

Ecole Nationale Polytechnique

*D.E.R. de Génie Electrique et Informatique*  
*Département Electronique*



## *Projet de fin d'études*

*Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état  
en Electronique*

*Thème*

*Analyse des lignes de transmission planaires à  
l'aide de méthodes numériques.*

*Etudié par :*

*BEDJAOUI Messaoud  
MEKHALFA Faiza*

*Proposé et dirigé par :*

*Dr R. AKSAS*

*Promotion : juin 99*

*E.N.P.10, Avenue Hassen-Badi, EL-HARRACH, ALGER.*

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

*D.E.R. de Génie Electrique et Informatique*  
*Département Electronique*



## *Projet de fin d'études*

*Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état  
en Electronique*

*Thème*

*Analyse des lignes de transmission planaires à  
l'aide de méthodes numériques.*

*Etudié par :*

*BEDJAOUI Messaoud  
MEKHALFA Fuiza*

*Proposé et dirigé par :*

*Dr R. AKSAS*

*Promotion : juin 99*

*E.N.P.10, Avenue Hassen-Badi, EL-HARRACH, ALGER.*

الدراسة المعمقة للتصرف الكهربائي لخطوط الإرسال ، تمت بواسطة ثلاثة طرق : التحويل المناسب ، الطريقة المتغيرة ، و الطريقة الطيفية .  
الطريقتين الأولتين تستعملان في دراسة البنيات التي يتجاوزها موجات مستوية . هاتين الطريقتين تعطيان دقة معتبرة ، كما تسمحان باختصار وقت الحساب .  
بينما عدم تجانس بعض البنيات يتطلب استعمال الطريقة الطيفية من أجل اهتزازات عالية ، هذه الطريقة تتميز بالثقل وصعوبة الإستعمال ، ولكن إنجازاتها أكثر من حيث الدقة وتنوع مسائل الدراسة .

### Astract

The full wave analysis of the transmission line characteristics, is presented by three methods: The conformal mapping, variational method and spectral approach.

The two first methods are used for TEM transmission lines. They give a good precision and reduce the computation time

While The spectral approach is used for inhomogeneous lines . This method is very difficult to use but can give a good precision and efficiency.

### Résumé

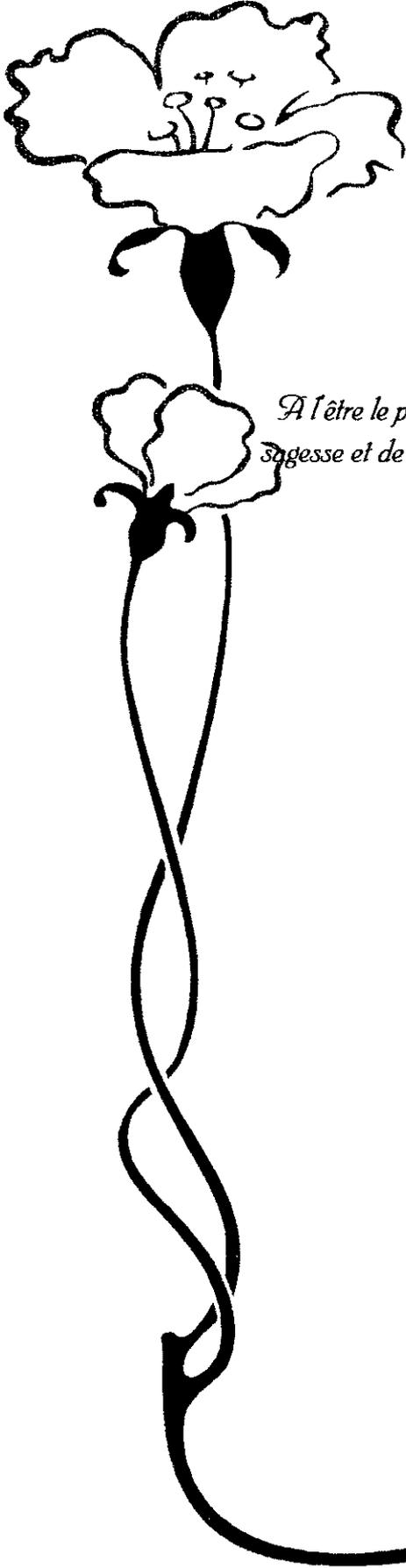
L'analyse rigoureuse des lignes de transmission à été établit par trois méthodes: La transformation conforme, la méthode variationnelle, et l'approche spectrale.

Les deux premières méthodes servent à analyser des lignes ou règnent le mode TEM. Elles donnent une bonne précision et permettent de réduire le temps de calcul.

Par contre l'inhomogénéité de certaines structures, nécessite l'utilisation de la méthode spectrale, cette méthode est caractérisée par une mise en œuvre difficile, mais cela est compensée par la précision et par une plus grande diversité dans les type de problème qu'elle traite.

### Mots clés

Ligne de transmission planaire, Ligne triplaque, Ligne microruban, Transformation conforme, Méthode variationnelle, Méthode spectrale, Solution de Galerkin, Impédance caractéristique, Permittivité effective, Constante de propagation.



## *Dédicace*

*A l'être le plus cher, mon père, qui est pour moi le symbole de sacrifice, de la sagesse et de la compréhension, les mots sont bien trop faibles pour lui exprimer ma reconnaissance.*

*A ma mère pour son amour et ses conseils.*

*Que dieu puissant les garde.*

*A mes chers sœurs et frères.*

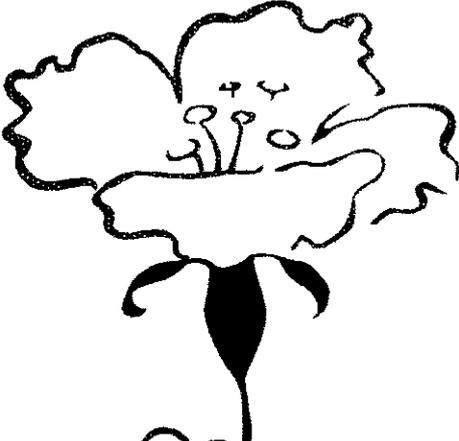
*A la mémoire de ma sœur Samira et mes frères*

*Toufik et Fouad.*

*A toutes mes amies.*

*Je dédie ce modeste travail.*

*Faiza*



## *Dédicaces*

*Que ma très chère mère, et mon très cher père trouvent ici l'expression de mes sentiments les plus profonds en témoignage de leur dévouement sans limite, leur sacrifice qu'ils m'ont assuré tout au long de mes années d'études.*

*A mes frères et sœurs, en particulier Mohammed;*

*A toute la famille;*

*A tous mes amis(es);*

*Et à toi ;*

*Je dédie ce travail.*

*Messaoud*

## *Remerciements*

Nous remercions le Seigneur de nous avoir donné la force et la volonté d'écrire ce document.

Nos sincères remerciements vont à M<sup>r</sup> R.AKSAS, maître de conférence à l'ENP, pour nous avoir bien suivi et mis à notre disposition tous les moyens nécessaires pour bien mener ce projet de fin d'étude.

Il nous est agréable de pouvoir exprimer notre gratitude à M<sup>r</sup> M.TRABELSI, chargé de cours à l'ENP, pour son précieux soutien.

Nous sommes reconnaissant à tous les personnes du Laboratoire de Télécommunications de l'ENP.

Que tous ce qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce projet trouvent ici l'expression de notre profonde reconnaissance.

## Table des matières

<i>Introduction</i> .....	6
<b>1. Introduction à l'analyse des lignes de transmission</b> .....	8
<b>1.1 Description physique</b> .....	9
<b>1.2 Définitions et classifications</b> .....	9
1.2.1 ligne de transmission .....	9
1.2.1.1 Notion d'uniformité dans la direction de propagation.....	10
1.2.1.2 Ligne inhomogène.....	10
1.2.1.3 Ligne planaire.....	10
1.2.1.4 Paramètres linéaires.....	10
1.2.2 Modes de propagation.....	11
<b>1.3 Etude des lignes sans pertes</b> .....	12
1.3.1 Impédance caractéristique.....	13
1.3.2 Puissance moyenne.....	13
1.3.2.1 Energie électrique moyenne.....	13
1.3.2.2 Energie magnétique moyenne.....	14
1.3.2.3 Puissance totale.....	14
<b>1.4 Etude d'une ligne ouverte avec pertes</b> .....	15
1.4.1 Les pertes dans le diélectrique.....	15
1.4.2 Les pertes dans le conducteur.....	15
1.4.3 Les pertes dans le diélectrique et dans le conducteur.....	15
<b>1.5 Détermination de la constante de propagation</b> .....	16
<b>1.6 Conclusion</b> .....	16
<b>2. Etude de la ligne triplaque</b> .....	17
<b>2.1 Description de la ligne triplaque</b> .....	18
<b>2.2 Méthodes d'analyse</b> .....	18
2.2.1 Transformation conforme.....	18
2.2.2 Transformation de Schwarz-Cristoffel .....	20
2.2.2.1 Exposé de la méthode.....	20
2.2.2.2 Etude d'une ligne triplaque d'épaisseur négligeable.....	22
2.2.3 Méthode variationnelle.....	27
2.2.3.1 Expression variationnelle de la limite inférieure de $Z_c$ .....	27
2.2.3.2 Expression variationnelle de la limite supérieure de $Z_c$ .....	28
2.2.3.3 Etude d'une ligne triplaque d'épaisseur non nulle .....	30
<b>2.3 Conclusion</b> .....	35

<b>3. Etude des lignes microrubans</b> .....	36
<b>3.1 Description de la ligne microruban</b> .....	37
<b>3.2 Méthodes d'analyse</b> .....	38
3.2.1 Analyse quasistatique.....	39
3.2.1.1 Paramètres statiques.....	39
3.2.1.2 Analyse d'une ligne microruban ouverte par la méthode variationnelle.....	39
3.2.2 Méthode spectrale.....	43
3.2.2.1 Généralités.....	43
3.2.2.2 Analyse d'une ligne microruban ouverte par la méthode spectrale.....	43
<b>3.3 Influence de l'épaisseur <math>t</math> du ruban</b> .....	49
<b>3.4 Influence de l'existence du boîtier</b> .....	50
3.4.1 Etude d'une ligne microruban couverte.....	50
3.4.1.1 Formulation du problème.....	50
3.4.1.2 Analyse.....	51
<b>3.5 Pertes dans la ligne microruban</b> .....	52
3.5.1 Pertes dans les conducteurs.....	52
3.5.2 Pertes diélectriques.....	53
3.5.3 Pertes par rayonnement.....	53
<b>3.6 Conclusion</b> .....	54
<b>4. Analyse des résultats obtenus</b> .....	55
<b>4.1 Caractéristiques des lignes triplaques</b> .....	56
4.1.1 Impédance caractéristique.....	56
4.1.1.1 Cas d'un ruban d'épaisseur négligeable.....	56
4.1.1.2 Cas où l'épaisseur du ruban est non nulle.....	56
4.1.2 Pertes dans la ligne triplaque.....	57
<b>4.2 Caractéristiques des lignes microruban</b> .....	59
4.2.1 Caractéristiques statiques.....	59
4.2.2 Caractéristiques dispersives.....	62
4.2.3 Effet du blindage de la ligne.....	66
<b>4.3 Conclusion</b> .....	68
<b>5. Conclusion</b> .....	70
Références.....	72
Annexe A.....	76
Annexe B.....	79
Annexe C.....	81

## Liste des symboles

$\epsilon_0$	Permittivité électrique absolue du vide
$\epsilon_r$	Permittivité relative d'un diélectrique
$\epsilon_{\text{eff}}$	Permittivité effective
$\mu_0$	Perméabilité magnétique absolue du vide
$\mu_r$	Perméabilité relative d'un diélectrique
$\sigma_c$	Conductivité du métal
$\sigma_d$	Conductivité effective d'un diélectrique imparfait
$\text{tg}\delta$	Angle de perte
$\lambda_0$	Longueur d'onde dans le vide
$\lambda$	Longueur d'onde
$k_0$	Nombre d'onde dans le vide
$k$	Nombre d'onde
$V_{c0}$	Vitesse de la lumière
$V_c$	Vitesse de propagation
$Z_{c0}$	Impédance caractéristique dans le vide
$Z_c$	Impédance caractéristique
$C$	Capacité par unité de longueur
$L$	Inductance par unité de longueur
$Z$	Impédance d'onde
$Y$	Admittance d'onde
$\bar{Y}$	Admittance d'onde dyadique
$Z_m$	Impédance du métal
$\gamma$	Exposant de propagation
$\alpha$	Constante d'atténuation
$\beta$	Constante de phase
$\alpha_c$	Affaiblissement métallique
$\alpha_d$	Affaiblissement diélectrique
$W_e$	Energie électrique
$W_m$	Energie magnétique
$W_{mi}$	Energie magnétique interne
$P$	Puissance transmise
$P_c$	Puissance dissipée dans les conducteur
$P_d$	Puissance de diélectrique
$P_{\text{moy}}$	Puissance moyenne
$J_s$	Densité de courant surfacique
$\rho_s$	Distribution de charge surfacique
$Q$	Charge totale
$\vec{E}$	Champ électrique

$\vec{H}$	Champ magnétique
$\vec{E}_t$	Champs électrique transverse
$\vec{H}_t$	Champs magnétique transverse
$\tilde{F}$	Transformée de Fourier de F
$F^*$	Conjuguée de F
G	Fonction de Green du première espèce
$\overline{G}$	Fonction de Green dyadique
$J_n(x)$	Fonction de Bessel d'ordre n de première espèce
$T_n(x)$	Polynôme de Chebyshev d'ordre n de première espèce
$U_n(x)$	Polynôme de Chebyshev d'ordre n de deuxième espèce

# **INTRODUCTION**

## Introduction

L'histoire des ondes électromagnétiques revient à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle. En 1864, Maxwell a élaboré un formalisme mathématique des lois de l'électromagnétisme, regroupant en un système d'équations les lois expérimentales découvertes par ses prédécesseurs. Huit ans plus tard, Hertz déduit des équations de Maxwell la notion de propagation. Il montre que des oscillations à hautes fréquences peuvent produire un effet à distance et que le phénomène est le résultat d'ondes électromagnétiques. De plus, il faut du temps à un phénomène électromagnétique pour produire un effet en un lieu de l'espace autre que celui où le phénomène apparaît. C'est à ce double aspect, à la fois d'effet à distance et de caractère non-instantané de cet effet, que l'on donne le nom de propagation. Le mot de transmission, quant à lui, est réservé en général à l'utilisation technique du phénomène, en vue de transmettre de l'énergie et de l'information à distance. Le 20<sup>ème</sup> siècle n'est pas encore né que Lodge démontre le rayonnement à partir de guides d'ondes, Rayleigh publie une analyse sur la propagation des ondes électromagnétiques dans un diélectrique en forme d'un rectangle, appelé par la suite guide d'onde.

