

*Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche
scientifique*

Ecole Nationale Polytechnique



Département Electronique

Option signal et communications

**En vue de l'obtention du grade de magister
en signal et communications**

Mémoire Présentée Par

Salim GHERBI

Le quantificateur spiral à trois dimensions

Soutenue devant la commission d'examen composée de:

Mme. L.HAMAMI, Maître de conférences à L'E.N.P	Présidente
M. D.BERKANI, Professeur à L'E.N.P	Rapporteur
Melle M.GUERTI, Maître de conférences à L'E.N.P	Examinatrice
M. M.BOUSSEKSOU, Chargé de cours à L'E.N.P	Examineur
M. M.S. DJOUADI, docteur à L'E.M.P	Examineur
M. ZERGUI, Chargé de cours à L'E.N.P	Invité

Décembre 2006
10, Avenue Hassen Badi, El-Harrach, Alger.

ملخص:

هذا العمل عبارة عن تصميم مكتم حلزوني ثلاثي الأبعاد لتكميم مولد غوصي ذو ثلاث أبعاد. قمنا أولاً بالإشارة الهندسية التحليلية لحلزونية ذو ثلاثة أبعاد باستعمال على حلزونية أرخميدس كحلزونية أم، ثم بعد ذلك قمنا باختيار النقاط المثالية من هذه الحلزونية التي تكتم بأحسن أداء المولد الغوصي ذو ثلاث أبعاد و ذلك لأسس مختلفة لاثنتان من 4 إلى 512. درسنا بعد ذلك مدى مثالية هذا المكتم الثلاثي بالمقدر (LBG) حيث أرينا مدى ثبات أداء المكتم بدلالة الحاصل الإشارة على الضجة (RSB). لم نكتفي فقط بدراسة أداء المكتم بل قمنا أيضاً بمقارنة أداء المكتم مع الحد النظري لشانون بدلالة الحاصل الإشارة على الضجة (RSB). نفس الدراسة أجريت على المكتم المتعدد الحلزونية. في الأخير، قمنا بمقارنة أداء المكتم مع بعض المكتمات الحاصلة من بعض الأشكال الهندسية البسيطة.

المفاتيح: مكتم، حلزونية، الحاصل الإشارة على الضجة، النظري لشانون، المولد الغوصي.

Résumé:

Ce travail consiste à concevoir un quantificateur spiral à trois dimensions. On a donné un aperçu sur la théorie de la distorsion, puis on a cité le principe de la quantification vectorielle avec quelques exemples types. Ce nouveau quantificateur vectoriel est basé sur la discrétisation et optimisation d'une spirale à trois dimensions en utilisant un minimum de paramètres. Après que la spirale est quantifiée et optimisée, le quantificateur résultant a été vérifiée par l'estimateur LBG pour voir l'apport de ce dernier aux performances du quantificateur. Les performances du quantificateur ont été comparées avec la limite théorique de Shannon. Une version multi-spirales du quantificateur a été formulée et étudiée de la même manière que le premier quantificateur en utilisant quatre spirales. En fin, les performances du quantificateur ont été comparées avec les performances de quelques quantificateurs à base de structures géométriques simples.

Mot clefs : quantificateur spiral, quantification vectoriel, source gaussienne, LBG, RSB, EQM.

Abstract:

This work consists of the construction of a three dimensional spiral quantizer. We gave first an outline about the rate distorsion theory, and then we mentioned the principle of vector quantization with some typical examples. The new vector quantizer is based on the discretisation and the optimisation of a three dimensional spiral using minimum parameters. After the spiral was discretised and optimised, the resulting quantizers were tested with the LBG algorithm to see how much is the LBG can improve the performance of the quantizer. After that, we compared the performances of our quantizer with the Shannon's theoretical limit bound. Furthermore, we studied a multi-spirals quantizer version of the spiral quantizer by using four spirals. The study was the same as the first spiral structure. At the end, we did a comparison with the performances of other simple three dimensional geometric shape based quantizers.

Key words: spiral quantizer, vector quantization, Gaussian source, LBG, RSB, MSE.

Remerciement

Au terme de ce travail, je formule mes sincères gratitude à Dieu le tout puissant qui m'a aidé à réaliser ce modeste travail.

Je tiens à remercier vivement mes parents, qui m'ont encouragé durant tous mon parcours dans ce magister.

Je remercie en particulier mon directeur de thèse Pr. D.BERKANI qui m'a encouragé à finaliser ce travail.

Je tien à remercier les membres de jury pour l'intérêt et la lecture attentive qui ont attribués à mon travail.

Je suis très reconnaissant à Mm L.HAMAI et monsieur M.BOUSSEKSSOU pour leurs conseils qui ont enrichis mon travail.

Mes sincères salutations à monsieur M.S.DJOUADI qui m'a honoré avec sa présence dans le jury de cette thèse.

Je remercie tous mes amis qui m'ont donné le soutien moral pour réussir à faire ce travail, en particulier Younes, Nacer, Hichem et Halim.

Merci pour toutes personne qui ma aider à terminer ce modeste travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

A mes très chers parents.

A mes frères.

A tous mes amis.

SOMMAIRE

Introduction.....	1
-------------------	---

CHAPITRE I

LATHEORIE DE LA DISTORSION

1. Introduction.....	4
2. Entropie d'une source.....	6
3. La fonction de distorsion.....	7
4. Cas d'une source bidimensionnelle.....	12
5. Conclusion.....	13

CHAPITRE II

LA QUANTIFICATION VECTORIELLE

1. Introduction.....	14
2. Définition et objectif.....	14
3. Principe et formulation de la quantification vectorielle.....	17
4. Régions de Voronoï et centroïdes.....	18
5. Mesure des performances d'un quantificateur.....	20
5.1 Mesure de distances.....	21
5.2 Calcul de la distorsion moyenne.....	21
5.3 Performances asymptotiques des VQ.....	22
5.3.1 Bornes asymptotiques des performances.....	23
5.3.2 Application à une source gaussienne sans mémoire.....	25
6. Types de quantification vectorielle.....	27
6.1 Approche statistique.....	27
6.2 Approche algébrique.....	29
6.3 Techniques sous-optimales.....	30
6.4 Algorithmes de recherche rapide optimaux.....	32
7. Mise en œuvre d'un quantificateur. Dualité avec la modulation.....	32
8. Exemples de quantification vectorielle.....	34
8.1 Quantification de deux variables uniformes.....	34
8.2 Quantification de deux variables gaussiennes.....	35
8.3 Quantification des coefficients LPC.....	37

8.4	Quantification des coefficients LSF.....	37
9.	Conclusion.....	38

CHAPITRE III

LE QUANTIFICATEUR SPIRAL A TROIS DIMENSIONS

1.	Introduction.....	39
2.	Construction de la spirale à trois dimensions.....	39
2.1	Coordonnées polaires et sphériques.....	39
2.2	Spirale à trois dimensions.....	41
3.	Le quantificateur spirale à trois dimensions.....	48
3.1	Source d'excitation.....	48
3.2	Discretisation et optimisation des paramètres de la spirale.....	50
3.3	Etude de la stabilité du RSB en fonction du nombre de points de la source d'excitation.....	57
3.4	Résultats finaux de la discretisation et de l'optimisation.....	58
3.5	Performances du quantificateur spirale à trois dimensions.....	60
4.	Le quantificateur multi-spirales.....	63
4.1.	Formulation des spirales	63
4.2.	Discretisation et optimisation du quantificateur multi-spirales	65
5.	Comparaison avec quelques structures à trois dimensions.....	67
5.1.	Spirale quatre points – Pyramide triangulaire	67
5.2.	Spirale huit points – cube	69
6.	Conclusion.....	70

CHAPITRE IV

INTERPRETATION DES RESULTATS

1.	Introduction.....	72
2.	La quantification vectorielle algébrique sphérique.....	72
2.1.	Principe	72
2.2.	Avantages de la quantification vectorielle sphérique.....	73
2.3.	Approche statistique et approche algébrique.....	74
3.	Commentaires sur les résultats obtenus.....	75
3.1.	La spirale à trois dimensions	75
3.2.	La source d'excitation	75
3.3.	La discretisation et l'optimisation de la spirale.....	76
3.4.	Unicité des paramètres de la spirale.....	76

3.5. Les performances en terme de RSB du quantificateur spirale à trois dimensions.....	77
4. Etude Comparative du quantificateur spiral à trois dimensions.....	78
5. Conclusion.....	79
Conclusion.....	80
Bibliographie.....	82

Liste des tableaux

Tableau 3.1 Tableau récapitulatif des paramètres de discrétisation de la spirale pour un nombre de points égal à 16.....	55
Tableau 3.2 Récapitulatif des performances du quantificateur spirale1.....	59
Tableau 3.3 Récapitulatif des performances du quantificateur spirale2.....	59
Tableau 3.4 Récapitulatif des performances du quantificateur spirale3.....	60
Tableau 3.5 Récapitulatif des performances du quantificateur spirale4.....	60
Tableau 3.6 Résultat multi-spirales.....	66

Liste des figures

Figure 1.1 Schéma fondamental d'un système de communications.....	4
Figure 1.2 Schéma moderne d'un système de communications.....	5
Figure 1.3. Quantificateurs type.....	7
Figure 1.4 Comparaison de la fonction $R(D)$ des sources discrète (a) et continue (b).....	11
Figure 2.1 Schémas types des quantificateurs.....	15
Figure 2.2 Principe de la quantification vectorielle.....	16
Figure 2.3 Schéma d'un quantificateur vectoriel, x est la séquence à coder, i l'indice à transmettre et y est la séquence reproduite.....	18
Figure 2.4 Partition \mathfrak{R} du plan.....	18
Figure 2.5 Partition \mathfrak{R} par les médiatrices.....	20
Figure 2.6 Structure de l'algorithme de la K-moyenne.....	28
Figure 2.7 Techniques sous-optimales de la quantification vectorielle.....	31
Figure 2.8 Schématisation des trois opérations d'une quantification vectorielle.....	33
Figure 2.9 Dualité modulation-quantification.....	33
Figure 2.10 Comparaison de deux méthodes de quantification pour un vecteur x à deux dimensions réparti uniformément.....	35
Figure 2.11 Comparaison de la quantification d'un vecteur à deux dimensions par une paire de quantificateurs scalaires optimaux.....	36
Figure 2.12 Comparaison des performances entre une paire de quantificateurs scalaires et un quantificateur vectoriel.....	36
Figure 3.1 Coordonnées du point P dans un espace à deux dimensions.....	40
Figure 3.2 Coordonnées du point P dans un espace à trois dimensions	41
Figure 3.3 Spirale d'Archimède.....	42
Figure 3.4 Spirale à trois dimensions.....	43
Figure 3.5 Vue de la spirale à trois dimensions dans le plan (x, y)	43
Figure 3.6 Vue de la spirale à trois dimensions dans le plan (x, z)	44
Figure 3.7 Spirale en œuf à deux dimensions.....	45
Figure 3.8 Spirale en œuf à trois dimensions.....	45
Figure 3.9 Vue de la spirale en œuf à trois dimensions dans le plan (x, y)	46
Figure 3.10 Spirale à deux dimensions.....	47

Figure 3.11 Spirale à trois dimensions.....	47
Figure 3.12 L’algorithme de Ziggurat.....	49
Figure 3.13 Source gaussienne à trois dimensions (1000 point).....	49
Figure 3.14 Histogramme de la source gaussienne utilisé dans le programme.....	50
Figure 3.15 Les paramètres du quantificateur spiral dans un plan.....	50
Figure 3.16 Variation du RSB en fonction du pas de discrétisation delta pour différentes valeurs du gains.....	51
Figure 3.17 Variation du RSB en fonction de delta pour différentes valeurs de f_i	52
Figure 3.18 Variation du RSB en fonction du pas de discrétisation pour différentes valeurs de $teta_0$	52
Figure 3.19 Variation du RSB en fonction de l’inverse du gain pour différentes valeurs du pas.....	53
Figure 3.20 Variation du RSB en fonction de l’inverse du gain pour différentes valeurs de f_i	53
Figure 3.21 Variation du RSB en fonction de l’inverse du gain pour différents valeurs de $teta_0$	54
Figure 3.22 Variation du RSB en fonction de f_i pour différentes valeurs de $teta_0$	54
Figure 3.23 Variation du RSB en fonction $teta_0$ pour différentes valeurs du gain.....	55
Figure 3.24 Représentation des points de notre quantificateur ‘spirale1’ avec une source gaussienne à trois dimensions 500 échantillons.....	56
Figure 3.25 Représentation des points de notre quantificateur ‘spirale1’ avec les mots code résultants en appliquant l’estimateur LBG.....	56
Figure 3.26 Représentation des points de notre quantificateur ‘spirale1’ (64 points).....	57
Figure 3.27 Variation du RSB en fonction du nombre d’échantillons (spirale2).....	58
Figure 3.28 Comparaison des performances du quantificateur spirale1 avec la limite théorique de Shannon.....	61
Figure 3.29 Comparaison des performances du quantificateur spirale2 avec la limite théorique de Shannon.....	61
Figure 3.30 Comparaison des performances du quantificateur spirale3 avec la limite théorique de Shannon.....	62
Figure 3.31 Comparaison des performances du quantificateur spirale4 avec la limite théorique de Shannon.....	62
Figure 3.32 Quatre spirales d’Archimède déphasé de $\pi/2$ entre elles.....	64
Figure 3.33 Quatre spirales dans un espace à trois dimensions.....	65

Figure 3.34 Comparaison des performances du quantificateur multi-spirales avec la limite théorique de Shannon.....	66
Figure 3.35 Pyramide quatre points.....	67
Figure 3.36 Optimisation du RSB en fonction de a.....	68
Figure 3.37 Quantificateur type spirale1 à 4 points avec les points résultants avec LBG.....	68
Figure 3.38 Cube	69
Figure 3.39 Optimisation du RSB en fonction de a.....	69
Figure 3.40 Quantificateur type spirale1 à huit points.....	70

Liste des abréviations

$H(x)$	Entropie d'une source
$H(x/y)$	Entropie conditionnelle
R	Débit binaire (nombre de bits)
D	Distorsion
$R(D)$	Fonction de distorsion
$I(x)$	Auto-information
$I(x,y)$	Information mutuelle
ρ	Critère de fidélité
$f_x(x)$	Densité de probabilité
$f_{y/x}(y/x)$	Densité de probabilité conditionnelle
$h(x)$	Entropie différentielle
SLB	Shannon Lower Bound
Q	Quantificateur
QV	Quantificateur Vectoriel
RSB	Rapport Signal sur Bruit
σ_x^2	Variance d'une source X
EQM	Erreur Quadratique Moyenne
LBG	Algorithme de la k-moyenne

INTRODUCTION

La théorie de l'information nous apprend que toute l'information reste de nature aléatoire et discrète [1]. Cependant, après acquisition une représentation sous une forme de fonctions continues (signal électrique analogique) est attribuée à l'information ou aux signaux telles que la parole et l'image. Ainsi, dans une première étape, le traitement de l'information consiste à convertir ces fonctions ou signaux analogiques en signaux numériques.

Les systèmes numériques de communication sont de plus en plus intégrés dans divers systèmes embarqués; ils constituent une partie vitale dans notre vie quotidienne. Ces systèmes de traitement de l'information exigent une représentation numérique des formes d'ondes. L'opération de quantification, réalisée par un quantificateur est une des procédures nécessaires à cette représentation.

La quantification est un processus irréversible qui entraîne une perte définitive de l'information [2]. Celle ci se traduit par une distorsion entre le signal original et le signal codé qu'on cherche à minimiser tout en atteignant un bon niveau de compression.

La détermination du quantificateur optimal qui minimise la distorsion pour un débit fixé constitue l'essentiel de la recherche en compression numérique du signal. La quantification vectorielle qui s'est considérablement développée depuis les années 1980, tente de résoudre ce problème.

Le problème de 'design' du meilleur quantificateur a canalisé les recherches sur la quantification scalaire puis vectorielle. Dans les deux cas de quantification les résultats théoriques ont montré que les signaux à distribution uniforme sont les mieux représentés, soit avec un minimum possible de distorsion entre l'information originale et le signal codé. La théorie de la distorsion a même montré que la distorsion peut être réduite par un codage de blocs toujours plus longs. Plusieurs types de contraintes peuvent surgir lors de la mise en oeuvre d'un quantificateur vectoriel.

Vers la fin des années 1970, un algorithme de conception de quantificateurs vectoriels a été proposé par Gray, Linde et Buzo [3]. Cet algorithme a été à l'origine d'un essor considérable des recherches en quantification vectorielle. Les quantificateurs résultants sont de nature statistique. Ils manifestent une complexité dans leurs structures qui nécessitent des algorithmes de décodage complexes. Pour de faibles débits et des dimensions restreintes, des applications ont été développées par cet algorithme. Mais pour des débits et des dimensions élevés, son application reste limitée.

Il existe une autre approche de quantification vectorielle appelée approche algébrique. Elle dispose de dictionnaires très bien structurés et bénéficie d'algorithmes de recherche très efficaces et rapides. Ces dictionnaires sont formés à partir de réseaux réguliers de points et de codes correcteurs d'erreurs.

En pratique, on fait souvent appel à la quantification sous-optimale. La raison d'utiliser ce type de quantification reste la difficulté de conception des quantificateurs vectoriels optimaux tels que définis par la théorie (au sens de la performance). Cette difficulté réside dans l'importance des moyens de calculs à mettre en oeuvre, ce qui exige des temps de calcul prohibitifs.

Il est parfois plus judicieux d'utiliser un repère polaire de coordonnées qu'un système cartésien. En effet, un signal exprimé sous une forme complexe peut être obtenu et traité plus facilement dans un repère polaire où son amplitude et sa phase sont exprimées sous une forme plus explicite. Les travaux de recherche dans cet axe ont permis de mettre au point une nouvelle classe de quantificateurs appelée 'Polar Quantizers' [4,5]. Un de ces quantificateurs est le 'Spiral Quantizer' développé par D.Berkani [6].

La problématique qui se pose maintenant est peut être étendre la dimension du 'Spiral Quantizer' aux dimensions plus élevées? Le quantificateur résultant aura-t-il des performances optimales?

Ce travail apporte une contribution considérable pour le domaine de la quantification. Une extension du quantificateur 'Spiral Quantizer' à la troisième dimension sera proposée dans ce mémoire, le quantificateur à construire sera intitulé 'le quantificateur spiral à trois dimensions' sera développé par la suite. Ce nouveau quantificateur met en oeuvre un ensemble indexé de vecteurs générés par la discrétisation d'une spirale à trois dimensions. Il

possède une structure régulière capable d'approcher les performances optimales en terme d'erreur quadratique moyenne pour une source gaussienne à moyenne nulle. Ce quantificateur présente d'autres avantages que nous développerons dans ce mémoire.

Dans le premier chapitre, nous allons présenter les notions fondamentales de la théorie de la distorsion.

Le second chapitre sera consacré à la quantification vectorielle. La rétrospective des travaux de recherche présentés fait ressortir les solutions préconisées par les chercheurs et situe le problème de design des quantificateurs.

La troisième partie de ce travail décrit le 'quantificateur spiral à trois dimensions' et la procédure de discrétisation de la spirale puis présente les performances et les résultats obtenus.

Des commentaires sur les propriétés de notre quantificateur ainsi que sur les performances atteintes par ce dernier seront faits dans la dernière partie de ce travail.

CHAPITRE I

THEORIE DE LA DISTORSION

1. Introduction

La théorie de l'information, telle qu'elle fut élaborée par C.E. Shannon [1], peu après la fin de la seconde guerre mondiale, avait pour objet principal d'évaluer les performances limites (optimales) des systèmes de communications en présence de perturbations aléatoires (désignées par le terme générique de bruit). Elle se compare donc, par exemple, aux énoncés de la thermodynamique qui définissent le rendement limite des cycles thermiques.

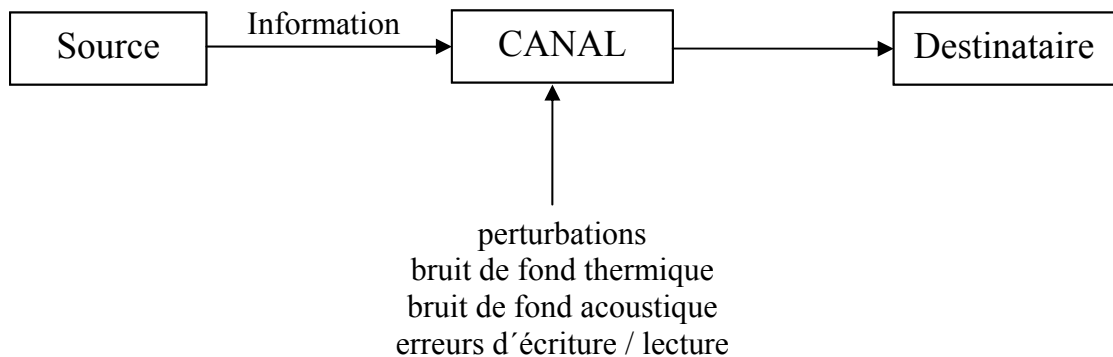


Figure 1.1 Schéma fondamental d'un système de communications.

La figure 1.1 représente le schéma de communications désigné sous le nom de paradigme de Shannon. Une source engendre une information à l'intention d'un destinataire. La source et le destinataire sont deux entités séparées (éventuellement distantes) qui sont reliées par un canal qui est le support de la communication d'une part, mais qui, d'autre part, est le siège de perturbations. Les perturbations ont pour effet de créer une différence entre le message émis et celui qui est reçu. Ces perturbations sont de nature aléatoire, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible (ni pour la source, ni pour le destinataire) de prévoir de manière certaine leurs effets. Il est important de noter que le message émis par la source est également dans une certaine

mesure imprévisible de la part du destinataire, car si le destinataire avait une connaissance totale du message a priori il n'y aurait pas besoin d'établir une communication. La Figure 1.2 est le Schéma moderne d'un système de communications dont deux parties fondamentales étaient ajoutées pour arriver à un système de communication plus fiable, il s'agit des codec et modem:

- 1- La principale fonction du codec est de compresser l'information.
- 2- La principale fonction du modem est d'adapter le flot de bits 'bit stream' au canal ou au média. Il ajoute également une redondance pour protéger le signal contre les erreurs de canal.

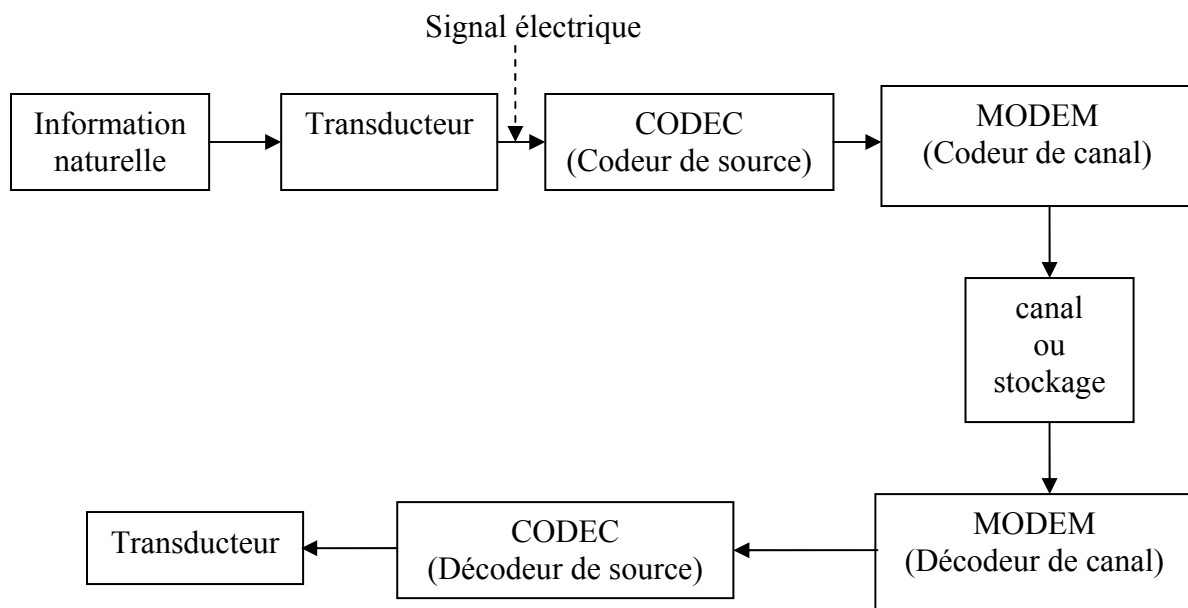


Figure 1.2 Schéma moderne d'un système de communications.

En 1948, C.E. Shannon a formulé la théorie de l'information [1], il a démontré qu'il y a une limite fondamentale à la compression de données sans distorsion. Cette limite appelée entropie est dénotée par H , sa valeur exacte dépend de la nature statistique de la source. Il est possible de compresser la source sans distorsion, avec un taux de compression près de H .

Shannon a également développé la théorie de compression des données avec distorsion. Ceci est connu sous le nom de théorie de la distorsion [1, 7]. Dans la compression de données avec distorsion, une certaine distorsion du signal original est tolérée durant la compression. Shannon a montré que pour une source donnée (dont toutes ses propriétés statistiques sont connues) et un taux de distorsion donné, il existe une fonction $R(D)$ appelée fonction de distorsion. La théorie indique que si D est la distorsion tolérable, alors $R(D)$ est le meilleur taux de compression.

2. Entropie d'une source

Considérons une source discrète stationnaire, ergodique, sans mémoire X . Les échantillons $x(i)$ sont totalement décorélés entre eux. Chaque échantillon temporel $x(i)$ est indépendant des échantillons $x(i-1), x(i-2), \dots, x(N-1)$, et il ne peut prendre que N valeurs différentes dans l'ensemble $\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$.

Pour chaque échantillon de la source X , on associe sa probabilité d'apparition $p(x(i)=a_i) = P_x(a_i)$. On définit ainsi les probabilités : $P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_{N-1})$.

L'expression de l'entropie de X est définie comme suit :

$$H(X) = -E[\log_2 P(X)] = -\sum_{i=0}^{N-1} P_x(a_i) \log_2 P_x(a_i) \quad (1.1)$$

L'unité de l'information est le bits/échantillons. Nous verrons plus loin que la quantité d'information moyenne mesure alors le nombre minimum de bits nécessaires en moyenne pour coder les symboles émis par une source. La grandeur $I(X) = -\log_2 P(X)$ est appelée l'auto-information ou la surprise, plus un événement est rare ($P(X)$ est petit), plus la surprise qui lui est associée est grande, chaque lettre de la source a donc une surprise qui lui est propre. La surprise moyenne de la source n'est autre que l'entropie de la source :

$$H(X) = E[I(X)] \quad (1.2)$$

$H(x)$ ainsi définie s'exprime en bits, elle mesure l'information moyenne d'une source.

Déterminons maintenant les bornes de cette grandeur. Dans notre cas, $P(X) = P(a_0) P(a_1) \dots P(a_{N-1})$, donc $0 < P(X) < 1$, donc $H(X) > 0$. La source a la plus grande entropie dans le cas où elle est totalement imprédictible, c-à-d que les éléments de la source sont équiprobables ($P_x(a_i) = \frac{1}{N}$), dans ce cas $H(X) = \log_2 N$, ainsi on obtient l'inégalité suivante :

$$0 < H(X) \leq \log_2 N \quad (1.3)$$

De cette double inégalité, on peut souligner les remarques suivantes :

- Lorsque $H(x)$ est nulle, cela se traduit par une seule probabilité non nulle d'un élément de l'alphabet. Dans ce cas la source est totalement prédictible.
- L'entropie d'une source discrète est toujours positive.

Si nous considérons deux variables aléatoires x et y associées aux ensembles de valeurs $\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$ et $\{b_0, b_1, \dots, b_{M-1}\}$, avec une distribution de probabilité conjointe

donnée, on peut définir l'entropie conditionnelle déduite de cette notion de densité de probabilité conditionnelle, on obtient ce qui suit:

$$H(x|y) = -E[\log_2 P_{x|y}(x|y)] = -\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} P_{xy}(a_n, b_m) \log_2 P_{x|y}(a_n, b_m) \quad (1.4)$$

Cette relation exprime l'incertitude moyenne qui reste à propos de x après la connaissance de la valeur de y , ou de fait, l'information d'une source connaissant une autre source.

L'information mutuelle s'écrit :

$$I(x; y) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} P_{xy}(a_n, b_m) \log_2 \frac{P_{xy}(a_n, b_m)}{P_x(a_n)P_y(b_m)} \quad (1.5)$$

ou bien
$$I(x; y) = H(x) - H(x|y) \geq 0 \quad (1.6)$$

Ainsi, l'information mutuelle peut être considérée comme la quantité d'incertitudes soustraites de x ou la quantité d'informations apprises sur x en observant les valeurs de y .

La notion d'entropie d'une source discrète telle que définie par les relations précédentes peut être étendue à des variables vectorielles en considérant les probabilités d'apparition des lettres de l'alphabet comme des probabilités conjointes des composantes des vecteurs.

