

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

21/82

USTHB

ENPA

Dept. Genie Mecanique

304



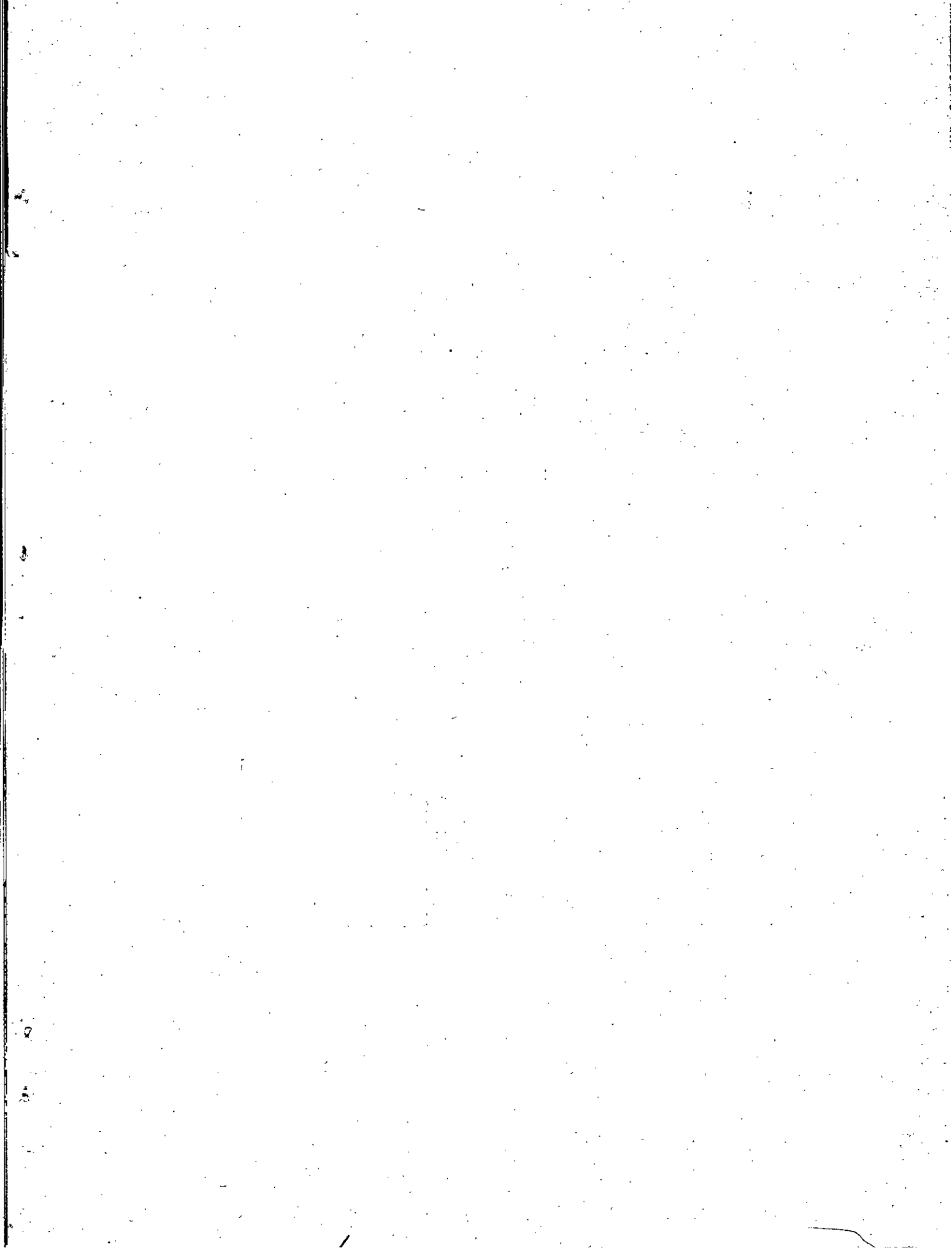
THESE DE FIN D'ETUDES

PROBLEMES DE
VIBRO-ISOLATION
DES MACHINES

Proposé par
M^r M.KSIAZEK

Etudié par
M. Meghaoui

PROMOTION JUIN 82



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

USTHB

ENPA

Dept. Génie Mécanique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
BIBLIOTHÈQUE
THÈSE DE FIN D'ÉTUDES

PROBLÈMES DE
VIBRO-ISOLATION
DES MACHINES

Proposé par
M^r M. KSIĄZEK

Étudié par
M. Meghaoui

PROMOTION JUIN 82

Remerciements

Je tiens à remercier vivement Monsieur **KSIĄZEK**, maître de conférences à l'ENP, pour son aide considérable et ses conseils si précieux qu'il n'a cessé de me prodiguer durant toute cette étude.

Je remercie aussi tous les professeurs du département de mécanique de ce qu'ils nous ont appris durant toute notre formation.

Enfin, je remercie tous les amis qui m'ont aidé dans cette étude ou durant ma formation.

Mohamed
A

DEDICACES

- A mon pere et à ma mere
- A ma femme
- A mes filles Naïma et Fatima
- A tous les étudiants du departement
de Genie Mecanique
- A tous les amis

Mohamed Meghiciouri

Sommaire

- Introduction

CH 1 - Généralités:

page

1	Notions de vibrations	1
2	Procédure d'analyse des vibrations dans les machines	3
3	Notion d'impédance	4
	CH 2 Étude des vibrations	
1	Introduction	8
2	Oscillations libres amorties	9
3	Oscillations forcées amorties	15
4	Variations de l'amplitude du mouvement	18
	CH 3 - Théorie de l'isolation vibratoire	
1	Introduction	22
2	Formes d'isolation vibratoire	22
3	Types de systèmes d'isolation vibratoire	24
4	Applications pratiques	28
	CH 4 Procédure d'analyse d'un système de vibration isolation dans le cas d'une machine alternative	
1	Suppositions (hypothèses)	35
2	Description de la machine	35
3	Cas où la machine n'est pas isolée	36
4	Cas du système passif	39
5	Cas du système actif	46
	- Conclusion	66

Introduction

Parmi les nombreuses vibrations mécaniques que nous observons chaque jour quelques unes peuvent être considérées comme utiles, celles qui nous permettent par exemple de tasser du béton etc., mais il faut avouer que, la plupart du temps, elles sont nettement nuisibles. Dans les machines, elles introduisent des forces parasites qui fatiguent inutilement les matériaux; par ailleurs, lorsqu'elles agissent sur un être humain, quand celui-ci est assis par exemple dans une voiture, elles nuisent à son confort: enfin, lorsqu'elles se produisent à fréquence audible comme dans une machine électrique, le son correspondant peut devenir fort désagréable.

Aussi la question se pose-t-elle maintenant d'éviter, dans la mesure du possible ces vibrations indésirables.

Pour obtenir ces résultats, on peut envisager plusieurs solutions parmi lesquelles on distingue:

a - Supprimer la cause même des vibrations elle consiste à un équilibrage et s'effectue lors de la construction.

b - Suspendre la machine en intercalant entre elle même et ses assises des supports élastiques.

Cette dernière solution fut le thème de cette étude intitulée "Problèmes de vibro-isolation des machines" et qui consiste à l'optimisation du système de vibro-isolation choisi.

Chapitre Généralités

I. Notions de vibrations

I-1. Définition :

Un corps est soumis à une vibration lorsqu'il subit des sollicitations périodiques alternées se traduisant, lorsque la machine est suspendue élastiquement, par des oscillations plus ou moins importantes.

On distingue deux sortes de vibrations :

a. - Vibration propre ou naturelle : c'est une vibration qui affecte la machine lorsque, après avoir été écartée de sa position d'équilibre, elle est abandonnée à elle-même.

b. - Vibration forcée ou entretenue. C'est une vibration imposée à la machine soit par son fonctionnement interne propre, soit par des sollicitations de son entourage.

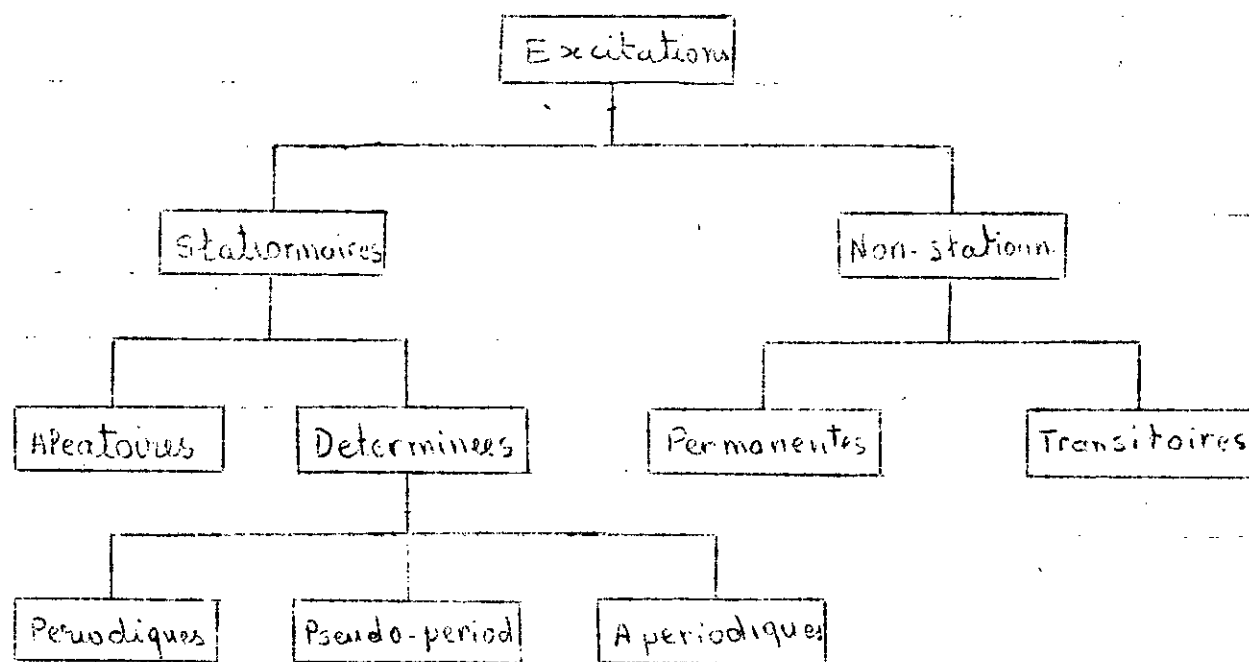
I-2. Causes des vibrations :

Les machines non équilibrées et animées d'un mouvement de rotation ou alternatif donnent naissance à des forces perturbatrices périodiques qui agissent sur les fondations et peuvent produire des vibrations dangereuses et un bruit fâcheux. Néanmoins ces vibrations sont, pour des raisons pratiques, introduites dans les machines (exemple : convoyeur à inertie ou à secousse, marteaux pneumatiques, saeres, etc...) Dans la plupart des cas, elles sont indésirables.

donc il est nécessaire de prévoir un système d'isolation de la machine. Cela consiste donc à intercaler entre la machine et ses assises des supports élastiques (ressorts et amortisseurs, combinés ou non), parfois et pour la protection d'une installation couteuse ou de précision on prévoit un asservissement, un système qui s'adapte automatiquement à l'isolation, désirée.

1-3 Nature des excitations :

La figure suivante (fig 1) nous montre comment peuvent se présenter les différentes excitations dans les machines



- fig 1 -

La réponse du système sur lequel agissent ces excitations peut aussi se présenter sous différentes formes. Elle peut être de nature différente que celle de l'excitation (entrée)

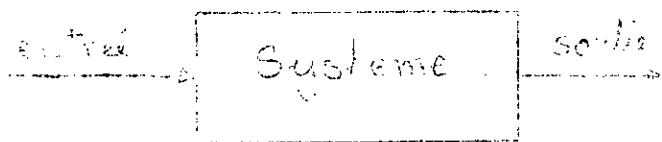


fig 2.

exemple.

nature de l'excitation.

sinusoïdale (périodique)

nature de la réponse.

exponentielle

Aperiodique

11.4 - Procédure d'analyse des vibrations dans les machines.

On suppose qu'une machine présente une source de vibrations (balourd, excentricité, etc...) et à installer dans un milieu délicat qui nécessite la limitation de vibrations à une certaine condition (condition physiologique ou de confort). Pour cela on doit procéder, comme suit:

a - Construction du modèle dynamique de la machine
 b - Évaluation des masses et rigidités des différentes parties mobiles ou fixes constituant la machine en considération.

c - Estimation du frottement entre les différentes pièces en contact, ainsi que le frottement propre du système d'isolation.

d - Détermination des équations différentielles du mouvement de la machine.

e - Résolution de ces équations différentielles.

f - Conclusion: Est ce qu'on pourrait adopter le système choisi?

III - Notion d'impédance mécanique

1 - Définition :

L'impédance mécanique est égale au rapport de la force appliquée en un point du système et la vitesse correspondante en ce point (impédance ponctuelle) ou au rapport de la force appliquée en un point et la vitesse en un autre point du système (impédance de transfert)

2 - Intérêts d'utilisation de l'impédance :

L'impédance mécanique et son inverse l'admittance permettent l'obtention facile des caractéristiques dynamiques d'un système, en particulier, les fréquences de résonance et d'anti-résonance, le coefficient de transmission, et c...

Malgré que les bases de calcul sont connues depuis longtemps, la détermination de cette grandeur est assurée par des appareils électroniques bien appropriés.

Ces mesures permettent de prévoir les conséquences sur le comportement dynamique d'une structure, de la modification (ou de l'incorporation) d'un élément ou de liaison avec un autre système. Il est ainsi possible, en mesurant l'impédance, d'éléments séparés (ou d'un groupe d'impédances), de prévoir le comportement global d'une structure.

Ces mesures rendent possibles :

a - la réduction du bruit et des vibrations dans les machines

b - l'analyse des chemins préférentiels de transmission des vibrations

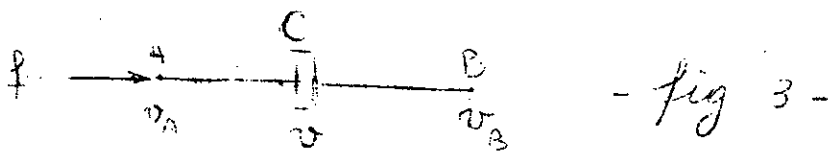
- c - L'étude des systèmes amortisseurs
- d - La prévision des modifications apportées par la fixation d'auxiliaires.