Dans les dernières années, le développement des circuits imprimés d'abord, des circuits intégrés ensuite, et leurs utilisation à des fréquences de plus en plus élevées a suscité beaucoup d'intérêt pour des structures de transmission à conducteurs plans parallèles. Celles-ci sont à présent couramment utilisées dans les dispositifs électroniques aussi bien comme éléments de circuits tels que filtres, dispositifs d'adaptation, coupleurs, etc. Ces structures devenaient, avec l'ascension fréquentielle, de plus en plus spécifiques et faisaient l'objet d'une sélection bien précise. En particulier, le choix de la ligne de transmission la plus adéquate à l'interconnexion des éléments passifs et actifs est devenu une importante préoccupation.

Parmi une multitude de lignes de transmission, les lignes planaires se trouvaient bien adaptées à la structure des composants actifs. Ceci a fait que cette classe de lignes est devenue largement utilisée. En parallèle au développement de ces éléments, les méthodes permettant leur analyse devenaient de plus en plus sophistiquées. L'objectif de notre travail consiste à faire l'étude et l'application de certaines de ces méthodes d'analyse sur quelques types de lignes planaires.

Le premier chapitre est consacré à la description des principales notions de base des lignes de transmission. On analyse les champs électromagnétiques d'une ligne de transmission en se limitant au cas le plus usuel, celui d'une ligne véhiculant des ondes transverses électromagnétiques.

Après avoir établi la théorie générale des lignes de transmission, on étudie au chapitre 2 un exemple des lignes planaires appelé « strip line ». Le mode principal de propagation dans cette ligne est un mode TEM. Par l'application de la transformation conforme et du principe variationnel, on obtient l'impédance caractéristique ainsi que les coefficients de pertes.

Au chapitre 3, on verra que la présence d'une inhomogénéité impose toutefois des conditions aux limites supplémentaires. Celle-ci ne pourront dès lors être satisfaites que par l'existence de composantes de champ supplémentaires par rapport aux composantes transverses. Le mode dominant sera toutefois « quasi-TEM » d'autant plus semblable à un mode TEM que la fréquence est basse. Le calcul approché des paramètres du mode quasi-TEM a été fait de diverses façons. On se limitera dans ce chapitre à l'application du principe variationnel sur la ligne la plus couramment employée pour le moment « microstrip ». A fréquence croissante, toutefois, une dispersion croissante apparaît. Il en résulte un écart par rapport aux valeurs de l'impédance caractéristique et de l'exposant de propagation calculés par la méthode variationnelle. Cependant, l'introduction d'autres méthodes d'analyses est indispensable. La méthode spectrale basée sur la solution de Galerkin sera développée pour l'évaluation des caractéristiques fondamentales de la ligne (impédance caractéristique, permittivité effective...).

La description et l'interprétation des résultats feront l'objet du chapitre 4. Pour permettre au lecteur une étude plus aisée de la thèse, nous avons allégé le formalisme mathématique en renvoyant les différentes démonstrations en annexe.

# **CHAPITRE 1**

## **INTRODUCTION A L'ANALYSE DES LIGNES DE TRANSMISSION**

Ce premier chapitre servant d'introduction nous permet de développer les principales notions sur les lignes de transmission. On va présenter également, une étude générale des lignes idéales et des lignes réelles, en introduisant l'approche variationnelle pour le calcul des paramètres de la ligne.

## 1.1 Description physique

Les lignes de transmission utilisées pour les télécommunications ou dans certains circuits hyperfréquences sont constituées de deux conducteurs métalliques, parallèles isolés l'un de l'autre par du vide ou par des diélectriques. La figure 1.1 donne quelques exemples de constitution de lignes.

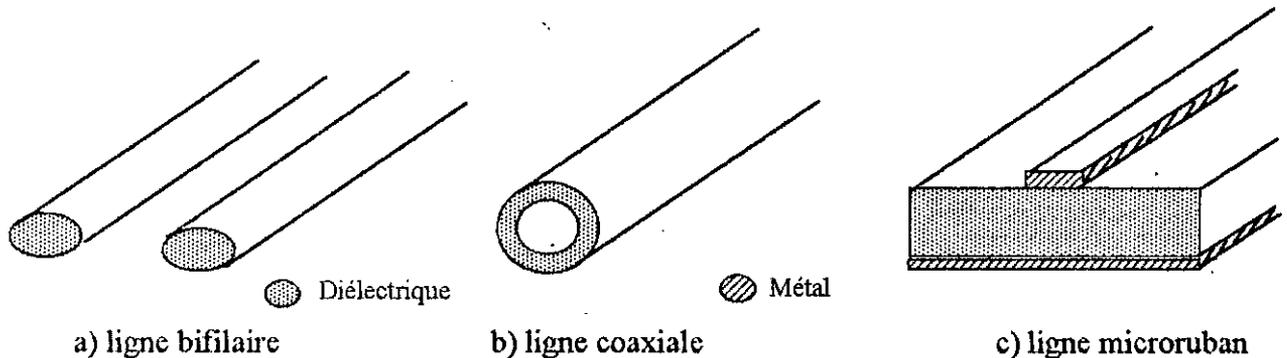


Fig. 1.1 Quelques types de lignes de transmission.

La ligne bifilaire est couramment utilisée pour les télécommunications à grandes distances. Le câble coaxial est utilisé pour les télécommunications à grande distance et à grand débit d'information. Ce câble est également utilisé pour relier les circuits hyperfréquences entre eux, pour des fréquences pouvant aller jusqu'à 10 GHz. Le conducteur intérieur est maintenu en place soit par un remplissage du volume interne par un diélectrique, soit par des espaceurs régulièrement disposés. La ligne microruban se rencontre surtout à l'intérieur de certains circuits hyperfréquences. Son intérêt vient de sa commodité de fabrication, grâce aux techniques de circuit imprimé qui permettent de définir avec beaucoup de précision le contour du conducteur supérieur [1].

## 1.2 Définitions et classifications

### 1.2.1. Ligne de transmission

Le terme ligne de transmission sert à désigner de préférence des systèmes comportant plusieurs conducteurs métalliques isolés les uns des autres.

Il existe un grand nombre de structures qui permettent la transmission des signaux électriques, ces structures peuvent être:

- Soit ouvertes (possibilité de rayonnement), soit fermées (champs entièrement contenus à l'intérieur d'une enveloppe conductrice).
- Soit homogènes (un seul milieu de propagation ne variant pas dans le plan transverse), soit inhomogènes (plusieurs milieux dans le plan transverse).

Ces différentes structures sont représentées dans le tableau 1.1.

Structure Ouverte	Homogène	Ligne symétrique à ruban Ligne bifilaire
	Inhomogène	Ligne microruban Ligne à fente Ligne coplanaire Ligne bifilaire isolée
Structure Fermée	Homogène	Ligne coaxiale
	Inhomogène	Ligne coaxiale chargée

Tableau 1.1 Classification des lignes de transmission (D'après [2]).

### 1.2.1.1. Notion d'uniformité dans la direction de propagation

La propagation sur une ligne de transmission est déterminée par l'étude de la distribution du champ électromagnétique dans la structure correspondante. Généralement, la section droite de cette structure est quelconque, elle peut comporter plusieurs milieux de propagation différents (air, diélectriques, ferrites, ...), auquel cas elle est dite inhomogène. Elle peut par ailleurs contenir ou être entourée de conducteurs métalliques. La direction de propagation est rectiligne, on dispose l'axe des coordonnées longitudinales  $z$  dans cette direction. Ni la géométrie, ni les propriétés des matériaux ne sont modifiées lors d'un déplacement dans cette direction. Ces grandeurs sont de ce fait indépendantes de la variable  $z$  (invariance de translation). On dit alors que la ligne est uniforme.

### 1.2.1.2. Ligne inhomogène

La ligne inhomogène est une ligne de transmission uniforme dans la direction de propagation mais comportant une variation des propriétés du (des) milieu(x) de propagation. Les champs électromagnétiques d'une onde qui se propage dans la structure s'étendent alors sur une région dont les propriétés spatiales varient dans le plan transverse. Le plus souvent, la structure comporte au moins deux milieux homogènes distincts (air, isolant). On étudie dans ce cas séparément les champs dans chacun des différents milieux, puis on applique les conditions de continuité sur les surfaces de séparation. Il faut en particulier que la dépendance longitudinale des champs, soit la même partout. Si le principe de résolution est simple, sa mise en application présente souvent de grandes difficultés. Seules des méthodes de résolution numériques sont le plus souvent en mesure de fournir des solutions précises. Pour de nombreuses applications pratiques, des relations fermées sont cependant suffisantes.

### 1.2.1.3. Ligne planaire

On désigne sous le nom de circuits planaires des assemblages de conducteurs déposés sur l'une ou les deux faces d'une plaque de support isolante (diélectrique). En micro-ondes, l'ensemble, comprenant le substrat diélectrique et les conducteurs, forme une ou plusieurs lignes de transmission, dont les propriétés de propagation dépendent des dimensions et de la permittivité du substrat. Les structures les plus couramment rencontrées en pratique sont représentées dans la figure 1.2. Dans les réalisations pour des bandes millimétriques, ces lignes doivent, de plus, être placées dans une enceinte fermée en vue de supprimer le rayonnement.

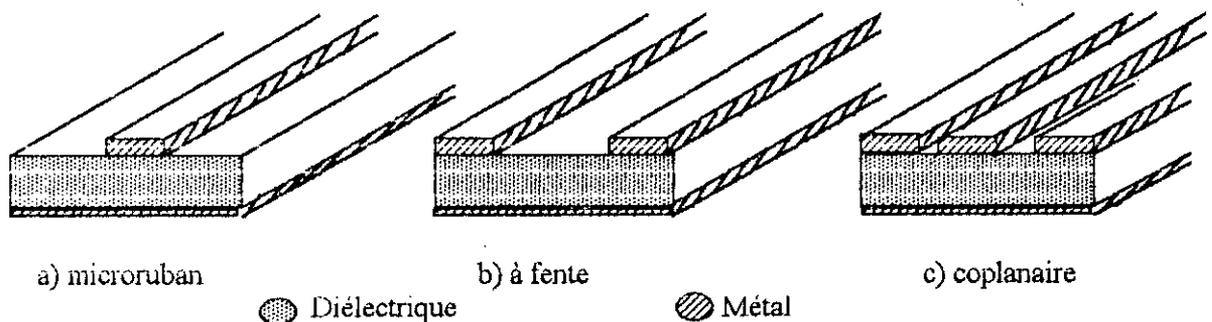


Fig. 1.2 Principales lignes planaires.

### 1.2.1.4. Paramètres linéaires

Les lignes de transmission étudiées sont constituées de deux conducteurs dont les propriétés sont constantes tout le long de la ligne. La théorie exposée plus loin suppose que les dimensions transversales sont négligeables par rapport aux dimensions longitudinales. Dès lors, le courant qui traverse le conducteur d'aller est égal et de sens opposé au courant qui traverse le conducteur de retour. Les caractéristiques des lignes sont définies par cinq paramètres :

### a) La résistance linéique:

La résistance des conducteurs est proportionnelle à la longueur de la ligne. On peut donc définir une résistance  $R$  par unité de longueur, c'est la résistance linéique. Cette résistance ne traduit pas seulement une perte d'énergie due à l'effet joule, il faut y inclure aussi l'énergie perdue par rayonnement, qui augmente avec la fréquence mais qui peut être limitée par un blindage. La résistance à fréquence élevée est très différente de la résistance en courant continu à cause de l'effet de peau; les courants en hautes fréquences sont surfaciques. Dans la pratique, en très hautes fréquences, les bandes passantes sont rarement importantes et nous considérons la résistance linéique comme une constante.

### b) L'inductance linéique:

C'est l'inductance  $L$ , par unité de longueur, rapport entre le flux magnétique créé et le courant qui lui donne naissance. En toute rigueur, il y aurait lieu de considérer les flux extérieur et intérieur au conducteur. Lorsque la fréquence augmente, la répartition des courants varie à cause de l'effet de peau, le flux intérieur varie, ce qui fait varier  $L$ . Si la fréquence est élevée, le courant est surfacique, le flux intérieur évolue peu et  $L$  peut être considérée pratiquement constante.

### c) La conductance linéique:

L'isolement n'est jamais parfait, ce qui est traduit par des pertes dans le diélectrique, que l'on peut représenter par une conductance parallèle uniformément répartie. La conductance linéique est la conductance  $G$  par unité de longueur. Son effet est généralement faible par rapport à celui de  $R$ .

### d) La capacité linéique:

Deux éléments de conducteurs de même section constituent une capacité. Cette capacité en parallèle sur la ligne est uniformément répartie. On définit la capacité linéique  $C$  ou capacité par unité de longueur. Elle ne dépend que de la géométrie de la ligne.

### e) L'exposant de propagation:

Les principales propriétés de l'exposant de propagation  $\gamma = \alpha + j\beta$  sont décrites dans la référence [2]. La partie réelle  $\alpha$ , mesurée en Nepers par mètre (Np / m) est appelée affaiblissement linéique. Elle représente la décroissance de l'onde dans la direction de propagation. Son inverse  $\delta_g = 1/\alpha$  est la profondeur de pénétration, distance sur laquelle le signal décroît d'un facteur  $1/e$ . La partie imaginaire  $\beta$ , mesurée en radians par mètre (rad / m) est le déphasage linéique, qui indique la variation de phase de l'onde dans la direction de propagation.

