

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

HOUARI BOUMEDIENNE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE - MECANIQUE



MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

**VIBRATIONS DE FLEXION
DES MACHINES TOURNANTES**

Proposé par :

M. KSIAZEK

Etudié par :

M. RAHMANI

- 1) Quel est l'ordre d'importance du choix des paramètres de la structure, du rotor, et des liaisons pour une vitesse de rotation?
- 2) Quel est le domaine d'application de cette étude en (B.E.) pour l'ingénieur?

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

»O«

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

HOUARI BOUMEDIENNE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE - MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

**VIBRATIONS DE FLEXION
DES MACHINES TOURNANTES**

Proposé par :

M. KSIAZEK

Etudié par :

M. RAHMANI

Je tiens à
remercier tous ceux qui ont
contribué à ma formation d'ingénieur
et plus particulièrement les professeurs du
Genie Mécanique. Je réitère mes remerciements
et ma reconnaissance à monsieur KSIAZEK pour
ses conseils et son suivi et l'assure de mon amitié.
Mes remerciements pour monsieur ZERGUERRAS chef
du département de mécanique pour le passage du
programme, et pour monsieur A. WERNER.
Je n'oublierai pas les responsables et le per-
sonnel de l'atelier (3-1) de la BCL,
Hocine Benmessaoud du centre de calcul de
l'ENPA, Hamid Djerfef et tous mes amis pour leur con-
seils et leur aide même de la façon la plus modeste pour la
mise en forme de ce projet

A mes parents, mes frères et sœurs, mes amis, la promotion
JANVIER 83 je dédie ce modeste travail.

SUJET

Vibrations de flexion des machines tournantes

Données :

- 1- Un rotor de turbine à vapeur à double flux dont la vitesse de fonctionnement est : $N = 11850$ tours/min ; et sa masse 800 KG
- 2- Un rotor de turbine à vapeur à deux roues de masse 40 KG chacune , dont la vitesse de fonctionnement $N = 3000$ t/mn
- 3- Deux exemples théoriques de calcul des vitesses critiques

Travail demandé :

- 1- Méthodes de détermination des vitesses critiques des rotors et les modes propres correspondants .
- 2- Etude d'un système rotor-liaisons douées de raideur et d'amortissement
- 3- Applications aux cas simples
- 4- Etude d'un rotor multimassique et calcul sur ordinateur du rotor de turbine à vapeur à double flux .
- 5- Dessin du rotor et schéma de calcul .

Table des matières

Symboles et lettres employés	1
Introduction	2
Historique	3
Chp I. Définition - Formulation - Modélisation et Caractérisation	
1 - Généralités	4
2 - Définitions	6
3 - Propos sur la modélisation, la caractérisation, et le découpage	7
3.1 - Modélisation	7
3.2 - Caractérisation	8
3.3 - Découpage	9
4 - Étude théorique d'un ensemble simple sans effet gyroscopique	11
5 - Vitesses critiques secondaires	15
Ch II. Méthodes de détermination des vitesses critiques des rotors.	
1 - Généralités	16
2 - Méthodes analytiques	17
2.1 - Systèmes discrets	17
2.2 - Systèmes continus	21
3 - Méthodes par les énergies	24
3.1 - Méthode de Rayleigh	24
3.2 - Méthode de Ritz	26
3.3 - Application	27
4 - Formule de Dunkerley	28
5 - Méthode de Stodola	30
Ch III Applications aux cas simples	

1 - Exemple: 1	34
2 - Exemple: 2	37
3 - Exemple: 3	39
4 - Exemple: 4	45
Ch IV Etude d'un rotor de turbine à vapeur à double flux sur ordinateur.	
1 - Position du problème	51
2 - Calcul des coefficients d'influence	52
3 - Table des données	56
4 - Programme	57
5 - Resultat numerique de la matrice du système.	63
6 - Calcul approché de la vitesse critique	64
Ch V Etude des influences de l'élasticité, l'amortissement, et la flexibilité des liaisons sur la vitesse critique.	
1 - Influence de la flexibilité des liaisons sur la vitesse critique.	65
2 - Etude d'un système rotor-liaisons	67
3 - Optimum de l'amortissement des liaisons d'un système rotor-liaisons simple.	70
Conclusion	78
Bibliographie	79

Symboles et lettres employés

- A : amplitude de déplacement [m]
 a_{ij} : coefficient d'influence [m/N]
 E : module d'élasticité [daN/cm²]
 F : Section [m²]
 $I = \frac{\pi d^4}{64}$: moment d'inertie [cm⁴]
 k : élasticité [N/m]
 L : Longueur [m]
 m : masse [kg]
 M : moment flechissant [m.N]
 P : force centrifuge [N]
 Q, q : force sur la fondation [N]
 R : Reaction des appuis [N]
 T : énergie cinétique [J]
 V : énergie potentielle [J]
 D : énergie de dissipation [J]
 $F(t)$: force harmonique [N]
 v : vitesse de déplacement [m/s]
 W : poids [N]
 α : coefficient d'amortissement lineaire [N/(m/s)]
 ω : vitesse de rotation [rad/sec]
 N : vitesse de rotation [tours/mn]
 e : éxentrement [mm]
 ρ : masse volumique [Kg/m³]
 u, x, y, z, δ : flèches [mm]

Introduction :

La poutre et le rotor :

Pour construire leurs maisons, les ponts, et différentes constructions, les hommes ont puisé dans l'ensemble des poutres afin d'obtenir la poutre qui possède exactement les caractéristiques exigées par la construction.

Dans une certaine continuité, l'ingénieur exploitait la poutre pour ses constructions, il en fit même un rotor, et s'inquiéta de ses comportements.

A l'origine il fit des rotors massifs et puis il les alléga tout en présentant qu'il s'approchait d'une vitesse limite qui marquait un domaine interdit, il pensait en terme de vitesse critique, et de stabilité.

L'interdit fut levé lorsqu'il démontra que sous certaines conditions, le fonctionnement était possible.

De plus en plus il exigea beaucoup du rotor et de la poutre, pour les utiliser il fallait les connaître.

Passer de la poutre au rotor c'était évidemment pénétrer plus profondément dans la dynamique... et on n'a pas encore fini de s'étonner des comportements qui résultent de cette rotation imposée, ainsi l'amortissement bénéfique pour la poutre peut créer pour le rotor une instabilité destructrice.

Historique:

Dans une bibliographie "Author and Kwic on rotor dynamics"⁷
Le premier des articles placé en chronologie est de Chrec, "The
whirling and transverse vibrations of rotating shafts Phi: MAG. 7504"⁷
Il a été publié en 1904.

En 1924, Newkirk attirait l'attention sur une vibration particulière
des rotors guidés par des coussinets à huile et tournant à des vitesses
voisines ou supérieures à leur première vitesse critique de flexion.

Stodola en 1925 puis Hummel en 1926 ont cherché l'influence
de la raideur des films d'huile sur les vitesses critiques, la vibration
particulière de Newkirk fut décrite mathématiquement par Robertson
en 1933 puis reprise par Newkirk et Grobel en 1934, l'étude de l'instabilité
que l'on nommait alors "oil-whip" ou "fouettement" était
abordée par une caractérisation théorique.

En août 1974 l'International Union of Theoretical and Applied
Mechanics (IUTAM) a organisé à Lingby au Danemark un symposium
sur la dynamique des rotors

En septembre 1976 à Cambridge, "The Institution of Mechanical
Engineers" a organisé un congrès sur le thème "Vibrations of rotating
machinery"

L'ordinateur permet cet étalage, et de nombreux chercheurs
inventent des systèmes mathématiques et construisent des maquettes
pour expliquer les phénomènes bizarres constatés dans certaines
machines, et aussi pour faire de la prospective.

CHAPITRE I

Definition - Formulation - Modelisation et Caracterisation

I-1 Généralités :

La constitution des machines tournantes est en générale La même malgré les différences entre leurs principes de fonctionnement et les formes d'énergie mise en jeu. Elles sont constituées d'une partie fixe dite stator et d'une autre mobile (en rotation) dite rotor. Selon la forme d'énergie mise en jeu voici une classification générale des machines tournantes :

- 1) Machines électriques : pour transformer l'énergie électrique en énergie mécanique et inversement tel que : moteurs et alternateurs
- 2) Machines à combustion et turbo machines : Pour transformer l'énergie calorifique, de pression, ou de vitesse du fluide en énergie mécanique et inversement tel que : Turbines (à gaz, à vapeur, et hydrauliques), compresseurs centrifuges et axiaux, ventilateurs, et pompes.

L'étude des vibrations des machines tournantes revient à l'étude de la source des vibrations ; La structure est constituée par le stator donc elle n'est pas mobile par destination.

Les forces tournantes engendrées par le rotor sont évidentes, elles excitent son stator et l'édifice qui le supporte.

Le rotor est associé à la structure par des liaisons, ces liaisons permettent la rotation par rapport à la structure. Elles sont l'objet de nombreux

études que de coussinets et de roulements inventés.

Le rotor "voit" la structure à travers des liaisons et inversement la structure et les liaisons imposent leurs caractéristiques au rotor en des zones particulières, Les soies de coussinet par exemple

Dès qu'on impose une vitesse de rotation à une poutre, elle devient un rotor, L'ingénieur est confronté au problème de vibration dont le rotor est la source, il est donc naturel de s'intéresser à la source. L'étude de l'influence de la structure est limitée à celle des liaisons.

Un comportement tranquille de la machine ne se réduit pas à celui du rotor tranquille, La structure est concernée elle engendre le bruit

Parmi les causes d'excitation de la structure et du rotor on peut marquer :

- 1) Les balours qui habitent le rotor engendrent des forces tournantes
- 2) La flexibilité du rotor conduit à la formation des balours.
- 3) La mauvaise coaxialité et l'anisotropie des liaisons
- 4) La variation des forces spécifiques appliquées au rotor y compris les forces magnétiques dans les machines électriques

Remarque : La puissance de la machine n'est pas en relation directe avec les vibrations

Cet élargissement appelle une optimisation entre les caractéristiques du rotor, des liaisons, et des structures. Les liaisons constituent les points de rencontre particuliers, ces rencontres, s'expriment par des impédances.

Remarque: Les vibrations de torsion et longitudinales sont beaucoup moins dangereuses que celles de flexion

I-2 Définitions

I-2-1 **La poutre** : est un système continu dont les dimensions transversales sont faibles par rapport à sa dimension longitudinale mieux par rapport à la distance entre deux points nodaux d'un régime vibratoire

I-2-2 **Le rotor** : lorsqu'on impose une vitesse de rotation " ω " à une poutre, elle devient un Rotor

I-2-3 **Les vitesses critiques** : sont les vitesses de rotation du rotor pour lesquelles, en un point et pour une direction fixée, l'amplitude d'une grandeur (déplacement, vitesse de déplacement, force ...) passe par un maximum.

Pour un ensemble physique, il existe autant de vitesses critiques que de points et de direction d'auscultation. Si les amortissements sont faibles, les distances entre les vitesses critiques associées à un même mode de vibration sont faibles

Les vitesses critiques correspondent à une résonance, c'est-à-dire à la rencontre en sympathie d'une fréquence d'excitation égale à la vitesse de rotation et d'une fréquence propre spécifique de l'ensemble structure-liaisons

Lorsque les déformations intrinsèques de flexion du rotor sont grandes les vitesses de rotation qui correspondent au maximum de l'amplitude des grandeurs associées au mouvement du rotor sont des vitesses critiques de flexion du rotor.

Si l'amortissement des liaisons est faible, les pulsations propres sont, en générale, proches des vitesses critiques.

I-3 Propos sur la modélisation, la caractérisation, et le découpage

I-3-1 Modélisation

Définitions :

Pour une première définition, on trouve dans le rapport (Meadows) la définition suivante :

Un modèle est un ensemble ordonné d'hypothèses à propos d'un système complexe, c'est une tentative pour comprendre un aspect donné d'un ensemble de phénomènes diversifiés, cette tentative procède d'un choix d'observations et d'enseignements et a pour but d'établir un ensemble d'étude générales au sujet à traiter. (Fin de citation)

C'est par les modèles que les compromis, pour ne pas dire les optimums sont trouvés, parce qu'ils permettent des analyses et des synthèses qui se bouclent sur des réalités

La séquence de construction d'un modèle s'introduit sur le front d'un vecteur de l'évolution, sur la trajectoire duquel nous pouvons repérer une certaine connaissance et un certain nombre de moyens.

La séquence appréhende une réalité par une intention lorsqu'elle appréhende un projet, l'intention est animée par une étude de fiabilité, ou par son aspect dégénéré, la viabilité.

L'intention permet de dégager des éléments qui constituent un modèle c'est par exemple l'ensemble des "n" premières vitesses critiques ou fréquences de résonance d'un rotor ou d'un système sollicité par une force harmonique.

Nous désignerons par modélisation la démarche qui, partant d'une réalité objet, permet, par une intention, la formation d'un ensemble d'éléments appelé modèle; Le modèle exprime donc une des manifestations d'un objet.

La modélisation exige que les conditions aux limites spatiales soient définies par des impédances, impédance d'utilisation; Encastrement idéal (déplacement nul \rightarrow impédance infinie) au droit d'une section (force nulle \rightarrow impédance nulle).

La schématisation des actions et des limites pénètre dans la modélisation par le fait qu'elle résulte également d'une intention dont il faudra pour elle-même, c'est à dire en la dégageant des éléments du modèle, vérifier la validité; plus positivement, il pourra être nécessaire de définir la technologie d'une construction de telle sorte que ses limites soient caractérisables de façon précise.

I-3-2 Caractérisation :

Définition: Caractériser un système réel c'est atteindre ses composants et les associer pour créer un système image; La caractérisation utilise des lois de l'ensemble de la connaissance à un instant donné.

Il apparaît donc que la caractérisation comporte un indice de profondeur et un indice de qualité quantifiée.

La Profondeur: Est liée au composant, que l'on prendra sans discuter et dont on acceptera une certaine description globale empreinte de la subjectivité d'un ensemble d'hypothèses: c'est l'objet massique indéformable d'une structure continue discrétisée

La qualité quantifiée : Intervient donc d'abord au niveau du composant ; elle s'exprime aussi dans l'édification de la structure du système : Pour associer un objet massique indéformable à un objet déformable, il faut définir un domaine de contact sur lequel les déformations locales ne seront pas obligatoirement prises en considération.

Aux domaines de contact sont associés les conditions limites et les impédances ; par l'isolement qu'elles spécifient, elles sont un préalable à la modélisation, tout comme le composant et la structure, elles prennent leur qualité quantifiée dans l'ensemble des connaissances que l'on aborde par des hypothèses subjectives et de connivence avec notre ignorance. Le système image pour nous se substitue au modèle notre modèle est à l'amont.

I-3-3 Découpage :

Dans sa réalité, un rotor est défini par un plan qui le représente. Pour l'appréhender par la voie théorique il faut injecter des valeurs numériques dans les formules de sa caractérisation. Ces valeurs numériques doivent être issues du plan auquel on impose un découpage qui, lorsque les masses sont cocentrées devient une caractérisation. Le mode de découpage peut varier avec la caractérisation utilisée.

Dans tous les cas, certaines démarches empiriques sont à la base du découpage. Et voici quelques règles pour un rotor à sections circulaires équipées de disques et caractérisées par des éléments massiques indéformables (sans longueur) et déformables sans masses.

- 1) Les éléments déformables et indéformables doivent être alternés
- 2) Le nombre des éléments déformables ne doit pas être trop grand pour éviter les erreurs d'arrondi importantes, qui par l'erreur héritée, peut créer une solution étrangère.
- 3) La longueur des éléments doit être faible dans les zones à forte variation du diamètre.
- 4) La masse des éléments doit être concentrée par composition linéaire à partir du barycentre.
- 5) Pour les formes particulières, il n'existe pas de règles simples. Il est donc nécessaire de construire une maquette dont on détermine les vitesses critiques par voie expérimentale.

Conclusion : Les règles de découpage sont fondées sur des expériences limitées et soutenues par des théories partielles, de ce fait elles ne peuvent prétendre être indiscutables.

A partir de valeurs discrètes qui définissent la section, le module d'élasticité, les inerties... on peut construire des fonctions d'interpolation.

Le découpage influence d'autant plus l'écart entre les vitesses critiques issues d'un calcul et celles issues d'une expérience sur l'objet réel - ou sur une maquette, que le rotor, (ou bien poutre avec vitesse de rotation imposée) est éloigné de sa définition canonique : Dimensions transversales faibles par rapport à sa longueur, en fait cet écart est en relation directe avec la qualité attachée au concept poutre ou rotor tel qu'ils ont été définis.

Pratiquement il n'est pas rare de trouver pour la première vitesse critique un écart de l'ordre de 1% qui pour la seconde vitesse critique peut atteindre 10%

Pour réduire cet écart il est possible de définir par approximations successives, un profil convenable, après cet ajustage, l'ordinateur peut calculer la poutre ou le rotor dans des situations qu'il est difficile d'obtenir par voie expérimentale

Expérience et théorie se complètent au sens du paragraphe précédent

I-4 Etude théorique d'un ensemble simple sans effet gyroscopique

I-4-1 Définition - Formulation

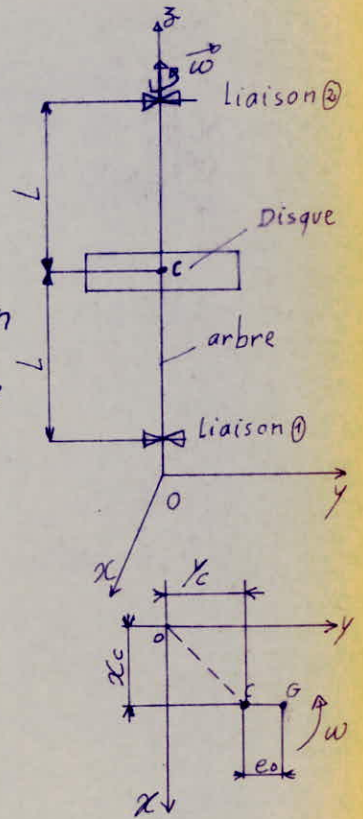
Soit un ensemble rotor liaisons défini par la figure (I-1). C'est l'ensemble adopté par JEFFCOTT en 1919 pour l'étude des mouvements d'un rotor :

Il est disposé verticalement pour éliminer l'influence de la pesanteur. Les liaisons ① et ② sont constituées par des liaisons rigides, à rotules qui imposent des déplacements nuls, la liaison ① ou ② comprend une butée qui évite les déplacements verticaux du rotor. L'arbre déformable en flexion est supposé sans masse, son diamètre est constant, sa raideur vue au droit du disque est notée "k". Le disque mince indéformable de masse "m" est calé à égale distance des liaisons, il est entraîné à la vitesse " ω "

(où $\omega = \text{constante}$) autour d'un axe parallèle à $\vec{o\bar{z}}$ et passant par \bar{c} , son centre de gravité \bar{G} est à la distance (e_0) de son centre géométrique (c) e_0 représente l'excentrement

- Les mouvements de torsion autour de oz et de traction - compression dans la direction de $\vec{o\bar{z}}$ ne sont pas prise en compte, le disque étant à égale distance des liaisons, l'effet gyroscopique n'existe pas

En désignant par (α) le coefficient d'amortissement visqueux associé au mouvement du disque; Le mouvement du disque dans le plan (oxy) est défini par l'équation qui résulte de l'application du théorème de d'Alembert au centre de gravité (G)



Fig(I-1)

$$m \frac{d^2 U}{dt^2} + \alpha \frac{dU}{dt} + kU = m\omega^2 e_0 \exp(j\omega t) \quad (1-1)$$

avec $U = x_c + jy_c$ (x_c, y_c) sont les coordonnées de (c)
 $j = \sqrt{-1}$

La réponse qui caractérise le régime forcé s'obtient en posant :

$$U = \bar{U} \exp(j\omega t) \quad (1-2)$$

(1-2)-dans (1-1) fournit :

$$(k - m\omega^2 + j\omega\alpha) \bar{U} = m\omega^2 e_0 \quad \text{d'où}$$

$$|\bar{U}| = oc = \frac{m\omega^2 e_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 \alpha^2}}$$

En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ on obtient

$$\frac{oc}{e_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1\right]^2 + \left(\frac{\alpha}{m\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (1-3)$$

I-4-2 Vitesse critique et pulsation propre

$$oc = e_0 \left[\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 - 1 \right]^2 + \left(\frac{\alpha}{m\omega_0} \right)^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Après dérivation par rapport à $\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$ et en posant

$$\frac{d(oc)}{d\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)} = 0 \quad \text{on obtient}$$

$$2\left(\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1\right) + \left(\frac{\alpha}{m\omega_0}\right)^2 = 0$$

donc (oc) est maximum pour

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)_{cr} = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{m\omega_0}\right)^2}$$

a) La vitesse critique de déplacement : c'est la vitesse pour laquelle l'amplitude du déplacement passe par un maximum, elle est donc égale à :

$$\omega_{cr} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2}{km}\right)}} \quad (1-4)$$

$$\text{Si } (\alpha) \text{ est petite: } \omega_{cr} = \left[1 + \frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{km} \right] \quad (1-5)$$

(ω_{cr}) est supérieure à (ω_0)

b) La pulsation propre : c'est la pulsation qui caractérise le mouvement libre du système.