3 - Impédances d'éléments simples:

a - amortisseur

Supposons un amortisseur visqueux de coefficient d'amortissement C . Cet amortisseur agit proportionnellement à la vitesse

$$f = C v$$



$$v = v_A - v_B$$

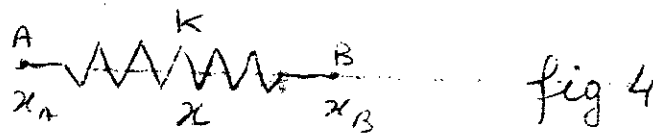
Supposons que f est de la forme complexe

$$f = f_0 \exp(j\omega t) = C v$$

L'impédance $Z_c = \frac{f}{v} = C$

La force est donc en phase avec la vitesse.

b. Ressort



$$x = x_A - x_B$$

Soit K la raideur du ressort, sa réaction est donc Kx . On a:

$$f = f_0 \exp(j\omega t) = Kx$$

$$x = \frac{f_0}{K} \exp(j\omega t)$$

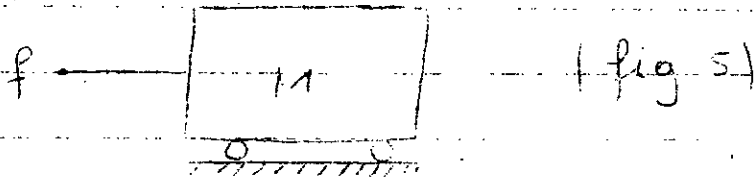
$$v = \frac{dx}{dt} = j\omega \frac{f_0}{k} \exp(j\omega t) = \frac{j\omega}{k} f$$

$$Z_k = \frac{f}{v} = \frac{f}{\frac{j\omega}{k} f} = \frac{k}{j\omega}$$

$$Z_k = \frac{k}{j\omega}$$

La force est en phase avec le déplacement

c- masse



$$f = f_0 \exp(j\omega t)$$

La masse est soumise à son accélération \ddot{x}

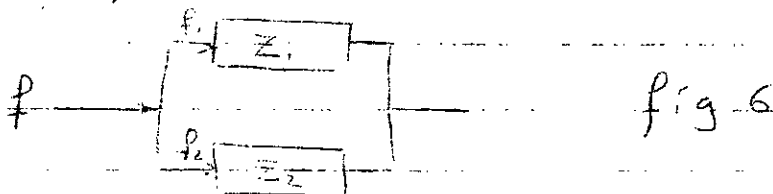
$$f = M \ddot{x}$$

$$v = \int \ddot{x} dt = \frac{f_0}{j\omega M} \exp(j\omega t) = \frac{1}{j\omega M} f$$

$$Z_m = \frac{f}{v} = j\omega M$$

4. Combinaisons d'impédances:

a- En parallèle



La force appliquée, à un instant donné t , au système est égale à la somme des forces dans les différentes branches.

$$f/v = \frac{f_1}{v} + \frac{f_2}{v} + \dots + \frac{f_n}{v}$$

$$Z_{\text{par}} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n = \sum_1^n Z_i$$

b) Impedance en serie

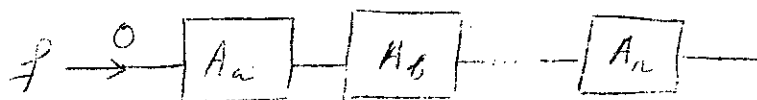


fig 9

La vitesse au point 0 est égale à la somme des vitesses relatives entre les diverses impédances et, la force transmise étant f on a :

$$V_0 = V_a + V_b + \dots + V_n$$

$$\frac{V_0}{f} = \frac{V_a}{f} + \frac{V_b}{f} + \dots + \frac{V_n}{f}$$

Si A est l'admittance du système

$$A_{\text{ser}} = A_a + A_b + \dots + A_n$$

$$A_{\text{ser}} = \sum_1^n A_i$$

$$\frac{1}{Z_{\text{ser}}} = \sum_1^n \frac{1}{Z_i}$$

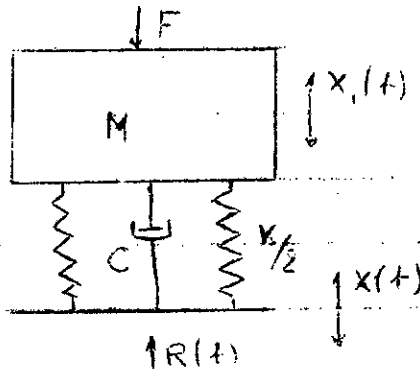
CH. II

Etude des Vibrations

II.1. Cas general

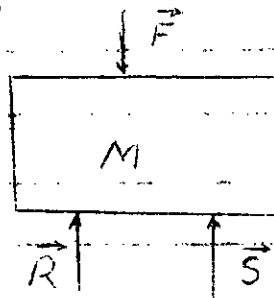
On considere le systeme de la figure 10 (cas de modele dit de Kelvin). Il consiste en une machine M montée sur des ressorts de raideur K et des amortisseurs de coefficient C . Le mouvement est supposé à un seul degre de liberte (mvt vertical)

Fig 10



La figure suivante (fig 11) nous montre les differentes forces exterieures agissant sur la machine M .

Fig 11



où :

$$R = C(\dot{x}_1 - \dot{x}) \quad (1)$$

$$S = K(x_1 - x) \quad (2)$$

La reaction R de l'amortisseur (supposé visqueux) est proportionnelle à la vitesse relative du systeme.

L'application de la loi de Newton

$$\sum F_{ext} = M \ddot{x} \quad (3)$$

où \ddot{x} est l'acceleration de la masse M .

nous donne l'equation du mouvement.

$$M \ddot{x}_1 = \vec{F} + \vec{R} + \vec{S} \quad (4)$$

En substituant les relations (1) et (2) dans l'équation (4) on obtient :

$$M\ddot{x}_1 = -K(x_1 - x) - C(\dot{x}_1 - \dot{x}) + F(t) \quad (5)$$

qui peut s'écrire aussi :

$$M\ddot{x}_1 + C\dot{x}_1 + Kx_1 = C\dot{x} + Kx + F(t) \quad (5')$$

En posant $P(t) = C\dot{x} + Kx + F(t)$ on obtient

$$M\ddot{x}_1 + C\dot{x}_1 + Kx_1 = P(t) \quad (6)$$

dont la forme réduite (dite aux accélérations) est :

$$\ddot{x}_1 + 2\varepsilon\omega_0\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{1}{M} P(t) \quad (7)$$

où :

$$2\varepsilon\omega_0 = C/M \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = K/M$$

ω_0 étant la pulsation propre de la masse M suivant que $F(t)$ et $x(t)$ existent ou non, plusieurs cas sont à distinguer.

II - 2. Oscillations libres.

2 - 1 cas d'une fondation rigide

On considère que la force excitatrice $F(t)$ de la machine, ainsi que le déplacement $x(t)$ de l'assise sont nuls. ($P(t)$ est donc égal à zéro)

L'équation du mouvement se déduit de la relation (7) et l'on a :

$$\ddot{x}_1 + 2\varepsilon\omega_0\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0 \quad (8)$$

En substituant $x_1 = e^{pt}$ dans la relation (8) on a :

$$p^2 + 2\varepsilon\omega_0 p + \omega_0^2 = 0 \quad (9)$$

cette relation (9) n'est autre que l'équation caractéristique de l'équation différentielle (8) dont les solutions sont :

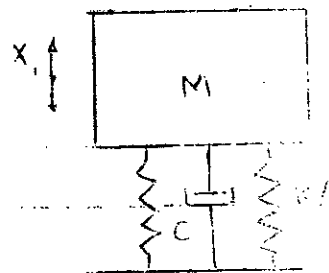


fig 12

$$p_{1,2} = \omega_0 (-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1}) \quad (10)$$

Suivant que ε (facteur d'amortissement) sera supérieur, inférieur ou égale à 1, la solution de l'équation différentielle (8) est différente. Trois cas peuvent donc se présenter.

1^{er} cas: $\varepsilon = 1$

Ce cas est important du fait qu'il détermine la mesure du déplacement relatif de l'amortissement d'un système particulier. L'amortissement est dit critique et son coefficient est c_c . Le nombre ε se définit par le rapport entre les coefficients de l'amortissement réel et critique.

$$\varepsilon = c / c_c$$

Les racines de l'équation caractéristique (9) sont

$$p = p_1 = p_2 = -\frac{c_c}{m} = -\omega_0 \quad (11)$$

Et par suite, la solution de l'équation (8) est alors:

$$x_1 = A e^{-\omega_0 t} + B t e^{-\omega_0 t} \quad (12)$$

A et B sont des constantes arbitraires dépendant des conditions initiales.

Par exemple si l'on suppose qu'à l'instant $t=0$, la machine se trouvait à la position x_0 et qu'elle fut lâchée sans vitesse initiale

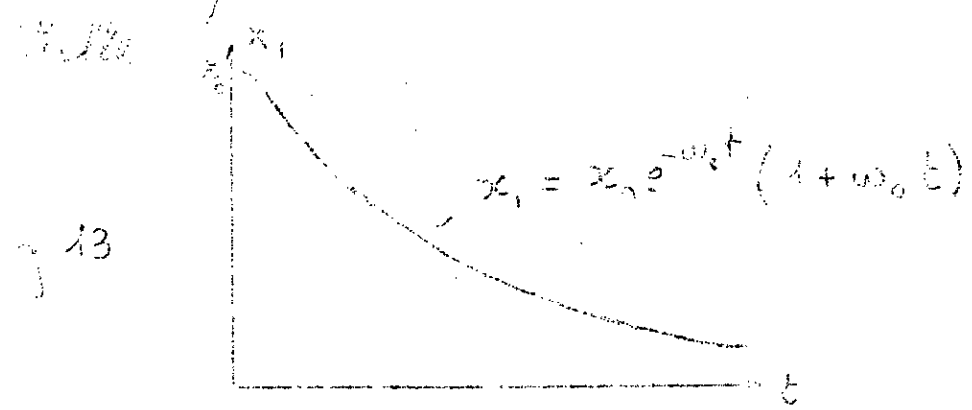
($\dot{x}_1(0) = 0$) on obtient alors

$$A = x_0 \text{ et } B = \omega_0 x_0$$

Dans la figure suivante (fig 13) se trouve la courbe $x(t)$ qui montre que le mouvement est

10-20
23-24-28-39

periodique $x_1(t)$ devient suivant une expo-



3^e cas: $\epsilon < 1$
 C'est le cas le moins utilisé et éventuellement plus important. Le rapport $c/2m = \omega$ est inférieur à ω_0 , les racines p_1 et p_2 de l'équation caractéristique (3) sont complexes.

On a :

$$p_{1,2} = -\epsilon \omega_0 \pm j \omega_1 \quad (13)$$

avec $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2}$

La solution de l'équation différentielle (8) est :

$$x_1 = A e^{-\epsilon \omega_0 t} \sin(\omega_1 t + \varphi) \quad (14)$$

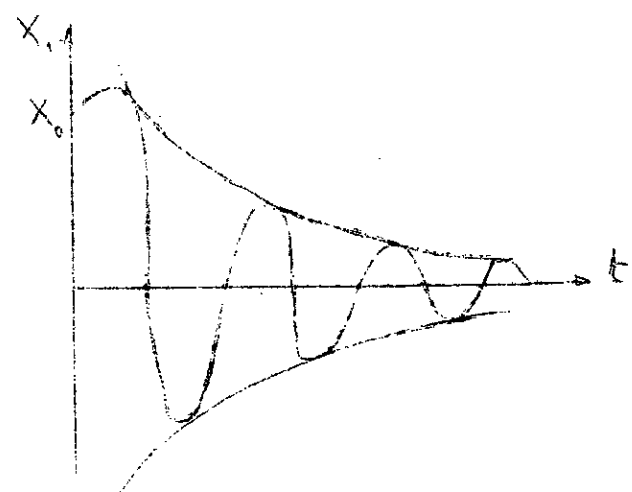


Fig 14

De la figure ci-contre on déduit que le mouvement de la machine décroît exponentiellement au cours du temps. Il est périodique et sa pulsation ω_1

3^{ème} cas: $\varepsilon > 1$

L'équation caractéristique (9) admet deux solutions réelles négatives

$$p_1 = \omega_0 (-\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1})$$

et

$$p_2 = \omega_0 (-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})$$

La solution de l'équation (8) est alors:

$$x_1 = A e^{p_1 t} + B e^{p_2 t}$$

Le mouvement résulte de la combinaison de deux exponentielles décroissantes. On dit qu'il y a rapprochement lent vers la position d'équilibre sans vibration. Le mouvement de la machine est donc aperiodique.

Exemple: On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la machine se trouve à la distance x_0 de sa position d'équilibre et qu'elle fut lâchée à une vitesse nulle ($\dot{x}_0 = 0$)

$$\text{On a : } A + B = x_0$$

$$A p_1 + B p_2 = 0$$

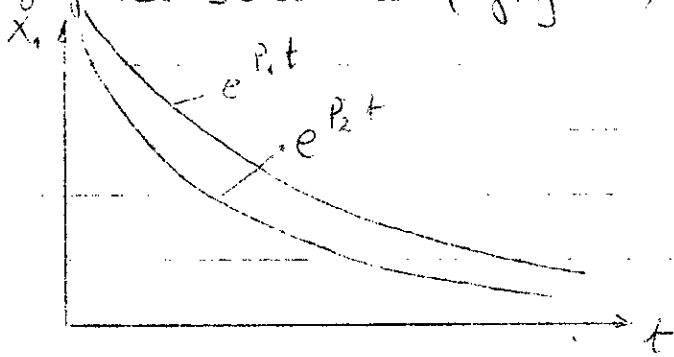
On obtient donc:

$$A = \frac{-p_2}{p_1 - p_2} x_0$$

$$\text{et } B = \frac{p_1}{p_1 - p_2}$$

$$x_1 = \frac{1}{p_1 - p_2} (-p_2 e^{p_1 t} + p_1 e^{p_2 t})$$

Les déplacements $x_1(t)$ sont représentés dans la figure suivante (fig 15)



En fonction des paramètres p_1 et p_2 l'allure de la courbe de $x_1(t)$ diffère.

- fig 15 -

2-2. Cas des fondations souples

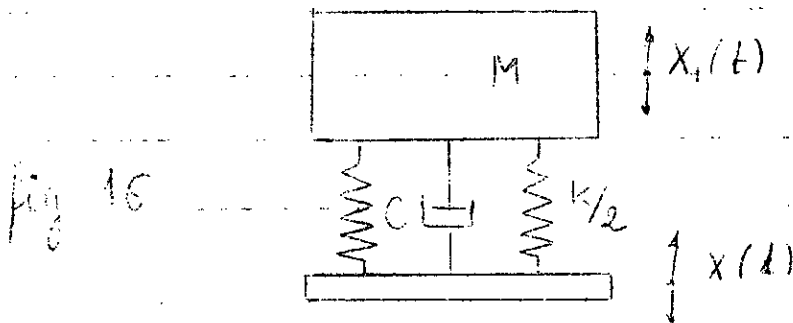


fig 16

Dans ce cas on considère que la machine M est excitée par aucune force extérieure. Son déplacement lui est donc communiqué par le mouvement de son support. L'équation du mouvement se déduit de l'équation (7) d'où :

$$\ddot{X}_1 + 2\varepsilon\omega_0\dot{X}_1 + \omega_0^2 X_1 = 2\varepsilon\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X \quad (15)$$

on suppose que le mouvement $(x(t))$ de la fondation est sinusoïdal

$$x = a \sin \omega t$$

$$\text{alors } \dot{x} = +a\omega \cos \omega t$$

l'équation (15), après substitution de x et \dot{x} par leur valeur respective devient :

$$\ddot{X}_1 + 2\varepsilon\omega_0 \dot{X}_1 + \omega_0^2 X_1 = 2\varepsilon\omega_0 \omega a \cos \omega t + \omega_0^2 a \sin \omega t \quad (16)$$

Tout se passe donc comme si la fondation était immobile et la masse soumise à la résultante de deux forces en quadrature, l'une d'intensité constante ($K a \sin \omega t$) l'autre d'intensité proportionnelle à la pulsation ω ($C a \omega \cos \omega t$).
En vertu du principe de la superposition des effets des forces, le mouvement pris par la machine est la somme géométrique des mouvements pris sous l'action de chacune en sorte que l'on peut écrire :

$$X_1 = X_1' + X_1'' = A \sin(\omega t + \varphi) + B \cos(\omega t + \psi) \quad (17)$$

A, B, φ et ψ satisfaisant aux relations :

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{a}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\varepsilon^2 r^2}} ; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\varepsilon r}{1-r^2} \\ B &= \frac{2a\varepsilon r}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\varepsilon^2 r^2}} ; \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{r^2-1}{2\varepsilon r} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

où $r = \frac{\omega}{\omega_0}$

Le mouvement résultant est donc :

$$X_1 = C \sin(\omega t + \chi) \quad (19)$$

avec $\varphi < \chi < \varphi + \frac{\pi}{2}$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{a \sqrt{1 + 4\epsilon^2 r^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}} \quad (20)$$

$$\sin \chi = \frac{A+B}{C} = \frac{1 + 2\epsilon r}{\sqrt{(1+r^2\epsilon^2 4)}}$$

Le mouvement est donc (d'après (18)) sinusoïdal et périodique.

