

1 seul
ex



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
D'INGENIEUR D'ETAT EN ELECTRONIQUE**

Sujet :

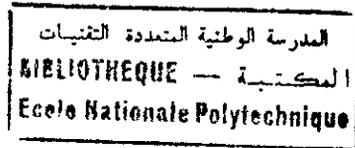
**Estimation des paramètres
de propagation
de signaux chirps**

Présenté par :

Mr. AOUADA Rostom

Membres du jury

A. ZERGUERRAS	Professeur, Président	(E.N.P)
A. BELOUHRANI	Docteur d'état, Promoteur	(E.N.P)
S. AOUADA	Magister, Co-promoteur	(E.N.P)
M.HADDADI	Professeur, Examineur	(E.N.P)



Remerciements

Tout d'abord je remercie Dieu pour sa faveur.

Je tiens à remercier toutes les parties qui ont collaboré dans ce travail.

Je remercie mon promoteur Dr. A. BELOUHRANI et mon co-promoteur et frère Saïd pour leurs conseils, leurs enseignements et leur aide sur tous les plans.

De même, je remercie le Dr. K. ABED-MERAIM pour sa contribution.

Je remercie également les membres de ma famille pour leurs encouragements et leur soutien précieux.

Merci à tous ceux qui, de près ou de loin, ont fait que l'aboutissement de ce travail soit possible.



Table des matières

1.	Introduction	1
2.	Modèle du canal	5
2.1.	Signal Chirp	6
2.2.	Simplification du modèle large bande	10
2.2.1.	Simplification du modèle large bande pour un signal chirp incident sur un élément d'antenne	10
2.2.2.	Modèle pour un système à multicanaux à trajets uniques	14
2.3.	Stationnarité des paramètres spatiaux	18
2.3.1.	Rappel sur le canal de transmission exogène	18
2.3.2.	Modèle du canal sur l'intervalle de cohérence	19
2.4.	Transformation du modèle général	21
3.	Estimation des paramètres de propagation	24
3.1.	Généralités sur l'estimation des paramètres de propagation	24
3.2.	Estimateur à Maximum de Vraisemblance	25
3.3.	Chirp Beamformer	27
3.4.	Algorithme d'estimation JC-MUSIC	29

4.	Simulations	33
4.1.	Introduction.....	33
4.2.	Borne de Cramer-Rao (CRB).....	34
4.3.	Visualisation de la fonction de l'estimateur JC-MUSIC	35
4.4	Performances de JC- MUSIC.....	38
4.4.1.	Effet de la puissance de bruit (SNR)	38
4.4.2.	Effet du nombre PRI (L).....	39
4.4.3.	Effet du nombre de capteurs à la réception (M).....	41
4.4.4.	Résolution de JC-MUSIC	42
4.5.	Application de JC-MUSIC pour un environnement à trajets multiples.....	46
4.5.1.	Calcul du modèle et expression de l'estimateur MC-MUSIC.....	47
4.5.2.	Performances de MC-MUSIC.....	50
4.5.3.	Visualisation de MC-MUSIC.....	50
4.5.4.	Effets des paramètres de MC-MUSIC.....	51
a)	Effet de la puissance de bruit (SNR).....	51
b)	Effet du nombre PRI (L).....	53
c)	Effet du nombre de capteurs à la réception (M).....	54
d)	Résolution de MC-MUSIC	54
5.	Interface graphique	56
5.1.	Introduction.....	56
5.2.	Objectif et avantages de l'interface graphique.....	57
5.3.	Description de l'interface graphique.....	57
5.4.	Exécution.....	59
6.	Conclusion.....	62
Acronymes	64
Mots clés	65
Références	66
Annexe A	68
Annexe B	74
Annexe C	76

المختصر

نعتبر إشكالية تقدير عناصر إشارات Chirps الملتقطة على هوائي إستقبال متعدد أجهزة الإنقاط (شبكة هوائية) . باستغلال إستقرارية العناصر السابقة على مجال التجانس للقناة نستخلص نموذج جديد ميرزا علاقة فضاء زمن للعناصر . في حالة تعدد القنوات ذات المسار الواحد النموذج المشتق يسمح بتقدير عدد إشارات أكبر من عدد أجهزة الإنقاط . يعاد إستعمال النموذج السابق مباشرة في حالة إشارة Chirps وحيدة في وسط متعدد المسارات حيث تقدر زوايا الإنقاط بعدد أجهزة الإنقاط أكبر من عدد الإشارات الملتقطة . نستعمل لتقدير العناصر المجهولة ونقارن نتائجها من خلال التظاهرات بالنسبة للحد الأدنى (Cramer-Rao) CRB

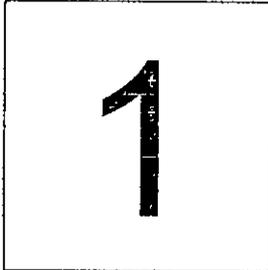
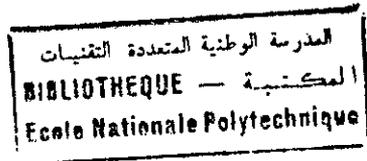
(Bound)

Abstract

We consider the problem of estimating the parameters of linear chirp signals when received at a multi-sensor antenna. Exploiting the negligible variation of parameters of interest over the coherence time of the channel, we derive a new data model that outlines the space-time relation between the parameters. In the case of multiple chirps and single-path channels, the derived model allows the estimation of more signals than antennas. The model is directly employed in the case of single chirp in multipath, where angles of arrival can be retrieved if more antennas than paths are available. We use a MUSIC (Multiple Signal Characterization) based estimator to recover the unknown parameters and compare its performance through simulations against the CRB (Cramer-Rao Bound).

Résumé

Nous considérons le problème de l'estimation des paramètres des signaux chirps reçus sur une antenne multi-capteurs (réseau d'antennes). Exploitant la stationnarité des paramètres en question sur l'intervalle du temps de cohérence du canal, nous dérivons un nouveau modèle, qui met en évidence la relation spatio-temporelle des paramètres. Dans le cas multicanaux à trajet unique, le modèle dérivé permet l'estimation d'un nombre de signaux supérieur au nombre de capteurs. Le modèle est directement utilisé dans le cas d'un signal chirp unique, dans un environnement multi-trajets, où les angles d'arrivée sont estimés avec un nombre de capteurs supérieur au nombre de trajets. Nous utilisons MUSIC (Multiple Signal Characterisation) pour réaliser l'estimation des paramètres inconnus, et nous comparons ses performances à travers les simulations par rapport à la borne de Cramer-Rao CRB (Cramer-Rao Bound).



Introduction

Depuis quelques décennies, les moyens de communication ont connu une importante évolution, réalisant ainsi une véritable révolution dans le domaine de l'information, en changeant notre vision du monde, allant même jusqu'à devenir une arme insoupçonnée jusque-là. Et cela n'est que le début des travaux et des recherches dans le domaine.

Actuellement, le nombre croissant des utilisateurs des transmissions sans fils suscite l'intérêt de la communauté des chercheurs du traitement du signal avec une tendance vers les systèmes à sorties multiples où la transmission de données, se fait à travers un environnement multicanaux caractérisés par des trajets uniques, ou plus fréquemment, à travers un canal caractérisé par des trajets multiples. Ces derniers peuvent être assimilés à des systèmes tels les antennes à éléments multiples, ou des systèmes d'acquisition de données multicanaux.

L'étude de ce type de systèmes consiste à réaliser une estimation des paramètres de propagations des signaux transmis afin d'aboutir à une modélisation du canal de transmission du système étudié.

A noter que les paramètres de propagations incluent entre autres, les «Angles ou Directions d'Arrivées (**D**irection **O**f **A**rrival) DOA » et les « Décalages Temporels d'Arrivées (**T**ime **D**ifference **O**f **A**rrival) TDOA ».

Comme la majorité des applications utilise des Modulations en Fréquence FM (**F**requency **M**odulation) linéaire ou non linéaire, les estimations sont focalisées sur les paramètres de propagation et ceux du signal pour le cas des signaux à phase polynomiale PPS (**P**olynomial **P**hase **S**ignal) et plus particulièrement les signaux **Chirps**.

A titre d'exemples, nous pouvons trouver ce genre d'estimation dans les problèmes classiques de Radar comme : les Radars et Sonars à ouverture synthétique (**S**ynthetic **A**erture **R**adar (SAR), **S**ynthetic **A**erture **S**onar (SAS)), les inverses SAR et SAS (**I**SAR, **I**SAS), les Radars Doppler, l'imagerie Sonar, les Radars et Sonars à compression d'impulsions, aussi, ce type d'estimation s'étend vers d'autres applications comme la bio-ingénierie, la sismographie ou dans les communications sans fils.[1]-[5].

La plupart des travaux réalisés ont développé une estimation conjointe des paramètres de propagations et ceux du signal chirp. Ce type de traitement appelé « Traitement Spatio-Temporel » (**S**pace-**T**ime **P**rocessing) s'est avéré très avantageux pour l'amélioration des performances et de l'aspect économique de ces systèmes. Les principaux avantages procurés sont :

1. Le gain de l'antenne qui se traduit par une réception plus importante de l'énergie du signal par les réseaux d'antennes, améliorant ainsi le rapport Signal sur Bruit SNR (**S**ignal-**t**o-**N**oise **R**atio).
2. La diversité spatiale, qui permet de combattre l'atténuation par sélectivité spatiale.
3. La réduction des interférences des canaux adjacents.

Parmi les solutions proposées, on trouve principalement des extensions des travaux sur les signaux à bande étroite [6]-[8] vers les signaux à large bande. On distingue des solutions itératives [9], et d'autres analytiques plus attrayantes pour le traitement en temps réel. En particulier les travaux basés sur la distribution spatiale temps-fréquence en utilisant des méthodes de séparations en sous-espaces, ou ceux basés sur les algorithmes de Maximum de vraisemblance ML (**M**aximum **L**ikelihood).[10],[11].

Très récemment, d'autres approches intéressantes sur les signaux à large bande ont vu le jour en développant le modèle des signaux à phase polynomiale. Et particulièrement l'approche proposée en [5] où une solution exacte de l'algorithme de ML a été suggérée et un estimateur spatio-temporel simplifié pour les signaux chirps a été proposé.

Dans notre travail, nous examinons l'estimation conjointe des paramètres de propagations des signaux chirps (DOA, les bandes passantes) reçus par une antenne multi-capteurs (réseau d'antennes) en exploitant les outils d'estimation des signaux bande étroite comme l'algorithme MUSIC.

Pour cela, on développe dans un premier temps un modèle mathématique pour un système multicanaux à trajets uniques et une antenne réceptrice multi-capteurs.

Ce modèle exprime la relation spatio-temporelle des paramètres. Il permet entre autre, grâce à la diversité spatiale et des bandes passantes, l'estimation conjointe du DOA θ et des bandes passantes ω_b avec un nombre de capteurs inférieur au nombre de paires d'inconnues.

Dans un deuxième temps, par similitude mathématique, ce modèle est appliqué au cas d'un signal chirp unique dans un environnement à trajets multiples spéculaire, et une antenne réceptrice multi-capteurs.

Puisque la bande passante du signal chirp est généralement connue par construction dans ce type d'application (i.e. Radar), le problème se réduit donc à une estimation des directions d'arrivée seulement.

Comme pour les systèmes de signaux à bandes étroites ; dans notre approche pour les systèmes de signaux chirps (large bande) ; nous exploitons la stationnarité des paramètres sur le temps de cohérence du canal. Ce modèle est le résultat du fait que les angles et les décalages temporels d'arrivée sont les mêmes pour tous les chirps sur des intervalles d'observation inférieurs ou égaux à la largeur de l'intervalle de cohérence du canal. La principale variation dans ce modèle réside dans le fait que l'atténuation complexe attribuée à chaque trajet est différente d'un intervalle à un autre.

Le présent mémoire est organisé de la manière suivante :

Après une introduction concise de notre projet dans le **Chapitre 1** ; dans le **Chapitre 2**, nous développons le modèle analytique de notre système, indiquant au préalable les différentes hypothèses spécifiques retenues.

Une fois le modèle considéré, nous formulons le problème de l'estimation des paramètres de propagation.

Dans le **Chapitre 3**, différentes méthodes d'estimation sont proposées ; axées essentiellement sur la méthode MUSIC (**M**ultiple **S**ignal **C**haracterisation) avec l'exploitation des propriétés de la séparation en sous-espaces. Cette approche permet l'aboutissement de la forme définitive de notre algorithme noté **JC-MUSIC**.

Pour distinguer notre modèle, nous exposons la méthode du Maximum de Vraisemblance ML (**M**aximum **L**ike**L**ihood) pour le même système.

Dans le **Chapitre 4**, nous illustrons les performances de notre algorithme par des simulations, des comparaisons et une série de commentaires.

Comme application réaliste de notre modèle nous étudions un cas particulier d'un seul signal chirp émis dans un environnement à trajets multiples spéculaire.

Dans le **Chapitre 5**, une interface graphique est proposée afin de faciliter l'accès à l'algorithme.

Pour clore le présent travail une conclusion synthétique fait l'objet du **Chapitre 6**.

A noter que les généralités sont introduites au fur et à mesure du développement de l'estimateur, lorsqu'une nécessité apparaît.

2

Modèle du canal

Lors d'une transmission d'un signal à partir d'une station mobile à travers un environnement sans fils, divers phénomènes entrent en compte, à savoir la réflexion, la diffraction et la diffusion, conséquences des différents obstacles existants dans l'environnement en question comme le relief du terrain, les voitures et les immeubles.

Il s'ensuit que l'onde incidente sur l'antenne réceptrice est une combinaison d'un grand nombre de répliques du signal émis, chacune avec un certain décalage temporel, un angle d'arrivée, une atténuation et une polarisation.

Dans ce chapitre, nous développons un modèle pour un environnement sans fil dans le cas particulier d'un système à multicanaux chacun à trajet unique, en exploitant les intervalles de stationnarité.

Les hypothèses suivantes sont retenues dans toutes les étapes de ce travail :

- Nous avons un nombre fini et connu de signaux chirps.
- Nous avons un certain nombre de signaux à la réception.
- L'effet Doppler est négligé.
- La forme d'onde de modulation est un signal chirp linéaire.
- Les signaux sont à large bande par rapport à l'antenne.
- La fréquence centrale est la même pour tous les signaux chirps et elle est connue.
- La structure de réponse de l'antenne réceptrice est connue.

2.1. Le signal Chirp [12].

Le signal chirp a dans le domaine temporel, une enveloppe rectangulaire à l'intérieur de laquelle la fréquence croît (ou décroît) linéairement. La pulsation ω est donc :

$$\omega = \omega_0 + \mu t ; \quad |t| < \frac{T}{2}. \quad (2.1)$$

Où μ est un nombre réel donné par l'expression :

$$\mu = \frac{2\pi \Delta f}{T} \quad (2.2)$$

avec $\frac{\Delta f}{f_0}$ est le taux de variation.

Si μ est positif, alors la fréquence émise est dite croissante. Et si μ est négatif, elle est dite décroissante.

La phase de l'onde est donnée par :

$$\phi = \int \omega dt = \omega_0 t + \frac{1}{2} \mu t^2 + cst \quad (2.3)$$

et la variation temporelle du signal normalisé à une amplitude unité est donné par :

$$g(t) = \cos(\omega_0 t + \frac{1}{2} \mu t^2) ; \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \quad (2.4)$$

Il s'ensuit que sa transformée de Fourier s'écrit :

$$G(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega_0 t + \frac{1}{2} \mu t^2) e^{-j\omega t} dt \quad (2.5)$$

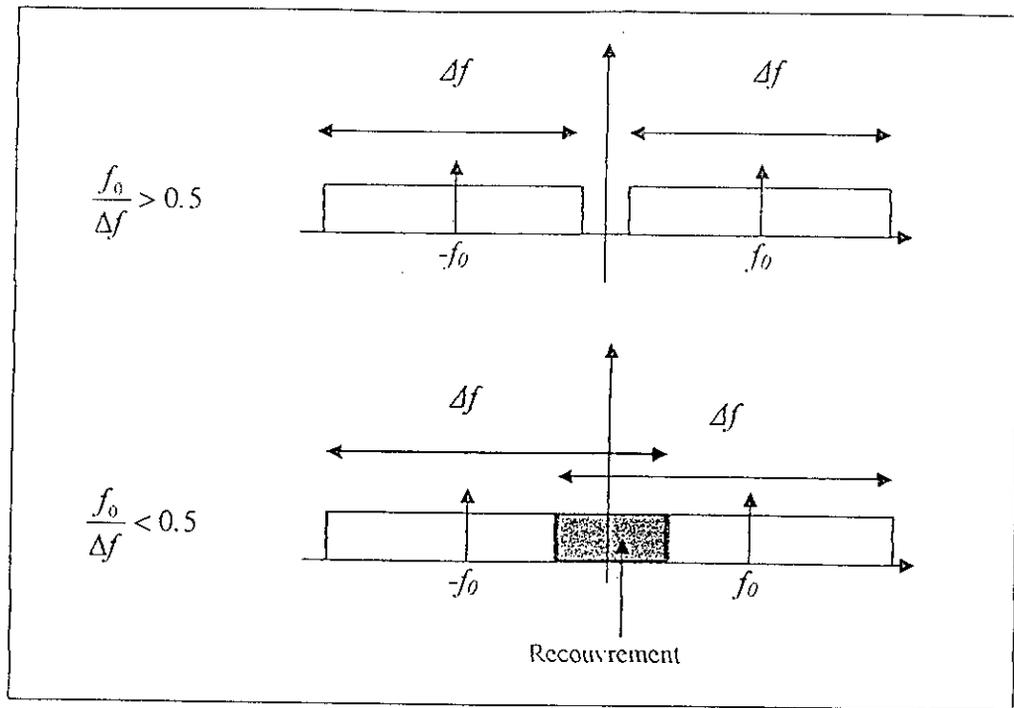


Figure 2.1

La condition pour utiliser l'expression analytique du signal chirp

En remarquant qu'il n'y a rien de part et d'autre de $\pm \frac{T}{2}$. Ceci donne :

$$G(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \exp\left(j \frac{\mu}{2} \left[t^2 + \frac{2}{\mu} (\omega_0 - \omega) t \right] \right) dt + \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \exp\left(-j \frac{\mu}{2} \left[t^2 + \frac{2}{\mu} (\omega_0 + \omega) t \right] \right) dt \quad (2.6)$$

Le second membre correspond aux fréquences négatives qui ne sont pas à prendre en considération s'il n'y a pas de recouvrement des deux fréquences, i.e. $\frac{f_0}{\Delta f} > 0.5$.

Voir Figure 2.1

En introduisant le changement de variable .

$$x = \sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \cdot \left(t - \frac{\omega - \omega_0}{\mu} \right) \text{ soit } dt = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} dx \quad (2.7)$$

on a donc :

$$G(\omega) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \exp\left(-j \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\mu}\right) \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(j \frac{\pi}{2} x^2\right) dx \quad \text{avec } \omega > 0 \quad (2.8)$$

Avec

$$x_1 = \frac{\frac{\mu T}{2} + (\omega_0 - \omega)}{\sqrt{\pi\mu}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\frac{\mu T}{2} - (\omega_0 - \omega)}{\sqrt{\pi\mu}} \quad (2.9)$$

Ce qui donne :

$$G(\omega) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \exp\left(-j \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\mu}\right) [C(x_1) + jS(x_1) + C(x_2) + jS(x_2)] \quad \text{avec } \omega > 0 \quad (2.10)$$

Où C et S sont les intégrales de Fresnel :

$$C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi}{2} y^2 dy \quad (2.11)$$

$$S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi}{2} y^2 dy \quad (2.12)$$

En fait, nous avons un spectre de raies distinctes du fait de la répartition des impulsions. L'enveloppe de l'amplitude de ces raies est le module de $G(\omega)$, soit :

$$G(\omega) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \left\{ [C(x_1) + C(x_2)]^2 + [S(x_1) + S(x_2)]^2 \right\} \quad \text{avec } \omega > 0 \quad (2.13)$$

La phase des raies sera l'argument de $G(\omega)$:

$$\phi(\omega) = \text{Arctg} \left[\frac{S(x_1) + S(x_2)}{C(x_1) + C(x_2)} \right] - \frac{(\omega_0 - \omega)^2}{2\mu} \quad \text{avec } \omega > 0 \quad (2.14)$$

La Figure 2.2 donne des variations de $|G(\omega)|$ pour 3 valeurs différentes du taux de compression $\rho = T \cdot \Delta f$. On voit que pour $\rho > 100$, l'enveloppe du spectre est pratiquement rectangulaire avec comme limites $\pm \frac{\Delta f}{2}$.

Plus précisément si $T \cdot \Delta f \gg 1$, x_1 et x_2 deviennent très grands et $S(x)$ et $C(x)$ tendent vers 0.5, ce qui donne :

$$\phi(\omega) = \text{Arctg}(1) - \frac{(\omega_0 - \omega)^2}{2\mu} = \frac{\pi}{4} - \frac{(\omega_0 - \omega)^2}{2\mu} \quad \text{avec } \omega > 0 \quad (2.15)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} ; \quad f_0 - \frac{\Delta f}{2} < f < f_0 + \frac{\Delta f}{2} \quad (2.16)$$

En résumé, comme les taux de compression usuels sont supérieurs à des centaines d'unités, le signal chirp présente un spectre rectangulaire dans lequel la fréquence croît (ou décroît) linéairement, la largeur totale de ce spectre étant Δf .

Grâce à ces caractéristiques, le signal chirp est utilisé dans diverses applications ; ainsi on le retrouve d'une manière quasi systématique dans toutes les applications à modulation fréquentielle FM.