3. La fonction de distorsion

Considérons le schéma simplifié d'un quantificateur (figure 1.1) :

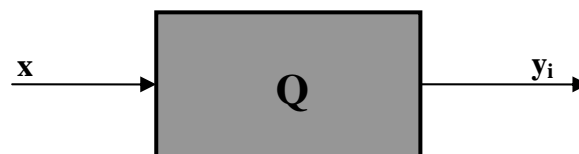


Figure 1.3 Quantificateur type, x est la grandeur d'entrée à quantifier et y_i est la valeur de sortie.

En plus de la source déjà considérée plus haut, soient:

- une séquence de réalisations indépendantes de X composée de k échantillons, $X = (x(0), x(1), \dots, x(k-1))$,

- une autre séquence ayant ses réalisations dans l'ensemble $\{b_0, b_1, \dots, b_{M-1}\}$,
 $Y = (y(0), y(1), \dots, y(k-1))$,
- $\rho_k(x, y)$ la mesure de la distorsion, le critère de fidélité ou encore le coût dû à la reproduction de la séquence X par le vecteur Y.

Notre quantificateur Q peut être considéré comme un canal de transmission. Il va associer à une lettre de l'alphabet de X une lettre de Y. Il constitue donc une matrice de taille $M \times N$ avec en pratique $M \leq N$.

C'est pour cette raison que l'on représente le modèle du quantificateur comme un modèle de probabilité conditionnelle de Y pour X donné avec la contrainte du critère de fidélité ρ introduit par Shannon en 1959 [8].

On pose l'hypothèse que l'expression de ce critère peut se mettre sous la forme:

$$\rho_k(x, y) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \rho_k(x(i), y(i)) \quad (1.7)$$

où ρ est une mesure de la distorsion non négative entre les composantes correspondantes des séquences X et Y que l'on appelle souvent distorsion à 'lettre unique' ou 'sans mémoire' [1].

Les fonctions de probabilité et de probabilité conjointe de transition P_x et $P_{y|x}$ supposées connues, on peut obtenir la distorsion moyenne avec l'expression:

$$d(P_{y|x}) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} P_x(a_n) P_x(b_m | a_n) \rho(a_n, b_m) \quad (1.8)$$

L'expression de l'information mutuelle s'écrit:

$$I(P_{y|x}) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} P_x(a_n) P_{y|x}(b_m | a_n) \log_2 \frac{P_{y|x}(b_m | a_n)}{P_y(b_m)} \quad (1.9)$$

avec

$$P_y(b_m) = \sum_{n=0}^{N-1} P_x(a_n) P_{y|x}(b_m | a_n) \quad (1.10)$$

Pour une distorsion donnée D, on définit la fonction de taux de distorsion $R(D)$, pour un critère de fidélité ρ par la relation:

$$R(D) = \min_{P_{y|x} \in P_D} I(P_{y|x}) \quad (1.11)$$

avec

$$P_D = \{P_{y|x} : d(P_{y|x}) \leq D\} \quad (1.12)$$

Cette équation définit une fonction $R(D)$ qui donne pour une distorsion donnée, un débit minimal R ou réciproquement pour un débit donné, la plus faible distorsion possible D . Ce qui nous ramène à parler du codage d'une source ou d'un vecteur [8,9].

On appelle un code C de taille N et de longueur de bloc k un ensemble de N séquences $\{y_0, y_1, \dots, y_{N-1}\}$ de dimension k chacune. Chaque séquence de C est appelée mot de code qui est une séquence binaire de longueur $\log_2 N$ au moins. Pour coder un vecteur X dans C , il faudra choisir le mot de code qui minimise la distorsion $\rho(x, y)$, notée:

$$\rho_k(x|c) = \min_{y \in C} \rho_k(x, y) \quad (1.13)$$

On définit ainsi la distorsion moyenne:

$$\rho(c) = E[\rho_k(x|c)] = \sum_x P(x) \rho_k(x|c) \quad (1.14)$$

avec:

$$P(x) = \prod_{i=0}^{k-1} P_x(X_i) \quad (1.15)$$

Pour un vecteur X de k échantillons, on définit le débit par échantillons du code C par la relation:

$$R = \frac{1}{k} \log_2 N \text{ bits} \quad (1.16)$$

La théorie sur le codage nous apprend que $R(D)$ est une limite théorique des performances des systèmes de codage, et qu'il est possible d'atteindre une performance assez proche de cette limite. Ce qui est dicté encore par l'équation ci-dessous :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log_2 N = R(D) \quad (1.17)$$

Il est à souligner qu'il suffit de considérer, à la place des distributions $P(x)$ les fonctions de densité de probabilité avec quelques arrangements mathématiques des relations ci-dessus pour étendre leurs validités au cas des sources continues. Cependant il nous semble utile de noter certaines remarques :

- L'alphabet de reproduction des sources continues est infini.
- L'entropie différentielle des sources continues peut être positive ou négative; elle est une mesure relative au repère alors que dans le cas discret elle est absolue. Ainsi on définit l'entropie différentielle par la relation :

$$h(x) = -E[\log_2 f_x(x)] = -\int f_x(x) \log_2 f_x(x) dx \quad (1.18)$$

Où $f_x(x)$ est la densité de probabilité

L'entropie conditionnelle est définie comme suit :

$$h(x|y) = -\iint f_{xy}(x, y) \log_2 f_{x|y}(x|y) dx dy \quad (1.19)$$

L'information mutuelle par:

$$I(x; y) = \iint f_{xy}(x, y) \log_2 \frac{f_{xy}(x, y)}{f_x(x)f_y(y)} dx dy \quad (1.20)$$

A partir des relations précédentes, si l'on considère que $\rho(x, y)$ est une mesure de distorsion, et $f_{y/x}(y/x)$ la densité de probabilité conditionnelle, on définit la distorsion moyenne suivante:

$$d(f_{y/x}) = \iint f_x(x) f_{y/x}(y|x) \rho(x, y) dx dy \quad (1.22)$$

$$\text{où} \quad f_y(y) = -\int f_x(x) f_{y/x}(y|x) dx \quad (1.23)$$

On obtient finalement comme pour le cas discret, la limite théorique des performances ou la fonction $R(D)$:

$$R(D) = \min_{f_{y/x} \in f_D} I(f_{y/x}) \quad (1.24)$$

$$f_D = \{f_{y/x} : d(f_{y/x}) \leq D\} \quad (1.25)$$

Les particularités de chaque type de cas (discret ou continu) créent une différence à l'origine de la fonction $R(D)$ entre les représentations graphiques de cette fonction pour les cas des sources continues et discrètes (figure 1.4).

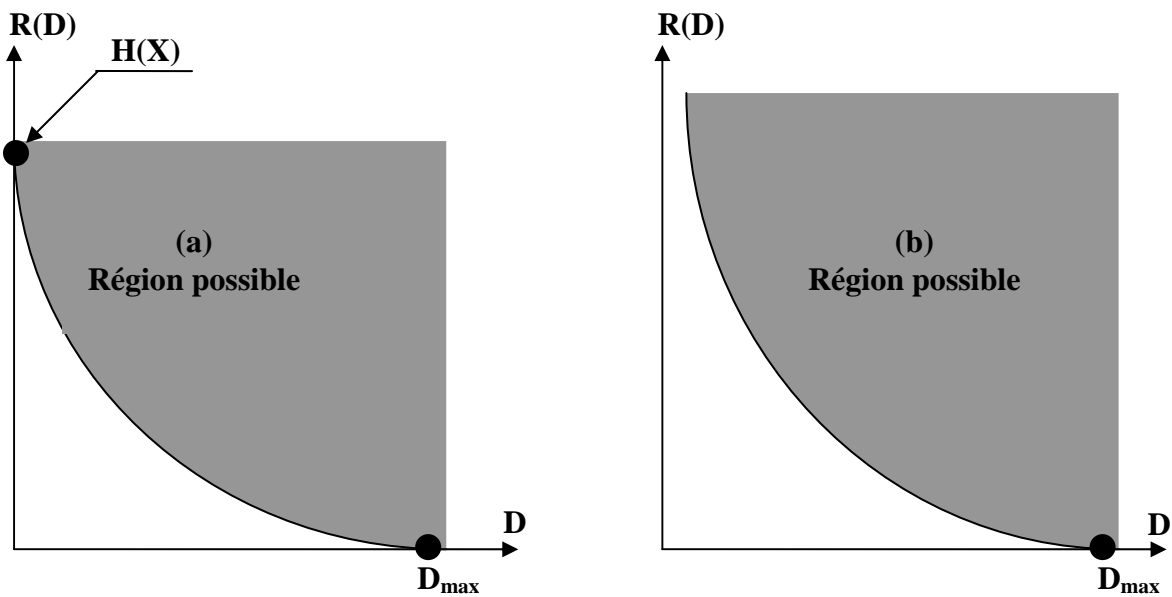


Figure 1.4. Comparaison de la fonction $R(D)$ des sources discrète (a) et continue (b).

On remarquera certaines propriétés de la fonction $R(D)$ [1, 6, 7]:

- $R(D)$ est une fonction convexe sur l'intervalle $]0, D_{\max}[$.
- D_{\max} est la distorsion maximale, elle existe toujours.
- La valeur extrême D_{\max} est obtenue comme suit:

Pour le cas discret,

$$D_{\max} = \min_{y \in C} \sum_x P(x) \rho_x(x, y) \quad (1.26)$$

et le cas de source continue,

$$D_{\max} = \min_y \int f(x) \rho(x, y) dx \quad (1.27)$$

- $R(D)$ est continue, monotone, décroissante.

La méthode utilisée pour la mesure de la distorsion ou le choix du critère de fidélité reste primordiale dans la conception des quantificateurs. Celle de l'erreur quadratique moyenne demeure incontestablement la plus utilisée malgré quelques cas où elle s'avère inadéquate. Appelée encore MSE ou 'mean squared error', elle permet d'exprimer pour une variable aléatoire gaussienne de variance σ_X^2 , la fonction de distorsion $R(D)$ [4] :

$$R(D) = \frac{1}{2} \max \left(0, \log_2 \frac{\sigma_x^2}{D} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_x^2}{D} & 0 \leq D \leq \sigma_x^2 \\ 0 & D \geq \sigma_x^2 \end{cases} \quad (1.28)$$

La limite inférieure de la fonction $R(D)$ est appelée la borne inférieure de Shannon (Shannon Lower Bound ou SLB). Cette caractéristique (SLB) peut être obtenue d'une façon explicite dans bien des cas, ce qui ne se réalise pas pour la fonction $R(D)$ [1, 6].

La borne inférieure de Shannon s'identifie à cette dernière pour des sources gaussiennes telles que définies au début de ce chapitre lorsque le MSE est utilisé comme estimateur.

Il serait intéressant de se pencher sur le cas d'une source gaussienne complexe bidimensionnelle.

4. Cas d'une source bidimensionnelle

Dans la perspective d'une indépendance statistique entre les parties réelles et imaginaires, l'extension des résultats de la théorie de la distorsion exposée devient simple. Il suffit de considérer que la source gaussienne complexe est constituée en fait de deux sources réelles gaussiennes indépendantes. La distorsion totale obtenue par suite à une opération de quantification de la source complexe n'est autre que la moyenne des distorsions de chaque source:

$$D(R) = \frac{1}{2} \{D_1(R_1) + D_2(R_2)\} \quad (1.29)$$

où R_1 et R_2 sont les débits des sources.

et $D_1(R_1)$ et $D_2(R_2)$ sont les distorsions.

On pourrait alors se poser une autre question : comment ou bien quelle est la meilleure façon de réaliser les meilleures performances possibles ?

Il est évident qu'au moins deux solutions existent:

- 1- soit coder les parties réelles et imaginaires chacune à part.
- 2- soit coder les amplitudes et les phases.

Les deux approches ont été l'objet d'un débat des chercheurs et constituent ce que l'on appelle respectivement 'quantification scalaire' et 'quantification vectorielle'. Cette question est développée dans le chapitre suivant.

5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit les principales notions de la théorie de distorsion, qui nous seront utiles dans la suite.

Premièrement nous avons défini, de façon plausible, mais sans autre forme de justification, la mesure d'incertitude et d'information, ainsi que l'information mutuelle. Ces notions ont été introduites dans le cas discret, et nous avons vu que la plupart de leurs propriétés résultaient de quelques propriétés simples de la fonction logarithme et les lois de probabilité, mais ces lois peuvent être généralisées au cas continu. L'entropie différentielle a ensuite été introduite de façon à ce que les différences d'entropies différentielles puissent toujours être interprétées comme des quantités d'information.

Un des résultats les plus surprenants de cette théorie est qu'il est plus efficace de coder de façon conjointe un certain nombre de variables aléatoires que de les coder séparément, même lorsque celles-ci sont indépendantes. Ce résultat a introduit le domaine de la quantification vectorielle qui sera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE II

QUANTIFICATION VECTORIELLE

1. Introduction

La quantification vectorielle étant bien plus complexe que la quantification scalaire, on peut s'interroger sur son intérêt vis-à-vis des techniques scalaires très perfectionnées et performantes. Bien sûr, la théorie démontre qu'il est toujours possible d'obtenir un débit appréciable en codant dans des espaces de dimensions de plus en plus grandes, jusqu'à s'approcher de la limite inférieure théorique de la distorsion. Il faut noter qu'ils présentent l'intérêt de coder à des débits inférieurs à 1 bit par dimension, or dans cette gamme de débit par dimension, ils sont d'une complexité raisonnable et remplacent avantageusement les quantificateurs scalaires.

2. Définition et objectif

La quantification vectorielle consiste à arrondir les composants des vecteurs du signal d'entrée qui varient d'une manière continue par des valeurs discrètes bien déterminées dans un ensemble fini de vecteurs.

Un quantificateur vectoriel (QV) fait correspondre à tout vecteur x décrit comme suit : $x = (x(0), x(1), \dots, x(k-1))$ un vecteur $y = (y_1(0), y_1(1), \dots, y_1(k-1))$ choisi parmi un ensemble fini B de N vecteurs de reproduction [10,11]. Dans la littérature, on attribue à cet ensemble B l'appellation de dictionnaire (codebook).

Cette opération est indispensable dans la numérisation des signaux. Un quantificateur à M niveaux est une application non bijective de l'ensemble des vecteurs d'entrée (généralement l'espace réel euclidien à n dimensions R^n ou un sous-ensemble de R^n), dans un sous-ensemble fini Y de R^n , à M éléments distincts: $Y = \{ y_1, \dots, y_M \}$. Y est appelé l'alphabet de reproduction ou dictionnaire et ses éléments des vecteurs ou mots codes. Un quantificateur

est parfaitement caractérisé par l'ensemble des couples (S_i, y_i) , $i = 1, \dots, M$ où les régions S_i de quantification forment une partition de l'espace de départ et où les y_i sont les points associés à ces régions. On peut alors définir l'application non bijective $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ par la condition:

$$Q(x) = y_i \quad \text{si et seulement si} \quad x \in S_i,$$

La quantification scalaire est bien un cas particulier de la quantification vectorielle dont la dimension est un. Le problème de la quantification vectorielle se pose de la même manière que celui de la quantification scalaire. La différence est que les quantités à coder sont à présent des vecteurs de dimension M et non plus des scalaires de \mathbb{R}^m en n régions et associer à chacune de ces régions le meilleur représentant.

Il existe plusieurs variantes de quantificateurs selon les variables de sortie [11]. Ces variantes sont présentées dans la figure ci-dessous (figure 2.1).

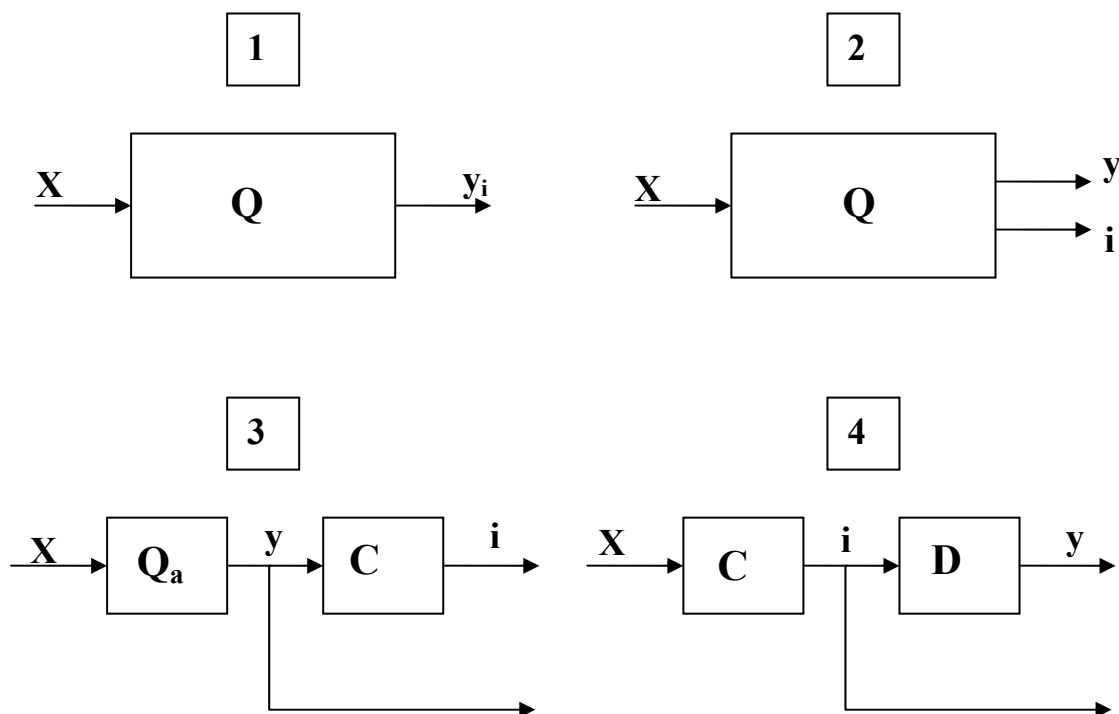


Figure 2.1 Schémas types des quantificateurs.

Dans le premier cas (figure 2.1.1), le quantificateur fournit sous une forme intégrée la même information. Dans le second cas (figure 2.1.2) celle-ci est présentée sous deux formes distinctes. Le troisième schéma décrit par la (figure 2.1.3) illustre le point de vue adopté en DPCM (Differential Pulse Code Modulation) où la valeur arrondie Y est réinjectée

dans la boucle de rétroaction alors que l'indice i est directement transmis [12]. Enfin la quatrième alternative (figure 2.1.4) fournit tout d'abord l'indice i , tandis que la valeur arrondie s'obtient par une table de décodage.

Les chercheurs préfèrent inclure dans la quantification ainsi présentée le codage qui associe un indice à chacune des valeurs arrondies ; de là ils contournent le concept de seuil et font correspondre à l'indice i une table de décodage où sont contenues les valeurs arrondies de sortie Y_i ; ils arrivent ainsi à généraliser la notion de quantification à plus d'une variable et réduisent celle-ci à une recherche de l'indice entre 0 et $N-1$ pour lequel la meilleure approximation est obtenue.

Cette manière de faire permet de considérer toutes les grandeurs, en particulier l'entrée x et les valeurs arrondies y , sous forme vectorielle. La figure 2.2 illustre un exemple de quantification d'un vecteur x à deux dimensions.

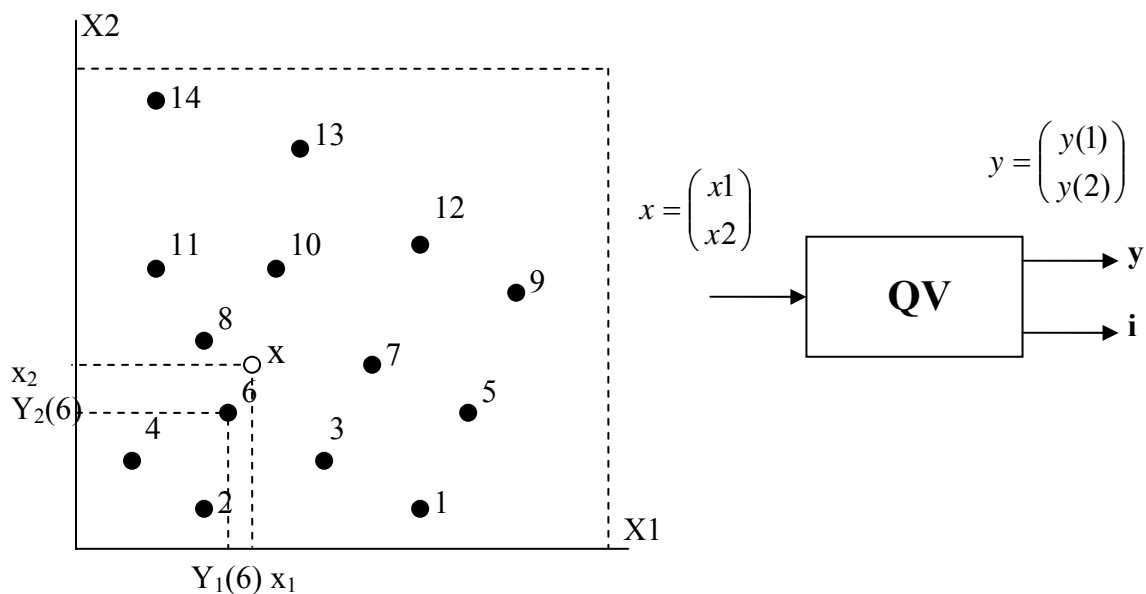


Figure 2.2 Principe de la quantification vectorielle.

En général, les quantificateurs vectoriels surpassent en performances les quantificateurs scalaires; des études ont été faites dans ce sens, J.P.Adoul a comparé les quantificateurs scalaires et vectoriels, et il a montré la supériorité de ces derniers sauf 'dans quelques rares cas pathologiques où les performances sont égales' [11].

3. Principe et formulation de la quantification vectorielle

La quantification est un processus irréversible qui entraîne une perte d'information. Dans toute technique de codage, on cherche donc à ne garder que l'information utile à la reconstitution du signal original. Il faut par conséquent introduire une mesure de précision, parfois appelée critère de fidélité ou de proximité, liée à une notion de distance sur l'espace. On voit alors apparaître l'objectif primordial et le problème fondamental de la quantification: la conception d'un quantificateur efficace qui, pour un débit fixé, minimise la distorsion totale calculée selon un critère déterminé. En pratique, dans plusieurs systèmes de communication, seul l'indice i de la séquence choisie y_i est transmis au décodeur qui choisit alors la séquence correspondante à cette valeur de l'indice. Le dictionnaire qui influe considérablement sur les performances techniques d'un QV est caractérisé par sa taille N et sa dimension k ; ces paramètres permettent de déterminer le débit binaire par échantillon.

Le débit par dimension R est défini par:

$$R = \frac{1}{k} \log_2 N \quad (2.1)$$

Où N est la taille du dictionnaire, en général une puissance de 2.

k est la dimension du dictionnaire ou bien des vecteurs de la séquence à coder.

Le débit R représente le nombre de bits par dimension ou par échantillon à coder.

La distorsion totale D a pour expression:

$$D = E(d(x, Q(x))) = \int_{\mathbb{R}^n} d(x, Q(x)) p(x) dx \quad (2.2)$$

Où $p(x)$ est la densité de probabilité du signal d'entrée et D une distance définie sur l'espace \mathbb{R}^n .

Dans certains cas, le quantificateur recherché peut être celui qui rend maximale l'entropie H (la minimalisation de la distorsion n'est alors pas le critère le plus important), ou celui qui minimise la distorsion, tout en ne dépassant pas un certain seuil pour la valeur de l'entropie.

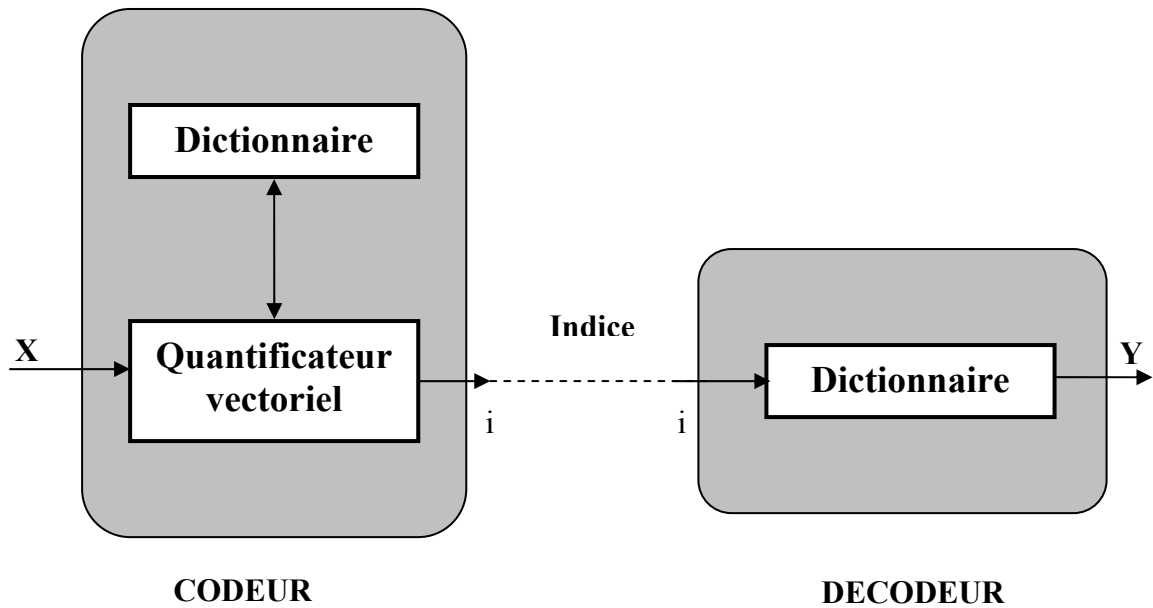


Figure 2.3 Schéma d'un quantificateur vectoriel, x est la séquence à coder, i l'indice à transmettre et y est la séquence reproduite.

4. Régions de Voronoï et centroïdes [13]

Revenons au problème de la détermination de la meilleure partition et des meilleurs représentants en quantification vectorielle. Notons :

$$\mathfrak{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$$

La partition de l'espace d'observations \mathfrak{R}^m en n régions disjointes et :

$$C = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$$

Le dictionnaire des n représentants où μ_k est l'élément de \mathfrak{R}^m que l'on substitue à tout point de la région R_k .

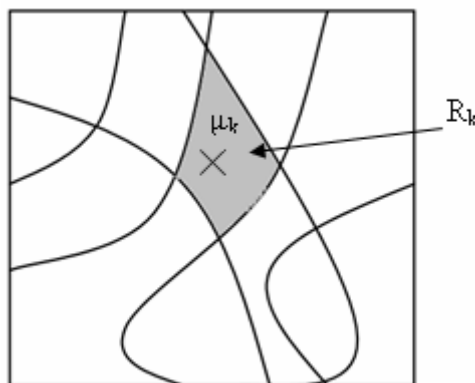


Figure 2.4 Partition \mathfrak{R} du plan

On suppose que la loi de probabilité de l'observation vectorielle X , à valeurs dans \mathfrak{R}^m , possède une densité que nous notons $p_x(x)$. On en déduit que l'écart quadratique moyen a pour expression :

$$D = J(\mathfrak{R}, C) = \sum_{k=1}^n \int_{R_k} \|x - \mu_k\|^2 p_x(x) dx \quad (2.3)$$

L'objectif est de minimiser $J(\mathfrak{R}, C)$ par rapport à \mathfrak{R} et C . Pour cela on peut opérer numériquement en répétant les deux opérations suivantes :

1. On part d'une suite de n représentants C et on cherche les n régions qui minimisent $J(\mathfrak{R}, C)$;
2. une fois ces n régions déterminées, on cherche les n nouveaux représentants qui minimisent $J(\mathfrak{R}, C)$.

A chaque étape, $J(\mathfrak{R}, C)$ diminue. On réitère les deux opérations jusqu'à ce que $J(\mathfrak{R}, C)$ atteigne une valeur jugée suffisamment faible. Il est malheureusement possible que l'algorithme conduise à un minimum local. Examinons en détail ces deux opérations:

1. Pour C donnée minimiser $J(\mathfrak{R}, C)$ par rapport à \mathfrak{R} revient, d'après l'expression (2.3), à ranger dans \mathfrak{R}_k l'ensemble des points de \mathfrak{R}^m qui vérifient :

$$R_k = \left\{ x \in \mathfrak{R}^m : \|x - \mu_k\| < \|x - \mu_j\| \quad \forall j \neq k \right\} \quad (2.4)$$

Les régions d'une telle partition sont appelées régions de Voronoï. Cette notion s'étend bien évidemment à d'autres distances que la simple distance euclidienne.

La figure 2.5 représente les régions de Voronoï pour un ensemble de points de \mathfrak{R}^2 lorsque la distance utilisée est la distance euclidienne. Dans ce cas, partant de l'ensemble de représentants, les séparatrices des régions sont simplement définies par les médiatrices pouvant être rangées indifféremment dans l'une ou l'autre des régions adjacentes.

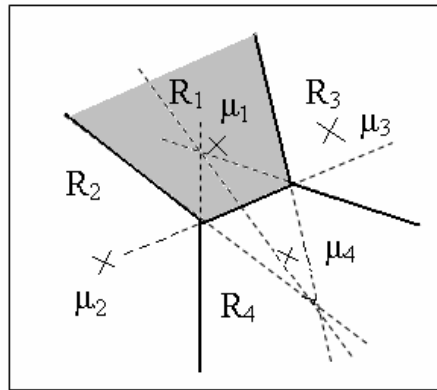


Figure 2.5 Partition \mathfrak{R} par les médiatrices.