L'équation (1-1) sans second membre s'écrit

$$m \frac{d^2U}{dt^2} + \alpha \frac{dU}{dt} + kU = 0 \quad \text{ou encore}$$

$$\ddot{U} + \frac{\alpha}{m} \dot{U} + \frac{k}{m} U = 0$$

La solution de cette équation dépend du signe de Δ

$$\Delta = \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}$$

1) Si $\Delta < 0 \iff \alpha$ petit

La solution est de la forme: $U = \exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right) \sin(\omega_1 t + \varphi)$

$$\text{où } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2}$$

La pulsation propre ω_1 est donc : $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{km}}$

$$\text{ou bien } \omega_1 = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\alpha^2}{km}\right) \quad (1-6)$$

ω_1 est inférieure à ω_0

2) Si $\Delta = 0$ on calcul l'amortissement critique : α_{cr}

$$\alpha_{cr} = 2\sqrt{km} \quad (1-7)$$

De (1-5) et (1-6) on remarque que la vitesse critique est supérieure à la pulsation propre sauf à la limite pour $\alpha = 0$ (amortissement nul).

L'amortissement est donc responsable de la distance entre la vitesse critique et la pulsation propre.

g) La vitesse critique de vitesse de déplacement: c'est la vitesse pour laquelle l'amplitude de la vitesse de déplacement passe par un maximum

Au lieu du déplacement (U) considérons la vitesse de déplacement ($\frac{dU}{dt}$)

$$v = \frac{dU}{dt} = j\omega \bar{U} \exp j\omega t \quad v = \bar{V} \exp j\omega t$$

et par suite : $(k - m\omega^2 + j\omega\alpha) \frac{\bar{V}}{j\omega} = m\omega^2 e_0$

$$|\bar{V}| = \frac{m\omega^3 e_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 \alpha^2}}$$

d'où l'équation qui donne la vitesse critique de vitesse de déplacement :

$$\frac{\omega_0}{\omega_{cr}} = \frac{1}{6} \left[4 - 2 \left(\frac{\alpha}{m\omega_0} \right)^2 + \sqrt{4 \left(\frac{\alpha}{m\omega_0} \right)^4 + 4 - 16 \left(\frac{\alpha}{m\omega_0} \right)^2} \right]$$

I-5 Vitesses critiques secondaires:

Il peut exister des troubles vibratoires qui se traduisent, pour les rotors dont l'axe de rotation est horizontal, par une variation rapide des amplitudes, en fonction de la vitesse de rotation, autour d'une valeur égale à la moitié de la première vitesse critique de flexion; ces troubles sont dues à deux causes :

- D'une part, la combinaison de la pesanteur et du balour résiduel
- D'autre part, la combinaison de la pesanteur et de l'anisotropie de l'élasticité de flexion (l'inertie radiale est caractérisée par une ellipse, c'est le cas, par exemple, d'un rotor muni de rainures de clavetage).

CHAPITRE II

Méthodes de détermination des vitesses critiques des rotors

II-1-Généralités

Ils existent des théories qui sont à la base des méthodes de détermination des vitesses critiques et, d'une façon générale des méthodes qui permettent l'étude des régimes vibratoires en fonction de la vitesse de rotation ; les vitesses critiques s'en dégagent directement.

Pour les systèmes conservatifs, les pulsations propres sont égales aux vitesses critiques.

Ces méthodes exigent la programmation d'un algorithme et un ordinateur

En certains endroits et en certaines situations on peut juger ce matériel excessif pour la résolution des problèmes simples. Nous présenterons donc quelques méthodes accessibles à tout Bureau d'Etudes. Ces méthodes ont par ailleurs l'intérêt de pouvoir être utilisées pour tester les programmes traités par ordinateur... et aussi d'être en relation directe avec la physique des phénomènes. La méthode des maquettes, est particulièrement intéressante. Elle peut être directement intégrée à une procédure théorico-experimentale.

II-2 Méthodes analytiques

II-2-1 Systèmes discrets

Le rotor est assimilé à une poutre à "n" degrés de liberté ; "n" étant le nombre de masses discrètes

m_i = Les masses en vibration

P_i = Les forces dynamiques correspondantes

a_{ij} = Les coefficients d'influence

y_i = Les flèches mesurées au droit des masses

$i = 1, 2, 3, \dots, n$

$j = 1, 2, 3, \dots, n$

Voir figure (II-1)

La résistance des matériaux permet d'écrire

$$y_1 = a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + a_{13}P_3 + \dots + a_{1n}P_n$$

$$y_2 = a_{21}P_1 + a_{22}P_2 + a_{23}P_3 + \dots + a_{2n}P_n$$

(2-1)

$$y_n = a_{n1}P_1 + a_{n2}P_2 + a_{n3}P_3 + \dots + a_{nn}P_n$$

Pour le régime vibratoire caractérisé par la pulsation "ω" on décrit :

$$\text{Pour } (i = 1, 2, \dots, n) , \quad P_i = m_i y_i \omega^2 \quad (2-2)$$

De (2-1) et (2-2) on déduit le système (2-3)

$$y_1 (a_{11} m_1 \omega^2 - 1) + y_2 a_{12} m_2 \omega^2 + y_3 a_{13} m_3 \omega^2 + \dots + y_n a_{1n} m_n \omega^2 = 0$$

$$y_1 a_{21} m_1 \omega^2 + y_2 (a_{22} m_2 \omega^2 - 1) + y_3 a_{23} m_3 \omega^2 + \dots + y_n a_{2n} m_n \omega^2 = 0$$

$$y_1 a_{n1} m_1 \omega^2 + y_2 a_{n2} m_2 \omega^2 + \dots + y_n (a_{nn} m_n \omega^2 - 1) = 0$$

Le système (2-3) est linéaire, homogène en: y_1, \dots, y_n et n'admet de solution que si le déterminant des inconnues est nul cette condition fixe l'équation aux pulsations

$$\begin{vmatrix} a_{11}m_1\omega^2 - 1 & a_{12}m_2\omega^2 & \dots & a_{1n}m_n\omega^2 \\ a_{21}m_1\omega^2 & a_{22}m_2\omega^2 - 1 & a_{23}m_3\omega^2 & \dots & a_{2n}m_n\omega^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}m_1\omega^2 & a_{n2}m_2\omega^2 & \dots & \dots & a_{nn}m_n\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2-4)$$

La matrice des coefficients d'influence est symétrique (Théorème de réciprocité de Maxwell)

L'équation (2-4) permet le calcul des "n" premières pulsations propres, et avec le système homogène (2-3) on peut pour chacune des pulsations propres déterminer le signe des rapports: $\frac{y_{n-1}}{y_n}, \dots, \frac{y_2}{y_n}, \frac{y_1}{y_n}$ qui fixe la nature du mode de vibration

Voir figure (II-2) d'un rotor à trois liaisons et trois masses

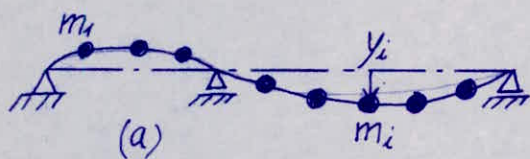


Fig (II-1) rotor à 3 liaisons

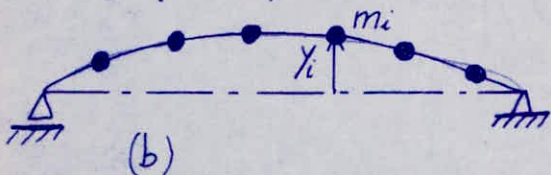
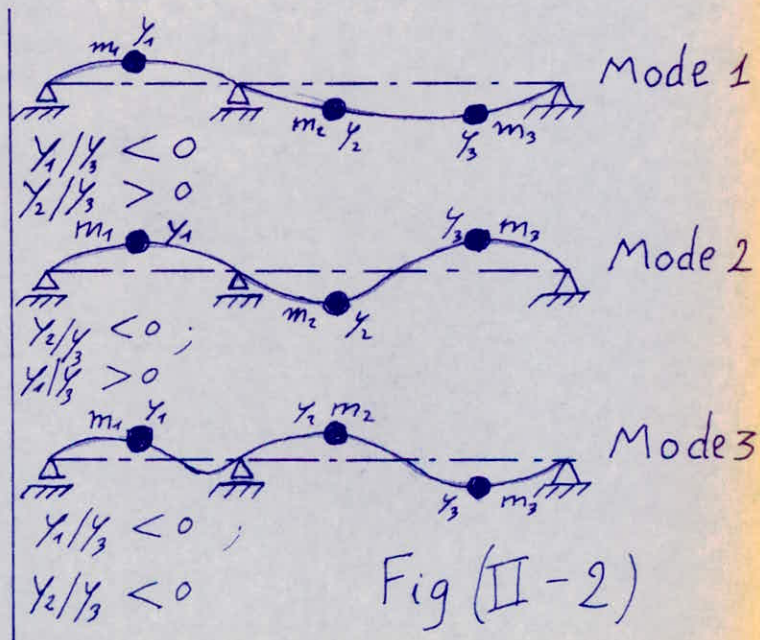


Fig (II-1) rotor à deux liaisons



Sous forme matricielle, le système (2-1) s'écrit

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

Et avec (2-2) on peut écrire

$$\frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

Avec $[\mathbf{I}]$ la matrice unité d'ordre "n"

D'où les valeurs propres " λ "; $\lambda = 1/\omega^2$
obtenues en annulant le déterminant :

$$\det \left[\begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{I} \end{bmatrix} \right] = 0 \quad (2-7)$$

En se fixant par exemple, la valeur y_1 , la matrice colonne des y_j ($j=1, \dots, n$) calculée par le système (2-8) permet de définir le mode vibratoire pour chaque valeur de λ_i ($i=1, 2, \dots, n$)

Le système d'équations linéaires homogène (2-8)

écrit sous forme matricielle est :

$$\left[\begin{array}{c} [A] \\ \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} \end{array} \right] - \lambda [I] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = 0 \quad (2-8)$$

Remarquons que la notion d'indétermination liée au phénomène de vitesse critique se traduit ici par l'indétermination des solutions du système homogène (2-3).

Il faut se fixer arbitrairement une des flèches
Pour calculer les autres $(n-1)$ flèches

Un grand nombre de degrés de liberté conduit rapidement à des calculs longs. Et il est très utile d'envisager l'utilisation d'un ordinateur.

II-2-2 Systèmes continus

Considérons le cas simple suivant : Fig (II-3)
Un rotor à deux appuis rigides, de section circulaire constante "F", de longueur "L"

En négligeant l'effet de l'effort tranchant "T", La résistance des matériaux permet d'écrire l'équation :

$$EI \frac{d^2 U}{dx^2} = -M \quad (2-9) \quad \text{où} \begin{cases} M: \text{est le moment flechissant} \\ U: \text{est la flèche} \\ E: \text{est le module d'élasticité} \\ I: \text{est le moment d'inertie} \end{cases}$$

En dérivant deux fois par rapport à (x) on aura :

$$EI \frac{d^3 U}{dx^3} = -T \quad (2-10)$$

$$EI \frac{d^4 U}{dx^4} = Q \quad (2-11) \quad \text{où } Q \text{ est la charge par unité de longueur } (x)$$

La force centrifuge : $|Q| = \rho F \omega^2 |U|$ (2-12)
peut avoir la forme suivante

$$Q = \rho F \omega^2 U = -\rho F \frac{d^2 U}{dt^2} \quad \text{où } \rho: \text{est la masse volumique du rotor}$$

d'où l'équation différentielle suivante

$$EI \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = -\rho F \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (2-13)$$

Puisque nous sommes à la recherche des solutions du type :

$$u = |z| e^{j\omega t}$$

On a après substitution l'équation suivante :

$$Z^{(4)} - a^4 Z = 0 \quad (2-14)$$

où

$$a^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EI}$$

La solution de (2-14) est :

$$Z = A \sin ax + B \cos ax + C \operatorname{Sh} ax + D \operatorname{Ch} ax \quad (2-15)$$

Les constantes A, B, C, et D doivent être déterminées à partir des conditions aux limites

La flèche et le moment fléchissant sont nuls aux droites des liaisons. D'où les conditions aux limites suivantes :

1) Pour $x=0$ on a $z=0$ et $\frac{d^2 z}{dx^2} = 0$

2) Pour $x=l$ on a $z=0$ et $\frac{d^2 z}{dx^2} = 0$

Des deux premières conditions il résulte que :

$$B = D = 0$$

Les deux autres donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \operatorname{Sin} al + C \operatorname{Sh} al = 0 \\ -A \operatorname{Sin} al + C \operatorname{Sh} al = 0 \end{array} \right\} \quad (2-16)$$

Ce système n'admet de solutions que si le déterminant des inconnues est nul

$$\begin{vmatrix} \operatorname{Sin} al & \operatorname{Sh} al \\ -\operatorname{Sin} al & \operatorname{Sh} al \end{vmatrix} = 0$$

D'où l'équation suivante :

$$\text{Sin}al \cdot \text{Sh}al = 0 \quad (2-17)$$

Or le Sinus hyperbolique s'annulant seulement, pour $\text{sh}al = 0$ et il reste

$$\text{Sin}al = 0 \quad \text{ou bien}$$

$$al = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ou compte tenu de la notation

$$\omega = \frac{\pi^2 n^2}{L^2} \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot F}} \quad (2-18)$$

En posant $n=1$ on aura $\omega = \omega_{c1}$ (Première vitesse critique)
 " $n=2$ " " (seconde " ")
 etc...

La forme de la ligne élastique de la poutre ou du rotor parcourue par les vibrations de flexion est de la forme

$$Z = A \text{Sin} \frac{\pi n x}{L} \quad (2-19)$$

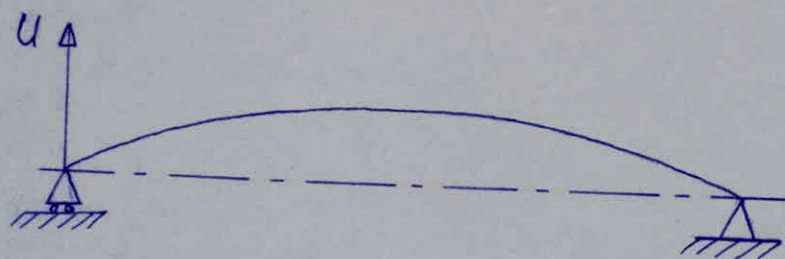


Fig (II-3)

II-3 Méthodes par les énergies

Se sont des méthodes basées sur le théorème des forces vives qui exprime l'égalité entre les énergies potentielle et cinétique maximales

II-3-1 Méthode de Rayleigh

Principe : Considérons un rotor guidé par deux ou trois liaisons découpé en "n" éléments, à chacun desquels on affecte le poids W_i ($i = 1, 2, \dots, n$) et la flèche " y_i "



(b) Position horizontale

m_i : La masse " y_i "
 y_i : La flèche " y_i "
 K_i : La raideur de l'arbre

Fig (II-4)



(a) Position verticale

Le maximum d'énergie cinétique " T " est :

$$T_{max} = \frac{1}{2} (m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 + \dots + m_n V_n^2) \quad (2-20)$$

En vibrations laterales Le mouvement des masses est sinusoïdal $y_i = y \sin \omega t$ donc la vitesse maximale sera : $V_{i,max} = y_i \omega$ d'où

$$T_{max} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i^2 \quad (2-21)$$

Le maximum d'énergie potentielle "P" est :

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} K_i \cdot y_i \quad (2-22)$$

où K_i : est la raideur de l'arbre au droit de "mi"

$$T_{\max} = P_{\max} \Rightarrow \text{conduit à}$$

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i=1}^n K_i y_i^2}{\sum_{i=1}^n m_i y_i^2} \quad (2-23)$$

1) En adoptant une déformée statique les procédés classiques de la résistance des matériaux nous permettent

d'écrire $y_i = c \delta_i$ où $K_i \delta_i = W_i = m_i g$
 "δ_i" est la flèche statique au droit de "mi"

Alors
$$\omega^2 = \frac{g \sum W_i \cdot \delta_i}{\sum W_i \cdot \delta_i^2} \quad (2-24)$$

Et on n'a pas tenu compte des amortissements la pulsation propre ω sera égale à la vitesse critique de rotation ω_c d'où

$$\omega_c = \sqrt{g \frac{\sum W_i \cdot \delta_i}{\sum W_i \cdot \delta_i^2}} \quad (2-25)$$

2) La méthode de Rayleigh peut encore être utilisée en adoptant pour déformée dynamique de base \mathcal{X}_0 une courbe qui

est satisfaisante aux conditions aux limites, dans ce cas la première pulsation propre ou (vitesse critique) est :

$$\omega_{c1} = \sqrt{g \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_i^2 E I_i L_i}{\sum_{i=1}^n W_i y_i^2}} \quad (2-26)$$

où : E = module d'élasticité
 y_i = flèche dynamique
 I = moment d'inertie
 L_i = position axiale de (m_i)

Remarque : La méthode de Rayleigh qui suppose avoir fait choix d'une déformée revient à introduire une contrainte dont l'effet est de limiter le nombre de degrés de liberté du système, donc à augmenter sa vitesse critique, cette augmentation ne peut être reconnue par comparaison avec le résultat du calcul d'une autre méthode que si les hypothèses de base sont les mêmes

II-3-2 Méthode de Ritz : Elle représente une amélioration de la méthode de Rayleigh grâce à la notion de minimum de la pulsation propre

Pratiquement on peut introduire dans l'expression mathématique de la déformée certains paramètres choisis pour minimiser la vitesse critique ou (la pulsation propre)

Pour les cas complexes où l'expression analytique de la déformée

est difficile à introduire on adopte plusieurs déformées et on choisit celle qui donne la plus faible vitesse critique par la méthode de Rayleigh car elle se rapproche de la vraie valeur.

Remarque : La méthode de Rayleigh-Ritz peut être utilisée pour la détermination des vitesses critiques d'ordre supérieur en choisissant une déformée qui présente des nœuds dont leurs positions sont convenablement choisis.

II-3-3 Application :

Appliquons l'équation de Rayleigh-Ritz au système continue défini au paragraphe (II-2-2).