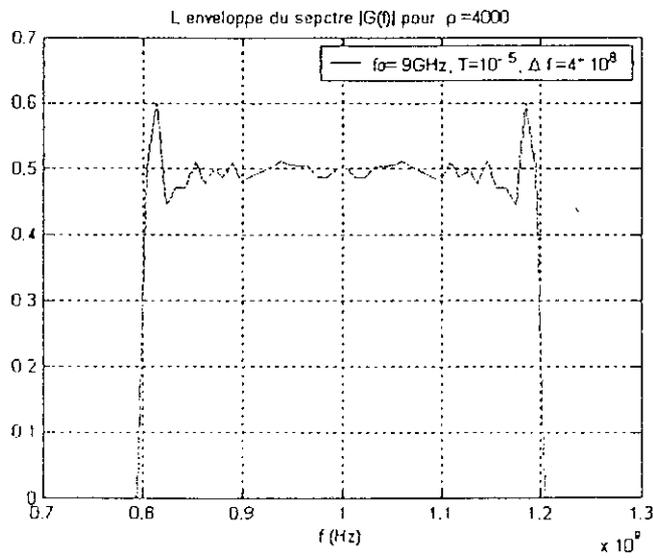
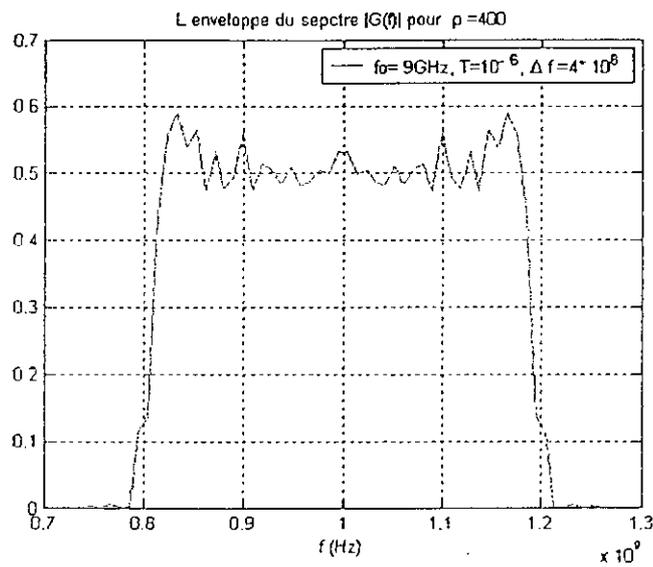
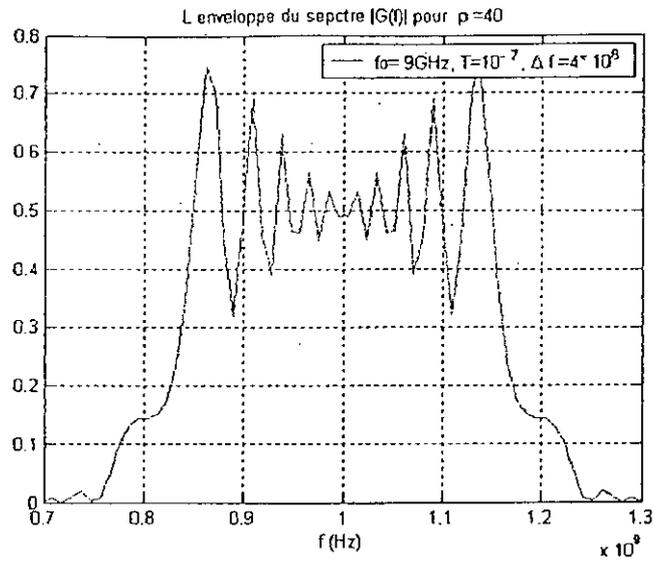


Figure 2.2

Variation de $|G(f)|$ pour différentes valeurs du taux de compression $\rho = T \cdot \Delta f$

2.2. Simplification du modèle large bande.

2.2.1. Simplification du modèle large bande pour un signal chirp incident sur un élément d'antenne.

Considérons un signal chirp émis dont la bande passante est ω_b centrée autour de la fréquence f_c ($\omega_c = 2\pi f_c$). L'équivalent en bande de base de l'enveloppe complexe de ce signal est de la forme [4] :

$$s(\omega_b, t) = \exp\left\{j \frac{\omega_b}{2T} \left(t - \frac{T}{2}\right)^2 + \omega_c t\right\}, \quad t \in [0, T]. \quad (2.17)$$

où :

- T est la période de l'émission.

Comme la propagation se fait dans un environnement sans fil, on voit apparaître dans le signal reçu un TDOA τ et un DOA θ . Donc, à la réception, la copie décalée temporellement du signal émis est, en fonction de ce même signal, de la forme [4],[13] :

$$s(\omega_b, t - \tau) = \exp\left(-j\omega_c \tau \left(1 + \frac{\omega_b}{\omega_c T} \left(t - \frac{T}{2}\right) - \frac{\omega_b \tau}{2\omega_c T}\right)\right) s(\omega_b, t) \quad (2.18)$$

Dans ce qui suit, et pour des raisons de simplification, on suppose que l'antenne réceptrice est un réseau uniforme et linéaire ULA (Uniform and Linear Array) de M éléments. L'espacement entre deux éléments consécutifs est d'une demi longueur d'onde $\frac{\lambda}{2}$ sachant que la fréquence centrale f_c est la fréquence de référence. On considère aussi, que les éléments du réseau ainsi que, les réflecteurs se situent suffisamment loin dans le plan, de manière à ce que l'onde incidente soit considérée comme plane.

L'expression du TDOA τ pour un élément m du réseau, en fonction du DOA θ et de ω_c , est déterminée géométriquement à partir de la Figure 2.3. Elle est de la forme :

$$\tau = \pi m \frac{\sin(\theta)}{\omega_c} < \frac{M}{2f_c} \quad m = 1, \dots, M. \quad (2.19)$$

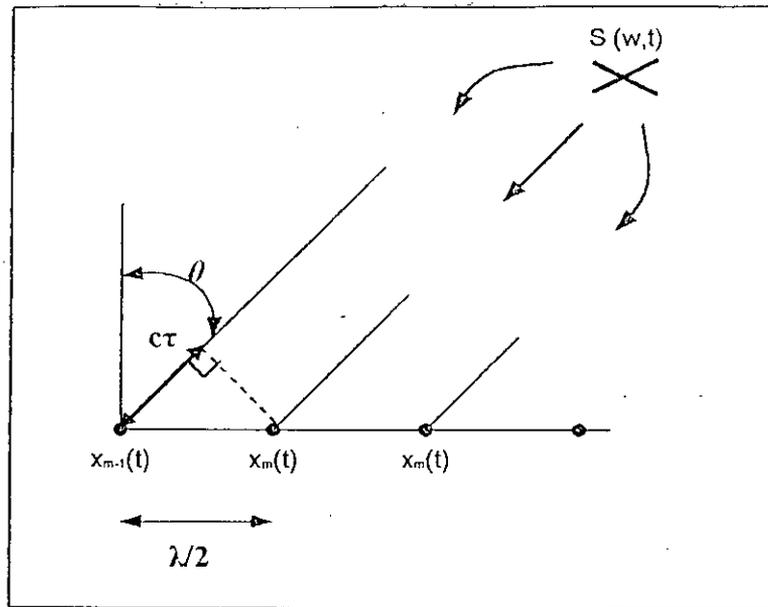


Figure 2.3

Décalage temporel en fonction de l'angle d'arrivée θ et de la fréquence centrale ω_c .

Sachant qu'à la réception, le signal est échantillonné par une fréquence $f_s = \frac{N}{T}$, avec N entier positif non nul, et en multipliant les deux cotés de l'inégalité (2.19) par $\frac{\omega_b}{2\omega_c T}$, nous obtenons :

$$\frac{\omega_b \tau}{2\omega_c T} < \frac{M\omega_b f_s}{4N\omega_c f_c} \quad (2.20)$$

En pratique, le nombre d'éléments d'une antenne M (de 8 à 16 éléments) est faible devant le nombre d'échantillons N (de 128, 256, ...), d'où $\frac{M}{4N} \ll 1$.

A noter, que la fréquence d'échantillonnage f_s est, elle aussi très faible devant la fréquence centrale f_c (allant de 100 MHz jusqu'au GHz).

Donc, il est clair que, à partir de (2.20), pour que $\frac{M\omega_b f_s}{4N\omega_c f_c}$ ait un impact sur les

performances du système, la condition $\frac{\omega_b}{\omega_c} \gg 1$ doit être satisfaite. Néanmoins, cela va en

contradiction avec le principe de la modulation en fréquence [4],[13]. Car dans la modulation d'un signal information (à moduler) de fréquence f_b ($\omega_b=2\pi f_b$), le signal modulant de fréquence f_c est un signal HF par rapport au signal information. C'est à dire que le signal information est déplacé aux hautes fréquences et est porté par la fréquence f_c . D'où avoir $\omega_c \ll \omega_b$ n'a aucun sens du point de vue modulation.

Par conséquent, le terme $\frac{\omega_b \tau}{2\omega_c T}$ dans (2.20) peut être négligé. Et de ce fait

l'équation (2.18) sera réduite à :

$$s(\omega_b, t - \tau) = \exp\left(-j\omega_c \tau \left(1 + \frac{\omega_b}{\omega_c T} \left(t - \frac{T}{2}\right)\right)\right) s(\omega_b, t) \quad (2.21)$$

On remarque que pour le cas des signaux à bande étroite, le modèle du signal reçu est aussi une approximation de l'équation (2.18), la réduisant à la simple expression d'un décalage de phase :

$$s(\omega_b, t - \tau) = \exp(-j\omega_c \tau) s(\omega_b, t) \quad (2.22)$$

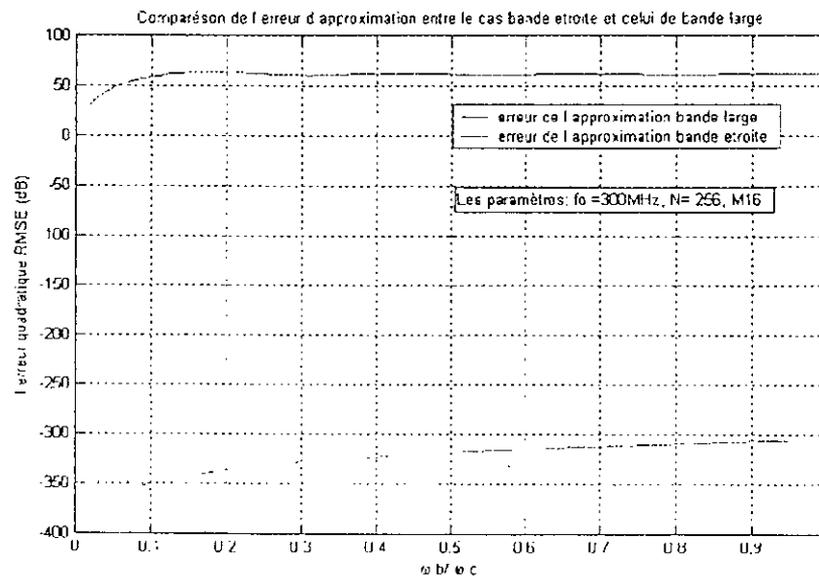


Figure 2.4
Comparaison d'erreur entre l'approximation bande étroite et bande large.

Il est intéressant de voir, à titre de comparaison, l'erreur introduite par l'approximation faite dans notre cas, l'équation (2.21), et celle faite dans le cas des signaux à bande étroite ; l'équation (2.22).

On observe bien, dans la Figure 2.4 que notre approximation est totalement justifiée en constatant la faible erreur qu'elle introduit dans les deux secteurs : bande étroite ($\frac{\omega_b}{\omega_c} < 0.1$), par exemple l'erreur introduite pour $\frac{\omega_b}{\omega_c} = 10^{-7}$:

- Le modèle bande étroite : RMSE = $5.033 \cdot 10^{-6}$.
- L'approximation de notre modèle : RMSE = $9.116 \cdot 10^{-22}$.

et le reste des fréquences ($0.1 < \frac{\omega_b}{\omega_c} < 1$). Ainsi, il est clair que l'approximation que nous employons [4] est nettement plus précise que celle du cas des signaux à bande étroite.

2.2.2 Modèle pour un système à multicanaux à trajets uniques.

A présent, on considère que P chirps signaux arrivent sur le réseau d'antenne ULA de M éléments Figure 2.5. Ces derniers sont paramétrés par une DOA θ_p , un TDOA τ_p , une amplitude réelle β_p , et une bande passante ω_p , avec $p=1, \dots, P$. En omettant tout bruit, le signal en bande de base reçu $x_m(t)$ sur un élément m de l'antenne est la somme de tous les signaux chirps $s'(\omega_{b_i}, t)$ arrivés sur cet élément :

$$x_m(t) = \sum_{p=1}^P \beta_p s'(\omega_{b_p}, t) \quad (2.23)$$

où $s'(\omega_{b_i}, t)$ est la version décalée temporellement du signal transmis $s(\omega_{b_i}, t)$, avec un décalage temporel τ_m . suivant l'équation (2.21), son expression est donnée par :

$$\begin{aligned} s'(\omega_{b_i}, t) &= s(\omega_{b_i}, t - \tau_m) \\ &= \exp\left(-j\omega_c \tau_m \left(1 + \frac{\omega_{b_i}}{\omega_c T} \left(t - \frac{T}{2}\right)\right)\right) s(\omega_{b_i}, t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

A partir de (2.19) nous avons :

$$\tau_m \omega_c = \pi m \sin(\theta) \quad (2.25)$$

en remplaçant (2.25) dans (2.24), on a :

$$s'(\omega_{b_i}, t) = \exp\left(-j\pi m \sin(\theta) \left(1 + \frac{\omega_b}{\omega_c T} \left(t - \frac{T}{2}\right)\right)\right) s(\omega_{b_i}, t) \quad (2.26)$$

d'où

$$x_m(t) = \sum_{p=1}^P \alpha_m(\theta_p, \omega_{b_p}, t) \beta_p s(\omega_{b_p}, t) \quad (2.27)$$

avec

$$\alpha(\theta_p, \omega_{b_p}, t) = \exp(-j m \omega_0(\omega_{b_p}, t)) \quad (2.28)$$

$$\omega_{0p} = \pi \sin(\theta_p) \left(1 + \frac{\omega_{b_p}}{\omega_c T} \left(t - \frac{T}{2}\right)\right) \quad (2.29)$$

Ainsi, le signal reçu $\mathbf{x}(t)$ est un vecteur de dimension M exprimé par :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{p=1}^P \mathbf{a}(\theta_p, \omega_{b_p}, t) \beta_p s(\omega_{b_p}, t) \quad (2.30)$$

où $\mathbf{a}(\theta_p, \omega_{b_p}, t)$ est le vecteur de dimensions M de la réponse de l'antenne à la $p^{\text{ème}}$ porteuse. Il est défini conformément à [4] [13] par :

$$\mathbf{a}(\theta_p, \omega_{b_p}, t) = \left[1, \exp(-j\omega_0(\omega_{b_p}, t)), \dots, \exp(-j(M-1)\omega_0(\omega_{b_p}, t))\right]^T \quad (2.31)$$

A partir de l'équation (2.31) et sachant que le vecteur de réponse de l'antenne pour le modèle des signaux à bande étroite est de la forme :

$$a(\theta_p) = [1, \exp(-j\omega_{b,p}), \dots, \exp(-j(M-1)\omega_{b,p})]^T \quad (2.32)$$

avec

$$\omega_{b,p} = \pi \sin(\theta_p) \quad (2.33)$$

On peut assimiler l'effet large bande comme étant l'étalement de la direction d'arrivée appliqué au vecteur de réponse de l'antenne pour le modèle des signaux à bande étroite, à l'équation (2.29).

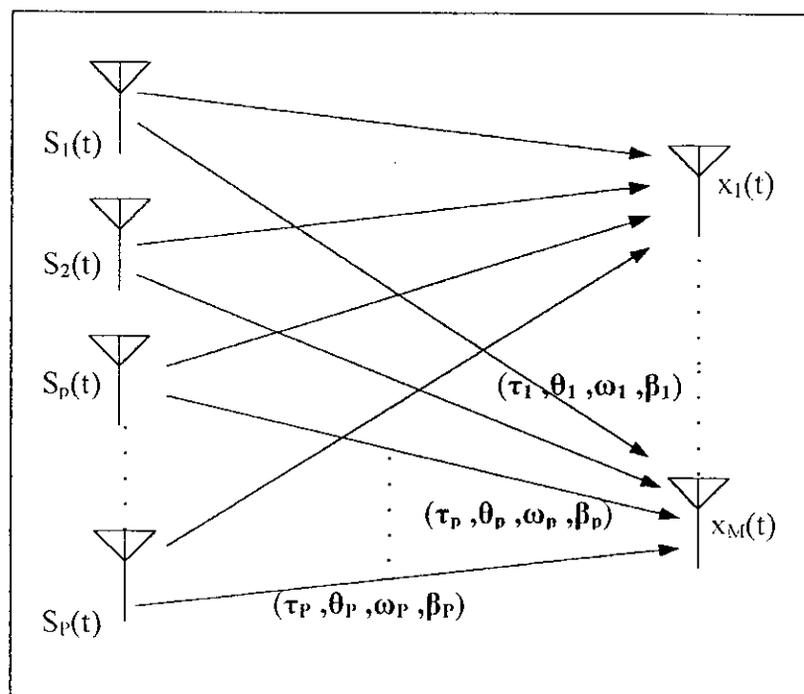


Figure 2.5
Schéma d'un canal de transmission sans fil multicanaux à trajets uniques.

En d'autres termes, c'est une variation de la direction d'arrivée à travers le temps [4], [13]. Ainsi, on peut écrire $\theta(t) = \theta + \delta\theta(t)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
 \pi \sin(\theta(t)) &= \pi \sin(\theta + \delta\theta(t)) \\
 &= \pi \sin(\theta) \cos(\delta\theta(t)) + \pi \cos(\theta) \sin(\delta\theta(t)) \\
 &\approx \pi \sin(\theta) + \pi \cos(\theta) \delta\theta(t) \\
 &= \pi \sin(\theta) \left(1 + \frac{\delta\theta(t)}{\tan(\theta)} \right) \tag{2.34}
 \end{aligned}$$

Sachant (2.33), et en identifiant entre (2.34) et (2.29), on a :

$$\delta\theta(t) = \tan(\theta) \frac{\omega_b}{\omega_c T} \left(t - \frac{T}{2} \right) \tag{2.35}$$

C'est l'étalement spatial du canal (voir § 2.3.1.).

De l'équation (2.30), le modèle général ; sous forme vectorielle, du signal au niveau d'un ULA pour P chirps signaux ; est donné par :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) \text{diag}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{s}(\boldsymbol{\omega}_b, t) \tag{2.36}$$

où

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\omega}_b, t) = \left[\exp\left(j \frac{\omega_{b1}}{2T} \left(t - \frac{T}{2} \right)^2 \right), \dots, \exp\left(j \frac{\omega_{bp}}{2T} \left(t - \frac{T}{2} \right)^2 \right) \right]^T \tag{2.37}$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) = [\mathbf{a}(\theta_1, \omega_{b1}, t), \dots, \mathbf{a}(\theta_p, \omega_{bp}, t)] \tag{2.38}$$

et $\text{diag}(\boldsymbol{\beta})$ est une matrice diagonale dont les éléments sont ceux du vecteur $\boldsymbol{\beta}$. Avec :

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_P]^T \quad (2.39)$$

$$\boldsymbol{\omega}_b = [\omega_{b1}, \dots, \omega_{bP}]^T \quad (2.40)$$

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \dots, \beta_P]^T \quad (2.41)$$

2.3. Stationnarité des paramètres spatiaux.

2.3.1. Rappel sur le canal de transmission exogène [14].

La transmission dans un environnement sans fils affecte les signaux émis. Et la conséquence de cette propagation se traduit par un étalement du signal émis en trois dimensions : le décalage spatial, temporel et fréquentiel.

L'étalement tridimensionnel est le résultat de la mobilité de l'émetteur, et / ou du récepteur, ainsi que les réflecteurs locaux qui se situent au voisinage du récepteur.

Comme on l'a vu au point précédent, le décalage spatial réfère à l'étalement des angles d'arrivée sur les éléments de l'antenne réceptrice. Il est caractérisé par la distance de cohérence au dessus de laquelle apparaissent des atténuations à sélectivité spatiale, i.e. si deux éléments de l'antenne réceptrice sont séparés par une distance supérieure à la distance de cohérence, les deux angles d'arrivée sont atténués différemment. Réciproquement, si deux éléments de l'antenne réceptrice sont séparés par une distance inférieure à la distance de cohérence, les deux angles d'arrivée sont atténués d'une manière identique.

Le décalage temporel, quant à lui, est le résultat de l'arrivée de plusieurs versions décalées et pondérées du signal transmis sur le récepteur.

Le décalage fréquentiel est aussi le résultat des mêmes causes que l'atténuation temporelle. Il est caractérisé entre autre par la bande de fréquence de cohérence. Il en résulte que, si la largeur de bande de fréquence du signal émis est supérieure à la largeur

de bande de cohérence fréquentielle, des atténuations sélectives apparaissent, comme pour le cas spatial en affectant les fréquences au lieu des distances.

Pour avoir une vue globale sur la variation de la réponse fréquentielle du canal dans le temps, il existe l'intervalle de temps de cohérence noté T_{coh} correspondant à l'intervalle de temps sur lequel le canal est considéré comme relativement constant. Au-delà de cet intervalle apparaissent les atténuations sélectives où les paramètres deviennent des variables dans le temps.

2.3.2. Modèle du canal sur l'intervalle de cohérence.

A noter que l'hypothèse de signaux large bande, introduit un étalement spatial de la direction d'arrivée (i.e. **une non stationnarité**). Cependant, un aspect important de l'estimation dans un environnement sans fils pour les signaux chirps, qui a suscité jusqu'à aujourd'hui peu d'intérêt est justement la stationnarité. En effet, les paramètres de propagation des signaux transmis (la direction d'arrivée et le retard d'arrivée) sont relativement stationnaires [15], en contre partie l'amplitude et la phase relative sont extrêmement variables dans le temps (non stationnaires) et sujettes à des atténuations (suivant une loi de probabilité de Rayleigh). D'une manière générale, la stationnarité des paramètres de propagation dépend du temps de cohérence du canal [15].

En pratique, cette propriété est observée entre autres dans des systèmes Radars à impulsions opérant dans la bande X (de 8.5 à 9.6 GHz) avec une modulation fréquentielle d'ondes continues (FMCW).

Par exemple, dans le cas d'un détecteur fonctionnant avec une fréquence centrale de $f_c=9\text{GHz}$, et une cible volant à une vitesse $v = 900 \text{ km/h}$, le temps de cohérence T_{coh} est de l'ordre de:

$$T_{coh} = \frac{c}{v f_c} = 0.13 \text{ ms} \quad (2.42)$$

où c est la vitesse de la lumière.

Certains systèmes, travaillent à un Intervalle de Répétition de Pulsations (Pulse Repetition Interval) PRI égal à 8000 pulsations par seconde, chacune de longueur de $1 \mu s$, i.e. une largeur de fenêtre de l'ordre de $0.125 ms$, à travers laquelle les paramètres sont considérés constants (stationnaires). Ajouter à cela, qu'au-delà de 100 PRI, la position angulaire de la cible varie de moins de 0.1° , quant cette dernière vole à 3 Kms du sol [2],[3]. D'autres exemples en communications sont disponibles dans [15].

Ces observations nous suggèrent qu'à partir d'un nombre d'intervalles de largeur égale au temps de cohérence, l'angle d'arrivée peut être considéré stationnaire et l'étalement spatial négligeable. Tout en sachant que l'amplitude complexe change d'un intervalle à un autre.