## 1.2.2. Modes de propagation

La résolution des équations de Maxwell, en tenant compte des conditions aux limites transverses est un problème aux valeurs propres. Ce problème admet plusieurs solutions différentes, que l'on appelle modes de propagations. Auxquelles sont associées une valeur propre (exposant de propagation et nombre d'onde transverse). Chaque mode possède des caractéristiques de propagation qui lui sont propres: affaiblissement, vitesse de propagation et fréquence de coupure. Lorsque la transmission fait simultanément, usage de plusieurs modes, la différence des vitesses de propagation produit des distorsions. Selon qu'il possède ou non des composantes longitudinales des champs électrique ou magnétique, un mode a des caractéristiques différentes. On obtient ainsi, quatre catégories des modes, présentées dans le tableau 1.2.

On peut former arbitrairement des modes dont les champs dépendent de la coordonnée  $x$  en superposant deux modes de même type (TE ou TM), se déplaçant dans des directions faisant des angles  $+\theta$  et  $-\theta$  respectivement avec l'axe  $z$ , dans le plan  $xoz$ . On peut ainsi former une infinité de modes ceux-ci ne sont cependant ni mode TE ni mode TM. Ils comportent simultanément des composantes longitudinales  $H_z$  et  $E_z$  non nulles. On remarque cependant que le mode formé par la superposition de deux modes TE n'a pas de composante  $E_y$ , on dit alors que le champ électrique est dans la section longitudinale. Le mode est appelé à section longitudinale électrique ou mode LSE. Similairement, le mode obtenu en superposant deux modes TM n'a pas de composante  $H_y$ . Il est de ce fait appelé mode à section longitudinale magnétique ou mode LSM.

$E_z$	$H_z$	NOM	NOTATION	SIGLE
Nulle	Nulle	Transverse électromagnétique	TEM	Rien
Nulle	Non nulle	Transverse électrique	TE	H
Non nulle	Nulle	Transverse magnétique	TM	E
Non nulle	Non nulle	Hybride	EH	HE

Tableau 1.2 Classification des modes de propagation (D'après [2]).

### 1.3 Etude des lignes sans pertes

Une ligne est sans pertes si les conducteurs électriques sont parfaits et s'ils sont placés dans un milieu sans pertes. Dans ce cas le mode de propagation dans la ligne est le mode transverse électromagnétique TEM. Les champs électrique et magnétique des ondes TEM sont purement transverses, les composantes longitudinales sont donc nulles. Les ondes TEM disposent d'une propriété particulière: les composantes dans le plan transverse vérifient les équations de la statique.

On considère deux conducteurs électriques parfaits, de sections transversales  $S_1$  et  $S_2$  uniformes, et orientés le long de l'axe  $z$  (Fig. 1.3). Les potentiels électriques sur les deux conducteurs (1, 2) sont notés respectivement par  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . Le milieu diélectrique est supposé homogène et isotrope de paramètres électriques  $\mu_0$  et  $\epsilon$ .

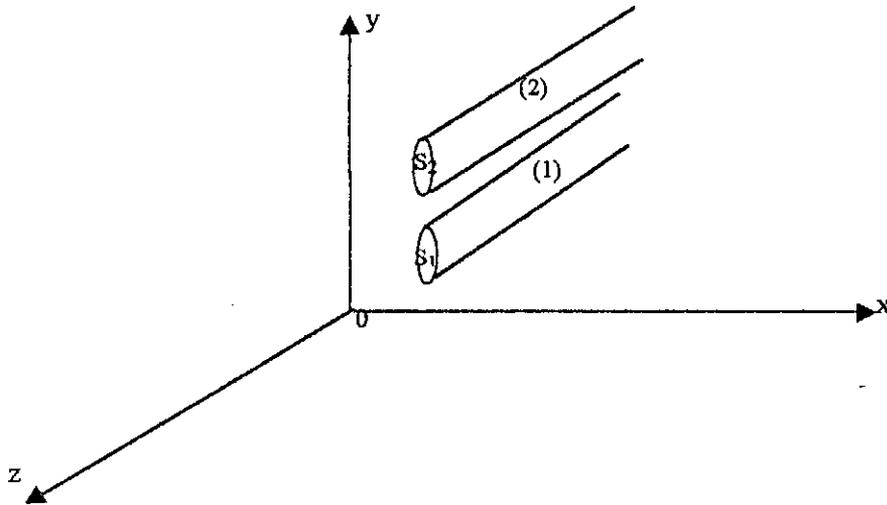


Fig. 1.3 Ligne de transmission idéale

Dans le cas statique, les composantes transversales des champs électrique et magnétique peuvent s'écrire [3]

$$\vec{E}_t = -\vec{\nabla}_t \phi(x, y) e^{\pm jkz} \quad (1.1)$$

$$\vec{H}_t = \pm \bar{Y} \vec{E}_t \quad (1.2)$$

où  $\vec{E}_t$  et  $\vec{H}_t$  sont des vecteurs transverses,  $\vec{\nabla}_t$  l'opérateur transverse donnée par

$$\vec{\nabla}_t = \vec{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.3)$$

$k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon$  et  $\bar{Y} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{a}_y \vec{a}_x - \vec{a}_x \vec{a}_y)$  est l'admittance dyadique [3].

La distribution du potentiel  $\phi(x, y)$  est une solution de l'équation de Laplace dans le plan  $xy$ . Elle existe si et seulement si les deux conducteurs ont des potentiels différents. Pour un système

électriquement neutre,  $\phi_1 = -V_0 / 2$ , et  $\phi_2 = +V_0 / 2$ . Mais le champ électrique ne varie pas avec le changement de  $\phi$ , on prend alors,  $\phi_1 = 0$  et  $\phi_2 = V_0$ .

### 1.3.1. Impédance caractéristique $Z_c$

Pour les ondes TEM, on peut définir une onde de tension unique  $V_0$  par l'intégrale linéaire du champ électrique dans le plan transverse le long de n'importe quel chemin joignant les deux conducteurs [3]

$$V_0 = - \int_c \vec{E}_t \cdot d\vec{l} = \int_c \vec{\nabla}_t \phi \cdot d\vec{l} = \int_c d\phi \quad (1.4)$$

car  $\vec{E}_t = -\vec{\nabla}_t \phi$  et  $c$  est le chemin d'intégration entre les deux conducteurs. L'onde de tension est associée au champ électrique transversal par la relation (1.4). Les deux conducteurs (1, 2) étant parfaits, le champ électrique est discontinu au niveau de la surface de séparation latérale (conducteur-milieu ( $\mu_0, \epsilon$ )). Compte tenu des conditions aux limites, on peut alors introduire une densité de charge surfacique  $\rho_s$  définie par [3]

$$\rho_s = \epsilon \vec{E}_t \cdot \vec{n} \quad (1.5)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal sortant.

D'une manière analogue, on introduit une densité de courant surfacique  $\vec{J}_s$  donnée par [3]

$$\vec{J}_s = \vec{n}' \wedge \vec{H}_t \quad (1.6)$$

$\vec{n}'$  est le vecteur normal au deuxième conducteur.

cette relation montre que le vecteur densité de courant surfacique  $\vec{J}_s$  est dirigé le long de l'axe  $z$ , et que son module vaut [3]

$$|\vec{J}_s| = |\vec{H}_t| = Y |\vec{n} \cdot \vec{E}_t| = Y \frac{\rho_s}{\epsilon} = \rho_s \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} \quad (1.7)$$

donc le courant total traversant le conducteur (2) est donné par l'intégrale linéaire de la densité de courant autour de celui-ci [3]

$$I_0 = \oint_{S_2} \vec{J}_s \cdot \vec{n} \, ds = \oint_{S_2} \frac{\rho_s}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} \, ds = Q V_c \quad (1.8)$$

où  $Q$  est la charge par unité de longueur sur le conducteur (2),  $V_c$  la vitesse de propagation dans le milieu, et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire sortant de la section  $S_2$ .

A ce niveau, on peut définir une grandeur importante caractérisant la ligne de transmission comme étant le quotient entre la différence de potentiel et le courant total, cette grandeur est appelée impédance caractéristique  $Z_c$  et s'écrit [3]

$$Z_c = \frac{V_0}{I_0} = \frac{V_0 \sqrt{\mu_0 \epsilon}}{Q} = \frac{\epsilon}{C} Z \quad (1.9)$$

où  $Z = (\mu_0 / \epsilon)^{1/2}$  est l'impédance d'onde du milieu, et  $C$  la capacité électrostatique par unité de longueur entre les deux conducteurs.

### 1.3.2. Puissance moyenne

#### 1.3.2.1. Énergie électrique moyenne

L'énergie électrique moyenne par unité de longueur d'une ligne, où se propage le mode TEM, est donnée par [3]

$$W_e = \frac{1}{4} \varepsilon \iint \vec{E}_t \vec{E}_t^* dx dy = \frac{1}{4} \varepsilon \iint \vec{\nabla}_t \phi \vec{\nabla}_t \phi dx dy \quad (1.10)$$

En appliquant la première identité de Green [3] sur le contour d'intégration de la figure 1.4, on trouve

$$W_e = \frac{1}{4} \varepsilon \oint_c \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dl \quad (1.11)$$

Sachant que

$$\begin{cases} \phi_1 = 0, \vec{\nabla}_t \phi_1 = 0 & \text{sur le conducteur (1)} \\ \phi_2 = V_0, \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = \frac{\rho_s}{\varepsilon} & \text{sur le conducteur (2)} \end{cases} \quad (1.12)$$

l'expression (1.11) devient alors

$$W_e = \frac{1}{4} \varepsilon \oint_{S_2} V_0 \frac{\partial \phi}{\partial n} dl = \frac{1}{4} V_0 \oint_{S_2} \rho_s dl = \frac{1}{4} V_0 Q = \frac{1}{4} C V_0^2 \quad (1.13)$$

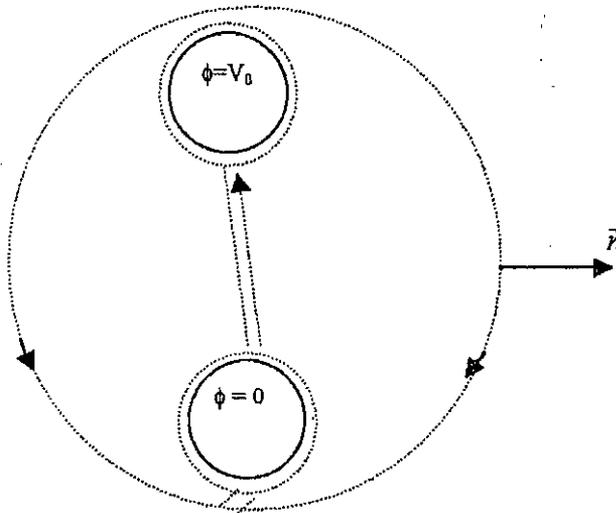


Fig. 1.4 Contour d'évaluation de  $W_e$  [3]

### 1.3.2.2. Energie magnétique moyenne

L'énergie magnétique moyenne par unité de longueur est donnée par l'expression [3]

$$W_m = \frac{1}{4} \mu_0 \iint \vec{H}_t \vec{H}_t^* ds \quad (1.14)$$

La relation (1.14) peut s'écrire aussi sous la forme

$$W_m = \frac{1}{4} L I_0^2 \quad (1.15)$$

$L$  est l'inductance totale par unité de longueur.

### 1.3.2.3. La puissance totale

La puissance totale le long de la ligne est donnée par la relation [3]

$$P = \frac{1}{2} \text{Re} \iint (\vec{E}_t \wedge \vec{H}_t^*) \cdot \vec{a}_z dx dy = V_c (W_e + W_m) \quad (1.16)$$

avec  $V_c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}}$

L'équation (1.18) peut être mise sous la forme

$$P = \frac{1}{2} Z_c I_0^2 = \frac{1}{2} V_0 I_0 \quad (1.17)$$

## 1.4 Etude d'une ligne ouverte avec pertes

La présence des pertes peut modifier le comportement des ondes électromagnétiques. Ces pertes peuvent être classées comme suit

### 1.4.1. Les pertes dans le diélectrique

Le milieu sera caractérisé par une permittivité complexe [3,4] qui s'écrit sous la forme

$$\bar{\epsilon} = \epsilon (1 - j \operatorname{tg} \delta_t) \quad ; \operatorname{tg} \delta_t \text{ est le facteur de perte.} \quad (1.18)$$

Ces pertes modifient les propriétés du milieu entourant les deux conducteurs.

### 1.4.2. Les pertes dans le conducteur

Elles sont dues au fait que la conductivité du conducteur n'est pas parfaite, ainsi que l'état de leur surfaces. Ces pertes se caractérisent par une modification des conditions aux limites aux interfaces conducteurs-milieu environnant.

On peut dans ce cas utiliser la notion d'impédance du métal  $Z_m$  définie par [3]

$$Z_m = R_m + jX_m = \frac{1 + j}{\sigma_c \delta_s} \quad (1.19)$$

où  $\delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma_c}}$  est la profondeur de pénétration, et  $\sigma_c$  est la conductivité du métal.

### 1.4.3. Les pertes dans le diélectrique et dans le conducteur

On peut également avoir des pertes à la fois dans le milieu et dans le conducteur. Dans ce cas, le problème à résoudre devient plus complexe. Si on assume que ces pertes par unité de longueur sont faibles, on peut les représenter par un facteur d'atténuation  $\alpha$  dans l'expression de la puissance transmise  $P(z)$  qui s'écrit

$$P(z) = P_0 e^{-2\alpha z} \quad (1.20)$$

où  $z$  est un point appartenant à l'axe de propagation et  $P_0$  la puissance transmise en  $z = 0$ . On aura alors [5]

$$\alpha = -\frac{dP/dz}{2P(z)} \approx \frac{P_c + P_d}{2P(z)} = \alpha_c + \alpha_d \quad (1.21)$$

Les facteurs  $\alpha_c$  et  $\alpha_d$  représentent respectivement l'affaiblissement métallique et diélectrique, qui s'écrivent sous la forme

$$\alpha_d = \frac{P_d}{2P(z)} \quad (1.22)$$

$$\alpha_c = \frac{P_c}{2P(z)}$$

$P_d$  et  $P_c$  étant respectivement la puissance moyenne des pertes diélectriques et la puissance moyenne des pertes conductrices par unité de longueur.