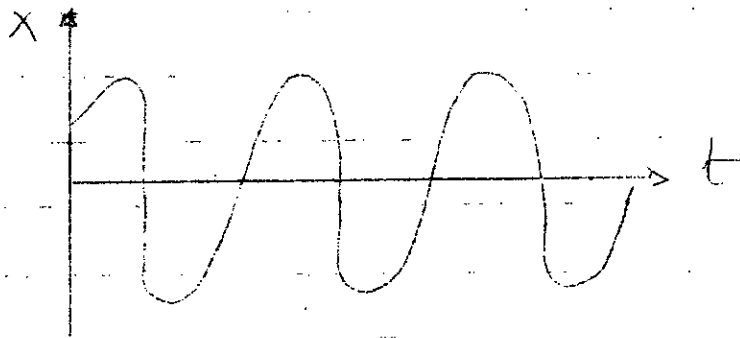


fig 17

II-3 Oscillation forcées amorties

On ne considère dans ce paragraphe que les fondations rigides, car pour les fondations souples on tombe sur le même cas que précédemment.

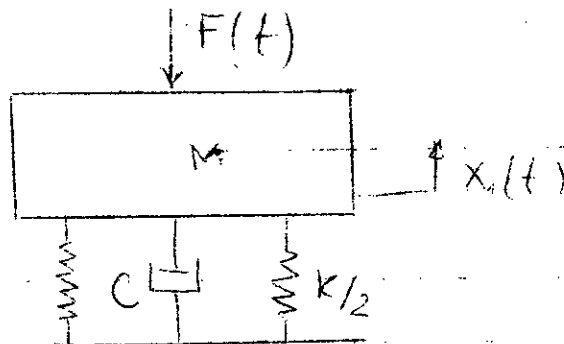


fig 18

La force harmonique $F(t)$ qui agit sur la machine est supposée de la forme:

$$F(t) = F_0 \sin \omega t$$

Comme $X(t)$ est nulle ($\dot{X} = 0$) l'équation (7) s'écrit:

$$\ddot{X}_1 + 2\varepsilon \omega_0 \dot{X}_1 + \omega_0^2 X_1 = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \quad (21)$$

La solution de (21) est donc de la forme:

$$X_1 = X_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

qui peut être satisfaite lorsque l'on a

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{-2\varepsilon r}{1-r^2} \\ X_0 &= \frac{F_0}{M \omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\varepsilon^2 r^2}} \end{aligned} \right\} (22)$$

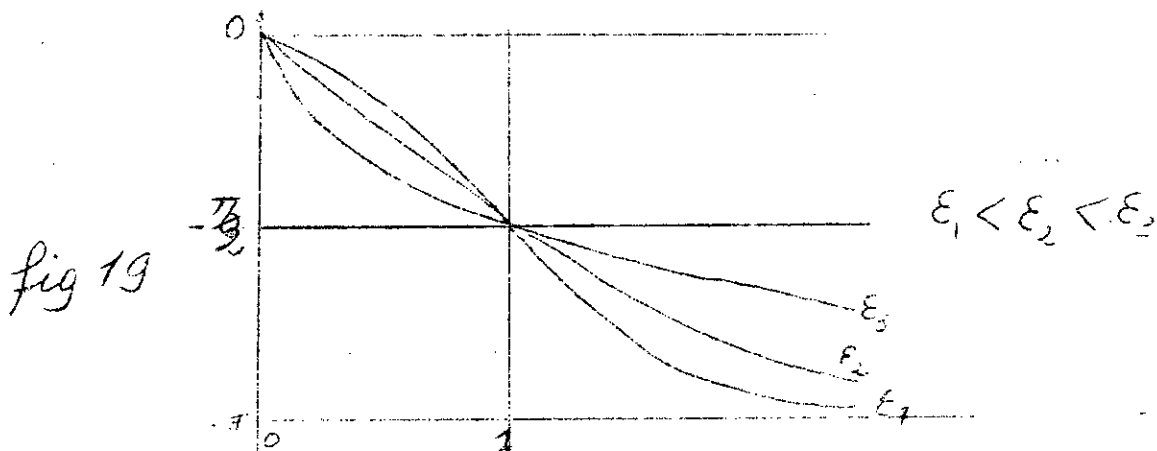
Le mouvement est donc caractérisé par une vibration harmonique de même fréquence que la force imposée mais déphasée dans le temps. Son amplitude X_0 de même que son déphasage φ varie comme indiqué par les formules (22) suivant le rapport r de la pulsation imposée à la pulsation propre du système non amorti:

a - Considération du déphasage par rapport à la force.

Lorsque la pulsation imposée est très basse ($r \ll 0$) $\operatorname{tg} \varphi$ est très faible et le déphasage

voisin de 0. Pratiquement, le mouvement est en phase avec l'effort imposé. La pulsation imposée croissant et s'approchant de la valeur de la pulsation propre du système ($r \approx 1$), $\text{tg} \varphi$ croît indéfiniment, φ tend vers $-\frac{\pi}{2}$ et à la résonance ($r = 1$) atteint cette valeur. Le mouvement est alors en quadrature avec l'effort perturbateur. Au delà, $\text{tg} \varphi$, toujours très grand, change de signe et le déphasage φ continue à croître de $-\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{4}$, valeur qu'il atteint asymptotiquement pour $r = \infty$. Lorsque la pulsation imposée devient très grande, le mouvement est en opposition de phase avec l'effort $F(t)$ imposé.

La fig 19 rend compte de ces vibrations suivant les différentes valeurs du coefficient d'amortissement ε . plus l'amortissement est faible et plus les variations de phase sont rapides aux alentours de $r \approx 1$. On y retrouve à la limite les conditions particulières particulières à la vibration forcée non amortie.



II-4 Variation de l'amplitude du mouvement en fonction de la force imposée.

II-4-1 Cas d'une force à amplitude constante

Posant $F = m\omega_0^2 Z_0$, Z_0 représente la deflexion statique du ressort sous la force F .
L'Amplitude s'écrit donc :

$$Z = \frac{F}{m\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\varepsilon^2 r^2}}$$

$$Z = \frac{Z_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\varepsilon^2 r^2}} = Z_0 \Delta_\varepsilon \quad (23)$$

Δ_ε est dit "coefficient d'amplification" ou "amplificateur dynamique" et est égal au rapport de l'amplitude d'oscillation à la deflexion statique du ressort sous l'effort F .

$$\Delta_\varepsilon = \frac{Z}{Z_0}$$

$\Delta_\varepsilon(r)$ est représenté dans la figure suivante (fig 20) pour différentes ε .
L'examen de ce diagramme montre :

a - quelque soit la fréquence de la force imposée, l'amortissement réduit toujours l'amplitude des oscillation.

b - cette réduction n'est pas uniforme. Le maximum d'amplitude correspond à des valeurs de r inférieures à 1.

II-4-2. La force est d'amplitude proportionnelle à la pulsation

Ce cas peut être obtenu, par exemple, lorsque en attaque la masse suspendue par un amortisseur visqueux dont l'extrémité libre serait animée d'un mouvement harmonique d'amplitude donnée a' .

On aurait ainsi:

$$F = 2M\omega_0 \varepsilon' \omega a' \quad (24)$$

L'expression de l'amplitude du mouvement est:

$$F_2 = \frac{2\varepsilon' a' r}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\varepsilon^2 r^2}} = 2\varepsilon' a' \Delta'_\varepsilon \quad (25)$$

Les variations de Δ'_ε en fait de r sont données par le diagramme (24). Celui-ci se différencie du précédent (20) par le fait que Δ'_ε part de 0 et que lorsque r est élevée elle tend vers 0 mais moins vite que dans le cas précédent.

II-4-3 La force est d'amplitude proportionnelle au carré de la distance...

Ce cas est dû à une force d'inertie (exemple balourd, machines alternatives, etc...)

On a:

$$F = m' a \omega^2 \quad (m' \text{ masse du balourd})$$

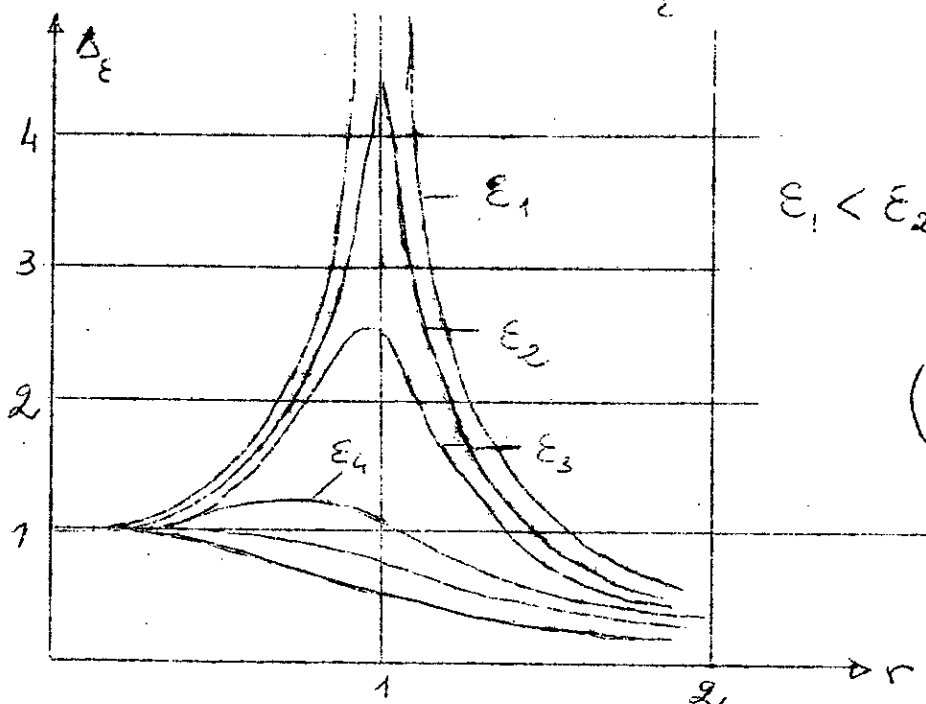
$$\frac{F}{m\omega_0^2} = \frac{m'\omega^2}{m\omega_0^2} = \mu a r^2 \quad (26)$$

où μ est le rapport de la masse m' du balourd (ou autre pièce mobile, exemple piston) à la masse m de la machine.

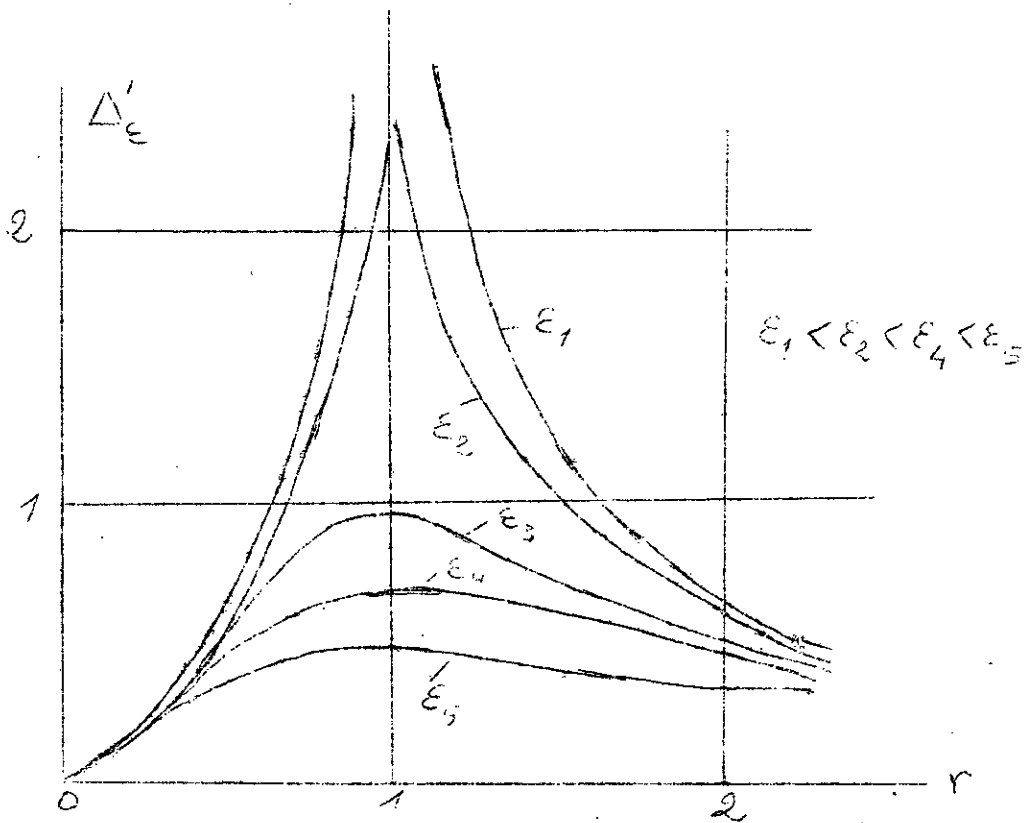
La deflexion statique est $z_0 = \mu a$.
L'amplitude du mouvement devient :

$$z = \frac{\mu a r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\epsilon r^2}} = \mu a \Delta_\epsilon'' \quad (27)$$

Δ_ϵ'' étant le coefficient de résonance dynamique dont les variations en fonction de r sont données par le diagramme de la figure (20).
On constate que pour les valeurs très faibles de r , Δ_ϵ'' est nulle (proche de zéro). pour les valeurs élevées de r , Δ_ϵ'' tend vers 1



(fig 20)