Par conséquent, en réduisant l'intervalle d'observation égal au temps de cohérence, i.e. $\delta\theta(t) \rightarrow 0$ dans (2.34), le vecteur de réponse de l'antenne devient similaire à celui du modèle bande étroite, i.e. égal à l'équation (2.32) :

$$\mathbf{a}(\theta_p) = [1, \exp(-j\omega_{b,p}), \dots, \exp(-j(M-1)\omega_{b,p})]^T \quad p=1, \dots, P.$$

avec

$$\omega_{\theta_p} = \pi \sin(\theta_p)$$

Ainsi, le modèle du signal reçu (2.36) peut être réécrit comme suit :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \text{diag}(\boldsymbol{\beta}) s(\omega_b, t) \quad (2.43)$$

Où, indépendamment du temps et de la bande passante du signal, on a :

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_p)] \quad (2.44)$$

En considérant N échantillons sur l'intervalle de cohérence, i.e. $T_{coh} = NT_s$, et en normalisant la période d'échantillonnage T_s à 1, l'expression du signal reçu devient :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \text{diag}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_b) \quad (2.45)$$

avec

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(N)] \quad (2.46)$$

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_b) = [s(\boldsymbol{\omega}_b, 1), \dots, s(\boldsymbol{\omega}_b, N)] \quad (2.47)$$

et

$$s(\boldsymbol{\omega}_b, n) = \begin{bmatrix} s(\omega_{b1}, n) \\ \vdots \\ s(\omega_{bP}, n) \end{bmatrix} \quad n=1, \dots, N. \quad (2.48)$$

2.4. Transformation du modèle général.

Dans ce qui suit, considérons la propriété de l'opérateur $\text{vec}(\cdot)$:

$$\text{vec}\{\mathbf{A} \text{diag}(\mathbf{b}) \mathbf{C}\} = (\mathbf{C}^T \circ \mathbf{A}) \mathbf{b} \quad (2.49)$$

où \circ représente le produit de *Khatri-Rao*, i.e. un produit de *Kronecker* inter-colonne :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1P} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \dots & a_{MP} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1P} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & \dots & b_{NP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \dots & a_{1P}b_{1P} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{11}b_{N1} & \dots & a_{1P}b_{NP} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{M1}b_{11} & \dots & a_{MP}b_{1P} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{M1}b_{N1} & \dots & a_{MP}b_{NP} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Appliquant l'opérateur $\text{vec}(\cdot)$ et sa propriété présentée en (2.49) sur l'équation (2.45), nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \text{vec}\{\mathbf{X}\} &= [\mathbf{S}^T(\boldsymbol{\omega}_b) \circ \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})] \boldsymbol{\beta} \\ &= \begin{bmatrix} s(\omega_{b1}, 1) \alpha_1(\theta_1) & \cdots & s(\omega_{bP}, 1) \alpha_1(\theta_P) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ s(\omega_{b1}, N) \alpha_M(\theta_1) & \cdots & s(\omega_{bP}, N) \alpha_M(\theta_P) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ s(\omega_{b1}, 1) \alpha_1(\theta_1) & \cdots & s(\omega_{bP}, 1) \alpha_1(\theta_P) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ s(\omega_{b1}, N) \alpha_M(\theta_1) & \cdots & s(\omega_{bP}, N) \alpha_M(\theta_P) \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ &= \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b) \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Nous constatons que dans (2.51), la matrice $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b)$ de taille $(MN \times P)$ dépend des directions d'arrivées et des bandes passantes des signaux chirps.

A ce niveau là, on suppose que l'on collecte un même nombre d'échantillons de données sur L intervalles de largeur égale au temps de cohérence, et la bande passante étant commune sur ces derniers. Comme mentionné plus haut, les DOA θ sont stationnaires et les amplitudes complexes varient d'un intervalle à un autre, i.e. on a β_l , avec $l = 1, \dots, L$.

Appliquant (2.49) et concaténant les colonnes d'une manière claire, nous obtenons la matrice de données \mathbf{Y} de dimension $(MN \times L)$:

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_L] \quad (2.52)$$

$$= \mathbf{U}(\theta, \omega_b) [\beta_1, \dots, \beta_L] \quad (2.53)$$

$$= \mathbf{U}(\theta, \omega_b) \mathbf{B} \quad (2.54)$$

Enfin, en incluant le bruit d'estimation \mathfrak{N} , qui est défini de manière appropriée suivant la dimension de \mathbf{Y} [15], le modèle devient :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}(\theta, \omega_b) \mathbf{B} + \mathfrak{N} \quad (2.55)$$

Ce modèle est associé à l'estimation conjointe des paramètres de propagations et des paramètres des signaux chirps. On le dénote modèle **JC** (Joint Chirp parameter estimation).

3

Estimation des paramètres de propagation

3.1 Généralités sur l'estimation des paramètres de propagation.

Pour l'estimation des paramètres de propagation des systèmes de transmission sans fil, nous disposons d'une panoplie d'outils et de techniques développés par les chercheurs du traitement de signal.

D'une manière générale, on distingue deux approches principales :

- Une identification avec apprentissage.
- Une approche dite « aveugle ».

La première méthode consiste à utiliser des séquences émises connues. Au niveau de la réception, les signaux reçus sont traités sachant l'information au départ. Ainsi, on utilise des séquences d'apprentissages. Sur le terrain des situations similaires à ces conditions sont typiques comme les systèmes d'exploration géophysique [14].

On distingue particulièrement une méthode dans cette catégorie d'estimation, à savoir la méthode des Moindres Carrés (Least Squares) LS.

Contrairement à la 1^{ère} méthode, le principe de l'estimation aveugle ne se base pas sur la connaissance du signal émis. Cela est intéressant pour des systèmes où le signal émis est sans intérêt ou encombrant comme on peut le voir dans les problèmes d'égalisation.

Parmi les méthodes les plus utilisées; existe la méthode ML et celle de la Séparation en Sous-espaces (Subspace Séparation) SS (voir Annexe A).

3.2. Estimateur à Maximum de Vraisemblance.

Dans notre travail, nous soulignons à travers l'équation (2.55) un modèle où les signaux à phase polynomiales en général, et chirp en particulier, sont reçus par un réseau ULA.

A partir d'un modèle similaire, Gershman Pesavento et Amin [5] proposent un estimateur ML des paramètres en question, à savoir les angles d'arrivée θ et les largeurs de bandes passantes ω_b .

La fonction de vraisemblance se base sur l'hypothèse que les amplitudes des signaux reçus sont déterministes mais inconnues. Ainsi la fonction Logarithmique de Vraisemblance (Loglikelihood) LL est donnée par [5] :

$$\ell(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{t=0}^{N-1} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}(\theta, \omega_b, t) \text{diag}(s(\omega_b, t)) \boldsymbol{\beta}\|^2 \quad (3.1)$$

où le vecteur des paramètres inconnus de la fonction LL est donné par

$$\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\theta}^T, \boldsymbol{\omega}_b^T, \boldsymbol{\beta}^T]^T \quad (3.2)$$

A noter que dans la fonction (3.1), le modèle donné par l'équation (2.51) a été utilisé, après usage de la commutativité dans le produit entre les éléments $\boldsymbol{\beta}$ et les signaux à l'instant t $s(\omega_b, t)$.

En exploitant les propriétés de l'algèbre matricielle, il est facile de vérifier que l'équation (3.1) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned}
\ell(\boldsymbol{\eta}) = & \boldsymbol{\beta}^H \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} \text{diag}(s^H(\boldsymbol{\omega}_b, t)) \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) \text{diag}(s(\boldsymbol{\omega}_b, t)) \right\} \boldsymbol{\beta} \\
& - \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{x}^H(t) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) \text{diag}(s(\boldsymbol{\omega}_b, t)) \right\} \boldsymbol{\beta} \\
& - \boldsymbol{\beta}^H \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} \text{diag}(s^H(\boldsymbol{\omega}_b, t)) \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) \mathbf{x}(t) \right\} \\
& + \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{x}^H(t) \mathbf{x}(t) \tag{3.3}
\end{aligned}$$

En gardant les autres paramètres fixes, la minimisation de la fonction (3.3) par rapport au paramètre $\boldsymbol{\beta}$ résulte en :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta} = & \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} \text{diag}(s^H(\boldsymbol{\omega}_b, t)) \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) \text{diag}(s(\boldsymbol{\omega}_b, t)) \right\}^{-1} \times \\
& \times \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} \text{diag}(s^H(\boldsymbol{\omega}_b, t)) \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) \mathbf{x}(t) \right\} \tag{3.4}
\end{aligned}$$

En remplaçant l'équation (3.4) dans (3.3), on obtient la fonction LL négative concentrée suivante :

$$\begin{aligned}
\ell(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b) = & \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{x}^H(t) \mathbf{x}(t) - \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{x}^H(t) \text{diag}(s(\boldsymbol{\omega}_b, t)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) \right\} \times \\
& \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} \text{diag}(s^H(\boldsymbol{\omega}_b, t)) \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) \text{diag}(s(\boldsymbol{\omega}_b, t)) \right\}^{-1} \times \\
& \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} \text{diag}(s^H(\boldsymbol{\omega}_b, t)) \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) \mathbf{x}(t) \right\} \tag{3.5}
\end{aligned}$$

En omettant les termes constants, la fonction LL positive devient :

$$\begin{aligned} \ell(\theta, \omega_b) = & \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{x}^H(t) \mathbf{A}(\theta, \omega_b, t) \text{diag}(s(\omega_b, t)) \right\} \times \\ & \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} \text{diag}(s^H(\omega_b, t)) \mathbf{A}^H(\theta, \omega_b, t) \mathbf{A}(\theta, \omega_b, t) \text{diag}(s(\omega_b, t)) \right\}^{-1} \times \\ & \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} \text{diag}(s^H(\omega_b, t)) \mathbf{A}^H(\theta, \omega_b, t) \mathbf{x}(t) \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Enfin, l'obtention des paramètres inconnus se fait par la maximisation de la fonction (3.6) par rapport aux variables θ et ω_b , i.e. :

$$\left[\tilde{\theta}, \tilde{\omega}_b \right] = \arg \max_{(\theta, \omega_b)} \ell(\theta, \omega_b) \quad (3.7)$$

En examinant la fonction (3.6), il est clair que l'estimation conjointe des paramètres θ et ω_b nécessite une optimisation hautement non linéaire [5]. Cependant, si l'optimisation est convenablement initialisée, elle peut être implémentée par un nombre d'optimisations localisées simples.

3.3. Chirp Beamformer.

Dans le cas général, l'implémentation de la fonction de vraisemblance (3.6) et son optimisation impliquent une recherche hautement non linéaire [5]. De ce fait, le coût en terme de calcul peut s'avérer prohibitif.

Dans le cas particulier des signaux chirp, la fonction (3.6) peut être simplifiée afin d'en déduire une fonction similaire au Beamformer classique [16]. Cette fonction comme on le verra dans ce qui suit, ne nécessite qu'une recherche 2-D plus simple, au lieu d'une optimisation globale [5].

Pour dériver cette fonction, on se limite par simplicité au cas d'un signal unique, ce qui a pour effet de réduire la matrice $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t)$ au seul vecteur $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t)$. Donc, la fonction de vraisemblance (3.6) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b) &= \boldsymbol{\beta}^H \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{s}^*(\boldsymbol{\omega}_b, t) \mathbf{a}^H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) \mathbf{s}(\boldsymbol{\omega}_b, t) \right\}^{-1} \times \\ &\times \left| \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{x}^H(t) \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) \mathbf{s}(\boldsymbol{\omega}_b, t) \right|^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\ell(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b) = \frac{1}{NM} \left| \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{x}^H(t) \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) \mathbf{s}(\boldsymbol{\omega}_b, t) \right|^2 \quad (3.9)$$

Où, pour le cas particulier d'un ULA, on a exploité le fait que : $\mathbf{a}^H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) = M$.
Dénote la conjugaison complexe.

En omettant le facteur constant $1/M$, la fonction de vraisemblance (3.9) peut être aisément transformée en :

$$f(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b) = \frac{1}{N} \left| \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{x}^H(t) \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b, t) \right|^2 \quad (3.10)$$

La fonction (3.10) est appelée Chirp Beamformer [5].

Les paramètres inconnus θ_p Et ω_p , pour $p=1, \dots, P$, sont les couples (θ_p, ω_p) qui aboutissent vers les maxima locaux de la fonction (3.10) et l'optimisation est de ce fait réduite à une recherche linéaire 2-D.

$$[\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_b] = \arg \max_{(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b)} f(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b) \quad (3.11)$$

3.4. Algorithme d'estimation JC-MUSIC.

Le principal inconvénient des estimateurs précédents, qui se basent sur le modèle PPS [5], est dû à la négligence de la stationnarité des paramètres à estimer, donc réduisant le nombre de signaux chirps identifiables à la limite du nombre de capteurs de l'ULA.

La méthode que nous décrivons ici, JC-MUSIC, en référence à l'application de MUSIC à notre modèle JC, permet de dépasser cette limite, grâce à l'incorporation d'un nombre d'intervalles de cohérence. Cette méthode se base sur la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance des données, ou en d'autres termes, s'inspire de la décomposition en sous espace pour réaliser l'estimation [17].

Dans ce qui suit, nous considérons que le bruit additif \mathfrak{N} défini dans (2.55) est blanc, indépendant et identiquement distribué dans le temps:

$$E\{\mathbf{n}_t \mathbf{n}_t^H\} = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (3.12)$$

où

- \mathbf{n}_t sont les colonnes de la matrice du bruit \mathfrak{N} .
- $E(\cdot)$ est l'espérance mathématique.
- $(\cdot)^H$ est la transposition Hermitienne.
- σ^2 est la puissance du bruit.
- \mathbf{I} est la matrice identité dont les dimensions sont définies d'une manière appropriée.

Dans ces conditions la matrice de covariance \mathbf{R} de la matrice de données \mathbf{Y} définies en (2.55) est de la forme :

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t^H\} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}, \omega_b) \mathbf{R}_\beta \mathbf{U}^H(\boldsymbol{\theta}, \omega_b) + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (3.13)$$

où \mathbf{R}_β est la matrice de covariance des vecteurs des amplitudes réelles inconnues, i.e:

$$\mathbf{R}_\beta = E\{\boldsymbol{\beta}_t \boldsymbol{\beta}_t^H\}. \quad (3.14)$$

En pratique la matrice de covariance \mathbf{R} est inconnue, mais on peut l'approximer par son expression asymptotique, i.e. la matrice de covariance échantillonnée $\hat{\mathbf{R}}$ définie par :

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{y}_l \mathbf{y}_l^H \quad (3.15)$$

Sous les conditions que $MN > P$ et $L > P$ (i.e. la matrice $\hat{\mathbf{R}}$ est de rang entier), et sachant que le bruit est de moyenne nulle et de variance σ^2 , la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}$ est donnée par :

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{E}^H \quad (3.16)$$

avec :

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{MN}\} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{MN}] \quad (3.18)$$

Où $\lambda_1, \dots, \lambda_{MN}$ sont les valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$, et $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{MN}$ leurs vecteurs propres respectifs.

A partir de (3.13), comme le rang de $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b) \mathbf{R}_p \mathbf{U}^H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_b)$ est de P , il est évident que :

$$\lambda_1 > \dots > \lambda_p > \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_{MN} = \sigma^2 \quad (3.19)$$

Les valeurs propres $\lambda_m, m = 1, \dots, P$ sont les valeurs propres correspondant au sous-espace signal et associées aux vecteurs propres $\mathbf{e}_m, m = 1, \dots, P$. Les valeurs propres restantes $\lambda_m, m = P + 1, \dots, MN$ sont égales à σ^2 et correspondent au sous-espace bruit.

Soit \mathbf{V} et \mathbf{W} les matrices dont les colonnes sont constituées des vecteurs propres des sous-espaces signal et bruit respectivement :

$$\mathbf{V} = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p] \quad (3.20)$$

$$\mathbf{W} = [\mathbf{e}_p, \dots, \mathbf{e}_{MN}] \quad (3.21)$$

Les colonnes de ces matrices étant orthonormées, elles vérifient la relation suivante :

$$\mathbf{V} \mathbf{V}^* + \mathbf{W} \mathbf{W}^* = \mathbf{I} \quad (3.22)$$

On observe facilement que

$$\hat{\mathbf{R}} \mathbf{W} = \sigma^2 \mathbf{W} \quad (3.23)$$

D'où, on constate que la matrice \mathbf{W} est orthogonale aux vecteurs de directions $\mathbf{u}(\theta_p, \omega_{b_p})$, $p = 1, \dots, P$, et on peut l'exprimer par :

$$\mathbf{u}^H(\theta_p, \omega_{b_p}) \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{u}(\theta_p, \omega_{b_p}) \gg 0 \quad (3.24)$$

A noter que le vecteur de direction $\mathbf{u}(\theta_p, \omega_{b_p})$, $p = 1, \dots, P$, est défini comme étant la $p^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_n)$ définie en (2.48) et ayant la structure suivante

$$\mathbf{u}(\theta_p, \omega_{b_p}) = \begin{bmatrix} s(\omega_{b_p}, 1) \\ \vdots \\ s(\omega_{b_p}, N) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{a}(\theta_p) \quad (3.25)$$

où \otimes représente le produit de *Kronecker*.

A partir de l'équation (3.24), on définit la fonction coût de l'algorithme JC-MUSIC $S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega})$:

$$S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\mathbf{u}^H(\theta_p, \omega_{b_p}) \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{u}(\theta_p, \omega_{b_p})} \quad (3.26)$$

L'algorithme JC-MUSIC consiste à évaluer cette fonction coût pour différentes valeurs de θ et ω sur un intervalle prédéfini, en gardant les P valeurs qui la maximisent, ou qui minimisent l'équation 3.24.

Ces valeurs sont les racines du dénominateur. Les estimées définitives sont donc définies par :

$$(\hat{\theta}, \hat{\omega}) = \arg \max_{(\theta, \omega)} S(\theta, \omega) \quad (3.27)$$

A partir des conditions précédentes $MN > P$ et $L > P$ pour obtenir une décomposition en valeurs propres, notre algorithme possède une propriété importante : la possibilité d'estimer un nombre de signaux reçus supérieur à celui des capteurs dans le réseau.

Finalement notre estimateur de paramètres de propagation et des paramètres des signaux chirps JC-MUSIC peut être résumé comme suit:

- Pour chaque intervalle de cohérences T_{coh} d'indice l , avec $l = 1, \dots, L$, on collecte N échantillons $x_l(n)$ $n = 1, \dots, N$.
- On applique l'opérateur $vec(\cdot)$ sur les L matrices de données collectées \mathbf{X}_l de dimension MN et on construit la matrice de données \mathbf{Y} en utilisant les équation (2.51) et (2.55).
- On évalue la matrice de covariance échantillonnée $\hat{\mathbf{R}}$ de la matrice des données \mathbf{Y} en utilisant l'équation (3.15).
- On réalise une décomposition en valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$ suivant (3.16) et on construit \mathbf{W} la matrice des vecteurs propres correspondants aux $MN-P$ plus petites valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$.
- En utilisant (3.26), on évalue la fonction coût de 2D-MUSIC $S(\theta, \omega)$ pour un intervalle de valeurs de θ et ω et on détermine les paires $(\hat{\theta}, \hat{\omega})$ qui maximisent $S(\theta, \omega)$.

4

Simulations

4.1. Introduction.

Après avoir décrit l'algorithme d'estimation JC-MUSIC, dans ce chapitre nous étudions ses performances à travers des simulations. Plus exactement, nous évaluons la Racine de l'Erreur Quadratique Moyenne (**Root Mean Square Error**) RMSE suivant la variation des différents paramètres, en outre le rapport signal sur bruit SNR, le nombre de PRI L et le nombre de capteurs M . Nous déterminons également, sa résolution angulaire et fréquentielle.

A noter que l'erreur quadratique moyenne est moyennée sur 200 réalisations indépendantes de Monte-Carlo.

Comme indice de performance des estimations nous adoptons la Borne de Cramer-Rao (**Cramer-Rao Bound**) CRB. Ainsi, nous utilisons les deux bornes de Cramer-Rao stochastique et déterministe, qui sont définies plus bas, pour une illustration plus détaillée. De plus nous intégrons les bornes de Cramer-Rao stochastique et déterministe du modèle conventionnel des signaux PPS précédemment présenté, afin de comparer les résultats obtenus.

A signaler, que dans toutes les simulations, les valeurs des paramètres sont, sauf indication, par défaut, comme suit : $L=128$ intervalles par seconde, $M=4$ capteurs, SNR=20dB.

La durée du symbole est normalisée à $T_s=1$, et le nombre d'échantillons est égal à $N=32$.

4.2. Borne de Cramer-Rao (CRB) [15][16][18][19].

La borne de Cramer-Rao (Cramer-Rao Band) CRB est une borne inférieure sur la variance de n'importe quel estimateur non biaisé. Elle décrit la dépendance du signal observé aux paramètres à estimer.

Ainsi, si l'on envisage d'estimer un paramètre, il faut que la fonction distribution de probabilité *fdp* dépende de ce paramètre ; sinon l'estimation est compromise. A l'opposé, plus cette dépendance est forte, plus l'estimation est précise.

Généralement, on distingue deux types de CRB : l'une déterministe et l'autre stochastique.

Dans le cas stochastique, on travaille directement avec le signal reçu, perturbé de bruit aléatoire, et on ne pose aucune hypothèse sur la nature probabiliste des symboles constituant le message. De ce fait, les caractéristiques stochastiques des signaux reçus sont globalement décrites par la matrice de covariance des données \mathbf{R} sans distinction de la contribution des symboles ou du bruit. On peut dire que cette borne est moins contraignante car elle incorpore un minimum d'information *a priori*.

Dans le cas déterministe, on considère que les symboles reçus sont inconnus mais déterministes, cependant le signal reçu reste aléatoire car il est la somme de ces symboles avec du bruit, qui est toujours aléatoire. De ce fait, les caractéristiques stochastiques des signaux reçus sont entièrement décrites par la matrice de covariance du bruit uniquement, $\sigma^2 \mathbf{I} = E[(\mathbf{y}_i - \mathbf{U}\beta_i)(\mathbf{y}_i - \mathbf{U}\beta_i)^H]$. Il apparaît clairement donc que la CRB déterministe prend en compte plus d'information *a priori* et est de ce fait plus restrictive que la CRB stochastique (elle se situe souvent en dessous de la CRB stochastique).

Il faut remarquer que l'utilisation des deux bornes simultanément dans les simulations n'est pas contradictoire, car d'une part ce ne sont que des bornes théoriques, et d'autre part ; dans le calcul de la borne stochastique ; les symboles ne sont pas systématiquement aléatoires.

4.3. Visualisation de la fonction de l'estimateur JC-MUSIC.

Dans ce qui suit, nous travaillons dans la bande de fréquence X avec des signaux chirps dont la fréquence centrale $f_c = 9GHz$ ($\omega_c = 2\pi f_c$).

Le nombre de signaux chirps est de $P=3$ ayant pour bandes passantes :

$$\mathbf{f}_b = [10, 25, 40] \text{ MHz}, (\omega_{bi} = 2\pi f_{bi}). \quad (4.1)$$

Et comme angles d'arrivée pour ces signaux nous avons dans l'ordre :

$$\boldsymbol{\theta} = [0^\circ, 13^\circ, 22^\circ] \quad (4.2)$$

Le récepteur est un ULA dont l'espacement entre deux éléments consécutifs est égal à la demi-longueur d'onde spécifique à f_c .

Les paramètres ont leur valeur par défaut, et le nombre de points des intervalles θ et ω sur lesquels est évaluée la fonction est fixé à 100 chacun.

Les Figures 4.1 et 4.2 représentent dans l'ordre une visualisation graphique en relief (3D) et une vue de haut de l'estimateur JC-MUSIC.

On remarque que ces derniers sont identifiés avec une précision appréciable. Cette précision est directement liée aux valeurs des paramètres de l'estimateur : SNR, L et M .

Afin de bien déterminer le type et le degré de dépendance de la précision de mesure aux paramètres, nous proposons d'étudier séparément l'effet de chaque paramètre. Pour cela nous faisons varier à tour de rôle chaque paramètre en fixant les autres sur leur valeur par défaut.