### 1.5 Détermination de la constante de propagation

Les résultats précédents ont été fondés sur des approximations. Une nouvelle technique est établit pour trouver la constante de propagation d'une ligne avec pertes, en appliquant le principe variationnel. La partie réelle  $\alpha$  et la partie imaginaire  $\beta$  s'écrivent (Cf. Annexe A) comme suit :

$$\alpha = \frac{P_c}{2P} \quad (1.23a)$$

$$\beta = k + \frac{\omega W_{mi}}{P} \quad (1.23b)$$

où  $P$  est la puissance totale transmise,  $P_c$  est la puissance dissipée dans les conducteurs et  $W_{mi}$  est l'énergie magnétique interne.

### 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une théorie générale sur les lignes de transmission a été présentée. On s'est intéressé par des lignes formés de deux conducteurs où règnent des ondes transverses électromagnétiques TEM. Les caractéristiques de ces lignes sont calculées à l'aide de la théorie classique. Toute fois cette théorie est insuffisante pour modéliser, d'une manière précise, quelques types de lignes qui présentent une certaine inhomogénéité. L'introduction des méthodes d'analyse rigoureuses est indispensable dans ce cas là.

# **CHAPITRE 2**

## **ETUDE DE LA LIGNE TRIPLAQUE**

Après avoir présenté les principales notions sur les lignes de transmission, on s'intéresse dans ce chapitre à l'analyse complète d'une ligne planaire, homogène dite ligne triplaque qui est souvent utilisée dans les circuits intégrés micro-ondes. L'étude sera faite selon deux méthodes: La transformation conforme et la méthode variationnelle.

## 2.1 Description de la ligne triplaque

Le concept de la ligne triplaque, ou la ligne à ruban symétrique (stripline), a été proposé par Barrett [6] en 1952. La structure de base (figure 2.1) est constituée d'un ruban conducteur d'épaisseur  $2t$  et de largeur  $2L$ , situé symétriquement entre deux plans de masse très larges. Le substrat diélectrique est homogène, de permittivité relative  $\epsilon_r$  et d'épaisseur  $2d$ . Le mode de propagation dominant est le mode TEM. Les champs électrique et magnétique sont concentrés autour du ruban central, ils diminuent latéralement en s'éloignant du conducteur. En se limitant à  $10L$  pour la largeur des plans de masse, l'approximation « mode TEM » n'est pas sensiblement affectée.

L'impédance caractéristique  $Z_c$  et la longueur d'onde  $\lambda$  de la ligne triplaque homogène sont données par les relations suivantes [7]

$$Z_c = \frac{Z_{c0}}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (2.1a)$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (2.1b)$$

$Z_{c0}$  et  $\lambda_0$  sont respectivement l'impédance caractéristique et la longueur d'onde dans le vide.

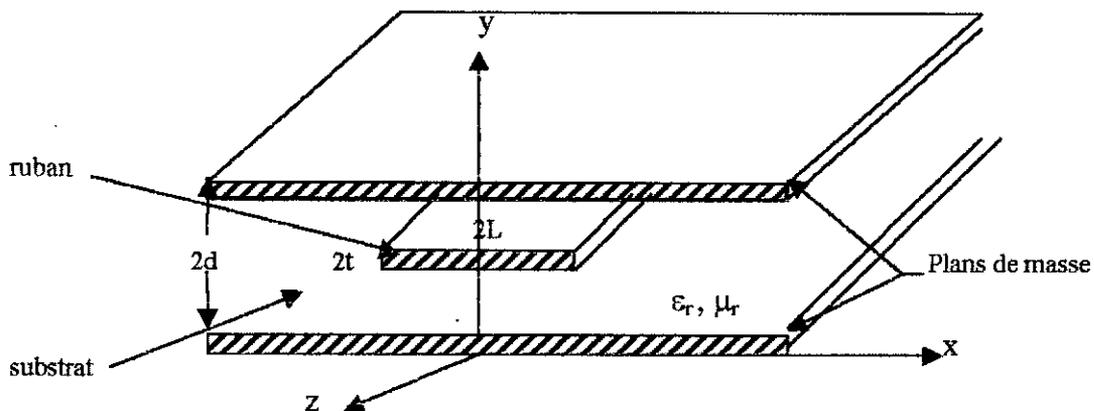


Fig. 2.1 Structure de la ligne triplaque

L'analyse d'une ligne de transmission consiste à déterminer ses caractéristiques électriques (généralement son impédance caractéristique  $Z_c$  et son coefficient de propagation  $\gamma$ ). Une analyse exacte de la ligne triplaque homogène utilisant la transformation conforme a été élaborée par Cohn [8]. Les dimensions de la ligne sont choisies d'une façon à ne pas perturber le mode TEM.

Ces paramètres ( $Z_c$  et  $\gamma$ ) sont liés directement à la capacité linéique  $C$ , il suffit donc de connaître  $C$  pour les déterminer. Nous allons exposer deux méthodes pour calculer  $C$ : à savoir la transformation conforme (de Cristoffel Schwartz) et la méthode variationnelle.

## 2.2 Méthodes d'analyse

### 2.2.1. Transformation conforme

La transformation conforme basée, sur la théorie des variables complexes, permet la résolution de divers problèmes rencontrés en statique. Par conséquent elle convient parfaitement à des configurations où règnent des modes TEM. Elle sert essentiellement à résoudre l'équation de Laplace à deux dimensions.

Considérons le problème électrostatique à deux dimensions de la figure 2.2. il s'agit de trouver la fonction potentiel  $\phi$  qui vérifie l'équation  $\nabla_t^2 \phi = 0$ , et les conditions aux limites  $\phi = \phi_1$  sur  $S_1$  et  $\phi = \phi_2$  sur  $S_2$ . Les courbes  $S_1$  et  $S_2$  représentent les deux conducteurs d'une ligne de transmission

(configuration initiale). En général La résolution directe de l'équation de Laplace  $\nabla_t^2 \phi = 0$  est difficile, à moins que les courbes  $S_1$  et  $S_2$  coïncident avec les courbes à coordonnées constantes.

La transformation conforme, permet le passage d'un système de coordonnées  $x, y$  (plan  $Z$ ) vers un système de coordonnées curvilignes  $u, v$  (plan  $W$ ) définies par

$$u = u(x, y) \tag{2.2a}$$

$$v = v(x, y) \tag{2.2b}$$

Ce passage est effectué à l'aide d'une fonction complexe  $F(z)$  donnée par

$$w = F(z) = F(x + jy) = u + jv \tag{2.3}$$

Les fonctions  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  partie réelle et imaginaire de  $F(z)$  sont dites fonctions conjuguées.

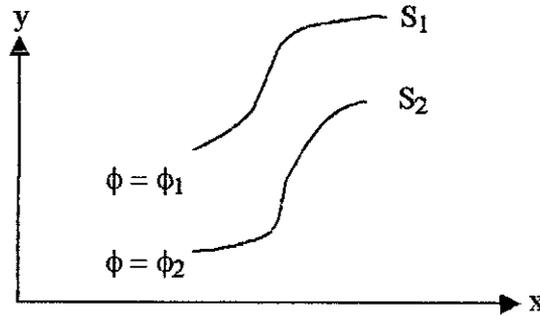


Fig. 2.2 Problème électrostatique à deux dimensions.

Propriétés

La propriété fondamentale d'une telle transformation est qu'elle conserve les angles [9], d'où le nom de la transformation conforme.

La fonction complexe  $w$  est une fonction analytique de la variable complexe  $z$ . La dérivée  $dw / dz = dF / dz$  doit avoir une valeur unique. On peut vérifier que les coordonnées  $u$  et  $v$  satisfassent les conditions de Cauchy-Rieman suivantes [10]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.4a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.4b}$$

$u, v$  forment un système orthogonal car

$$\vec{\nabla}_t u \cdot \vec{\nabla}_t v = \left( \bar{a}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{a}_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left( \bar{a}_x \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{a}_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \tag{2.5}$$

On définit les facteurs scalaires  $h_1$  et  $h_2$  caractérisant la transformation par

$$\frac{1}{h_1^2} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{h_2^2} = \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \tag{2.6}$$

Le potentiel  $\phi$  vérifie l'équation de Laplace dans le plan  $W$ , on peut donc écrire

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} = 0 \tag{2.7}$$

Si les transformées des courbes  $S_1$  et  $S_2$  coïncident avec les courbes à coordonnées constantes dans le plan  $W$  (Fig. 2.3). La résolution de l'équation  $\partial^2 \phi / \partial v^2 + \partial^2 \phi / \partial u^2 = 0$  sera plus simple que la solution de l'équation  $\partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 = 0$

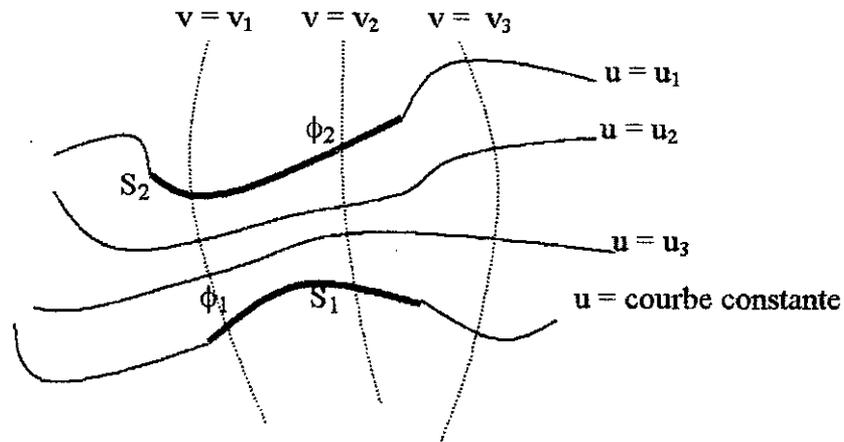


Fig. 2.3 Illustration des courbes à coordonnées constantes.

L'énergie électrostatique emmagasinée dans les sections droites s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
 W_e &= \frac{1}{2} \epsilon \iint_{xy} |\nabla_t \phi|^2 dx dy = \frac{1}{2} \epsilon \iint_{xy} \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon \iint_{uv} \left[ \frac{1}{h_1^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{h_2^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)^2 \right] h_1 du h_2 dv \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon \iint_{uv} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)^2 \right] du dv = \frac{1}{2} \epsilon C (\phi_2 - \phi_1)^2 \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

à partir de la distribution du potentiel  $\phi$ , on détermine l'énergie  $W_e$ . Connaissant les potentiels  $\phi_1$  et  $\phi_2$  (conditions aux limites), on détermine la capacité électrique  $C$  par unité de longueur. La capacité linéique d'une ligne coaxiale peut être calculée en utilisant cette transformation [3].

### 2.2.2. Transformation de Schwarz-Cristoffel

#### 2.2.2.1. Exposé de la méthode

La transformation de Schwarz-Christoffel est à la base d'une procédure directe de résolution de problèmes électrostatiques. Elle transforme l'axe réel du plan  $Z$  en un polygone dans le plan  $W$ , la région supérieure du plan  $Z$  se transforme en région intérieure au polygone. Pour obtenir la transformation de base on considère la courbe  $S$  dans le plan  $Z$ , et sa transformation conforme  $S_1$  dans le plan  $W$  (figure 2.4). On note par  $w = F(z)$  la fonction qui assure cette transformation.



Fig. 2.4 Transformation conforme de  $S$  à  $S_1$

$\vec{t}_0$  et  $\vec{\tau}_0$  sont respectivement les vecteurs unitaires tangents à S et  $S_1$ , définis par

$$\vec{t}_0 = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{|\Delta z|} \tag{2.9a}$$

$$\vec{\tau}_0 = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{|\Delta w|} \tag{2.9b}$$

La dérivée de la fonction w notée par  $F'(z)$  sera alors

$$\frac{dw}{dz} = F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w / |\Delta w|}{\Delta z / |\Delta z|} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = \frac{\vec{\tau}_0}{\vec{t}_0} |F'(z)| \tag{2.10}$$

d'où  $\vec{\tau}_0 = \frac{F'(z)}{|F'(z)|} \vec{t}_0$

L'angle entre l'axe u et le vecteur tangent  $\vec{\tau}_0$  est donné par

$$\angle \tau_0 = \angle t_0 + \angle F'(z) \tag{2.11}$$

Considérons la fonction

$$F(z) = A (z - x_1)^{-k_1} \dots (z - x_N)^{-k_N} = A \prod_{i=1}^N (z - x_i)^{-k_i} \tag{2.12}$$

où A est une constante de similitude, les exposants  $k_i$  sont des nombres réels et  $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ .

Si l'axe x représente la courbe S dans le plan Z, l'angle  $\angle \tau_0$  devient

$$\angle \tau_0 = \angle F'(z) = \angle A - \sum_{i=1}^N k_i \angle (z - x_i) \tag{2.13}$$

Pour  $x < x_i$  on a  $\angle(x - x_i) = \pi$  et pour  $x > x_i$  on a  $\angle(x - x_i) = 0$ . Quand les points  $x_i$  varient le long de l'axe x, l'angle  $\angle \tau_0$  change discontinuellement d'une quantité  $k_i \pi$ . Il est possible de tracer le polygone comme le montre la figure 2.5. Les angles externes aux polygone égalent donc à  $k_i \pi$ . La somme de ces angles vaut  $2 \pi$ . On obtient alors

$$\sum_{i=1}^N k_i = 2 \tag{2.14}$$

Finalement la transformation appropriée s'écrit sous la forme

$$w = \int_Z F(z) dz + B = A \int_Z \prod_{i=1}^N (z - x_i)^{-k_i} dz + B \tag{2.15}$$

où B est une constante de translation.

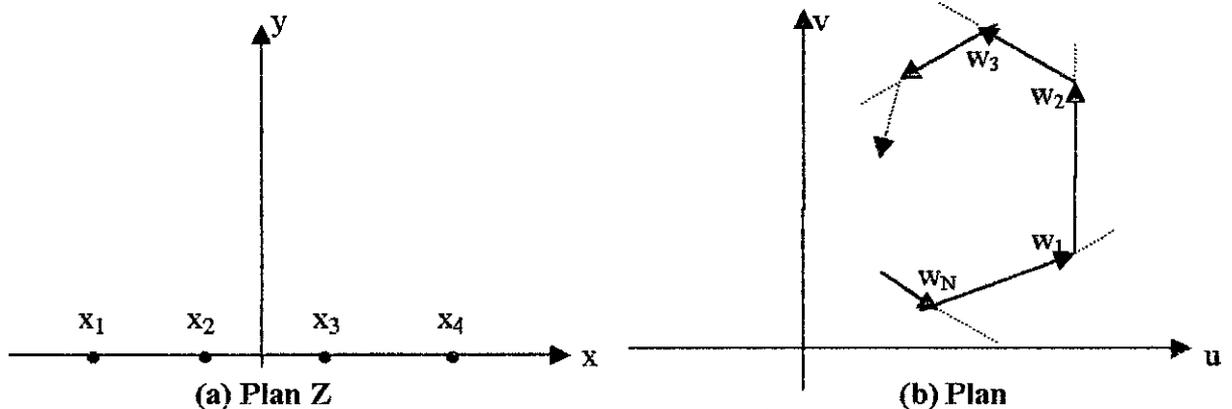


Fig. 2.5 Transformation de Schwarz-Christoffel.