En adoptant une déformée dynamique : $y = z \sin \frac{\pi x}{L}$
 Les conditions aux limites sont vérifiées $\left[\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \end{array} \right.$
 La première vitesse critique est donnée par :

$$\omega_c = \sqrt{g \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 E I_i L_i}{\sum_{i=1}^n W_i y_i^2}}$$

et puisque le système est continue on peut écrire

$$\omega_c = \sqrt{\frac{\int_0^L \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 E I dx}{\int_0^L \rho F y^2 dx}}$$

Sachant que : $\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 = \frac{z^2 \pi^4}{L^4} \sin^2 \frac{\pi x}{L}$

Après substitution on aura :

$$\omega_c = \sqrt{\frac{\int_0^L \frac{z^4 \pi^4}{L^4} EI \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx}{\int_0^L \rho F z^4 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx}}$$

Après intégration et simplification on arrive à :

$$\omega_c = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot F}}$$

Ce résultat est le même que celui trouvé en (II-2-2) grâce au bon choix de la déformée adoptée .

II-4 Formule de Dunkerley

Partant de l'équation (2-7) du paragraphe (II-2-1) où $\lambda = 1/\omega^2$

$$\det \left[\begin{array}{c} [A] \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} - \lambda [I] \end{array} \right] = 0 \quad (2-7)$$

On obtient le polynome caractéristique suivant :

$$\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_{n-2} \lambda^2 + c_{n-1} \lambda + c_n = 0 \quad (2-27)$$

$$c_1 = - \sum_{i=1}^n a_{ii} m_i$$

$$c_k = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(1, 2, \dots, k) \prod_{j=1}^k (a_{ij}) m_j \quad k = 2, 3, \dots, n$$

où $E_i(1, 2, \dots, k)$ est une fonction linéaire de k variables

\prod^k est une variable constituée du produit de k éléments

$$\prod^k (a_{ij} m_j)^{-1} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Le calcul montre que tous les éléments $(a_{ij} m_j)^{-1}$ sont petit (c à d) de l'ordre 10^{-6} (seconde)² donc il est clair que

Les produits \prod^k ($k = 2, 3, \dots, n$) sont très petits; on les néglige et le polynôme caractéristique devient:

$$\lambda^n - (a_{11} m_1 + a_{22} m_2 + \dots + a_{nn} m_n) \lambda^{n-1} = 0 \quad (2-28)$$

$$\lambda^{n-1} (\lambda - (a_{11} m_1 + \dots + a_{nn} m_n)) = 0 \quad (2-29)$$

ce qui donne

$$\lambda_1 = \frac{1}{\omega_c^2} = a_{11} m_1 + a_{22} m_2 + \dots + a_{nn} m_n \quad (2-30)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0 \quad (2-31)$$

$a_{ii} m_i = \frac{1}{\omega_i^2}$; ω_i : vitesse critique du rotor supposé sans masse, chargé uniquement par la masse d'ordre $i = 1, 2, \dots, n$

donc la formule de Dunkerley s'écrit:

$$\frac{1}{\omega_c^2} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\omega_i^2} \quad (2-32)$$

Remarques :

- 1) La formule de Dunkerley présente une simplicité remarquable qui permet quelquefois l'étude de l'influence d'une masse sur la vitesse critique; En effet, soit ω_c cette vitesse critique.

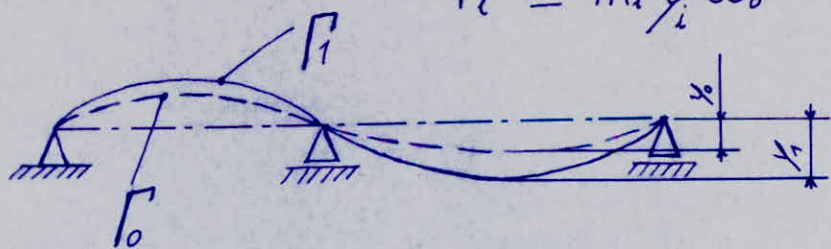
Ajoutons une masse (m_{nm}) et calculons la nouvelle vitesse critique ω_{cr} :

$$\frac{1}{\omega_{cr}^2} = \frac{1}{\omega_c^2} + \frac{1}{\omega_{nm}^2}$$

- 2) Mais l'application de la formule de Dunkerley nécessite plusieurs déterminations préalables pour le calcul des " ω_i "
- 3) Pour les rotors dont les dimensions transversales sont faibles par rapport à leurs longueurs ($D/L < 0,05$) on peut espérer une approximation de l'ordre de 5% par rapport à la vraie valeur
- 4) Cette formule ne permet pas le calcul des vitesses critiques d'ordre supérieur
- 5) La formule de Dunkerley sous-estime la valeur de la vitesse critique

II-5 Méthode de Stodola

Principe : Elle considère le rotor et procède par approximations successives. Après avoir choisi une déformée initiale Γ_0 (Fig II-5) qui satisfait aux conditions aux limites (appuis rigide à rotules) et une vitesse angulaire en générale on prend ($\omega_0 = 1 \text{ rad/sec}$). On détermine par les procédés classiques de la résistance des matériaux la déformée Γ_1 qui résulte de l'application statique des efforts centrifuges :

$$F_i = m_i y_i \omega_0^2$$


Fig(II-5)

a) Si Γ_1 est affine de Γ_0 dans le rapport ($r = \gamma_1/\gamma_0$) La vitesse critique est donnée par : $\omega_c = \omega_0 \sqrt{1/r}$ (2-33)

b) Si Γ_1 n'est pas affine de Γ_0 on reprend la détermination qui vient d'être précisée en choisissant Γ_1 pour déformée initiale et ainsi de suite jusqu'à ce que la déformée obtenue Γ_{i+1} soit affine de Γ_i

La justification est particulièrement élégante, elle tient à la notion de la linéarité des déformations aux efforts et au fait de l'équilibre indifférent qui représente la définition même d'une vitesse critique

Le mouvement général d'un système à "n" degrés de liberté est donné par :
$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{j=n} A_{ij} \sin(\omega_j t + \varphi_j) \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \dots n \\ j = 1, 2, 3 \dots n \end{matrix}$$
 (2-34)

En choisissant une déformée initiale Γ_0 donnée par une superposition arbitraire de tous les modes avec les constantes (a_j)

$$\Gamma_0 : \gamma_i = \sum_{j=1}^{j=n} a_j A_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3, \dots, n \\ j = 1, 2, 3, \dots, n \end{matrix} \quad (2-35)$$

Les forces d'inertie correspondantes sont

$$F_i = m_i \omega^2 \sum_{j=1}^{j=n} a_j A_{ij} \quad (2-36) \quad i = 1, n$$

m_i sont les masses en vibration

ω est la vitesse de rotation

Maintenant si le système vibre aux modes principaux, Les forces d'inertie et les flèches correspondantes sont :

$$m_i \sum_{j=1}^{j=n} A_{ij} \omega_j^2 \quad ; \quad \left(\sum_{j=1}^{j=n} A_{ij} \right) = \text{flèche au droit de } m_i \quad (2-37)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

Les forces d'inertie (2-36) donnent des nouvelles flèches y_i

$$\Gamma_1 : y_i = \omega^2 \sum_{j=1}^{j=n} (a_j A_{ij}) / \omega_j^2 \quad \begin{matrix} i = 1, n \\ j = 1, n \end{matrix} \quad (2-38)$$

En adoptant Γ_1 définie en (2-38) comme déformée et en répétant l'opération on aura :

$$y_i = \omega^4 \sum_{j=1}^{j=n} (a_j A_{ij}) / \omega_j^4 \quad i = 1, n \quad (2-39)$$

Et après " r " iterations la déformée obtenue et adoptée aura la forme générale suivante :

$$y_i = \omega^{2r} \sum_{j=1}^{j=n} (a_j A_{ij}) / \omega_j^{2r} \quad \begin{matrix} i = 1, n \\ j = 1, n \end{matrix} \quad (2-40)$$

ou bien

$$y_i = \frac{a_1 \omega^{2r}}{\omega_1^{2r}} \left(A_{i1} + a_2 A_{i2} \frac{\omega_1^{2r}}{a_1 \omega_2^{2r}} + \dots + a_n A_{in} \frac{\omega_1^{2r}}{a_1 \omega_n^{2r}} \right) ; i = 1, n \quad (2-41)$$

Sachant que $(\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n)$ et que le nombre d'iterations (r) est suffisamment grand, donc les rapports des vitesses de rotation critiques deviennent très petits et la relation (2-41) s'écrit :

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 A_{11} \frac{\omega^{2r}}{\omega_1^{2r}} \\ y_2 &= a_1 A_{21} \frac{\omega^{2r}}{\omega_1^{2r}} \\ &\vdots \\ y_n &= a_1 A_{n1} \frac{\omega^{2r}}{\omega_1^{2r}} \end{aligned} \quad (2-42)$$

On constate cette convergence rapide (vers le mode fondamental de vibration) de la méthode de Stodola

Remarque : L'ordre de la vitesse critique que l'on détermine par cette méthode est caractérisé par la nature de la déformée

adoptée. Ce fait revient à dire que pour le calcul de la vitesse critique du second ordre (1 nœud) il faudra faire choix d'une déformée de base (qui ne peut plus être la déformée statique) présentant un nœud aussi voisin que possible de sa vraie position, si de plus on précise que la convergence des iterations n'existe pas pour les vitesses critiques d'ordre supérieur, on conçoit dans ce cas la complexité du procédé de Stodola

CHAPITRE III

Applications aux cas simples

III-1 Exemple 1:

Soit à calculer la première vitesse critique d'un arbre défini par la Figure (III-1)

ρ = masse volumique de l'arbre

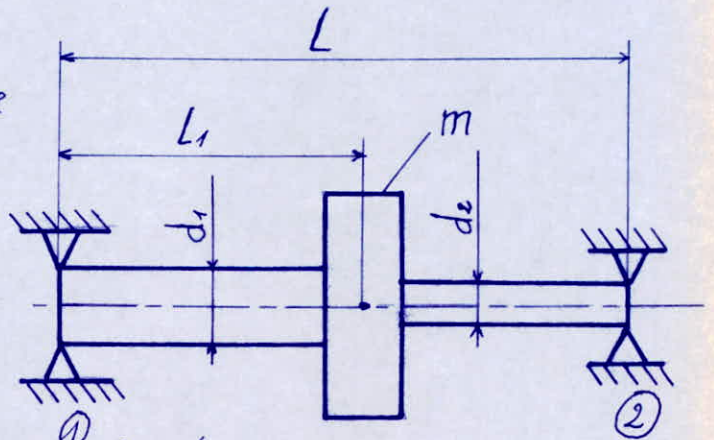


Fig (III-1)

Solution:

La formule de Dunkerley permet d'écrire.

$$\frac{1}{\omega_c^2} = \frac{1}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_1^2}$$

ω_0 = vitesse critique de l'arbre seul.

ω_1 = vitesse critique du disque sur l'arbre sans masse

$$\omega_c = \frac{\omega_0 \cdot \omega_1}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}}$$

Il reste à calculer ω_1 et ω_0

Calcul de ω_1 :

1) calcul des réactions R_1, R_2 des liaisons ① et ②

$$R_1 + R_2 = W$$

W = poids du disque

$$R_2 L - W L_1 = 0$$

$$R_2 = \frac{W L_1}{L}$$

$$R_1 = \frac{W(L - L_1)}{L}$$

Le théorème de Castigliano permet d'écrire :

$$y = \int_0^L \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial W} dx$$

Calcul des moments fléchissants: $M(x)$

$$0 \leq x \leq L_1 \rightarrow M(x) = \frac{W(L-L_1)}{L} x$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial W} = \frac{(L-L_1)}{L} \cdot x$$

$$M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial W} = \frac{W(L-L_1)^2}{L^2} x^2$$

$$L_1 \leq x \leq L \rightarrow M(x) = \frac{WL_1}{L}(L-x)$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial W} = \left(\frac{L_1}{L}\right)(L-x)$$

$$M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial W} = \frac{WL_1^2}{L^2} (L^2 - 2Lx + x^2)$$

$$y = \int_0^{L_1} \frac{M(x)}{EI_1} \frac{\partial M(x)}{\partial W} dx + \int_{L_1}^L \frac{M(x)}{EI_2} \frac{\partial M(x)}{\partial W} dx$$

$$\int_0^{L_1} \frac{M(x)}{EI_1} \frac{\partial M(x)}{\partial W} dx = \int_0^{L_1} \frac{W}{EI_1} \frac{(L-L_1)^2}{L^2} x^2 dx$$

$$= \frac{W}{EI_1} \frac{(L-L_1)^2}{L^2} \cdot \frac{L_1^3}{3}$$

$$\int_{L_1}^L \frac{M(x)}{EI_2} \frac{\partial M(x)}{\partial W} dx = \int_{L_1}^L \frac{W}{EI_2} \left(\frac{L_1}{L}\right)^2 (L^2 - 2Lx + x^2) dx$$

$$= \frac{W}{EI_2} \left(\frac{L_1}{L}\right)^2 \left(L^2(L-L_1) - L(L^2-L_1^2) + \frac{L^3-L_1^3}{3} \right)$$

$$y = \frac{W}{E} \left(\frac{(L-L_1)^2}{I_1 L^2} \cdot \frac{L_1^3}{3} + \frac{L_1^2}{I_2 L^2} \left(L^2(L-L_1) - L(L^2-L_1^2) + \frac{L^3-L_1^3}{3} \right) \right)$$

Donc on peut appliquer la formule de Rayleigh.

La flèche au droit du disque: $s = y$

d'où $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{s}}$

Calcul de ω_0 :

En adoptant une déformée sinusoidale :

$$y_1 = z \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2L_1}\right) \quad \text{si } 0 \leq x \leq L_1$$

$$y_2 = z \cdot \sin\left(\frac{\pi(L-x)}{2(L-L_1)}\right) \quad \text{si } L_1 \leq x \leq L$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\int_0^{L_1} \left(\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right)^2 EI_1 dx + \int_{L_1}^L \left(\frac{d^2 y_2}{dx^2}\right)^2 EI_2 dx}{\int_0^{L_1} \rho F_1 y_1^2 dx + \int_{L_1}^L \rho F_2 y_2^2 dx}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\frac{E\pi^4 z^2}{16} \left(\frac{I_1}{L_1^4} \int_0^{L_1} \sin^2 \frac{\pi x}{2L_1} dx + \frac{I_2}{(L-L_1)^4} \int_{L_1}^L \sin^2 \frac{\pi(L-x)}{2(L-L_1)} dx \right)}{\rho z^2 \left(F_1 \int_0^{L_1} \sin^2 \frac{\pi x}{2L_1} dx + F_2 \int_{L_1}^L \sin^2 \frac{\pi(L-x)}{2(L-L_1)} dx \right)}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\frac{E\pi^4}{32} \left(\frac{I_1}{L_1^4} L_1 + \frac{I_2}{L_2^4} (L-L_1) \right)}{\rho/2 (F_1 L_1 + F_2 (L-L_1))}}$$

$$\omega_0 = \frac{\pi^2}{4} \sqrt{\frac{\frac{EI_1}{L_1^3} + \frac{EI_2}{(L-L_1)^3}}{\rho F_1 L_1 + \rho F_2 (L-L_1)}}$$

III-2 Exemple 2 :

Calculer le diamètre minimum d pour la vitesse critique de rotation soit $N \geq 1800$ t/min

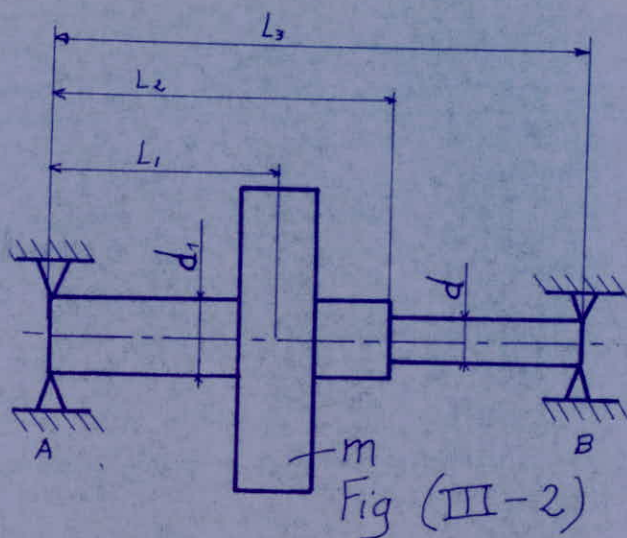
sachant que :

$$m = 544 \text{ Kg} ; E = 2 \cdot 10^8 \text{ N/cm}^2$$

$$d_1 = (d + 1,27) \text{ cm}$$

$$L_1 = 30,48 \text{ cm} ; L_2 = 40,64 \text{ cm} ; L_3 = 66,04 \text{ cm}$$

voir Fig (III-2) si dessus



Solution :

Calcul des reactions :

$$R_A + R_B = P$$

où $P = m y \omega^2 = \text{force d'inertie}$

$$R_B L_3 - P L_1 = 0$$

$$R_A = \frac{P(L_3 - L_1)}{L_3}$$

$$R_B = \frac{P L_1}{L_3}$$

Le théorème de Castigliano permet d'écrire :

$$y_k = \int_0^L \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_k} dx \quad \text{où } y_k = \text{flèche à la position } 'r_k'$$

Calcul des moments fléchissants :

$$M_1(x) = \frac{P(L_3 - L_1)}{L_3} x \quad \text{pour } 0 \leq x \leq L_1$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial P} = \frac{(L_3 - L_1)}{L_3}$$

$$M_1(x) \frac{\partial M_1(x)}{\partial P} = \frac{P(L_3 - L_1)^2}{L_3^2} x^2$$

$$M_2(x) = \frac{PL_1}{L_3} (L_3 - x) \quad \text{pour } L_1 \leq x \leq L_3$$

$$\frac{\partial M_2(x)}{\partial P} = \frac{L_1}{L_3} (L_3 - x)$$

$$M_2(x) \frac{\partial M_2(x)}{\partial P} = P \left(\frac{L_1}{L_3} \right)^2 (L_3^2 - 2L_3x + x^2)$$

$$y = \int_0^{L_1} \frac{P(L_3 - L_1)}{EI_1 L_3^2} x^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} \frac{P L_1^2}{EI_1 L_3^2} (L_3^2 - 2L_3x + x^2) dx + \int_{L_2}^{L_3} \frac{P}{EI_2} \left(\frac{L_1}{L_3} \right)^2 (L_3^2 - 2L_3x + x^2) dx$$

Après integration on a:

$$y = \frac{P}{EI_1} \left(\frac{(L_3 - L_1)^2}{L_3^2} \cdot \frac{L_1^3}{3} + \frac{L_1^2}{I_1} \left(L_3^2(L_2 - L_1) - L_3(L_2^2 - L_1^2) + \frac{(L_2^3 - L_1^3)}{3} \right) + \frac{L_1^2}{I_2} \left(L_3^2(L_3 - L_2) - L_3(L_3^2 - L_2^2) + \frac{(L_3^3 - L_2^3)}{3} \right) \right)$$