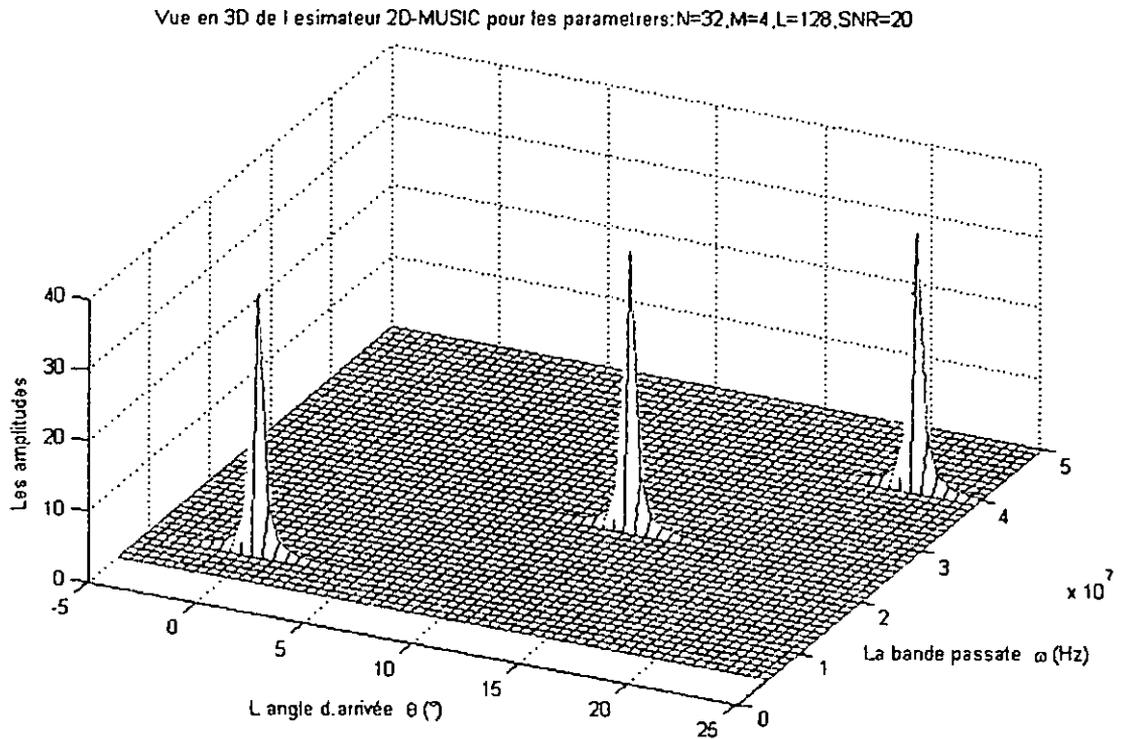


Figure 4.1
Vue en 3D de l'estimateur JC-MUSIC.

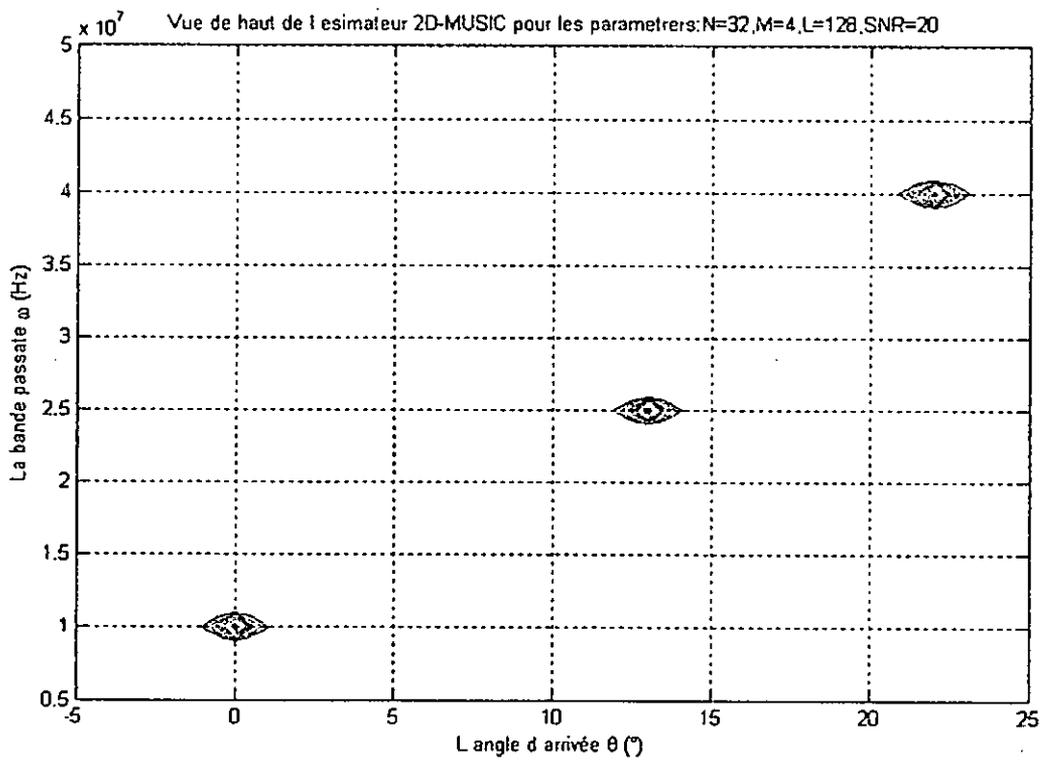


Figure 4.2
Vue de haut de l'estimateur JC-MUSIC

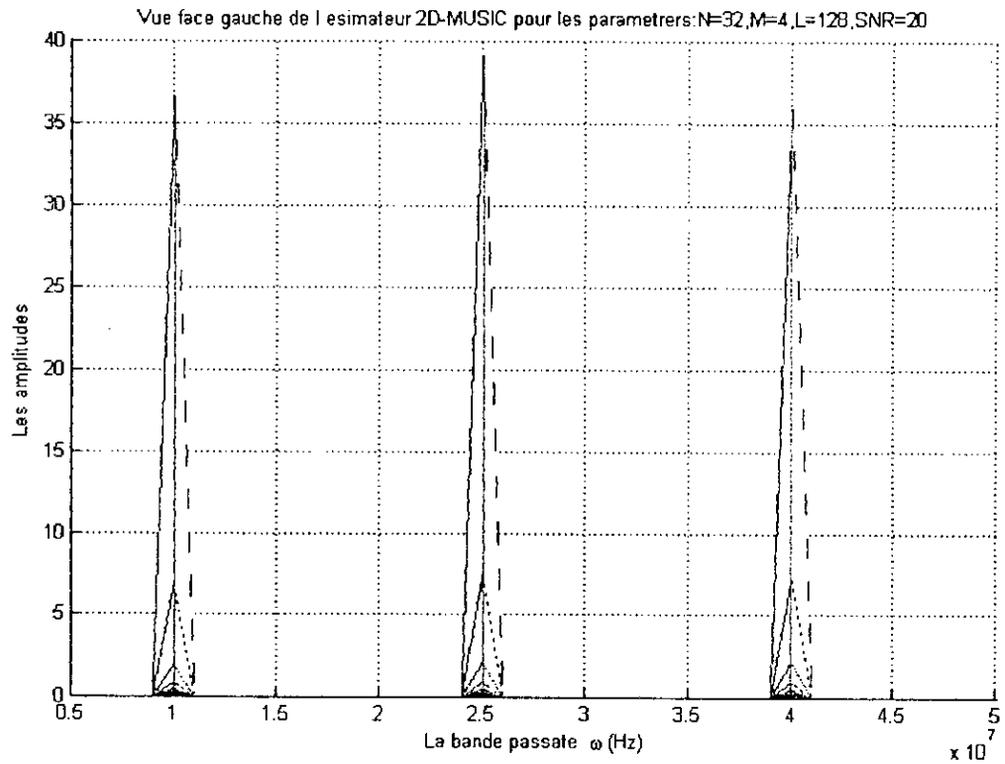


Figure 4.3
Face gauche de l'estimateur JC-MUSIC.

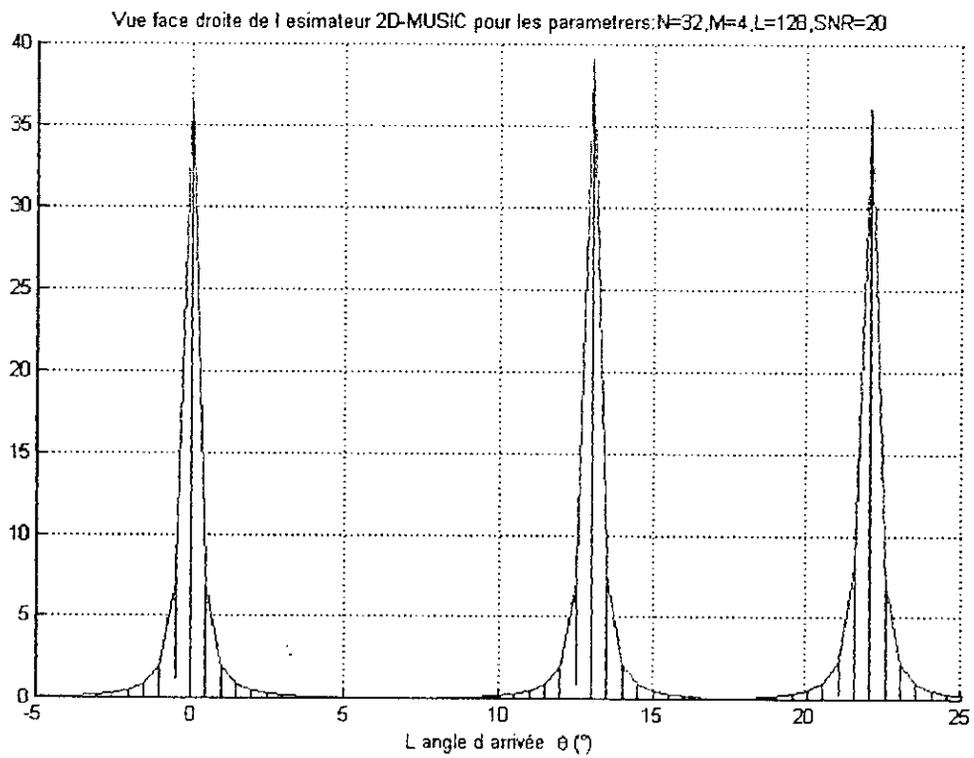


Figure 4.4
Face droite de l'estimateur JC-MUSIC.

4.4. Performances de JC-MUSIC.

On considère toujours que l'on travaille dans la bande de fréquence X avec des signaux chirps dont la fréquence centrale $f_c = 9GHz$. Le récepteur est un ULA dont l'espacement entre deux éléments consécutifs est égal à la demi longueur d'onde spécifique à f_c . Le nombre de signaux chirps est de $P=3$ paramétrés par les vecteurs θ et \mathbf{f}_b précédents.

Afin d'alléger les figures, les résultats présentés ne comportent que les informations spécifiques au premier signal chirp. Les autres chirps ont un comportement similaire.

4.4.1 Effet de la puissance de bruit (SNR).

Tous les paramètres ont leur valeur par défaut sauf le rapport signal sur bruit SNR.

On constate, aux Figures 4.5 et 4.6, que les grandeurs estimées θ et ω sont sensibles à la puissance de bruit mais à des degrés différents.

L'estimation des deux grandeurs est largement en dessous des CRB du modèle conventionnel PPS

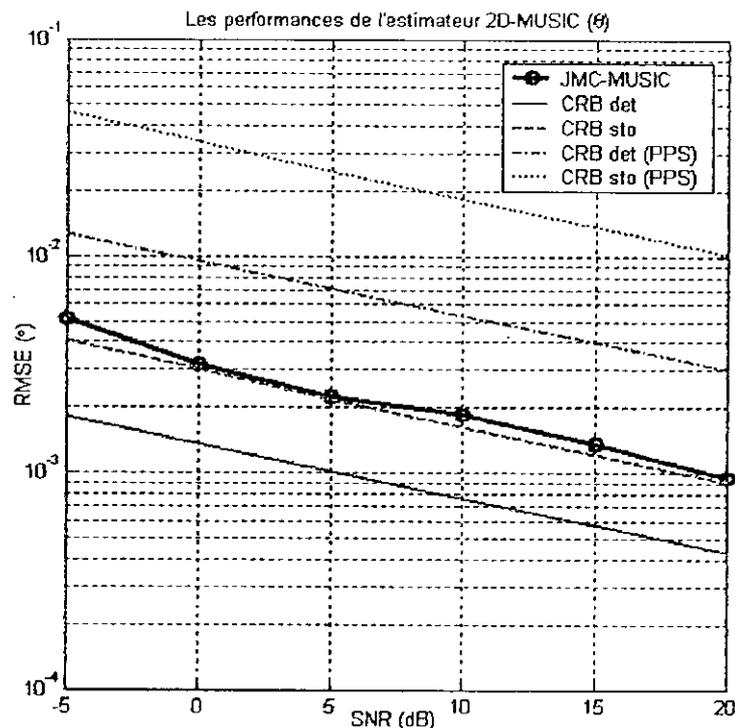


Figure 4.5
Effet du paramètre SNR sur l'estimation de θ .

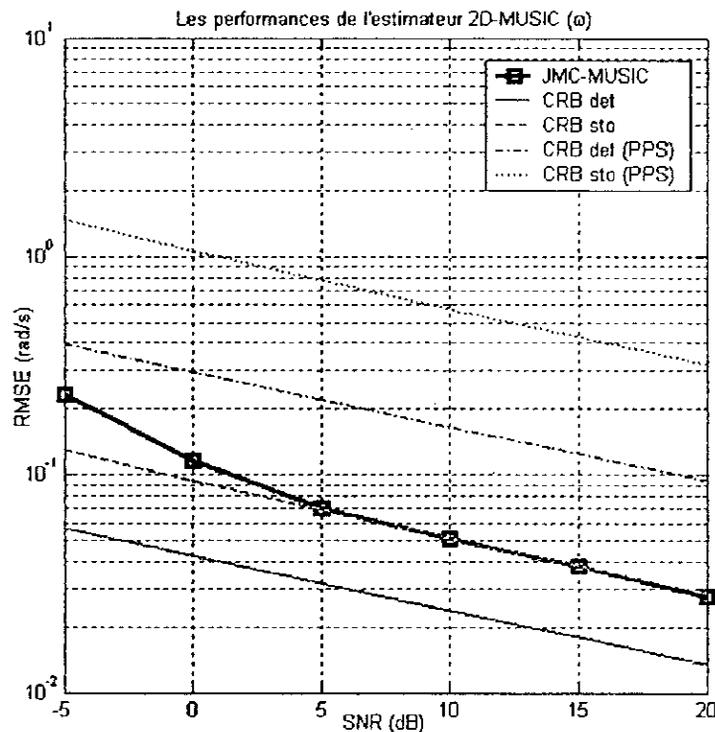


Figure 4.6
Effet du paramètre SNR sur l'estimation de ω .

On observe que l'estimateur JC-MUSIC présente une supériorité dans la précision des estimations de θ et ω par rapport au modèle conventionnel PPS. Cela est principalement expliqué par une quantité d'informations plus importante, due essentiellement au nombre L de PRI pris en compte. En effet, le modèle PPS exclut toute hypothèse de stationnarité des paramètres à estimer et souligne leur dépendance du temps t .

4.4.2 Effet du nombre de PRI (L).

Tous les paramètres ont leur valeur par défaut sauf le nombre de PRI, L qui prend des valeurs variables.

On constate, d'après les Figures 4.7 et 4.8, que les grandeurs estimées θ et ω sont sensibles au nombre de PRI, L , d'une manière similaire aux effets du bruit.

En effet, on constate les mêmes caractéristiques vues pour le paramètre bruit, à savoir une proportionnalité entre la précision d'estimation est la valeur du nombre de PRI

et une supériorité de JC-MUSIC par rapport au modèle PPS dans la précision d'estimation de θ et ω .

A noter que les courbes d'estimation de θ et ω convergent vers la CRB stochastique, mais seulement après une certaine valeur importante de L , au-delà de 150. On constate aussi que l'erreur quadratique moyenne RMSE augmente rapidement pour des valeurs de L faibles, au dessous de 10.

Ainsi, on peut obtenir des niveaux de précision très élevés en augmentant considérablement le nombre de L et on ne peut appliquer JC-MUSIC pour des valeurs de PRI inférieures à 10 au risque d'altérer considérablement les estimations.

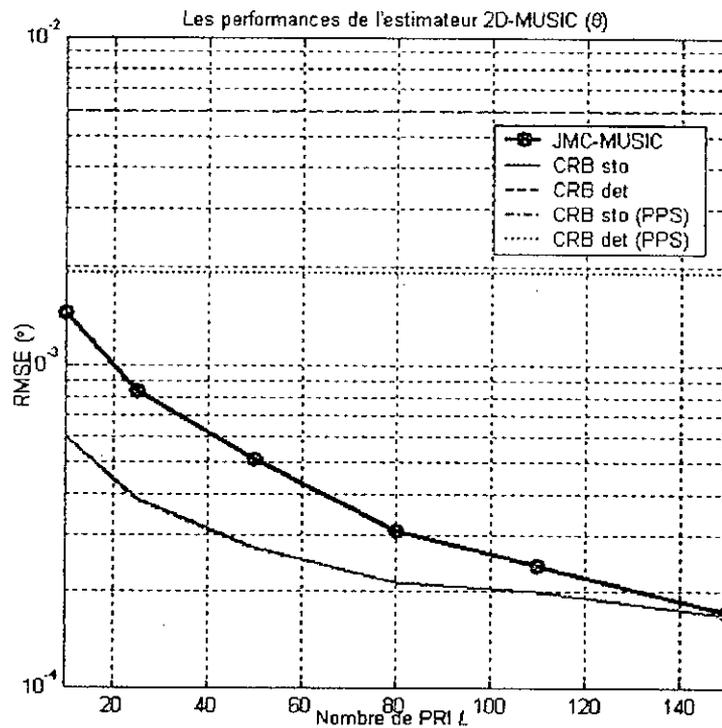


Figure 4.7
Effet du paramètre L sur l'estimation de θ .

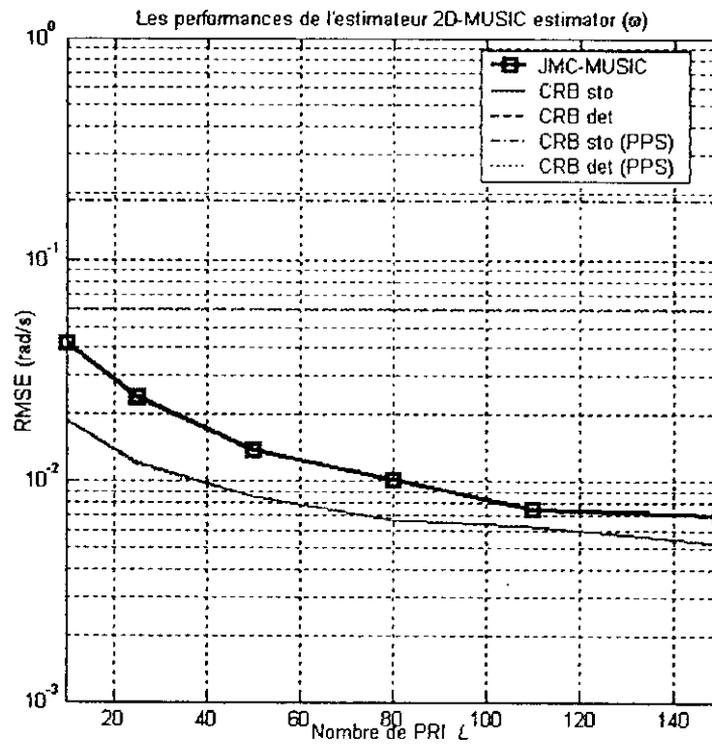


Figure 4.8
Effet du paramètre L sur l'estimation de ω .

4.4.3 Effet du nombre de capteurs à la réception (M).

Tous les paramètres ont leur valeur par défaut sauf le nombre de capteurs à la réception qui est variable.

On constate là aussi, aux Figures 4.9 et 4.10, que les grandeurs estimées θ et ω dépendent du nombre de capteurs à la réception.

D'une manière tout à fait identique aux paramètres précédents, on retrouve les mêmes remarques générales : une meilleure précision de l'estimateur JC-MUSIC par rapport au modèle PPS et une proportionnalité avec le nombre de capteurs M .

4.4.4 Résolution de JC-MUSIC.

Déterminer la résolution de l'estimateur JC-MUSIC consiste à déterminer l'effet de l'espacement entre les angles d'arrivée et celui des largeurs des bandes passantes des signaux reçus.

Pour déterminer la résolution angulaire, on considère le cas d'une antenne de $M=4$ éléments. Le nombre de signaux chirps est fixé à $P=2$; où on pose les bandes passantes égales à $f_b = [10, 40]$ MHz, et l'angle du premier signal, pris comme référence, est fixé à 0° . L'angle du second signal est variable. Tous les autres paramètres sont pris par défaut, i.e. $L=128$ et $SNR=20$ dB.

A travers les Figures 4.11 et 4.12, on voit que les deux courbes de l'erreur RMSE pour les deux paramètres θ et ω sont presque superposées sur la CRB stochastique de chaque cas avoisinant des valeurs d'erreurs faibles.

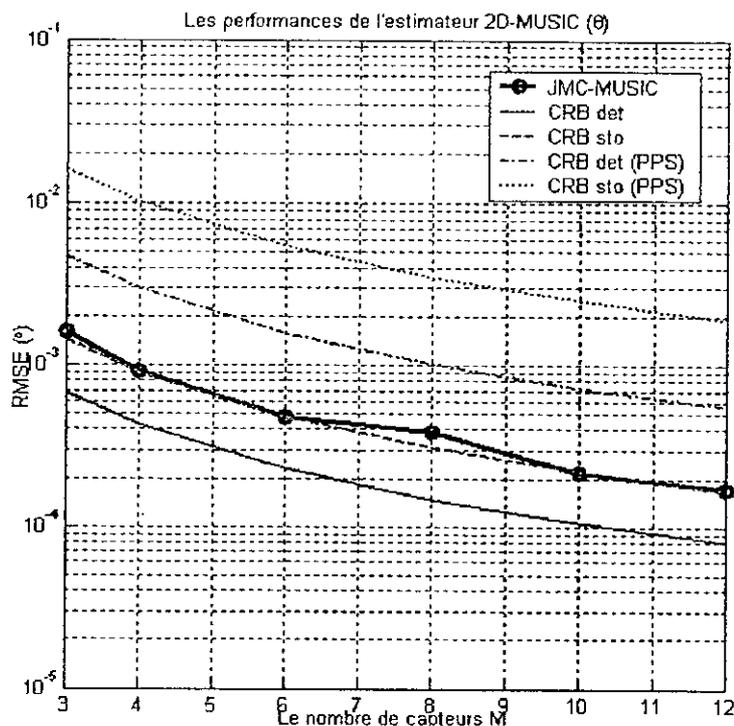


Figure 4.9
Effet du paramètre M sur l'estimation de θ .