### 2.2.2.2. Etude d'une ligne triplaque d'épaisseur $t$ négligeable

Une analyse statique basée sur la transformation de Schwarz-Cristoffel suffit pour caractériser la ligne triplaque, qui supporte le mode TEM jusqu'à quelques GHz. L'étude électrostatique proposée a été effectuée dans le cas limite où l'épaisseur  $t$  du ruban est nulle.

#### a) Détermination de l'impédance caractéristique

##### a1) Formulation du problème

On considère la ligne triplaque de la figure 2.1, avec les hypothèses simplificatrices suivantes

- Structure uniforme et infinie dans la direction  $z$ .
- Epaisseur  $t$  du ruban métallique nulle.
- Conducteurs parfaits.
- Diélectrique homogène, sans pertes, et isotrope, caractérisé par les paramètres électriques  $\epsilon$  et  $\mu_0$ .

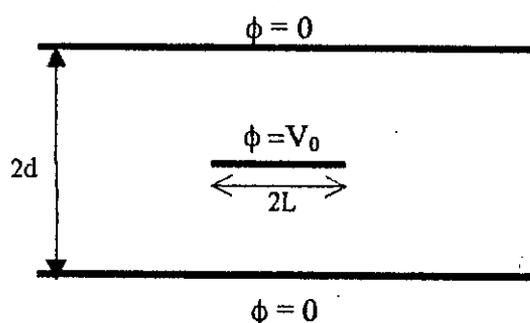


Fig. 2.6 Ligne triplaque avec  $t = 0$

##### a2) Analyse

Pour calculer l'impédance caractéristique  $Z_c$  de cette structure (figure 2.6), on doit trouver d'abord la capacité linéique  $C$ . La méthode consiste à déterminer une première fonction qui transforme la structure initiale en l'axe des  $x$ , puis une deuxième qui transforme l'axe des  $x$  en une structure plan parallèle de capacité connue. A cause de la symétrie de la ligne le problème se réduit à celui présenté dans la figure 2.7.

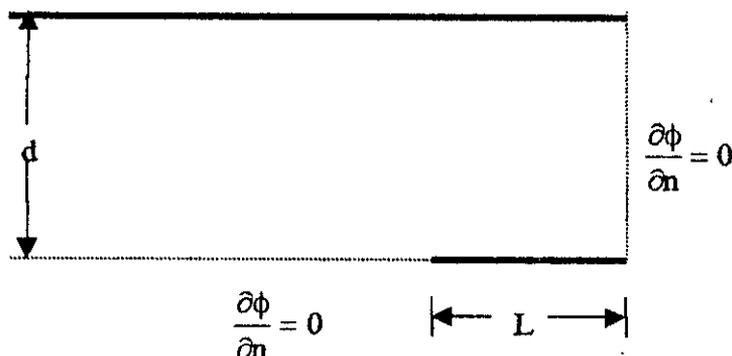


Fig. 2.7 Représentation d'un quart de la ligne triplaque.

La transformation de ce polygone (configuration initiale) en un axe réel, donne la structure de la figure 2.8b.

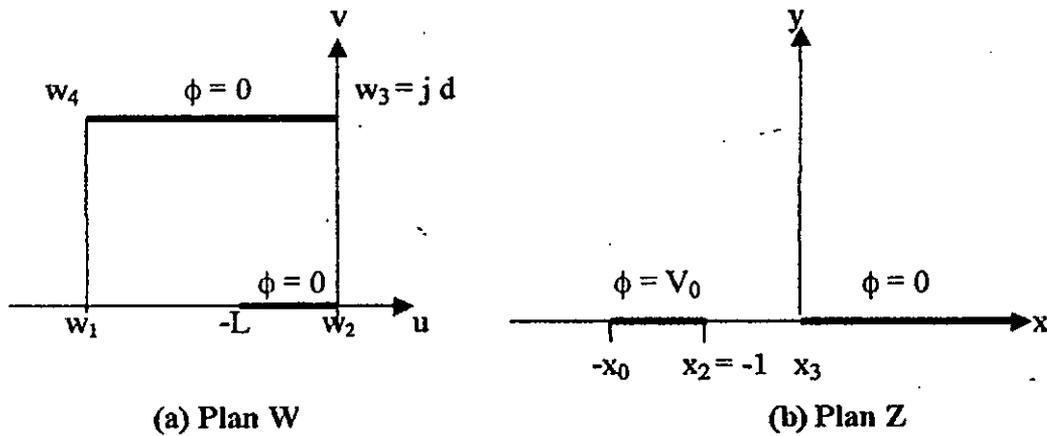


Figure 2.8 Transformation conforme de la ligne triplaque.

D'après la relation (2.15) la transformation appropriée, compte tenue l'existence de deux angles droits, s'écrit sous la forme

$$w = A \int_z (z - x_1)^{-1/2} (z - x_2)^{-1/2} (z - x_3)^{-1/2} (z - x_4)^{-1/2} dz \quad (2.16)$$

Pour balayer tout l'axe réel on fait tendre  $x_1$  et  $x_4$  vers l'infini. Si de plus on choisit  $x_2 = -1$  et  $x_3 = 0$  on trouve

$$w = A \int_z \frac{dz}{[z(z+1)]^{1/2}} + B = 2A \ln [z^{1/2} + (z+1)^{1/2}] + B \quad (2.17)$$

avec  $A = A'(x_1 x_2)^{-1/2}$

Pour déterminer les deux constantes A et B on utilise les conditions :  $w = 0$  quand  $z = -1$  et  $w = j d$  lorsque  $z = 0$ . On obtient donc

$$A = -\frac{d}{\pi} \quad (2.18)$$

$$B = j d \quad (2.19)$$

et la fonction w s'écrit alors

$$w = -\frac{2d}{\pi} \ln [z^{1/2} + (z+1)^{1/2}] + j d \quad (2.20)$$

La valeur de  $x_0$  qui correspond au point  $w = -L$ , peut être calculée en utilisant la relation (2.20)

$$x_0 = \cosh^2 \left( \frac{\pi L}{2 d} \right) \quad (2.21)$$

Nous remarquons que l'étude de la structure 2.8b est plus compliquée que celle de la structure initiale. Nous devons trouver une autre fonction  $w'$  qui transforme l'axe x en un condensateur plan parallèle (figure 2.9). D'après la relation (2.15) la transformation  $w'$  s'écrit sous la forme

$$w' = A_1 \int_z \frac{dz}{[z(z+x_0)(z+1)]^{1/2}} + B_0 \quad (2.22)$$

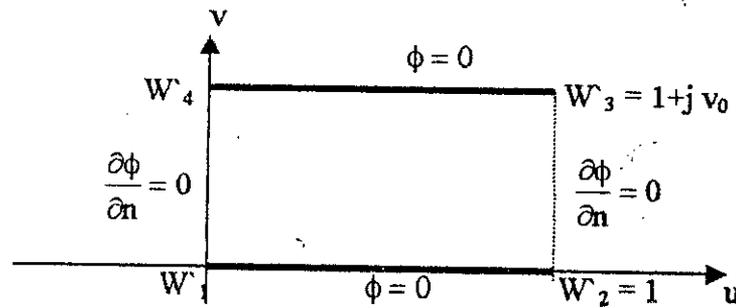


Fig. 2.9 Transformation finale de la ligne triplaque.

L'intégrale dans (2.22) ne peut pas être évaluée en fonctions élémentaires. Elle représente une fonction elliptique inverse de forme générale [11,12]

$$\text{sn}^{-1}(x, k) = \int_0^x \frac{d\lambda}{[(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)]} \quad (2.23)$$

où  $x$  est une variable complexe et  $k$  le module de la fonction elliptique.

En effectuant un changement de variable convenable:  $z = -\lambda^2$ , la relation (2.22) devient

$$w' = A_0 \text{sn}^{-1} \left[ (-z)^{1/2}, x_0^{-1/2} \right] + B_0 \quad (2.24)$$

avec  $A_0 = 2j A_1 x_0^{-1/2}$ .

Pour évaluer les constantes  $A_0$  et  $B_0$ , on utilise les conditions aux limites:  $z = -x_0$  pour  $w'_1 = 0$ ,  $Z = -1$  pour  $w'_2 = 1$  et  $z = 0$  pour  $w'_3 = 1 + jv_0$ . On obtient les trois équations suivantes

$$A_0 \text{sn}^{-1} \left( x_0^{1/2}, x_0^{-1/2} \right) + B_0 = 0 \quad (2.25a)$$

$$A_0 \text{sn}^{-1} \left( 1, x_0^{-1/2} \right) + B_0 = 0 \quad (2.25b)$$

$$B_0 = 1 + jv_0 \quad (2.25c)$$

La fonction elliptique  $\text{sn}(x + jy)$  est à double période. Une période selon  $x$  égale à  $4K$ , l'autre selon  $y$  vaut  $2K'$ . Les périodes  $K$  et  $K'$  sont définies par

$$K = \int_0^1 \frac{d\lambda}{[(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)]^{1/2}} = \text{sn}^{-1}(1, k)$$

$$K' = \int_0^1 \frac{d\lambda}{[(1-\lambda^2)(1-\lambda^2+k^2\lambda^2)]^{1/2}} = \int_1^{1/k} \frac{d\lambda}{[(\lambda^2-1)(1-k^2\lambda^2)]^{1/2}}$$

$$\text{sn}^{-1}(1/k, k) = K - jK'$$

$$k = x_0^{-1/2}$$

$$k' = (1-k^2)^{1/2}$$

En combinant les équations (2.25), l'expression donnant la distance  $v_0$  s'écrit

$$v_0 = \frac{K(k)}{K'(k')} \quad (2.26)$$

La capacité  $C$  par unité de longueur de cette structure est définie par

$$v_0 = \frac{K(k)}{K'(k')} \tag{2.26}$$

La capacité C par unité de longueur de cette structure est définie par

$$C = 4 \frac{\epsilon}{v_0} \tag{2.27}$$

le facteur 4 est dû au fait qu'on a quatre quadrants identiques. L'impédance caractéristique de cette ligne s'écrit donc

$$Z_c = \frac{v_0}{4} Z \tag{2.28}$$

avec  $Z = (\mu_0 / \epsilon)^{1/2}$ .

**b) Pertes dans la ligne triplaque**

Comme pour toutes les lignes de transmission, les pertes dans la ligne triplaque peuvent être divisées en deux parties: pertes métalliques et pertes diélectriques. En général les pertes diélectriques sont très faibles par rapport aux pertes métalliques.

**b1) Pertes métalliques**

Pour trouver la constante d'atténuation  $\alpha_c$  due aux pertes par conduction, on remplace le ruban d'épaisseur négligeable par un ruban qui coïncide avec les contours équipotentiels. La figure 2.10a représente la section transversale d'une ligne triplaque avec un contour équipotentiel  $\phi = V_1$ .

La transformation conforme d'un quadrant de cette ligne est représentée dans la figure 2.10b. L'avantage principal dans ce cas là, est que la même fonction conforme qui a transformé le ruban d'épaisseur négligeable, peut transformer également le contour équipotentiel. Donc on peut utiliser les fonctions (2.20) et (2.24). La valeur de  $\Delta v$  est déterminée à l'aide de ces deux transformations. Si  $\Delta v$  est négligeable devant la distance  $v_0$  la valeur de C change d'une portion négligeable  $\Delta C$  donnée par

$$\Delta C = \epsilon \Delta v (v_0 (v_0 - \Delta v))^{-1} \tag{2.29}$$

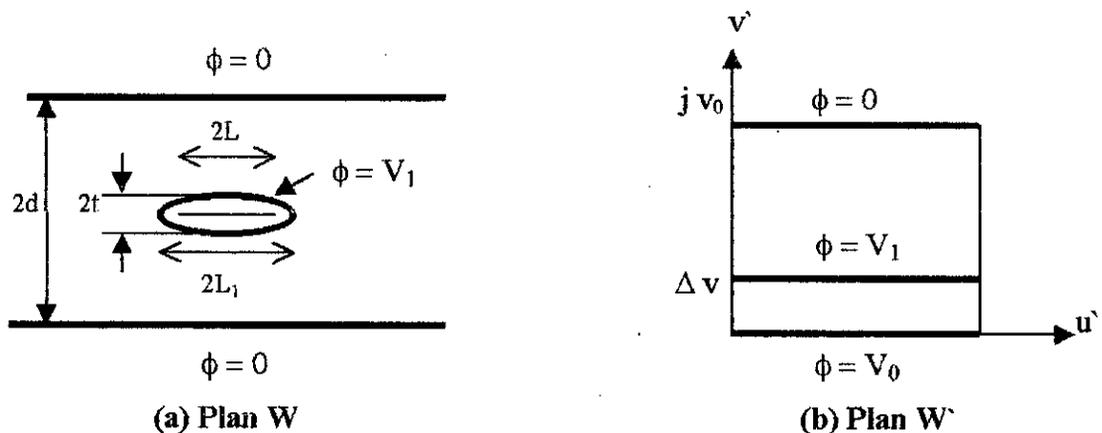


Fig. 2.10 Transformation d'un contour équipotentiel.

Les pertes par conduction sont calculées à l'aide de la relation suivante

$$\alpha_c = \frac{P_c}{2P} \tag{2.30}$$

P et  $P_c$  étant respectivement les puissances transmise et dissipée dans la ligne, définies par

$$p = \frac{V_0^2}{2Z_C} \quad (2.31)$$

$$P_c = \frac{1}{2} R_m \oint_w |J_s|^2 |dw| = \frac{1}{2} R_m Y \oint_w \left| \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|^2 |dw| \quad (2.32)$$

$V_0$  est le potentiel électrique sur le ruban,  $Y$  est l'admittance d'onde ( $Y = (\epsilon / \mu_0)^{1/2}$ ) et  $R_m$  la résistance surfacique ( $R_m = \pi f \mu_0 / \sigma_c$ )<sup>1/2</sup>.