2. Pour \mathfrak{R} fixé, et sous des conditions de régularité suffisantes, la minimisation de $J(\mathfrak{R}, C)$ par rapport à C s'obtient en annulant les dérivées partielles de $J(\mathfrak{R}, C)$ par rapport à μ_k . Ce qui donne :

$$\mu_k = \frac{\int_{R_k} x p_x(x) dx}{\int_{R_k} p_x(x) dx} \quad (2.5)$$

Le point de \mathfrak{R}^m défini par l'expression (2.5) est appelé centroïde de la région R_k pour la loi de probabilité de densité $p_x(x)$.

5. Mesure des performances d'un quantificateur

Si le critère sélectionné est le minimum de la distorsion totale, il est nécessaire, avant d'aborder le problème de la construction d'un quantificateur optimal, d'examiner les paramètres déterminant le choix de la distance à utiliser. Pour être retenue en quantification vectorielle, une mesure de distorsion doit être traitable analytiquement, calculable en temps réel à partir des données disponibles et perceptuellement significative. Une faible (respectivement une forte) distorsion correspond à une bonne (respectivement une mauvaise) qualité. Malheureusement, l'expérience montre qu'une même variation de quelques décibels peut se traduire par une distorsion perceptible à l'oreille dans certains cas et inaudible dans d'autres. De plus, si la qualité subjective est bien corrélée à la valeur de la distorsion lorsque celle-ci est faible, elle l'est beaucoup moins quand la dégradation devient plus importante. Ce phénomène se produit généralement pour un codage à débit réduit. Or, les quantificateurs vectoriels deviennent particulièrement intéressants et compétitifs dans cette gamme de débits. Bien qu'étant des outils nécessaires à la conception et à la mise au point d'un système de codage, les mesures de distorsion objectives ne dispensent donc nullement d'effectuer des tests subjectifs.

5.1. Mesure de distances

La forme la plus générale utilise la norme de Hölder [12]:

$$d(x, y) = \left\{ \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^v \right\}^{1/v} \quad (2.6)$$

Où la puissance vième de cette norme est:

$$d_v(x, y) = \left\{ \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^v \right\} \quad (2.7)$$

Le cas $v = 2$ correspond à la distance euclidienne qui est la plus utilisée. Les deux autres mesures de distorsion assez répandues sont l'erreur absolue moyenne ($v = 1$) et l'erreur maximale ($v \rightarrow \infty$).

Si la distance quadratique d_2 est facilement calculable et analysable, elle n'est guère significative perceptuellement. On a donc proposé des généralisations de cette distance, qui font intervenir une pondération dépendant ou non de l'entrée, légèrement plus compliquées mais plus corrélées à la qualité. Ces distances ont pour expression:

$$d_w(x, y) = (x - y)^T W (x - y) \quad (2.8)$$

Où W est une matrice définie positive dépendant ou non de x .

Le cas où la matrice de pondération W est l'inverse de la matrice de covariance

$D = E((x - E(x))(x - E(x))^T)$, correspond à la distance de Mahalanobis.

5.2. Calcul de la distorsion moyenne

Les performances d'un système de codage sont évaluées à l'aide de la distorsion moyenne. En théorie, elle s'exprime comme l'espérance mathématique de la distance entre les signaux d'entrée et de reconstruction: $D_{th} = E(X, Q(X))$. En pratique, la distribution du signal à coder étant inconnue, on en calcule la moyenne temporelle:

$$D = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M d(x_j, Q(x_j)) \quad (2.9)$$

M est le nombre de vecteurs de la source à coder, il doit être suffisamment grand par rapport à la dimension du codeur N pour que la distorsion moyenne soit stable.

Dans le cas où d est la distance euclidienne, la distorsion moyenne est :

$$D = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (x_j - Q(x_j))^2 \quad (2.10)$$

Si la source est stationnaire et ergodique, la moyenne temporelle tend asymptotiquement vers l'espérance mathématique. Le principal inconvénient de la quantification vectorielle réside dans sa complexité qui croît de façon exponentielle avec la dimension et la taille du dictionnaire. La recherche exhaustive à travers les N vecteurs arrondis ou mots de code du dictionnaire nécessite une comparaison de la séquence d'entrée avec tous les N mots de code, ce qui requiert le calcul de N distances sachant que: k multiplications et 2k-1 additions sont nécessaires pour estimer une seule distance euclidienne. Elle exprimerait alors la puissance de l'erreur de quantification. Cependant, les performances en terme de rapport signal à bruit obtenues par les QV s'améliorent sensiblement lorsque la dimension k augmente. De plus, la théorie de la distorsion garantit, pour k suffisamment grand, l'existence d'un ensemble fini de N vecteurs arrondis pour un débit R comme défini par la relation (2.1), tel que la distorsion moyenne par échantillon est proche de la distorsion minimale idéale D(R). C'est pour des raisons de complexité de conception que l'on fait recours aux méthodes sous-optimales de quantification, sujet que nous présenterons plus loin.

5.3 Performances asymptotiques des QV

On s'intéresse à l'étude des performances des quantificateurs vectoriels en fonction de la dimension k des vecteurs.

Etudions les limites des performances des quantificateurs vectoriels en fonction de la dimension k des blocs ou vecteurs [14, 15]. Considérons une variable aléatoire dans l'espace euclidien de dimension k (\mathcal{R}^k) avec P(x) comme densité de probabilité:

$$x = (x(0), x(1), \dots, x(k-1)) \in \mathcal{R}^k \quad (2.11)$$

On définit un quantificateur vectoriel QV par l'ensemble de N vecteurs arrondis

$(y_0, y_1, \dots, y_{k-1})$ et par la partition $\{ S_0, S_1, \dots, S_{N-1} \}$ de \mathcal{R}^k où

$$S_i = Q^{-1}(y_i) \subset \mathcal{R}^k \quad S_i \cap S_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=1}^N S_i = \mathcal{R}^k \quad (2.12)$$

On définit un quantificateur vectoriel par :

$$Q(x) = y_i \quad \text{si } x \in S_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.13)$$

La performance d'un tel, QV est mesurée par la distorsion moyenne donnée par l'expression suivante :

$$D = E[d(x, Q(x))] = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{S_i} p(x) \|x - y\|^2 dx \quad (2.14)$$

Et le débit du quantificateur Q est mesuré par son entropie H_Q :

$$H_Q = - \sum_{i=0}^{N-1} P_i \log_2 P_i \quad (2.15)$$

$$\text{Avec} \quad P_i = \int_{S_i} P(x) dx = P_X(x \in S_i) \quad (2.16)$$

Soit la région $G \subset \mathfrak{R}^k$. On définit le volume $V(G)$ de G par :

$$V(G) = \int_G dx \quad (2.17)$$

On définit aussi le volume V_k de la sphère unité de dimension k par:

$$V_k = (\{u : \|u\| \leq 1\}) = \frac{2 \Gamma(1/2)^k}{k \Gamma(k/2)} \quad (1.18)$$

$$\text{Où} \quad \|u\| = \left(\sum_{j=0}^{k-1} u^2(j) \right)^{1/2} \quad (2.19)$$

et Γ est la fonction Gamma ($\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$).

On va déterminer à présent, la distorsion moyenne minimale que peut atteindre un quantificateur Q ayant une entropie donnée H_Q sur un ensemble de points N.

5.3.1. Bornes asymptotiques des performances

On considère ici, par souci de simplicité, le cas asymptotique où la performance des quantificateurs tend vers une meilleure valeur possible. Dans ce cas, le nombre de niveaux ou de vecteurs arrondis N, sera assez grand (H_Q grand). Par conséquent nous pouvons considérer que la probabilité $p(x)$ varie à l'intérieur de la région S_i , on peut donc assimiler cette dernière à p_i , si $x \in S_i$, ($p(x) \approx p_i$).

A partir des relations déjà citées nous obtenons :

$$P_i = \int_{S_i} P(x) dx = p_i \int_{S_i} dx = p_i V(S_i) \quad (2.20)$$

Donc l'expression de la distorsion moyenne peut être réécrite comme suit:

$$D = - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{P_i}{V(S_i)} \int_{S_i} \|x - y_i\|^2 dx \quad (2.21)$$

On montre que:

$$\int_S d(x, y) dx = \int_{S_i} \|x - y_i\|^2 dx \geq \frac{V(S)}{V_k} \int_{U/\|U\| \leq 1} \left\| \left(\frac{V(S)}{V_k} \right)^{1/k} \cdot u \right\|^2 du \quad (2.22)$$

Soit $F_k(V)$ la fonction:

$$F_k(V) = \frac{1}{V_k} \int_{U/\|u\| \leq 1} \left\| \left(\frac{V(S)}{V_k} \right)^{1/k} \cdot u \right\|^2 du \quad (2.23)$$

L'inégalité précédente peut s'écrire:

$$\int_S d(x, y) dx = \int_{S_i} \|x - y_i\|^2 dx \geq V(S) F_k \left(V(S)^{1/k} \right) \quad (2.24)$$

Et nous obtenons

$$D \geq \sum_{i=0}^{N-1} P_i F_k \left(V(S_i)^{1/k} \right) \approx E \left[F_k \left(V(X)^{1/k} \right) \right] = D_L \quad (2.25)$$

D_L est une borne inférieure aux performances asymptotiques du QV obtenues par la distorsion moyenne D .

Sachant que F_k est une fonction convexe, l'application de l'inégalité de Jensen à l'équation précédente donne:

$$D \geq D_L \geq F_k \left[E \left(V(X)^{1/k} \right) \right] \quad (2.26)$$

$$\text{où} \quad F_k^{-1}(D) \geq F_k^{-1}(D_L) \geq E \left(V(X)^{1/k} \right) \quad (2.27)$$

A l'aide des équations (2.15) et (2.20), nous obtenons une nouvelle expression de l'entropie:

$$H_Q = - \sum_{i=0}^{N-1} \int_{S_i} p(x) \log_2 p(x) dx - \sum_{i=0}^{N-1} \int_{S_i} p(x) \log_2 V(S) dx \quad (2.28)$$

On peut en déduire:

$$H_Q = h(p) - E[\text{Log}_2 V(X)] \quad (2.29)$$

où $h(p)$ est l'entropie différentielle

$$h(p) = - \int p(x) \log_2 p(x) dx \quad (2.30)$$

L'inégalité de Jensen donne:

$$H_Q = h(p) - E[\text{Log}_2 V(X)^{1/k}] \geq h(p) - k \text{Log}_2 \left(E[V(X)^{1/k}] \right) \quad (2.31)$$

En utilisant la relation (2.27) on obtient:

$$H_Q \geq h(p) - k \text{Log}_2 \left(F_k^{-1}(D_L) \right) \geq h(p) - k \text{Log}_2 \left(F_k^{-1}(D) \right) \quad (2.32)$$

Ce qui donne après avoir élève au carré:

$$D \geq D_L \geq F_k \left(2^{-(H_Q - h(p))/k} \right) \quad (2.33)$$

La relation exprime une borne inférieure asymptotique de la distorsion moyenne obtenue par un quantificateur Q ayant une entropie fixe H_Q . En remplaçant $F_k(v)$ dans la relation ci-dessus, on obtient:

$$D \geq D_L \geq \frac{k V_K^{-2/K}}{k+2} 2^{-(2/K)(H_Q - h(p))} \quad (2.34)$$

5.3.2 Application à une source gaussienne sans mémoire

Comparons la borne inférieure D exprimée par la relation (2.34) à celle de Shannon $D_{LSB}(R)$. Il est à remarquer que nous utilisons la distorsion moyenne ramenée à l'échantillon, soit : $\bar{D} = D/k$

Le débit binaire d'un quantificateur est déterminé par la relation (2.1), sachant que $H_Q/k = H_k \leq \bar{R}$, nous obtenons à partir de la relation (2.34), pour \bar{R} fixe:

$$\bar{D} = \frac{D}{k} \geq \frac{V_k^{-2/k}}{k+2} 2^{-2(\bar{R}-h_k)} = D_Q^{(k)}(R) \quad (2.35)$$

où $h_k = \frac{h(p)}{k}$ sont les entropies normalisées.

Par ailleurs, la borne $D_{SLB}(R)$ peut se mettre sous la forme suivante:

$$\bar{D}_{SLB}^{(k)}(R) = \frac{D_{SLB}}{k} = \left[2 e V_k^{2/k} \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)^{2/k} \right]^{-1} 2^{-2(\bar{R}-h_k)} \quad (2.36)$$

En combinant les équations (2.35) et (2.36), on obtient la borne:

$$\bar{D} \geq \bar{D}_Q^{(k)}(R) = \left[\left(\frac{e}{1+k/2} \right) \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)^{2/k} \right] D_{SLB}^{(k)}(R) \quad (2.37)$$

La relation (2.37) détermine une borne inférieure des performances d'un quantificateur optimal de N vecteurs arrondis de dimension k chacun. Cette borne apporte des améliorations par rapport à la fonction prédite par la fonction $D(R)$ pour k fixe, et tend vers la limite de la fonction de distorsion lorsque k tend vers l'infini.

La réciproque de la fonction $R(D)$, pour une source gaussienne s'exprime comme suit:

$$D(R) = 2^{-2R} \quad (2.38)$$

Aussi la distorsion que peut atteindre un quantificateur optimal Q en fonction de la dimension des blocs et pour un débit binaire fixe donné R s'écrit :

$$\bar{D}_Q^{(k)}(R) = \left[\left(\frac{e}{1+k/2} \right) \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)^{2/k} \right] 2^{-2R} \quad (2.39)$$

Il nous semble utile de rappeler que les performances peuvent être également exprimées par le rapport signal sur bruit RSB ou SNR (signal to noise ratio) en décibel. Celui-ci est le rapport de la variance σ_x^2 de la source X à quantifier et de la distorsion moyenne D introduite par le quantificateur:

$$RSB = 10 \log_{10} \frac{\sigma_x^2}{D} \quad (2.40)$$

En utilisant la relation (2.39), on détermine le RSB en fonction de la dimension k des blocs ou des vecteurs de quantification:

$$\text{RSB}_Q^{(k)}(R) = \text{RSB}_{\max}(R) - 10 \log_{10} \left[\left(\frac{e}{1 + k/2} \right) \Gamma \left(1 + \frac{k}{2} \right)^{2/k} \right] 2^{-2R} \quad (2.41)$$

où le $\text{RSB}_{\max}(R)$ est la borne de Shannon.

6. Types de quantification vectorielle

6.1. Approche statistique

Cette approche est basée sur un algorithme itératif désigné par K-moyenne ou LBG du nom de ses auteurs Lynde, Buzo et Gray [3].

L'algorithme de la k-moyenne est généralement attribué à Mac Queen; Adoul et Al l'ont également proposé dans le contexte du traitement de la parole comme objet de classification et enfin, Gray et Al le présentent comme une extension de l'algorithme de Lloyd-Max pour des variables vectorielles.

Il s'agit de faire l'apprentissage, à l'aide d'un grand nombre de données en entrée, à plusieurs reprises afin de prendre en compte les caractéristiques statiques du signal d'entrée.

Les étapes de construction du dictionnaire sont les suivantes:

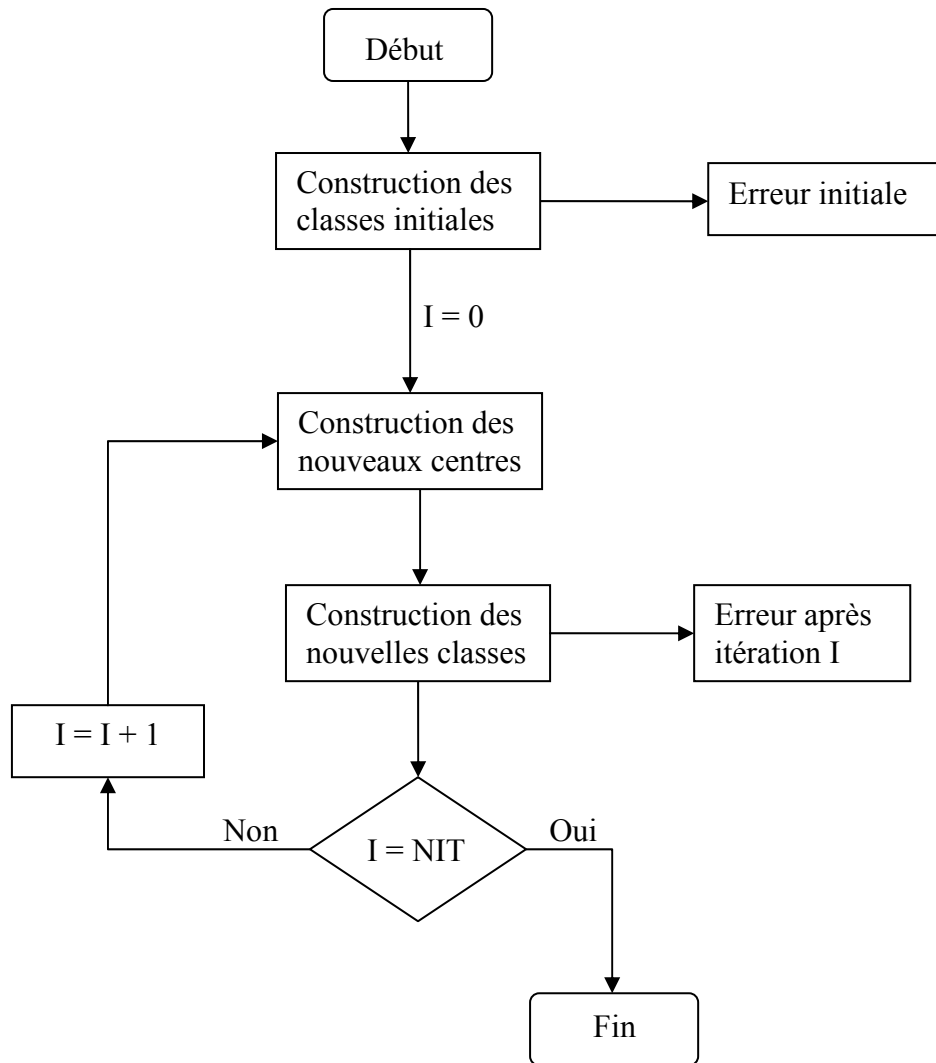


Figure 2.6 Structure de l'algorithme de la K-moyenne.

Soit $X = \{x_j ; j = 1, 2, \dots, N\}$ une séquence d'apprentissage composée de N vecteurs de dimension k .

Un dictionnaire initial $Y_0 = \{y_i ; i=1, 2, \dots, N\}$;

1- Un dictionnaire initial est choisi a priori, les vecteurs qui le composent vont former les centres de départ pour une construction initiale des classes.

2- A chaque vecteur de la séquence d'apprentissage x_j est associé un vecteur le plus proche voisin y_i selon le critère de distorsion choisi. La distorsion moyenne globale est calculée sur toute la séquence d'apprentissage par sommation des distorsions estimées entre les vecteurs d'apprentissage x et y , elle est donnée par l'équation suivante:

$$D = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N \min_{y \in Y_0} \|x_j - y\|^2 \quad (2.42)$$

3- Pour chaque classe ainsi obtenue, il va falloir calculer le nouveau centre, représentant au mieux tous les vecteurs qui lui sont associés. Le calcul se fait en cherchant à minimiser la distorsion sur la classe étudiée. La nouvelle valeur du centre remplace alors l'ancienne dans le dictionnaire.

Les centres sont calculés par l'expression suivante:

$$C = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^N x_j \quad (2.43)$$

où L est le nombre d'échantillons de la région représentée par le même centroïde.

4- L'algorithme reprend de façon itérative au niveau de (2) tant qu'un critère d'optimalité n'est pas satisfait.

L'arrêt se produit lorsque la distorsion totale sur le dictionnaire entre deux itérations successives de la K-moyenne est inférieure à un seuil S .

$$(D_{m-1} - D_m) / D_m < S \quad (2.44)$$

La technique du QV statique permet de bien rendre compte de la distribution du signal à coder, mais la taille du dictionnaire et la dimension des vecteurs d'entrée sont sévèrement limités par des contraintes technologiques en matière de stockage et de complexité de calcul. Plusieurs techniques ont été proposées pour contourner le problème de complexité, comme l'organisation des dictionnaires en arbre, les quantificateurs vectoriels en Lattice (Lattice VQ), la quantification vectorielle à étages, la quantification vectorielle par split et quantificateurs vectoriels Gain et Forme (gain shape vector quantizers). Nous détaillerons quelques techniques dans les paragraphes suivants.

6.2. Approche algébrique

En dépit de ces techniques, le manque de structure du dictionnaire statistique, obtenu par l'algorithme LBG, interdit tout algorithme de codage vraiment simple et rapide. Conscients de ce problème, certains chercheurs préconisèrent l'emploi de dictionnaires fortement ordonnés et émirent l'idée du quantificateur vectoriel algébrique dont le dictionnaire serait un sous-ensemble d'un réseau régulier de points [11,12,16]. Grâce aux propriétés géométriques de son dictionnaire, ce quantificateur ne présente qu'une faible complexité tant en calcul qu'en mémoire, mais il n'est optimal que pour une distribution uniforme. Généralisation du

quantificateur scalaire uniforme, le quantificateur vectoriel algébrique semble plus difficile à s'ajuster à la statistique du signal par la technique du 'companding'. En effet, bien que cette idée du compresseur multidimensionnel fut suggérée, aucune méthode pour le concevoir n'a été proposée.

6.3. Techniques sous-optimales

Pour s'affranchir de ces contraintes, plusieurs variantes de la quantification vectorielle de base furent étudiées. Elles tentent de remédier à l'absence de structures régulières dans le dictionnaire et parviennent ainsi à réduire la complexité de calcul au détriment des performances. Les principales méthodes sont les suivantes:

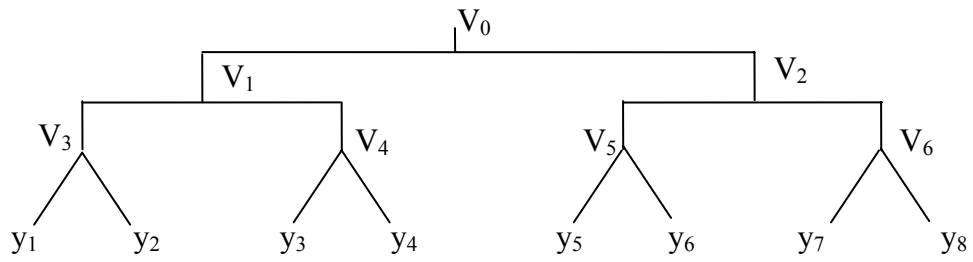
1) Le quantificateur vectoriel en arbre, introduit par Gray et al [17], dérive naturellement de leur algorithme de 'splitting' de génération du dictionnaire initial. Ce quantificateur vectoriel impose au dictionnaire une structure hiérarchique en arbre (voir figure 2.7a). La procédure de recherche est simplifiée mais les performances sont moindres, en outre, il nécessite plus de mémoire de stockage.

2) Le quantificateur vectoriel à étages multiples, proposé par Juang [18] permet de limiter la taille des dictionnaires (réduisant le temps de calcul et le coût en mémoire) en mettant en cascade des quantificateurs vectoriels de niveaux moindres. Le signal d'erreur du premier quantificateur devient le signal d'entrée du second, etc... (voir figure 2.7b).

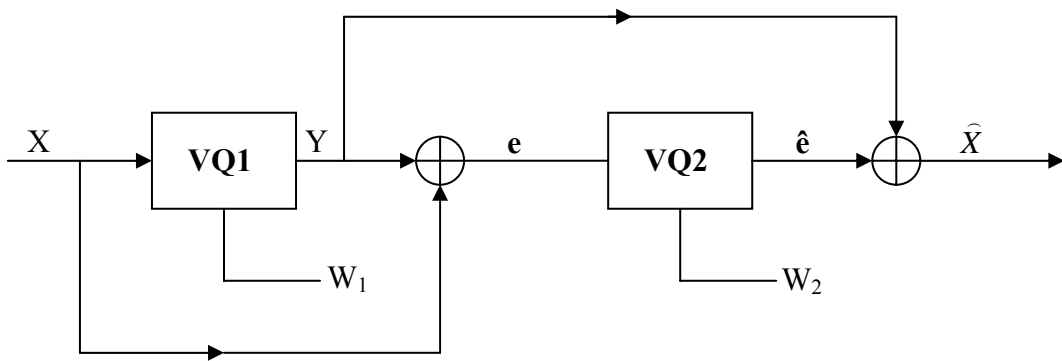
3) Le quantificateur vectoriel 'produit cartésien' de N quantificateurs vectoriels classiques de tailles et de dimensions plus petites décompose le vecteur d'entrée en N sous-vecteurs. Le $i^{\text{ème}}$ sous-vecteur de dimension n_i est quantifié indépendamment des autres par le $i^{\text{ème}}$ quantificateur vectoriel à M_i niveaux.

4) Le quantificateur vectoriel 'gain/orientation' constitue un cas particulier du quantificateur vectoriel 'produit cartésien'. Il comprend deux quantificateurs, un scalaire et un vectoriel, qui codent, séparément mais non indépendamment, le gain (énergie du vecteur d'entrée) et l'orientation (vecteur d'entrée normalisé par cette énergie) (voir figure 2.7c). Gray et Sabin [19] déterminèrent la façon de concevoir ces deux quantificateurs conjointement et de manière optimale. En 1983, cette technique fut introduite en quantification vectorielle algébrique par Adoul qui employèrent des sous-ensembles

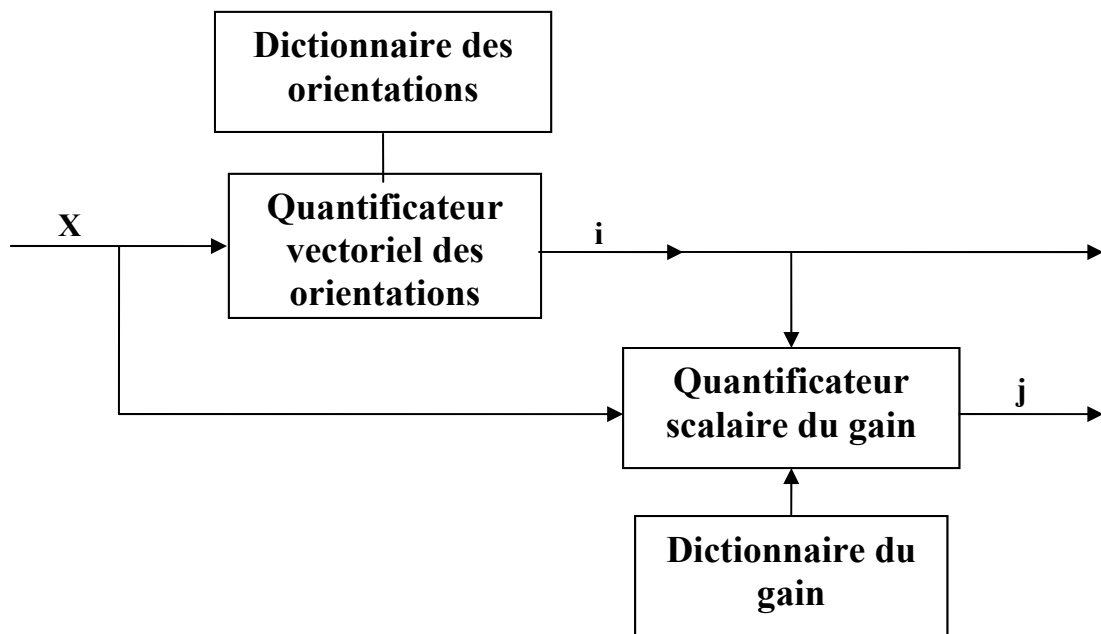
sphériques de réseaux réguliers comme dictionnaires des quantificateurs vectoriels de l'orientation.



(2.7 a)



(2.7 b)



(2.7c)

Figure 2.7 Techniques sous-optimales de la quantification vectorielle

6.4. Algorithmes de recherche rapide optimaux

Pour réduire la complexité sans nuire aux performances, Gersho [20] proposa des algorithmes, optimaux et rapides, de recherche du plus proche voisin: partition de l'espace en hyperplans, méthodes de la projection, de l'hypercube, du minimax. Ces procédures accélèrent l'identification du plus proche voisin, en spécifiant rapidement la zone de l'espace contenant le vecteur à coder. Ceci permet, en éliminant d'abord un grand nombre de représentants improbables, de limiter la recherche à quelques cellules de Voronoï pertinentes. Ces méthodes requièrent des calculs préliminaires ('hors-ligne') sur le dictionnaire optimal et de la mémoire supplémentaire pour stocker les données nécessaires à l'algorithme. Comparées aux techniques sous-optimales présentées au paragraphe précédent, ces méthodes demeurent optimales mais le gain en complexité est moindre.

7. Mise en oeuvre d'un quantificateur. Dualité avec la modulation

La partition P et le dictionnaire Y étant sélectionnés ou calculés, il faut, pour mettre en oeuvre un quantificateur, résoudre les trois problèmes suivants:

- 1) Recherche de la région de quantification contenant un vecteur x de \mathbf{R}^n (dans la plupart des cas, on détermine le plus proche voisin de x dans le dictionnaire),
- 2) Recherche de l'index de la région contenant x , c'est-à-dire de l'index du mot code le plus proche de x ,
- 3) Recherche d'un mot code à partir de son index.