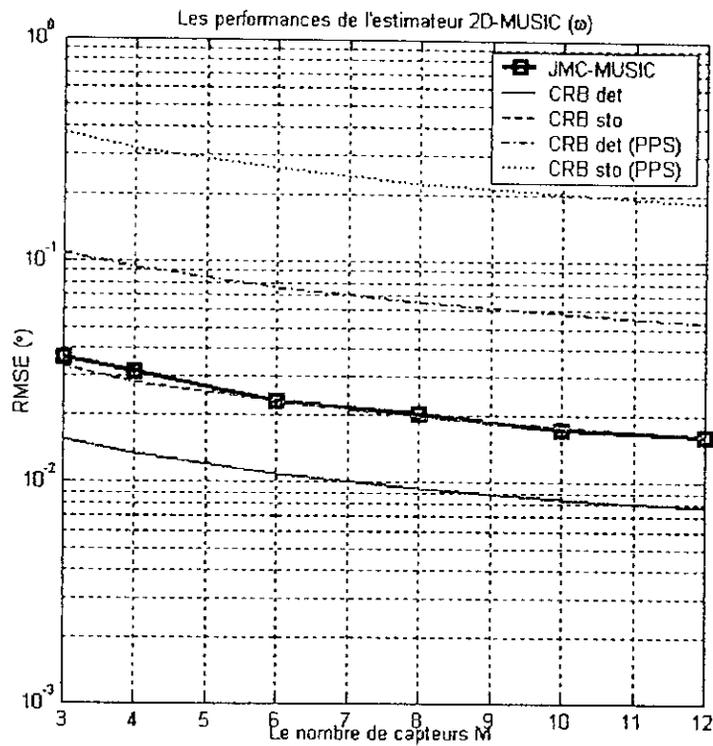


Figure 4.10
Effet du paramètre M sur l'estimation de ω .

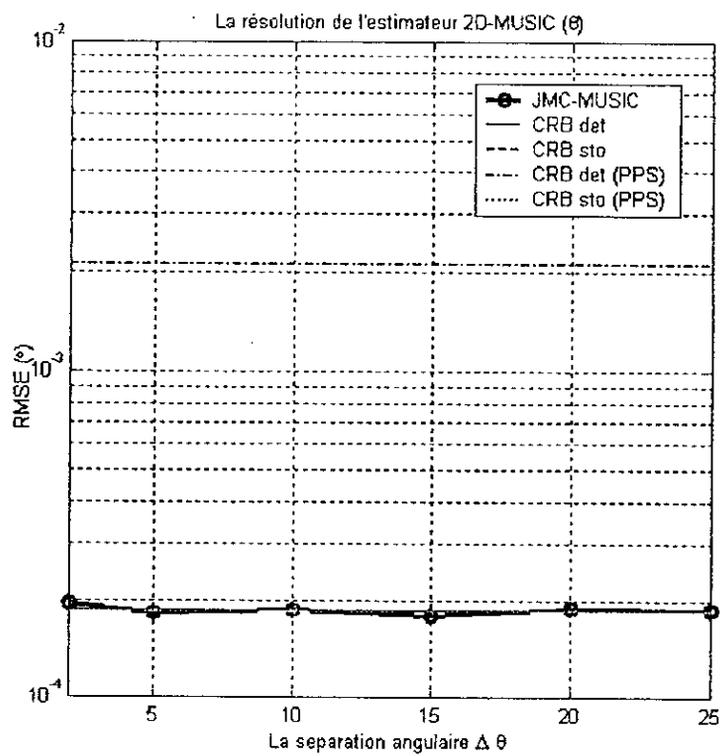


Figure 4.11
Effet de la séparation angulaire $\Delta\theta$ sur l'estimation de θ .

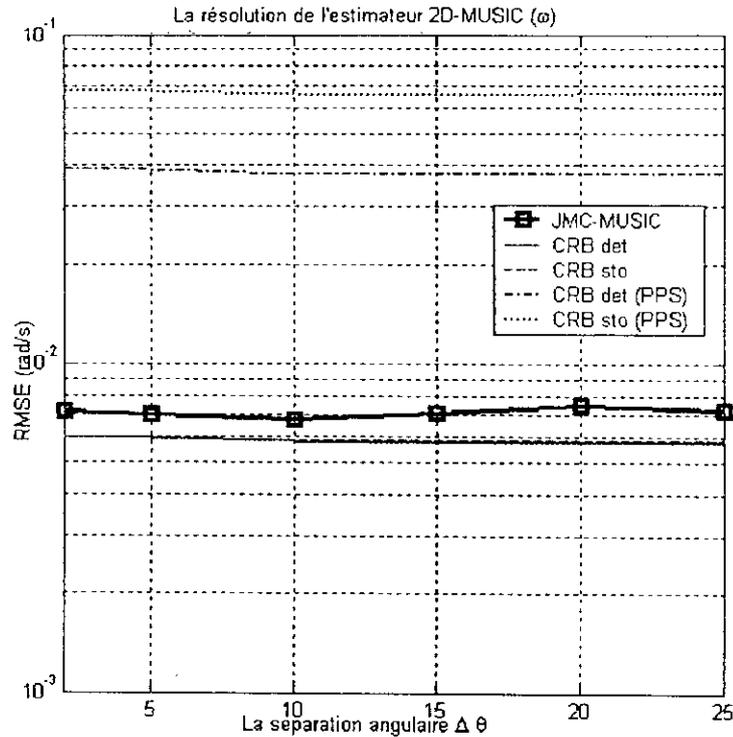


Figure 4.12
Effet de la séparation angulaire $\Delta\theta$ sur l'estimation de ω .

Cela nous amène, dans notre cas, à dire que pour des séparations supérieures à 5° ou 6° l'estimation s'effectue sans aucune ambiguïté, conférant ainsi une résolution appréciable à notre algorithme. Cela était prévisible du fait que notre algorithme se base sur les principes de la séparation des sous-espaces signal et bruit, réputés pour être des méthodes de haute résolution.

Pour l'effet des largeurs de bandes passantes des signaux reçus, on prend un système avec une antenne de $M=4$ éléments. Le nombre de signaux chirps est fixé à $P=2$. Les angles d'arrivées sont fixés à $\theta = [0^\circ, 22^\circ]^t$, et la bande passante du premier signal est fixé à $f_b = 10 \text{ MHz}$, par contre la seconde est variable. Tous les autres paramètres ont leur valeur par défaut, i.e. $L=128$ et $\text{SNR}=20\text{dB}$.

Les Figures 4.13 et 4.14, ont les mêmes allures que celles du cas précédent, i.e. on constate que les deux courbes d'erreur RMSE pour les deux paramètres convergent rapidement vers la CRB stochastique spécifique à chaque grandeur estimée, et les valeurs d'erreur introduites sont faibles et demeurent constantes à partir d'une certaine valeur, pour notre exemple elle est égale à 4MHz .

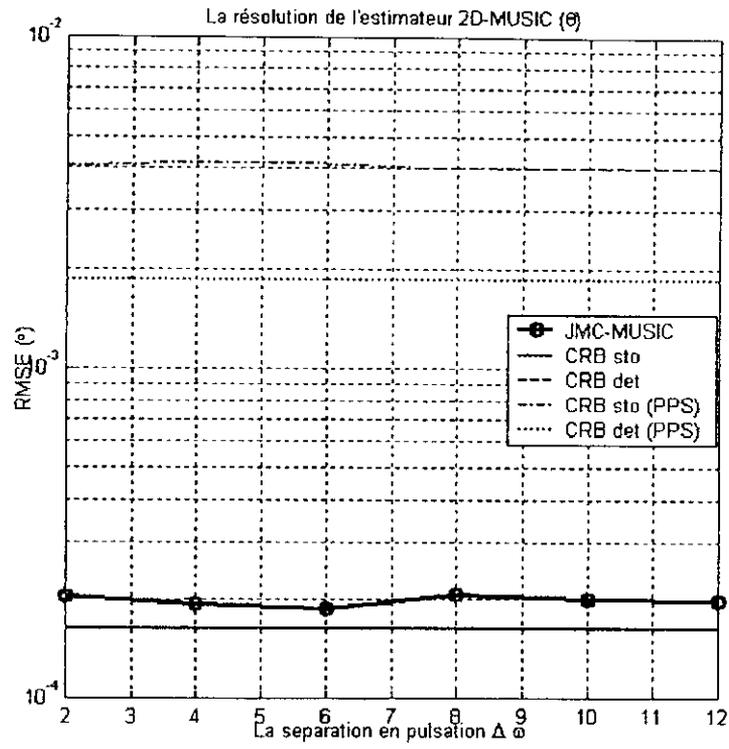


Figure 4.13
Effet de la séparation angulaire $\Delta\omega$ sur l'estimation de θ .

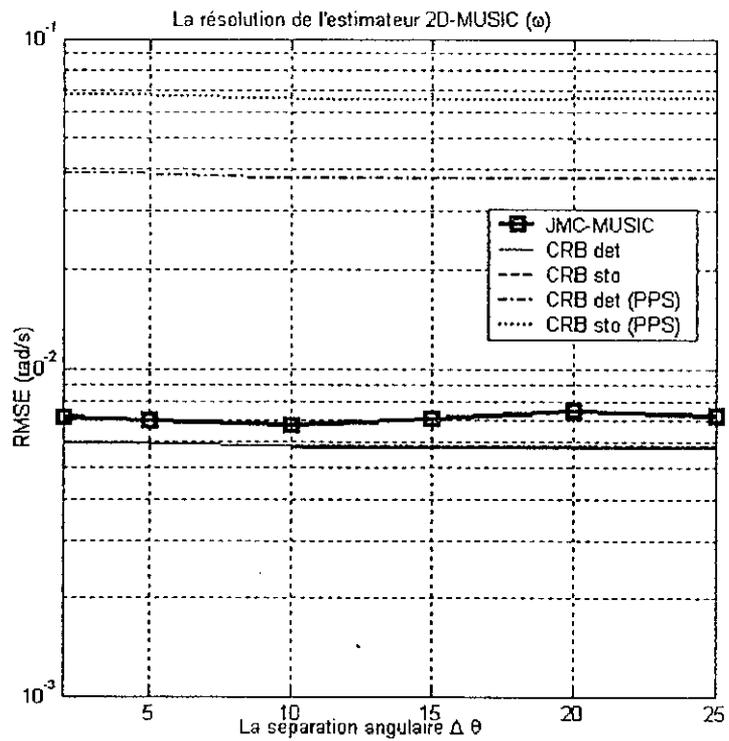


Figure 4.14
Effet de la séparation angulaire $\Delta\theta$ sur l'estimation de ω .

4.5 Application de JC-MUSIC pour un environnement à trajets multiples.

Reprenons l'expression de notre modèle, donnée par l'équation (2.55), mais en considérant cette fois-ci que toutes les bandes passantes sont égales et connues. Cela est typique dans les systèmes Radar où la bande passante est émise d'une manière répétitive, une fois par PRI, et elle est connue par construction.

Ainsi, notre modèle est équivalent à celui d'un système à un signal chirp unique se propageant à travers un environnement à trajets multiples spéculaire, i.e. où le nombre de trajets est fini et connu. A la réception, nous avons toujours une antenne réceptrice multi-capteurs (réseau d'antennes).

Par conséquent, nous avons un nouvel estimateur ayant le même modèle que précédemment, expression (2.55), appliqué à un nouveau système. Il évalue uniquement les angles d'arrivée. On le dénote modèle **MC** (Multipath Chirp parameter estimation).

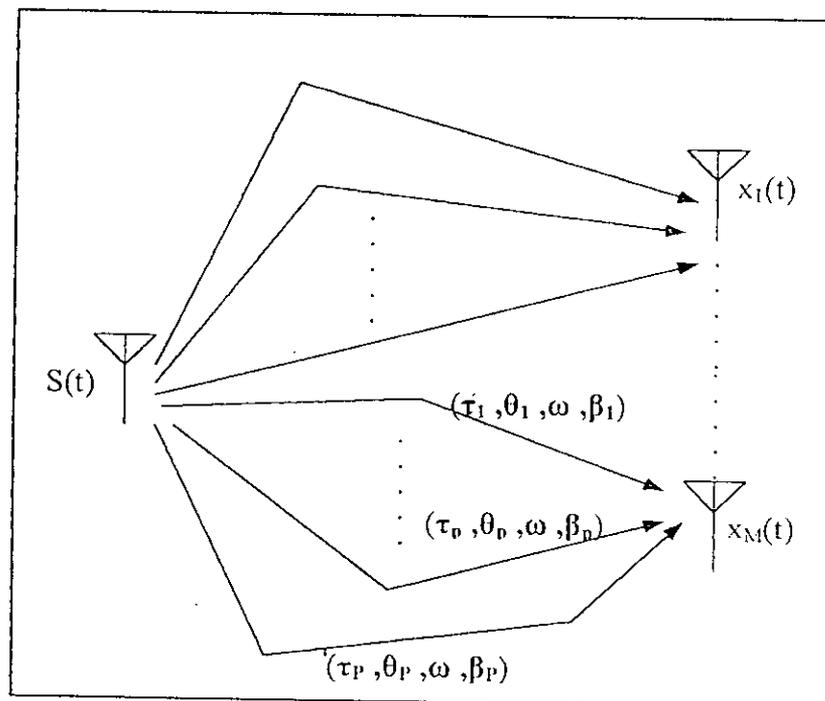


Figure 4.15
Schéma d'un canal de transmission multi trajets.

4.5.1 Calcul du modèle et expression de l'estimateur MC-MUSIC.

Dans le développement théorique du cas multi trajets, les hypothèses posées au Chapitre 2 sont retenues sauf la première que l'on remplace par :

- L'environnement de propagation est spéculaire, avec un nombre de trajets fini.

De plus, par rapport au calcul précédent, au lieu d'avoir P signaux chirps différents, nous avons P répliques d'un même signal chirp.

Il s'en suit, l'apparition d'un nouveau retard temporel τ_l dû à la propagation des signaux à travers des trajets multiples. D'où l'équation (2.27) du signal reçu en bande de base sur un élément m de l'antenne est de la forme :

$$x_m(t) = \sum_{p=1}^P a_m(\theta_p, \omega_b, t) \beta_p s_p(\omega_b, t)$$

avec :

- β_p : amplitude réelle.
- $a_m(\theta_p, \omega_b, t)$: est la réponse de l'élément m de l'antenne, identique au cas précédent.

Et comme (2.24), on a :

$$\begin{aligned} s_l(\omega_b, t) &= s(\omega_b, t - \tau_{li}) \\ &= \exp\left(-j\omega_c \tau_{li} \left(1 + \frac{\omega_b}{\omega_c T} \left(t - \frac{T}{2}\right)\right)\right) s(\omega_b, t) \end{aligned}$$

En exploitant l'effet de la stationnarité sur les intervalles de cohérence (voir § 2.3.2) nous avons :

$$\frac{\omega_b}{\omega_c T} \left(t - \frac{T}{2}\right) \rightarrow 0 \quad (4.4)$$

d'où $x_m(t)$ est identique à l'équation (2.27), de la forme :

$$x_m(t) = \sum_{p=1}^P a_m(\theta_p, \omega_b, t) \beta'_p s(\omega_b, t)$$

avec

- β'_p : amplitude complexe, donnée par :

$$\beta'_i = \beta_i \exp(-j\omega_c \tau_{i1}) \quad (4.5)$$

Par raisonnement similaire au cas multicanaux, i.e. utiliser la stationnarité de la direction d'arrivée sur les intervalles de cohérence, on retrouve la même forme de l'équation (2.45) du signal reçu :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \text{diag}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{S} \quad (4.6)$$

avec

$$\mathbf{X} = [x(1), \dots, x(N)]$$

$$\mathbf{S} = [s(\omega_b, 1), \dots, s(\omega_b, N)]$$

et

$$s(\omega_b, n) = \begin{bmatrix} s(\omega_b, n) \\ \vdots \\ s(\omega_b, n) \end{bmatrix} \quad n=1, \dots, N. \quad (4.7)$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_p)]$$

En réalisant la transformation (2.49) pour obtenir la matrice \mathbf{U} , nous avons le même modèle que l'équation (2.55) :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{B} + \boldsymbol{\kappa}$$

où la matrice $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$ de taille $(M N \times P)$ dépend seulement des directions d'arrivée.

A noter que lors de la décomposition en valeurs propres pour appliquer la méthode MUSIC, la condition pour avoir une matrice de rang entier devient :

$$P < M \text{ au lieu de } P < M \cdot N. \quad (4.8)$$

car avec la perte de la diversité spatiale, nous avons uniquement une redondance de N fois de la matrice \mathbf{A} de dimension $M \times P$:

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{A} \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{A} \end{array}} \right\} N \text{ fois} \quad (4.9)$$

Cela se traduit par la nécessité d'avoir un nombre de capteurs supérieur au nombre de trajets à évaluer. En d'autres termes, la perte d'un important avantage, i.e. la possibilité d'estimer un nombre plus grand de signaux à l'arrivée que de capteurs dans le réseau de réception.

L'estimateur devient alors de la forme :

$$\hat{(\theta)} = \arg \max_{(\theta)} S(\theta) \quad (4.10)$$

avec $S(\theta)$ la nouvelle fonction coût :

$$S(\theta) = \frac{1}{\mathbf{u}^H(\theta_p) \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{u}(\theta_p)} \quad (4.11)$$

Le nouvel estimateur est noté par MC-MUSIC.

4.5.2 Performances de MC-MUSIC.

Nous examinons dans ce qui suit les performances du nouvel estimateur. Comme d'habitude, nous évaluons l'erreur RMSE suivant la variation du SNR et du nombre L de PRI. Puis nous déterminons sa résolution angulaire.

L'erreur RMSE est moyennée sur 200 réalisations indépendantes de Monte-Carlo. Comme indice de performance des estimations, nous gardons toujours les deux CRB stochastique et déterministe.

Les valeurs des paramètres sont, sauf indication, comme suit : $L=128$ intervalles par seconde, $M=4$ capteurs, $\text{SNR}=20\text{dB}$, et la durée du symbole est normalisée à $T_s=1$, alors que le nombre d'échantillons est égale à $N=32$.

4.5.3 Visualisation de MC-MUSIC.

Dans ce qui suit, nous travaillons dans la bande de fréquence X avec un signal chirp dont la fréquence centrale est $f_c = 9\text{GHz}$ ($\omega_c = 2\pi f_c$). Ce signal est émis à partir d'une seule source avec une bande passante $f_b = 40\text{MHz}$

Il se propage à travers un environnement à trajets multiples spéculaire, dont le nombre de chemins est fixé à $P=3$. A la réception, chaque trajet est détecté avec un angle d'arrivée. Nous avons les valeurs suivantes :

$$\boldsymbol{\theta} = [0^\circ, -17^\circ, 22^\circ]' \quad (4.11)$$

On garde le même récepteur que pour les simulations précédentes, i.e. un réseau ULA dont l'espacement entre deux éléments consécutifs est égal à la demi-longueur d'onde spécifique à f_c .

Les paramètres ont leur valeur par défaut, et l'estimation sur l'intervalle de θ est évaluée avec une précision de 1° .

Dans la Figure 4.16, nous observons graphiquement comment l'estimation s'effectue. Une courbe en deux dimensions, typique de 1D-MUSIC, où l'on trouve le paramètre à estimer θ sur l'axe des abscisses en fonction de la fonction coût. Les solutions sont déduites à partir des valeurs des abscisses des pics.

Il est important de remarquer que l'estimation de la direction d'arrivée DOA est fortement dépendante de la résolution angulaire de l'estimateur

Pour faire face à cette situation, il faut avoir un pas de balayage très petit, où en d'autres termes une résolution très élevée. Nous pouvons voir l'effet des paramètres dans la Figure 4.16 pour le cas de différentes valeurs de SNR.

4.5.4 Effets des paramètres de MC-MUSIC .

Comme précédemment, on travaille dans la bande de fréquence X avec un signal chirp dont la fréquence centrale $f_c = 9GHz$ et la bande passante $f_b = 40MHz$. Le récepteur est un ULA, dont l'espacement entre deux éléments consécutifs est égal à la demi longueur d'onde spécifique à f_c . Le nombre de trajets est $P=3$, caractérisés par les directions d'arrivée θ précédentes.

Afin d'alléger les figures, les résultats présentés ne comportent que les informations spécifiques au premier trajet. Les autres trajets ont un comportement similaire.

a. Effet de la puissance de bruit (SNR).

Tous les paramètres ont leur valeur par défaut sauf le SNR qui est variable.

On constate sur la Figure.4.17, que la direction d'arrivée estimée θ est fortement sensible à la puissance de bruit. En effet, on observe que la valeur de l'erreur RMSE n'est pas négligeable pour des niveaux de bruit élevés ; cependant cette erreur est inversement proportionnelle au rapport SNR ; ainsi pour des valeurs élevées de ce rapport l'erreur s'atténue considérablement.