- fig 21 -

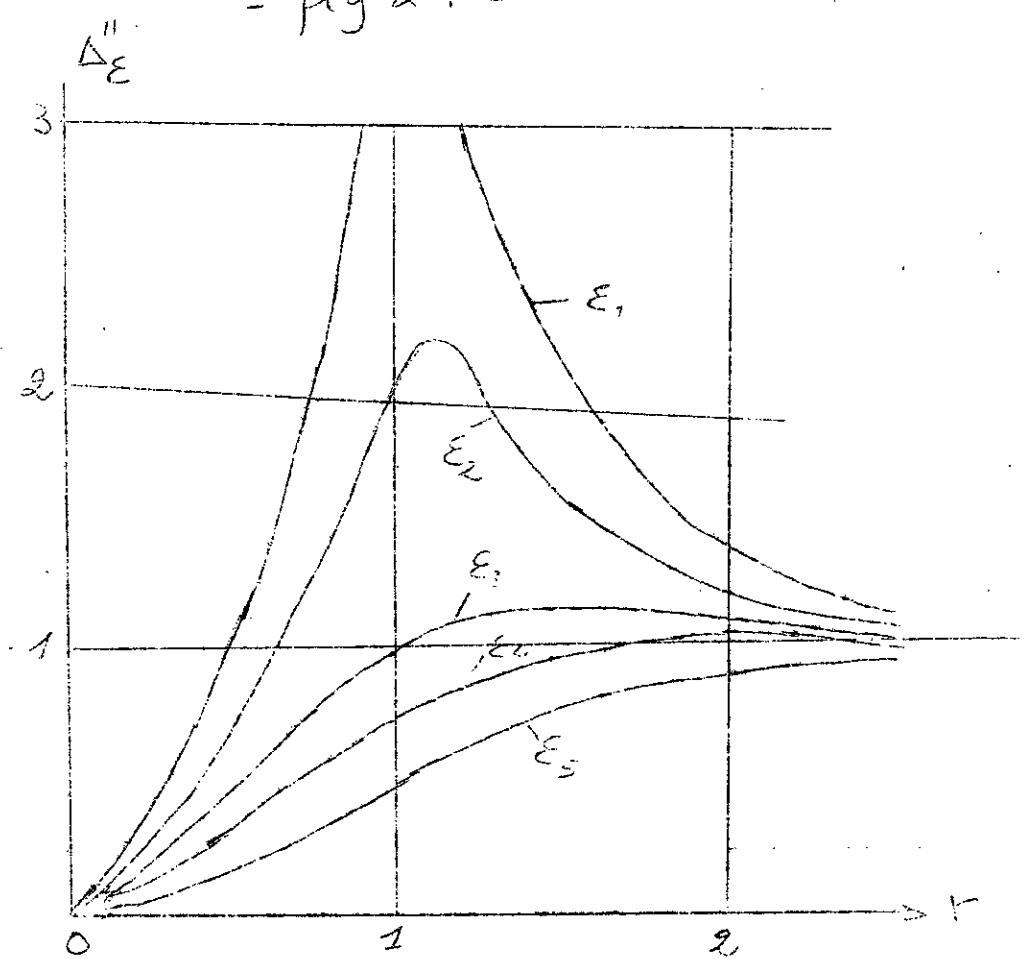


fig 22

1- Introduction:

En pratique, on a souvent été amené à installer une machine non équilibrée sur une structure où les vibrations sont à éliminer, c'est le cas, par exemple, des moteurs électriques à courant alternatif, des moteurs de voitures automobiles, etc....

Le problème consiste donc à trouver un moyen de monter la machine de façon à éviter (le cas idéal) ou à réduire l'effet des vibrations transmises à la structure.

2- Formes d'isolation vibratoire.

Suivant qu'on est amené à protéger la machine ou la structure de l'effet des vibrations deux formes se présentent.

a- Isolation vibratoire directe

On appelle isolation vibratoire directe la mise en œuvre des moyens propres à éviter ou à réduire la transmission au support des vibrations dont le solide est le siège, en raison de son fonctionnement. Par exemple, l'isolation d'un moteur sur un châssis de véhicule, d'une machine dans un bâtiment industriel, etc....

alors que les fréquences propres sont souvent imposées (c'est le cas par exemple, des suspensions de véhicules où des considérations physiologiques limitent étroitement leurs valeurs (de l'ordre de 1,5))
On rencontrera à peu près nécessairement des régimes de résonnances d'où la nécessité de prévoir un amortissement adéquat.

3. Types de systèmes de vibro-isolation

3-1: Système passif:

C'est le système (SVI) le plus simple, il consiste seulement à monter la machine sur une combinaison de ressorts et d'amortisseurs bien appropriés

3.1.1. Transmissibilité

C'est un problème important des suspensions élastiques. Il est fréquemment désirable de prévoir les forces d'inertie développées dans la machine. De même il est désirable d'isoler le mouvement du support d'un instrument délicat, etc...

En tout cas, la transmissibilité traduit l'efficacité d'une installation et peut être exprimée par le rapport de la force (ou mouvement) transmise à celle (ou celui) développé.

3.1.2 Coefficient de transmission

a - Isolation directe :

On considère le cas de la figure (18)

L'effort transmis au support est égal à la somme géométrique

de la réaction du ressort

$$K X_1 = m \omega_0^2 X_1$$

et de la réaction de l'amortisseur

$$C \dot{X}_1 = 2 m \varepsilon \omega_0 \dot{X}_1$$

Comme

$$X_1 = X_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{et } \dot{X}_1 = X_0 \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Ces deux réactions sont en quadrature, l'effort maximal transmis est donc

$$T = \sqrt{(m \omega_0^2 X_0)^2 + (2 m \varepsilon \omega_0 \omega X_0)^2}$$

$$T = m \omega_0 X_0 \sqrt{1 + 4 \varepsilon^2 r^2} \quad (28)$$

soit en tenant compte de la relation (22)

et en substituant X_0 par sa valeur, dans (28)

on obtient :

$$T = m \gamma \frac{\sqrt{1 + 4 \varepsilon^2 r^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + 4 \varepsilon^2 r^2}} \quad \text{où } \gamma = \frac{F_0}{m} \quad (28')$$

$$T = \frac{\sqrt{1 + 4\varepsilon^2 r^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\varepsilon^2 r^2}} F \quad (28')$$

comme le coefficient de transmission θ est

$$\theta = \frac{T}{F}$$

on a :

$$\theta = \frac{\sqrt{1 + 4\varepsilon^2 r^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\varepsilon^2 r^2}} \quad (29)$$

b. Isolation inverse

On considère le cas de la figure (46).

Après tout calcul fait, on trouve l'amplitude maximale

$$x_1 = \frac{a \sqrt{1 + 4\varepsilon^2 r^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\varepsilon^2 r^2}} = a \theta \quad (30)$$

Si l'on convient alors de définir le coefficient de transmission inverse (θ') par le quotient de l'effort maximal réellement appliquée à la masse, soit :

$$|M \ddot{x}_1|_{\max} = M a \omega^2 \theta' \quad (31)$$

(θ' étant le coefficient de transmission inverse) par l'effort maximal qui lui serait appliquée si elle était rigidement

lié à son assise, soit

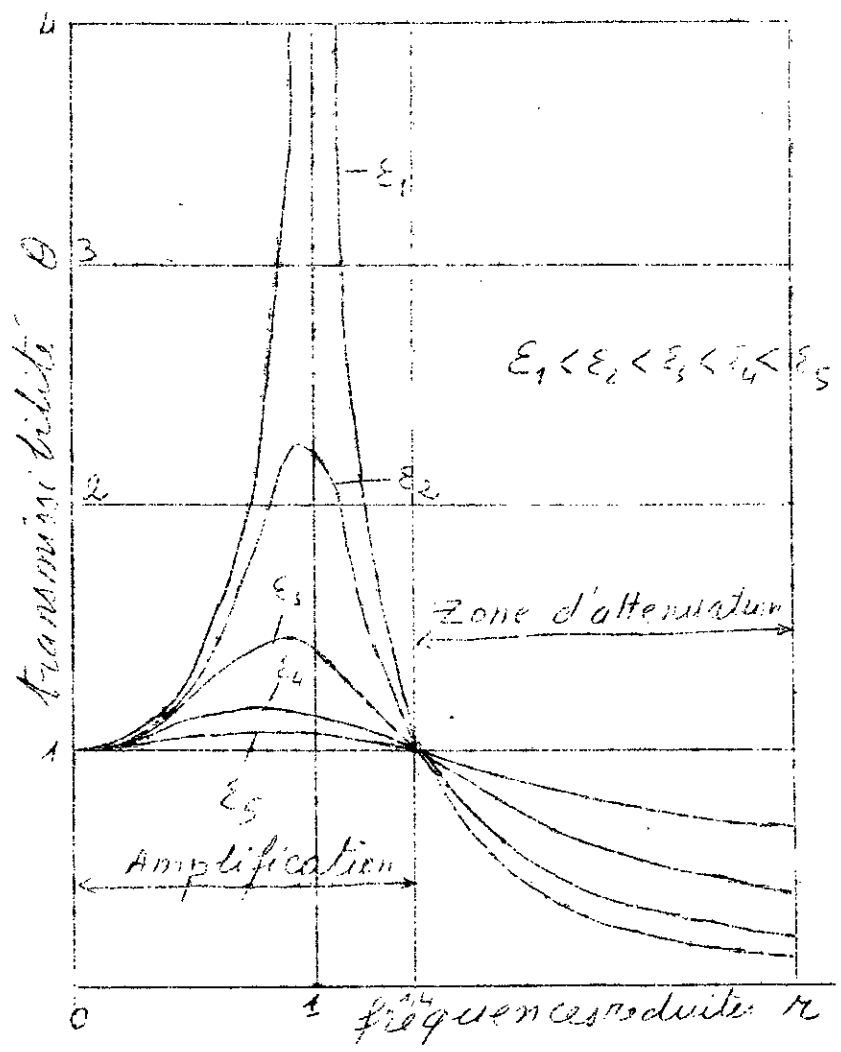
$$|M\ddot{X}|_{\text{MAX}} = Ma\omega^2 \quad (32)$$

On voit immédiatement que l'on a :

$$\theta = \theta' \quad (33)$$

Les variations de θ en fonction de la fréquence réduite τ et pour diverses valeurs de ϵ seront présentées dans les figures (23)

- fig 23 -



c - Interpretation :

La figure (23) nous montre :

- 1) l'existence de deux points fixes de r pour lesquelles l'effort transmis T est le même que l'effort appliqué F ($\theta = 1$). Le 1^{er} point se trouve au départ ($r = 0$), la force F est appliquée statiquement. Le deuxième point c'est $r = \sqrt{\varepsilon}$ et ceci quelque soit l'amortissement.
- 2) Pour r compris entre 0 et $\sqrt{\varepsilon}$, on remarque que θ est toujours supérieur à l'unité. Il y a donc amplification de l'effort appliqué, dans cette région l'amortissement est favorable, car θ est d'autant plus faible que ε est grand.
- 3) Pour les valeurs de r supérieures à $\sqrt{\varepsilon}$, il y a atténuation des efforts appliqués, mais les positions relatives des courbes montrent que l'amortissement est défavorable car, pour une même valeur de ε et r , θ est d'autant plus faible que ε est petit.

d - Remarque :

Dans la pratique, on a pas nécessairement affaire à une seule valeur de w bien déterminée, car les machines peuvent avoir des régimes de marche variables. C'est en fonction du régime le plus bas qu'il faudra donc réaliser l'isolation vibratoire.

Par ailleurs, toutes les machines sont bien

obligées de démarrer et de s'arrêter, par conséquent, partant de 0 pour arriver à ω ($\omega > \omega_0$ si l'isolation vibratoire est assurée). On est bien obligé de passer par ω_0 , donc de traverser le régime critique. Il importe en premier lieu que le passage soit aussi bref que possible et, en outre, que la suspension présente suffisamment d'amortissement pour que l'effort transmis, même en un temps très court, ne soit pas dangereux pour tout l'ensemble.

3-2 Systeme de vibro-isolation actif (SVA)

3.2-1 Definition

C'est un systeme d'isolation vibratoire constitue par un ou plusieurs asservissements, toute-fois le systeme passif peut y exister aussi.

L'asservissement est un systeme de commande possedant trois proprietés :

- Amplification de puissance depuis un signal basse-puissance vers une energie de puissance plus elevee

- Independance vis à vis du milieu exterieur (ie resistance aux perturbations apportees par ce milieu exterieur)

- adjonction d'un retour

Ces asservissements peuvent avoir plusieurs formes differentes (exemple : hydraulique, pneumatique,

electromecanique, electrohydraulique, etc...)
 Les asservissements peuvent etre appeles:
 systemes asservis (S.A) ou servomecanisme (S.M)
 L'alimentation en energie est assuree par des
 sources exterieures independantes du systeme
 en vibration.

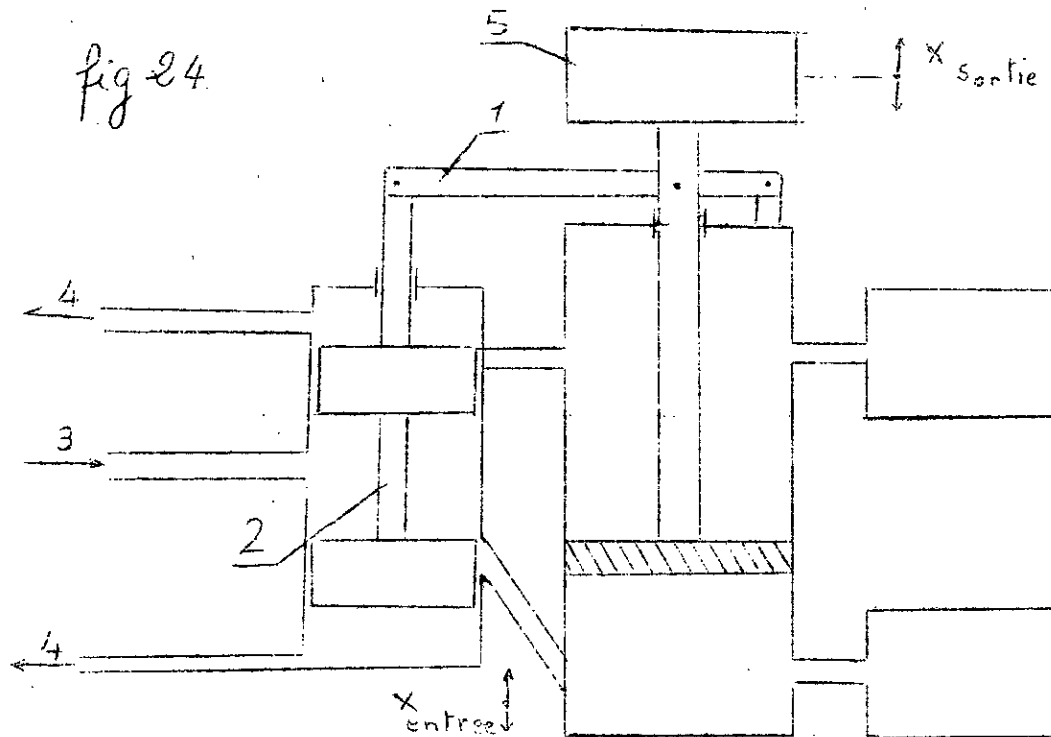
3

3-2-2 - Exemples d'asservissements

Sur les figures (24), (25) et (26) sont donnees
 des exemples de systemes de vibration actif (SVA)

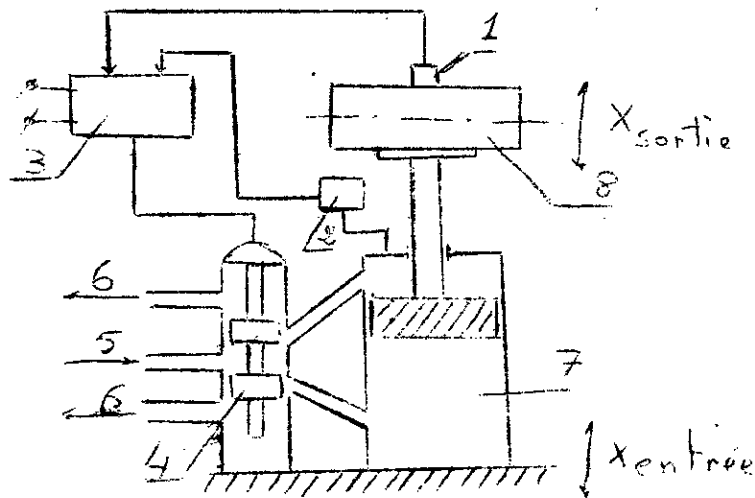
Dans la figure (24) le servomecanisme utilise
 etant du type pneumatique avec retour
 mecanique. Il agit seul (sans elements passifs)

Dans la figure (25) l'asservissement etant
 du type electrohydraulique avec retour
 electrique et travaillant seul.