Remarque: Les applications 2 et 3 sont des bijections et sont inverses l'une de l'autre. L'application 1 est non bijective mais surjective (si le quantificateur a été bien conçu!).

On note que les trois opérations du codage-décodage de source ont leurs équivalents dans le codage-décodage de canal; mais celles du codage en quantification correspondent à celles du décodage en modulation et réciproquement. Cette dualité se retrouve aussi dans leurs objectifs. En codage de canal, on recherche le meilleur compromis entre la maximisation du nombre de signaux émis et la minimisation du taux d'erreurs à la réception; tandis qu'en codage de source, on désire réduire le débit par dimension en limitant le nombre de représentants sans augmenter la distorsion. La figure 2.9 met en évidence cette dualité.

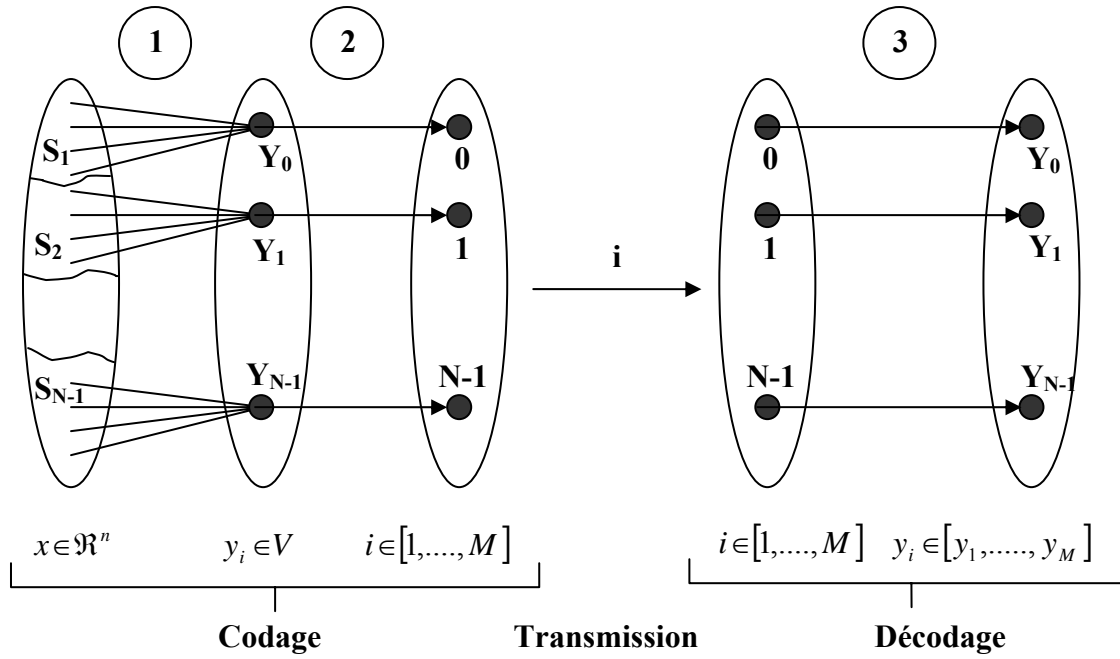
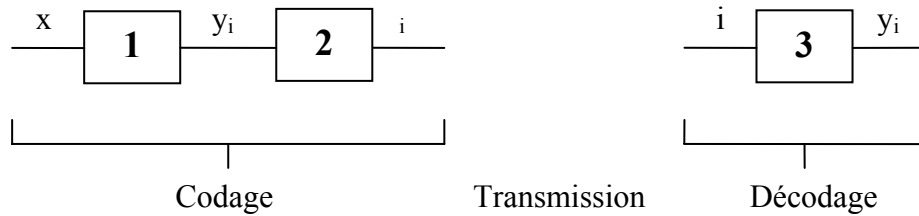


Figure 2.8 Schématisation des trois opérations d’une quantification vectorielle

Codage



Codage de CANAL

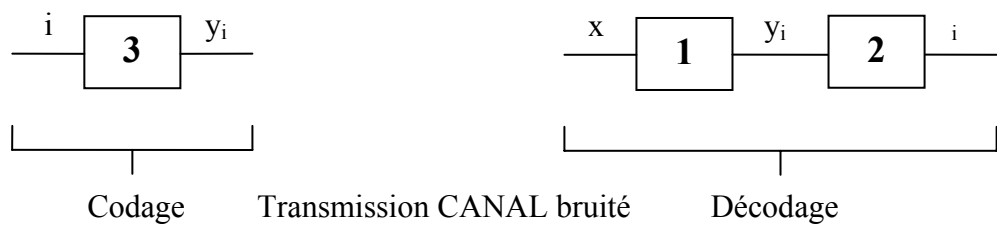


Figure 2.9 Dualité modulation-quantification

8. Exemples de quantification vectorielle

En va montrer quelques exemples qui vont nous permettre d'illustrer les avantages de la quantification vectorielle pour différents distributions, puis en va donner un exemple pratique de la quantification des LSF.

8.1. Quantification de deux variables uniformes

Considérons le cas de deux variables indépendantes de distributions uniformes et comparons, pour un même débit, les performances du quantificateur vectoriel uniforme optimal à celles du quantificateur vectoriel, produit cartésien de deux quantificateurs scalaires uniformes. On suppose que le nombre de points est suffisamment grand pour pouvoir négliger les effets de bord. Toth [21] et Newman démontrèrent indépendamment l'un de l'autre que, pour une variable bidimensionnelle uniformément distribuée, le minimum de l'erreur quadratique moyenne est obtenu par un pavage régulier de l'espace par des hexagones. Le quantificateur vectoriel uniforme optimal à deux dimensions est donc décrit par le réseau régulier hexagonal A_2 , les régions de quantification étant des hexagones et les points de sortie, placés au centre de ces hexagones, étant les points du réseau. En dimension 1, c'est le réseau régulier Z qui conduit au quantificateur uniforme optimal. Le quantificateur vectoriel constitué par le produit cartésien de ce réseau avec lui-même, a pour représentation le réseau cubique Z^2 . Les régions de Voronoï du quantificateur 'hexagonal' sont toutes congruentes à l'hexagone, celles du quantificateur 'cubique' au carré. Les moments d'inertie normalisés d'ordre 2 de ces deux polytopes peuvent s'interpréter comme les erreurs quadratiques moyennes par dimension. Leurs valeurs permettent de comparer les performances de ces deux quantificateurs uniformes construits à l'aide de réseaux réguliers: 0.0802 pour le réseau hexagonal A_2 (quantificateur vectoriel optimal), 0.0833 pour le réseau cubique Z^2 (quantificateur formé par une paire de quantificateurs scalaires).

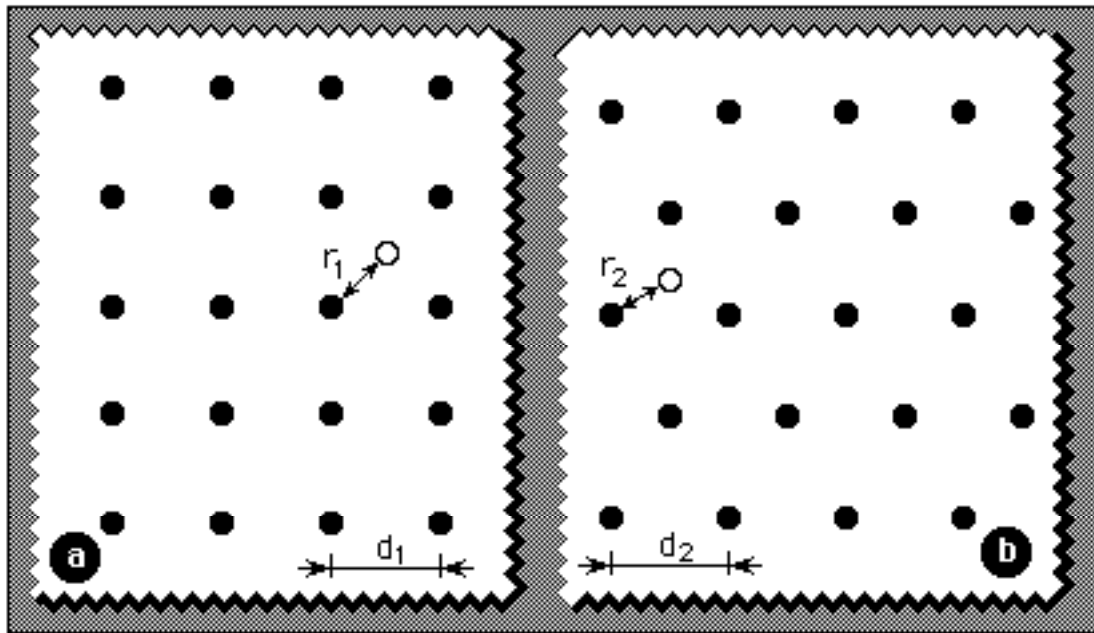


Figure 2.10. Comparaison de deux méthodes de quantification pour un vecteur x à deux dimensions réparti uniformément sur le domaine, une paire de quantificateurs scalaires (2.10a) et un quantificateur vectoriel à motif hexagonal (2.10b). Ce dernier est optimal pour le critère de l'erreur quadratique moyenne

La figure 2.10 représentant ces deux quantificateurs, permet de mieux comprendre la supériorité du quantificateur hexagonal. L'ensemble des vecteurs mal quantifiés, c'est-à-dire en dehors des sphères inscrites dans les régions de Voronoï est beaucoup plus grand, et le rapport des distances du point le plus mal codé aux réseaux, est de: 0.0877.

8.2 Quantification de 2 variables gaussiennes

Prenons deux variables gaussiennes indépendantes distribuées selon la loi normale, et de construire deux quantificateurs vectoriels bidimensionnels à 2 bits par dimension (soit 16 représentants). Le premier est formé par le produit cartésien de deux quantificateurs scalaires identiques à 4 niveaux, conçus d'après l'algorithme de Lloyd-Max. Le deuxième est le quantificateur vectoriel à 2 dimensions optimal obtenu par l'algorithme LBG. Les graphes de la figure 2.11 décrivent les points de sortie et les régions de décision de ces deux quantificateurs. L'erreur quadratique moyenne du quantificateur vectoriel optimal vaut 82.7% de celle produite par le quantificateur vectoriel dérivé des deux quantificateurs scalaires optimaux.

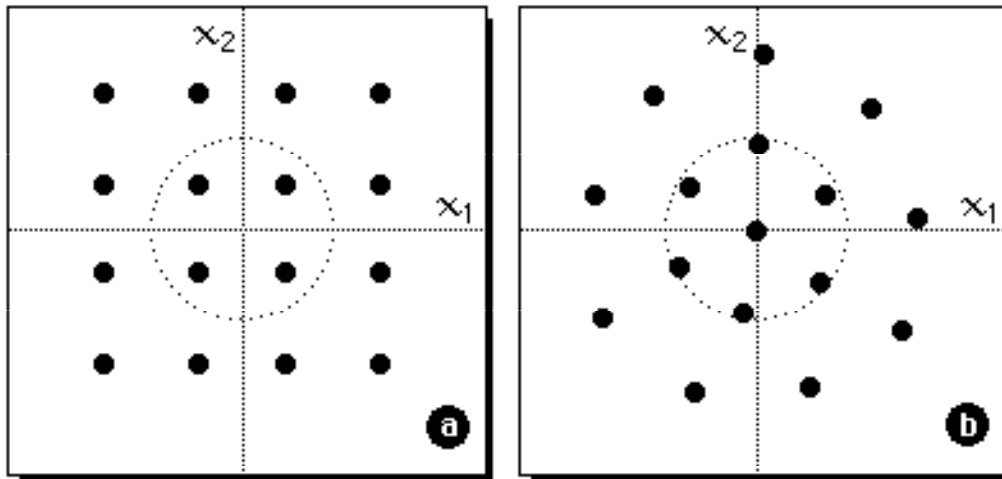


Figure 2.11 Comparaison de la quantification d'un vecteur à deux dimensions par une paire de quantificateurs scalaires optimaux (2.11a) et par un quantificateur vectoriel optimal (2.11b)

Si les deux variables sont corrélées, le gain est encore plus important, comme l'indique la figure 2.12, représentant l'erreur quadratique moyenne du quantificateur vectoriel optimal en pourcentage de celle de la paire de quantificateurs scalaires, pour différents débits par dimension et diverses valeurs du coefficient de corrélation entre les deux variables.

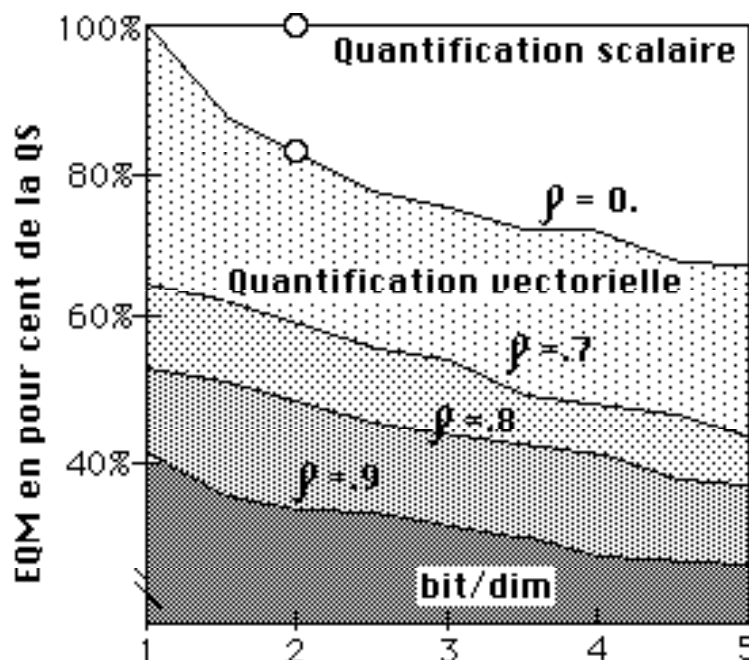


Figure 2.12 Comparaison des performances entre une paire de quantificateurs scalaires et un quantificateur vectoriel appliqués à un vecteur à deux composantes gaussiennes ayant la corrélation ρ

8.3. Quantification des coefficients LPC

Le troisième et dernier exemple concerne la quantification des coefficients issus de l'analyse par prédiction linéaire [22]. Historiquement, ce fut la première application pratique de la quantification vectorielle. Son introduction en quantification des coefficients LPC révolutionna les techniques de codage de parole basées sur la prédiction linéaire. En effet, le gain en débit réalisé permet de remédier au principal défaut de ces codeurs: la synthèse trop sommaire de l'excitation. L'intérêt des recherches se reporta alors sur la modélisation et la quantification de l'erreur de prédiction linéaire à laquelle on pouvait allouer plus de bits.

En 1980, Gray et al [27] comparèrent diverses méthodes de quantification des coefficients LPC, selon le critère quadratique moyen de la différence des logarithmes des spectres. En 1985, Makhoul [23] compara la quantification vectorielle classique à deux techniques scalaires, proposées par Huang et Schulteiss, en 1963 [24]. Ces dernières employaient une quantification scalaire optimale de Lloyd-Max des coefficients LAR avec allocation de bits et la deuxième utilisait en plus une rotation pour décorrélérer les coefficients LAR. Les performances de ces trois systèmes, mesurées par le rapport signal-à-bruit.

Les mesures objectives calculées par Makhoul et Buzo prouvent que, pour un même débit, les performances de la quantification vectorielle sont supérieures à celles de la quantification scalaire, ou de manière équivalente, que la quantification vectorielle atteint les mêmes performances que la quantification scalaire pour un débit plus faible. Cependant, il faut insister sur le fait que les résultats objectifs ne doivent être considérés que comme une indication de la qualité subjective. De plus, il faut garder à l'esprit que le filtre LPC est une partie intégrante d'un codeur. Il est donc nécessaire de tester ces quantificateurs en les remplaçant dans le contexte d'une application de codage de la parole.

8.4. Quantification des coefficients LSF

Dans le contexte de la compression de la parole que les coefficients de prédiction sont peu appropriés à la quantification à cause de leur large gamme dynamique et aux possibilités d'instabilité du filtre d'analyse LPC. Les coefficients LSF (Line Spectral Frequencies) ont été proposés pour palier ces problèmes. L'objectif primordial de la quantification des paramètres LSF est la minimisation du nombre de bits attribués aux LSF lors de la transmission. Plusieurs méthodes sont utilisées pour quantifier ces paramètres, la quantification directe, la quantification par Split et la quantification à étages.

9. Conclusion

La quantification vectorielle est indispensable pour toute opération de numérisation des signaux. Pour cela elle a été l'objet de nombreuses recherches et a intéressé plusieurs laboratoires dans le monde.

Dans ce chapitre, nous avons présenté les fondements théoriques de la quantification vectorielle. On a vu que la quantification optimale reste loin d'être appliquée dans la conception des quantificateurs. Pour cela d'autres quantificateurs qui ont une tendance pratique ont été l'objet de recherches de plusieurs chercheurs dans le monde.

Les quantificateurs algébriques sont des quantificateurs qui donnent de bonnes performances tel que les quantificateurs sphériques, mais ils restent toujours difficiles de proposer des structures géométriques ou bien des formules mathématiques qui donnent de bonnes performances dans la quantification vectorielle.

Les quantificateurs vectoriels statistiques ont l'inconvénient d'être non structurés et ont une complexité qui croît exponentiellement avec la taille du dictionnaire, ce qui rend la recherche des mots code longue et fastidieuse.

CHAPITRE III

LE QUANTIFIQUATEUR SPIRAL A TROIS DIMENSIONS

1. Introduction

Le ‘spiral quantizer’ est un quantificateur algébrique introduit par D.BERKANI [6]. Il est basé sur la discrétisation et l’optimisation de la spirale d’Archimède. Ce quantificateur a été conçu pour quantifier une source gaussienne à 2 dimensions, seuls les paramètres optimaux seront stockés en mémoire. Le nombre de points de ce quantificateur varie de 2 à 512 avec des valeurs puissances de 2. Les performances de ce quantificateur ont été mesurées par l’erreur quadratique moyenne et en terme de RSB moyen.

Dans ce chapitre, nous allons présenter le quantificateur spiral à trois dimensions. Ce quantificateur consiste à discrétiser et optimiser une spirale à trois dimensions afin de quantifier une source gaussienne à trois dimensions. Les performances de ce nouveau quantificateur seront mesurées en terme d’erreur quadratique moyenne et en terme de RSB. Par la suite, les performances du quantificateur seront comparées aux limites théoriques formulées par la théorie de la distorsion. Une structure à plusieurs spirales ‘quantificateur multi-spirales’ sera étudiée. Dans la fin de ce chapitre, nous allons comparer les performances du quantificateur spiral avec quelques quantificateurs algébriques simples.

2. Construction de la spirale à trois dimensions

2.1 Coordonnées polaires et sphériques

Dans un espace à deux dimensions, un point P a deux coordonnées (x,y), ces coordonnées sont formulées différemment dans les espaces à deux dimensions. Dans un repaire cartésien:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (3.1)$$

Dans un repaire polaire:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & x \neq 0 \\ \theta = \pm \frac{\pi}{2} & x = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

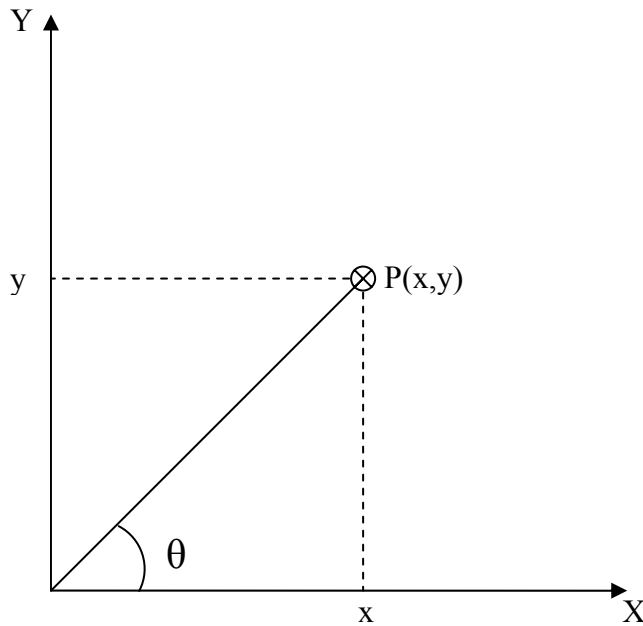


Figure 3.1 Coordonnées du point P dans un espace à deux dimensions

Dans un espace à trois dimensions, un point a trois coordonnées :

Dans un repaire cartésien :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \cos \varphi \sin \theta \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \quad (3.3)$$

Dans un repaire sphérique :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \theta = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{si} \quad x = 0 \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \varphi = 0 \quad \text{si} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

!

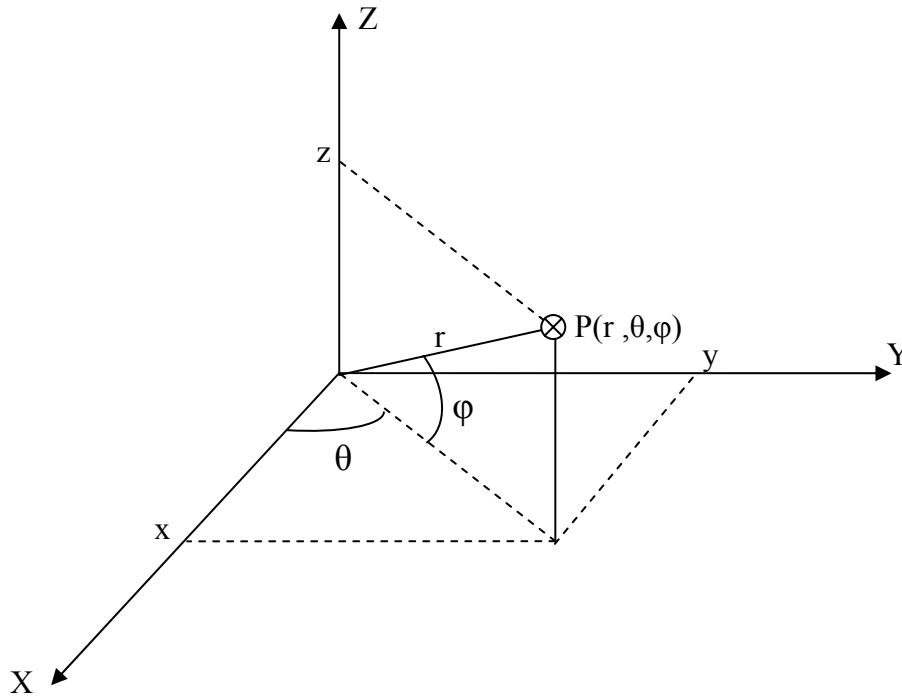


Figure 3.2 Coordonnées du point P dans un espace à trois dimensions

2.2 Spirales à trois dimensions

Plusieurs spirales à deux dimensions ont été introduites par les mathématiciens telles que la spirale logarithmique et la spirale en or. La spirale qui nous intéresse dans notre travail est la spirale d'Archimède (Figure 3.3). Les coordonnées de cette spirale sont les suivantes :

Dans un repaire cartésien :

$$\begin{cases} x = r\theta \cos \theta \\ y = r\theta \sin \theta \end{cases} \quad (3.5)$$

Dans un repaire polaire :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \arctan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & r = |y| & \text{si } x = 0 \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \theta = \pm \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

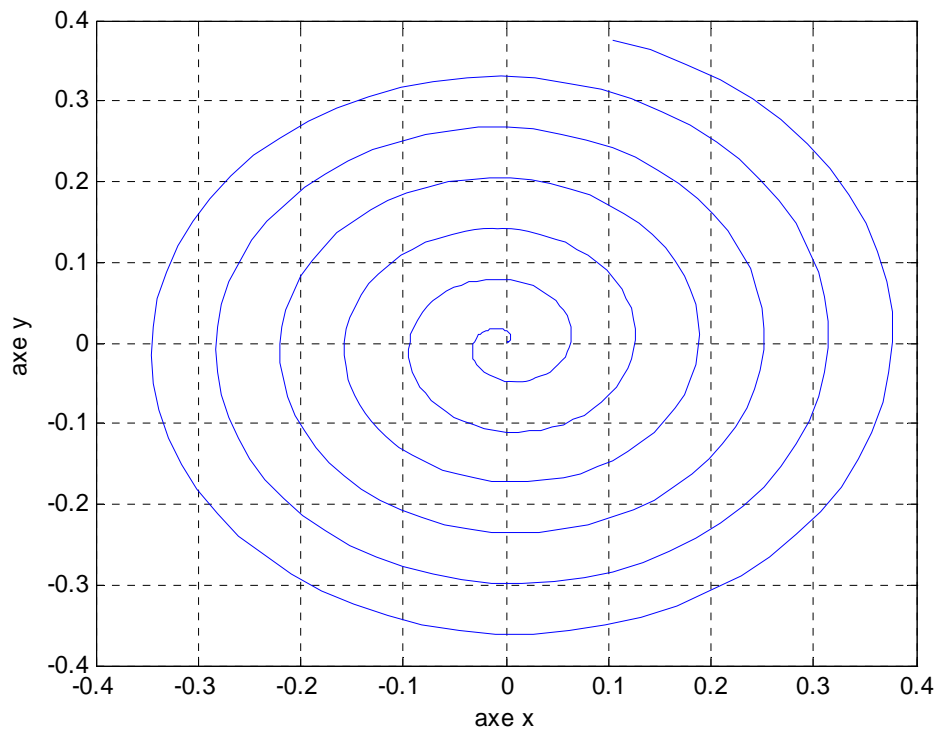


Figure 3.3 Spirale d'Archimède

Néanmoins, les spirales à trois dimensions ne sont pas très développées et la majorité d'entre elles sont des spirales dans un seul plan, mais dans les autres plans, la forme de la spirale n'est pas conservée. Nous présentons si dessous une série de spirales à trois dimensions basées sur la spirale d'Archimède. La conception de ces spirales consiste à faire tourner la spirale d'Archimède dans un axe de son plan de rotation au fur et à mesure que cette spirale tourne autour de l'origine. Si on tourne la spirale d'Archimède dans un espace à trois dimensions sur l'axe y , un point $P(x, y)$ de cette spirale aurait comme coordonnées $P'(x_1, x_2, x_3)$ avec:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \varphi = r \theta \cos \theta \cos \varphi \\ x_2 = y = r \theta \sin \theta \\ x_3 = x \sin \varphi = r \theta \cos \theta \sin \varphi \end{cases} \quad (3.7)$$

Cette formule est la formule de la spirale à trois dimensions, elle est visualisée dans la figure 3.3. On voit clairement comment cette spirale a donnée une bonne couverture de l'espace, ce qui donne l'idée d'utiliser cette spirale pour coder une source gaussienne à trois dimensions. Les figures 3.4 et 3.5 visualisent respectivement la spirale précédente dans les plans (x,y) et (y,z) .