MC-MUSIC, dans le cadre du nouveau système, conduit vers des valeurs nettement en dessous des CRB

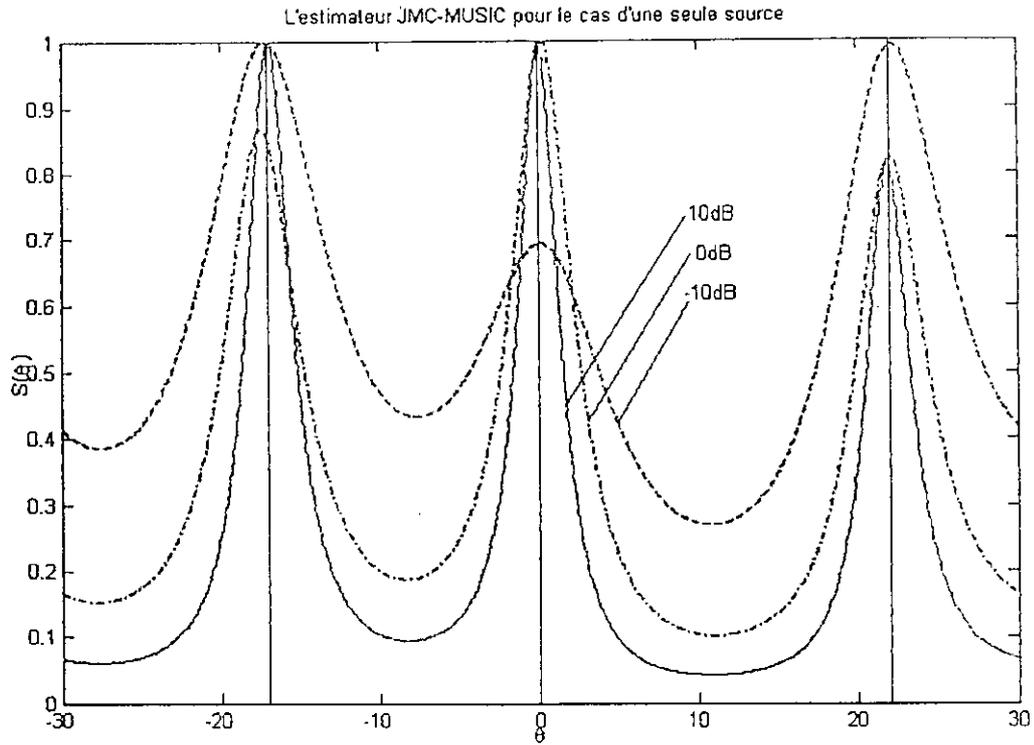


Figure 4.16

Estimateur MC- MUSIC pour le cas d'un signal chirp unique

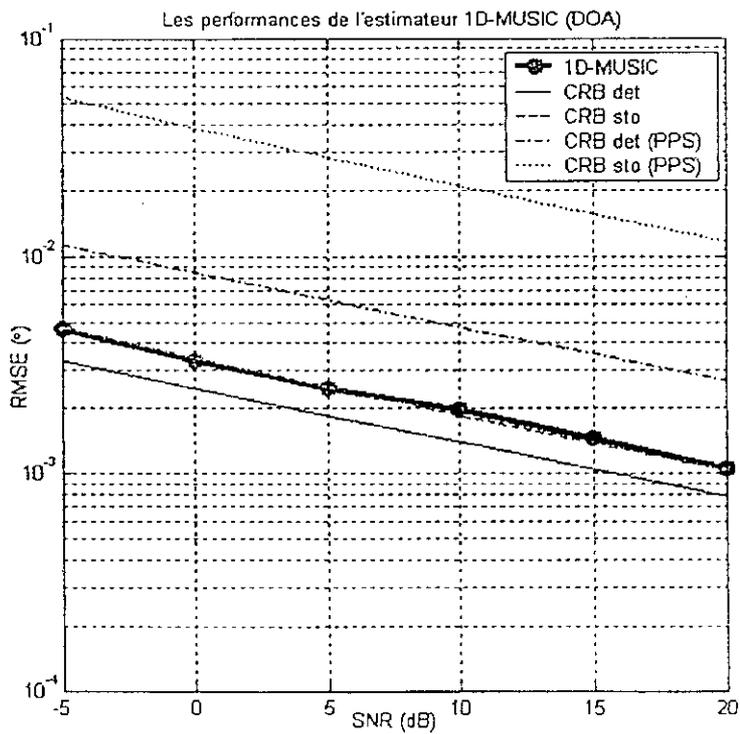


Figure 4.17

Effet du paramètre SNR sur l'estimation de θ .

b. Effet de du nombre de PRI (L).

Tous les paramètres gardent leur valeur par défaut sauf le nombre de L de PRI qui est variable.

A travers la Figure 4.18, il apparaît clairement que le DOA θ est sensible à L .

Le modèle MC-MUSIC est plus favorable que le modèle conventionnel PPS. En effet, il introduit plus d'informations *a priori*, dues à l'hypothèse de stationnarité des DOA et du nombre de PRI, L .

Enfin, on peut obtenir des niveaux de précision élevés à partir de MC-MUSIC pour ce nouveau système à source unique en augmentant le nombre de PRI.

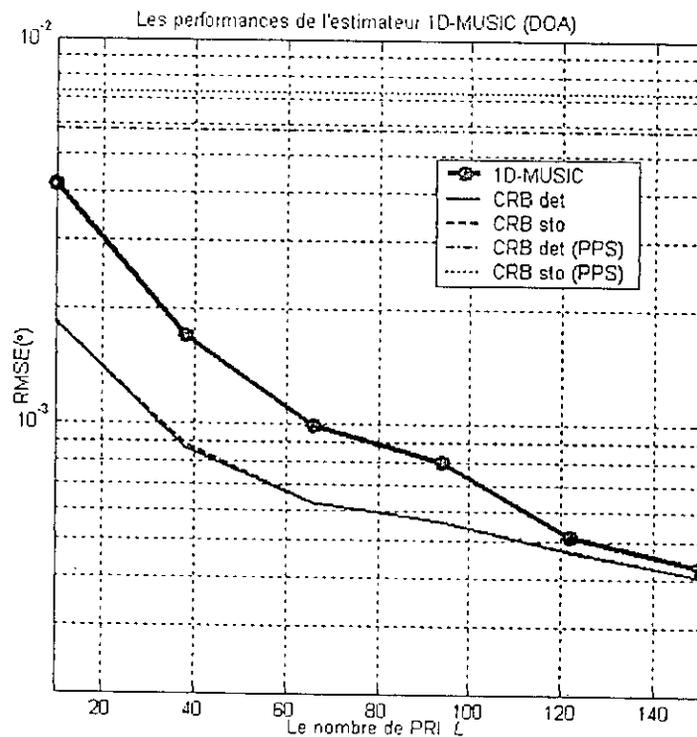


Figure 4.18

L'effet du paramètre L sur l'estimation de θ .

c. Effet du nombre de capteurs à la réception (M).

Tous les paramètres ont leur valeur par défaut sauf le nombre de capteurs M à la réception qui est variable.

On constate là aussi, que la direction d'arrivée estimée DOA θ dépend fortement du nombre de capteurs à la réception, d'une manière similaire que pour les paramètres précédents.

Autrement dit, on observe une meilleure précision de l'estimateur MC-MUSIC par rapport au modèle PPS, une proportionnalité entre le nombre de capteurs M et la précision de l'estimateur.

d. Résolution de MC-MUSIC.

Etudier la résolution de l'estimateur MC-MUSIC consiste à déterminer l'effet de l'espacement entre les angles d'arrivée des signaux reçus.

Pour ce faire, on considère le cas d'une antenne de $M=4$ éléments, un environnement spéculaire à $P=2$ trajets. L'angle d'arrivée du premier signal est pris comme référence et fixé à 0° . L'angle du second signal balaye l'intervalle des angles autour de la référence. Tous les autres paramètres sont pris par défaut, i.e. $L=128$, $M=4$ et $\text{SNR}=20\text{dB}$.

Sur la Figure 4.19, on voit que la courbe de l'erreur RMSE de l'écart de l'angle d'arrivée $\Delta\theta$ est au dessous de la CRB stochastique, avoisinant des valeurs d'erreurs très faibles, cela pour des écarts angulaires $\Delta\theta$ assez intéressants de l'ordre de 9° pour notre exemple, et pouvant y aller à des valeurs de $\Delta\theta$ encore plus faibles dans d'autres conditions (d'autres valeurs des paramètres de l'estimateur). Pour ce qui est de la différence entre l'erreur d'estimation $\Delta\theta$ de notre estimateur MC-MUSIC et celle de l'estimateur conventionnel PPS ; dans le cas d'un système à multi trajets ; elle est nette est conséquente.

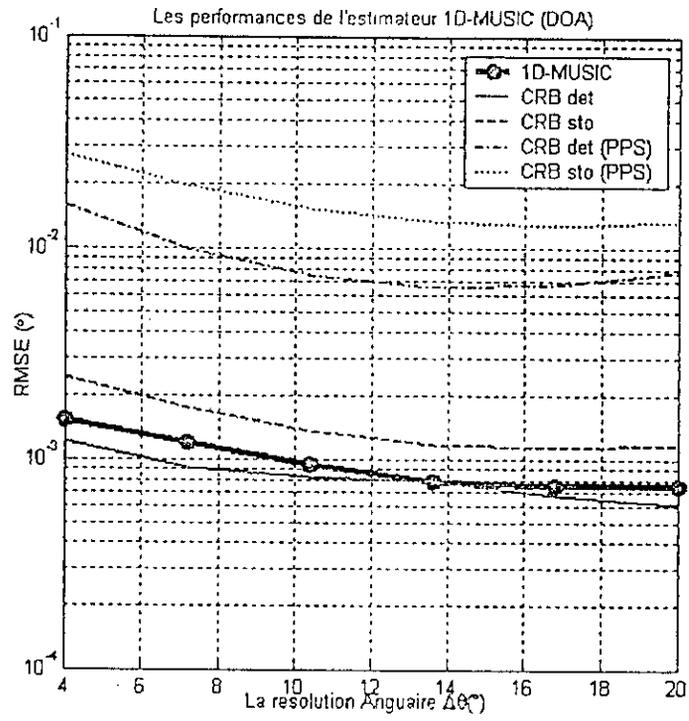


Figure 4.19
Effet de la séparation angulaire $\Delta\theta$ sur l'estimation de θ .

5

Interface graphique

5.1 Introduction

Le développement théorique terminé et les simulations traitées, nous pouvons dire que l'essentiel de notre projet est réalisé. Cependant, nous nous sommes imposés, de plus, la conception d'une interface graphique pour l'algorithme. Ce souci est motivé par deux points cruciaux.

D'une part notre travail doit assurer une compréhension et satisfaire à une meilleure perception, immédiates devant un jury et un auditoire.

D'autre part, nous supposons l'utilisation, à terme, de l'algorithme par des parties concernées didactiquement (enseignants, étudiants,...etc.), mais n'ayant pas eu systématiquement connaissance de ce document ; traitant la théorie.

Dans ce qui suit nous présentons une description de l'interface afin de se familiariser avec l'environnement et de prendre connaissance de la procédure nécessaire pour l'exécution de l'algorithme.

5.2 Objectif et avantages de l'interface graphique

Lors de l'évaluation des performances de notre estimateur, les simulations ont été intégralement effectuées sur le logiciel **MATLAB 6.5**.

Matlab est utilisé pour le calcul matriciel (décomposition en valeurs propres, matrices de covariance...) et offre des capacités graphiques en 2 et 3 dimensions. Il permet également de mettre en œuvre des interfaces graphiques personnalisées.

Parmi les nombreux avantages introduits dans notre travail par l'interface graphique, nous pouvons retenir :

- Une utilisation agréable avec une meilleure clarté visuelle en distinguant nettement les valeurs des différents paramètres et les résultats graphiques de l'estimateur.
- Une exécution simple se résumant à une série de "clic".
- Une utilisation facilitée dans la manipulation des différents paramètres de l'estimateur donnant lieu à un gain de temps pour l'utilisateur et de meilleures conditions pour des exécutions répétitives,

5.3 Description de l'interface graphique.

Notre interface est une fenêtre de MATLAB, intitulée **JMC-MUSIC**, résumant tous ce que l'on a vu dans les différents chapitres, à savoir les deux cas distincts de, plusieurs chirps dans un environnement multicanaux a trajet unique, ou d'un signal chirp dans un environnement à trajets multiples.

Elle est structurée de la manière suivante, voir Figure 5.1 :

- 5 zones représentant des groupements de commandes.
- Et 2 zones en bas constituant les éléments d'affichages des résultats graphiques.

Détaillons tout d'abord les zones de commande, allant de haut en bas et de droite à gauche :

La première zone est constituée de deux boutons : “info” et “exécuter” :

- Le premier fait apparaître la fenêtre d'aide contenant toute les indications nécessaires à la compréhension et au fonctionnement de l'interface, et des informations décrivant les différents systèmes et le sens de chaque paramètre.
- Quand au deuxième bouton, inactif initialement, il est disponible que lorsque tous les paramètres sont introduits correctement. Sa fonction est de lancer l'exécution de l'algorithme afin d'avoir une estimation du système défini par les paramètres choisis.

La deuxième zone, constituée de deux éléments nommés “radio-bouton”, porte comme titre “choix des valeurs”, elle permet de passer des valeurs des paramètres par défaut à une sélection manuelle, ou inversement.

La troisième zone, identique à la deuxième dans la constitution, porte comme titre “choix du système”. Elle permet le choix d'étude entre les deux types de systèmes vus précédemment,

La quatrième zone est constituée de quatre “sliders” correspondant aux quatre paramètres suivants : le nombre de capteurs M , le nombre d'intervalles de cohérence L , le nombre d'échantillons N et le rapport signal sur bruit SNR .

Le “slider” est conçu pour permettre de sélectionner une valeur à partir d'un intervalle déjà défini dont les valeurs minimale et maximale sont signalées sur la gauche et la droite de celui-ci. Le pas d'échantillonnage dans l'intervalle du “slider” est prédéfini initialement, et ne peut être changé par l'utilisateur.

Les valeurs des paramètres disponibles sur l'interface sont comme suit :

- Le nombre de capteurs M est compris entre 2 et 16, variant avec un pas de 1 capteur.
- Le nombre d'intervalles de cohérence L varie de 10 à 160 avec un pas de 10 intervalles.

- Le nombre d'échantillons N peut prendre les valeurs de l'intervalle suivant : [8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024] échantillons.
- le rapport signal sur bruit SNR varie de -20 à 60 dB avec un pas de 5 dB.

La valeur sélectionnée de chaque paramètre est indiquée par l'affichage de cette dernière dans la zone valeur courante spécifique à chaque paramètre.

La cinquième zone est constituée d'un "slider"; qui détermine le nombre de signaux reçus sur l'antenne ; et de 24 zones d'éditeurs, 12 pour la saisie des valeurs des angles d'arrivée θ , et 12 pour celles des bandes passantes ω . De plus nous avons deux radio-bouton pour choisir entre le degré et le radian comme unité des angles d'arrivée. Le nombre de signaux peut varier de 1 à 12 signaux, avec un pas de 1 signal. A noter que les zones de saisie sont invisibles initialement.

Les zones de résultats sont constituées de deux zones d'affichages des courbes. Celle de gauche est dédiée pour la courbe en 3 dimensions spécifique au système à plusieurs sources. La zone de droite affiche la vue de haut de la courbe en 3 dimensions pour le cas du système à plusieurs sources, sinon pour le système à une source unique, il affiche une courbe en 2 dimensions. Initialement, ces zones de résultats sont invisibles.

5.4 Exécution

Pour exécuter une estimation à partir de l'interface il faut suivre les étapes suivantes :

- Lors du premier lancement de JMC-MUSIC vous trouvez toutes les commandes inactives ou invisibles sauf la zone "choix des valeurs".
- Pour une exécution, la première étape est de choisir le type de sélection des valeurs des paramètres. Nous avons le choix entre la sélection manuelle ou par défaut. La sélection se fait par un "clic" sur la case choisie.
- Dans le cas des valeurs par défaut, tous les paramètres sont réglés automatiquement comme suit :
 - _ Le nombre de capteurs M est fixé à 4 capteurs.
 - _ Le nombre d'intervalles de cohérence L est fixé à 128 intervalles par seconde.
 - _ Le nombre d'échantillons N est fixé à 32 échantillons.
 - _ Le rapport signal sur bruit SNR est fixé à 20 dB.

- Dans le cas de la sélection manuelle, les différents paramètres doivent être réglés sachant les valeurs disponibles de chacun.
- Le réglage des paramètres terminé, il faut déterminer le type de système à étudier. Nous avons là aussi le choix entre deux systèmes :
 - _ Le système à plusieurs chirps dans un environnement à trajet dominant.
 - _ Le système à un chirp unique dans un environnement spéculaire.
- Avec la sélection du système, le “slider” dans la zone des paramètres des signaux située dans la troisième rangée des zones de commande s’active afin de déterminer le nombre de signaux à la réception. Comme pour les paramètres, dans le cas des valeurs par défaut le nombre est déjà fixé à 3, sinon dans le cas manuel, vous choisissez selon les valeurs disponibles.
- A partir du cas manuel, nous avons deux situations :
 - _ Si nous travaillons avec le premier système, alors apparaissent des zones de saisie pour les valeurs des angles d’arrivée et les bandes passantes. Pour chaque paramètre le nombre de zone de saisie est égal au nombre de signaux choisis.
 - _ Si nous travaillons avec le deuxième système, alors apparaissent des zones de saisie pour les valeurs des angles d’arrivée au même nombre que les signaux reçus. Pour ce qui est de la bande passante nous n’avons qu’une zone de saisie, car cette dernière est commune à tous les signaux reçus.
- Les valeurs par défaut, des angles d’arrivée et des bandes passantes sont comme suit :
 - _ Dans le cas du système à plusieurs sources : les angles d’arrivée ont les valeurs 0° , 13° et 22° , et les bandes passantes ont les valeurs 10, 25 et 40MHz.
 - _ Dans le cas du système à une source unique : les angles d’arrivée ont les valeurs 0° , -17° et 22° , et la bande passante a la valeur 40MHz.
- Tous les paramètres réglés, le bouton “exécuter” s’active donnant le feu vert pour lancer l’estimation.
- L’opération peut prendre un certain temps selon les valeurs des paramètres choisis. La fin de l’exécution est indiquée par l’apparition des courbes au dessous des zones de commandes.
- Toute opération incorrecte de la part de l’utilisateur est signalée.
- Pour des exécutions répétitives recommencez les points ci-dessus.

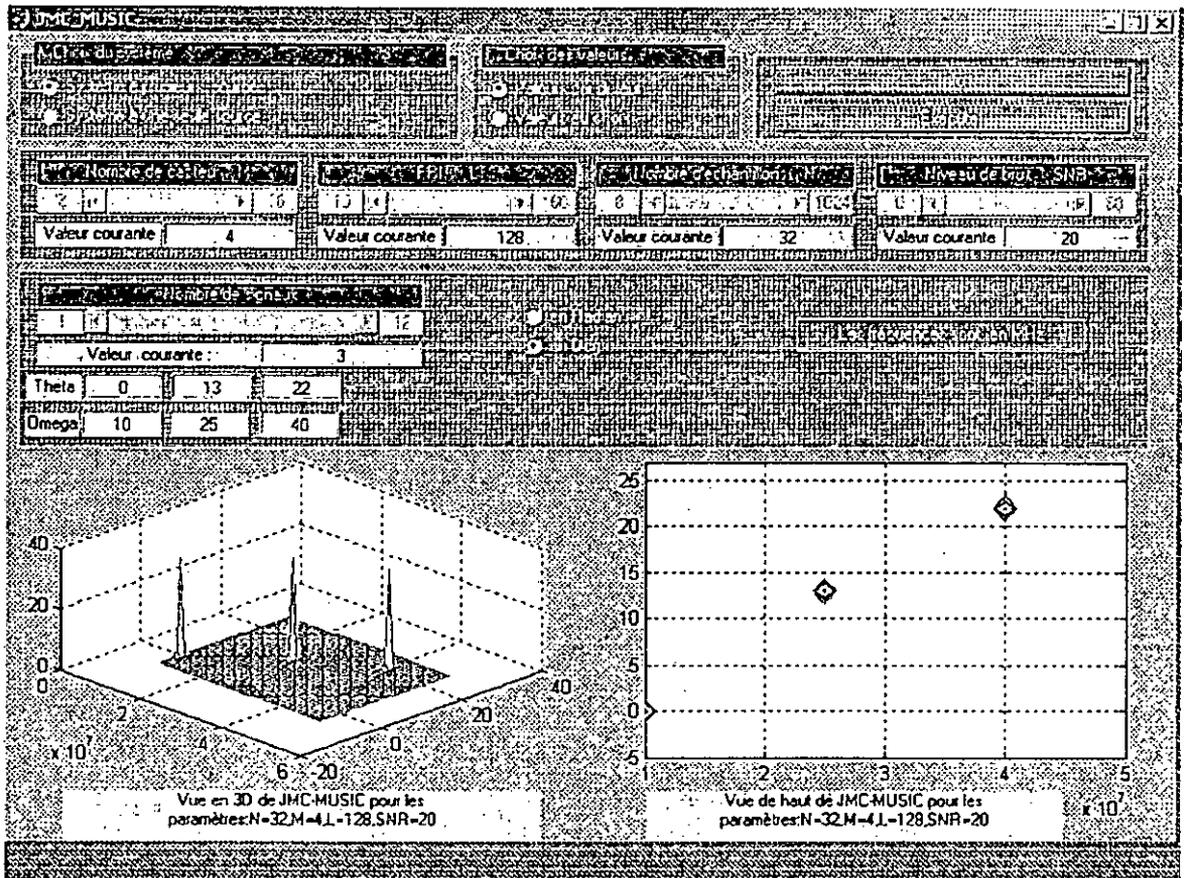


Figure 5.1

Interface Graphique

6

Conclusion

En conclusion, dans notre approche dans le traitement du problème posé, nous avons tenu compte des données acquises et des considérations spécifiques des transmissions sans fils via le traitement du signal de manière concrète et pratique.

Concrètement, nous avons contribué ; dans le cas spécifique des signaux à large bande modulés en fréquence (FM) où les signaux chirps sont prépondérants ; en proposant un modèle inédit d'estimation conjointe des paramètres de propagation et ceux des signaux chirps reçus pour un système à multi-porteuses que l'on note **JC** (Joint and Chirp parameter estimation).

L'élaboration du modèle en question est inspiré de l'exploitation des intervalles de cohérence, déjà utilisée avec un grand succès dans le cas des signaux à bande étroite.

Le traitement mathématique du modèle JC a été réalisé en adoptant les principes de l'estimation aveugle. A cet effet nous avons utilisé la méthode MUSIC, basée sur la séparation du sous-espace bruit de celui du signal grâce à une décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance des données reçues.

Ainsi, nous avons abouti à l'algorithme de notre estimateur appelé JC-MUSIC.

Nous avons pris, dans les simulations, comme témoin la méthode d'estimation conventionnelle des signaux à phase polynomiale (Polynomial Phase Signal) **PPS**, et comme indice de performance les bornes de Cramer-Rao (**CRB**) déterministe et stochastique.

L'estimateur **JC-MUSIC** a présenté à travers deux systèmes, une excellente capacité d'estimation, grâce à la diversité spatiale, et une plus grande quantité d'information fournie par le nombre d'intervalles de cohérence.

Les systèmes en question sont: le premier à signaux chirps multiples dans un environnement à trajet dominant unique où l'on réalise une estimation conjointe des bandes passantes et des angles d'arrivée des signaux reçus. Le second à un seul chirp dans un environnement spéculaire où l'on réalise uniquement l'estimation des angles d'arrivée des signaux reçus. Dans certaines applications, la bande passante peut être considérée connue et commune à tous les signaux.

A noter que dans le cas de l'estimation conjointe des paramètres, une caractéristique importante apparaît : la possibilité d'estimer un nombre de signaux reçus supérieur à celui des capteurs dans le réseau, grâce à l'exploitation simultanée de la diversité spatiale et celle des bandes passantes.

Pour apprécier les performances de l'algorithme **JC-MUSIC**, nous avons pensé à l'utilisateur éventuel, en concevant une interface graphique pour une utilisation simple.

Comparativement au modèle Gershman [5], le modèle ci présenté amène une nette amélioration de la **CRB**.

Le terme négligé au départ du modèle exacte n'affecte en rien les résultats.

Acronymes

DOA :	Dirction Of Arrival / Direction d'arrivée.
FM :	Frequency Modulation / Modulation fréquentielle.
FMCW :	Frequency Modulation of Continus waves /Modulation fréquentielle des ondes continus.
HF :	High frequency / hautes fréquences.
ISAR :	Inverse Synyhetic Aperture Radar / Inverse radar à ouverture synthétique.
ISAS :	Inverse Synyhetic Aperture Radar / Inverse sonar à ouverture synthétique.
JC-MUSIC :	Joint Chirp parameter MUSIC.
LL:	Loglikelihood / La fonction négative de vraisemblance.
MC-MUSIC :	Multipath and Chirp parameter MUSIC.
ML :	Maximum Likelihood / Maximum de vraisemblance.
MUSIC :	Multiple Signal Caractérisation.
PPS :	Polynomial Phase Signal / Signaux à phase polynomiale.
PRI :	Pulse Repetition Interval / Intervalle de répétition des pulsations.
RMSE :	Root Mean Square Error / Racine de l'Erreur Quadratique Moyenne.
SAR :	Synthetic Aperture Radar / Radar à ouverture synthétique.
SAS :	Synthetic Aperture Sonar / Sonar à ouverture synthétique.
SNR :	Signal Noise Ratio / Rapport signal sur bruit.
TDOA :	Time Difference Of Arrival / Décalage temporel d'arrivée.
ULA :	Uniform Linear Array / Réseau d'antenne uniforme et linéaire.