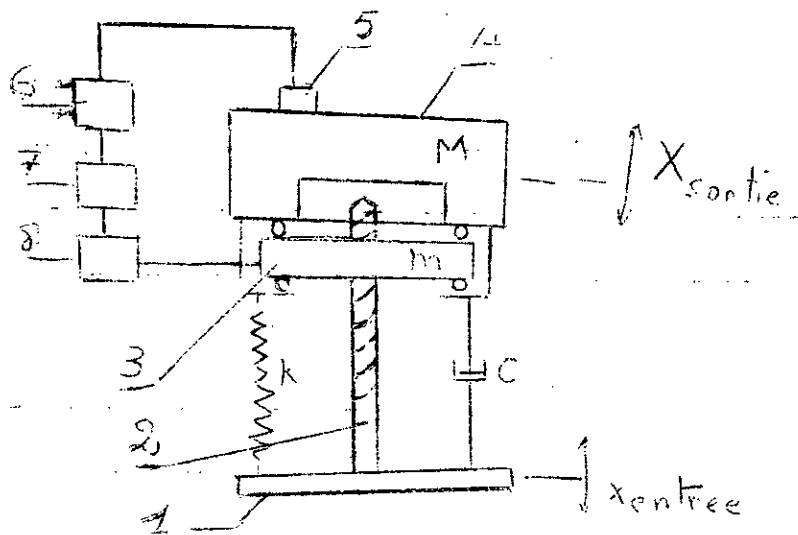
- 1- Retour mecanique (regulation mecanique par deplacement)
- 2- servovalve (tiroir ou piston)
- 3- Entrée du gaz
- 4- Sortie du gaz
- 5- objet de vibro-isolation

fig 25



- 1- Capteur mesurant une grandeur mecanique (ex: acceleration, deplacement, ...)
- 2- Capteur mesurant le deplacement relatif
- 3- Amplificateur electrique
- 4- servovalve (à tiroir ou à piston)
- 5- Entrée du liquide
- 6- Sortie du liquide
- 7- Verin à double effet
- 8- objet de vibro isolation

Figure 26



- 1- Fondation souple (Mvt de translation)
- 2 - Vis
- 3- Disque changeant le mouvement de ~~rotation~~ translation en mouvement de rotation (masse réduite m)
- 4 - Objet de vibro-isolation
- 5 - Capteur mesurant une grandeur mécanique
- 6 - Amplificateur
- 7 - mécanisme exécutif
- 8 - Dispositif changeant le signal de (7) en un mouvement de rotation du disque 3

Schema d'un système de V. isolation actif avec le dispositif de changement de la forme du mouvement et avec des éléments passifs (ressorts et amortisseurs)

3-2-3 - Schema de S.V.A pour calculs

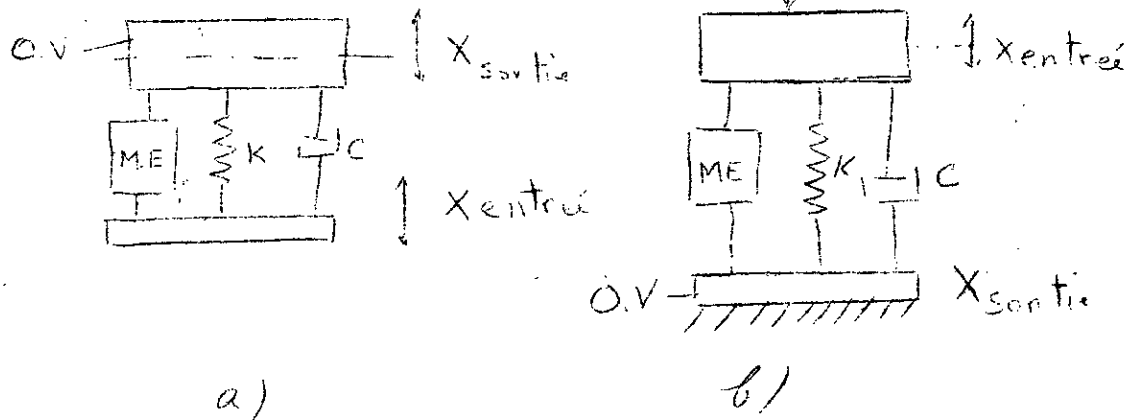


fig. 27

Dans la figure 27 deux cas de vibro isolation sont donnés :

a) Vibro-isolation inverse

b) " " directe

Pour les calculs du coefficient de transmission, on se refera aux chapitres suivants

3-3 - Applications pratiques.

L'étude et la mise en place d'une suspension élastique impliquent le rassemblement préalable de renseignements aussi complets que possibles sur la machine et son environnement.

3-3-1. Environnement. Il faut éviter de nuire à l'ambiance et la nature des structures de l'environnement (sol; plancher, véhicule, ...). Il faut aussi vérifier les conditions de température, la présence éventuelle d'agents agressifs et ...

3-3-2 - Liaisons avec l'extérieur

Bien souvent, il existe des liaisons imperatives, entre la machine et ses assises, telles que tuyauteries d'alimentation, d'échappement ou de refroidissement, câbles électrique, commande à distance, etc...

Il faut alors faire de sorte que ces liaisons soient suffisamment souples, en regard aux mouvements relatifs :

- pour éviter toute rupture
- pour ne pas altérer l'isolation vibratoire par introduction d'une rigidité supplémentaire
- pour ne pas transmettre directement, à travers ces liaisons, des vibrations qu'on s'efforce à supprimer ailleurs.

3-3-3 - La machine : Il est indispensable de disposer d'un plan qui peut être aussi simple avec indication du centre de gravité et éventuellement des points de fixation.

Il faut ensuite connaître au détail les différentes caractéristiques de la machine telles que son poids total, sa nature, ses puissances, ses régimes de travail ainsi que la nature et l'origine des vibrations.

Ch 4

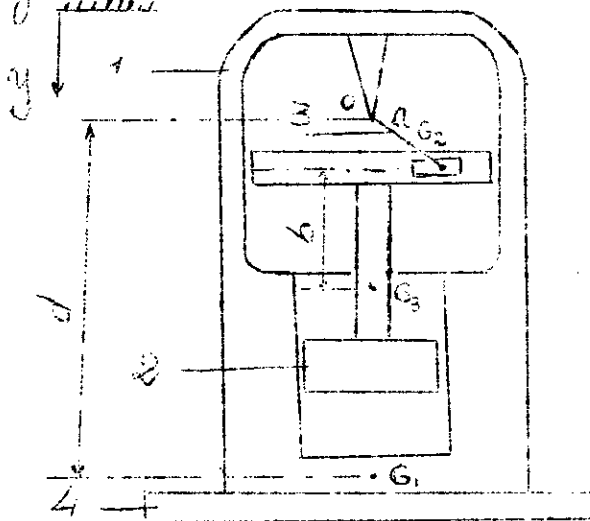
Procédure d'analyse du système de Vibro-isolation dans le cas d'une machine alternative

IV-1 Suppositions :

- a - On suppose qu'il faut isoler la fondation
(cas de l'isolation antivibratoire directe)
- b - On ne considère que le mouvement vertical
- c - On utilise les éléments idéaux : ressorts et amortisseurs à masses négligeables et les correcteurs avec caractéristiques idéales (action instantanée)
- d - On suppose que le système est linéaire
- e - On ne considère que le régime permanent de marche de la machine
- f - On considère que l'impédance de la fondation est $Z = \infty$ (rigidité absolue)

IV-2. Description de la machine

- fig 28 -



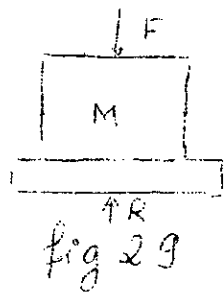
- 1 - Corps de la machine
 - 2 - piston
 - 3 - bielle avec coulisseau
 - 4 - Semelle
- G_i : C.M des éléments i

La bielle etant entraînée à une vitesse de rotation $\dot{\varphi}(t)$ provoque le déplacement du piston de masse m_2 en un mouvement alternatif. La masse du corps de la machine et de la bielle sont respectivement m_1 et m_2 .

Les déplacements sont repérés comme il est indiqué sur la figure 28.

IV-3 - Cas où la machine n'est pas isolée.

La machine repose donc directement sur le sol.



Par application du théorème du centre des masses, on détermine l'équation régissant le mouvement de la machine.

$$\text{On a : } M \ddot{y}_s = P_1 + P_2 + P_3 - R = \underline{P} - R \quad (34)$$

$$\text{d'où } R = \underline{P} - M \ddot{y}_s \quad (34')$$

d'autre part on a :

$$R = R_s + R_d \quad (35)$$

$$R_s = P_1 + P_2 + P_3$$

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + R_d = \underline{P} + R_d \quad (36)$$

donc

$$R_d = -M \ddot{y}_s \quad (37)$$

$$\text{ou } M = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{g}$$

La valeur de \ddot{y}_s se détermine à partir de la formule suivante.

$$y_s = \frac{\sum_1^n m_i y_i}{\sum_1^n m_i} \quad (38)$$

$$y_s = \frac{P_1 d + P_2 \left(\frac{a}{2} \cos \varphi\right) + P_3 (t + a \cos \varphi)}{P_1 + P_2 + P_3} \quad (38')$$

où a, t, d sont des distances constantes (voir figure 28.)

On trouve

$$\ddot{y}_s = \frac{-\left(\frac{P_2}{2} + P_3\right) a}{P_1 + P_2 + P_3} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \quad (39)$$

Cette valeur est pour le cas général, en régime permanent, si on considère que la bille tourne à une vitesse angulaire constante ω donc $\varphi = \omega t$ on obtient:

$$\ddot{y}_s = \frac{-\left(\frac{P_2}{2} + P_3\right) a}{P_1 + P_2 + P_3} \omega^2 \cos \varphi \quad (39')$$

La réaction du sol est dans le cas général

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{P_2 + 2P_3}{2g} a (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \quad (40)$$

En régime permanent, quand $\varphi = \omega t$ on a:

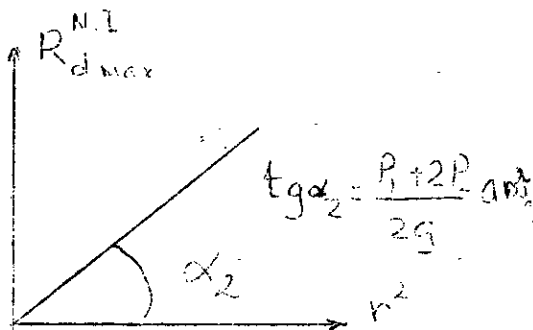
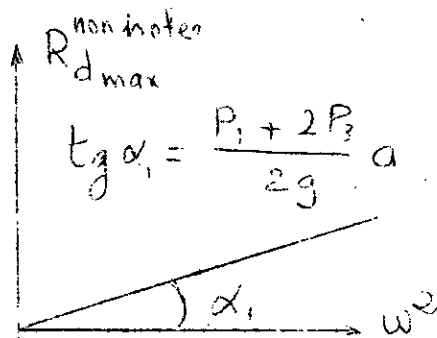
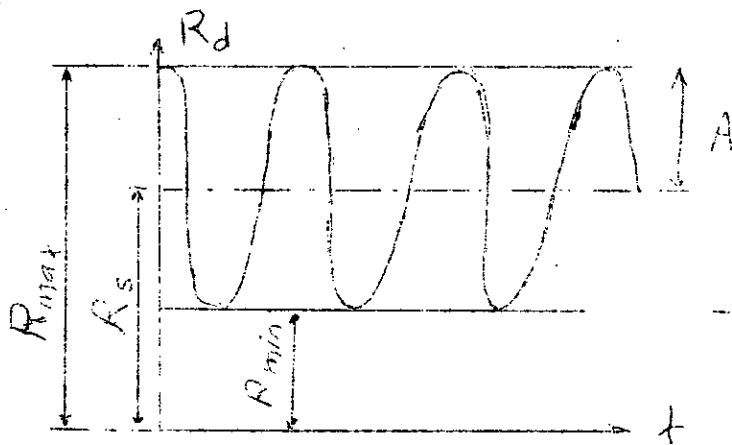
$$R_d = \frac{P_2 + 2P_3}{2g} a \omega^2 \cos \omega t. \quad (41)$$

La réaction maximale est:

$$R_{d \max}^{\text{non inerte}} = \frac{P_2 + 2P_3}{2g} a r^2 \omega_0^2. \quad (42)$$

où $r = \frac{\omega}{\omega_0}$

Les figures suivantes (30) et (31 a et b) nous montrent l'allure de la courbe de R_d respectivement en fonction du temps, de ω^2 et de r^2



- fig 31.

En appliquant le theoreme du centre de masse, on a :

$$M \ddot{y}_s = P_1 + P_2 + P_3 - R \quad (44)$$

d'où

$$R = P_1 + P_2 + P_3 - M \ddot{y}_s \quad (45)$$

Comme y_s se determine comme suit :

$$y_s = \frac{P_1(y+d) + P_2(y + \frac{a}{2} \cos \varphi) + P_3(y + a \cos \varphi + b)}{P_1 + P_2 + P_3} \quad (46)$$

On a :

$$\ddot{y}_s = \ddot{y} - \frac{(P_2 + 2P_3)a}{P_1 + P_2 + P_3} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \quad (47)$$

Pour le regime permanent où on a suppose $\varphi = \omega t$, on obtient :

$$\ddot{y}_s = \ddot{y} - \frac{(P_2 + 2P_3)a}{2(P_1 + P_2 + P_3)} \omega^2 \cos \varphi \quad (47')$$

La reaction R du sol est donc :

$$R = P_1 + P_2 + P_3 - M \ddot{y}_s + \frac{M(P_2 + 2P_3)}{2(P_1 + P_2 + P_3)} a \omega^2 \cos \omega t \quad (48)$$

où $M = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{g}$

Comme $R_s = P_1 + P_2 + P_3$ et $R_D = R - R_s$

on peut ecrire

$$R_D = -M \ddot{y} + \frac{(P_2 + P_3)}{g} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \quad (49)$$

pour $\varphi = \omega t$ on peut écrire :

$$R_D = - \frac{P_1 + P_2 + P_3}{g} \ddot{y} + \frac{(P_2 + P_3)}{g} a \omega^2 \cos \omega t \quad (50)$$

De la figure 32 b on obtient :

$$R = T + S \quad (51)$$

mais

$$T = C \dot{y}$$

$$S = k y$$

Alors

$$R = k y + C \dot{y} \quad (52)$$

Pour obtenir l'équation différentielle du mouvement, on doit comparer (48) et (52)

On a :

$$C \dot{y} + k y = P - M \ddot{y} + \frac{(P_2 + P_3)}{g} a \omega^2 \cos \omega t \quad (53)$$

Alors :

$$M \ddot{y} + C \dot{y} + k y = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{(P_2 + P_3)}{g} a \omega^2 \cos \omega t \quad (54)$$

On introduit $y = x - \delta_{st}$ (ou δ_{st} est la deflexion statique des ressorts)

$$\delta_{st} = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{k}$$

dans l'équation (54) on obtient :

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + k x = m a \omega^2 \cos \omega t \quad (55)$$

où $m = \frac{(P_2 + P_3)}{g}$

On sait que la solution de l'équation (55) se présente sous la forme :

$$X(t) = X_G + X_P$$

où X_G = solution générale de l'équation homogène.