Le gradient normal du potentiel  $\phi$  est donné par l'expression suivante

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial n} \right| = \left| \frac{\partial \phi}{\partial v'} \right| \left| \frac{dw'}{dw} \right| = \frac{\partial}{\partial v'} \left| \frac{V_1 v'}{v_0 - \Delta v} \right| \left| \frac{dw'}{dw} \right| = \frac{V_1}{v_0 - \Delta v} \left| \frac{dw'}{dw} \right| = \frac{V_0}{v_0} \quad (2.33)$$

La relation (2.32) devient alors

$$P_c = 2 R_m Y^2 \left( \frac{V_0}{v_0} \right)^2 \oint_w \left| \frac{dw'}{dw} \right| |dw'| = 2 R_m Y^2 \left( \frac{V_0}{v_0} \right)^2 I \quad (2.34)$$

L'évaluation de l'intégrale  $I$  (Cf. Annexe B), permet d'avoir l'expression finale de  $P_c$

$$P_c = \frac{R_m Y^2 V_0^2}{d} \left( \frac{2L}{d} + \frac{1}{\pi} \left( 4 \ln \frac{4d}{t} + 2\pi \frac{L}{d} \right) \right) \quad (2.35)$$

et le facteur d'atténuation  $\alpha_c$  s'écrit sous la forme

$$\alpha_c = \frac{v_0}{4d} \sqrt{\frac{\pi \epsilon}{\sigma_c}} \left( \frac{2L}{d} + \frac{1}{\pi} \left( 4 \ln \frac{4d}{t} + 2\pi \frac{L}{d} \right) \right) \quad (2.36)$$

## b2) Pertes diélectrique

Les pertes diélectriques sont évaluées par la relation générale suivante [13]

$$\alpha_d = \sigma_d \frac{\oint_s |\vec{E}|^2 ds}{4P_0} \quad (2.37)$$

où  $P_0$  est la puissance transmise dans le vide:  $P_0 = V_0^2 / 2 Z_{c0}$ , et  $\sigma_d$  la conductivité effective du milieu:  $\sigma_d = 2 \pi f \epsilon \operatorname{tg} \delta$ .

Le champ électrique est uniforme entre les deux plaques parallèles, (Fig. 2.9). Son module est égal à

$$|\vec{E}| = -\vec{\nabla}_t \phi = \sqrt{\left| \frac{\partial \phi}{\partial v'} \right|^2 + \left| \frac{\partial \phi}{\partial u'} \right|^2} = \left| \frac{\partial \phi}{\partial v'} \right| = \frac{\partial}{\partial v'} \left( -\frac{V_0}{v_0} v' + V_0 \right) \quad (2.38)$$

donc

$$\oint_s |\vec{E}|^2 ds = \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial \phi}{\partial v'} \right|^2 du' dv' = \frac{V_0^2}{v_0} \quad (2.39)$$

En utilisant ces résultats on peut écrire la constante d'atténuation  $\alpha_d$  sous la forme

$$\alpha_d = \frac{\pi f}{4} \epsilon_r \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \operatorname{tg} \delta \quad (2.40)$$

### 2.2.3. Méthode variationnelle

Cette méthode, en approximation quasi TEM, permet de calculer l'impédance caractéristique par l'intermédiaire de la capacité C, en donnant une limite supérieure et inférieure.

La limite supérieure de C est calculée à partir des variations de l'énergie électrique emmagasinée. Cependant la résolution du problème électrostatique en terme des distributions de charge et la manipulation des fonctions de Green donnent la limite inférieure de la capacité. Du fait que cette méthode donne une limite inférieure et supérieure l'erreur de calcul est minimisée.

#### 2.2.3.1. Expression variationnelle de la limite inférieure de $Z_c$

Considérons deux conducteurs (1,2) uniformes, de longueur infinie, orientés le long de l'axe z, et de sections transversales  $S_1$  et  $S_2$ . Le milieu diélectrique est homogène, isotrope de paramètres électriques  $\mu_0$  et  $\epsilon$  (Fig. 1.3).

L'énergie électrique emmagasinée dans les sections droites est donnée par [14]

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon \int_S |\vec{\nabla}_t \phi|^2 ds = \frac{1}{2} C V_0^2 \quad (2.41)$$

Pour montrer la stationnarité de cette expression [14], on suppose une erreur  $\delta\phi$  sur  $\phi$ , on aura

$$\frac{2}{\epsilon} (W_e + \delta W_e) = \int_S [\vec{\nabla}_t (\phi + \delta\phi)]^2 ds \quad (2.42)$$

ou encore

$$\frac{2}{\epsilon} \delta W_e = \int_S [2 \vec{\nabla}_t \phi \cdot \vec{\nabla}_t \delta\phi + (\vec{\nabla}_t \delta\phi)^2] ds \quad (2.43)$$

on a

$$\vec{\nabla}_t (\delta\phi \vec{\nabla}_t \phi) = \vec{\nabla}_t \delta\phi \vec{\nabla}_t \phi + \delta\phi \nabla_t^2 \phi = \vec{\nabla}_t \delta\phi \vec{\nabla}_t \phi$$

$$\text{car } \nabla_t^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

La première intégrale dans (2.43) s'écrit donc

$$\int_S \vec{\nabla}_t \cdot (\delta\phi \vec{\nabla}_t \phi) ds$$

En appliquant le théorème de la divergence, on obtient

$$\int_S \vec{\nabla}_t \cdot (\delta\phi \vec{\nabla}_t \phi) ds = \oint_C \delta\phi \vec{\nabla}_t \phi \cdot \vec{n} dl$$

qui se trouve toujours nulle, car  $\phi = 0$  sur le premier conducteur et  $\delta\phi = 0$  sur le deuxième conducteur (pas d'erreur sur  $V_0$ ). L'expression (2.41) sera alors

$$\frac{2}{\epsilon} \delta W_e = \int_S \vec{\nabla}_t (\delta\phi)^2 ds \quad (2.44)$$

$$C_{sup} = \frac{\epsilon \iint \vec{\nabla}_t \phi \cdot \vec{\nabla}_t \phi \, dx \, dy}{V_0^2} \tag{2.45}$$

Connaissant la distribution du potentiel scalaire  $\phi$ , il est possible de trouver la valeur de  $C_{sup}$ , en évaluant l'intégrale (2.45). Ainsi l'expression variationnelle de l'impédance caractéristique  $Z_C$  peut être déduite directement en utilisant la relation

$$Z_{c \, inf} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu_0}}{C_{sup}} \tag{2.46}$$

Pratiquement la forme fonctionnelle de la solution approximative est fonction des paramètres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ . Ces paramètres sont les coefficients du développement de  $\phi$  en série de Fourier. Le calcul de l'intégrale (2.45) permet d'avoir la valeur de la capacité  $C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  en fonction des paramètres  $\alpha_i$ . La meilleure solution de  $C$  correspond à la plus petite valeur produite par la variation des paramètres  $\alpha_i$ . Cette valeur est obtenue lorsque  $\partial C / \partial \alpha_i = 0$ .

En résumé si  $\phi_0$  est la solution exacte du problème,  $\phi(\alpha_1)$  la solution approchée, fonction d'un seul paramètre  $\alpha_1$  et  $\delta\phi$  la variation appliquée à  $\phi_0$ . La vraie valeur de  $C$  est obtenue lorsque  $\delta\phi = 0$ . Le tracé des valeurs de  $C$  en fonction de  $\phi_0 + \delta\phi$  est illustré sur la figure 2.11 la courbe en pointillés dans cette figure représente les variations de  $C$  en fonction de  $\alpha_1$ .

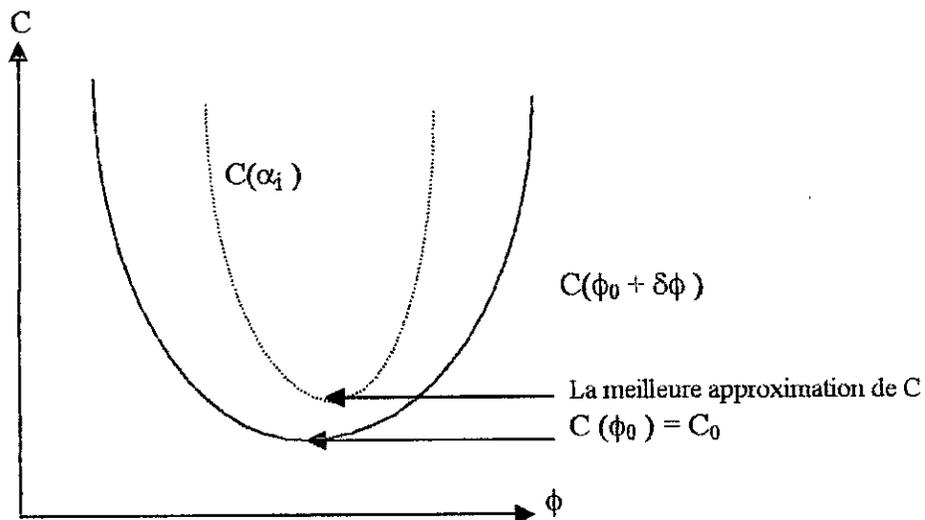


Fig. 2.11 Illustration de la valeur minimale obtenue par la méthode variationnelle [3].

2.2.3.2. Expression de la limite supérieure de  $Z_c$

Pour déterminer l'expression de la limite supérieure de l'impédance caractéristique, on considère le problème électrostatique de la figure 2.12. Les conducteurs (1,2) sont uniformes et parallèles à l'axe  $z$ . Le potentiel du conducteur (1) est nul, quant à celui du conducteur (2) est constant et égal à  $V_0$ . Une distribution de charge surfacique  $\rho_s$  existe au niveau du deuxième conducteur.

Il s'agit de trouver la fonction potentiel  $\phi$  qui vérifie l'équation de poisson

$$\vec{\nabla}_t^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon} \rho(x', y') \tag{2.47}$$

et les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} \phi = 0 & \text{sur le conducteur 1} \\ \phi = V_0 & \text{sur le conducteur 2} \end{cases} \tag{2.48}$$



Fig. 2.12 Illustration du problème électrostatique

Les coordonnées  $x', y'$  définissent la surface originale du conducteur  $S_2$ . Autrement dit  $x', y'$  sont les coordonnées des points de source correspondants au vecteur position  $r'$ . Ce vecteur donne la distance entre les points de la source et les points de l'espace où le potentiel est évalué. Pour résoudre l'équation (2.48), on donne la solution pour une charge unitaire située au point  $(x', y')$  en présence du conducteur (1). Cette charge peut être exprimée en terme de la fonction dirac  $\delta$  à deux dimensions

$$\delta(x', y') \begin{cases} = 0 & x \neq x', y \neq y' \\ \neq 0 & x = x', y = y' \end{cases}$$

Le problème revient donc à trouver une solution de l'équation

$$\nabla_t^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon} \delta(x - x') \delta(y - y') \tag{2.49}$$

qui vérifie les conditions (2.48).

Cette solution définit la fonction de Green du première espèce  $G(x, y / x', y')$  pour les limites données. La fonction potentiel  $\phi$  s'écrit alors [3]

$$\phi(x, y) = \oint_{S_2} G(x, y / x', y') \rho(x', y') dl' = V_0 \tag{2.50}$$

ou encore

$$V_0 \oint_{S_2} \rho(x, y) dl = V_0 Q = \iint_{S_2} G(x, y / x', y') \rho(x, y) \rho(x', y') dl dl' \tag{2.51}$$

avec  $Q$  est la charge totale sur le conducteur (2).

Puisque  $C = Q / V_0$ . La relation (2.51) devient

$$\frac{1}{C} = \frac{\iint_{S_2} G(x, y / x', y') \rho(x, y) \rho(x', y') dl dl'}{\left[ \oint_{S_2} \rho(x, y) dl \right]^2} \tag{2.52}$$

Cette expression en  $1 / C$  est stationnaire en  $\rho$ . En effet (2.52) conduit à

$$\delta\left(\frac{1}{C}\right)\left[\int_{S_2} \rho(x,y) dl\right]^2 + \frac{2}{C} \int_{S_2} \rho(x,y) dl \int_{S_2} \delta\rho(x,y) dl$$

$$= \iint_{S_2} G(x,y/x',y') (\rho(x',y') \delta\rho(x',y') + \rho(x,y) \delta\rho(x,y)) dl dl'$$
(2.53)

à cause de la symétrie de la fonction de Green, le deuxième terme dans (2.53) est égale à

$$2 \iint_{S_2} G(x,y/x',y') (\rho(x,y) \delta\rho(x,y)) dl dl'$$

On aura donc

$$\delta\left(\frac{1}{C}\right)\left[\int_{S_2} \rho(x,y) dl\right]^2 = 2 \int_{S_2} \delta\rho(x,y) dl \left[ \int_{S_2} G(x,y/x',y') (\rho(x,y)) dl' - \frac{1}{C} \int_{S_2} \rho(x,y) dl \right]$$
(2.54)

D'après la relation(2.51), on voit que la variation  $\delta(1/C)$  est nulle.

La relation (2.52) donne une limite inférieure de la capacité C car l'intégrale est toujours positive. Par suite l'impédance caractéristique  $Z_c$  qui est égale à  $(\mu_0\epsilon)^{1/2} / C$  représente la limite supérieure de  $Z_c$ .

Dans la résolution numérique, il faut choisir judicieusement les points  $M(x, y)$  et  $M(x', y')$ , pour bien connaître  $\rho$ , et procéder à une intégration analytique lorsque  $(x, y)$  est voisin de  $(x', y')$  car G varie en  $1/r$  [15] soit  $1/MM'$ , on prend alors  $\rho$  constant dans ce petit intervalle.

### 2.2.3.3. Etude d'une ligne triplaque avec ( $t \neq 0$ )

#### a) Formulation du problème

La structure de la figure 2.1 est supposée uniforme et infinie dans les deux directions x et z. Le ruban est un métal imparfait de conductivité finie  $\sigma_c$ . Le substrat diélectrique est supposée homogène, isotrope, avec des faibles pertes, de paramètres électriques  $\mu_0$  et  $\epsilon$ .