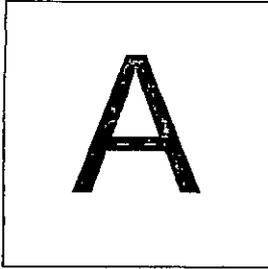
Mots clés

Atténuation.
Bandes passantes.
Bruit.
CRB déterministe.
CRB stochastique.
Décalage temporel d'arrivée.
Direction d'arrivée.
Diversité des bandes passantes.
Diversité spatiale.
Environnement sans fils.
Estimateur.
Estimation aveugle.
Estimation par apprentissage.
Fréquence centrale.
Interface graphique.
Intervalle de temps de cohérence.
Matrice de covariance.
Maximum de vraisemblance.
Modèle mathématique.
MUSIC.
Paramètres de propagation.
PRI.
Radar
Redondance.
Réseau d'antenne uniforme et linéaire.
RMSE
Signaux à phase polynomiale.
Signaux bande étroite.
Signaux Chirps.
Signaux large bande.
SNR.
Sous-espace bruit.
Sous-espace Signal.
Stationnarité.
Valeurs propres.
Vecteurs propres.

Références

- [1] G. Galati, Ed., *Advanced Radar Techniques and Systems*, London, U.K; IEE, 1993
- [2] URL : www.pit.edu.pl/crm-200.htm
- [3] URL : www.radioresearch.thomasregister.com/olc/53732509/rs04.htm.
- [4] B. Völcker and B. Ottersten, "linear Chirp Parameter Estimation from Multi Channel Data", *Proceedings of ASILO-MAR conference on Systems, Signals & Computers*, pp. 283-242, Paolo-Alto, USA, October 1999.
- [5] A.B. Gershman, M. Pesavento and M.G. Amin, "Estimating Parameters of Multiple Wideband Polynomial-Phase Sources in Sensor Arrays", *IEEE Transaction on Signal Processing*, vol 49, no 12, pp2924-2934, December 2001.
- [6] A.Belouchrani and A.G. Amin, "Time-Frequency MUSIC", *IEEE Signal Processing Letters*, vol 6, no5, pages 109_110 May 1999.
- [7] A.Hassanien, A.B. Gershman and M.G. Amin, "Time-Frequency ESPRIT for Direction Arrival Estimation of Chirp Signal", *Proceeding of IEEE Conference of Sensor Array and Multichannel Processing, SAM'02*, pp337-341, Washington D.C. USA, August 2002
- [8] L.A. Cirillo, A.M. Zoubir and A.B. Gershman, "Direction of Arrival Estimation for Uncorrelated FM Signals", *Proceeding of IEEE Conference of Sensor Array and Multichannel Processing, SAM'02*, pp. 318-322, Washington D.C. USA, August 2002.

- [9] G. Wang and X-G. Xia, "Iterative Algorithm for Direction of Arrival estimation with wideband chirp signals", in *Proceeding Inst. Elec. ENG. Radar, Sonar, Navigation*, vol 147, pp. 233-238, October 2000.
- [10] A.B Gershman and M.G. Amin, "Coherent wideband DOA estimation of multipath FM signals using spatial time-frequency distributions", in *Proceeding on ICASSP*, pp. 3065-3068, Istanbul, Turkey, June 2000.
- [11] A.B Gershman and M.G. Amin, "Wideband direction of arrival estimation of multiple chirp signals using spatial time-frequency distribution", *IEEE Signal Processing Lett.* Vol. 7, pp152-155, June 2000.
- [12] L. Thourel, "Initiation aux techniques modernes des radars", ed. *Cepadues*, 1982
- [13] M. Nilsson, B. Völcker and Ottersten, "A cluster Approach to spatio-temporel Channel Estimation", *Proceeding of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP'00*, vol 46, no 2, pp 405- 418, February 1998.
- [14] S. Aouada, "Exploitation de la Diversité Spatiale et Fréquentielle pour l'estimation des paramètres de propagation dans les systèmes de communications à Multi-porteuses", *Thèse de magister en Electronique*, ENP, 1999-2000.
- [15] M. C. Vanderveen, A.J. Van Der Veen and A. Paulraj, "Estimation of Multipath Parameters in Wireless Communication", *IEEE Transaction on Signal Processing*, vol 46, no 3, pp 682-690, March 1998.
- [16] Cours de Magister du département d'électronique, module réseau d'antenne, présenté par Dr A. Belouchrani, ENP, 2003-2004.
- [17] R. O. Schmidt, "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation", *Proceeding on RADC Spectrum Estimation Workshop*, pp 243-258, October 1997.
- [18] A. Dogandzic and A. Nehorai, "Cramer- Rao Bounds for Estimating Range, Velocity, and Direction with an active Array", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol 49, no 6, pp1122-1137, June2001.
- [19] A.J Van der Veen, "Algebraic Methods for Deterministic Blind Beamforming", *Proceeding of IEEE*, vol 86, no 10, pp1987-2008, October1998.
- [20] A.J. Van der Veen and A. Paulraj, "Joint Angle and delay Estimation using Shift Invariance Properties", *IEEE Transaction on Signal Processing*, vol 46, no 2, pp 405-418, February 1998.
- [21] R.O. Schmidt, "Multiple Emitter Location and signal Parameter Estimation", *Proc. RADC, Spectrum Estimation Workshop*, pp 243-2558, October 1997.
- [22] T.H Chung and J.Y. Cheung, "Maximum Likelihood Estimation of Direction Arrival and Frequency Sweeping Rate with linear Chirp Signals", *IEEE Signal Processing Letters*, vol 2, no 8, pp163-165, August 1995.



Annexe

1. La méthode de maximum de vraisemblance [16].

La méthode du maximum de vraisemblance est une approche utilisée pour l'estimation des paramètres dont la fonction de densité de probabilité est connue.

A titre d'exemple, considérons un système de d signaux. Le signal reçu est de la forme

$$x_k = \mathbf{A} \mathbf{s}_k + n_k \quad (k = 1, \dots, N) \quad (1)$$

avec :

- $\mathbf{s}_k = [s_1(k), \dots, s_d(k)]^T$ est le vecteur des symboles transmis à l'instant k .
- $\mathbf{A} = [a_1, \dots, a_d]$ est le vecteur de réponse de l'antenne.
- n_k est l'échantillon de bruit à l'instant k .

Le signal peut être factorisé comme suit :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (2)$$

où

$$\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_N]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{S} = [s_1, \dots, s_N]^T \quad (4)$$

On considère que le bruit \mathbf{N} est indépendant et identiquement distribué dans le temps (temporellement blanc), et spatialement blanc avec une distribution Gaussienne complexe :

$$\rho(n_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{\|n_k\|^2}{\sigma^2}\right) \quad (5)$$

avec

- σ^2 est la puissance du bruit.
- $\|\cdot\|$ est l'opérateur norme.

A partir de (3) on peut écrire :

$$n_k = x_k - \mathbf{A} \mathbf{s}_k \quad (k = 1, \dots, N) \quad (6)$$

En remplaçant l'expression (6) de n_k dans celle de la fonction de densité de probabilité de (5), nous avons l'expression de la probabilité de recevoir un symbole x_k :

$$\rho(x_k / s_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{\|x_k - \mathbf{A} \mathbf{s}_k\|^2}{\sigma^2}\right) \quad (7)$$

Ainsi l'expression de la densité de probabilité du vecteur \mathbf{X} est de la forme :

$$\rho(\mathbf{X} / \mathbf{S}) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{\|x_k - \mathbf{A} \mathbf{s}_k\|^2}{\sigma^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \right)^N \exp \left(- \frac{\sum_{k=1}^N \|x_k - \mathbf{A} \mathbf{s}_k\|^2}{\sigma^2} \right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \right)^N \exp \left(- \frac{\|\mathbf{X} - \mathbf{A} \mathbf{S}\|_F^2}{\sigma^2} \right) \tag{8}
\end{aligned}$$

avec $\|\cdot\|_F^2$ est la norme de *Frobenius* définie comme suit :

$$\|\mathbf{A}\|_F^2 = \sqrt{\left(\sum |a_{ij}|^2 \right)} \tag{9}$$

Cette densité $\rho(\mathbf{X}/\mathbf{S})$ est la fonction de Vraisemblance.

La technique du maximum de vraisemblance consiste à estimer \mathbf{S} tel qu'il maximise la fonction $\rho(\mathbf{X}/\mathbf{S})$:

$$\hat{\mathbf{S}} = \arg \max_{\mathbf{S}} e^{-\frac{\|\mathbf{X} - \mathbf{A} \mathbf{S}\|_F^2}{\sigma^2}} \tag{10}$$

où, d'une manière similaire, minimise l'argument de l'exponentiel, connu sous le nom de la fonction négative de vraisemblance LL (Loglikelihood) :

$$\hat{\mathbf{S}} = \arg \min_{\mathbf{S}} \|\mathbf{X} - \mathbf{A} \mathbf{S}\|_F^2 \tag{11}$$

La méthode des sous-espaces [16].

La méthode des sous-espaces applique la séparation des espaces signal et bruit. Le but de cette approche est de réécrire l'expression de la matrice de covariance en séparant la partie signal de la partie bruit. La séparation de l'espace signal de celui du bruit est faisable grâce à l'orthogonalité existante entre eux. Techniquement elle est réalisée à travers la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance.

L'expression de la matrice de covariance pour une matrice \mathbf{X} est donnée par :

$$\mathbf{R}_x = E[\mathbf{x} \mathbf{x}^H] \quad (12)$$

avec $E(\cdot)$ est l'espérance mathématique, et \mathbf{x} est le vecteur colonne de la matrice \mathbf{X} .

En pratique on utilise la matrice de covariance échantillonnée :

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{N} \mathbf{X} \mathbf{X}^H \quad (13)$$

Reprenons l'exemple du point précédant (§ 1) en considérant un système de d signaux. Le signal reçu est de la forme (2) :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \mathbf{S} + \mathbf{N}$$

Dans les mêmes conditions que précédemment, i.e. le bruit \mathbf{N} est spatialement blanc, indépendant et identiquement distribué dans le temps, sa matrice de covariance est de la forme :

$$\mathbf{R}_N = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (14)$$

avec \mathbf{I} est la matrice identité.

Comme la relation (14) vérifie : $\mathbf{R}_N - \sigma^2 \mathbf{I} = 0$, on en déduit que toutes les valeurs propres de la matrice de covariance du bruit \mathbf{R}_N sont identiques et égales à σ^2 .

Déterminons maintenant la matrice de covariance de la partie signal $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A} \mathbf{S}$:

$$\hat{\mathbf{R}}_0 = \frac{1}{N} \mathbf{X}_0 \mathbf{X}_0^H \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{A} \hat{\mathbf{R}}_s \mathbf{A}^H \quad (16)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_s = \frac{1}{N} \mathbf{S} \mathbf{S}^H \quad (17)$$

Sa décomposition en valeurs propres est de la forme :

$$\hat{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{U}_0 \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{U}_0^H \quad (18)$$

avec

- $\mathbf{\Lambda}_0$ est la matrice diagonale qui comporte les valeurs propres de la partie signal.
- \mathbf{U}_0 est la matrice qui comporte les vecteurs propres constituant une base pour le sous-espace signal.

Une propriété importante est que pour un système de d signaux la matrice $\mathbf{\Lambda}_0$ de dimension $(N \times N)$ aura d valeurs propres non nulles et les $N-d$ restants sont nuls. A noter qu'en général les valeurs propres sont ordonnées dans la matrice d'une manière décroissante.

Ainsi la matrice de covariance du signal reçu, entaché de bruit est comme suit :

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}_0 + \mathbf{R}_N \quad (19)$$

$$= \mathbf{U}_0 \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{U}_0^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (20)$$

$$= \mathbf{U}_0 (\mathbf{\Lambda}_0 + \sigma^2 \mathbf{I}) \mathbf{U}_0^H \quad (21)$$

On constate que toutes les valeurs propres de la matrice $\mathbf{\Lambda}_0$ ont augmenté de σ^2 .

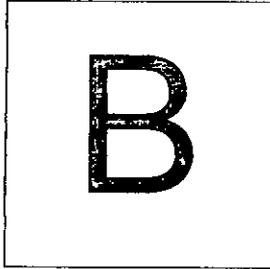
Comme en général, on reçoit le signal noyé dans le bruit, l'expression (20) ne peut être exploitée. Cependant on peut séparer la partie signal de la partie bruit dans la matrice de covariance en tirant les d plus grandes valeurs propres à partir de (21) avec leurs vecteurs propres correspondant (en respectant l'ordre). Les valeurs propres restantes avec leurs vecteurs propres respectifs constituent la partie bruit.

D'où, on a la nouvelle expression de la matrice de covariance :

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{U}_S (\mathbf{\Lambda}_0 + \sigma^2 \mathbf{I}_d) \mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_N (\sigma^2 \mathbf{I}_{N-d}) \mathbf{U}_N^H \quad (22)$$

avec

- \mathbf{U}_S est la matrice des vecteurs propres de la partie Signal, i.e. correspondant au d plus grandes valeurs propres.
- \mathbf{U}_N est la matrice des vecteurs propres de la partie Bruit, i.e correspondant au $N-d$ valeurs propres restantes.
- \mathbf{I}_d est la matrice dont seulement les d premières valeurs de la diagonale sont non nulles et égales à un.
- \mathbf{I}_{N-d} est la matrice dont seulement les $N-d$ dernières valeurs de la diagonale sont non nulles et égales à un.



Annexe

Expression des CRB pour le modèle proposé

L'expression de la CRB déterministe correspondant aux hypothèses conduisant à notre modèle de signal développé, est donnée sans preuve comme suit [9], [14] :

$$CRB_{det}(\theta, \omega_b) = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \sum_{l=1}^L \Re[B_l^* \mathbf{D}^* \mathbf{P}_U^\perp \mathbf{D} B_l] \right\}^{-1} \quad (1)$$

avec

$$\mathbf{B}_l = \mathbf{I}_2 \otimes \text{diag}\{\beta_l\} \quad (2)$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{S} \circ \mathbf{A}', \mathbf{S}' \circ \mathbf{A}] \quad (3)$$

$$\mathbf{P}_U^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{U}\mathbf{U}^* \quad (4)$$

Où $(.)^+$ est la pseudo inverse de Moore-Penrose, \mathbf{I}_2 est une matrice identité de dimension 2×2 , et les matrices \mathbf{A}' , \mathbf{S}' sont définies comme suit :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}'(\theta) = \left[\frac{da(\theta_1)}{d\theta_1}, \dots, \frac{da(\theta_p)}{d\theta_p} \right] \quad (5)$$

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}'(\omega_b) = \left[\frac{ds(\omega_{b1})}{d\omega_{b1}}, \dots, \frac{ds(\omega_{bp})}{d\omega_{bp}} \right] \quad (6)$$

L'expression de la CRB stochastique quant à elle, est donnée sans preuve par l'expression suivante [9], [14] :

$$CRB_{Sto}(\theta, \omega_b) = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \Re \left[\mathbf{D}' \mathbf{P}_U^+ \mathbf{D} \circ (\mathbf{I}_{2 \times 2} \otimes \mathbf{R}_\beta \mathbf{U}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{R}_\beta)^\top \mathbf{B}_l \right] \right\}^{-1} \quad (7)$$

où $\mathbf{I}_{2,2}$ est une matrice de dimension 2×2 dont les éléments sont égaux à 1.

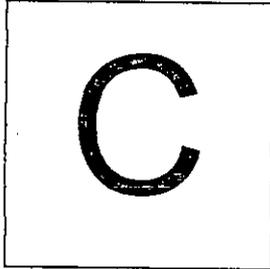
Pour le cas d'un seul chirp dans un environnement Multi trajets, le paramètre ω_b est connu par construction. Les expressions des CRB déterministe et stochastique deviennent comme suit :

$$CRB_{det}(\theta) = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \sum_{l=1}^L \Re \left[\text{diag} \{ \mathbf{B}_l \}' \mathbf{D}' \mathbf{P}_U^+ \mathbf{D} \text{diag} \{ \mathbf{B}_l \} \right] \right\}^{-1} \quad (8)$$

$$CRB_{Sto}(\theta, \omega_b) = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \Re \left[\mathbf{D}' \mathbf{P}_U^+ \mathbf{D} \circ (\mathbf{R}_\beta \mathbf{U}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{R}_\beta)^\top \mathbf{B}_l \right] \right\}^{-1} \quad (9)$$

avec dans ce cas :

$$\mathbf{D} = \mathbf{S} \circ \mathbf{A}' \quad (10)$$



Annexe

Publication

Rostom Aouada, Adel Belouchrani and Karim Abed-Meraim, " *MULTIPATH PARAMETER ESTIMATION OF LINEAR CHIRP SIGNALS USING SENSOR ARRAYS* " , in proceedings of the 3rd IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop, SAM'04, stiges, Barcelona, Spain, July 18th-21th, 2004.

MULTIPATH PARAMETER ESTIMATION OF LINEAR CHIRP SIGNALS USING SENSOR ARRAYS

Rostom Aouada*, Adel Belouchrani* and Karim Abed-Meraim**

*Electrical Engineering Department, École Nationale Polytechnique (ENP),
PO Box 182, El Harrach 16200, Algiers, Algeria.

**Signal and Image Processing Department, Télécom Paris (ENST),
46, rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13, France.
abelouch@ucsd.edu

ABSTRACT

We consider the problem of estimating the parameters of linear chirp signals when received at a multi-sensor antenna. Exploiting the negligible variation of the parameters of interest over the coherence time of the channel, we derive a new data model that outlines the space-time relation between the parameters. In the case of multiple chirps and single-path channels, the derived model allows the estimation of more signals than antennas. The model is directly employed in the case of a single chirp in multipath, where angles of arrival can be retrieved if more antennas than paths are available. We use a MUSIC-based estimator to recover the unknown parameters and compare its performance through simulations against the Cramér-Rao Bound.

1. INTRODUCTION

Estimation of the parameters of linear chirp signals, and more generally Polynomial Phase Signal (PPS), is a problem of major importance due to the fact that several practical applications involve linear or nonlinear Frequency-Modulated (FM) signals. These applications include among others, RADAR, SONAR and wireless communications [1]-[3]. Several array signal processing approaches have been suggested to deal with the problem when the signals undergo multipath effects, mainly for narrow-band assumptions, using essentially Spatial Time-Frequency Distributions (STFD) [4]-[6], leading to Maximum Likelihood (ML) and Subspace Separation (SS) solutions. More recently, an interesting approach to tackle the problem for wideband assumptions was proposed [7] where a PPS model was derived. An exact ML solution was suggested, and for the particular case of linear chirp signals, the cost function was analyzed and simplified resulting in a joint "Chirp Beamforming" estimator of the Directions Of Arrival (DOA) and chirp frequencies. Despite the fact that the wideband assumption introduces -theoretically- spatially spread DOAs and non-stationarity in the signals, one aspect of the multipath estimation problem for linear chirp signals that has received little attention so far is precisely that of stationarity. Indeed, the multipath parameters, i.e. DOAs and time delays, are relatively stationary [9]. However, the complex amplitude and relative phase of each path are highly non-stationary and subject to (Rayleigh) fading. More generally, the stationarity of the parameters depends on the coherence time of the signal [9]. For instance, in Frequency Modulated Continuous Wave (FMCW) RADAR and Pulse RADAR systems in the X-band, such as Airborne Trackers, for a center frequency of 9 GHz and a target flying at a speed of 250 m/s (900 km/h), the

signal has a coherence time of the order of

$$T_{coh} = \frac{c}{vf_c} \approx 0.13 \text{ ms}$$

where c is the speed of light, v is the speed of the target, and f_c is the carrier frequency. Such radar systems operate pulses of 1 μ s at 8000 pulses per second (pps), i.e., a Pulse Repetition Interval (PRI) of 0.125 ms, a time slot over which the signal parameters can be viewed stationary. In addition, over 100 PRIs with a repetitive pulse of 0.8% duty factor, the angular position of such a target changes by less than 0.1° when it flies at about 5000 ft above the tracker, which is at a distance of 3 km [2, 3]. Other examples in mobile communications are also described in [9]. This observation suggests that over a number of intervals, each being equal to the coherence time of the signal (typically PRI), the DOA can be considered stationary and the spatial spread that they undergo can be neglected. The complex amplitudes however change from one interval to another.

In what follows, we derive a data model for multiple chirp signals propagating through single path channels and impinging on an array from a different angle each. The derived model highlights the variation of the parameters of interest over the space-time manifold. In this multiple chirp scenario, space and bandwidth diversities allow the joint estimation of more DOA-bandwidth pairs than antennas. The model is straightforwardly employed in the case of a single chirp propagating through multipath. Moreover, in the typical case of a RADAR system where the chirp bandwidth is known by construction, the problem reduces to a DOA-only estimation, but up to the limitation of the number of antennas. The estimation is illustrated through an extension of the MUSIC algorithm whose performance is compared to the Cramér-Rao Bound.

2. DATA MODEL

2.1. General Model

Consider $s(\omega_b, t)$, a single repetitive complex-valued linear chirp signal, with bandwidth ω_b , center frequency ω_c and complex-valued amplitude β [11]

$$s(\omega_b, t) = \beta e^{j\left(\frac{\omega_b}{2T} (t-T/2)^2 + \omega_c t\right)}, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

Assume that the signal (1) impinges on a M -element sensor array (from a given DOA) so that, at the receiver level, a delayed

copy of the above signal can be written in terms of the original transmitted signal as follows [11, 12]

$$s(\omega_b, t - \tau) = e^{-j\omega_c \tau \left(1 + \frac{\omega_b}{\omega_c T} (t - T/2) - \frac{\omega_b \tau}{2\omega_c T}\right)} s(\omega_b, t). \quad (2)$$

Keeping in mind that the chirp pulse is repetitive with the PRIs, and in order to be consistent with the context of frequency modulation, $\frac{\omega_b}{\omega_c} \ll 1$ must be satisfied [11, 12]. Therefore, $\frac{\omega_b \tau}{2\omega_c T}$ can be assumed negligible and consequently (2) can be reduced to

$$s(\omega_b, t - \tau) = e^{-j\omega_c \tau \left(1 + \frac{\omega_b}{\omega_c T} (t - T/2)\right)} s(\omega_b, t) \quad (3)$$

Assume more generally that the received signal is composed of a combination of P linear chirp signals, each parametrized by a DOA θ_p , a complex amplitude β_p , and a bandwidth ω_{b_p} , for $p = 1, \dots, P$. Considering for simplicity a noise-free environment, the M -dimensional received signal vector $\mathbf{x}(t)$, is given by

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{p=1}^P \mathbf{a}(\theta_p, \omega_{b_p}, t) \beta_p s(\omega_{b_p}, t) \quad (4)$$

The time-varying and bandwidth-dependent spatial steering vector $\mathbf{a}(\theta_p, \omega_{b_p}, t)$ is defined as [11, 12]

$$\mathbf{a}(\theta_p, \omega_{b_p}, t) = \left[1, e^{-j\varphi(\theta_p, \omega_{b_p}, t)}, \dots, e^{-j(M-1)\varphi(\theta_p, \omega_{b_p}, t)}\right]^T \quad (5)$$

with $\varphi(\theta_p, \omega_{b_p}, t) = \pi \sin(\theta_p) \left(1 + \frac{\omega_{b_p}}{\omega_c T} (t - \frac{T}{2})\right)$.