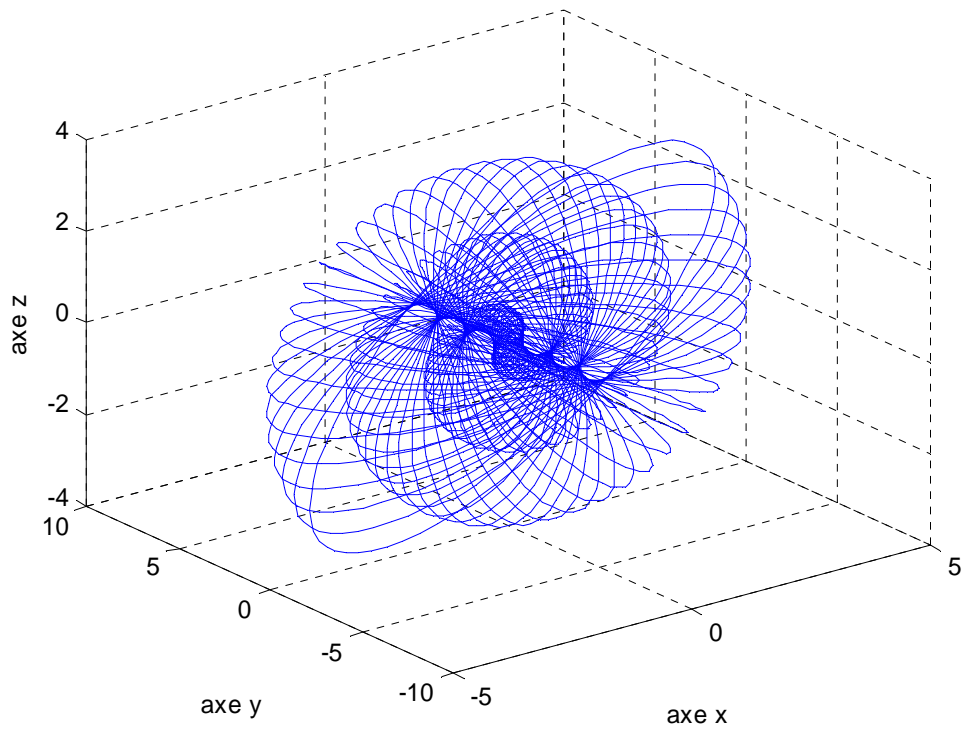


Figure 3.4 Spirale à trois dimensions

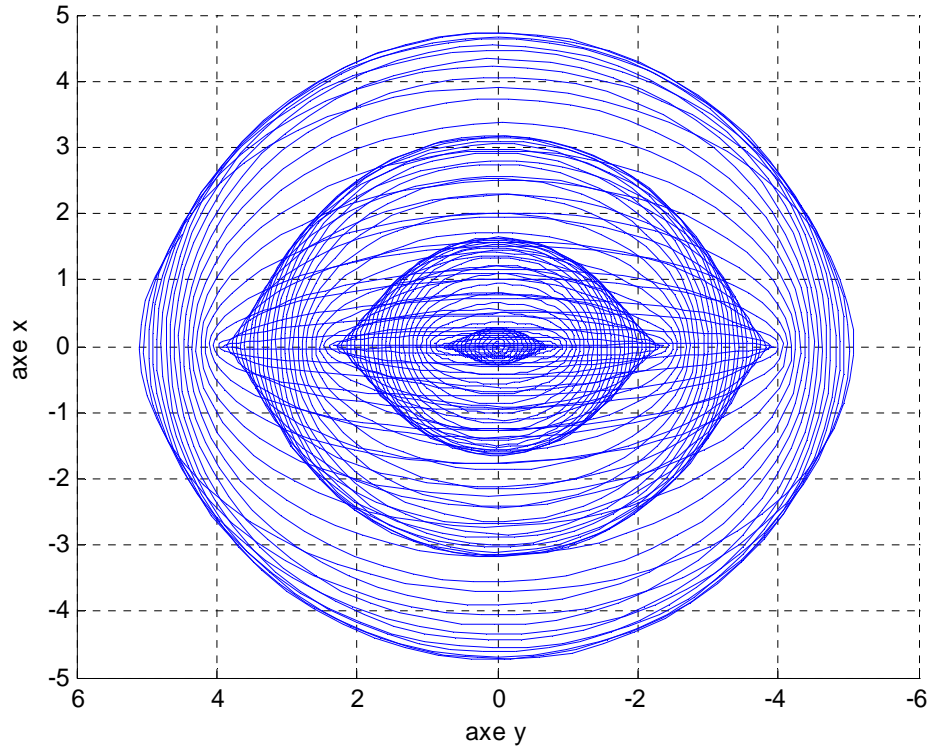


Figure 3.5 Vue de la spirale à trois dimensions dans le plan (x, y)

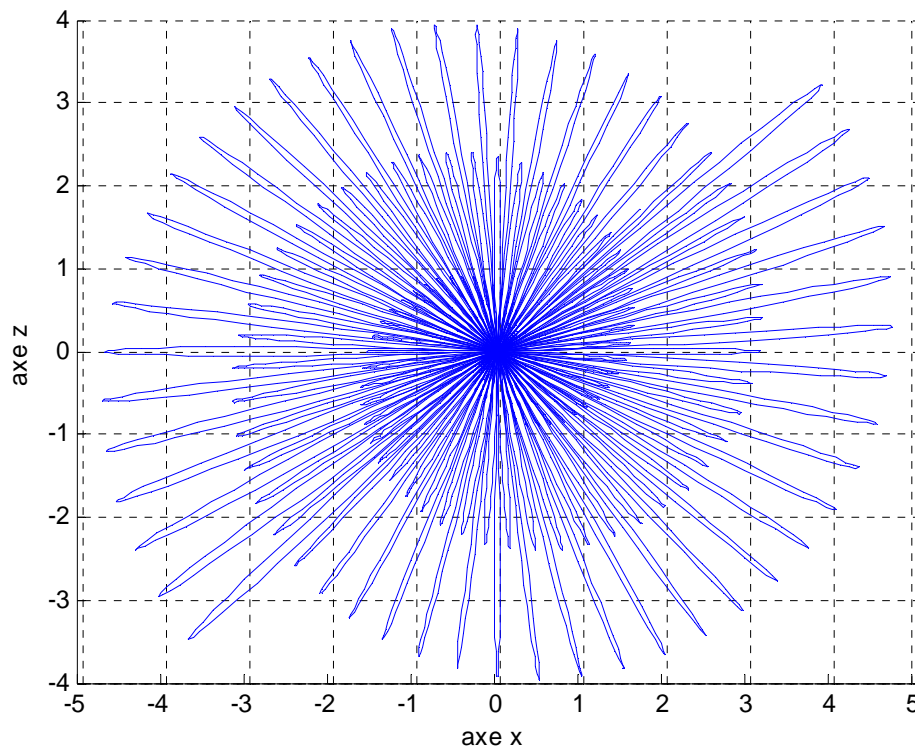


Figure 3.6 Vue de la spirale à trois dimensions dans le plan (x, z)

Les spirales à trois dimensions peuvent être générées par d'autres spirales génératrices que celle d'Archimède. Par exemple, si on prend la spirale d'Archimède et on multiplie x par γ et y par $(\alpha + \beta \sin \theta)$, on trouverait la spirale génératrice suivante :

$$\begin{cases} x = \gamma r \theta \cos \theta \\ y = r \theta (\alpha + \beta \sin \theta) \sin \theta \end{cases} \quad (3.8)$$

Si on tourne la spirale précédente sur l'axe y , on aurait la formule suivante :

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \varphi = \gamma r \theta \cos \theta \cos \varphi \\ x_2 = y = r \theta (\alpha + \beta \sin \theta) \sin \theta \\ x_3 = x \sin \varphi = \gamma r \theta \cos \theta \sin \varphi \end{cases} \quad (3.9)$$

Pour $\gamma = 2$, $\alpha = 3$ et $\beta = 1$; on trouve une spirale génératrice qui a une forme en œuf (figure 3.5). La spirale générée par la formule (3.9) est visualisée dans la figure (3.6); elle montre bien la forme d'un œuf à trois dimensions. Les figures (3.7) et (3.8) visualisent cette spirale dans les plans (x, y) et (x, z) respectivement.

Cette spirale peut être utile pour coder les coefficients LSF dans le codage de la parole, car la distribution de ces derniers dans l'espace à trois dimensions est sous forme d'un œuf.

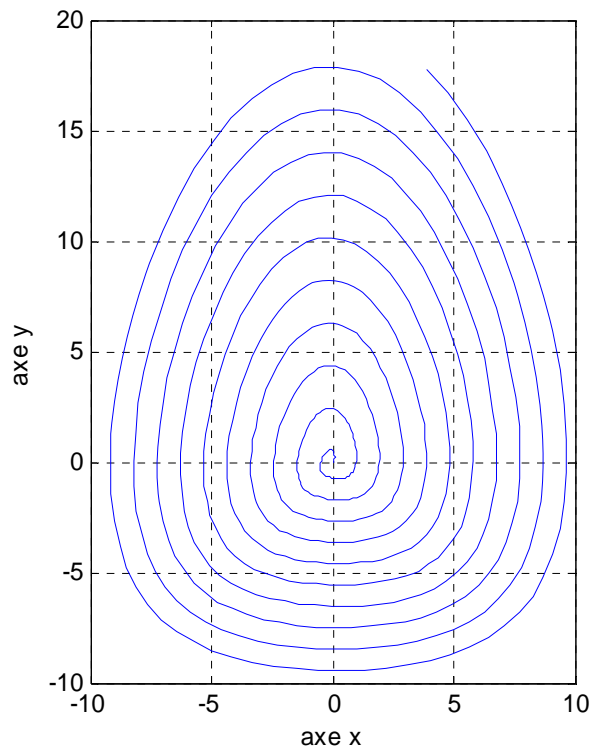


Figure 3.7 Spirale en œuf à deux dimensions

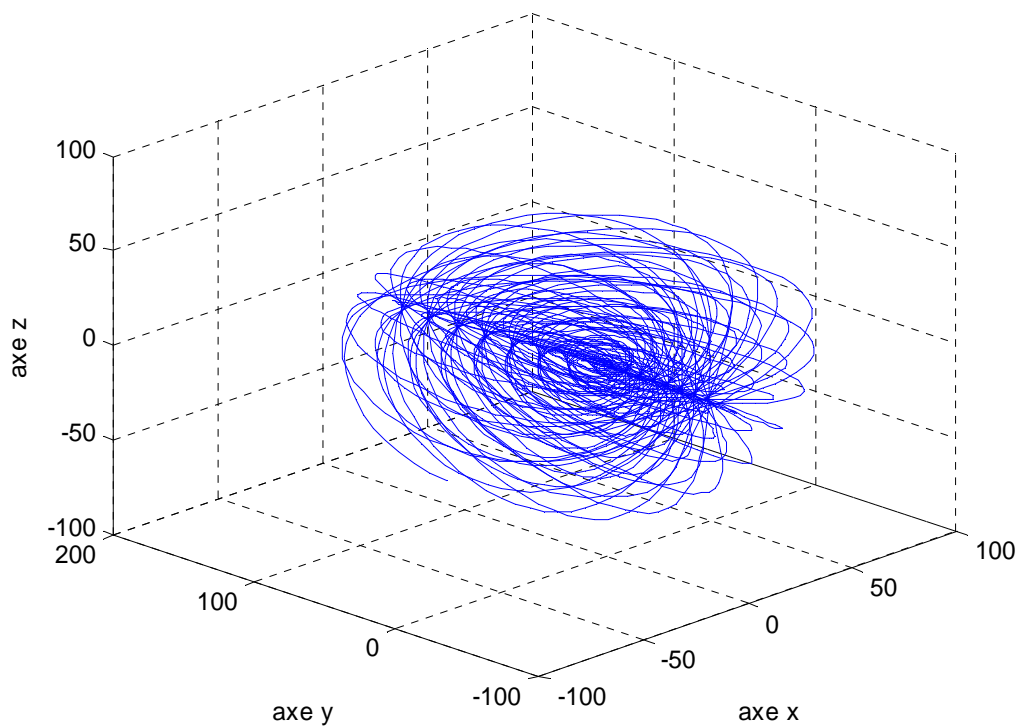


Figure 3.8 Spirale en œuf à trois dimensions

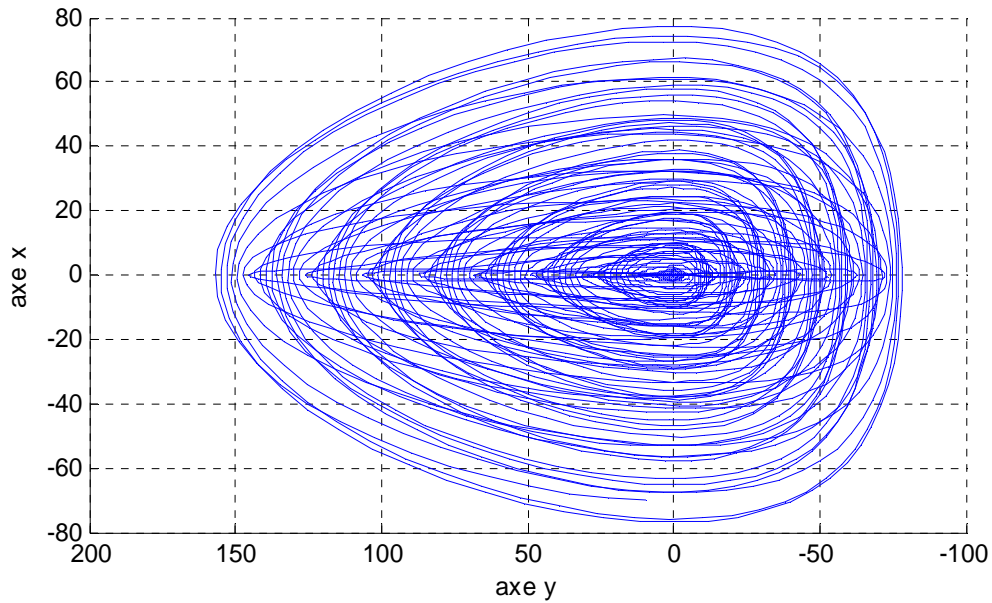


Figure 3.9 Vue de la spirale en œuf à trois dimensions dans le plan (x, y)

Une autre spirale qui peut être utile pour la quantification vectorielle est la spirale basée sur la spirale génératrice suivante :

$$\begin{cases} x = r \theta \exp(\beta \sin \theta) \cos \theta \\ y = \alpha + r \theta \sin \theta \end{cases} \quad (3.11)$$

La rotation de cette spirale sur l'axe y donne la formule de la spirale à trois dimensions suivante:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \varphi = r \theta \exp(\beta \sin \theta) \cos \theta \cos \varphi \\ x_2 = y = \alpha + r \theta \sin \theta \\ x_3 = x \sin \varphi = r \theta \exp(\beta \sin \theta) \cos \theta \sin \varphi \end{cases} \quad (3.12)$$

Pour $\alpha = -40$ et $\beta = 2$, on trouve la spirale suivante:

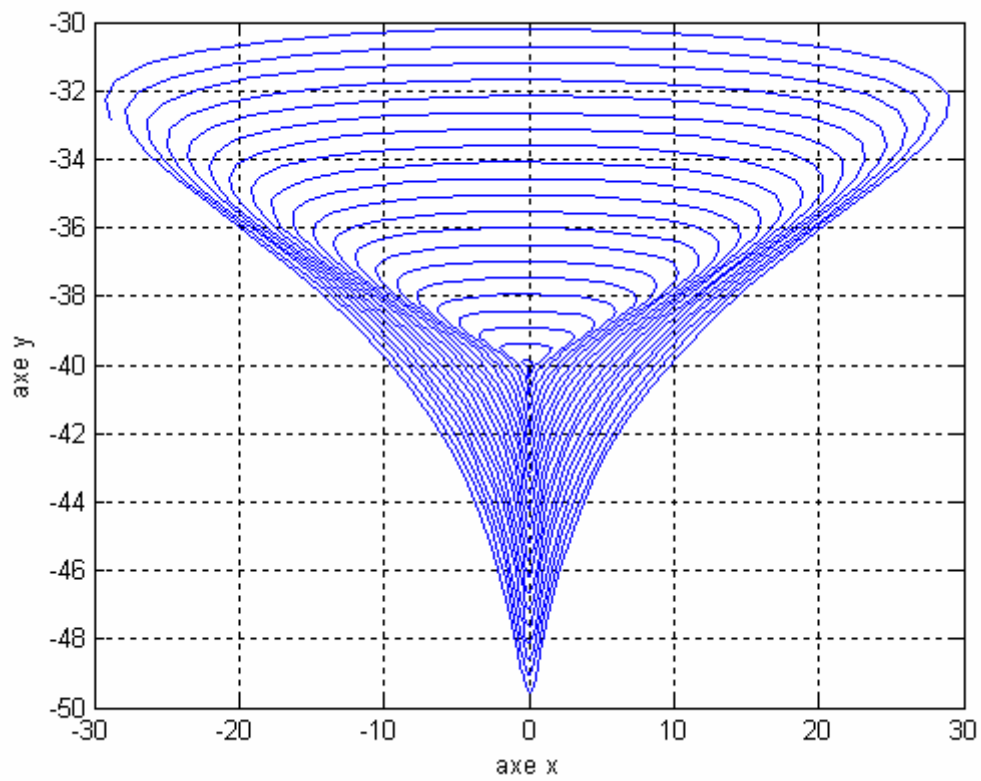


Figure 3.10 Spirale à deux dimensions

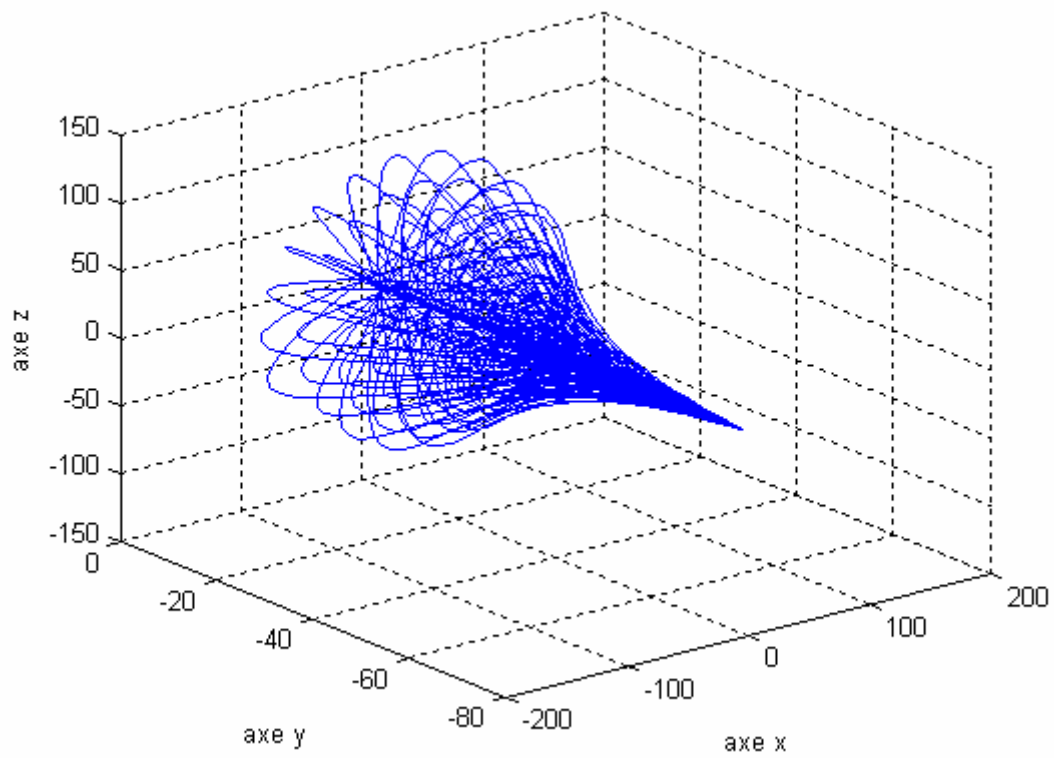


Figure 3.11 Spirale à trois dimensions

3. Le quantificateur spiral à trois dimensions

3.1 Source d'excitation [25]

On prend comme source d'excitation une source gaussienne à trois dimensions. Cette source est constituée de trois sources gaussiennes à une dimension totalement décorrélées. La variance de la source égale à l'unité.

La majorité des algorithmes qui génèrent une source normale utilisent une source de distribution uniforme. Il s'agit de corrélérer cette source p fois pour obtenir une source qui a comme variance $p/12$ et une moyenne $p/2$ (où p est un nombre naturel). Donc pour avoir une source normale à moyenne nul et à variance unité, il suffi de prendre $p = 12$. Les versions de Matlab avant Matlab5 utilisent l'algorithme polaire qui consiste à trouver une valeur aléatoire dans le cercle unité en générant deux distributions uniformes dans le carrée $[-1,1] \times [-1,1]$ et de rejeter toutes valeurs en dehors du cercle unité.

La version de Matlab 6.5 utilise pour générer une source normale l'algorithme développé par George Marsaglia. Il appelle son approche « l'algorithme de ziggurat [26] ». La version de cet algorithme utilisé par Matlab est décrite par Marsaglia and W. W. Tsang dans [27].

La fonction de densité de probabilité d'une distribution normale (3.13) à une forme en cloche.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3.13)$$

Si on génère des points aléatoires (x, y) , uniformément dans le plan et on rejette tout point qui est au dessus de la courbe gaussienne; les points restants vont former notre source gaussienne. L'algorithme de Ziggurat couvre la région au dessous de la fonction pdf par une région légèrement plus large de n sections (Figure 3.10. $n = 8$). Les $n-1$ rectangles sont les Ziggurat rectangles; par contre, la section de fond est constituée d'un rectangle plus une queue infinie.

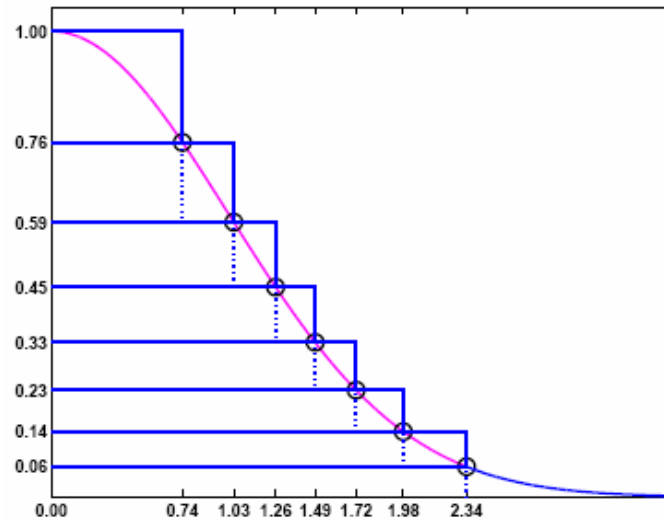


Figure 3.12 L'algorithme de Ziggurat

La figure 3.13 représente une source gaussienne à trois dimensions générée par cet algorithme (1000 échantillons). La figure 3.14 représente l'histogramme d'une dimension de cette source (X) qui est sa fonction de densité de probabilité. On voit bien dans cette figure la distribution normale de ces échantillons.

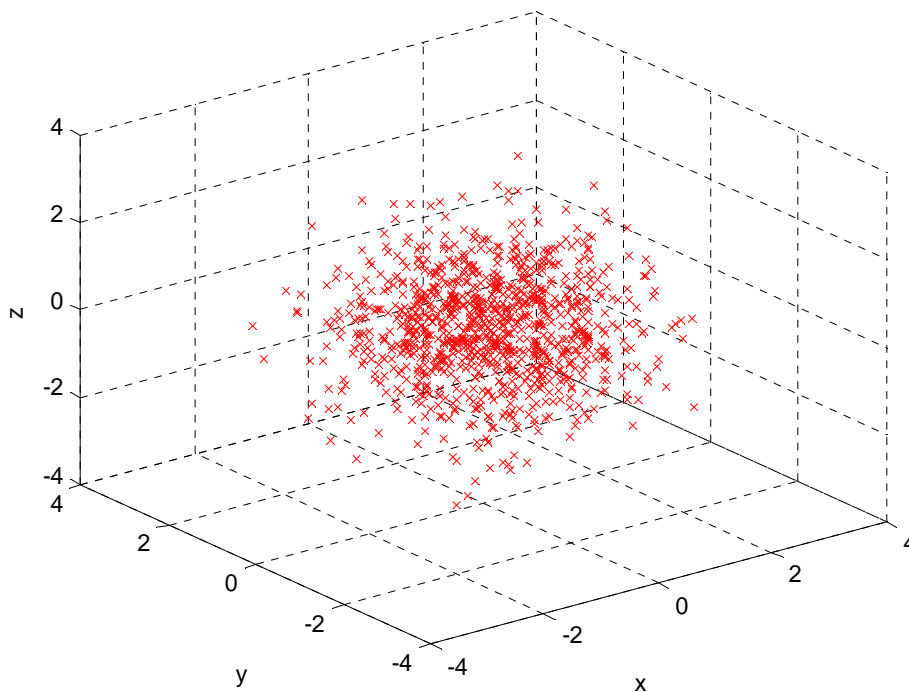


Figure 3.13 Source gaussienne à trois dimensions (1000 points)

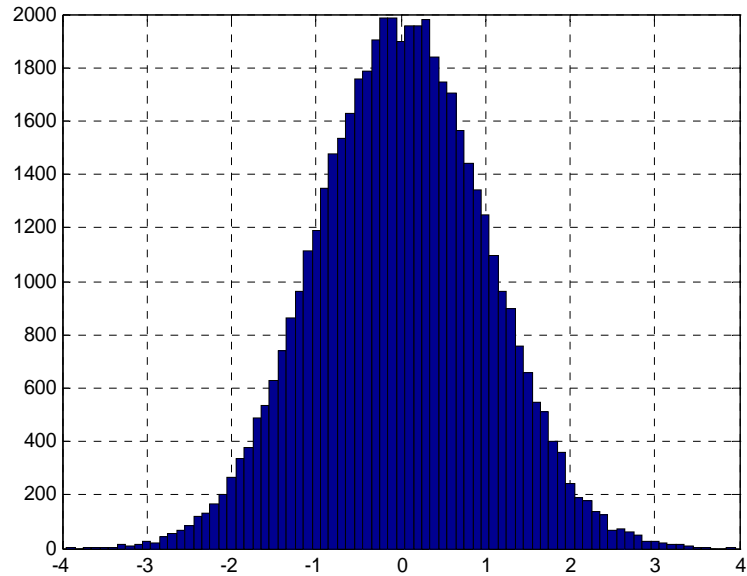


Figure 3.14 Histogramme de la source gaussienne utilisée dans le programme

3.2 Discrétisation et optimisation des paramètres de la spirale

L'optimisation du quantificateur spiral à trois dimensions consiste à optimiser les paramètres de discrétisation de cette spirale qui sont: L'angle initiale θ_0 (rad), le pas de discrétisation pas (rad) de l'angle θ , le pas de discrétisation de l'angle ϕ qui sera fonction du pas de discrétisation de l'angle θ et le gain. La figure ci-dessous illustre ces paramètres d'optimisation dans un plan à deux dimensions:

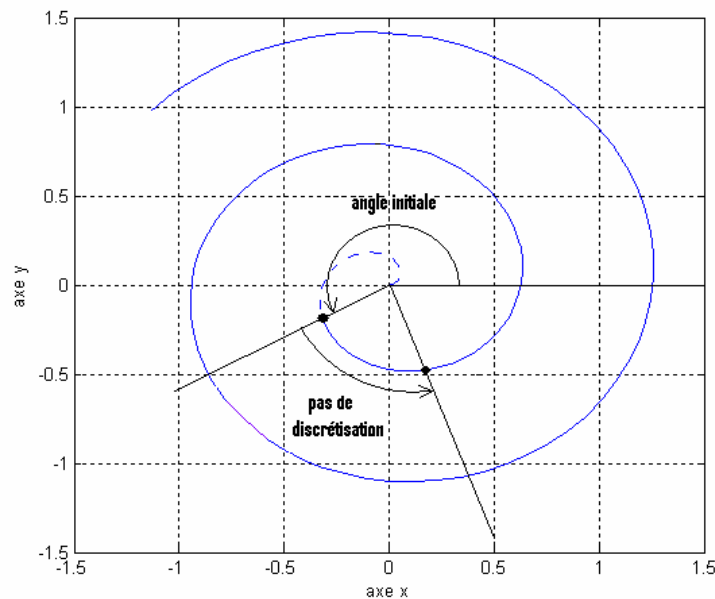


Figure 3.15 Les paramètres du quantificateur spiral dans un plan

La discrétisation et l'optimisation de la spirale consistent à trouver les valeurs optimales de ces paramètres qui donnent un meilleur RSB. On présente quelques graphes d'optimisation de ces paramètres pour une spirale à 16 points.

Nous avons utilisé une source gaussienne de 50000 échantillons, car le RSB avec ce nombre d'échantillons est stable.

Quatre types de quantificateurs seront obtenus après l'optimisation de ces paramètres:

- Spirale sans point à l'origine et à angle initiale optimisé (spirale1).
- Spirale avec point à l'origine et à angle initiale optimisé noté (spirale2).
- Spirale sans point à l'origine et à angle initiale égale au pas de discrétisation noté (spirale3).
- Spirale avec point à l'origine et à angle initiale égale au pas de discrétisation noté (spirale4).

Nous présentons dans la série des figures suivantes les graphes d'optimisation du quantificateur spiral à 16 mots code. On varie deux paramètres et on fixe les deux autres pour les quantificateurs 'spirale1' et 'spirale2'. En ce qui concerne les codeurs 'spirale3' et 'spirale4', on varie deux paramètres et on fixe uniquement un seul paramètre.