Application numérique :

$$y = \frac{P}{EI_1} \left(\frac{(66,04^2 - 30,48)^2}{66,04^2} \cdot \frac{(30,48)^3}{3} + 30,48^2 \left((40,64 - 30,48) - \frac{66,04}{66,04^2} (40,64^2 - 30,48^2) + \frac{(40,64^3 - 30,48^3)}{3(66,04)^2} \right) \right) + \frac{P}{EI_2} \left((30,48)^2 \left((40,64 - 30,48) - \frac{66,04}{(66,04)^2} (40,64^2 - 30,48^2) + \frac{(40,64^3 - 30,48^3)}{3(66,04)^2} \right) \right)$$

$$y = \frac{P}{EI_1} (21,19) + \frac{P}{EI_2} (20,293)$$

Sachant que $P = mw^2y$ donc

$$y = a_n mw^2y \quad \text{où } a_n = \text{coefficient d'influence}$$

Donc $\omega^2 = \frac{1}{a_{11}m}$

$$a_{11}m = \frac{5,44}{2 \cdot 10^7} (21,19) \frac{1}{I_1} + \frac{544}{2 \cdot 10^7} (20,293) \frac{1}{I_2}$$

$$= 5,7637 \cdot 10^{-4} \frac{1}{I_1} + 5,5196 \cdot 10^{-4} \frac{1}{I_2}$$

$$\frac{I_1 I_2}{\omega^2} = 5,7637 \cdot 10^{-4} I_2 + 5,5196 \cdot 10^{-4} I_1$$

$$I_2 = 10^{-4} \omega^2 \left(5,5196 + 5,7637 \frac{I_2}{I_1} \right)$$

$$I_2 = \frac{\pi^2}{(30)^2} (1800)^2 \cdot 10^{-4} \left(5,5196 + 5,7637 \frac{(d+1,27)^4}{d^4} \right)$$

$$\frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi^2}{(30)^2} \cdot (18)^2 \left(5,5196 + 5,7637 \frac{(d+1,27)^4}{d^4} \right)$$

$$d = \sqrt[4]{4 \frac{64\pi}{(30)^2} (18)^2 \left(5,5196 + 5,7637 \frac{(d+1,27)^4}{d^4} \right)}$$

La solution de cette equation par La methode iterrative donne
Le diametre $d = 6 \text{ cm}$

III-3 Exemple 3:

$$m_1 = 90,72 \text{ kg}$$

$$m_2 = 36,29 \text{ kg}$$

$$L_1 = 25,4 \text{ cm}$$

$$L_2 = 76,2 \text{ cm}$$

$$L_3 = 88,9 \text{ cm}$$

$$E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$$

$$d_1 = 5,04 \text{ cm}$$

$$d_2 = 3,81 \text{ cm}$$

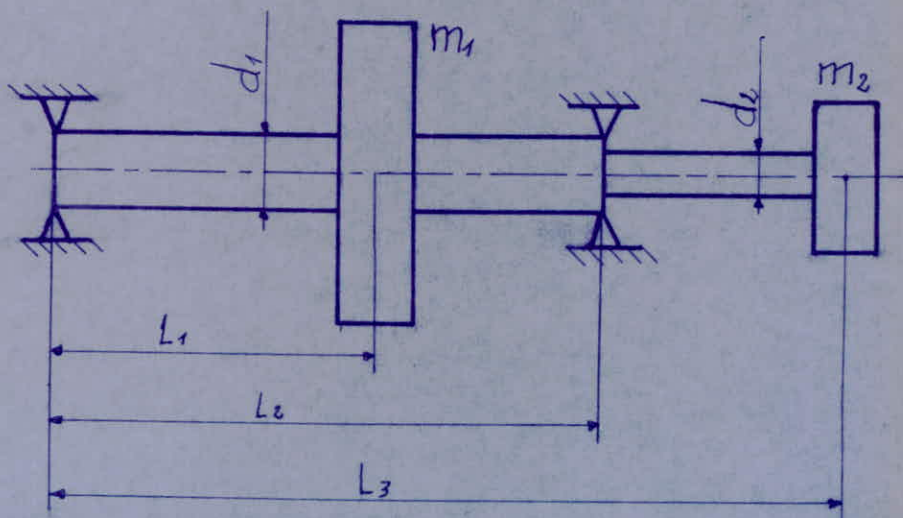
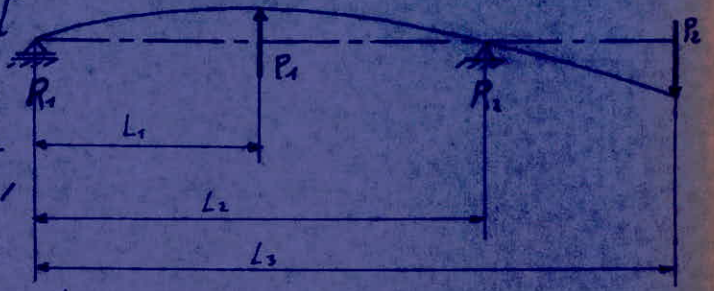


Fig (III-3)

Soit à déterminer La première et la seconde vitesse critique de l'arbre si-dessus Fig(III-3)

Le théorème de Mohr nous permet de calculer la flèche à n'importe quelle position sur l'arbre en supposant une force fictive P_k à cet endroit et en appliquant le théorème de Castigliano normalement, on peut aussi calculer les coefficients d'influence du système. Fig(III-4)



Calcul des réactions :

$$R_1 + R_2 = P_1 - P_2 \quad \text{Somme des forces nulle}$$

$$R_1 L_2 - P_1(L_2 - L_1) = P_2(L_3 - L_2) \quad \text{Somme des moments nulle}$$

$$R_1 = \frac{P_1(L_2 - L_1) + P_2(L_3 - L_2)}{L_2}$$

$$R_2 = \frac{P_1 L_1 - P_2 L_3}{L_2}$$

Calcul des moments flechissants :

$$M_1(x) = \frac{P_1(L_2 - L_1) + P_2(L_3 - L_2)}{L_2} x \quad \text{pour } 0 \leq x \leq L_1$$

$$M_2(x) = \frac{P_1(L_2 - L_1) + P_2(L_3 - L_2)}{L_2} x - P_1(x - L_1) \quad \text{pour } L_1 \leq x \leq L_2$$

$$M_3(x) = P_2(L_3 - x) \quad \text{pour } L_2 \leq x \leq L_3$$

$$M_1(x) = \frac{P_1(76,2 - 25,4) + P_2(88,9 - 76,2)}{76,2} x$$

$$M_1(x) = (0,6667 P_1 + 0,1667 P_2) x$$

$$M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P_1} = 0,6667 (0,6667 P_1 + 0,1667 P_2) x^2 = (0,4444 P_1 + 0,1111 P_2) x^2$$

$$M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P_2} = 0,1667 (0,6667 P_1 + 0,1667 P_2) x^2 = (0,1111 P_1 + 0,0277 P_2) x^2$$

$$M_2(x) = P_1(25,4 - 0,3333 x) + P_2(0,1667) x$$

$$M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P_1} = (25,4 - 0,3333 x)^2 P_1 + (4,2333 x - 0,0555 x^2) P_2$$

$$M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P_2} = (4,2333 x - 0,0555 x^2) P_1 + (0,0277 x^2) P_2$$

$$M_3(x) = P_2(88,9 - x)$$

$$M_3 \frac{\partial M_3}{\partial P_1} = 0$$

$$M_3 \frac{\partial M_3}{\partial P_2} = (x^2 - 177,8 x + 7903,21) P_2$$

$$Y_k = \frac{1}{EI_1} \int_0^{L_1} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P_k} dx + \frac{1}{EI_1} \int_{L_1}^{L_2} M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P_k} dx + \frac{1}{EI_2} \int_{L_2}^{L_3} M_3 \frac{\partial M_3}{\partial P_k} dx$$

$$Y_1 = a_{11} P_1 + a_{12} P_2$$

$$Y_2 = a_{21} P_1 + a_{22} P_2$$

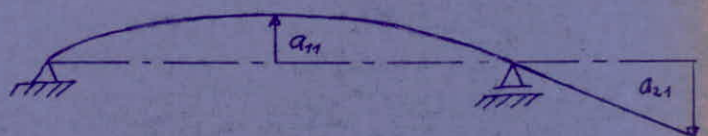
Le théorème de réciprocité de Maxwell montre que

$$a_{12} = a_{21}$$

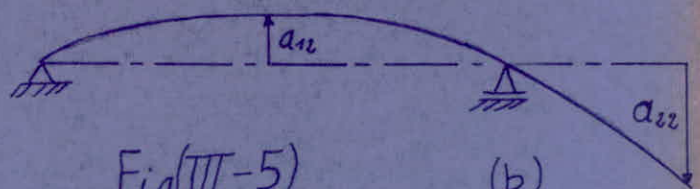
Les moments d'inertie sont :

$$I_1 = \frac{\pi d_1^4}{64} = 32,69 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{\pi d_2^4}{64} = 10,344 \text{ cm}^4$$



(a)



Fig(III-5)

(b)

Calcul des coefficients d'influence a_{ij}

$$a_{11} = \frac{1}{2 \cdot 10^7 \cdot 32,69} \left(\frac{0,1111(25,4)^3}{3} + \frac{0,1111(76,2^3 - 25,4^3)}{3} - \frac{16,933(76,2^2 - 25,4^2)}{2} + 645,16(76,2 - 25,4) \right)$$

$$a_{11} = 8,3558 \cdot 10^{-6} \text{ cm/N} \equiv 8,3558 \cdot 10^{-8} \text{ m/N}$$

$$a_{12} = \left(\left(\frac{0,111(25,4)^3}{3} \right) - \left(\frac{0,0555(76,2^3 - 25,4^3)}{3} \right) + \left(\frac{4,233(76,2^2 - 25,4^2)}{2} \right) \right) \frac{1}{2 \cdot 10^7 \cdot 32,69}$$

$$a_{12} = 5,5697 \cdot 10^{-6} \text{ cm/N} \equiv 5,5697 \cdot 10^{-8} \text{ m/N}$$

$$a_{21} = 5,5697 \cdot 10^{-6} \text{ cm/N} \equiv 5,5697 \cdot 10^{-8} \text{ m/N}$$

$$a_{22} = \left(\frac{0,0277(25,4^3)}{3} + \frac{0,0277(76,2^3 - 25,4^3)}{3} \right) \frac{1}{2 \cdot 10^7 \cdot 32,691}$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 10^7 \cdot 10,344} \left(\frac{88,9^3 - 76,2^3}{3} - \frac{2 \cdot 88,9(88,9^2 - 76,2^2)}{2} + 88,9^2(88,9 - 76,2) \right)$$

$$a_{22} = 9,566 \cdot 10^{-6} \text{ cm/N} \equiv 9,566 \cdot 10^{-8} \text{ m/N}$$

Calcul des éléments de l'équation aux vitesses critiques:

$$b_{ij} = a_{ij} \cdot m_j$$

$$b_{11} = 8,3558 \cdot 10^{-8} \cdot 90,718 = 7,58 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^2$$

$$b_{12} = 5,5697 \cdot 10^{-8} \cdot 36,29 = 2,021 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^2$$

$$b_{21} = 5,5697 \cdot 10^{-8} \cdot 90,718 = 5,0527 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^2$$

$$b_{22} = 9,566 \cdot 10^{-8} \cdot 36,29 = 3,4712 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^2$$

l'équation aux vitesses critiques est :

$$(7,58 \cdot 10^{-6} - \lambda)(3,47 \cdot 10^{-6} - \lambda) - (5,05 \cdot 10^{-6} \cdot 2,02 \cdot 10^{-6}) = 0$$

$$\lambda^2 - 11,05 \cdot 10^{-6} \lambda + 16,0967 \cdot 10^{-12} = 0$$

où $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$; $\omega =$ vitesse critique de rotation

La resolution de cette equation aux vitesses critique est:

$$\lambda_1 = 9,2866 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^2$$

$$\lambda_2 = 1,7633 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^2$$

d'où $\omega_1 = 327 \text{ rad/sec}$ première vitesse critique
 $\omega_2 = 753 \text{ rad/sec}$ seconde vitesse critique

On peut également calculer La première vitesse critique par des methodes approximatives telle que:

Methodes de Dunkerley

$$\frac{1}{\omega_c^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} \quad \text{avec:}$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{b_{11}} = \frac{1}{a_{11} m_1}$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{b_{22}} = \frac{1}{a_{22} m_2}$$

d'où

$$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{b_{11} + b_{22}}}$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{7,58 \cdot 10^{-6} + 3,4712 \cdot 10^{-6}}} = 301 \text{ rad/sec}$$

Cette valeur est inferieure à ($\omega_1 = 328 \text{ rad/sec}$)

Methode de Rayleigh-Ritz :

On choisit la déformée suivante :

$$Y_1 = a_{11}W_1 + a_{12}W_2 = (b_{11} + b_{12})g$$

$$Y_2 = a_{21}W_1 + a_{22}W_2 = (b_{21} + b_{22})g$$

$$Y_1 = (7,58 \cdot 10^6 + 2,02 \cdot 10^6) \cdot 9,81 = 9,42 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$Y_2 = (5,0527 \cdot 10^6 + 3,4712 \cdot 10^6) \cdot 9,81 = 8,36 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

L'équation de Rayleigh-Ritz est :

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g \sum_{i=1}^n W_i Y_i}{\sum_{i=1}^n W Y_i^2}}$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{(9,81)^2 \cdot 10^{-5} (90,718 \cdot 9,42 + 36,287 \cdot 8,36)}{9,81 (90,718 \cdot 9,42^2 + 36,287 \cdot 8,36^2) \cdot 10^{-10}}}$$

$$\omega_c = 328 \text{ rad/sec}$$

Remarque : La methode de Dunkerley sous-estime la valeur de la première vitesse critique .

La methode Rayleigh-Ritz sur-estime légèrement la valeur de la première vitesse critique .

III-4 Exemple 4:

Soit à déterminer La première et La seconde vitesse critique d'un rotor de turbine à vapeur à deux roves de masses 40 kg chacune voir le dessin sur (Planche 1 à l'échelle $\frac{1}{2}$) et schéma contenant les côtes nécessaires pour le calcul sur la figure (III-7) à l'échelle $\frac{1}{4}$.

Appliquons la méthode analytique qui utilise Les coefficients d'influence qui peuvent être trouvés par les procédés classiques de La résistance des matériaux

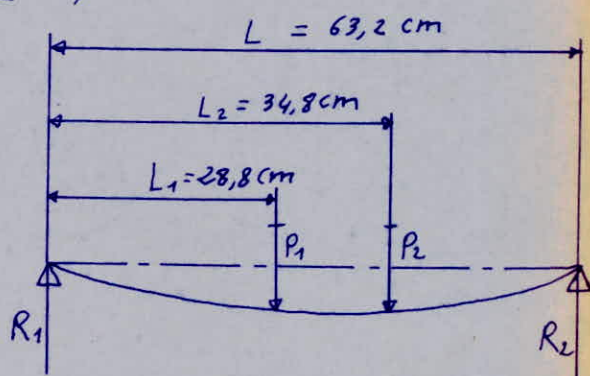
- Calcul des réactions: voir Fig(III-6)

$$R_1 + R_2 = P_1 + P_2$$

$$R_2 L - P_1 L_1 = 0$$

d'où
$$R_1 = \frac{P_1(L - L_1) + P_2(L - L_2)}{L}$$

$$R_2 = \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2}{L}$$



Fig(III-6)

- Calcul des moments flechissants:

$$M_1(x) = \frac{P_1(L - L_1) + P_2(L - L_2)}{L} x \quad 0 \leq x \leq L_1$$

$$M_1(x) = P_1 \left(1 - \frac{28,8}{63,2}\right) x + P_2 \left(1 - \frac{34,8}{63,2}\right) x$$

$$M_1(x) = P_1(0,5443) x + P_2(0,4494) x$$

$$M_2(x) = P_1 \left(L_1 - \frac{L_1}{L} x\right) + P_2 \left(1 - \frac{L_2}{L} x\right) \quad L_1 \leq x \leq L_2$$

$$M_2(x) = P_1 \left(28,8 - \frac{28,8}{63,2} x\right) + P_2 \left(1 - \frac{34,8}{63,2} x\right)$$

Rotor de turbine à vapeur
à deux étages. La vitesse
de fonctionnement $N=3000$ t/min

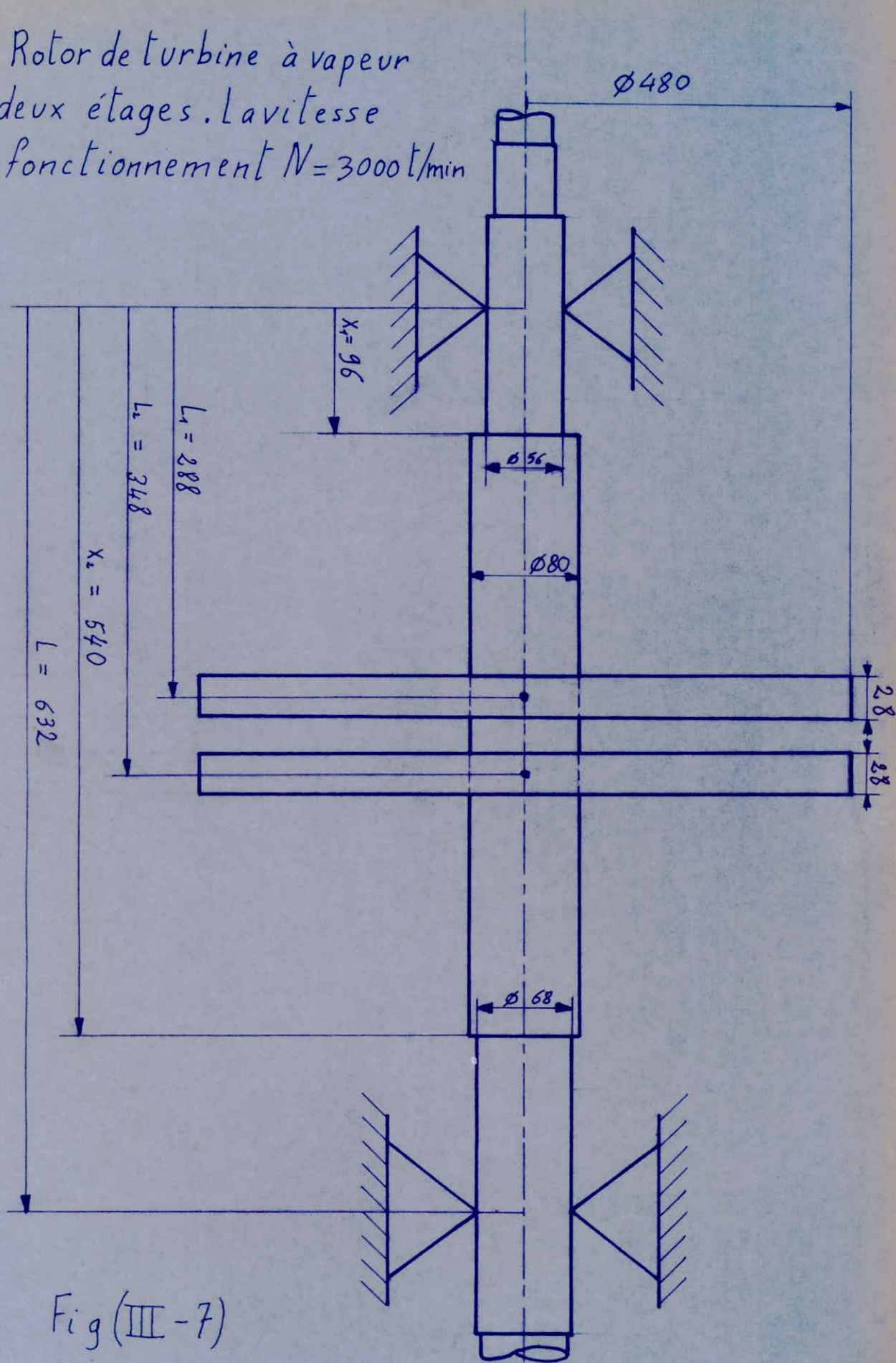


Fig (III-7)

$$M_2(x) = P_1(28,8 - 0,4557x) + P_2(0,4494)x$$

$$M_3(x) = P_1(L_1 - \frac{L_1}{L}x) + P_2(L_2 - \frac{L_2}{L}x) \quad L_2 \leq x \leq L$$

$$M_3(x) = P_1(28,8 - \frac{28,8}{63,2}x) + P_2(34,8 - \frac{34,8}{63,2}x)$$

$$M_3(x) = P_1(28,8 - 0,4557x) + P_2(34,8 - 0,545x)$$

$$M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P_1} = (0,5443)(0,5443P_1 + 0,4494P_2)x^2$$

$$M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P_1} = (0,2963P_1 + 0,2447P_2)x^2 \quad (\text{I}, M_1)$$

$$M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P_2} = 0,4494(0,5443P_1 + 0,4494P_2)x^2$$

$$M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P_2} = (0,2447P_1 + 0,2019P_2)x^2 \quad (\text{II}, M_1)$$

$$M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P_1} = (28,8 - 0,4557x)^2 P_1 + 0,4494(28,8x - 0,4557x^2) P_2$$

$$M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P_1} = (829,44 - 26,248x + 0,2077x^2)P_1 + (12,943x - 0,2048x^2)P_2 \quad (\text{I}, M_2)$$

$$M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P_2} = 0,4494(28,8x - 0,4557x^2)P_1 + (0,4494)^2 x^2 P_2$$

$$M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P_2} = (12,943x - 0,2048x^2)P_1 + (0,2019x^2)P_2 \quad (\text{II}, M_2)$$

$$M_3 \frac{\partial M_3}{\partial P_1} = (28,8 - 0,4557x)^2 P_1 + (28,8 \cdot 34,8 - (0,545 \cdot 28,8 + 34,8 \cdot 0,4557)x + (0,4557 \cdot 0,545)x^2) P_2$$

$$M_3 \frac{\partial M_3}{\partial P_1} = (829,44 - 26,248x + 0,2077x^2)P_1 + (1002,24 - 37,55x + 0,2484x^2)P_2 \quad (\text{I}, M_3)$$

$$M_3 \frac{\partial M_3}{\partial P_2} = (34,8 - 0,545x)(28,8 - 0,4557x)P_1 + (34,8 - 0,545x)^2 P_2$$

$$M_3 \frac{\partial M_3}{\partial P_2} = (1002,24 - 37,55x + 0,2484x^2)P_1 + (1211,04 - 37,932x + 0,297x^2)P_2 \quad (\text{II}, M_3)$$