The wideband effect can be seen as a spread in DOA applied to the narrowband steering vector. In other words, this can be seen as a time-varying DOA as follows [11, 12]

$$\theta(t) = \theta + \delta\theta(t), \quad \text{where } \delta\theta(t) = \tan(\theta) \frac{\omega_b}{\omega_c T} \left(t - \frac{T}{2}\right) \quad (6)$$

Thus, from (4) a general model for P chirp signals impinging on a Uniform Linear Array (ULA) can be stated in vector form as

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta, \omega_b, t) \text{diag}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{s}(\omega_b, t) \quad (7)$$

where

$$\mathbf{s}(\omega_b, t) = \left[e^{j\frac{\omega_b}{2T}(t-T/2)^2}, \dots, e^{j\frac{\omega_b}{2T}(t-T/2)^2} \right]^T \quad (8)$$

$$\mathbf{A}(\theta, \omega_b, t) = [\mathbf{a}(\theta_1, \omega_{b_1}, t), \dots, \mathbf{a}(\theta_P, \omega_{b_P}, t)] \quad (9)$$

and $\text{diag}(\boldsymbol{\beta})$ is a diagonal matrix whose elements are the elements of vector $\boldsymbol{\beta}$. The parameters in (7) are

$$\theta = \{\theta_1, \dots, \theta_P\}^T; \quad \omega_b = \{\omega_{b_1}, \dots, \omega_{b_P}\}^T; \quad \boldsymbol{\beta} = \{\beta_1, \dots, \beta_P\}^T.$$

2.2. Transformed Model

Assuming that the observation interval is reduced to the coherence time of the signal T_{coh} , i.e., $\delta\theta(t) \rightarrow 0$ in (6), the spatial steering matrix becomes similar to the narrowband model, i.e.,

$$\mathbf{a}(\theta_p) = \left[1, e^{-j\varphi_{\theta_p}}, \dots, e^{-j(M-1)\varphi_{\theta_p}}\right]^T, \quad p = 1, \dots, P \quad (10)$$

where $\varphi_{\theta_p} = \pi \sin(\theta_p)$.

Alternatively, considering the N samples covering the range of the coherence time of the channel, i.e., $T_{coh} = NT_s$, and after normalizing the sampling period T_s to 1, we get the following matrix-form representation

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}(\theta) \text{diag}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{S}(\omega_b) \quad (11)$$

where

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(N)] \quad (12)$$

$$\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_P)] \quad (13)$$

$$\mathbf{S}(\omega_b) = [s(\omega_b, 1), \dots, s(\omega_b, N)] \quad (14)$$

and

$$s(\omega_b, n) = \begin{bmatrix} s(\omega_{b_1}, n) \\ \vdots \\ s(\omega_{b_P}, n) \end{bmatrix}, \quad n = 1, \dots, N \quad (15)$$

Applying the $\text{vec}(\cdot)$ operator and its properties to Equation (11), results in

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \text{vec}(\mathbf{X}) &= \left[\mathbf{S}^T(\omega_b) \circ \mathbf{A}(\theta) \right] \boldsymbol{\beta} \\ &= \mathbf{U}(\theta, \omega_b) \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (16)$$

where \circ denotes Khatri-Rao product, i.e., a column-wise Kronecker product. Note that in (16), the space-frequency manifold matrix $\mathbf{U}(\theta, \omega_b)$ is parametrized in both the unknown DOAs and the unknown bandwidths of the chirp signals. It is of size $(MN \times P)$.

At this stage, assume that we collect the same size of data over L other intervals T_{coh} , where the chirp signal bandwidths ω_b and the DOAs θ are, as mentioned earlier, seen as stationary and common to all intervals, while the complex amplitudes vary from one interval to another. Concatenating the L columns obtained through (16) clearly results in the following $(MN \times L)$ -dimensional data matrix

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_L] \\ &= \mathbf{U}(\theta, \omega_b) \{\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_L\} \\ &= \mathbf{U}(\theta, \omega_b) \mathbf{B} \end{aligned} \quad (17)$$

Finally, taking into account the effect of the additive noise \mathbf{N} results, in a similar way to [9], in the following data model,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}(\theta, \omega_b) \mathbf{B} + \mathbf{N} \quad (18)$$

where the size and structure of the noise samples matrix \mathbf{N} is appropriately defined [9].

3. PARAMETER ESTIMATION

3.1. Multiple Chirps in Single-Path Channels

In what follows we assume that the additive noise \mathbf{N} is Gaussian white and independent from the complex amplitudes $\boldsymbol{\beta}$, i.e.,

$$\mathbb{E} \left\{ \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i^H \right\} = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (19)$$

where \mathbf{n}_i is a given column of \mathbf{N} , $\mathbb{E}(\cdot)$ denotes expectation and $(\cdot)^H$ stands for Hermitian transpose. σ^2 is the power of the noise and \mathbf{I} is the identity matrix whose dimension is appropriately defined.

In (18), if $MN > P$ and $L > P$, then we can estimate the parameters of interest θ and ω_b using standard estimation techniques, among which, Maximum Likelihood (ML), Beamforming (BF) and MUSIC. For identifiability, note that $\text{rank} \mathbf{U}(\theta, \omega_b)$ must be equal to P with $P < MN$. This means that the number of sensors M can be smaller than the number of chirp signals P and more signals than antennas can be identified. This represents the main advantage of the proposed model, in addition to the extra

information provided by the number of PRI, L , which is expected to result in an increased estimation accuracy. A more conventional PPS model [7] was previously suggested to solve the problem of joint estimation of multipath parameters for linear chirp signals, however the PPS model does not take into account the variation of the complex fading through time intervals longer than T_{coh} .

In what follows, we employ a 2D-MUSIC estimator [14] which, as opposed to the pure ML method, employs a 2D search rather than a much more demanding global optimization over $2P$ unknowns.

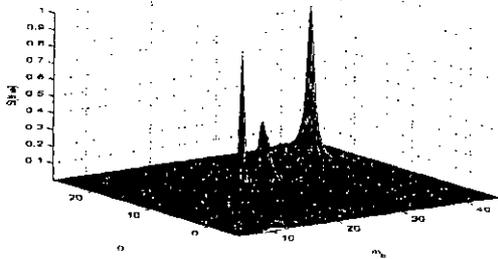


Fig. 1. Example of the 2D-MUSIC cost function.

Thus, with \mathbf{V} being the matrix whose columns are the $MN - P$ eigenvectors, corresponding to the smallest $MN - P$ eigenvalues of the covariance matrix of the data $\mathbf{R} = \mathbb{E}\{\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t^H\}$, and

$$\mathbf{u}(\theta, \omega_b) = \begin{bmatrix} s(\omega_b, 1) \\ \vdots \\ s(\omega_b, N) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{a}(\theta) \quad (20)$$

where \otimes denotes Kronecker product, being the functional form of each column of the manifold matrix $\mathbf{U}(\theta, \omega_b)$ defined in (16), a 2D-MUSIC spectrum can be defined as follows

$$S(\theta, \omega) = \frac{1}{|\mathbf{u}^H(\theta, \omega) \mathbf{V} \mathbf{V}^H \mathbf{u}(\theta, \omega)|} \quad (21)$$

The estimates of θ and ω are obtained over the range of θ and ω_b as

$$(\hat{\theta}, \hat{\omega}) = \arg \max_{(\theta, \omega)} S(\theta, \omega) \quad (22)$$

3.2. Single Chirp in Multipath

Assume now that all the chirp bandwidths are equal, i.e., $\omega_{b_1} = \dots = \omega_{b_P} = \omega_b$. This is equivalent to the case of a single chirp signal propagating through a specular multipath environment with P paths, each parametrized by a DOA θ_p , $p = 1, \dots, P$. This scenario is typical in RADAR systems where a pulse is emitted repeatedly once every PRI and a reflected multipath signal is received by the array from the target. Moreover, if as it is usually the case in RADAR, ω_b is known by construction, then the problem at hand reduces to the estimation of the unknown DOAs only. Hence, the corresponding model that results from (18) can be rewritten as

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}(\theta) \mathbf{B} + \mathbf{N} \quad (23)$$

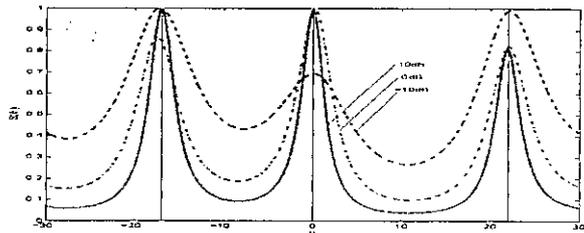


Fig. 2. Example of the 1D-MUSIC cost function.

Note that because of the unique ω_b , there is no diversity due to bandwidth but rather a redundancy, which reduces the number of resolvable paths to $P < M$. This is more restrictive than the previously described joint case ($P < MN$), but still typical in array processing algorithms.

Finally, the MUSIC spectrum that results from model (23) has the following expression

$$S(\theta) = \frac{1}{|\mathbf{u}^H(\theta) \mathbf{V} \mathbf{V}^H \mathbf{u}(\theta)|} \quad (24)$$

and the DOA estimates are obtained over the range of θ through

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} S(\theta) \quad (25)$$

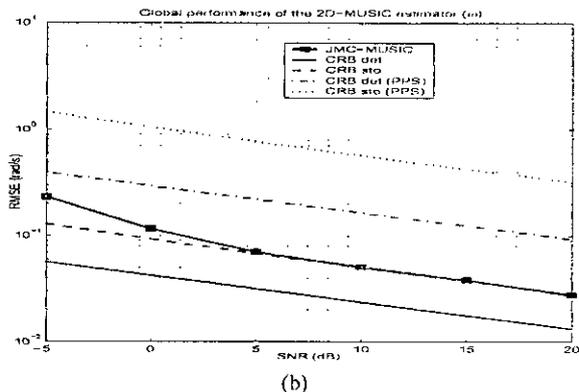
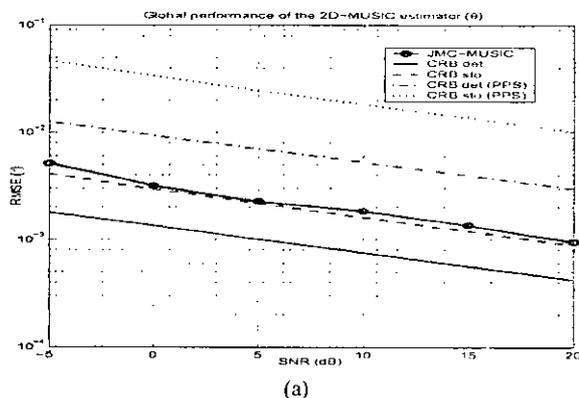


Fig. 3. 2D-MUSIC: RMSE vs SNR. (a) DOA, (b) Bandwidth.

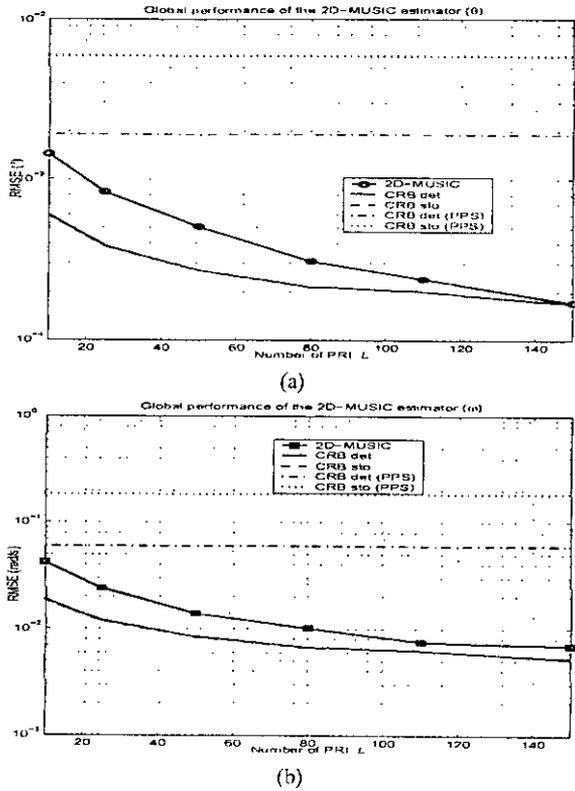


Fig. 4. 2D-MUSIC: RMSE vs number of PRIs L . (a) DOA, (b) Bandwidth.

4. SIMULATION RESULTS

We first assume that $P = 3$ linear chirp signals are received over the X-band at a carrier frequency of $\omega_c/(2\pi) = 9$ GHz. The signals involve the following parameters to be estimated: $\theta = [0^\circ, 13^\circ, 22^\circ]^T$ and $\omega_b/(2\pi) = [10, 25, 40]^T$ MHz. The array is simulated as a ULA with half bandwidth element separation. We illustrate the global performance of the proposed joint 2D-MUSIC estimator in terms of the Root Mean Square Error (RMSE) versus the Signal to Noise Ratio (SNR), the number of collected PRIs L and the number of sensors M . The performance is evaluated over 200 Monte-Carlo runs. In all the examples, the following general settings are used: $T_s = 1$, $L = 128$, $N = 32$, $M = 4$, SNR=20dB. However, a specific variable varies from one example to another for evaluation purposes (see abscissa axes), while the other variables remain fixed. Both the deterministic and the stochastic CRBs [9, 10, 15] are shown for reference, depending on whether the samples of \mathbf{B} are modeled as deterministic unknown or random. These bounds are shown along with the CRBs for the conventional Polynomial Phase Signals (PPS) model in [7]. Note that our model allows the consideration of more data, whereas the conventional model uses only one interval of length T_{coh} as the variation of the complex fading coefficients is not taken into account. Consequently, note that in all the examples the achievable RMSE by the estimator is lower than CRB (PPS). The results of Figures 3, 4 and 5 describe the performance for the first chirp

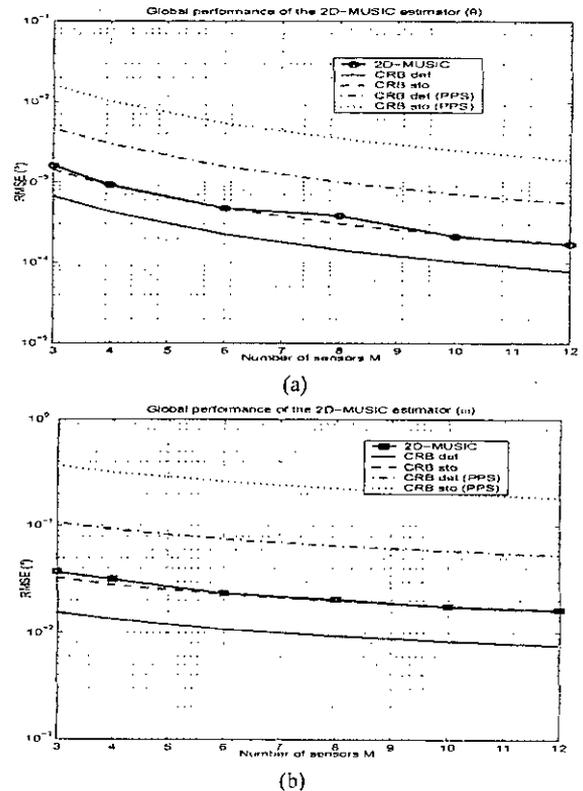


Fig. 5. 2D-MUSIC: RMSE vs number of sensors M . (a) DOA, (b) Bandwidth.

signal only as all three signals show the same performance pattern. Note that in all these examples, for the above settings, the RMSE improves in terms of convergence to the CRB, however as the RMSE includes both variance and bias-related terms [7], a distinguishable floor (bias) is observed, which is typical of high-resolution estimators.

Next, we assume that a single linear chirp signal is received at a carrier frequency of $\omega_c/(2\pi) = 9$ GHz, having a known chirp bandwidth $\omega_b/(2\pi) = 40$ MHz. The signal undergoes the effect of $P = 3$ multipaths, resulting in the following DOAs to be estimated: $\theta = [0^\circ, -17^\circ, 22^\circ]^T$. The same array employed. Similarly to the previous example, the global performance of the 1D-MUSIC estimator is illustrated in Figure 6, as function of the SNR and the number of PRIs L . In addition, we show the effect of the DOA separation, especially that no bandwidth diversity is present. The performance is evaluated over 200 Monte-Carlo runs and the same general settings as above are used. Overall, the same observations are made for the results of this example. It is important to note that if the asymptotic conditions (low SNR, L and/or M) are not favorable, the DOA estimation is strongly dependent on the angular resolution of the estimators (see Figure 2).

5. CONCLUSION

The problem of estimation of Directions Of Arrival and linear chirp frequencies was addressed. A new model was derived out-

lining the space-time relation between the signal parameters over an interval equivalent to multiples of the channel coherence time. It allows the estimation of more signals than antennas. The joint estimation was illustrated through a 2D-MUSIC algorithm. Due to the increased amount of data which is embedded in the model, an improved estimation accuracy was achieved. The model is compatible with the case of a single chirp in multipath. In the event of a known chirp frequency, the estimation reduces to a localization problem. Abstraction of the bandwidth diversity reduces the number of resolvable paths which limited by the number of antennas. The model nevertheless leads to a time-domain localization in a wideband scenario.

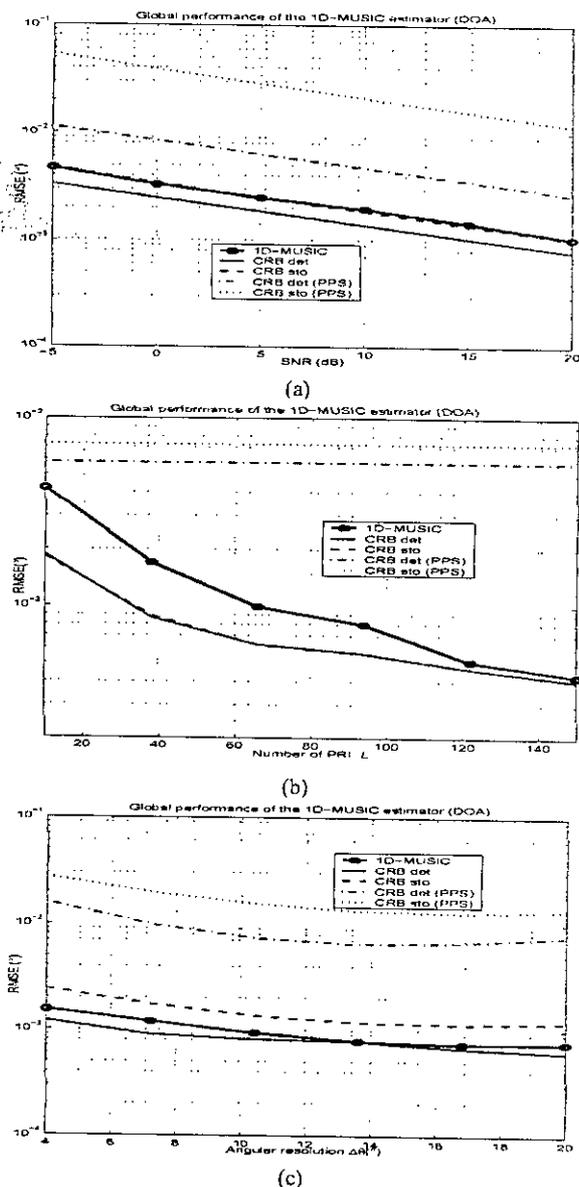


Fig. 6. DOA in multipath: RMSE vs (a) SNR, (b) L , (c) $\Delta\theta$.

6. REFERENCES

- [1] G. Galati, Ed., *Advanced Radar Techniques and Systems*. London, U.K.: IEE, 1993.
- [2] URL: www.pit.edu.pl/crm-200.htm
- [3] URL: www.radioresearch.thomasregister.com/olc/53732509/rs04.htm
- [4] A. Belouchrani and M.G. Amin, "Time-Frequency MUSIC", *IEEE Signal Processing Letters*, Volume: 6, No. 5, Pages:109 - 110, May 1999
- [5] A. Hassani, A.B. Gershman and M.G. Amin, "Time-Frequency ESPRIT for Direction of Arrival Estimation of Chirp Signals", *Proceedings of IEEE Conference of Sensor Array and Multichannel Processing, SAM'02*, pp.337-341, Washington D.C., USA, August 2002.
- [6] L.A. Cirillo, A.M. Zoubir and A.B. Gershman, "Direction of Arrival Estimation for Uncorrelated FM Signals", *Proceedings of IEEE Conference of Sensor Array and Multichannel Processing, SAM'02*, pp. 318-322, Washington D.C., USA, August 2002.
- [7] A.B. Gershman, M. Pesavento and M.G. Amin, "Estimating Parameters of Multiple Wideband Polynomial-Phase Sources in Sensor Arrays", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 12, pp. 2924-2934, December 2001.
- [8] A.J. Van der Veen, "Algebraic Methods for Deterministic Blind Beamforming", *Proceedings of IEEE*, vol. 86, no.10, pp.1987-2008, October 1998.
- [9] M.C. Vanderveen, A.J. Van der Veen and A. Paulraj, "Estimation of Multipath Parameters in Wireless Communications", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 3, pp. 682-690, March 1998.
- [10] A.J. Van der Veen and A. Paulraj, "Joint Angle and Delay Estimation using Shift Invariance Techniques", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 2, pp. 405-418, February 1998.
- [11] B. Völcker and B. Ottersten, "Linear Chirp Parameter Estimation from Multi Channel Data", *Proceedings of ASILOMAR conference on Systems, Signals & Computers*, pp. 238-242, Paolo-Alto, USA, October 1999.
- [12] M. Nilsson, B. Völcker and B. Ottersten, "A Cluster Approach to Spatio-temporal Channel Estimation", *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP'00*, pp. 2757-2760, Istanbul, Turkey, May 2000.
- [13] A.J. Van der Veen and A. Paulraj, "Joint Angle and Delay Estimation using Shift Invariance Properties", *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 4, no. 5, pp 142-145, May 1997.
- [14] R.O. Schmidt, "Multiple Emitter Location and signal Parameter Estimation", *Proc. RADC Spectrum Estimation Workshop*, pp. 243-258, Oct. 1997.
- [15] A. Dogandžić and A. Nehorai, "Cramér-Rao Bounds for Estimating Range, Velocity, and Direction with an Active Array", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 6, pp. 1122-1137, June 2001.
- [16] T.H. Chung and J.Y. Cheung, "Maximum Likelihood Estimation of Direction of Arrival and Frequency Sweeping Rate with Linear Chirp Signals", *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 2, no. 8, pp. 163-165, August 1995.