X_P = solution particulière de l'éq non-homogène

On suppose que :

$$X_P = X \cos(\omega t - \phi) \quad (56)$$

Alors :

$$\dot{X}_P = -X\omega \sin(\omega t - \phi) \quad \left. \vphantom{\dot{X}_P} \right\} 57$$

$$\ddot{X}_P = -X\omega^2 \cos(\omega t - \phi)$$

La relation (55) s'écrira alors :

$$M[-X\omega^2 \cos(\omega t - \phi)] + C[-X\omega \sin(\omega t - \phi)] + KX \cos(\omega t - \phi) = m a \omega^2 \cos \omega t. \quad (55')$$

qui s'écrit aussi :

$$-MX\omega^2 (\cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi)$$

$$-CX\omega (\sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi)$$

$$+ KX (\cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi)$$

$$= m a \omega^2 \cos \omega t.$$

En comparant les coefficients de $\sin \omega t$ et $\cos \omega t$ on obtient :

$$\left. \begin{aligned} -MX\omega^2 \cos \phi + CX\omega \sin \phi + KX \cos \phi &= m a \omega^2 \\ -MX\omega^2 \sin \phi - CX\omega \cos \phi + KX \sin \phi &= 0 \end{aligned} \right\} 58$$

d'où on a :

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{m a \omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \\ \cos \phi &= \frac{k - M\omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \\ \sin \phi &= \frac{c\omega}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \end{aligned} \right\} (59)$$

Alors on peut écrire que :

$$X_f = \frac{m a \omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (60)$$

II - 1.2 - Expression analytique de la réaction de l'axe

On a :

$$R_D = - \frac{P_1 + P_2 + P_3}{g} \ddot{x} + m a \omega^2 \cos \omega t \quad (61)$$

En remplaçant \ddot{x} par son expression on obtient :

$$R_D = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{g} \cdot \frac{m a \omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \omega^2 \cos(\omega t - \phi) + m a \omega^2 \cos \omega t \quad (62)$$

En posant

$$M = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{g}$$

on peut écrire que :

$$R_D = m a \omega^2 \frac{\sqrt{K^2 + (C\omega)^2}}{\sqrt{(K - M\omega^2)^2 + (C\omega)^2}} \cos[\omega t - (\phi - \beta)] \quad (63)$$

$$\text{où } \tan(\phi - \beta) = \frac{M\omega^2(C\omega)}{K(K - M\omega^2) + (C\omega)^2} \quad (64)$$

En posant :

$$r = \frac{\omega}{\omega_0} ; \quad 2\omega_0 \varepsilon = \frac{C}{M} ; \quad \omega_0^2 = \frac{K}{M}$$

Les expressions (63) et (64) s'écrivent :

$$R_D = m a \omega^2 \frac{\sqrt{1 + (2r\varepsilon)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2}} \cos[\omega t - (\phi - \beta)] \quad (65)$$

$$\text{et } \tan(\phi - \beta) = \frac{2r^3\varepsilon}{(1 - r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2} \quad (66)$$

Alors l'amplitude de la force transmise à l'assise est :

$$R_{D_{\max}}^{\text{isolé p}} = m a \omega^2 \frac{\sqrt{1 + (2r\varepsilon)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2}} \quad (67)$$

En comparant cette réaction avec celle du cas sans isolation on trouve :

$$R_{D_{\max}}^{\text{I.P}} = R_{D_{\max}}^{\text{N.I}} \cdot \frac{\sqrt{1 + (2r\varepsilon)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\varepsilon)^2}} \quad (68)$$

La figure suivante nous montre une comparaison entre ces deux réactions.

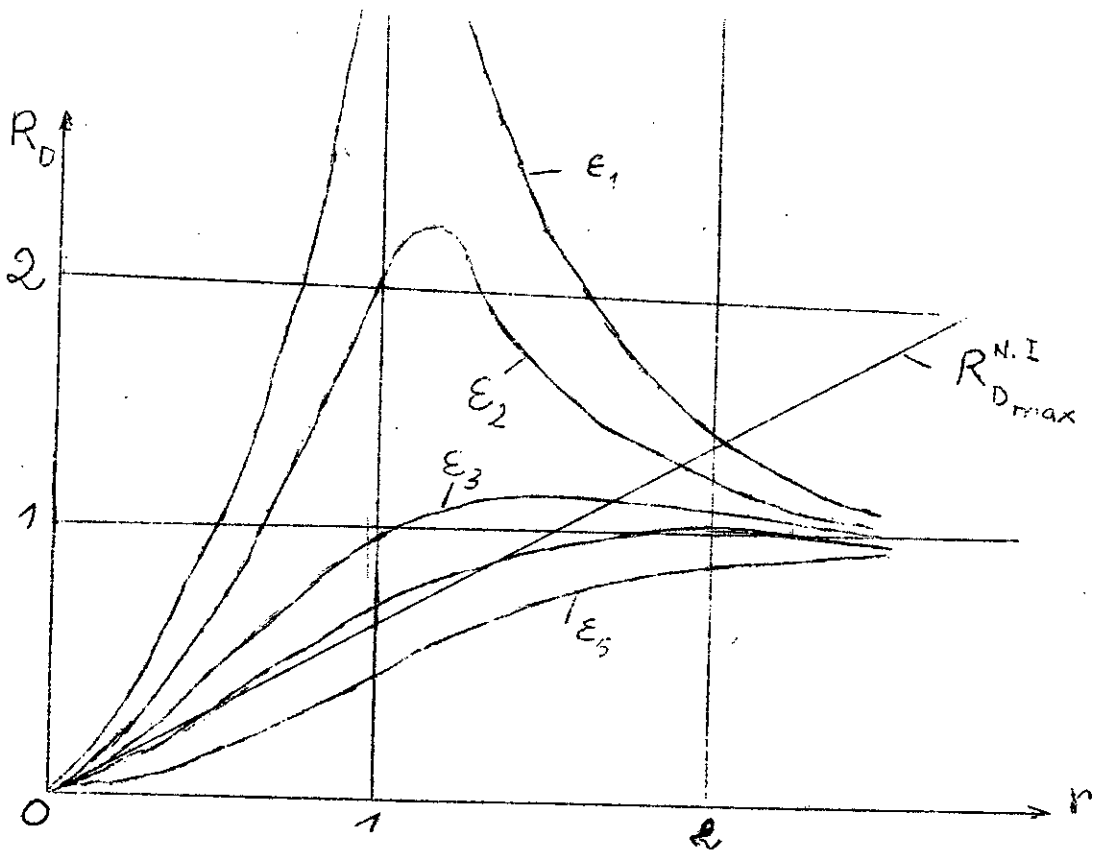


fig 33

On a :

$$R_{Dmax} = \frac{\omega_0^2 \left(\frac{P_2}{2} + P_3 \right)}{g} a r^2 \frac{\sqrt{1 + (2r\epsilon)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\epsilon)^2}} \quad (69)$$

4-4.3 - Coefficient d'efficacité

En définissant ce ~~rap~~ coefficient comme étant le rapport entre R_{Dmax}^{is} et $R_{Dmax}^{non isolée}$

On trouve :

$$C.E = \frac{R_D^{is}}{R_D^{N.I.}} = \sqrt{\frac{1 + (2r\epsilon)^2}{(1-r^2)^2 + (2r\epsilon)^2}} \quad 70$$

Ce coefficient n'est autre que le coefficient de transmission θ dont les variations pour diverses ϵ se trouvent illustrées dans la figure 23

IV-5. Calcul de la réaction dynamique de la fondation dans le cas S.V.A.

5.1. Définition:

Lors du régime permanent et lorsque l'entrée du système est caractérisée par une force harmonique

$$f_E(t) = A \cos \omega t$$

si le système est linéaire, on obtient une sortie de la forme:

$$f_S(t) = B \cos(\omega t - \phi)$$

telle que:

$$f_S(t) = W(i\omega) f_E(t) \quad (71)$$

où $W(i\omega)$ est une fonction complexe qui s'appelle caractéristique amplitude-phase ou fonction de transfert du système.

On peut écrire

$$W(i\omega) = G(\omega) e^{i\phi(\omega)} \quad (72)$$

où $G(\omega)$ est une caractéristique amplitude-fréquence.

$\phi(\omega)$ = caractéristique phase-fréquence

En supposant que:

$$f_E(t) = A \cos \omega t \text{ et } f_S(t) = B \cos(\omega t - \phi)$$

on obtient :

$$G(\omega) = \frac{B}{A} \quad (72)$$

De l'expression (72) on peut écrire :

$$W(i\omega) = G(\omega) e^{i\phi(\omega)} = P(\omega) + iQ(\omega) \quad (74)$$

où $P(\omega)$ et $Q(\omega)$ sont des fonctions réelles.

On peut alors écrire que :

$$P(\omega) = G(\omega) \cos(\phi(\omega))$$

$$Q(\omega) = G(\omega) \sin(\phi(\omega))$$

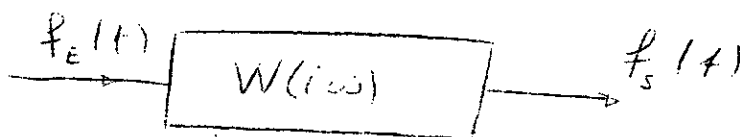
$$G(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2}$$

$$\phi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

De (73) on peut dire que :

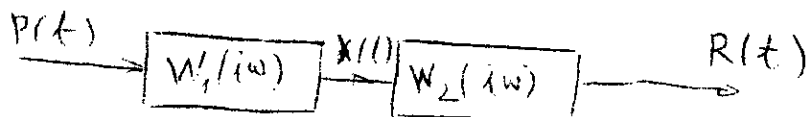
$$G(\omega) = \frac{B}{A} = |W(i\omega)|$$

La relation (71) peut être caractérisée par la figure suivante

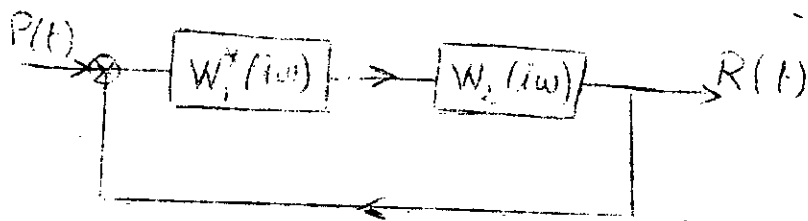


- fig 34 -

Le système passif des paragraphes précédents peut se présenter suivant la figure suivante



a)



(b)

fig 35

a - Systeme ouvert

b - Systeme en boucle

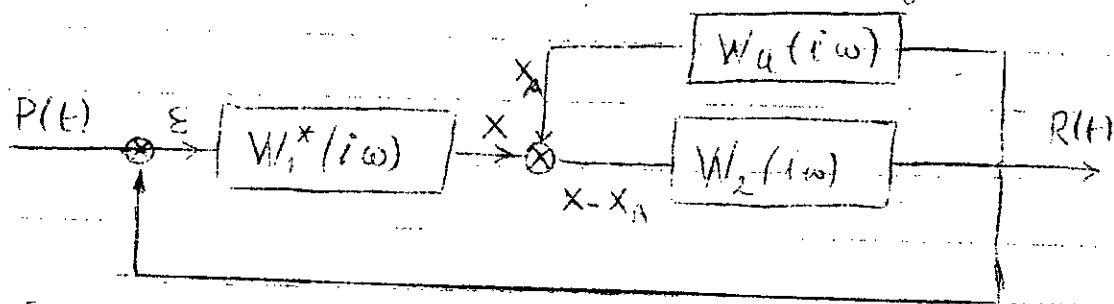
En se basant sur les relations (55), (59) et (63) on peut écrire que :

$$\left. \begin{aligned} W_1(i\omega) &= \frac{1}{KM\omega^2 + i\omega C} \\ W_2(i\omega) &= K + i\omega C \end{aligned} \right\} (75)$$

$$W_1^*(i\omega) = -\frac{1}{M\omega^2}$$

5-2 - Application au système actif

La figure suivante (fig 36) nous montre l'action du système actif dans un système de vibro-isolation. On pourrait envisager plusieurs solutions de ce type.



$$\varepsilon = P(t) - R(t)$$

fig 36

En general $W_a(i\omega)$ représente la fonction caractéristique du système de vibro-isolation actif, c'est à dire de tous ses éléments : capteurs, amplificateur et servomecanisme pris en série.

$W_a(i\omega)$ se présente souvent sous la forme :

$$W_a(i\omega) = \frac{b_0(i\omega)^r + \dots + b_r}{d_0(i\omega)^s + \dots + d_s} = \frac{\sum_{i=0}^r b_i(i\omega)^i}{\sum_{s=0}^s d_s(i\omega)^s} \quad (76)$$

où $b_0, \dots, b_r, d_0, d_1, \dots, d_s$ sont des coefficients caractérisant les propriétés du système, ils sont généralement positifs.

Pour les systèmes passifs, et en se basant sur la figure (35 b), on peut écrire :

$$R(t) = \frac{W_1^* \cdot W_2}{1 + W_1^* W_2} P(t) \quad (77)$$

$$\text{ou } R(t) = W_1 \cdot W_2 \cdot P(t) \quad (77')$$

Pour le système actif et d'après la fig 36 on écrit que :

$$R(t) = \frac{W_1^* \cdot \frac{W_2}{1 + W_2 W_a}}{1 + \frac{W_1^* \cdot W_2}{1 + W_2 W_a}} P(t) \quad (78)$$

où

$$R(t) = \frac{W_1 W_2}{1 + (1 - W_1 W_2) W_2 W_a} P(t) \quad (78')$$

De (77) et (78) on en déduit que :

$$C.T^P = \frac{R_{Dmax}^P}{P_{max}} = \left| \frac{W_1^* W_2}{1 + W_1^* W_2} \right| = |W_1 W_2| \quad (79)$$

$$C.T^A = \frac{R_{Dmax}^A}{P_{max}} = \left| \frac{W_1^* \frac{W_2}{1 + W_2 W_a}}{1 + W_1^* \frac{W_2}{1 + W_2 W_a}} \right| = \left| \frac{W_1 W_2}{1 + (1 - W_1 W_2) W_2 W_a} \right|$$

où :

R_{Dmax}^P = amplitude de R_D pour S.V.P

R_{Dmax}^A = " " " " S.V.A

$C.T^P$ = coefficient de transmission du S.V.P

$C.T^A$ = " " " " S.V.A

5-3. Critere d'efficacite d'un S.V.A.