Dans cette section nous allons utiliser la théorie exposée ci-dessus pour trouver les caractéristiques de la ligne triplaque de la figure2.1.

#### b) Analyse [3,14]

##### b1) Détermination de l'impédance caractéristique

- Limite inférieure de  $Z_c$

Pour des raisons de symétrie il suffit de déterminer la distribution du champ dans un quart de la section transversale. La fonction potentiel  $\phi$  doit vérifier les conditions suivantes

$$\phi = 0 \quad \text{pour } y = 0 \quad (2.55a)$$

$$\phi = V_0 \quad \text{à l'intérieur du ruban.} \quad (2.55b)$$

$$\nabla_t^2 \phi = 0 \quad \text{dans les autres régions.} \quad (2.55c)$$

$$-E_x = \partial\phi/\partial x = 0 \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq a \quad (2.55d)$$

$$-E_y = \partial\phi/\partial y = 0 \quad y = d, \quad 0 < x \quad (2.55e)$$

$$\phi = 0 \quad \text{pour } y = 0 \quad (2.55a)$$

$$\phi = V_0 \quad \text{à l'intérieur du ruban.} \quad (2.55b)$$

$$\nabla_t^2 \phi = 0 \quad \text{dans les autres régions.} \quad (2.55c)$$

$$-E_x = \partial\phi/\partial x = 0 \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq a \quad (2.55d)$$

$$-E_y = \partial\phi/\partial y = 0 \quad y = d, \quad L \leq x \quad (2.55e)$$

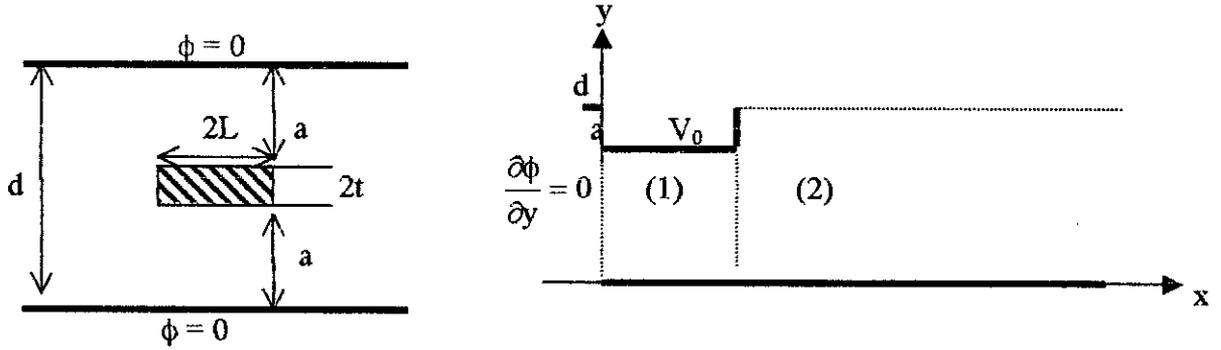


Figure 2.13 Ligne triplaque avec un conducteur rectangulaire.

Dans la région (1), le développement du potentiel  $\phi_1$  en série de Fourier vaut

$$\phi_1 = V_0 \frac{y}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \quad (2.56a)$$

et dans la région (2), le potentiel  $\phi_2$  est égal à

$$\phi_2 = \sum_{n=1,3}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{2d}y\right) e^{-\frac{n\pi}{2d}x} \quad (2.56b)$$

Les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  peuvent être théoriquement obtenus en utilisant la continuité du champ électrique et du potentiel en  $x = L$  et  $0 \leq y \leq a$ . La continuité du potentiel en  $x = L$  donne

$$V_0 \frac{y}{a} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}L\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = \sum_{n=1,3}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{2d}y\right) e^{-\frac{n\pi}{2d}L} \quad (2.57a)$$

et la continuité du champ électrique  $\vec{E}_x$  au point  $x = L$  donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{a}\right) a_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}L\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = - \sum_{n=1,3}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{2d}\right) b_n \sin\left(\frac{n\pi}{2d}y\right) e^{-\frac{n\pi}{2d}L} \quad (2.57b)$$

La solution rigoureuse de (2.57a) et (2.57b) est difficile à obtenir. Pour simplifier la méthode de résolution prenons  $\phi(L, y)$  sous la forme

$$\phi(L, y) = \begin{cases} \frac{V_0}{a}y + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) & y \leq a \\ V_0 & a \leq y \leq d \end{cases} \quad (2.58)$$

$$b_n = \frac{8V_0 d}{n^2 \pi^2 a} \sin\left(\frac{n\pi a}{2d}\right) e^{-\frac{n\pi}{2d}L} \quad (2.60)$$

Connaissant  $\phi$  et en utilisant l'équation (2.41), l'expression de l'énergie  $W_e$  s'écrit alors

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{V_0^2 L}{a} + \frac{8\varepsilon V_0^2 d^2}{\pi^3 a^2} S_0 \quad (2.61)$$

avec

$$S_0 = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2d} a\right)$$

Puisque  $W_e = C V_0^2 / 2$ , on peut déduire la capacité pour un quart de la ligne. Pour avoir la capacité totale on multiplie le résultat par 4, et l'expression finale de  $C$  sera alors

$$C_{\text{sup}} = 4\varepsilon \frac{L}{a} + 64 \frac{\varepsilon d^2}{\pi^3 a^2} S_0 \quad (2.62)$$

L'impédance caractéristique s'écrit sous la forme

$$Z_{c \text{ inf}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \left( \frac{4L}{a} + \frac{64 d^2 S_0}{\pi^3 a^2} \right)^{-1} \quad (2.63)$$

En pratique  $a \cong d$  car le conducteur central a une épaisseur très faible, donc la somme  $S_0$  est une série rapidement convergente.

Il est naturellement possible d'avoir une meilleure précision, en utilisant (2.58) et en calculant les coefficients  $c_n$  par la relation  $\partial\phi/\partial c_n = 0$ .

#### • Limite supérieure de $Z_c$

Cherchons la limite inférieure de  $C$ . Il faut donc trouver une solution du problème suivant

$$\begin{cases} \phi = 0 & y = 0, 2d \\ \phi \rightarrow 0 & |x| \rightarrow \infty \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\varepsilon} \delta(x-x') \delta(y-y') & \text{dans les autres régions} \end{cases} \quad (2.64)$$

La capacité linéique  $C$  est calculée à l'aide de la relation 2.52 (Cf. Section 2.2.3.2), où  $\rho(x, y)$  est la distribution de charge au centre du conducteur

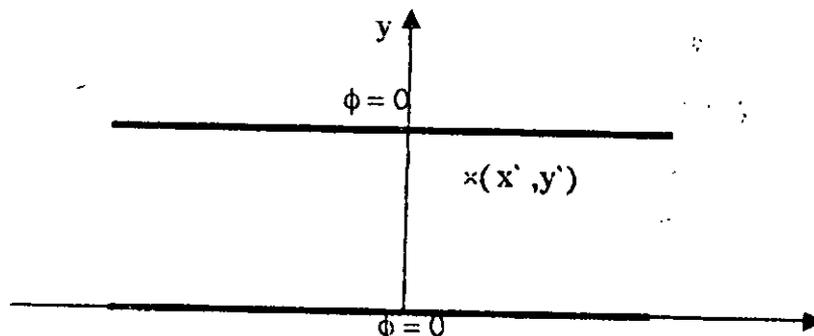


Fig. 2.13 Capacité linéaire entre deux plans parallèles infinis.

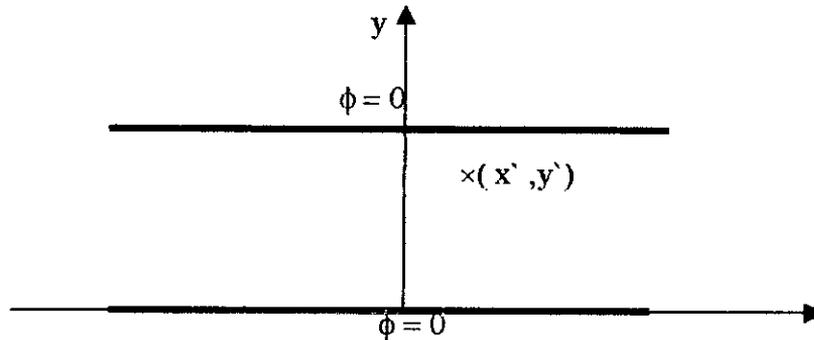


Fig. 2.14 Charge linéaire entre deux plans parallèles infinis.

La fonction de Green, solution du problème (2.64), est donnée par

$$G = \frac{1}{\pi \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2d} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2d} y'\right) e^{-\frac{n\pi}{2d} |x-x'|} \quad (2.65)$$

L'approximation la plus simple à faire est de prendre l'amplitude de  $\rho$  égale à l'unité. Puisque l'équation (2.52) dépend seulement de la forme fonctionnelle de  $\rho$ , son dénominateur vaut  $16(L+t)^2$ . Pour évaluer l'intégrale du numérateur sur  $x'$ ,  $y'$ , on intègre pour  $n = 1$  puis on fait la somme sur  $n$  variables. L'intégrale de  $-L$  à  $L$  est une somme de deux termes, un pour  $y' = d+t$  et l'autre pour  $y' = d-t$ .

D'après la relation (2.65), on remarque que la fonction de Green possède deux formes différentes, selon les valeurs de  $x'$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \sin \frac{n\pi y}{2d} \int_{-L}^x \left( \sin n\pi \frac{d+t}{2d} + \sin n\pi \frac{d-t}{2d} \right) e^{-n\pi x/2d} e^{n\pi x'/2d} dx' \\ & + \sin \frac{n\pi y}{2d} \int_x^L \left( \sin n\pi \frac{d+t}{2d} + \sin n\pi \frac{d-t}{2d} \right) e^{n\pi x/2d} e^{-n\pi x'/2d} dx' \\ & + \int_{d-t}^{d+t} \sin n\pi \frac{y}{2d} \sin n\pi \frac{y'}{2d} e^{-n\pi l/2d} \left( e^{-n\pi x/2d} + e^{n\pi x/2d} \right) dy' \end{aligned}$$

La fonction de Green qui correspond à  $x > x'$  est utilisée quand  $x' = -L$ , celle correspondant à  $x < x'$  est utilisée quand  $x' = L$  dans l'intégration sur  $y'$ .

L'évaluation finale de cette intégrale permet d'écrire la capacité  $C$  sous la forme

$$C_{\text{inf}} = \frac{\varepsilon \pi^3}{2d^2} \frac{(L+t)^2}{S_1 + S_2 - S_3 + S_4} \quad (2.66)$$

avec

$$S_1 = \frac{\pi l}{d} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\cos^2 n\pi(t/2d)}{n^2}$$

## b2) Calcul des pertes

## • Pertes par conduction

Les pertes de conduction sont évaluées à l'aide de la relation  $\alpha_c = 2 P_c / P$ , où  $P_c$  la puissance dissipée par effet joule dans les conducteurs. Elle peut être divisée en deux parties: une partie est absorbée dans le ruban central, notée par  $P_{c1}$ , l'autre dans les deux plans de masse, appelée  $P_{c2}$ .

$$P_c = P_{c1} + P_{c2} \quad (2.68)$$

Les puissances  $P_{c1}$  et  $P_{c2}$  sont calculées à l'aide des relations suivantes

$$P_{c1} = \frac{1}{2} R_m Y \oint_c \left| \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|^2 dl = \frac{1}{2} R_m Y \int_0^1 \left( \left| \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right|_{y=a} \right)^2 dx + \int_a^d \left( \left| \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right|_{x=L} \right)^2 dy$$

$$P_{c2} = \frac{1}{2} R_m Y^2 \left[ \int_0^1 \left( \left| \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right|_{y=0} \right)^2 dy + \int_1^\infty \left( \left| \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right|_{y=0} \right)^2 dy \right]$$

Les potentiels  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont donnés par les relations (2.56a) et (2.56b), on peut donc facilement obtenir les expressions de  $P_{c1}$  et  $P_{c2}$ .

$$P_{c1} = \frac{1}{2} R_m Y^2 \frac{V_0^2}{a^2} \left[ L + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{n\pi a}{2d} \left( t + \frac{d}{n\pi} \sin \frac{n\pi a}{d} \right) \right] \quad (2.69a)$$

$$P_{c2} = \frac{1}{2} R_m Y^2 \frac{V_0^2}{a^2} \left[ L + \frac{16d}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin^2 \frac{n\pi a}{2d} \right] \quad (2.69b)$$

En substituant (2.69a) et (2.69b) dans la relation donnant  $\alpha_c$ , on trouve

$$\alpha_c = R_m Y^2 Z_c \left[ 8 \frac{L}{a^2} + \frac{64t}{\pi^2 a^2} \sum_{1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 n\pi a / 2d}{n^2} + \frac{128d}{\pi^3 a^2} \sum_{1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin^2 \left( \frac{n\pi a}{2d} \right) \left( 1 + \cos \left( \frac{n\pi a}{2d} \right) \right) \right] \quad (2.70)$$

## • Pertes diélectrique

Les pertes diélectriques sont évaluées à l'aide de la relation (2.37). Pour calculer l'intégrale dans (2.37), il faut trouver le champ électrique dans les deux régions.

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_1| + |\vec{E}_2| \quad (2.71)$$

avec

$$|\vec{E}_1|^2 = \left( \left| \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right| \right)^2 + \left( \left| \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right| \right)^2$$

$$|\vec{E}_2|^2 = \left( \left| \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right| \right)^2 + \left( \left| \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right| \right)^2$$

Si on calcule les deux intégrales surfaciques associées aux deux champs, on obtient la relation donnant le facteur d'atténuation  $\alpha_d$

$$\alpha_d = 2\pi f Z_{C0} \operatorname{tg} \delta \left( \frac{L}{2a} + \sum_{1,3}^{\infty} \frac{8d^2}{n^3 \pi^3 a^2} \sin \frac{n\pi a}{2d} \right) \quad (2.72)$$

### 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, on a exposé deux méthodes d'analyse d'une ligne triplaque: la transformation conforme et la méthode variationnelle. L'intérêt de ce type de ligne est son indépendance vis à vis de la fréquence (jusqu'aux fréquences où elle fonctionne en guide d'ondes), la faiblesse de son rayonnement, l'éventail des impédances possible. Son principal inconvénient tient aux difficultés de connexions avec d'autres types de ligne et à la relative difficulté de sa réalisation. En plus, les champs se concentrent près des conducteurs, surtout de celui qui à la section la plus faible. La puissance que peut transmettre la ligne est limitée par l'existence de cette concentration. L'échauffement du conducteur intérieur limite également la puissance.