- Calcul des moments d'inertie

$$I_1 = \pi d_1^4 / 64 = \pi (5,6)^4 / 64 = 48,275 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \pi d_2^4 / 64 = \pi 8^4 / 64 = 201,062 \text{ cm}^4$$

$$I_3 = \pi d_3^4 / 64 = \pi (6,8)^4 / 64 = 104,9556 \text{ cm}^4$$

Pour obtenir les fleches Y_1 et Y_2 en fonction de P et R_2

telle que : $Y_1 = a_1 P_1 + a_2 R_2$ où a_{ij} = coefficients

d'influence

$$i=1,2, j=1,2$$

$$Y_k = \int_0^{x_1} \frac{M_1}{EI_1} \frac{\partial^2}{\partial R^2} dx + \int_{L_1}^{x_2} \frac{M_2}{EI_2} \frac{\partial^2}{\partial R^2} dx + \int_{L_2}^{x_3} \frac{M_3}{EI_3} \frac{\partial^2}{\partial R^2} dx + \int_L^{x_2} \frac{M_3}{EI_3} \frac{\partial^2}{\partial R^2} dx$$

le théorème de Castigliano permet d'écrire : pour $k=1,2$

Après intégration et simplification on obtient :

$$\int_0^{x_1} \frac{M_1}{EI_1} \frac{\partial^2}{\partial R^2} dx + \int_{L_1}^{x_2} \frac{M_1}{EI_1} \frac{\partial^2}{\partial R^2} dx = \frac{P}{I_1} (13,1098) + \frac{E}{R_2} (10,8267)$$

$$\int_0^{x_1} \frac{M_1}{EI_1} \frac{\partial^2}{\partial R^2} dx + \int_{L_1}^{x_2} \frac{M_1}{EI_1} \frac{\partial^2}{\partial R^2} dx = \frac{P}{I_1} (10,8267) + \frac{E}{R_2} (8,9331)$$

$$\int_{L_2}^{x_2} \frac{M_2}{EI_2} \frac{\partial^2}{\partial R^2} dx = \frac{P}{I_1} (6,1298) + \frac{E}{R_2} (6,0838)$$

$$\int_{L_2}^{L_1} \frac{M_2}{EI_2} \frac{\partial^2}{\partial R^2} dx = \frac{P}{I_1} (6,0838) + \frac{E}{R_2} (6,1108)$$

$$\int_{L_2}^{x_2} \frac{M_3}{EI_3} \frac{\partial^2}{\partial R^2} dx + \int_L^{x_2} \frac{M_3}{EI_3} \frac{\partial^2}{\partial R^2} dx = \frac{P}{I_1} (8,2276) + \frac{E}{R_2} (10,1437)$$

$$\int_{x_2}^{x_1} \frac{M_3}{EI_2} \frac{\partial M_3}{\partial P_2} dx + \int_{x_2}^L \frac{M_3}{EI_3} \frac{\partial M_3}{\partial P_2} dx = \frac{P_1}{E} (10,1437) + \frac{P_2}{E} (12,4948)$$

- Calcul des coefficients d'influence :

En prenant le module d'élasticité $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ (acier)

$$a_{11} = \frac{1}{E} (13,1098 + 6,1298 + 8,2376)$$

$$a_{11} = 1,37335 \cdot 10^{-6} \text{ cm/N}$$

D'après le théorème de réciprocité de Maxwell : $a_{12} = a_{21}$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{1}{E} (10,8267 + 6,0838 + 10,1437)$$

$$a_{12} = a_{21} = 1,3527 \cdot 10^{-6} \text{ cm/N}$$

$$a_{22} = \frac{1}{E} (8,933 + 6,1108 + 12,4948)$$

$$a_{22} = 1,37693 \cdot 10^{-6} \text{ cm/N}$$

Les masses des deux roues : $m_1 = m_2 = 40 \text{ kg}$

- Calcul des éléments b_{ij} : $b_{ij} = a_{ij} \cdot m_j \cdot 10^{-2}$ $\begin{cases} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \end{cases}$

on multiplie par 10^{-2} pour avoir a_{ij} en (m/N)

$$b_{11} = 1,37335 \cdot 40 \cdot 10^{-8} = 5,4934 \cdot 10^{-7} \text{ sec}^2$$

$$b_{12} = 1,3527 \cdot 40 \cdot 10^{-8} = 5,4108 \cdot 10^{-7} \text{ sec}^2$$

$$b_{21} = 1,3527 \cdot 40 \cdot 10^{-8} = 5,4108 \cdot 10^{-7} \text{ sec}^2$$

$$b_{22} = 1,3769 \cdot 40 \cdot 10^{-8} = 5,5077 \cdot 10^{-7} \text{ sec}^2$$

L'équation aux vitesses critiques s'écrit :

$$(b_{11} - \lambda)(b_{22} - \lambda) - b_{12} \cdot b_{21} = 0 \quad \text{où}$$

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}$$

$$\lambda^2 - 11,0011 \cdot 10^{-7} \lambda + 0,97924 \cdot 10^{-14} = 0$$

La solution de cette équation donne λ_1 et λ_2

$$\lambda_1 = 10,91135 \cdot 10^{-7} \Rightarrow \omega_1 = 957,3 \text{ rad/sec}$$

$$\lambda_2 = 8,92 \cdot 10^{-8} \Rightarrow \omega_2 = 10588 \text{ rad/sec}$$

Donc La première vitesse critique $N_c = 9141 \text{ min}^{-1}$
et La vitesse de fonctionnement $N = 3000 \text{ min}^{-1}$

puisque le rotor de cette turbine est horizontal, il peut exister des troubles vibratoires autour d'une vitesse de rotation égale à la moitié de la première vitesse critique de flexion

Mais on constate que ($N = 3000 \text{ min}^{-1}$) est inférieure à ($\frac{N_c}{2} = 4570 \text{ t/min}$) ce qui assure un comportement tranquille du rotor

CHAPITRE IV

Etude d'un rotor de turbine à vapeur à double flux sur ordinateur

Soit le rotor, défini sur la planche 2, d'une turbine à vapeur à double flux multi-étagée, de masse ($m = 800 \text{ kg}$) et dont la vitesse de fonctionnement ($N = 11850 \text{ t/min}$)

Calculer ses vitesses critiques et ses vecteurs propres

Le rotor dessiné sur la planche 2 est un système réel qui ne peut être défini par des fonctions mathématiques qu'en posant des hypothèses simplificatrices qui sont toujours accompagnées par des erreurs trompentes

Pour l'appréhender il faut construire un système image en essayant d'atteindre et d'associer les composants du système réel continu, ceci est possible par discretisation du système (rotor) continu c'est à dire donner un système image qui représente un rotor discretisé en éléments massiques indéformables associés à des objets déformables entre lesquels ils existent des domaines de contact où les déformations locales ne seront pas obligatoirement prises en considération

Cette caractérisation constitue un préalable à notre modèle de calcul qui utilise la méthode analytique appliquée aux systèmes discrets voir le schéma sur la (planche 3)

La méthode de calcul est bien expliquée au chapitre (II-2-1) pour un rotor discrétisé à deux appuis rigides (à rotules), et il ne reste que le calcul de la matrice des coefficients d'influences a_{ij} .

Le théorème de Mohr permet d'obtenir facilement l'algorithme de calcul des éléments a_{ij} de la matrice des coefficients d'influence

Considérons le rotor de la figure (IV-1) chargé d'une force concentrée P_j à la distance " L_j " de la première liaison, et calculons la flèche à la distance " L_k " de la première liaison.

Supposons une force fictive ϕ_k à la position " L_k "
on distingue deux cas: (a et b)

a) $L_k \geq L_j$ ou bien $k \geq j$

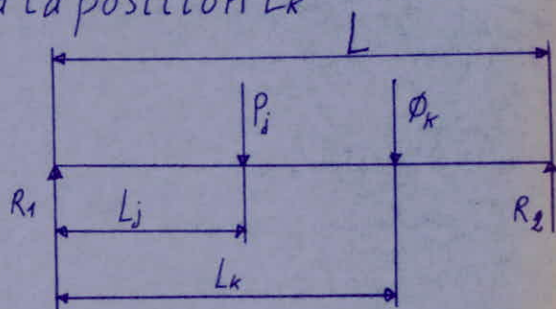


Fig (IV-1)

$$R_1 + R_2 = P_j + \phi_k$$

$$R_1 L - P_j(L - L_j) - \phi_k(L - L_k) = 0$$

$$R_1 = \frac{P_j(L - L_j) + \phi_k(L - L_k)}{L}$$

$$R_2 = \frac{P_j L_j + \phi_k L_k}{L}$$

Calcul des moments flechissants:

$$M_1(x) = \frac{P_j(L - L_j) + \phi_k(L - L_k)}{L} x$$

$$0 \leq x \leq L_j$$

$$M_1 \frac{\partial M_1(x)}{\partial \phi_k} = \frac{P_j(L - L_j)(L - L_k)}{L^2} x^2$$

$$M_2(x) = \frac{P_j(L-l_j) + \phi_k(L-L_k)}{L} x - P_j(x-l_j) \quad L_j \leq x \leq L_k$$

$$M_2 \frac{\partial M_2}{\partial \phi_k}(x) = \frac{P_j l_j (L-L_k)}{L^2} (Lx - x^2)$$

$$M_3(x) = \frac{P_j l_j + \phi_k L_k}{L} (L-x) \quad L_k \leq x \leq L$$

$$M_3 \frac{\partial M_3}{\partial \phi_k}(x) = \frac{P_j l_j L_k}{L^2} (L^2 - 2Lx + x^2)$$

Donc la flèche à la position L_k sous l'effet de la charge P_j est:

$$Y_{kj} = \int_0^{L_j} \frac{P_j(L-l_j)(L-L_k)}{EI \cdot L^2} x^2 dx + \int_{L_j}^{L_k} \frac{P_j l_j (L-L_k)}{EI \cdot L^2} (Lx - x^2) dx +$$

$$+ \int_{L_k}^L \frac{P_j l_j L_k}{EI} (L^2 - 2Lx + x^2) dx$$

Puisque le système est discretisé on doit utiliser les intégrales discrétisées (voir la page suivante)

$$Y_{kj} = \sum_{i=1}^{i=j} \left(\frac{P_j(L-l_j)(L-L_k)}{L^2} \left(\int_{L_{i-1}}^{x_i} \frac{x^2}{EI_i} dx + \int_{x_i}^{L_i} \frac{x^2}{EI_{i+1}} dx \right) \right) +$$

$$\sum_{i=j+1}^{i=k} \frac{P_j l_j (L-L_k)}{L^2} \left(\int_{L_{i-1}}^{x_i} \frac{(Lx - x^2)}{EI_i} dx + \int_{x_i}^{L_i} \frac{(Lx - x^2)}{EI_{i+1}} dx \right) +$$

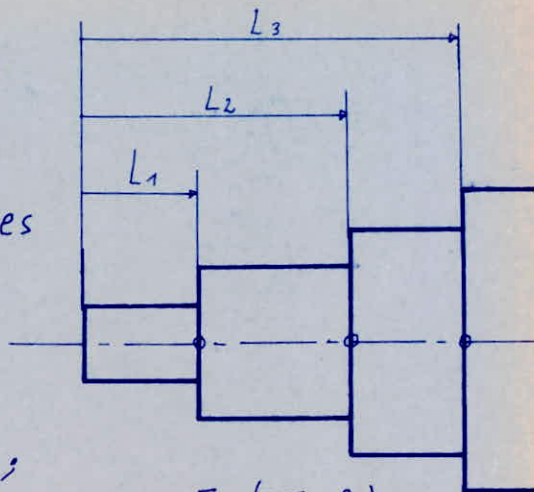
$$\sum_{i=k+1}^{i=n+1} \frac{P_j l_j L_k}{L^2} \left(\int_{L_{i-1}}^{x_i} \frac{(L^2 - 2Lx + x^2)}{EI_i} dx + \int_{x_i}^{L_i} \frac{(L^2 - 2Lx + x^2)}{EI_{i+1}} dx \right)$$

Les coefficients d'influences a_{kj} sont :

$$a_{kj} = \frac{Y_{kj}}{P_j} \quad \text{avec } j=1, n ; k=1, n$$

Pour découper le rotor on se trouve devant deux situations différentes.

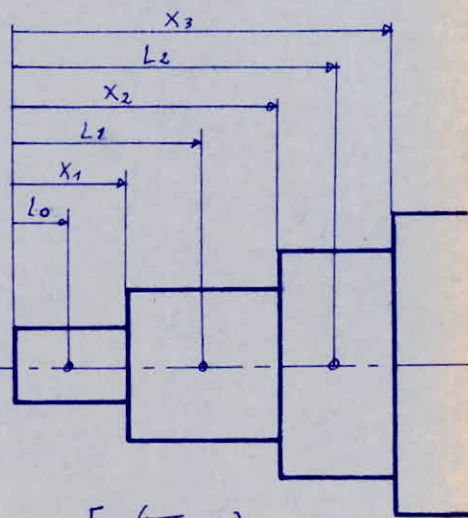
1) Fig(IV-2) Les centres de gravité des masses discrètes (m_i) se situent sur les frontières qui separent les sections de diamètres différents, ceci conduit à faire des approximations pendant le calcul des masses (m_i), et l'intégration se fait directement :



Fig(IV-2)

$$\int_{L_{i-1}}^{L_i} \frac{M(x)}{EI_i} \frac{\partial M(x)}{\partial \phi_k} dx$$

2) Fig(IV-3) Les masses sont calculées facilement mais l'intégrale doit être décomposée en deux intégrales



Fig(IV-3)

$$\int_{L_{i-1}}^{L_i} \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial \phi_k} dx = \int_{L_{i-1}}^{x_i} \frac{M(x)}{EI_i} \frac{\partial M(x)}{\partial \phi_k} dx + \int_{x_i}^{L_i} \frac{M(x)}{EI_{i+1}} \frac{\partial M(x)}{\partial \phi_k} dx$$

Cette méthode évite les approximations de calcul des masses ($m_i, i = 1, \dots, n$) et de barycentres mais le nombre d'opérations sur l'ordinateur devient double.

Pour notre cas nous avons utilisé la seconde méthode pour son exactitude.

En posant :

$$C1_i = \frac{x_i - l_{i-1}}{EI_i} \quad ; \quad D1_i = \frac{l_i - x_i}{EI_{i+1}} \quad ; \quad B1_i = C1_i + D1_i$$

$$C2_i = \frac{x_i^2 - l_{i-1}^2}{2 \cdot EI_i} \quad ; \quad D2_i = \frac{l_i^2 - x_i^2}{2 \cdot EI_{i+1}} \quad ; \quad B2_i = C2_i + D2_i$$

$$C3_i = \frac{x_i^3 - l_{i-1}^3}{3 \cdot EI_i} \quad ; \quad D3_i = \frac{l_i^3 - x_i^3}{3 \cdot EI_{i+1}} \quad ; \quad B3_i = C3_i + D3_i$$

Donc si $k > j$:

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^{i=j} \frac{(L-l_j)(L-l_k)}{L^2} B3_i + \sum_{i=j+1}^{i=k} \frac{l_j(L-l_k)}{L^2} (LB2_i - B3_i) +$$

$$\sum_{i=k+1}^{i=n+1} \frac{l_j l_k}{L^2} (L^2 B1_i - 2LB2_i + B3_i)$$

$$a_{jj} = \sum_{i=1}^{i=j} \frac{(L-l_j)^2}{L^2} B3_i + \sum_{i=j+1}^{i=n+1} \frac{l_j^2}{L^2} (L^2 B1_i - 2LB2_i + B3_i)$$

Pour $j > k$

En utilisant le principe de réciprocité des travaux et des déplacements de Maxwell on obtient la relation suivante :

$$a_{kj} = a_{jk} \quad \text{pour } j=1, n \quad , \quad k=1, n$$

Cette matrice (a_{kj}) est notée dans le programme : $B^{(k,J)}$
 et la matrice $((B^{(k,J)} \cdot m_j))$ est notée $A^{(k,J)} \begin{cases} J=1, 14 \\ k=1, 14 \end{cases}$

Les Longueurs l_i sont notées Y_i , $i = 1, 15$

Les valeurs propres λ_i sont notées w_i $i = 1, 14$

Les vecteurs propres U_i sont écrits dans les colonnes de $A_{1,2}$

A partir de la Planche 3 on mesure les diamètres du rotor pour calculer les moments d'inertie et les masses

$$I = \frac{\pi d^4}{64}, \quad E = 1,96 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$$

Les masses m_i sont notées Q_i $i = 1, 14$

les rigidité EI_i sont notées $RIG(I)$ $i = 1, 16$

i	X_i (cm)	Y_i (cm)	$Q_i \cdot 10^{-2}$ [kg]	RIG_i [N·cm ²]
1	8,4	10,6	0,16343	$3,292 \cdot 10^{10}$
2	14,6	21,0	0,50491	$9,232 \cdot 10^{10}$
3	28,0	32,0	0,81785	$3,639 \cdot 10^{11}$
4	35,4	40,4	0,82280	$1,009 \cdot 10^{12}$
5	45,0	49,4	0,63795	$8,658 \cdot 10^{11}$
6	53,6	57,6	0,42821	$7,793 \cdot 10^{11}$
7	60,6	64,4	0,49721	$6,619 \cdot 10^{11}$
8	67,6	70,8	0,31553	$7,587 \cdot 10^{11}$
9	73,6	77,2	0,42821	$7,587 \cdot 10^{11}$
10	80,6	85,0	0,63795	$6,619 \cdot 10^{11}$
11	89,2	94,2	0,82280	$7,793 \cdot 10^{11}$
12	98,8	102,6	0,81785	$8,658 \cdot 10^{11}$
13	106,4	113,6	0,50491	$1,009 \cdot 10^{12}$
14	119,8	123,8	0,18217	$3,639 \cdot 10^{11}$
15	126,0	134,0	—	$9,232 \cdot 10^{10}$
16	—	—	—	$3,292 \cdot 10^{10}$