On prendra comme critere d'efficacite :

$$\chi = \frac{[C.T^A]^2}{[C.T^P]^2} < 1$$

De (79) et (80) le critere d'efficacite se definit ainsi :

$$\chi = \frac{\left| \frac{W_1 W_2}{1 - (1 - W_1 W_2) W_2 W_a} \right|^2}{|W_1 W_2|^2} = \left| \frac{1}{1 + (1 - W_1 W_2) W_2 W_a} \right|^2 < 1$$

(81)

Des expressions précédentes on peut écrire:

$$X = \left| \frac{1}{1 + \frac{-M\omega^2(k+i\omega c)}{-M\omega^2 + k+i\omega c} \cdot \frac{\sum_{s=0}^n b_s (i\omega)^s}{\sum_{s=0}^n d_s (i\omega)^s}} \right|^2 < 1 \quad (82)$$

5-4 - Problèmes de stabilité d'un S.V.A.

5-4-1 - Critère de RAUSS-HURWITZ

Soit le polynôme:

$$D(i\omega) = a_0 \omega^n + a_1 \omega^{n-1} + \dots + a_{n-1} \omega + a_n + i(p_0 \omega^n + p_1 \omega^{n-1} + \dots + p_{n-1} \omega + p_n) \quad (83)$$

où a_k, p_k ($k=0, 1, \dots, n$) sont des nombres réels

On considère la matrice d'ordre $2n$ dont les éléments sont les coefficients du polynôme

$$H_{2n} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n \\ a_0 & \dots & a_n \\ p_0 & \dots & p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad (84)$$

Le nombre de racines du polynôme $D(i\omega)$ ayant la partie réelle négative est égale au nombre de variations du signe dans les mineurs principaux $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_4, \dots, \Delta_{2n-2}, \Delta_{2n}$, mineurs d'ordre pair de la matrice H_{2n} .

En substituant les lignes de chaque bloc de la matrice H_{2n} on obtient :

$$H'_{2n} = \begin{bmatrix} \begin{array}{c} P_0 \ P_1 \ \dots \ P_n \\ a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n \end{array} \\ \begin{array}{c} P_0 \ P_1 \ \dots \ P_n \\ a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n \end{array} \\ \vdots \\ \begin{array}{c} P_0 \ P_1 \ \dots \ P_n \\ a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n \end{array} \end{bmatrix} \quad (85)$$

Pour que les solutions du polynôme soient dans la partie haute du plan complexe, il suffit que les diagonales des mineurs Δ'_{2k} ($k=0, 1, \dots, n$) de la matrice H'_{2n} soient positives

$$\Delta'_{2k} > 0$$

5-4-2 Application au S.V.P.

de la figure (35 a) on a :

$$R(t) = W_1(i\omega) \cdot W_2(i\omega) \cdot P(t) \quad (86)$$

d'où :

$$W(i\omega) = W_1(i\omega) \cdot W_2(i\omega) = \frac{K + i\omega c}{-M\omega^2 + k + i\omega c} \quad (87)$$

$W(i\omega)$ est le rapport de deux fonctions :

$$W(i\omega) = \frac{N(i\omega)}{D(i\omega)} \quad (88)$$

$$\text{où } N(i\omega) = K + i\omega c \quad (89)$$

$$D(i\omega) = -M\omega^2 + k + i\omega c \quad (90)$$

$W(i\omega)$ n'est stable que si $D(i\omega)$ l'est :

du paragraphe 5.6.1 on a :

$$D(i\omega) = a_0\omega^2 + a_1\omega + a_2 + i(p_0\omega^2 + p_1\omega + p_2) \quad (91)$$

En comparant les expressions (89) et (90) on a :

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = -M \quad ; \quad a_1 = 0 \quad ; \quad a_2 = k \\ p_0 = 0 \quad ; \quad p_1 = c \quad ; \quad p_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (92)$$

$n=2$; la construction de la matrice H'_4 est comme suit :

$$H'_4 = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 & 0 \\ -M & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & -M & 0 & k \end{pmatrix} \quad (93)$$

et on calcule les mineurs : ($K=1,2$)

$$\Delta'_2 = cM \quad (94)$$

et

$$\Delta'_4 = (-1)^3 (-M) \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ -M & 0 & K \end{vmatrix} = Mc^2K \quad (95)$$

En considérant que

$$\Delta'_{2ik} > 0 \quad (85)$$

On a :

$$cM > 0 \quad \text{et} \quad Mc^2K > 0$$

Cette condition (85) est vérifiée, donc le système de vibration isolatif passif défini par

$$W(i\omega) = W_1(i\omega) \cdot W_2(i\omega)$$

est stable.

5-4-3. Application à un S.V.A.

On a :

$$W_A(i\omega) = \frac{W_1 \cdot W_2}{1 + (1 - W_1 W_2) W_2 W_a} = \quad (96)$$

$$= \frac{(K + i\omega c) \sum_{s=0}^r d_s (i\omega)^s}{(-M\omega^2 + K + i\omega c) \sum_{s=0}^r d_s (i\omega)^s - M\omega^2 (K + i\omega c) \sum_{s=0}^r b_s (i\omega)^s}$$

Alors on peut écrire :

$$D(i\omega) = (-M\omega^2 + K + i\omega c) \sum_{s=0}^r d_s (i\omega)^s - M\omega^2 (K + i\omega c) \sum_{s=0}^r b_s (i\omega)^s$$

Pour vérifier la stabilité, on doit chercher les coefficients de $D(i\omega)$ (un polynôme d'ordre $2r$), puis construire la matrice H_{2r} et par suite calculer Δ'_{2ik} et vérifier s'il est \oplus

5-5- Conditions nécessaires et suffisantes pour le choix d'un S.V.A.

Pour adopter un S.V.A., il faut que celui-ci soit efficace et stable donc:

$$X < 1 \text{ et } \Delta'_{2k} > 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (97)$$

5-6 - Cas particuliers:

A cause de la complexité des équations concernant le S.V.A., on se limite, seulement, à l'étude de quelques cas particuliers:

5-6.1 - Correcteur proportionnel (amplificateur)

sa fonction caractéristique est:

$$W_a(i\omega) = \frac{b_0}{d_0} \quad (98)$$

La condition d'efficacité devient comme suit:

$$X = \left| \frac{1}{1 + \frac{-M\omega^2(k+i\omega c) \cdot \frac{b_0}{d_0}}{-M\omega^2 + k + i\omega c}} \right|^2 < 1 \quad (99)$$

et le polynôme $D(i\omega)$ s'écrira alors:

$$\begin{aligned} D(i\omega) &= (-M\omega^2 + k + i\omega c) d_0 - M\omega^2(k + i\omega c) \frac{b_0}{d_0} = \\ &= -M(d_0 + k \frac{b_0}{d_0}) \omega^2 + k d_0 + i(-c \frac{b_0}{d_0} M \omega^2 + c d_0 \omega) = \\ &= a_0 \omega^3 + a_1 \omega^2 + a_2 \omega + a_3 + i(p_0 \omega^3 + p_1 \omega^2 + p_2 \omega + p_3) \end{aligned}$$

par identification, on trouve que ⁽¹⁰⁰⁾

$$a_0 = 0, a_1 = -M(d_0 + k \frac{b_0}{d_0}), a_2 = 0, a_3 = k d_0$$

$$\text{et } p_0 = -d_0 M ; p_1 = 0 ; p_2 = c d_0 ; p_3 = 0$$

d'où la matrice $H'_{2n} = H_6$ ($n=3$)

$$H'_6 = \begin{pmatrix} -d_0 M & 0 & c d_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M(d_0 + k b_0) & 0 & k d_0 & 0 & 0 \\ 0 & -c b_0 M & 0 & c d_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M(d_0 + k b_0) & 0 & k d_0 & 0 \\ 0 & 0 & -c b_0 M & 0 & c d_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -M(d_0 + k b_0) & 0 & k d_0 \end{pmatrix} \quad (100)$$

Après calcul on trouve que :

$$\Delta'_2 = p_0 a_1 = M^2 (d_0 + k b_0) c b_0 > 0$$

$$\begin{aligned} \Delta'_4 &= p_0 a_1 (p_0 a_3 - p_2 a_1) = \Delta'_2 [-c b_0 M k d_0 + c d_0 M (d_0 + k b_0)] \\ &= \Delta'_2 c d_0^2 M > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta'_6 &= -p_2 a_3 (a_1 p_2 - a_3 p_0)^2 = c b_0 M k d_0 \cdot c d_0^2 M \\ &= c^2 d_0^3 b_0 k M^2 > 0 \end{aligned}$$

On en déduit alors que le système est stable.
La valeur de X est :

$$\begin{aligned} X &= \left| \frac{d_0 (-M\omega^2 + k + i\omega c)}{(-M\omega^2 + k + i\omega c) d_0 - M b_0 \omega^2 (k + i\omega c)} \right|^2 \\ &= \frac{(-M d_0 \omega^2 + k d_0)^2 + d_0 \omega^2 c^2}{[(-M d_0 - M b_0 k) \omega^2 + k d_0]^2 + (d_0 c \omega - M b_0 c \omega^3)^2} \end{aligned}$$

On exige $\lambda < 1$, ou d'après les calculs on trouve que

$$(101) \quad \frac{(-M d_0 \omega^2 + K d_0)^2 + d_0^2 \omega^2 c^2 - [(-M d_0 - M b_0 K) \omega^2 + K d_0]^2 - (d_0 c \omega - M b_0 c \omega^3)^2}{[(-M d_0 - M b_0 K) \omega^2 + K d_0]^2 + (d_0 c \omega - M b_0 c \omega^3)^2}$$

est inférieur à zéro. (< 0)

Le dénominateur étant toujours positif, le signe de cette expression (101) varie comme celui de son numérateur. Donc, il faut voir la valeur de ω^2 pour laquelle cette condition est vérifiée (le numérateur négatif)

On a :

$$-M^2 b_0^2 c^2 \omega^6 + (2M b_0 d_0 c^2 - 2M^2 b_0 d_0 K - M^2 b_0^2 K^2) \omega^4 + 2M b_0 K^2 d_0 \omega^2 < 0 \quad (102)$$

d'où :

$$-M^2 b_0^2 c^2 \omega^6 + (2M b_0 d_0 c^2 - 2M^2 b_0 d_0 K - M^2 b_0^2 K^2) \omega^4 + 2M b_0 K^2 d_0 < 0 \quad (103)$$

On pose $z = \omega^2$.

$$e_1 = M^2 b_0^2 c^2$$

$$e_2 = (2M^2 b_0 d_0 + M^2 b_0^2 K^2 - 2M b_0 d_0 c^2)$$

$$e_3 = -2M b_0 d_0 K^2$$

} (104)

Alors de (103) on trouve :

$$e_1 z^2 + e_2 z + e_3 > 0$$

105

l'expression (105) est un trinôme du 2^e degré en z
 son discriminant est:

$$\Delta = e_2^2 - 4e_1 e_3$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \text{deux racines réelles.} \quad \left. \vphantom{\Delta = e_2^2 - 4e_1 e_3} \right\} (106)$$

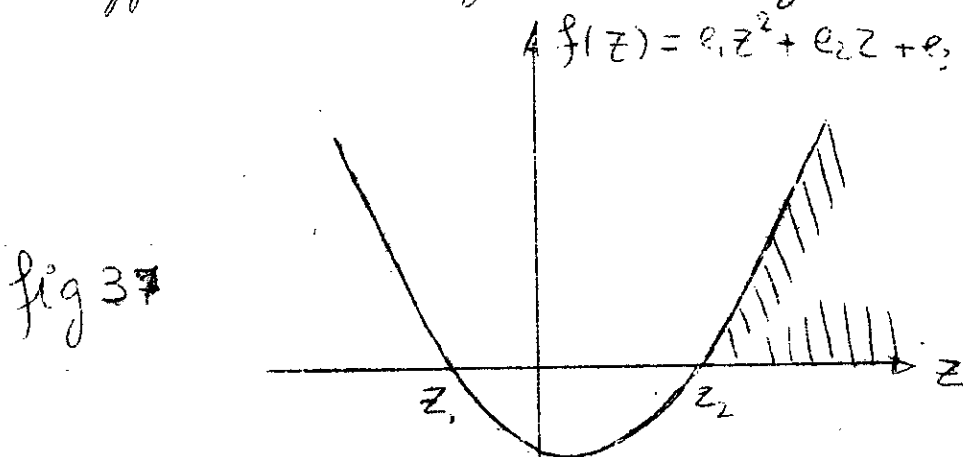
$$\frac{e_3}{e_1} < 0 \text{ et } e_1 > 0.$$

d'où on a une racine

$$z_1 = \frac{-e_2 - \sqrt{\Delta}}{2e_1} < 0$$

$$\text{et } z_2 = \frac{-e_2 + \sqrt{\Delta}}{2e_1} > 0$$

Sur la figure suivante, on représente le domaine
 d'efficacité du système actif.



quand $\omega^2 > z_2$, on a $\chi < 1$ et le système
 actif est plus efficace que le système passif.
 De la figure (23) on remarque que le système
 passif est plus efficace que s'il n'y a pas d'
 isolation (fondation rigide) si $\omega > \sqrt{2}$

Pourtant, quand $\epsilon = 2$ (par exemple,) l'efficacité du système passif est presque nulle. La région dangereuse se trouve alors dans la zone de $0 < r < \sqrt{2}$. Pour cela il faut que la racine z_2 soit le plus proche possible de zéro et en même temps :

$$z_2 < 2\omega_0^2 \quad (108)$$

par ce que : $r^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ d'où $\omega^2 = r^2 \omega_0^2$

alors on a :

$$z_2 = \frac{-e_2 + \sqrt{\Delta}}{2e_1} < 2\omega_0^2 \quad (109)$$

$$\text{où : } \frac{-e_2 + \sqrt{e_2^2 - 4e_1e_3}}{2e_1} - \frac{2\omega_0^2 \cdot 2e_1}{2e_1} < 0 \quad (110)$$

En utilisant la relation (104) et en posant :

$$\frac{C}{M} = 2\omega_0 \epsilon ; \quad \frac{K}{M} = \omega_0^2$$

On obtient :

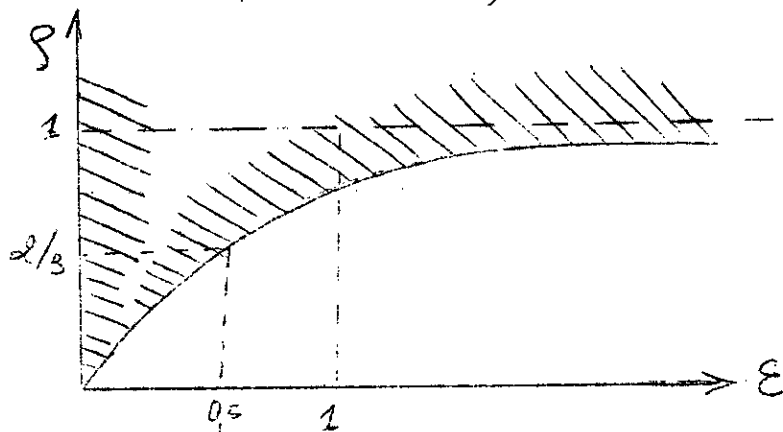
$$8\epsilon^2 \left(1 - \frac{d_0}{b_0 K}\right) + 1 > 0 \quad (111)$$

en supposant :

$$f = \frac{b_0 K}{d_0} \quad (112)$$

$$\text{On a : } 8\epsilon^2 \left(1 - \frac{1}{f}\right) + 1 > 0 \quad (111')$$

La figure suivante (38) nous montre le domaine dans lequel la relation (111) est satisfaite (Zone hachurée)



(fig 38)