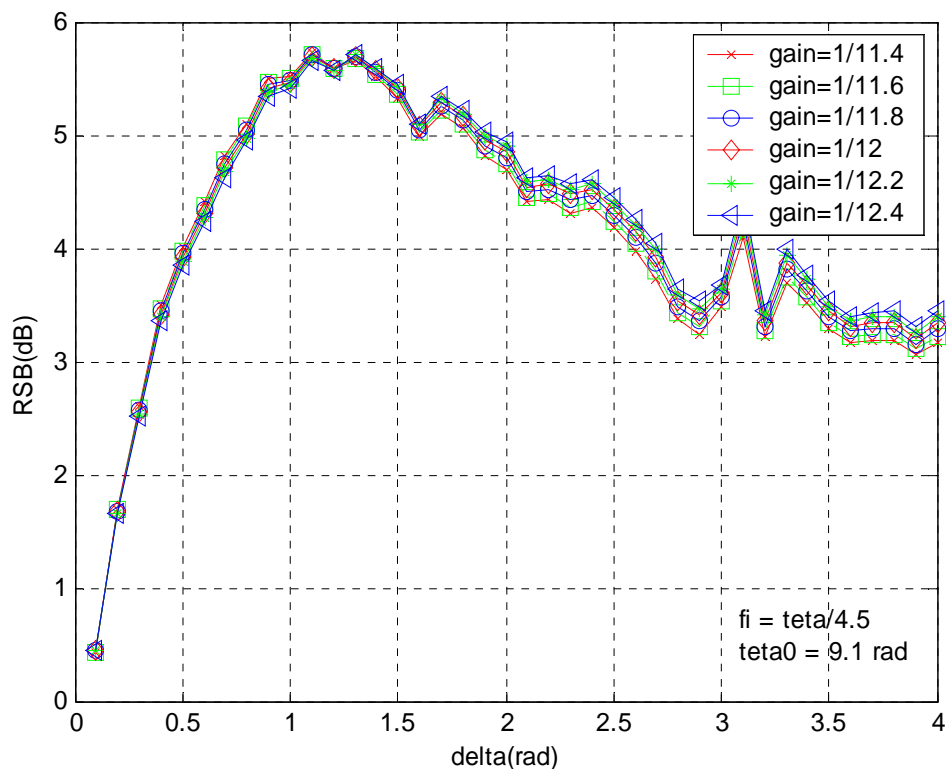


Figure 3.16 Variation du RSB en fonction du pas de discrétisation δ pour différentes valeurs du gain

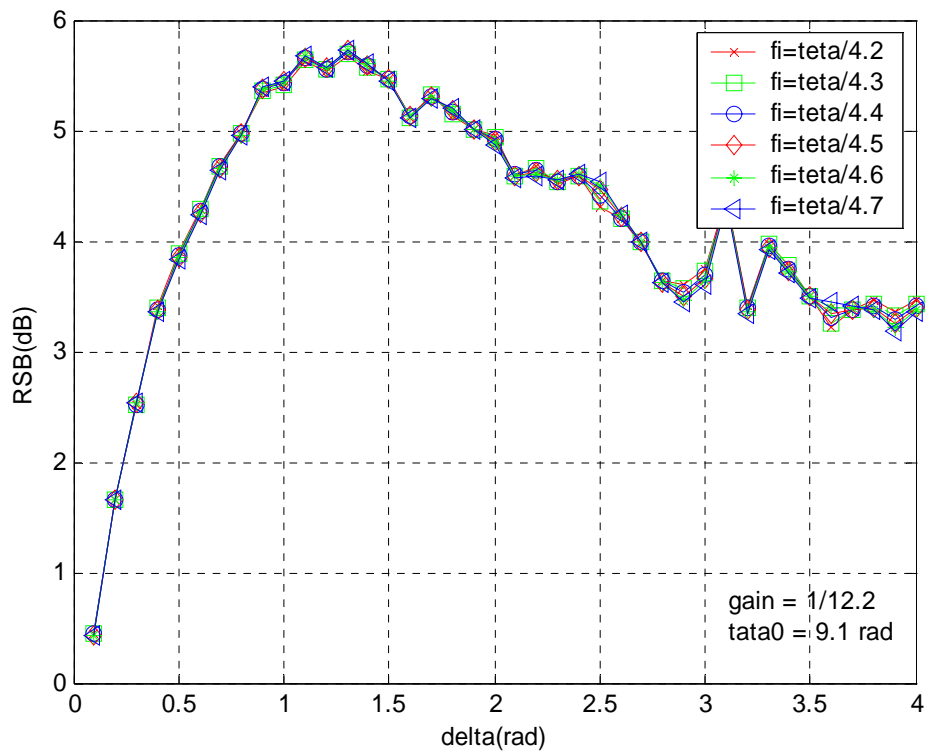


Figure 3.17 Variation du RSB en fonction de delta pour différentes valeurs de f_i

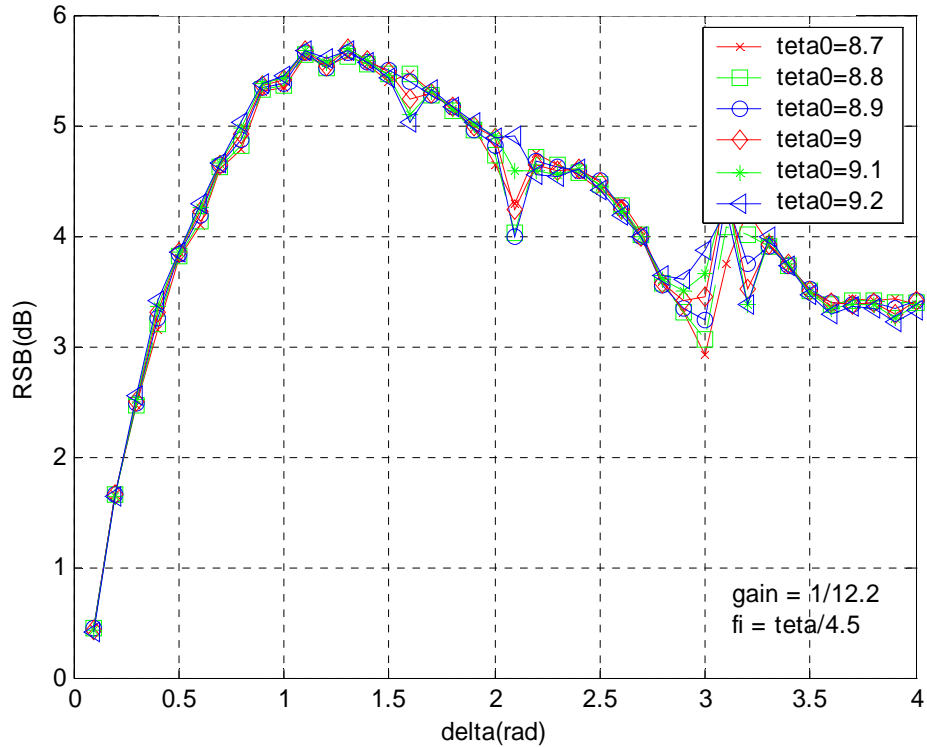


Figure 3.18 Variation du RSB en fonction du pas de discrétisation pour différentes valeurs de $teta_0$

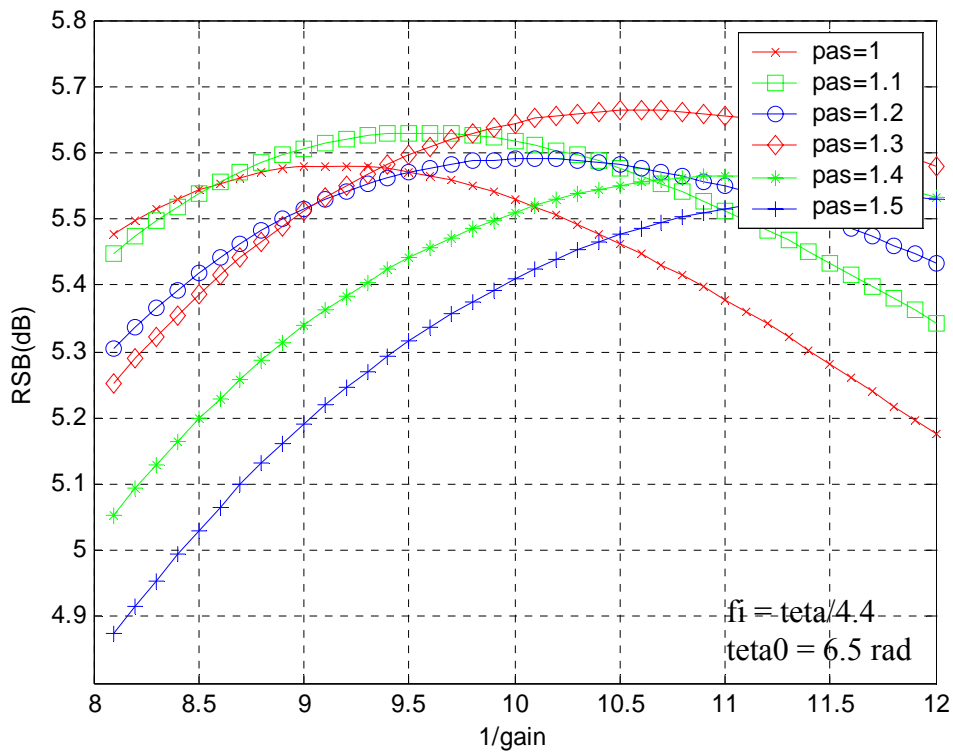


Figure 3.19 Variation du RSB en fonction de l'inverse du gain pour différentes valeurs du pas

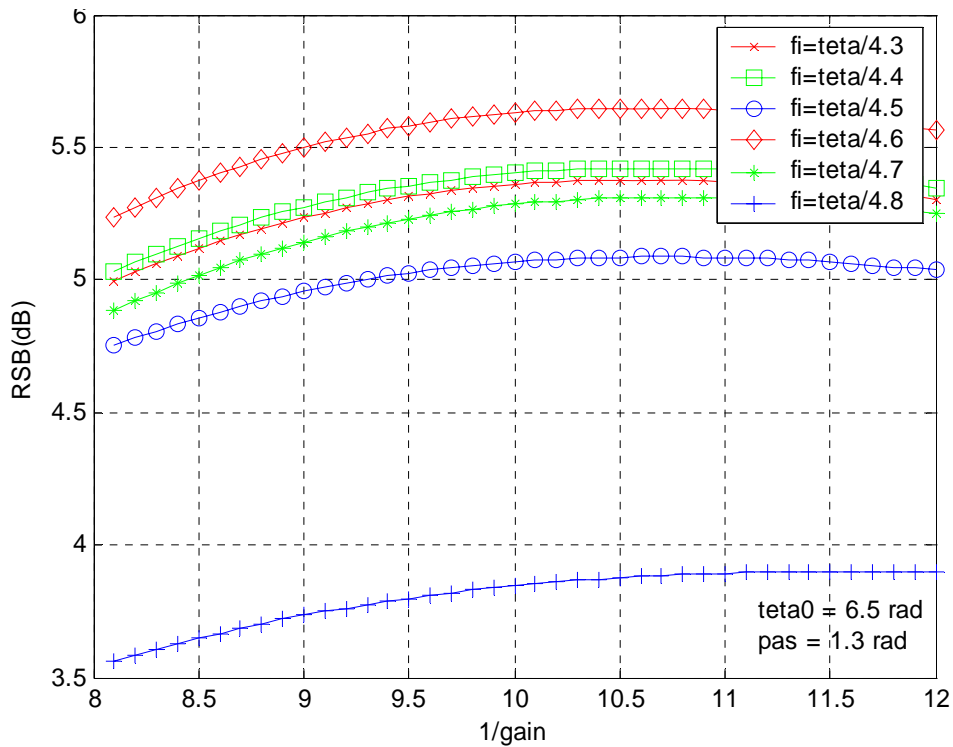


Figure 3.20 Variation du RSB en fonction de l'inverse du gain pour différentes valeurs de f_i

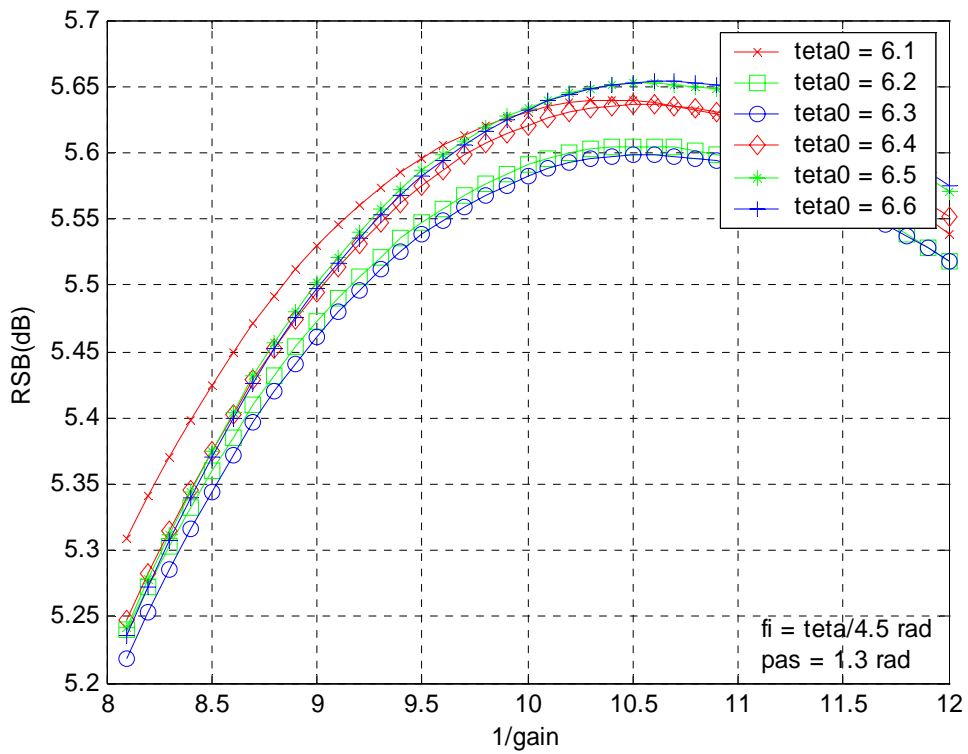


Figure 3.21 Variation du RSB en fonction de l’inverse du gain pour différentes valeurs de θ_0

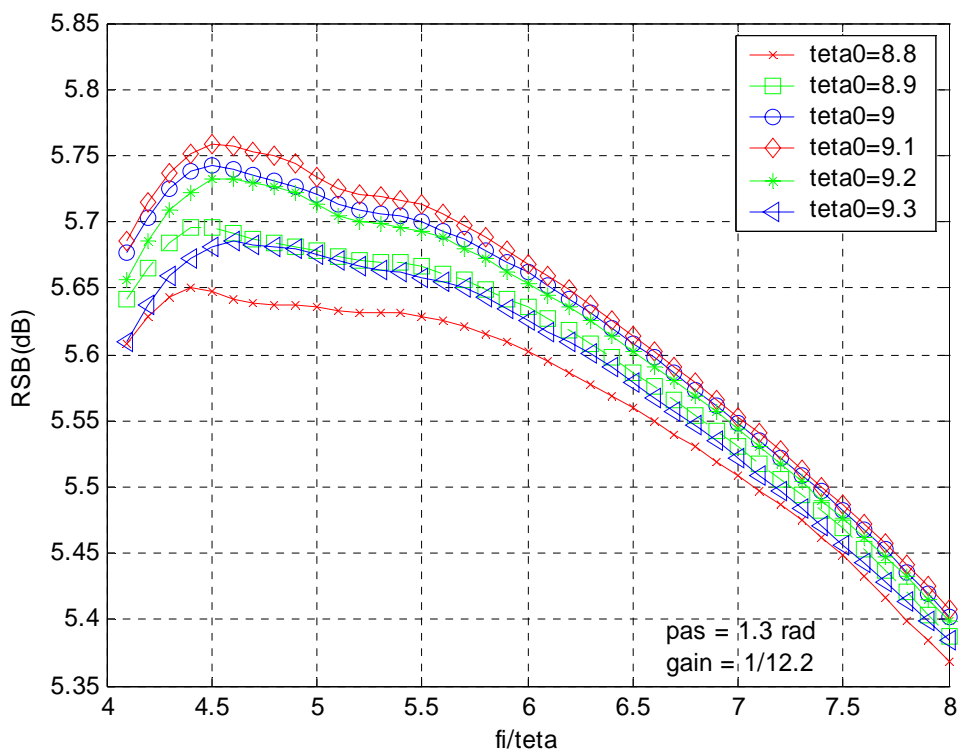


Figure 3.22 Variation du RSB en fonction de f_i pour différentes valeurs de θ_0

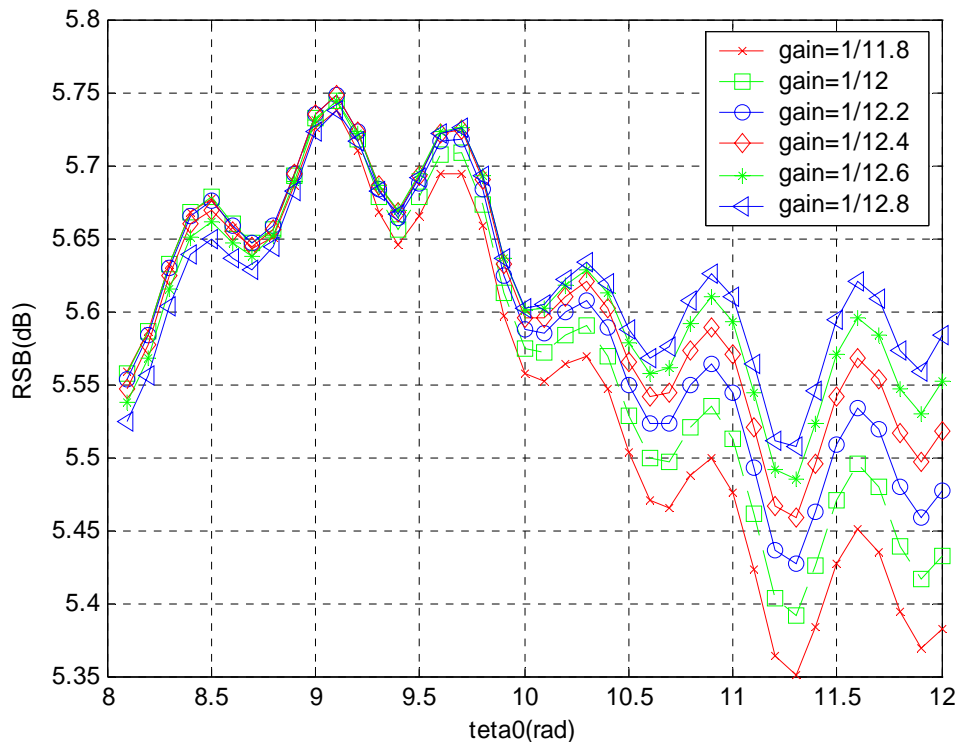


Figure 3.23 Variation du RSB en fonction θ_0 pour différentes valeurs du gain

Après avoir trouvé les paramètres de discrétisation optimales de chaque spirale, nous testons avec l'estimateur LBG la stabilité de la structure à trois dimensions que la spirale nous a donnée.

Le tableau suivant résume les paramètres optimaux ainsi que les performances des quatre variantes du quantificateur spiral pour un nombre de mots code égal à 16.

	Pas (rad)	Fi (rad)	Teta0 (rad)	Gain	EQM	RSB (dB)	LBG (dB)
Spirale1	1.3	4.5	9.1	1/12.2	0.2660	5.75	6.01
Spirale2	1.1	5	7	1/9	0.2697	5.691	6.01
Spirale3	1.3	4.5	-	1/7.7	0.3090	5.1	6.284
Spirale4	1.4	4.5	-	1/8.7	0.2968	5.275	6.29

Tableau 3.1 Tableau récapitulatif des paramètres de discrétisation de la spirale pour un nombre de mots code égal à 16

Le tableau ci-dessus nous montre les performances du quantificateur spiral à 16 mots code pour ces différentes variantes. On constate que le quantificateur spirale1 donne de meilleures performances, ceci par ce que ce quantificateur a plus de paramètres que les quantificateurs

spirale3 et spirale4; par contre le quantificateur spirale2 est un cas particulier du quantificateur spirale1.

L'inconvénient pour cette dimension du quantificateur est que le LBG réussit à bouger les points du quantificateur.

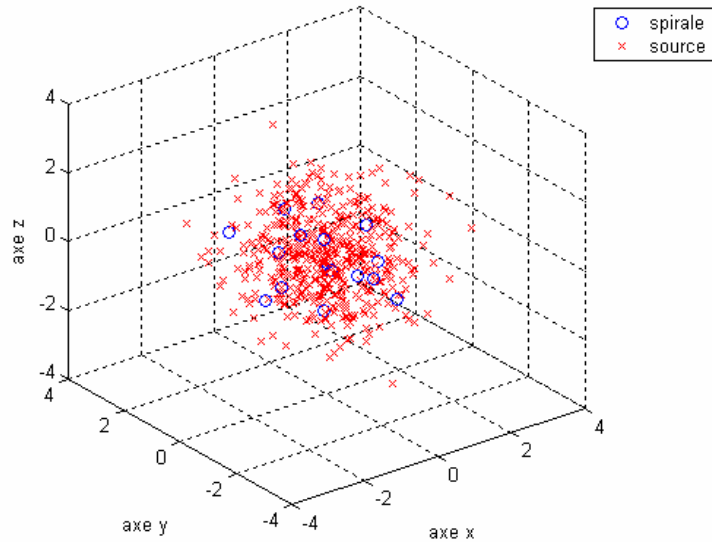


Figure 3.24 Représentation des points de notre quantificateur 'spirale1' avec une source gaussienne à trois dimensions de 500 échantillons

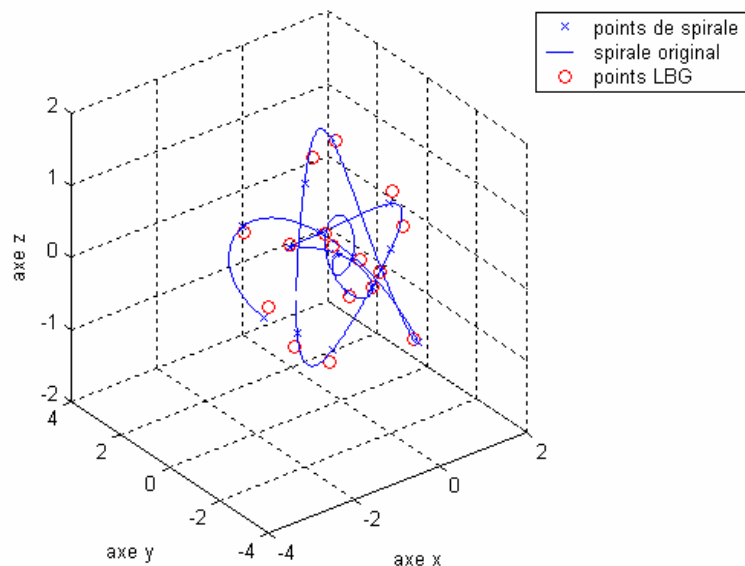


Figure 3.25 Représentation des points de notre quantificateur 'spirale1' avec les mots code résultants en appliquant l'estimateur LBG

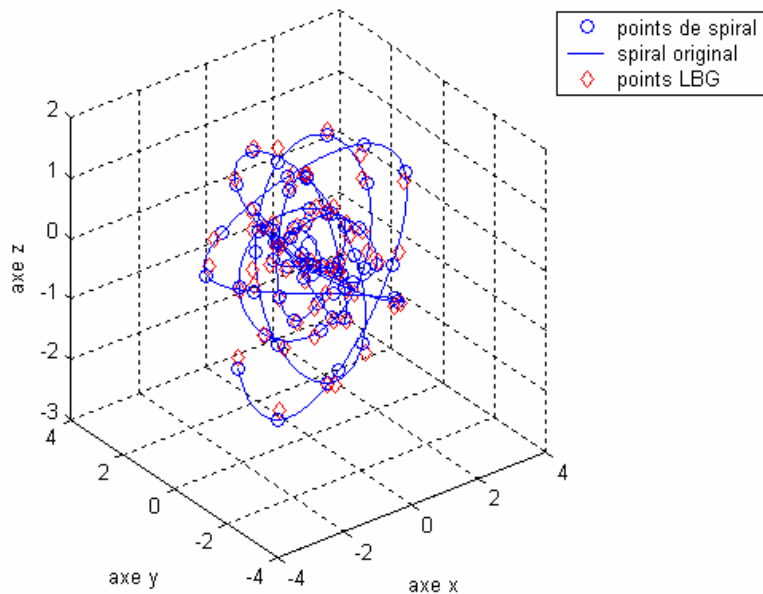


Figure 3.26 Représentation des points de notre quantificateur 'spirale1' (64 points)

On procédant de la même manière on trouve tous les paramètres optimaux de discrétisation des autres spirales. Ces paramètres varient d'un quantificateur à un autre pour le même nombre de mots code du quantificateur.

La même procédure sera appliquée pour les autres dimensions de mots code pour chaque type des quantificateurs. Les résultats seront présentés plus loin.

3.3 Etude de la stabilité du RSB en fonction du nombre de points de la source d'excitation

La discrétisation et l'optimisation de chaque quantificateur ont été faites en utilisant une séquence gaussienne qui possède un certain nombre de vecteurs. Ce nombre doit être suffisamment élevé pour obtenir des résultats crédibles et un RSB stable. Nous allons procéder l'étude des variations du RSB en fonction du nombre de l'exposant du nombre de vecteurs de la séquence.

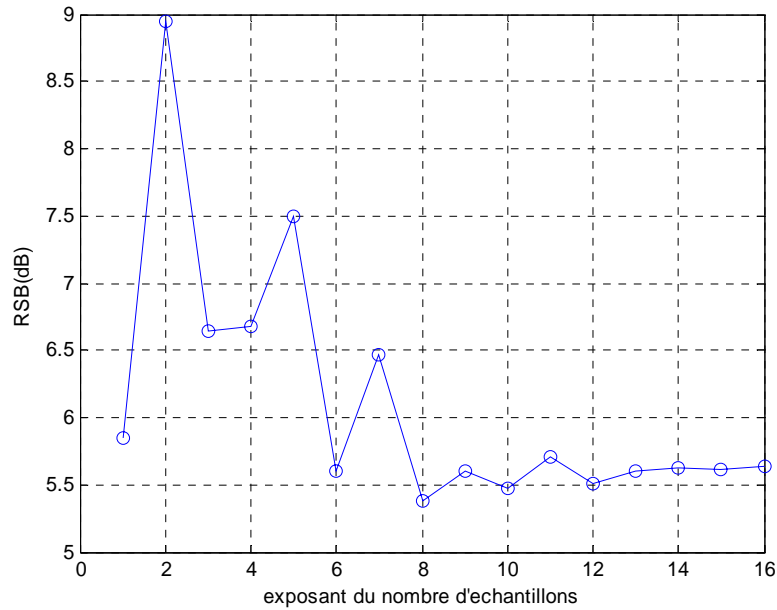


Figure 3.27 Variation du RSB en fonction du nombre d'échantillons (spirale2)

On remarque que le RSB commence à se stabiliser à $2^{13} = 16384$; cependant des fluctuations du RSB d'ordre de dixièmes de décibels existe toujours. Ces fluctuations disparaissent à partir de $2^{16} = 65536$. Ce nombre rend le calcul lourd dans l'optimisation pour des grandes dimensions du quantificateur.

3.4 Résultats finaux de la discrétisation et de l'optimisation

Dans ce paragraphe, on présente une série de tableaux qui résume les performances des différentes variantes du quantificateur spiral. Ces performances sont données en terme de RSB et EQM ainsi que les paramètres optimaux du quantificateur spiral. Les résultats obtenus par l'utilisation de l'estimateur LBG sont également donnés.

Nbre de points	Delta (rad)	Teta0 (rad)	Fi (rad)	Gain	EQM	RSB (dB)	LBG (dB)
4	2	107	tête/3.4	1/96	0.5333	2.73	2.75
8	3.2	106	tête/4	1/84	0.3597	4.440	4.487
16	1.3	9.1	tête/4.5	1/12.2	0.2660	5.75	6.01
32	1.1	13.3	tête/6.4	1/18.5	0.1815	7.41	7.755
64	0.8	13	tête/6	1/23	0.1209	9.174	9.463
128	0.7	18	tête/8	1/35	0.0802	10.955	11.217
256	0.5	20	tête/8	1/47	0.0510	12.92	13.147
512	0.4	24	tête/8	1/70	0.0345	14.62	15.035

Tableau 3.2 Récapitulatif des performances du quantificateur spirale1

Nbre de points	Delta (rad)	Teta0 (rad)	Fi (rad)	Gain	EQM	RSB (dB)	LBG (dB)
4	2	6.8	tête/2.1	1/8	0.6218	2.063	2.167
8	2.8	114	tête/2	1/82	0.4018	3.96	4.28
16	1.1	7	tête/5	1/9	0.2697	5.691	6.01
32	0.9	13	tête/6.2	1/16.1	0.1794	7.461	7.737
64	0.8	16	tête/6.3	1/23.6	0.1194	9.231	9.5
128	0.6	18.6	tête/8.3	1/31.6	0.0779	11.084	11.295
256	0.5	21	tête/8	1/47	0.0511	12.8	13.135
512	0.4	24	tête/8	1/70	0.0343	14.64	15.04

Tableau 3.3 Récapitulatif des performances du quantificateur spirale2

Nbre de points	Delta (rad)	Fi (rad)	Gain	EQM	RSB (dB)	LBG (dB)
4	3.2	tête/3.3	1/5.2	0.7647	1.165	2.76
8	1.4	tête/3	1/4.4	0.4524	3.445	4.467
16	1.3	tête/4.5	1/7.7	0.3090	5.1	6.284
32	1.1	tête/5.1	1/12.3	0.2060	6.86	8.1
64	0.8	tête/4.1	1/17.2	0.1382	8.595	9.888
128	0.8	tête/8	1/33	0.0891	10.498	11.975
256	0.6	tête/10.2	1/49	0.0565	12.48	12.83
512	0.4	tête/12	1/62	0.0366	14.366	14.776

Tableau 3.4 Récapitulatif des performances du quantificateur spirale3

Nbre de points	Delta (rad)	Fi (rad)	Gain	EQM	RSB	LBG (dB)
4	2.3	tête/3.4	1/5.2	0.5897	2.293	2.792
8	1.5	tête/3.7	1/5.3	0.4315	3.65	4.51
16	1.4	tête/4.5	1/8.7	0.2968	5.275	6.29
32	1.1	tête/5.8	1/12.8	0.2009	6.97	8.02
64	0.8	tête/6.3	1/17.6	0.1318	8.8	9.95
128	0.6	tête/6	1/25.4	0.0891	10.5	12
256	0.5	tête/8.2	1/40	0.0567	12.48	12.83
512	0.4	tête/10.4	1/62	0.0369	14.332	14.735

Tableau 3.5 Récapitulatif des performances du quantificateur spirale4

3.5 Performances du quantificateur spiral à trois dimensions

Dans la série des graphes suivants, nous présentons les performances de nos quantificateurs en terme de RSB qui varient en fonction du nombre de mots codes du quantificateur. Ainsi, nous représentons les limites théoriques de Shannon et les résultats obtenus par l'estimateur LBG.