Programme FORTRAN de calcul des valeurs propres et des vecteurs propres.

```

C MASTER RAHMANI MOHAMED.
  COMPLEX A(14,14), U(14), V(14), W(14), X, Y, DX, P, Q, E, F
  COMMON A
  DIMENSION M(14)
  CALL MATA
  DO 9 I: 2, 14
    I1 = I - 1
    C = 0.0
    DO 2 J: 1, 14
      D = CAES (A(J, I1))
      IF (C.GE.D) GOTO 2
      C = D
      I = J
2    CONTINUE
    IF (C.GT.L.OE-20) GOTO 3
    A(I, I) = (1.0, 0.0)
    I = -1
    GOTO 6
3    IF (L.E.G.I) GOTO 6
    DO 4 J: 1, 14
      E = A(J, I)
      A(J, I) = A(J, L)
4    A(J, L) = E
    DO 5 J: 1, 14
      E = A(I, J)
      A(I, J) = A(L, J)
5    A(L, J) = E
6    M(I1) = 1
    DO 9 K: 1, 14
      E = (0.0, 0.0)
      DO 8 J: 1, 14
        IF (J.LT.I) GOTO 7
        E = E + A(K, J) * A(J+1, I1)
      GOTO 8
7    IF (J.GT.K-2) GOTO 8
      E = E - A(K, J) * A(J+1, I)
8    CONTINUE
    IF ((K.NE.1).AND.(K.LE.I)) E = E/A(K, K-1)
9    A(K, I) = E
    M(I4) = -I4 - 1
    EPS = 1.0E-38
    I = 14
10   IF (M(I).GE.0) GOTO 12
    DO 11 J: 1, I
11   W(J) = (0.0, 0.0)
12   D = 1.0E+35
      Y = (0.0, 0.0)
      DX = (0.0, 0.0)
      I = 2

```



```
1 3 | X=Y+DX  
    | Q=(0.0, 0.0)  
    | P=(1.0, 0.0)  
    | K=1  
1 4 | V(K)=Q  
    | U(K)=P  
    | Q=Q*X+P  
    | P=P*X+W(K)  
    | DO 15 J=K,I  
    | E=A(K,J)  
    | Q=Q-E*V(J)  
1 5 | P=P-E*U(J)  
    | K=K-1  
    | IF(K.LE.0) GOTO 16  
    | IF(M(K) 16, 16, 14  
1 6 | B=CABS(P)  
    | C=CABS(Q)  
    | IF(B.LT.EPS) GOTO 23  
    | IF(B.GE.D) GOTO(21, 21, 21, 21, 22, 22, 18), L  
    | D=B  
    | Y=X  
    | GOTO(17, 18, 18, 18, 18, 17, 17), L  
1 7 | I=7  
    | DX=2*DX  
    | GOTO 13  
1 8 | I=1  
    | P=E  
    | IF(I.NE.K) P=B**(1.0/(1-K))  
    | IF(B.LT.C*R) GOTO 20  
    | IF(C.NE.0.0) F=Q*B/C  
1 9 | Q=P/P  
2 0 | DX=-P/Q  
    | GOTO 13  
2 1 | I=I+1  
    | DX=DX/2  
    | GOTO 13  
2 2 | I=6  
    | DX:DX+(0.25, -0.75)  
    | IF(CABS(DX).GT.EPS) GOTO 13  
2 3 | EPS=AMAX1(EPS, B)  
    | DO 24 J=1, I  
2 4 | W(J)=U(J)  
    | W(I)=X  
    | I=I-1  
    | IF(I.GE.1) GOTO 10  
    | EPS=EPS*2.0  
    | I=14
```



```
3 0  IF (M(I).GE.1) GOTO 32
      I=I
3 1  I=I-1
      IF (I.EQ.0) GOTO 32
      IF (M(L).GE.1) GOTO 31
3 2  IF (I.LE.1) GOTO 43
3 3  X=W(I)
      K=1
      P(1.0,0.0)
3 4  Q(1.0,0.0)
      DO 35 J=K,I
3 5  Y(J) = (0.0,0.0)
3 6  U(K) = P
      P = P*X
      IF (M(I).GT.0) P = P+A(K,I+1)
      V(K) = Q
      Q = Q*X
      DO 37 J=K,I
      E = A(K,J)
      P = P-B*U(J)
3 7  Q = Q-E*V(J)
      K = K-1
      IF (K.EQ.0) GOTO 38
      IF (M(K).GE.1) GOTO 36
3 8  IF (CABS(P).LT.EPS) GOTO 41
      IF (CABS(Q).GE.EPS) GOTO 39
      I = I+1
      W(I) = W(L)
      W(I) = X
      GOTO 32
3 9  Q = P/Q
      K2 = K+1
      DO 40 J=K2,I
4 0  U(.) = U(.) - Q*V(J)
4 1  P = (0.0,0.0)
      IF (K.GE.1) GOTO 34
      DO 42 J=1,I
4 2  A(J,I) = U(J)
      GOTO 45
4 3  DO 44 J=1,I
4 4  A(J,I) = (0.0,0.0)
      M(I) = -M(I)
4 5  I = I-1
```



```
IF (I.GE.1) GOTO 30
DO 52 I1=2,14
I=14+2-I1
DO 51 M1=2,14
K=14+2-K1
I=MINO (I,K)
E=(0.0,0.0)
DO 50 J=2,1
50 E=E+A(I,J-1)*A(J,K)
51 A(I,J)=E
52 A(I,J)=(0.0,0.0)
DO 61 I=1,14
E=A(K,J)
J=K
60 J=J+1
E=E*(X-W(J))+A(I,J)
IF (M(J).GE.1) GOTO 60
A(K,J)=E
61 CONTINUE
DO 71 I1=2,14
I=14+2-I1
I=IABS(M(I-1))
IF (L.EQ.1) GOTO 71
DO 70 J=1,14
E=A(I,J)
A(I,J)=A(I,J)
70 A(I,J)=E
71 CONTINUE
DO 81 K=1,14
C=0.0
DO 80 I=1,14
E=A(I,K)
80 C=C+REAL(E)**2+AIMAG(E)**2
C=SQRT(C)
IF (C.EQ.0) GOTO 82
DO 81 I=1,14
81 A(I,K)=A(I,K)/C
82 CONTINUE
WRITE (6,1) ((A(I,J),J=1,7),I=1,14)
1 FORMAT (35X,9H MATRICE A1 /2X,7(E9.3,E7.1))
WRITE (6,92) ((A(I,J),J=8,14),I=1,14)
```


92 | FORMAT (35X, 9H MATRICE A2 / 2X, 7 (E9.3, E7.1))
 WRITE (6, 93) (W(I), I=1, 14)

93 | FORMAT (/// 55X, 61W(I) = , (2E20.5))

STOP

END

C | CALCUL DE LA MATRICE A(K,J)

SUBROUTINE MATA

COMPLEX A, E1(15), B2(15), B3(15), C1(15), C2(15), C3(15), D1(15), D2(15),

1 | C3(15), VA(14, 14, 15), VE(14, 14, 15), VC(14, 14, 15), SVA(14, 14),

1 | SVB(14, 14), SVC(14, 14), X(15), Y(15), Q(14), RIG(16), B(14, 14)

COMMON A(14, 14)

READ (5, 20) (Q(J), J=1, 14)

WRITE (6, 20) (Q(J), J=1, 14)

20 | FORMAT (5(F7.5, F3.1))

READ (5, 21) (RIG(I), I=1, 16)

WRITE (6, 21) (RIG(I), I=1, 16)

21 | FORMAT (4(E9.3, F3.1))

READ (5, 21) (X(I), I=1, 15)

WRITE (6, 31) (X(I), I=1, 15)

31 | FORMAT (5(F5.1, F3.1))

READ (5, 41) (Y(I), I=1, 15)

WRITE (6, 41) (Y(I), I=1, 15)

41 | FORMAT (5(F5.1, F3.1))

DO 2I=1, 15

IF (I-1) 301, 300, 301

300 | Y(I-1) = 0

301 | CONTINUE

C1(I) = (X(I) - Y(I-1)) / RIG(I)

C2(I) = (X(I)**2 - Y(I-1)**2) / (RIG(I)**2)

C3(I) = (X(I)**3 - Y(I-1)**3) / (RIG(I)**3)

I1 = I + 1

D1(I) = (Y(I) - X(I)) / RIG(I1)

D2(I) = (Y(I)**2 - X(I)**2) / (2 * RIG(I1))

D3(I) = (Y(I)**3 - X(I)**3) / (3 * RIG(I1))

B1(I) = (C1(I) + D1(I)) / (Y(15)**2)

B2(I) = (C2(I) + D2(I)) / (Y(15)**2)

B3(I) = (C3(I) + D3(I)) / (Y(15)**2)

DO 2 k=1, 14

DO 2 J=1, 14


```

VA (K,J,I) = B3(I) * (Y(15) - Y(J)) * (Y(15) - Y(K))
VB (K,J,I) = (Y(15) * B2(I) - B3(I)) * (Y(15) - Y(K)) * Y(J)
VC (K,J,I) = B3(I) - 2 * Y(15) * B2(I) + B1(I) * (Y(15) ** 2) * Y(K) * Y(J)
2 CONTINUE
DO 13 K=1,14
DO 13 J=1,14
K1 = K+1
J1 = J+1
IF (K .LT. J) GOTO 13
DO 3 I=1,J
3 SVA(K,J) = (0,0,0.0)
SVA(K,J) = SVA(K,J) + VA(K,J,I)
DO 4 I=J1,K
4 SVB (K,J) = (0.0,0.0)
SVB (K,J) = SVB (K,J) + VB(K,J,I)
DO 5 I=K1,15
5 SVC (K,J) = (0.0,0.0)
SVC (K,J) = SVC(K,J) + VC(K,J,I)
B (K,J) = SVA(K,J) + SVB (K,J) + SVC (K,J)
B (J,K) = SVA(K,J) + SVB (K,J) + SVC (K,J)
13 CONTINUE
DO 15 I=1,14
DO 15 J=1,14
K0 = 15-K
J0 = 15-J
IF (K.LE. J0) GOTO 14
A (K,J) = B (J0, K0) * Q(J)
GOTO 15
14 A(K,J) = B(K,J) * Q(J)
15 CONTINUE
WRITE (6,1) (A(I,J), J=1,7), I=1,14)
1 FORMAT (35X, 9H MATRICE A3/2X, 7 (E9.3, E7.1))
WRITE (6,92) ((A(I,J)), J=8,14), I=1,14)
92 FORMAT (35X, 9H MATRICE A4/2X, 7 (E9.3, E7.1))
RETURN
END

```

Remarque: Le programme principal nous donne des résultats erronés dus à la perte de précision pendant l'exécution à cause du dépassement de capacité des mémoires.

$0,12 \cdot 10^{-7}$	$0,663 \cdot 10^{-7}$	$0,156 \cdot 10^{-6}$	$0,194 \cdot 10^{-6}$	$0,183 \cdot 10^{-6}$	$0,143 \cdot 10^{-6}$	$0,184 \cdot 10^{-6}$	$0,128 \cdot 10^{-6}$	$0,190 \cdot 10^{-6}$	$0,311 \cdot 10^{-6}$	$0,443 \cdot 10^{-6}$	$0,479 \cdot 10^{-6}$	$0,327 \cdot 10^{-6}$	$0,129 \cdot 10^{-6}$
$0,215 \cdot 10^{-7}$	$0,128 \cdot 10^{-6}$	$0,308 \cdot 10^{-6}$	$0,383 \cdot 10^{-6}$	$0,362 \cdot 10^{-6}$	$0,282 \cdot 10^{-6}$	$0,365 \cdot 10^{-6}$	$0,254 \cdot 10^{-6}$	$0,375 \cdot 10^{-6}$	$0,615 \cdot 10^{-6}$	$0,877 \cdot 10^{-6}$	$0,948 \cdot 10^{-6}$	$0,648 \cdot 10^{-6}$	$0,118 \cdot 10^{-6}$
$0,311 \cdot 10^{-7}$	$0,190 \cdot 10^{-6}$	$0,461 \cdot 10^{-6}$	$0,582 \cdot 10^{-6}$	$0,550 \cdot 10^{-6}$	$0,229 \cdot 10^{-6}$	$0,555 \cdot 10^{-6}$	$0,387 \cdot 10^{-6}$	$0,571 \cdot 10^{-6}$	$0,936 \cdot 10^{-6}$	$0,134 \cdot 10^{-5}$	$0,144 \cdot 10^{-5}$	$0,585 \cdot 10^{-6}$	$0,107 \cdot 10^{-6}$
$0,385 \cdot 10^{-7}$	$0,235 \cdot 10^{-6}$	$0,578 \cdot 10^{-6}$	$0,733 \cdot 10^{-6}$	$0,692 \cdot 10^{-6}$	$0,540 \cdot 10^{-6}$	$0,699 \cdot 10^{-6}$	$0,487 \cdot 10^{-6}$	$0,720 \cdot 10^{-6}$	$0,118 \cdot 10^{-5}$	$0,168 \cdot 10^{-5}$	$0,133 \cdot 10^{-5}$	$0,538 \cdot 10^{-6}$	$0,981 \cdot 10^{-7}$
$0,469 \cdot 10^{-7}$	$0,287 \cdot 10^{-6}$	$0,705 \cdot 10^{-6}$	$0,892 \cdot 10^{-6}$	$0,848 \cdot 10^{-6}$	$0,661 \cdot 10^{-6}$	$0,856 \cdot 10^{-6}$	$0,596 \cdot 10^{-6}$	$0,881 \cdot 10^{-6}$	$0,144 \cdot 10^{-5}$	$0,152 \cdot 10^{-5}$	$0,120 \cdot 10^{-5}$	$0,487 \cdot 10^{-6}$	$0,887 \cdot 10^{-7}$
$0,544 \cdot 10^{-7}$	$0,333 \cdot 10^{-6}$	$0,819 \cdot 10^{-6}$	$0,104 \cdot 10^{-5}$	$0,985 \cdot 10^{-6}$	$0,771 \cdot 10^{-6}$	$0,999 \cdot 10^{-6}$	$0,695 \cdot 10^{-6}$	$0,103 \cdot 10^{-5}$	$0,131 \cdot 10^{-5}$	$0,138 \cdot 10^{-5}$	$0,109 \cdot 10^{-5}$	$0,443 \cdot 10^{-6}$	$0,807 \cdot 10^{-7}$
$0,606 \cdot 10^{-7}$	$0,371 \cdot 10^{-6}$	$0,913 \cdot 10^{-6}$	$0,116 \cdot 10^{-5}$	$0,11 \cdot 10^{-5}$	$0,860 \cdot 10^{-6}$	$0,112 \cdot 10^{-5}$	$0,777 \cdot 10^{-6}$	$0,944 \cdot 10^{-6}$	$0,121 \cdot 10^{-5}$	$0,127 \cdot 10^{-5}$	$0,100 \cdot 10^{-5}$	$0,407 \cdot 10^{-6}$	$0,741 \cdot 10^{-7}$
$0,665 \cdot 10^{-7}$	$0,407 \cdot 10^{-6}$	$0,100 \cdot 10^{-5}$	$0,127 \cdot 10^{-5}$	$0,121 \cdot 10^{-5}$	$0,944 \cdot 10^{-6}$	$0,122 \cdot 10^{-5}$	$0,708 \cdot 10^{-6}$	$0,860 \cdot 10^{-6}$	$0,110 \cdot 10^{-5}$	$0,116 \cdot 10^{-5}$	$0,913 \cdot 10^{-6}$	$0,771 \cdot 10^{-6}$	$0,676 \cdot 10^{-7}$
$0,724 \cdot 10^{-7}$	$0,443 \cdot 10^{-6}$	$0,109 \cdot 10^{-5}$	$0,138 \cdot 10^{-5}$	$0,131 \cdot 10^{-5}$	$0,103 \cdot 10^{-5}$	$0,110 \cdot 10^{-5}$	$0,634 \cdot 10^{-6}$	$0,771 \cdot 10^{-6}$	$0,985 \cdot 10^{-6}$	$0,104 \cdot 10^{-5}$	$0,819 \cdot 10^{-6}$	$0,333 \cdot 10^{-6}$	$0,607 \cdot 10^{-7}$
$0,796 \cdot 10^{-7}$	$0,487 \cdot 10^{-6}$	$0,120 \cdot 10^{-5}$	$0,152 \cdot 10^{-5}$	$0,144 \cdot 10^{-5}$	$0,881 \cdot 10^{-6}$	$0,939 \cdot 10^{-6}$	$0,543 \cdot 10^{-6}$	$0,661 \cdot 10^{-6}$	$0,848 \cdot 10^{-6}$	$0,892 \cdot 10^{-6}$	$0,705 \cdot 10^{-6}$	$0,287 \cdot 10^{-6}$	$0,523 \cdot 10^{-7}$
$0,880 \cdot 10^{-7}$	$0,538 \cdot 10^{-6}$	$0,133 \cdot 10^{-5}$	$0,168 \cdot 10^{-5}$	$0,118 \cdot 10^{-5}$	$0,720 \cdot 10^{-6}$	$0,767 \cdot 10^{-6}$	$0,444 \cdot 10^{-6}$	$0,540 \cdot 10^{-6}$	$0,692 \cdot 10^{-6}$	$0,733 \cdot 10^{-6}$	$0,578 \cdot 10^{-6}$	$0,235 \cdot 10^{-6}$	$0,429 \cdot 10^{-7}$
$0,957 \cdot 10^{-7}$	$0,585 \cdot 10^{-6}$	$0,144 \cdot 10^{-5}$	$0,134 \cdot 10^{-5}$	$0,936 \cdot 10^{-6}$	$0,571 \cdot 10^{-6}$	$0,609 \cdot 10^{-6}$	$0,352 \cdot 10^{-6}$	$0,429 \cdot 10^{-6}$	$0,550 \cdot 10^{-6}$	$0,582 \cdot 10^{-6}$	$0,461 \cdot 10^{-6}$	$0,190 \cdot 10^{-6}$	$0,347 \cdot 10^{-7}$
$0,106 \cdot 10^{-6}$	$0,648 \cdot 10^{-6}$	$0,948 \cdot 10^{-6}$	$0,877 \cdot 10^{-6}$	$0,615 \cdot 10^{-6}$	$0,375 \cdot 10^{-6}$	$0,400 \cdot 10^{-6}$	$0,232 \cdot 10^{-6}$	$0,282 \cdot 10^{-6}$	$0,362 \cdot 10^{-6}$	$0,383 \cdot 10^{-6}$	$0,308 \cdot 10^{-6}$	$0,128 \cdot 10^{-6}$	$0,239 \cdot 10^{-7}$
$0,145 \cdot 10^{-6}$	$0,327 \cdot 10^{-6}$	$0,479 \cdot 10^{-6}$	$0,443 \cdot 10^{-6}$	$0,311 \cdot 10^{-6}$	$0,190 \cdot 10^{-6}$	$0,202 \cdot 10^{-6}$	$0,117 \cdot 10^{-6}$	$0,143 \cdot 10^{-6}$	$0,183 \cdot 10^{-6}$	$0,194 \cdot 10^{-6}$	$0,156 \cdot 10^{-6}$	$0,163 \cdot 10^{-7}$	$0,133 \cdot 10^{-7}$