On voit que l'on peut obtenir un système actif efficace dans le domaine où $r < \sqrt{2}$ et cela dépend de la relation entre la rigidité du ressort et les paramètres b_0 et d_0 de l'ampli:

5.6.2 Système actif en forme de Correcteur intégral
 En prenant $r=0$ et $\epsilon=1$ dans la relation (76) on obtient:

$$W_0(i\omega) = \frac{b_0}{d_1(i\omega) + d_0} \quad (113)$$

et la condition d'efficacité devient:

$$X = \left| \frac{1}{1 + \frac{-M\omega^2(K+i\omega c) \cdot b_0}{-M\omega^2 + K + i\omega c \cdot i\omega d_1 + d_0}} \right|^2 < 1 \quad (114)$$

le denominateur $D(i\omega)$ devient :

$$D(i\omega) = (-M\omega^2 + k + i\omega c)(i\omega d_1 + d_0) - M\omega^2(k + i\omega c)b_0$$

$$= (-Md_0 - cd_1 - MKb_0)\omega^2 + kd_0 + i[(-Md_1 - Mb_0c)\omega^3 + (kd_1 + cd_0)\omega]$$

$$= a_0\omega^3 + a_1\omega^2 + a_2\omega + a_3 + i(p_0\omega^3 + p_1\omega^2 + p_2\omega + p_3) \quad (115)$$

Par identification on trouve que :

$$a_0 = 0; a_1 = -(cd_1 + MKb_0 + Md_0); a_2 = 0; a_3 = kd_0$$

$$p_0 = -(d_1 + b_0c)M; p_1 = 0; p_2 = kd_1 + cd_0; p_3 = 0 \quad (116)$$

et la matrice M'_{2n} devient : ($n=3$)

$$M'_6 = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & p_0 & 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & p_0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & p_2 & a_3 \end{pmatrix} \quad (117)$$

Dont les determinant $\Delta'_{2k}; (k=1, \dots, 3)$ sont :

$$\Delta'_2 = p_0 a_1 = (d_1 + b_0c)M \cdot (cd_1 + MKb_0 + Md_0) > 0$$

$$\Delta'_4 = p_0 a_1 (p_0 a_3 - p_2 a_1)$$

$$= \Delta'_2 [d_0 k (d_1 + b_0c)M + (k d_1 + c d_0) (cd_1 + MKb_0 + Md_0)]$$

$$= \Delta'_2 (k c d_1^2 + k d_1 M k b_0 + c^2 d_0 d_1 + c d_0^2 M) > 0$$

$$\Delta'_5 = -p_3 a_3 (a_1 p_2 - a_3 p_3)^2 = (d_1 + b_0 c) M k d_0 (a_1 p_2 - a_3 p_3)^2 > 0$$

On en déduit alors la stabilité du système.
Le coefficient d'efficacité est :

$$\chi = \left| \frac{(d_0 + i\omega d_1)(-M\omega^2 + k + i\omega c)}{(d_0 + i\omega d_1)(-M\omega^2 + k + i\omega c) - Mb_0\omega^2(k + i\omega c)} \right|^2 =$$

$$\frac{[(-Md_0 - cd_1)\omega^2 + d_0 k]^2 + [-Md_1 c \omega^3 + (k d_1 + c d_0)\omega]^2}{[-Md_0 - cd_1 - Mb_0 k]\omega^2 + d_0 k]^2 + [(-Md_1 - Mb_0 c)\omega^3 + (k d_1 + c d_0)\omega]^2}$$

Le dénominateur de cette expression est toujours positif. Pour satisfaire la condition d'efficacité on doit chercher les racines de l'inégalité (celles du numérateur seulement) $\chi - 1 < 0$
Après calcul on écrit que :

$$-\frac{M}{b_0} - (M^2 b_0^2 c^2 + 2 M^2 d_1 b_0 c) \omega^2 +$$

$$- [2(Md_0 + cd_1) Mb_0 k + M^2 b_0^2 k^2 - 2 Mb_0 c (k d_1 + c d_0)] \omega^4 +$$

$$+ 2 M k^2 d_0 b_0 \omega^2 < 0 \quad (118)$$

si $\omega^2 = z$ on écrit :

$$e_1 z^2 + e_2 z + e_3 > 0$$

où

$$e_1 = M^2 / (b_0^2 c^2 + 2 d_1 b_0 c)$$

$$e_2 = 2(Md_0 + cd_1) Mb_0 k + M^2 b_0^2 k^2 - 2 Mb_0 c (k d_1 + c d_0)$$

$$e_3 = -2 M k^2 d_0 b_0$$

On constate que l'analyse est la même que dans le cas précédent. Ici, aussi, on trouve deux racines réelles l'une $Z_1 < 0$ et l'autre $Z_2 > 0$.
De l'expression (110), on obtient:

$$Kb_0^2c^2 + b_0KMd_0 + 2b_0cd_0K + Mb_0^2k^2 - 2b_0c^2d_0 > 0 \quad (119)$$

Si on prend

$$\mathcal{H} = \frac{d_0}{d_0} \omega_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{F} = \frac{b_0}{d_0} k$$

L'expression (119) devient:

$$\mathcal{F} > \frac{8\mathcal{E}^2 - 4\mathcal{H}\mathcal{E} - 1}{1 - 4\mathcal{E}^2} \quad (120)$$

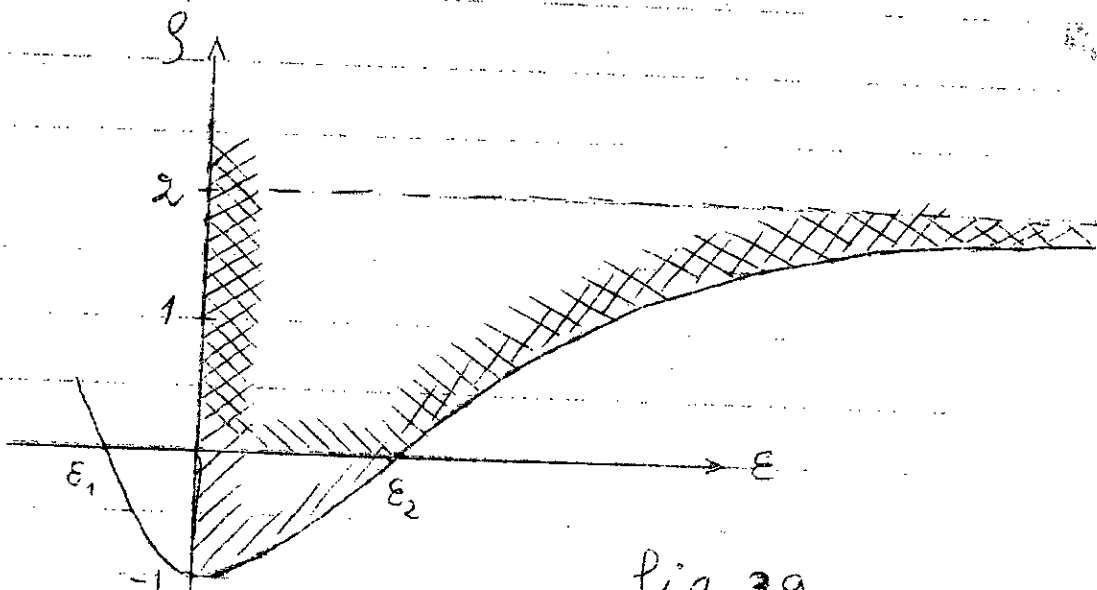
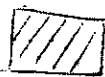

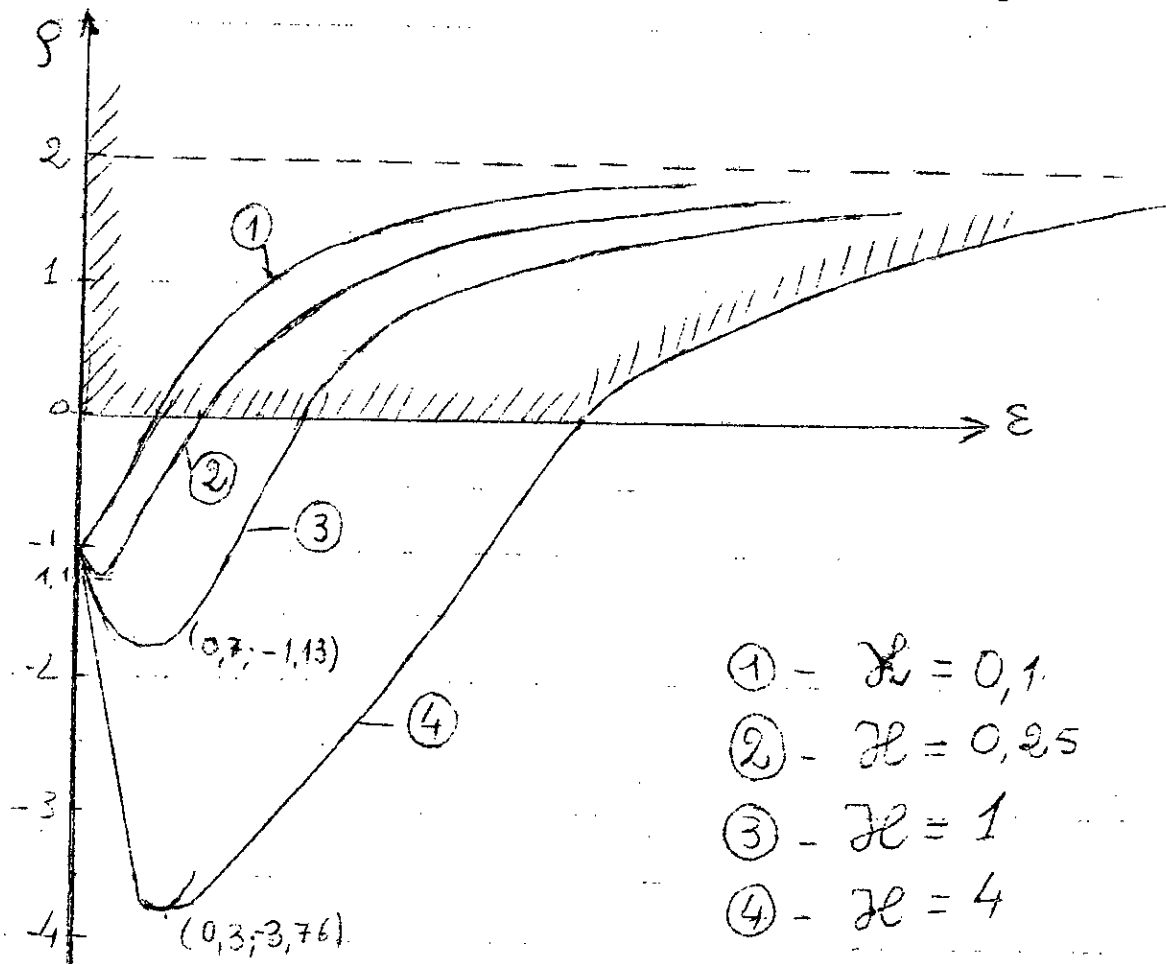


fig 39

-  - aire dans laquelle (120) est remplie
-  - aire réellement satisfaisant (120)

$$\mathcal{E}_{1,2} = \frac{\mathcal{H}}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\mathcal{H}^2 + 2}$$

- Influence de \mathcal{H} sur la fonction $f(\varepsilon)$



- fig 40 -

On remarque que lorsque \mathcal{H} augmente, l'aire, dans laquelle la condition (120) est satisfaite, augmente aussi.

5-6-2-1- S.V.A en forme de correcteur pur
Si on considère que le S.V.A. a seulement un correcteur intégral pur, on prendra $d_0 = 0$ et de (115) on obtient.

$$D(i\omega) = (-Mk b_0 - cd_1) \omega^2 + i [1 - Md_1 - M b_0 c] \omega + K d_1 \omega \quad (115')$$

donc :

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_1 = -(cd_1 + Mb_0); \quad a_2 = 0; \quad a_3 = 0 \\ p_0 &= -(d_1 + b_0 c)M; \quad p_1 = 0; \quad p_2 = kd_1; \quad p_3 = 0 \end{aligned} \right\} (116')$$

d'où après calcul on a :

$$\Delta_2' > 0; \quad \Delta_4' > 0 \quad \text{et} \quad \Delta_6' = 0$$

Alors dans ce cas le polynôme $D(i\omega)$ a une racine double égale à zéro. Le S.V.A est donc instable quand $\omega = 0$. Alors, on ne peut l'utiliser que pendant la marche de la machine ($\omega > 0$)

Le coefficient d'efficacité est :

$$\chi = \left| \frac{i\omega d_1 (-M\omega^2 + k + i\omega c)}{i\omega d_1 (-M\omega^2 + k + i\omega c) - Mb_0 \omega^2 (k - i\omega c)} \right| \quad (117)$$

et de (118) on a :

$$-(Mb_0^2 c^2 + 2M^2 d_1 b_0 c)\omega^6 - M^2 b_0^2 k^2 \omega^4 < 0 \quad (118')$$

et $\omega^4 > 0$, alors :

$$e_1 \omega^2 + e_2 < 0 \quad (118'')$$

$$\left. \begin{aligned} \text{où : } e_1 &= -M^2 (b_0^2 c^2 + 2d_1 b_0 c) \\ e_2 &= -M^2 b_0^2 k^2 \end{aligned} \right\} (119')$$

A cause de ces deux expressions (118'') et (119')

La condition (118') est satisfaite pour toute valeur de $\omega^2 \geq 0$, donc le coefficient

χ est inférieur à 1 pour tout $r \geq 0$

comme on a une instabilité pour $\omega = 0$ ($r = 0$)

$\chi < 1$ est vérifié pour tout $r > 0$, indépendamment des paramètres du système

- Conclusion -

L'étude théorique décrite précédemment sera rapportée à un cas très schématique : mouvement à un seul degré de liberté avec une seule force d'excitation.

Dans la pratique, les choses sont évidemment moins simples. La machine peut plus ou moins se mouvoir suivant plusieurs degrés de liberté. Il y a théoriquement autant de fréquences propres qu'il y a de degrés de liberté. De même il peut y avoir plusieurs forces d'excitation appliquées en des points divers.

Les supports doivent être choisis de façon qu'ils soient efficaces. Quant aux S.V. A et outre les conditions de stabilité et d'efficacité qu'ils doivent remplir, il faut qu'ils soient aussi économiques et sans influence sur l'environnement.

Enfin, le problème de vibro-isolation, ~~via~~ jusqu'à présent, n'a pas trouvé une solution satisfaisante à 100% car dans la plupart des usines, des voitures, des avions, etc., le confort du travailleur ou du passager est perturbé tant par le bruit que par les vibrations elles-mêmes.

Bibliographie

- [1] - S.W. Jeliseev - "Strukturnaja teorija wibrozaščitnych system"
- Izd. "Nauka" Novosibirsk - 1978
- [2] - M.A. Julien - Dynamique de la voiture automobile
Edition Technip - 1960
- [3] J.P. Den Hartog "Vibrations mecaniques"
Edition Dunod - 1961
- [4] S. Timoshenko - "Theorie des vibration"
Edition 1956
- [5] A.H. CHURCH - "Mechanical vibrations"
Ed. John Wiley and Son, Inc, New York and
London - 1963
- [6] J.C. Pruvost - "Servomecanismes hydrauliques et
electrohydrauliques" Edition technique et Document.
- 1978
- [7] - Encyclopedie "Technique de l'ingenieur"
T-2 Generalites
T-2 Mechanique et chaleur