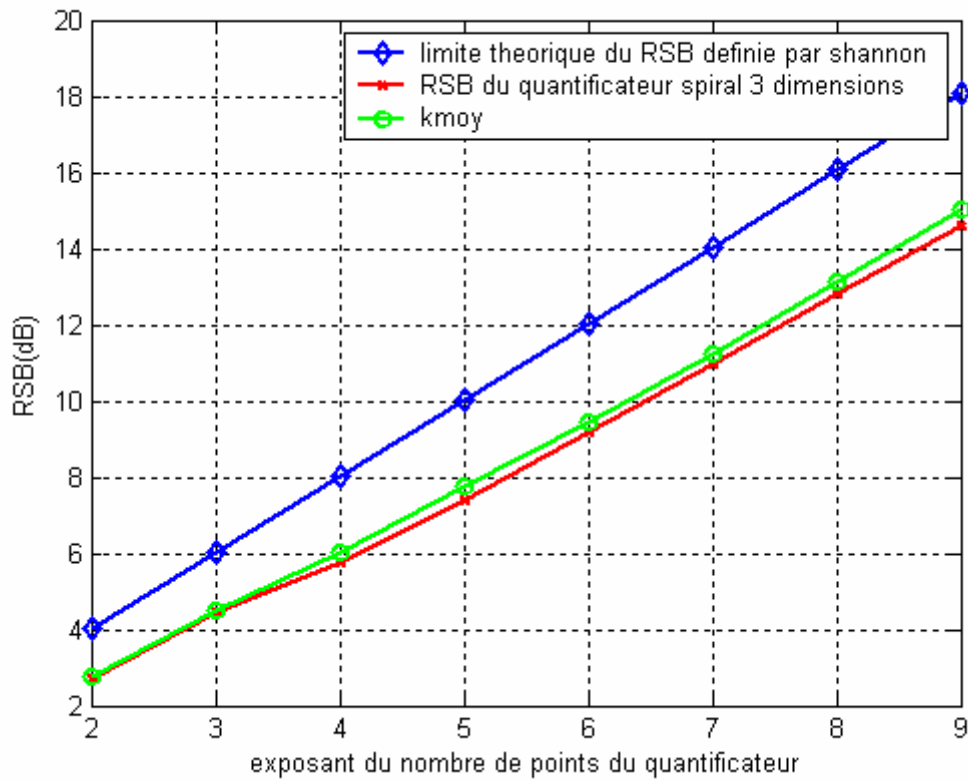


Figure 3.28 Comparaison des performances du quantificateur spirale1 avec la limite théorique de Shannon

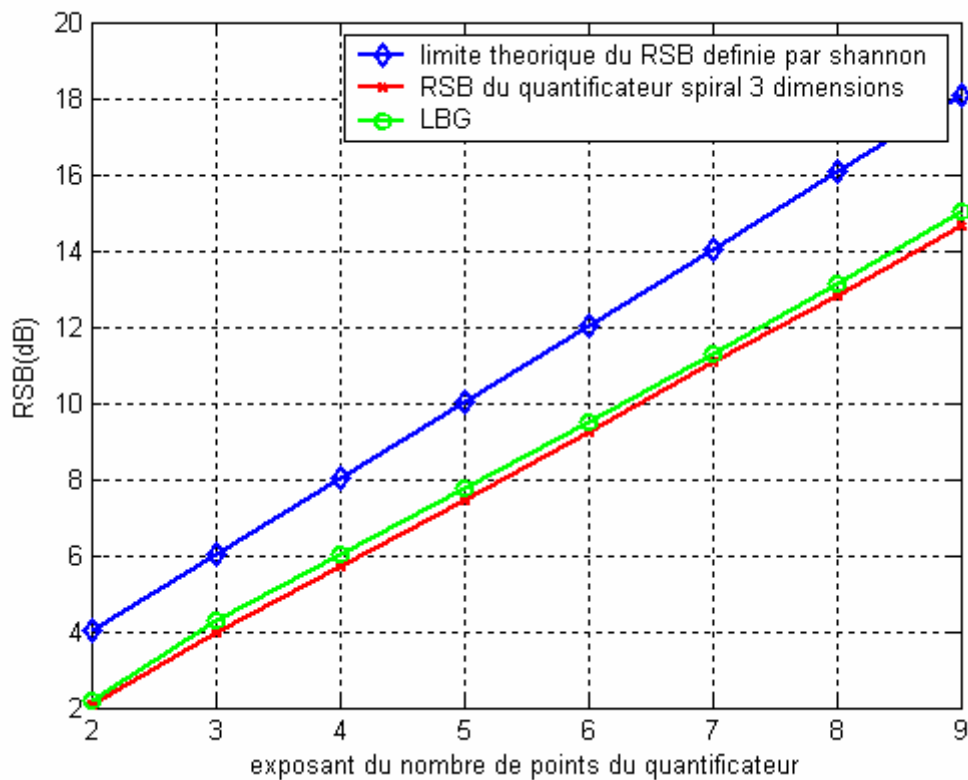


Figure 3.29 Comparaison des performances du quantificateur spirale2 avec la limite théorique de Shannon

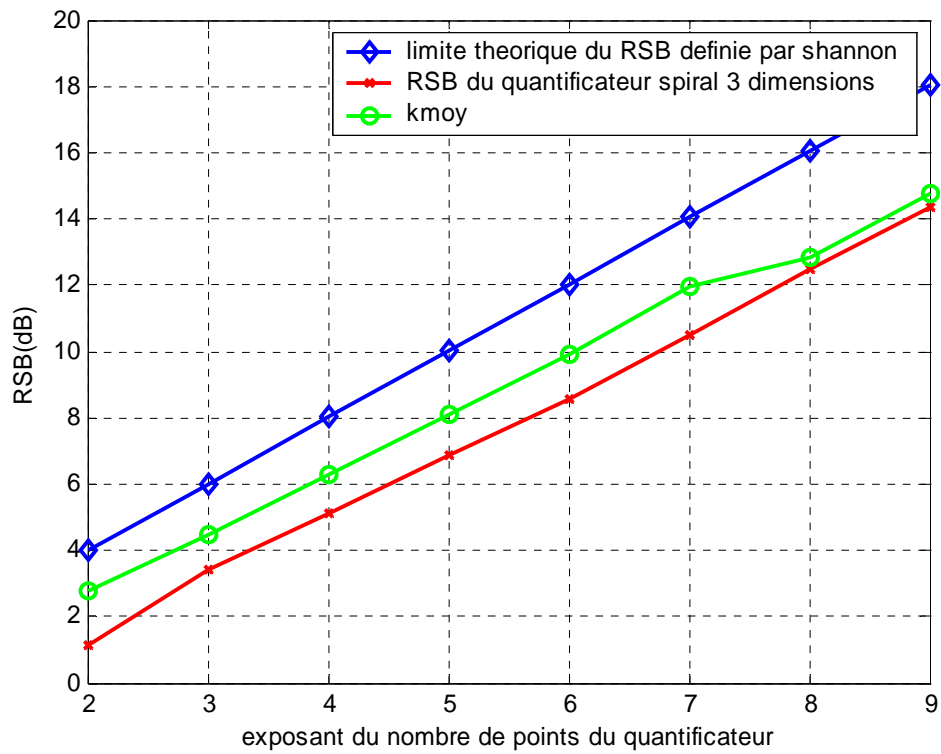


Figure 3.30 Comparaison des performances du quantificateur spirale3 avec la limite théorique de Shannon

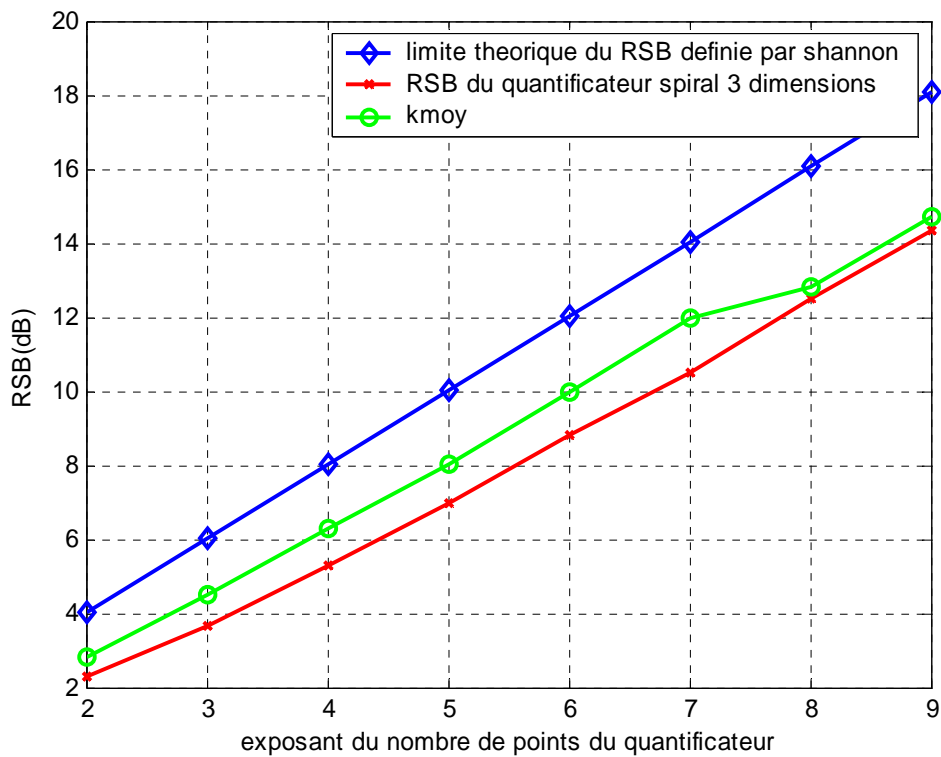


Figure 3.31 Comparaison des performances du quantificateur spirale4 avec la limite théorique de Shannon

On comparant les performances des quatre variantes du quantificateur spiral à trois dimensions avec la limite théorique de Shannon, on constate que cette dernière est toujours loin de l'optimale. L'utilisation de l'algorithme LBG a amélioré les performances résultantes du quantificateur. La limite théorique de Shannon suppose des conditions de quantification idéales. Ainsi aucun quantificateur ne peut atteindre cette limite théorique.

En ce qui concerne les deux premiers quantificateurs spirale1 et spirale2, on remarque que le LBG n'a pas réussi à améliorer les performances des quantificateurs considérablement. Par contre, les performances des quantificateurs spirale3 et spirale4 étaient améliorées d'une manière remarquable.

4. Le quantificateur multi-spirales

Le quantificateur multi-spirales utilise plusieurs quantificateurs spirals pour coder une seule source. Chaque échantillon de cette source sera quantifié par le quantificateur qui lui donne moins de distorsion. Dans notre cas, on utilise plusieurs spirales déphasées entre elles avec des angles égaux.

4.1 Formulation des spirales

On suppose qu'on a n quantificateurs spirals à deux dimensions déphasés entre eux de $\frac{2\pi}{n}$; donc les spirales génératrices d'Archimède auront comme formule:

$$\begin{aligned}
 Q1 & \begin{cases} x = r\theta \cos(\theta) \\ y = r\theta \sin(\theta) \end{cases} \\
 Q2 & \begin{cases} x = r\theta \cos(\theta + \frac{2\pi}{n}) \\ y = r\theta \sin(\theta + \frac{2\pi}{n}) \end{cases} \\
 \dots\dots\dots \\
 Qn & \begin{cases} x = r\theta \cos(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}) \\ y = r\theta \sin(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Pour les spirales à trois dimensions générées par ces spirales génératrices; les formules sont les suivantes:

$$\begin{aligned}
 Q1 & \begin{cases} x1 = r \theta \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ x2 = r \theta \sin(\theta) \\ x3 = r \theta \cos(\theta) \cos(\varphi) \end{cases} \\
 Q1 & \begin{cases} x1 = r \theta \cos(\theta + \frac{2\pi}{n}) \sin(\varphi) \\ x2 = r \theta \sin(\theta + \frac{2\pi}{n}) \\ x3 = r \theta \cos(\theta + \frac{2\pi}{n}) \cos(\varphi) \end{cases} \\
 \dots\dots\dots \\
 Qn & \begin{cases} x1 = r \theta \cos(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}) \sin(\varphi) \\ x2 = r \theta \sin(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}) \\ x3 = r \theta \cos(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}) \cos(\varphi) \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Pour le cas $n = 4$, le déphasage des spirales entre elles est de $\frac{\pi}{2}$, elles sont illustrées dans les figures ci-dessous:

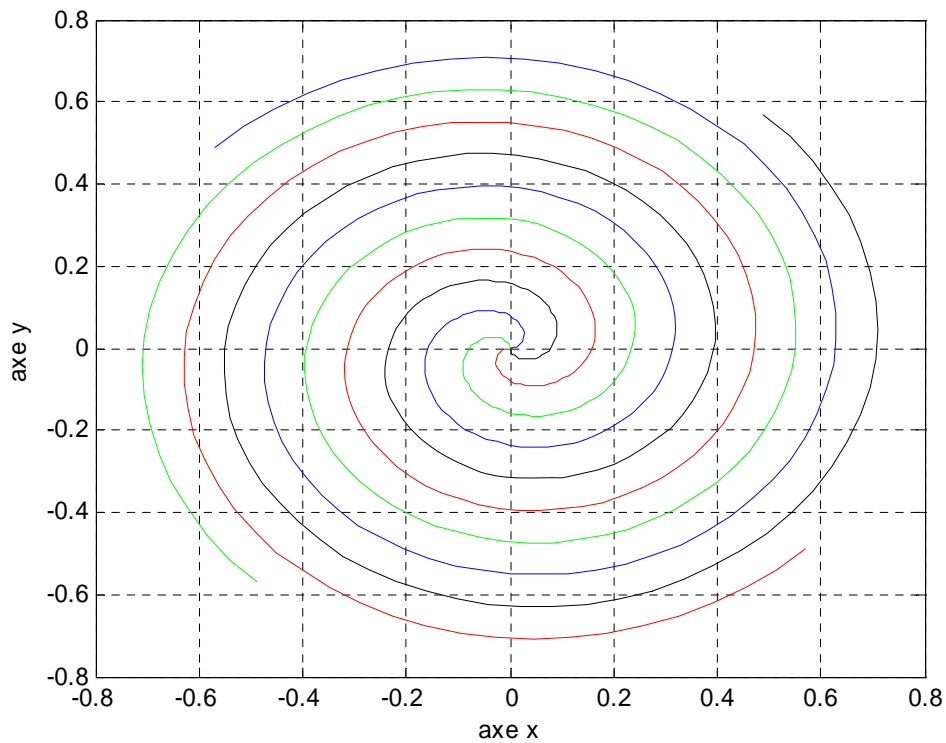


Figure 3.32 Quatre spirales d'Archimède déphasées de $\pi/2$ entre elles

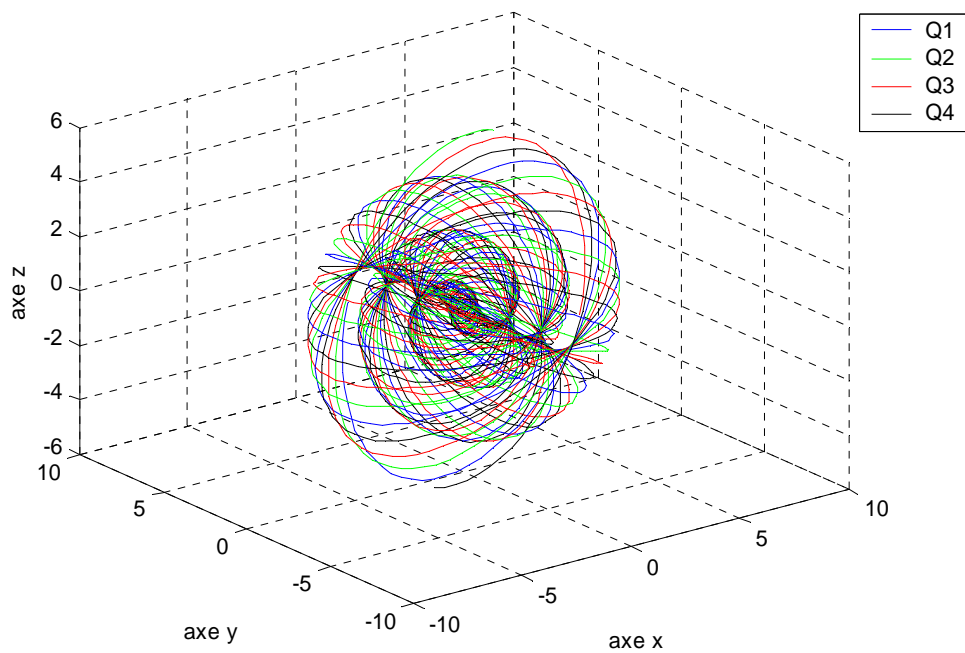


Figure 3.33 Quatre spirales dans un espace à trois dimensions

4.2 Discrétisation et optimisation du quantificateur multi-spirales

Les paramètres en multi-spirales sont les mêmes dans le quantificateur spiral à trois dimensions. Néanmoins, nous allons nous limiter dans cette partie à un seul exemple de quantificateur multi-spirales.

La procédure de discrétisation et d'optimisation est la même que celle déjà faite dans le quantificateur précédant. On étudie la variation du RSB en fonction des paramètres de discrétisation. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 3.6:

Nbre de points	Teta0	Fi	Gain	Delta (rad)	EQM	RSB (dB)	LBG (dB)
8	106	Teta/7	1/82	10.6	0.3802	4.2	4.34
16	14.2	Teta/6.4	1/14.2	5.5	0.2670	5.734	6.295
32	13	Teta/3.6	1/18	4.7	0.1778	7.5	8.18
64	12.2	Teta/5.8	1/16.6	2.2	0.1227	9.11	10
128	12	Teta/5	1/16	1.1	0.0824	10.84	12.01
256	11	Teta/4	1/17	0.6	0.0531	12.75	13.99
512	13	Teta/3	1/20	0.4	0.0354	14.51	14.93

Tableau 3.6 Résultats avec le quantificateur multi-spirales

On remarque que les performances de ce quantificateur sont inférieures par rapport aux performances des quantificateurs spirale1 et spirale2.

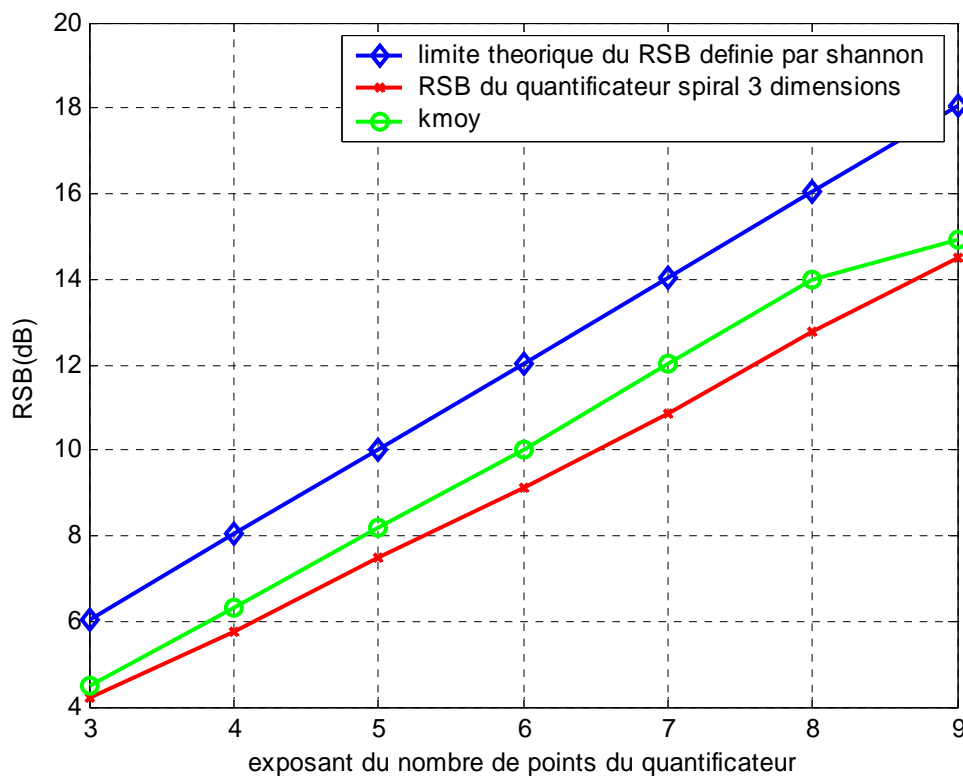


Figure 3.34 Comparaison des performances du quantificateur multi-spirales avec la limite théorique de Shannon

5. Comparaison avec quelques structures à trois dimensions

Dans cette section, on compare notre quantificateur avec certaines structures de quantification géométrique optimales. Les structures à trois dimensions connues sont une pyramide à base triangulaire et un cube. La pyramide sera comparée avec le quantificateur spirale1 à quatre mots code. Par contre, le cube sera comparé avec le quantificateur spirale1 à huit mots code.

5.1. Spirale quatre points – Pyramide triangulaire

La pyramide de comparaison est à quatre faces triangulaires et quatre sommets. Chaque sommet est un mot code du quantificateur pyramide. La figure ci-dessous illustre le schéma de cette pyramide.

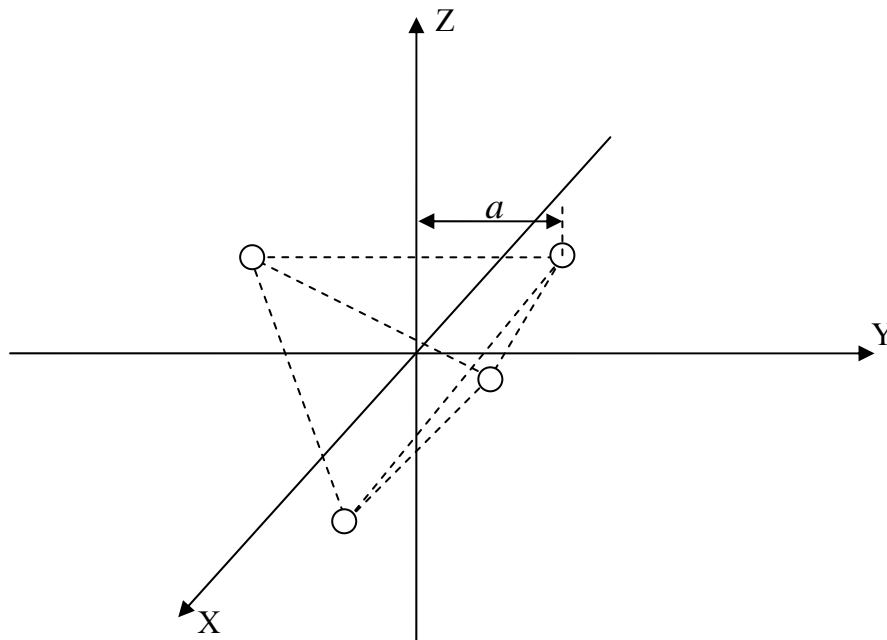


Figure 3.35 Pyramide à quatre points

Pour obtenir une pyramide optimale, il suffit d'optimiser le paramètre a . La figure ci-dessous nous montre que les meilleures performances de ce quantificateur sont atteintes avec $a = 0.9$ ($RSB = RSB_{\max} = 2.73$ dB).

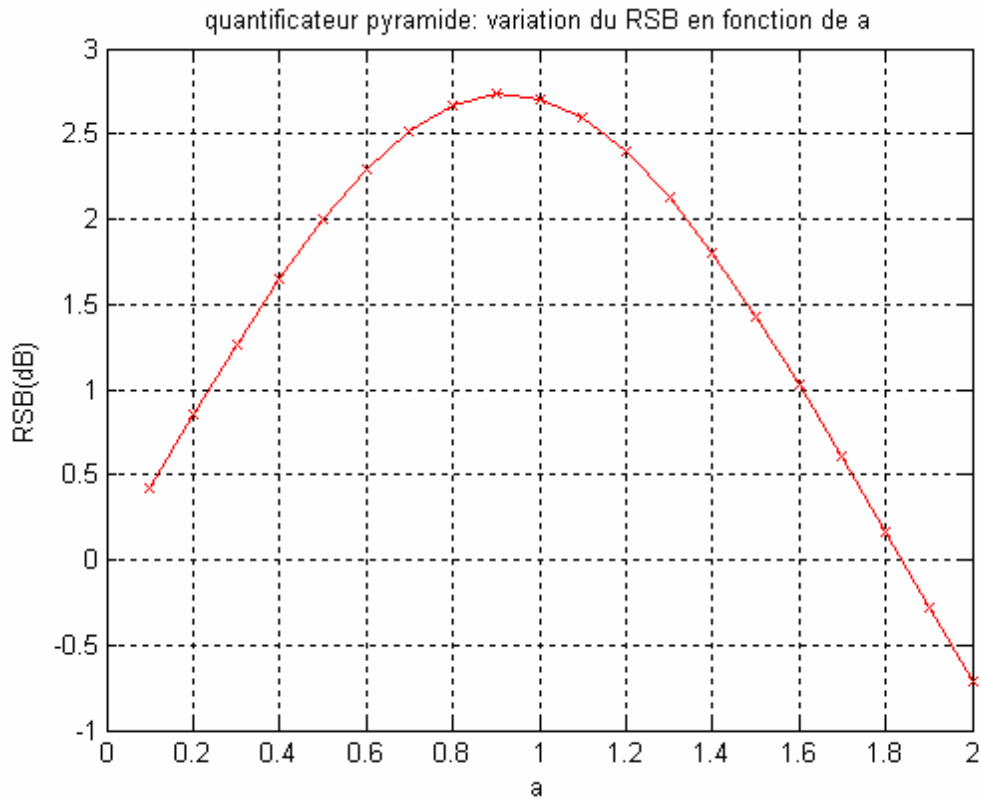


Figure 3.36 Variation du RSB du quantificateur pyramide en fonction de a

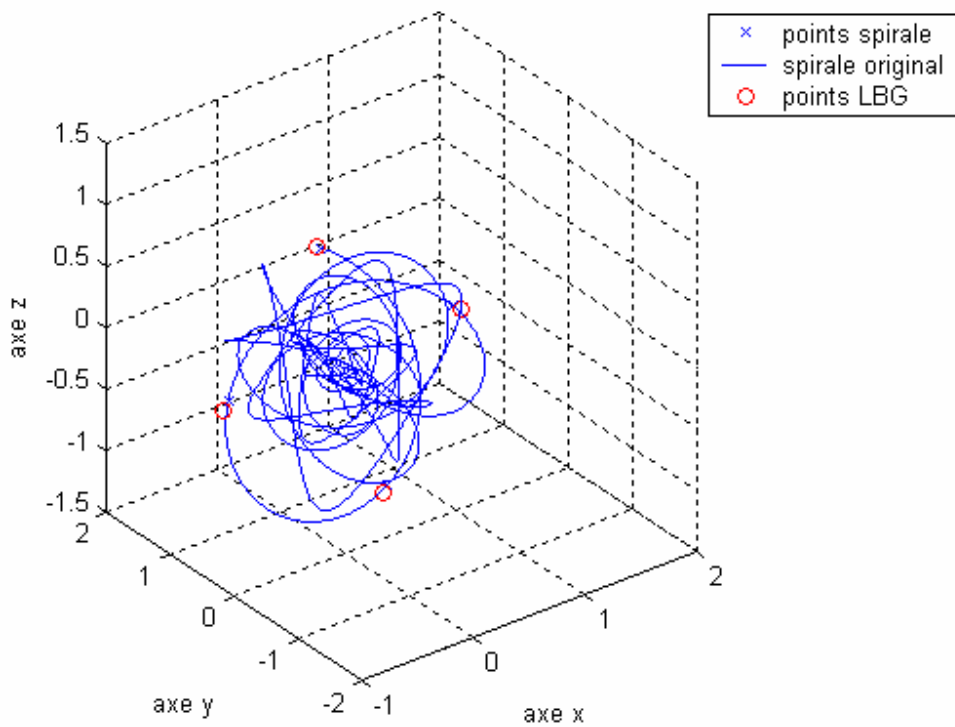


Figure 3.37 Quantificateur type spirale1 à 4 points avec les points résultants avec LBG
(RSB-LBG=2.75 dB; RSB=2.73 dB)

Nous constatons que le quantificateur spirale à quatre mots code atteint les performances d'une pyramide triangulaire à quatre sommets. L'estimateur LBG n'a pas réussi à faire bouger cette structure du quantificateur résultant.