La matrice $A(14, 14)$ calculée par le sous-programme précédent appelé "MATA"
 Cette matrice nous permet d'appliquer les méthodes approchées des vitesses critiques

Puisque la déformée exacte du rotor peut être calculée à partir de la matrice A_{ij} précédente par la formule :

$$\delta_i = g \sum_{j=1}^{j=14} A_{ij} \quad \delta_i = \text{la flèche au droit de la masse } m_i$$

$$g \cong 10 \text{ m/s}^2$$

La première vitesse critique est donnée par l'équation de Rayleigh-Ritz $\omega_c^2 = \frac{g \sum m_i \delta_i}{\sum m_i \delta_i^2}$

i	δ_i	δ_i^2	$m_i \delta_i$	$m_i \delta_i^2$
1	$2,9453 \cdot 10^{-5}$	$8,6748 \cdot 10^{-10}$	$4,8135 \cdot 10^{-4}$	$1,4177 \cdot 10^{-8}$
2	$5,6845 \cdot 10^{-5}$	$3,2331 \cdot 10^{-9}$	$2,8701 \cdot 10^{-3}$	$1,6315 \cdot 10^{-7}$
3	$7,9640 \cdot 10^{-5}$	$6,3400 \cdot 10^{-9}$	$6,5146 \cdot 10^{-3}$	$5,188 \cdot 10^{-7}$
4	$9,5486 \cdot 10^{-5}$	$9,1170 \cdot 10^{-9}$	$7,8560 \cdot 10^{-3}$	$7,501 \cdot 10^{-7}$
5	$1,0508 \cdot 10^{-4}$	$1,1040 \cdot 10^{-8}$	$6,7039 \cdot 10^{-3}$	$7,044 \cdot 10^{-7}$
6	$1,1030 \cdot 10^{-4}$	$1,2166 \cdot 10^{-8}$	$4,7232 \cdot 10^{-3}$	$5,1975 \cdot 10^{-7}$
7	$1,126 \cdot 10^{-4}$	$1,2694 \cdot 10^{-8}$	$5,5988 \cdot 10^{-3}$	$6,311 \cdot 10^{-7}$
8	$1,1297 \cdot 10^{-4}$	$1,2760 \cdot 10^{-8}$	$3,5640 \cdot 10^{-3}$	$4,026 \cdot 10^{-7}$
9	$1,1068 \cdot 10^{-4}$	$1,2250 \cdot 10^{-8}$	$4,7391 \cdot 10^{-3}$	$5,2456 \cdot 10^{-7}$
10	$1,0535 \cdot 10^{-4}$	$1,1098 \cdot 10^{-8}$	$6,7206 \cdot 10^{-3}$	$7,082 \cdot 10^{-7}$
11	$9,5679 \cdot 10^{-5}$	$9,1545 \cdot 10^{-9}$	$7,8725 \cdot 10^{-3}$	$7,5322 \cdot 10^{-7}$
12	$8,1754 \cdot 10^{-5}$	$6,6837 \cdot 10^{-9}$	$6,6860 \cdot 10^{-3}$	$5,466 \cdot 10^{-7}$
13	$5,8879 \cdot 10^{-5}$	$3,4667 \cdot 10^{-9}$	$2,9728 \cdot 10^{-3}$	$1,7504 \cdot 10^{-7}$
14	$2,9395 \cdot 10^{-5}$	$8,6412 \cdot 10^{-10}$	$5,355 \cdot 10^{-4}$	$1,5742 \cdot 10^{-8}$
Total \Rightarrow			$6,7837 \cdot 10^{-2}$	$6,4271 \cdot 10^{-6}$

La vitesse critique est : $\omega_c = \sqrt{\frac{10 \cdot 6,7837 \cdot 10^{-2}}{6,4271 \cdot 10^{-6}}} = 324,88 \text{ s}^{-1}$

$N_c = 3100 \text{ tours/min}$

CHAPITRE V

Etude des influences de l'élasticité, l'amortissement, et la flexibilité des liaisons sur la vitesse critique

V-1 Influence de la flexibilité des liaisons :

Pour les développements précédents nous avons admis des liaisons rigides à rotule.

En réalité, l'impédance est toujours finie ; en première approximation, on l'assimile souvent à une raideur.

Considérons un rotor théoriquement équilibré dont ses deux liaisons présentent une élasticité isotropique Figure (V-1)

(K_1, K_2) sont les raideurs des liaisons (1, 2)

(R_1, R_2) les réactions aux liaisons (1, 2)

$$R_1 + R_2 = \sum_{i=1}^n W_i = g \sum_{i=1}^n m_i$$

$$R_2 L - g \sum_{i=1}^n m_i L_i = 0$$

$$R_1 = \frac{g \sum_{i=1}^n m_i (L - L_i)}{L} \quad (5-1)$$

$$R_2 = \frac{g \sum_{i=1}^n m_i L_i}{L} \quad (5-2)$$

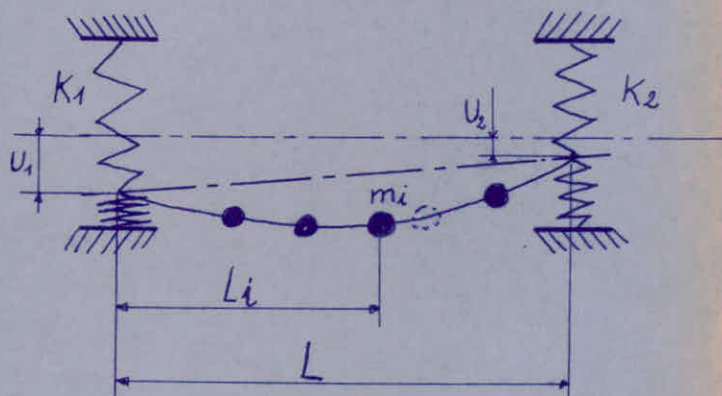


Fig (V-1)

Donc on peut calculer les déplacements statiques u_1 et u_2 de l'axe de rotation aux droits des appuis en utilisant les formules suivantes : $R_1 = K_1 U_1$, $R_2 = K_2 U_2$

d'où
$$U_1 = \frac{g \sum_{i=1}^n m_i (L - l_i)}{k_1 L} \quad (5-3)$$

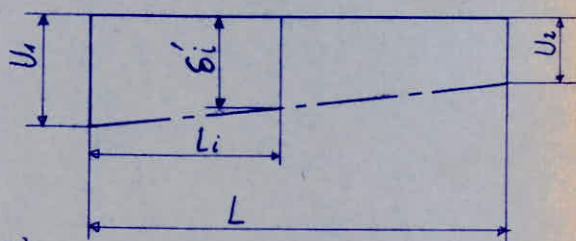
$$U_2 = \frac{g \sum_{i=1}^n m_i l_i}{k_2 L} \quad (5-4)$$

Donc on peut tirer le déplacement statique au droit de chaque masse (m_i) à la position (l_i) voir Fig(V-2)

$$\frac{\delta'_i - U_2}{U_1 - U_2} = \frac{L - l_i}{L}$$

$$\delta'_i = \frac{(U_1 - U_2)(L - l_i) + U_2 L}{L}$$

ou bien
$$\delta'_i = U_1 + (U_2 - U_1) \frac{l_i}{L} \quad (5-5)$$



Fig(V-2)

Après substitution de U_1 et U_2 par leurs expressions on a :

$$\delta'_i = \frac{g}{L} \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{L - l_j}{k_1} \left(1 - \frac{l_i}{L} \right) + \frac{l_j}{k_2} \right) \quad (5-6)$$

La formule de Dunkerley permet de mettre en évidence l'influence du déplacement supplémentaire δ'_i

Pour des liaisons rigides :
$$\frac{1}{\omega_c'^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i'^2} \quad \text{avec } \omega_i = \sqrt{g/\delta_i} \quad (5-7)$$

Pour des liaisons flexibles :
$$\frac{1}{\omega_c'^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i'^2} \quad \text{avec } \omega_i' = \sqrt{\frac{g}{\delta_i + \delta'_i}} \quad (5-8)$$

On constate que $\omega_i' < \omega_i$ ou encore $\frac{1}{\omega_i'} > \frac{1}{\omega_i}$

donc $\frac{1}{\omega_c'^2} > \frac{1}{\omega_c^2}$ d'où $\omega_c' < \omega_c$

Conclusion: La flexibilité des liaisons diminue la vitesse critique

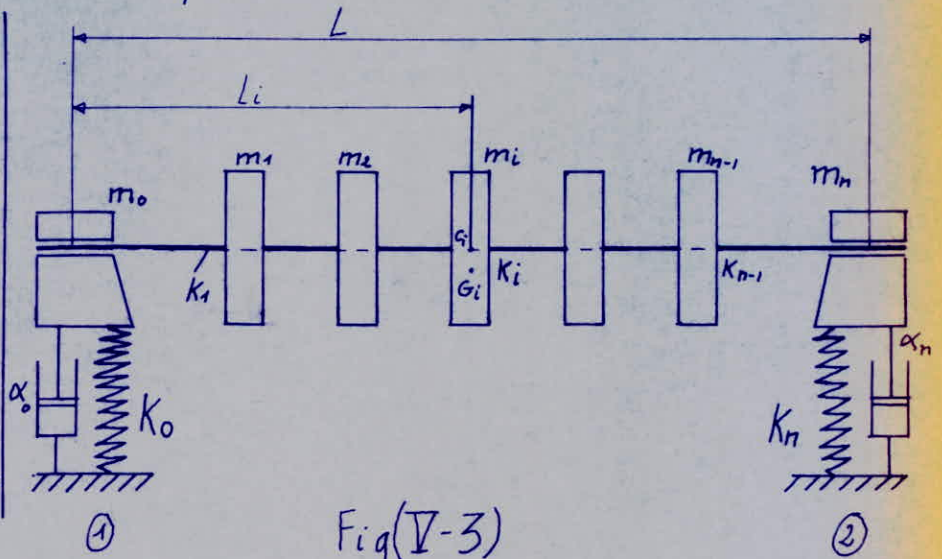
V-2 Etude d'un système rotor-liaisons :

Considérons un système rotor-liaisons isotrope comprenant un arbre déformable sans masse.

(n-1) disques indéformables massiques

deux liaisons constituées par un ressort et un amortisseur de masses (m_0) et (m_n)

La distance entre le centre géométrique c_i du disque i et le centre de gravité G_i est notée e_i .
Le rotor est entraîné à la vitesse ω .

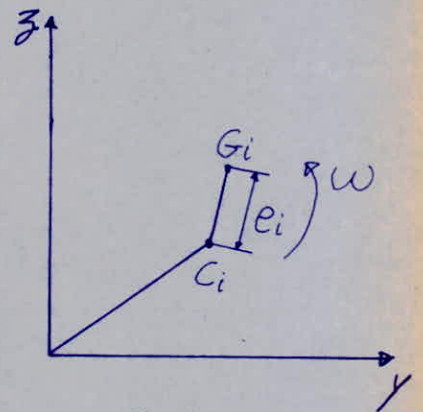


Fig(V-3)

Soient y_i et z_i les coordonnées du centre c_i ($i = 1, n-1$)

(y_0, z_0) Les coordonnées de la liaison ①

(y_n, z_n) Les coordonnées de la liaison ②



Fig(V-4)

$$U_i = y_i + jz_i \quad \text{pour } (i = 0, n)$$

L'énergie cinétique du système est : T

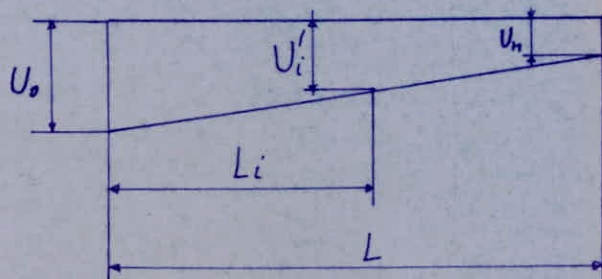
$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{i=n} m_i \dot{U}_i^2 \quad (5-7)$$

L'énergie potentielle du système est : V

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n-1} K_i (U_i - U_{i-1})^2 + \frac{1}{2} K_0 U_0^2 + \frac{1}{2} K_n U_n^2 \quad (5-8)$$

$$\text{où } U_i' = U_0 \left(1 - \frac{L_i}{L}\right) + U_n \frac{L_i}{L} \quad (5-9)$$

voir la figure (V-5)



Fig(V-5)

L'énergie de dissipation est : D

$$D = \frac{1}{2} \alpha_0 \dot{U}_0^2 + \frac{1}{2} \alpha_n \dot{U}_n^2 \quad (5-10)$$

Les forces excitatrices sont : F(t)

$$F_i(t) = m_i e_i \omega^2 e^{j\omega t} \quad \text{où } (i = 1, n-1) \quad (5, 11)$$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_i(t) \quad (5-12)$$

où $\mathcal{L} = T - V$ et q_i : sont les déplacements généralisés

L'application de l'équation de Lagrange permet d'obtenir le système d'équations différentielles qui régie le mouvement du système rotor-liaisons.

Après avoir remplacé les U_i' par leurs expressions on aura :

$$m_0 \ddot{U}_0 + \alpha_0 \dot{U}_0 + K_0 U_0 - \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\left(1 - \frac{L_i}{L} \right) (U_i - U_0 \left(1 - \frac{L_i}{L} \right) - U_n \frac{L_i}{L} \right) k_i \right) = 0$$

$$m_1 \ddot{U}_1 + K_1 \left(U_1 - U_0 \left(1 - \frac{L_1}{L} \right) - U_n \frac{L_1}{L} \right) = m_1 e_1 \omega^2 \exp j\omega t$$

$$m_2 \ddot{U}_2 + K_2 \left(U_2 - U_0 \left(1 - \frac{L_2}{L} \right) - U_n \frac{L_2}{L} \right) = m_2 e_2 \omega^2 \exp j\omega t$$

$$m_{n-1} \ddot{U}_{n-1} + K_{n-1} \left(U_{n-1} - U_0 \left(1 - \frac{L_{n-1}}{L} \right) - U_n \frac{L_{n-1}}{L} \right) = m_{n-1} e_{n-1} \omega^2 \exp j\omega t$$

$$m_n \ddot{U}_n + \alpha_n \dot{U}_n + K_n U_n - \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{L_i}{L} (U_i - U_0 \left(1 - \frac{L_i}{L} \right) - U_n \frac{L_i}{L} \right) k_i \right) = 0 \quad (5-13)$$

On cherche des solutions du type : $U_i = A_i \exp j\omega t$

On obtient un système d'équations linéaires des inconnues A_i

$$-\omega^2 m_0 A_0 + j\alpha_0 \omega A_0 + K_0 A_0 - \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(k_i \left(1 - \frac{L_i}{L} \right) \left(A_i - A_0 \left(1 - \frac{L_i}{L} \right) - A_n \frac{L_i}{L} \right) \right) = 0$$

$$-\omega^2 m_1 A_1 + K_1 \left(A_1 - A_0 \left(1 - \frac{L_1}{L} \right) - A_n \frac{L_1}{L} \right) = m_1 e_1 \omega^2$$

$$-\omega^2 m_2 A_2 + K_2 \left(A_2 - A_0 \left(1 - \frac{L_2}{L} \right) - A_n \frac{L_2}{L} \right) = m_2 e_2 \omega^2$$

$$-\omega^2 m_{n-1} A_{n-1} + K_{n-1} \left(A_{n-1} - A_0 \left(1 - \frac{L_{n-1}}{L} \right) - A_n \frac{L_{n-1}}{L} \right) = m_{n-1} e_{n-1} \omega^2$$

$$-\omega^2 m_n A_n + j\alpha_n \omega A_n + K_n A_n - \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(k_i \left(\frac{L_i}{L} \right) \left(A_i - A_0 \left(1 - \frac{L_i}{L} \right) - A_n \frac{L_i}{L} \right) \right) = 0 \quad (5-14)$$

connaissant ω ce système est de Cramer donc les inconnues A_i ($i=0, n$) sont calculables

Si l'on veut calculer les vitesses critiques du système
Les méthodes par approximations successives telle que :
- La méthode de Stodola - sont très utiles.

V-3 Optimum de l'amortissement des liaisons d'un système rotor-liaisons simple

Considérons le système, figure (V-6), constitué de :

- Un arbre déformable sans masse de raideur (K_1)
- Un disque indéformable de masse (m_1), à égale distance des liaisons, d'excentrement " e "
- Deux liaisons isotropes identiques constituées par :

Un ressort de raideur K_2

Un amortisseur : α_2

Un palier de masse : m_2

Le rotor est entraîné à la vitesse (ω).

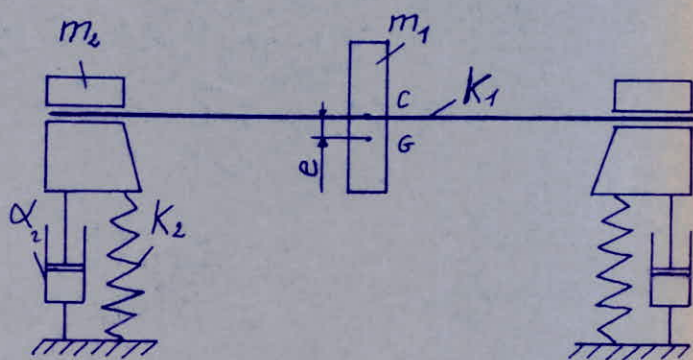


Fig (V-6)

L'étude a pour but la détermination de l'amortissement (coefficient α) qui en fonction des caractéristiques du système (masse, raideurs) conduit à des amplitudes faibles, dans un large domaine de vitesses y compris la vitesse critique.

u_1 = déplacement du disque

u_2 = déplacement des supports

A_1, A_2 sont les amplitudes de déplacements du disque et des supports respectivement

Le système (5-15) représente le mouvement de translation amortie

$$m_1 \ddot{u}_1 + K_1(u_1 - u_2) = m_1 e \omega^2 e^{j\omega t}$$

$$m_2 \ddot{u}_2 + \alpha_2 \dot{u}_2 + K_2 u_2 + \frac{1}{2} K_1 (u_2 - u_1) = 0 \quad (5-15)$$

Q = L'effort appliqué sur la fondation par les appuis

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} ; \beta = \frac{\omega}{\omega_0} ; \delta^2 = \frac{\alpha_2^2}{k_1 m_1} ; \mu = \frac{m_2}{m_1} ;$$

$$\gamma = \frac{k_2}{k_1} ; \eta = \frac{Q}{k_1 e}$$

Avec cette nouvelle notation, en grandeurs sans dimensions on peut écrire le système (5-16)

$$\left(\frac{A_1}{e}\right)^2 = \frac{\beta^4}{\Delta} \left(\left(\frac{1}{2} + \gamma - \mu \beta^2 \right)^2 + (\delta \beta)^2 \right)$$

$$q^2 = \frac{\beta^4}{\Delta} (\gamma^2 + \delta^2 \beta^2)$$

$$\left(\frac{A_2}{e}\right)^2 = \frac{\beta^4}{4 \cdot \Delta}$$

$$\left(\frac{A_1 - A_2}{e}\right)^2 = \frac{\beta^4}{\Delta} \left((\gamma - \mu \beta^2)^2 + \delta^2 \beta^2 \right) \quad (5-16)$$

$$\text{où } \Delta = \left((1 - \beta^2)(\gamma - \mu \beta^2) \right)^2 + \delta^2 \beta^2 (1 - \beta^2)^2 .$$

