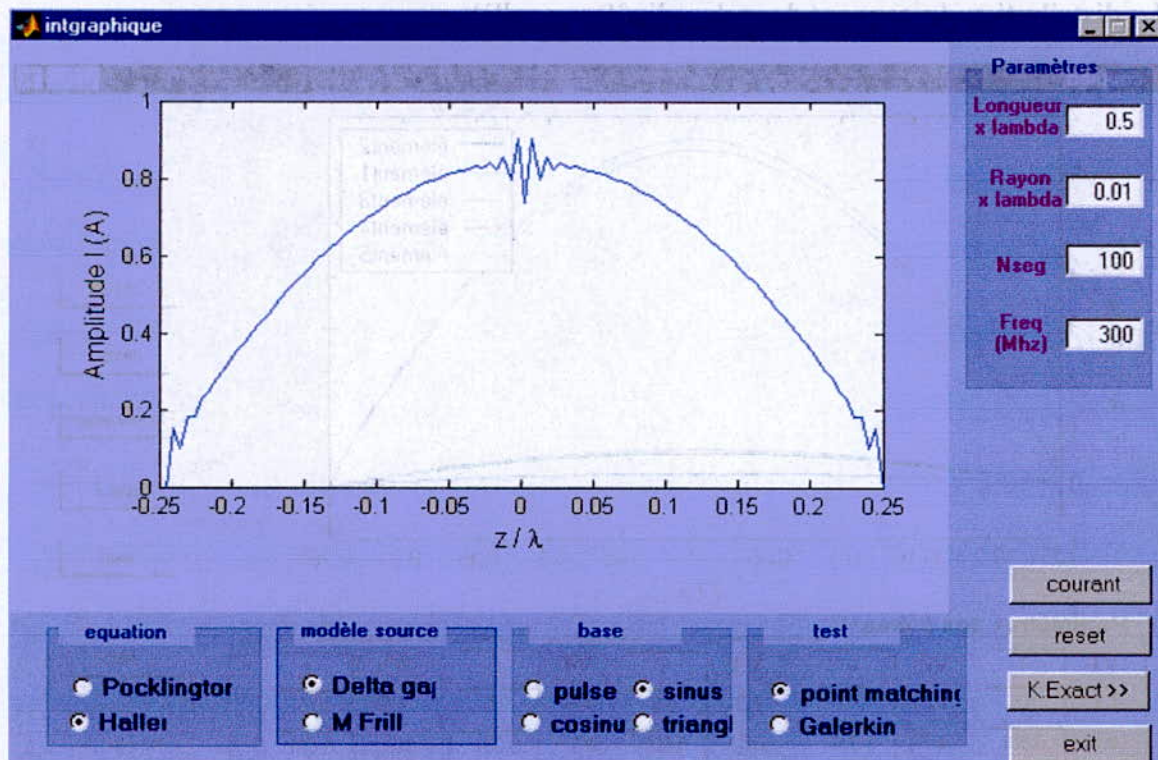
ANNEXE

Ce programme rassemble tous les fonctions utilisées dans la réalisation de ce travail. Il est constitué de plusieurs fenêtres :

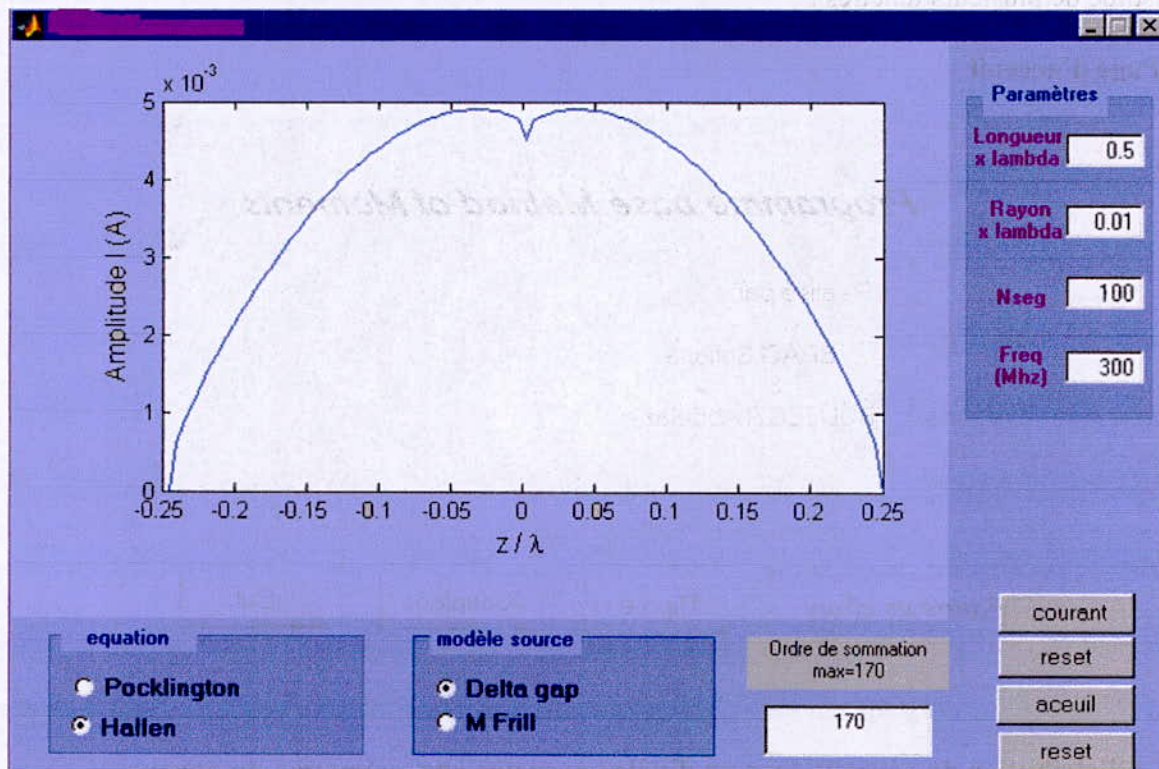
1/ Page d'accueil



2/ La distribution du courant dans un dipôle (avec une approximation du noyau)



3/ La distribution du courant dans un dipôle (avec un noyau exact)



4/ La distribution du courant dans des dipôles parallèles