5.2 Spirale huit points – cube

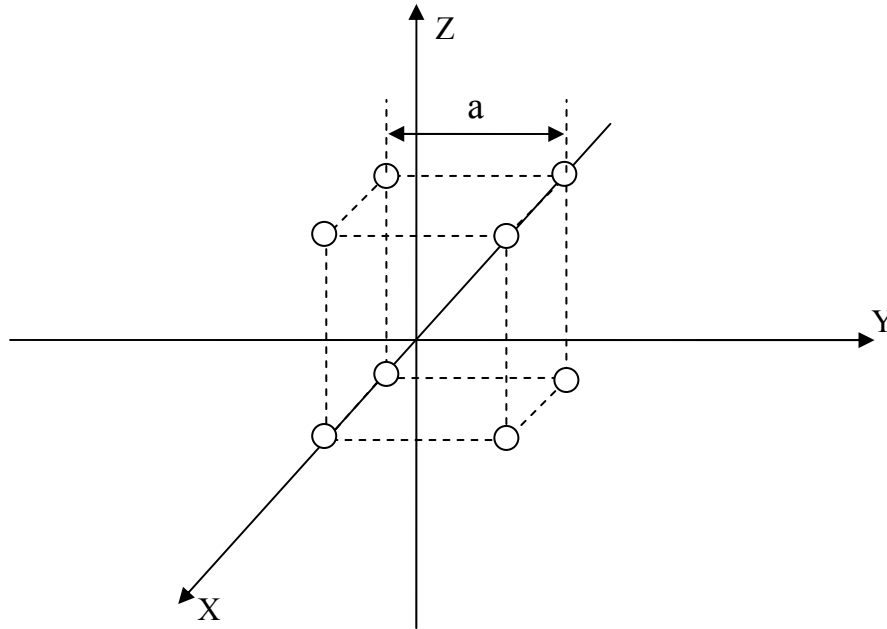


Figure 3.38 Cube

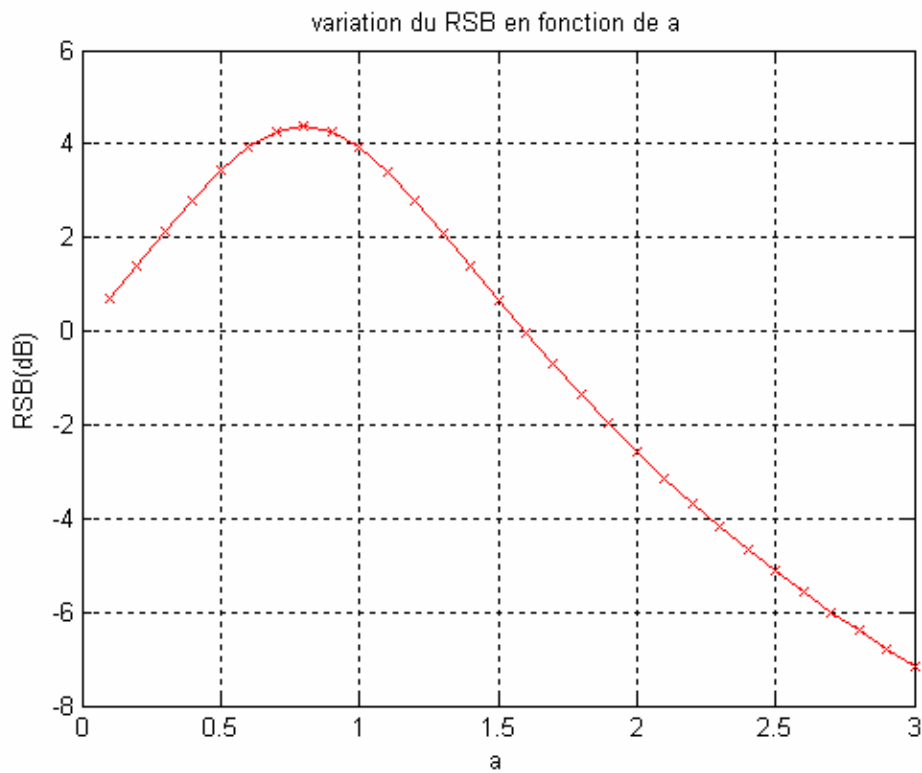


Figure 3.39 Variation du RSB du cube en fonction de a

Nous remarquons que le RSB du quantificateur cube atteint sa valeur maximale (4.374 dB) pour $a = 0.8$.

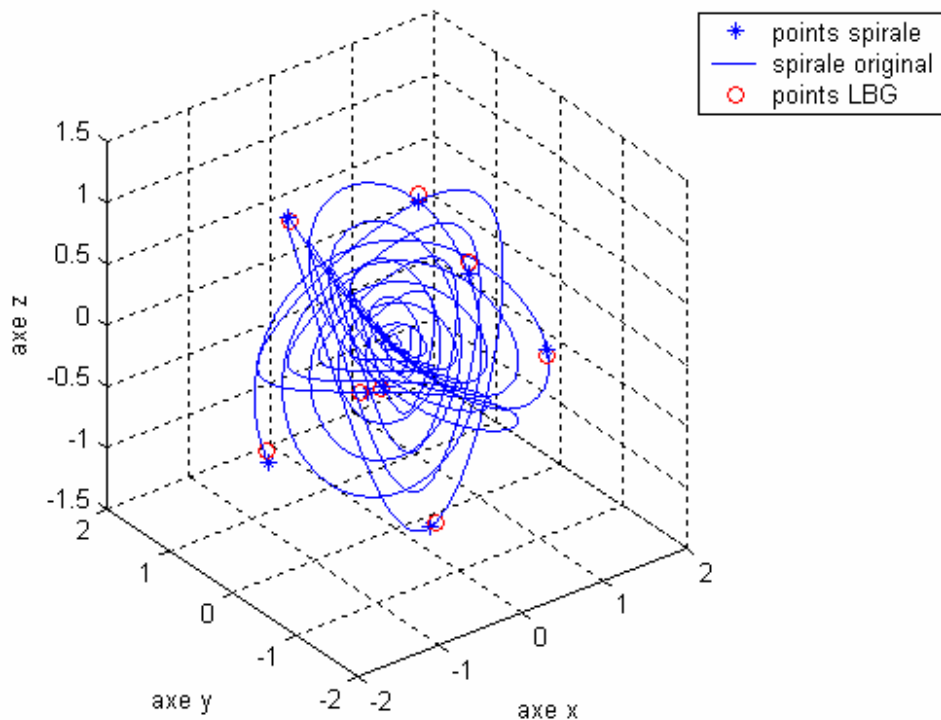


Figure 3.40 Quantificateur type spirale1 à huit points
(RSB=4.440 dB; RSB-kmoy=4.487dB)

Le quantificateur spirale1 à huit mots code atteint les performances d'un quantificateur cube en terme de RSB.

6. Conclusion

Dans ce chapitre, on a abordé le problème de conception du quantificateur spiral à trois dimensions pour des tailles modérées. Malgré certaines réticences, nos efforts ont abouti à des résultats acceptables. Pour des faibles dimensions, le problème était résolu en utilisant des structures géométriques simples. Ces structures nous ont permis de faire des tâtonnements préliminaires avant l'optimisation du quantificateur. Par contre, pour les tailles plus élevées, la complexité de la mise en oeuvre du quantificateur résultait à des calculs prohibitifs lors de l'optimisation.

L'idée directrice et intuitive de ces méthodes est de rechercher comment les caractéristiques de la source influencent les positions des points dans l'espace. Ainsi,

l'interprétation géométrique du problème de la quantification vectorielle algébrique a conduit à choisir la spirale comme structure de quantification. La comparaison du quantificateur dans la fin de ce chapitre avec des quantificateurs simples confirme jusqu'à un certain point, les propos tenus au début de ce chapitre sur la forme géométrique de la spirale et qui épouse la distribution gaussienne.

Cette approche algébrique se révèle particulièrement enrichissante car elle permet d'obtenir des quantificateurs vectoriels simples à mettre en oeuvre. Mais auparavant, il est intéressant d'en donner la formule de la spirale qui est la base de ce type de quantificateur.

CHAPITRE IV

INTERPRETATION DES RESULTATS

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons essayer d'interpréter les résultats obtenus dans le chapitre précédent concernant le quantificateur spiral à trois dimensions. Ce quantificateur nous a donné de nouvelles perspectives et des résultats très importantes à propos de la quantification algébrique à trois dimensions.

Avant d'entamer la discussion sur les résultats obtenus dans le chapitre précédent, nous avons jugé utile de donner un aperçu sur la quantification algébrique, en particulier la quantification sphérique.

2. La quantification vectorielle algébrique sphérique

2.1. Principe

Le signal original est découpé en blocs de M échantillons successifs, les échantillons de ces blocs sont les composantes des vecteurs à coder :

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_M]^t \quad (4.1)$$

La quantification vectorielle sphérique consiste à quantifier séparément la norme G (gain) et l'orientation (phase) du vecteur X , soit :

La norme
$$G = \sqrt{\sum x_r^2} \quad (4.2)$$

L'orientation ou vecteur normalisé
$$x = X / G \quad (4.3)$$

Considérons en premier lieu la quantification de l'orientation. Cette quantification met en œuvre un premier quantificateur Q_0 auquel est associée la table de décodage :

$$S_0 = [y_0, y_1, \dots, y_{N_0-1}] \quad (4.4)$$

Ce quantificateur opère à un débit $R_0 = \log_2(N_0)$ et fournit le vecteur y_i qui minimise la distance euclidienne :

$$d(x, y_i) = \|x - y_i\|^2 = \|x\|^2 + \|y_i\|^2 - 2x^t y_i = 2 - 2x^t y_i \quad (4.5)$$

Il est clair que minimiser cette distance revient à maximiser le produit scalaire $x^t y_i$ lequel produit s'interprète comme la projection de l'orientation x sur le vecteur y_i (ou vice versa).

2.2. Avantages de la quantification vectorielle sphérique

Il y a plusieurs avantages importants à quantifier séparément norme et orientation. Voici quelques avantages.

- a) Traiter la norme, à part, réduit bien entendu de un la dimension du problème (d'un volume à une surface dans R^n) et permet donc d'utiliser un dictionnaire de taille réduite.
- b) Les avantages les plus importants viennent du fait que la norme présente certaines particularités distinctives que l'on peut exploiter. Dans de nombreux cas particulier, la norme G varie de façon lente d'un vecteur à un autre. On peut exploiter facilement cette forme de redondance particulière par un codage du type prédictif. C'est le cas du signal de parole pour lequel G évolue à une échelle de temps plus lente appelée « rythme syllabique ».
- c) Dans plusieurs cas importants comme celui du signal de parole la norme intervient, pour des raisons d'ordre physiologique, par le biais d'une échelle logarithmique. Quantifier séparément la norme permet alors de choisir librement le type d'échelle qui lui est approprié et de réaliser facilement un quantificateur global offrant une compression de dynamique.
- d) On pourrait croire que quantifier vectoriellement le vecteur original X en le considérant comme distribué de façon uniforme dans un hypercube de M dimensions soit l'approche la plus performante. En fait, loin de tendre vers l'uniformité, la distribution de X est concentrée dans une coquille sphérique centrée à l'origine. Ce phénomène appelé en anglais *sphere hardening* se produit quant les composants du vecteur ne sont pas de natures différents mais émanent d'une même source.

Illustrons cette dernière observation en considérant le cas d'une source gaussienne d'échantillons x_i indépendants. Si l'on forme à partir d'une telle source des vecteurs de dimensions M le carré de leur norme est distribué selon la distribution dite de κ^2 avec $M-1$ degrés de liberté. La norme (c'est -à-dire la racine carrée d'un κ^2) peut être assimilée à une variable gaussienne de moyenne G_0 et de variance $G_0^2 / (2M - 1)$. Ainsi pour les dimensions 8 et 24, l'écart-type de la norme G autour de sa valeur moyenne représente respectivement 26 et 15% de cette valeur moyenne.

2.3. Approche statistique et approche algébrique

La quantification de l'orientation en QVS peut être réalisé par dictionnaires stockés obtenus par l'approche statistique en particulier en appliquant un algorithme du type K-moyennes à un ensemble de vecteurs normalisés d'apprentissage (orientations). Cette approche est recommandée quand la distribution des orientations sur la sphère unité est non uniforme. L'algorithme d'apprentissage permet alors de tirer parti au maximum de cette non uniformité. La deuxième approche, dite algébrique consiste à faire usage des propriétés des réseaux réguliers pour constituer des dictionnaires de points sur une hypersphère unité. Cette deuxième approche sera appropriée dans le cas où les orientations sont raisonnablement uniformément distribuées sur la sphère. Si cette condition est vérifiée, l'approche algébrique offre des avantages très importants par rapport à l'approche statistique. Ces avantages sont les suivants :

- a) Le dictionnaire n'a pas à être stocké car les vecteurs y_i s'obtiennent, comme nous le verrons plus loin, par permutations des composantes de vecteurs particuliers appelés directeurs qui sont en petit nombre, sont stockés.
- b) La recherche du plus proche voisin est accélérée car elle s'opère seulement au niveau des directeurs.
- c) La conséquence des deux points ci-dessus est que l'approche algébrique permet d'envisager des dictionnaires beaucoup plus grands, par exemple 100 à 10000 fois plus grands que pour l'approche statistique ou d'envisager des dimensions plus importantes.

Une préoccupation nouvelle surgit dans l'approche par réseau : le problème de la numérotation. En effet, lorsque le plus proche voisin y a été trouvé, il faut en plus déterminer son rang i dans la collection S .

3- Commentaires sur les résultats obtenus.

3.1. La spirale à trois dimensions

La procédure suivie pour la construction de la spirale à trois dimensions n'est pas compliquée et la formule obtenue est très simple. Ceci a rendu la discrétisation simple et le nombre de paramètres à optimiser n'est pas trop élevé.

La spirale d'Archimède était très convenable pour une source gaussienne. D'autres spirales à trois dimensions (figures: 3.6, 3.9) peuvent être très utiles pour coder d'autres types de distributions à trois dimensions.

Néanmoins, la discrétisation et l'optimisation des spirales pour des dimensions plus élevées seront certainement plus compliquées car le nombre de paramètres à optimiser devient plus important. Donc, un algorithme d'optimisation des paramètres du quantificateur spiral devient de plus en plus important au fur et à mesure que la dimension du quantificateur augmente.

3.2 La source d'excitation

La source d'excitation utilisée est la source générée automatiquement par Matlab 6.5. L'utilisation d'autres algorithmes de génération de la source gaussienne a donné des résultats similaires. La seule différence est le temps d'exécution qui était plus long dans le deuxième cas.

Le choix du nombre d'échantillons de la source d'excitation dépend de la stabilité du RSB obtenu par le quantificateur spiral. Il doit être supérieur ou égale à un certain nombre. Le graphe de stabilité du RSB en fonction du nombre d'échantillons de la source d'excitation indique que le RSB commence à se stabiliser à partir de 16384 échantillons de la source gaussienne. Mais pour ce nombre, nous constatons toujours des fluctuations d'ordre de centièmes ou même de quelques dixièmes de dB. Donc, pour être assuré des résultats, l'utilisation d'une source de 50000 échantillons a résolu ce problème.

3.3 La discrétisation et l'optimisation de la spirale

L'optimisation de ce type de quantificateur est la tâche la plus difficile. Cette difficulté provient du fait que les paramètres varient dans des plages infinies et que le nombre de paramètres est supérieur à deux. Donc, l'approche que nous avons suivie dans l'optimisation basée sur la fixation de deux paramètres et la variation des autres ne nous assure pas les paramètres optimaux du quantificateur.

Pour choisir les intervalles des paramètres d'optimisation, nous avons commencé par un tâtonnement dans la première étape pour estimer les intervalles de variation. Nous avons étudié par la suite le RSB du quantificateur en fonction de chaque paramètre dans son intervalle choisi préalablement.

En ce qui concerne les paramètres de la spirale à quatre et huit points, l'optimisation était plus simple. La pyramide et le cube, sont des structures géométriques de quantification optimales. Il est donc préférable de positionner les points de la spirale dans les sommets de ces formes géométriques.

3.4 Unicité des paramètres de la spirale

Le problème qui se pose est que pour une même constellation de points de la spirale, les paramètres trouvés sont-ils uniques ? Ou bien y a-t-il d'autres paramètres qui donnent la même constellation ?

Soit une spirale à trois dimensions configurée pour coder une source gaussienne à trois dimensions. Les paramètres du quantificateur résultant sont $(g_1, \theta_1, \varphi_1)$ et les coordonnées des points du quantificateur sont (x_1, y_1, z_1) . Peut-on trouver une deuxième spirale qui a d'autres paramètres $(g_2, \theta_2, \varphi_2)$ différents de ceux de la première spirale mais qui donne les mêmes mots code du quantificateur ? C'est-à-dire que :

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases} \quad (4.6)$$

De cette égalité, on déduit que :

$$\begin{cases} g_1 \theta_1 \cos \theta_1 \cos \varphi_1 = g_2 \theta_2 \cos \theta_2 \cos \varphi_2 \\ g_1 \theta_1 \sin \theta_1 = g_2 \theta_2 \sin \theta_2 \\ g_1 \theta_1 \cos \theta_1 \sin \varphi_1 = g_2 \theta_2 \cos \theta_2 \sin \varphi_2 \end{cases} \quad (4.7)$$

On obtient les égalités suivantes :

$$\frac{z_1}{x_1} = \frac{z_2}{x_2} \text{ on déduit que } tg \varphi_1 = tg \varphi_2 \text{ donc } \varphi_2 = \varphi_1 + k\pi$$

$$\frac{y_1}{z_1} = \frac{y_2}{z_2} \text{ on déduit que } tg \theta_1 = (-1)^k tg \theta_2 \text{ donc } \theta_2 = (-1)^k \theta_1 + k\pi$$

De la deuxième équation de $g_1 \theta_1 \sin \theta_1 = g_2 ((-1)^k \theta_1 + k\pi) \sin((-1)^k \theta_1 + k\pi)$

$$\text{Donc } g_2 = \frac{\theta_1}{((-1)^k \theta_1 + k\pi)} g_1 \quad (4.8)$$

On pose $\theta_1 = \theta_{01} + n \delta_1$ donc

$$\theta_2 = (-1)^k (\theta_{01} + n \delta_1) + k\pi = ((-1)^k \theta_{01} + k\pi) + n (-1)^k \delta_1$$

$$\text{Donc } \theta_{02} = (-1)^k \theta_{01} + k\pi \quad (4.9)$$

$$\delta_2 = (-1)^k \delta_1 \quad (4.10)$$

$$g_2 = \frac{\theta_{01} + n \delta_1}{((-1)^k (\theta_{01} + n \delta_1) + k\pi)} g_1 \quad (4.11)$$

On remarque que le gain g_2 n'est pas constant (fonction de n). Or, le paramètre gain du quantificateur spiral à trois dimensions est constant. Donc, on déduit que si les paramètres optimaux du quantificateur spiral à trois dimensions existent, ils seraient uniques.

3.5 Les performances en terme de RSB du quantificateur spiral à trois dimensions

Les performances du quantificateur en terme de RSB sont bonnes, mais elles ne sont pas encore optimales. L'algorithme LBG a réussi à augmenter les performances du quantificateur en terme de RSB, mais il n'a pas donné un apport important pour une spirale configurée en quantificateur spirale1 et spirale2. Ce phénomène est de fait logique car les performances de notre quantificateur sont déjà proches de celles du quantificateur optimal en ce qui concerne les quantificateur spirale1 et spirale2. Par contre, les quantificateurs spirale3 et spirale4 sont loin de la configuration optimale de la spirale.

Les résultats obtenus, comparés aux résultats théoriques prédits par la théorie de la distorsion (bornes théoriques de Shannon), montrent que les performances réalisées par le quantificateur spiral à trois dimensions sont loin de cette limite théorique.

Par ailleurs, on peut remarquer une propriété intéressante de notre quantificateur. Cette propriété est la possibilité de varier le nombre de mots codes obtenus à partir d'une seule construction mathématique de la spirale.

En ce qui concerne le quantificateur multi-spirales, les performances du quantificateur sont moins de ceux du quantificateur spiral simple. La configuration du quantificateur (nombre de spirales qui constituent le quantificateur) peut avoir une influence sur les performances du quantificateur.

4. Etude Comparative du quantificateur spiral à trois dimensions

Cette étude demeure restrictive dans le sens où elle ne concerne essentiellement que les constellations composées de 4 et 8 points. Certains quantificateurs ne peuvent évoluer effectivement vers des structures à nombre de points différents de celui qui a été considéré initialement. Par exemple, un quantificateur donné peut présenter des performances données avec une structure à 8 points mais ne peut posséder de constellation de points 'équivalente' de taille différente. De ce fait, cette étude comparative permet de situer les performances de notre quantificateur par rapport à quelques structures particulières uniquement.

Dans cette partie on a réussi à trouver les paramètres optimaux du quantificateur. On a optimisé les structures géométriques (pyramide, cube), puis on a essayé de trouver la spirale qui nous donne la même constellation de points que celles obtenue par le cube et la pyramide.

5. Conclusion

Dans ce chapitre, on a exposé brièvement la quantification algébrique sphérique. On a cité en premier lieu ses principes puis les avantages de cette méthode de quantification ainsi que l'approche algébrique et l'approche statistique.

La discussion des résultats obtenus par le quantificateur spiral à trois dimensions nous a permis d'expliquer les insuffisances manifestées. Ces dernières sont dues à la difficulté de trouver les paramètres optimaux du quantificateur qui varient dans des intervalles infinis, ainsi que les différentes combinaisons possibles de ces paramètres optimaux.

En conclusion de ce chapitre, on peut affirmer que le quantificateur spiral peut donner des performances meilleures en terme de RSB. La mise en œuvre d'un programme bouclé qui teste de larges intervalles pour ces différents paramètres peut aider à atteindre cet objectif.

En perspectives, on peut aussi affirmer que le quantificateur spiral peut être prolongé pour des dimensions plus élevés (4, 8, 16, 24,...), ceci est possible si on trouve des formules pour

les hyperspirales. Le problème majeur pour ces dimensions sera certainement l'optimisation car les paramètres de la spirale seront plus nombreux.

CONCLUSION

Nos efforts ont abouti à l'élaboration d'un quantificateur à base d'une spirale à trois dimensions. Les étapes qu'on a suivi sont: la construction de la spirale à trois dimensions; la discrétisation et l'optimisation de la spirale; la vérification des performances obtenues par l'estimateur LBG; comparaison des performances avec les limites théoriques de Shannon. L'étude comparative avec quelques quantificateurs géométriques simples à base d'une structure géométrique simple achève notre travail.

La forme de la spirale à trois dimensions dépend de la spirale génératrice ainsi que de ces paramètres qui déterminent sa dimension. Il est préférable de construire une spirale avec une formule simple qui a un minimum de paramètres car ils seront stockés en mémoire.

L'optimisation des paramètres de la spirale a été faite graphiquement. Cette partie est laborieuse car on ne sait pas d'avance les intervalles où on va trouver les paramètres optimaux.

Cette procédure d'optimisation a l'inconvénient d'être trop lente. Notre recommandation est de changer cette méthode d'optimisation, en particulier pour des dimensions élevées. Pour des spirales qui ont plus de paramètres, il est primordial d'essayer de trouver un algorithme à boucle fermée capable d'optimiser tous les paramètres à la fois.

Le quantificateur spiral à trois dimensions a donné de bonnes performances en terme de RSB. Ces résultats ne sont pas optimaux pour toutes les différentes tailles du codeur. En particulier, les spirales à 16 et 32 points, le LBG a réussi à déplacer les points de la spirale.

Pour les tailles 4 et 8 du quantificateur spirale, les performances étaient optimales. Ceci est dû au fait que les constellations des points du quantificateur se superposent avec des constellations de points à base de structures géométriques optimales, ce qui n'est pas le cas pour les autres tailles du quantificateur.

Pour les grandes tailles du quantificateur, il n'existe pas de structures géométriques optimales qui peuvent nous aider à choisir les paramètres de la spirale. Par contre, les

performances étaient remarquables pour les tailles 256 et 512. Ceci est dû au nombre élevé de points du quantificateur qui sont bien distribués dans l'espace.

L'application de la technique multi-spirales, à son tour, a donné des performances en terme de RSB moins que ceux du quantificateur spiral à trois dimensions. Il se peut qu'ils existent d'autres nombres de spirales qui nous donnent de bonnes performances pour le quantificateur multi-spirales.

L'étude comparative du quantificateur spiral avec quelques structures de quantification géométriques à trois dimensions était la dernière étape dans notre étude. La pyramide et le cube étaient les deux structures de comparaison. Notre quantificateur a donné des performances similaires à ces deux structures et le LBG n'a pas pu améliorer ses performances. Ceci peut nous encourager à trouver des résultats optimaux pour les autres tailles du quantificateur.

Bibliographie

- [1] C.E. Shannon, A mathematical theory of communication, Bell System 1948.
- [2] A. Gersho, R.M. Gray, Vector quantization and signal compression, Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall, 1990.
- [3] Y. L. Linde, A. Buzo and R. M. Gray, An algorithm for vector quantizer design, IEEE Trans. Commun., vol. COM-28, pp. 84–95, Jan. 1980.
- [4] WILLIAM A.PEARLMAN, Polar Quantization of a complex Gaussian Random Variable, IEEE transactions on information theory, VOL. NO.6. COM-27, June 1979.
- [5] PETER F.SWAZEK, Uniform Spherical Coordinate Quantization of Spherically Symmetric Sources, IEEE TRANSACTIONS ON COMMUNICATIONS, vol. COM-33 No. 6, June 1985.
- [6] D.Berkani, Le Spirale Quantizer, thèse doctorat d'état, Ecole National Polytechnique, 1991.
- [7] T. Berger, Rate distortion theory, a mathematical basis for a data compression, Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall, 1971.
- [8] ROBERT M.Gray, rate distortion functions for finite-state finite-alphabet markov sources, IEEE Transactions on information theory, vol IT-17, No. 2, March 1971.
- [9] Toby Berger and Jerry D. Gibson, Lossy Source Coding, IEEE transactions on information theory, VOL. 44, NO. 6, OCTOBER 1998.
- [10] A. Gersho, Principles of quantization, IEEE Trans. on circuits and syst., vol. CAS 25, pp 427-436, July 1978.
- [11] J.P. Adoul, La quantification vectorielle des signaux : approche algébrique, Annales des télécommunications vol 41, 1986.
- [12] Claude Lamblin, Quantification Vectorielle Algébrique Sphérique par le Réseau de BARNES-WALL: application au codage de parole, Thèse de doctorat (Ph.D.) université de SHERBROOKE, 1988.
- [13] Gérard Blanchet, Maurice Charbit, Signaux et Images sous MATLAB, Herms éditions 1993.
- [14] Y. Yamada, S. Tazaki and R.M. Gray, Asymptotic performance of block quantizers with difference distortion measures, IEEE Trans. On Information theory, vol. IT-26, pp 6-14, January 1980.
- [15] A. Gersho, Asymptotically optimal block quantization, IEEE Trans. on Information theory, vol. IT-25, pp 373-380, July 1979.

-
- [16] A. Gersho, On the Structure of Vector Quantizers, IEEE Trans. on Information Theory, IT-28, #2, pp. 157-166, March 1982.
- [17] Gray, R.M., A. Buzo, Gray and J.D. Markel, Speech Coding Based Upon Vector Quantization, IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing, vol. ASSP-28, #5, pp. 562-574, Oct. 1980.
- [18] A. Gray and B. Juang, Multiple Stage Vector Quantization for Speech Coding, Proc. Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing, pp. 597-600, Paris, 1982.
- [19] R.M.Gray, and M.J.Sabin, Product Code Vector Quantizers for Waveform and Voice Coding, IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP 32, pp. 474-488, June 1984.
- [20] A. Gersho, D.Y. Cheng, B. Ramamurthi and Y.Shoham, Fast Search Algorithms for Vector Quantization and Pattern Matching, Proc. Int'l Conf. Acoustics, Speech and Signal Processing, San Diego, March 1984.
- [21] D.J.Newman, The Hexagon Theorem, IEEE Trans. on Information Theory, vol. IT-28, #2 ,pp. 137-139, March 1982.
- [22] J.Makhoul, 'Linear Prediction: A Tutorial Review' IEEE proceedings, VOL. 63, NO. 4, April 1975.
- [23] J. Makhoul, S. Roucos, H. Gish, 'Vector Quantization in Speech Coding', IEEE proceedings, vol. 73, #11, pp. 1551-1588, Nov. 1985.
- [24] J.Y.Huang and P.M.Schultheiss, Block Quantization of Correlated Gaussian Random Variables, IEEE Trans. on Communication Systems, CS-11 (3), pp. 289-296, Sept. 1963.
- [25] The MathWorks, Inc., Numerical Computing with MATLAB,
<http://www.mathworks.com/moler>
- [26] D. E. Knuth, The Art of Computer Programming: Semi numerical Algorithms, Volume 2, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
- [27] G. Marsaglia and W.W. Tsang, A Fast, Easily Implemented Method for Sampling from Decreasing or Symmetric Unimodal Density Functions, SIAM Journ. Scient. and Statist. Computing 5, 1984, pp. 349-359.