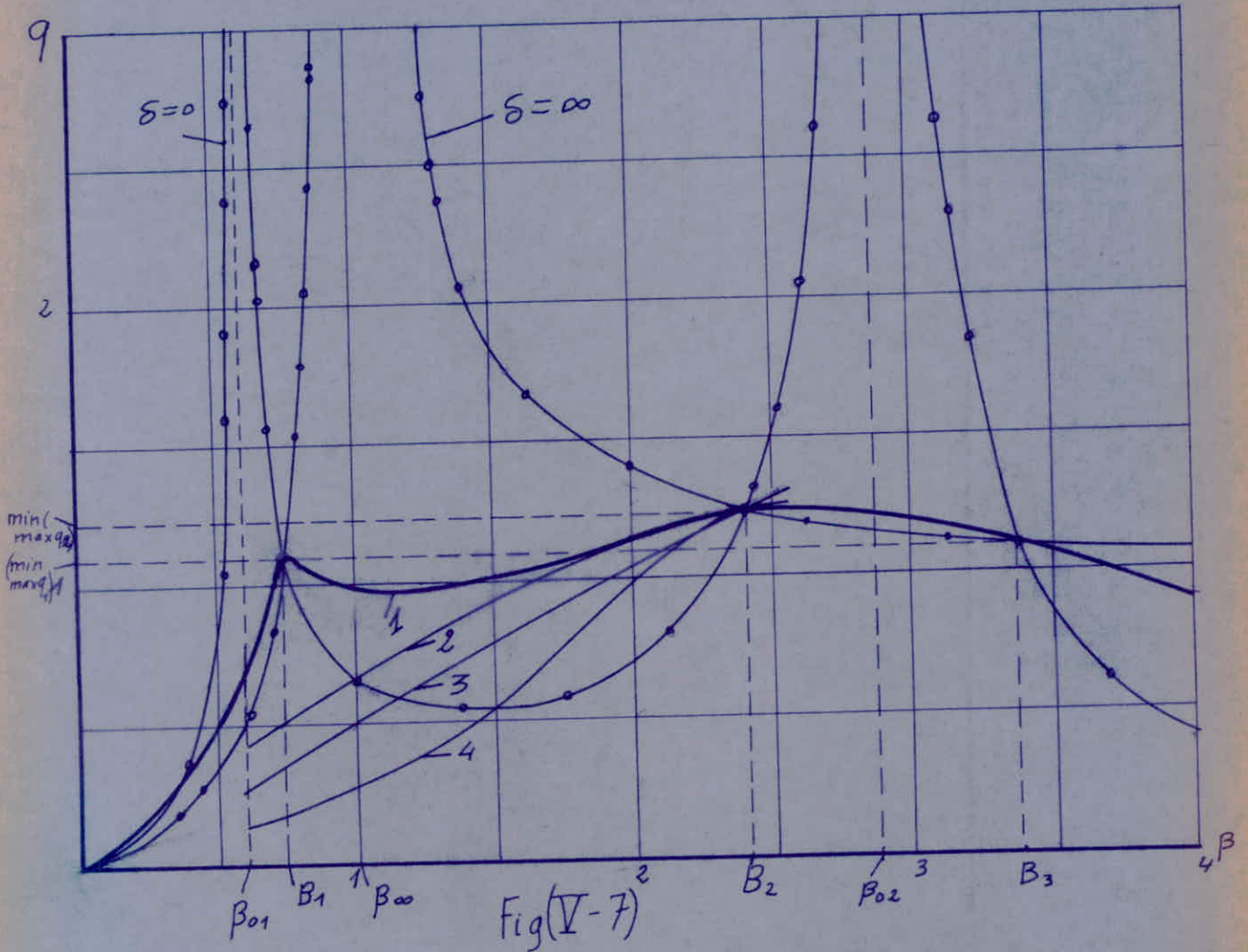
Les vitesses critiques ($\beta_{1,2}^0$) du régime non amorti sont données en résolvant l'équation (5-17) suivante :

$$(1 - \beta_0^2)(\gamma - \mu \beta_0^2) - \frac{1}{2} \beta_0^2 = 0 \quad (5-17)$$

Pour trouver les paramètres optimaux des amortisseurs on utilise la notion de (vitesses invariantes) des courbes des amplitudes qui ont les propriétés suivantes :

- L'amplitude pour ces vitesses ne dépend pas des quantités d'amortissement aux supports

- Ces vitesses sont trouvées aux points d'intersection des courbes d'amplitudes quand δ est nul ($\delta=0$) ou (amortissement nul) et ($\delta=\infty$) (Liaisons rigides). Voir Fig(V-7)



La courbe (1) pour $\gamma = 0,3$ et $\delta^2 = 0,2$

La courbe (2) pour $\gamma = \delta^2 = 0,1$

La courbe (3) pour $\gamma = \delta^2 = 0,05$

La courbe (4) pour $\gamma = \delta^2 = 0,02$

Dans cet exemple on a deux vitesses invariantes pour les déplacements et trois vitesses invariantes pour les efforts

Des conditions d'égalité des amplitudes aux deux points

invariants on trouve la rigidité des supports

Les conditions pour que la tangente à la courbe d'amplitude au point invariant, soit horizontale nous permet de trouver les coefficients d'amortissement optimums.

Les calculs ont montré que les valeurs optimums de (α, k) deviennent différentes en dépendance des caractéristiques choisies voir table (V-1)

Sur la figure (V-7) on a construit pour $\mu=0,1$ la courbe d'amplitude de la force (q) pour les paramètres optimums d'amortissement choisis de la table (V-1) et de la figure (V-7), on trouve que la force (q) reste suffisamment à bas niveau dans le large intervalle des vitesses et ne peut être diminuée encore à cause de l'hypothèse prise au départ.

Si au lieu d'égaliser les amplitudes aux points invariants on diminue l'amplitude seulement au voisinage de la première vitesse critique, le niveau de la force (q) peut être encore diminué.

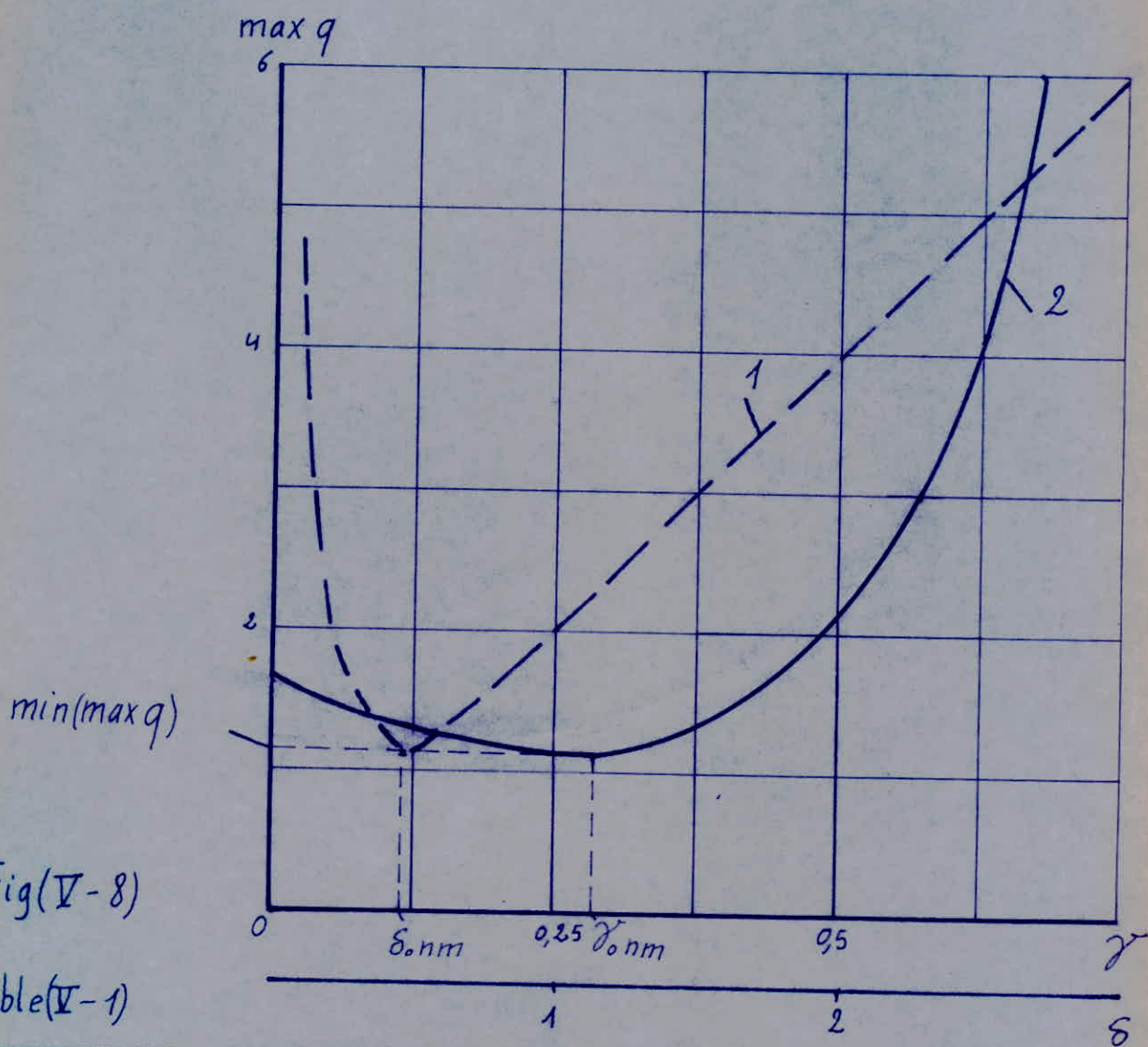
Dans le cas où la rigidité des supports peut être choisie petite on obtient un résultat satisfaisant du point de vue pratique pour $\gamma = \delta^2$ et $\alpha_2 = \sqrt{k_2 m_1}$ (5-18)

voir courbes (2, 3, 4) sur la figure (V-7)

Il est très important de déplacer les paramètres d'amortisseur autour de ses valeurs optimales.

Sur la figure (V-8) sont construits les courbes de la force en fonction des quantités d'amortissement.

Si la rigidité est optimum, on a la courbe (2)
 si l'amortissement est optimum, on a la courbe (1)
 voir courbes (1) et (2) Fig (V-8)



Fig(V-8)

Table(V-1)

Caracteristiques	valeurs des caracteristiques en vitesses invariantes	valeurs optimales	
		γ	δ^2
Deplacement du disque A_1/e	$\sqrt{1+4\mu}$	μ	μ
Deplacement relatif: $(A_1 - A_2)/e$	$\sqrt{1+4\mu}$	$1/4 + \mu$	$3/16 + \mu$
Force $Q/k_1 e$	$1+2\mu$	$1/4 + 1/2 \mu$	$\frac{(1+2\mu)(3-2\mu)}{16}$

La figure (V-8) montre que La force (q) augmente plus fortement pour Les amortissements inférieurs à l'optimum que pour Les valeurs supérieures et vice versa pour La rigidité

L'analyse a montré que l'amortissement optimum donne Le minimum d'énergie dissipée dans l'amortisseur.

L'avantage de l'amortisseur visqueux reside dans Le fait qu'il ne dépend pas du déséquilibre du rotor dans Le domaine linéaire des vitesses.

Dans Le cas où l'amortisseur visqueux ne peut pas être utilisé (Température élevée par exemple) on utilise Les amortisseurs à frottement sec pour diminuer Les amplitudes aux vitesses critiques

Les propriétés principales des amortisseurs à frottement sec sont:
1- La faible dépendance entre La vitesse et La force de frottement ce qui permet d'utiliser La formule de Coulomb : $F = \alpha N$

α : coefficient de frottement

F, N : force de frottement et force normale respectivement

2- L'existence dans Le système qui utilise Les frottements sec de deux régimes.

Régime: A - Elements ouverts: qui ont La possibilité du glissement relatif entre Les surfaces frottantes. Ce régime ne peut pas limiter L'amplitude de vibration en résonance.

Régime: B - Elements fermés: il ya absence du glissement relatif (c.à.d) La force de frottement est plus grande que L'effort transmis par les pièces en contact.

Ces propriétés nous donnent La possibilité de choisir

Les grandeurs de forces agissantes sur l'amortisseur évoquées des resonances du système.

Dans notre cas en posant : $\mu = \frac{m_2}{m_1}$; $\gamma = \frac{k_2}{k_1}$; $D = \frac{3F}{eK_1}$
où F est l'effort appliqué à chacun des amortisseurs.
Les analyses ont montré que si le paramètre (D) est choisit tel que

$$D > D^* = \left| \frac{\beta_0^2}{1 - \beta_0^2} \right| \quad (5-19)$$

où $\beta_0 =$ fréquence propre du système sans amortissement dans le système il n'y aura pas de résonance.

de (5-19) on prend β_0 qui donne la plus grande valeur de (D^*) de cette formule découle que $D^* > 1$ toujours.

Sur la figure (V-9) sont construits les courbes d'amplitude de l'effort agissant sur la fondation pour ($\mu = 0,1$; $\gamma = 0,1$) pour différentes valeurs de D avec ($D^* = 1,17$)

De la figure (V-9) on constate que pour ($D > D^*$) il n'y aura pas de résonance

L'amortisseur dans ce cas travaille dans deux régimes :

Régime 1 - L'amortisseur inclus dans le diapason des vitesses $\beta_*(D) \div \beta_2$

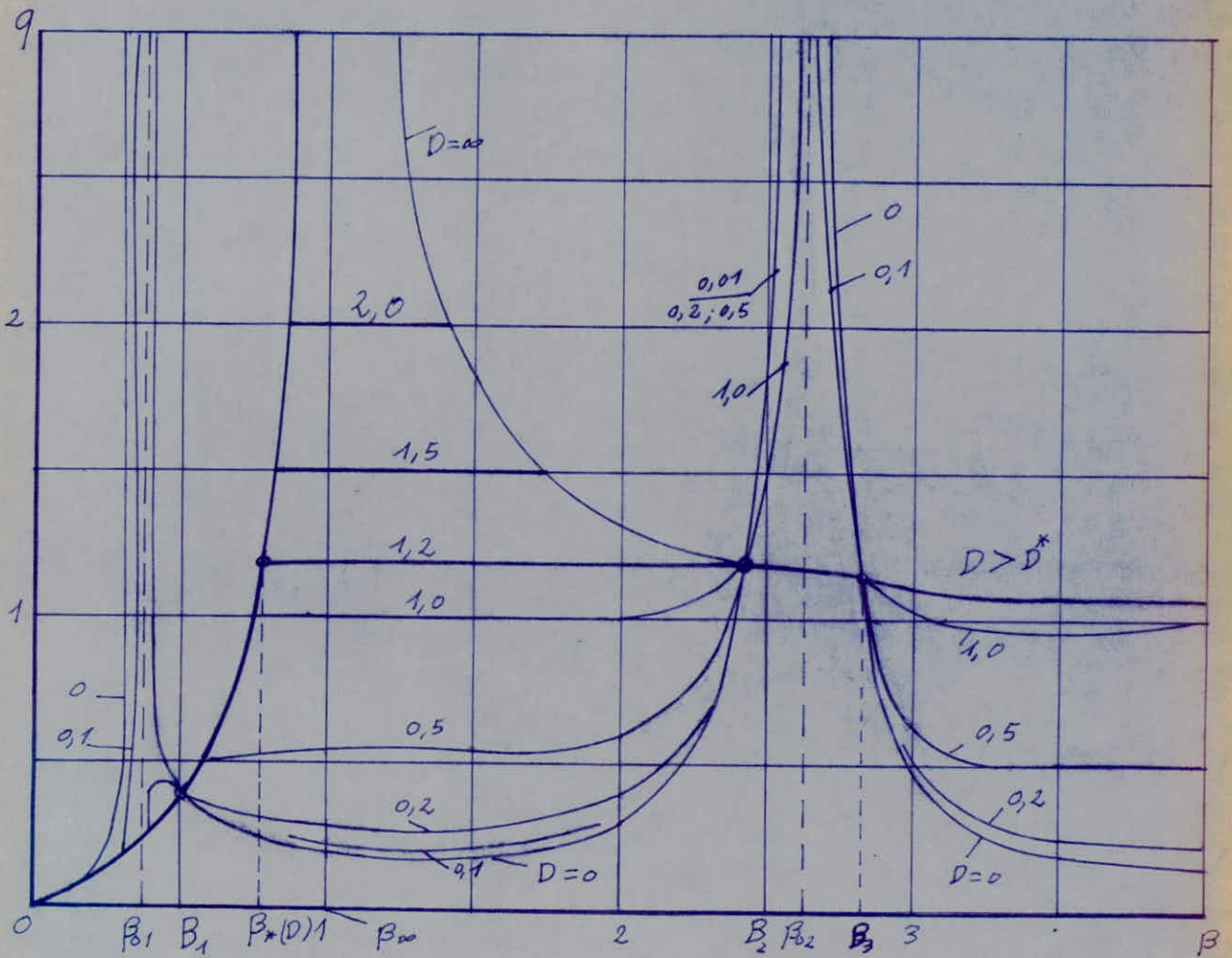
Régime 2 - L'amortisseur inclus dans l'autre diapason des vitesses.

La figure (V-9) permet de comprendre le sens physique des effets des amortisseurs à frottement sec.

Pour le paramètre (D) et la rigidité des supports (K_2) il faut choisir le minimum possible de (D, K_2)

Les efforts agissants sur la fondation diminuent pour (D, K_2) minimums

Le paramètre (D) dépend des grandeurs d'équilibrage.



Fig(V-9)

C'est pourquoi si cette grandeur est inconnue d'avance, on doit s'orienter vers le maximum possible.

Conclusion:

Après avoir terminé ce travail et en mesurant le chemin parcouru depuis la première mise en main de ce projet, je peux dire que j'ai appris beaucoup de choses que je souhaite continuer à apprendre et à appliquer dans l'industrie Algérienne. J'ai pu concrétiser partiellement la théorie des vibrations des machines tournantes qu'on a pas encore fini de s'étonner de leurs comportements vibratoires.

J'ai présenté quelques méthodes, de détermination des vitesses critiques de flexion, accessibles à tout "bureau d'étude". Ces méthodes ont par ailleurs l'intérêt de pouvoir être utilisées pour tester les programmes traités par ordinateur, et aussi d'être en relation directe avec la physique des phénomènes. Aussi j'ai donné un modèle de calcul des vitesses critiques d'un rotor compliqué, ce qui m'a permis de solliciter et de me familiariser avec l'ordinateur du (CNI)

J'ai terminé ce projet par une étude théorique d'un système rotor-liaisons douées de raideur et d'amortissement.

Bibliographie :

- 1- Vibrations des machines tournantes et des structures. Roland Bigret. Technique et Documentation.
- 2- Mechanical vibrations. Schaum's outline series.
- 3- Machine design. Schaum's outline series.
- 4- Théorie des vibrations par Timoshenko. Traduction Beranger 1954.
- 5- Résistance des matériaux. V. Féodosiev. Edition de Moscou.
- 6- Notions de résistance des matériaux. Guy Villard. SNED. Alger.
- 7- Calcul différentiel et intégral. Piskounov. Edition de Moscou.
- 8- Methody komputerowe w mechanice. Jan Szmelter. Biblioteka Naukawa Inżyniera.
- 9- FORTRAN IV. M. Dreyfus. CIRO. DUNOD.
- 10 - الميكانيكا التحليلية. دار نشر للطباعة والنشر موسكو.
- 11 - Mathématique pour l'informatique (Algorithmique numérique) Collection U. Armand Colin.
- 12 - Elements de calcul numérique. Edition Mir. Moscou.
- 13 - Catalogue de turbomachines industrielles HISPANO-SUIZA.
- 14 - Catalogue ALSTHOM-ATLANTIQUE. Division électro-mécanique.
- 15 - Matériaux de construction mécanique et électrique. Dunod.
- 16 - ВИБРАЦИИ В ТЕХНИКЕ. СПРАВОЧНИК. 1980.