La ligne triplaque peut être employée sur une large bande de fréquence entre  $f = 0$  et l'apparition du premier mode TE qui correspond à une fréquence limite minimale donnée par [16]:

$$f_{TE} \text{ (GHZ)} = \frac{7.5}{d \sqrt{\epsilon_r}} \frac{L}{\left( \frac{L}{d} + \frac{\pi}{4} \right)}$$

# **CHAPITRE 3**

## **ETUDE DES LIGNES MICRORUBANS**

La ligne de transmission à base de microbandes est une technique d'actualité très utilisée par les concepteurs en télécommunication. Elle nous permet de réduire l'encombrement des circuits électroniques et d'atteindre des fréquences de travail très élevées s'échelonnant entre 1GHz et plusieurs dizaines de GHz.

### 3.1 Description de la ligne microruban

La ligne microruban est constituée par un ruban métallique déposé sur une plaque diélectrique, entièrement métallisée sur l'autre face (plan de masse). Elle est caractérisée par la permittivité relative du substrat  $\epsilon_r$ , par l'épaisseur  $h$  de celui-ci petite par rapport à la longueur d'onde à transmettre, par la largeur  $2w$  du ruban, enfin par l'épaisseur  $t$  du ruban.

Le milieu de propagation n'est donc pas homogène, une partie des lignes de champ est située dans le substrat, l'autre partie dans l'air. En toute rigueur la propagation ne peut se faire suivant le mode TEM. De ce fait nous avons à travailler avec des modes hybrides, c'est à dire des modes qui ont des composantes longitudinales.

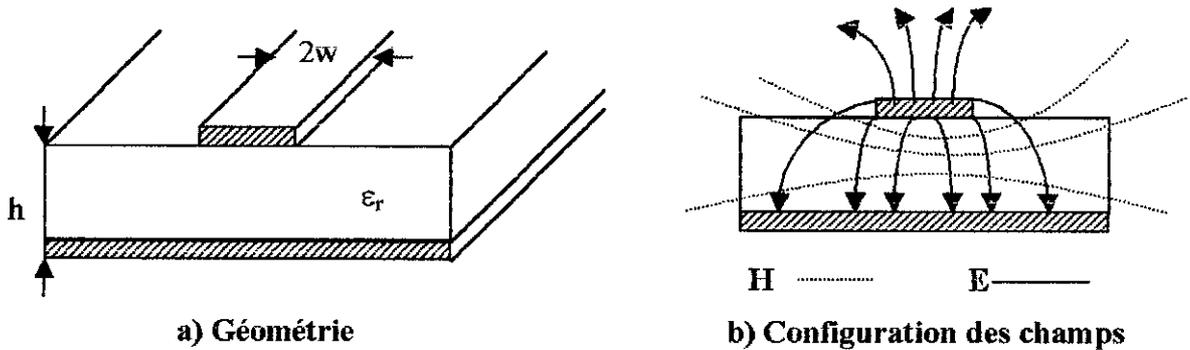


Fig. 3.1 Structure de la ligne microruban

Néanmoins, dans la mesure où les composantes longitudinales des champs sont beaucoup plus faibles que les composantes transverses, les propriétés TEM dominent et le mode hybride est considéré comme quasi TEM.

Au fur et à mesure que les fréquences augmentent, les composantes longitudinales deviennent plus importantes et les paramètres caractéristiques (impédance, vitesse de phase, etc.) s'écartent de leurs valeurs TEM.

D'autre part, on peut modéliser la ligne microruban par un ruban conducteur se trouvant dans un milieu uniforme de permittivité effective  $\epsilon_{eff}$  bordé par le plan de masse (Figure 3.2). La permittivité effective représente la permittivité que devrait avoir un milieu homogène dans lequel la vitesse de propagation serait identique à celle de la ligne microruban.

Tous ces paramètres mentionnés ci-dessus peuvent être approximés par des formules analytiques. Ces approximations sont calculées par Kirschning et Jansen dans les références [17,18].

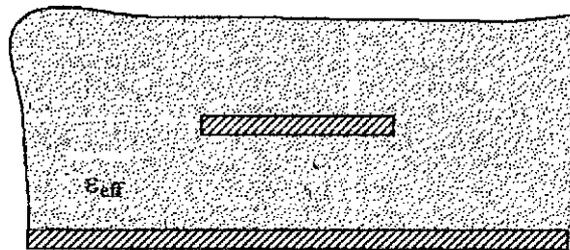


Fig. 3.2 Principe de l'approximation quasi TEM.

On peut démontrer à l'aide des équations de Maxwell, que la structure microruban ne peut supporter le mode TEM pur. En effet la continuité de la composante tangentielle du champ électrique le long de l'interface air - diélectrique donne

$$\vec{E}_x \Big|_{\text{diel}} = \vec{E}_x \Big|_{\text{air}} \quad (3.1)$$

En utilisant la deuxième équation de Maxwell, la relation (3.1) devient

$$\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}\right)_x \Big|_{\text{diel}} = \epsilon_r \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}\right)_x \Big|_{\text{air}} \quad (3.2)$$

La continuité de la composante normale du champ magnétique, et le développement de l'équation (3.2) donnent

$$\epsilon_r \frac{\partial H_z}{\partial y} \Big|_{\text{air}} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \Big|_{\text{diel}} = (\epsilon_r - 1) \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (3.3)$$

Puisque la permittivité relative  $\epsilon_r$  est différente de l'unité et  $H_y \neq 0$ , le terme de droit dans l'équation (3.3) n'est pas nul, et la composante longitudinale  $H_z$  du champ magnétique existe.

De la même façon, on peut démontrer l'existence de la composante longitudinale  $E_z$  du champ électrique.

### 3.2 Méthodes d'analyse

Il existe plusieurs méthodes d'analyse des lignes microrubans. Ces méthodes peuvent être subdivisées en trois classes comme le montre le tableau 3.1.

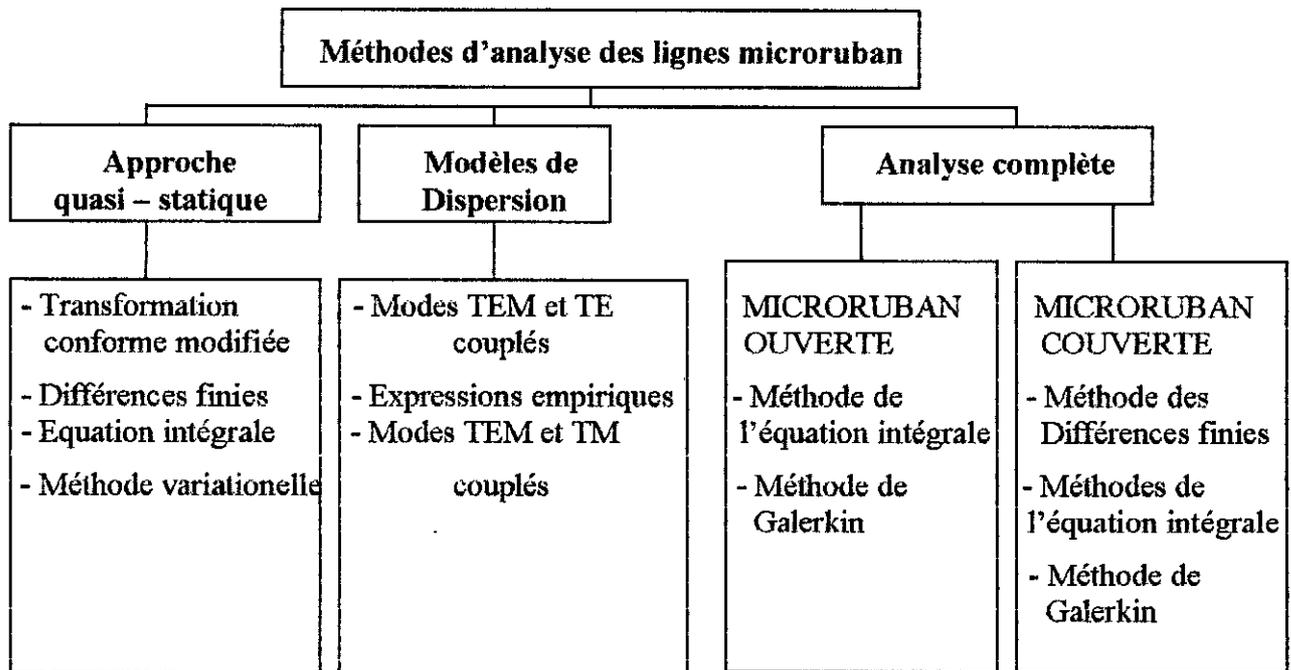


Tableau 3.1 Classification des méthodes d'analyse (D'après [13]).

- Les méthodes quasi statiques fondées sur l'approximation TEM du mode de propagation. Les caractéristiques de la ligne sont calculées à partir de la capacité et l'inductance électrostatiques de la structure. Cette analyse sert à modéliser les circuits basses fréquences (inférieure à la bande X).
- Le deuxième groupe est appelé les modèles de dispersion. Les paramètres du modèle sont déterminés, de telle façon que leurs expressions finales s'accordent avec le comportement dispersif expérimental de la ligne.
- Des méthodes qui tiennent compte du mode hybride dites méthodes d'analyse complète (Fullwave Analysis). Elles sont employées pour déterminer les propriétés dispersives de la ligne microruban utilisée dans des circuits hautes fréquences.

Nous allons développer dans ce qui suit deux méthodes d'analyse. La première pour une étude quasi statique (méthode variationnelle). La seconde sert à spécifier le comportement dispersif de la ligne (méthode spectrale).

### 3.2.1. Analyse quasi statique

#### 3.2.1.1. Paramètres statiques

Dans l'analyse quasi statique le mode de propagation est approximé en un mode TEM, la constante de propagation et l'impédance caractéristique sont déterminées en terme de l'inductance et la capacité par unité de longueur.

Si la ligne était située dans le vide. En appliquant la théorie classique étudiée, on écrirait sa constante de propagation et son impédance caractéristique comme étant

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \omega \sqrt{L_0 C_0} \quad (3.4a)$$

$$Z_{c0} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (3.4b)$$

$L_0$  et  $C_0$  sont les constantes linéiques.

Supposons la ligne, perturbée par l'introduction d'un diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_r$ . Nous pouvons calculer sa nouvelle constante de propagation et sa nouvelle impédance caractéristique, toujours par la théorie classique en mode TEM. L'introduction du diélectrique, modifie la capacité et non l'inductance, car le diélectrique n'a pas d'effet sur les variations du champ magnétique en basses fréquences. La nouvelle constante de propagation est

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C} = \sqrt{\frac{C}{C_0}} k_0 = \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}} k_0 \quad (3.5)$$

et la nouvelle impédance caractéristique s'écrit

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C}} = \frac{\sqrt{L_0/C_0}}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}} = \frac{Z_{c0}}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}} \quad (3.6)$$

où  $\epsilon_{\text{eff}} = C/C_0$  est la constante diélectrique effective.

L'impédance caractéristique et la constante diélectrique effective dépendent seulement de la permittivité du diélectrique et de la géométrie de la ligne.

Comme le montre les relations précédentes, la ligne sera caractérisée si la capacité linéique  $C$  est connue.

Dans cette partie une approche analytique, basée sur la transformée de Fourier et les techniques variationnelles est employée pour le calcul de la limite supérieure et inférieure de la capacité linéique  $C$ . Cette méthode permet d'avoir une meilleure précision en donnant ces deux limites.

#### 3.2.1.2. Analyse d'une ligne microruban ouverte par la méthode variationnelle

##### a) Formulation du problème

Considérons la ligne microruban de la figure 3.3. L'épaisseur du ruban est supposée négligeable. Les conducteurs utilisés sont supposés parfaits et le diélectrique caractérisé par ses paramètres électriques ( $\epsilon_r, \mu_r$ ) est homogène, isotrope et sans pertes.

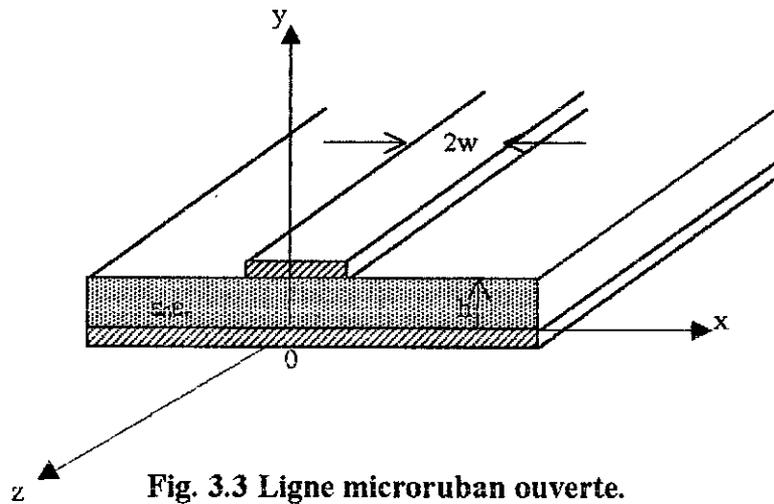


Fig. 3.3 Ligne microruban ouverte.

b) Analyse

b1) Limite supérieure de la capacité [19]

Pour trouver la limite supérieure de la capacité C, on démarre de l'expression de l'énergie emmagasinée dans les sections transversales, donnée par l'équation (1.11). Tout d'abord il faut déterminer les distributions du potentiel dans les deux régions (air, diélectrique).

On note par  $\phi(x, y)$  la distribution du potentiel scalaire dans la ligne, et  $V(x)$  le potentiel statique au niveau de l'interface air - diélectrique. Les transformées de Fourier de ces deux grandeurs sont données par

$$\tilde{\phi}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, y) e^{j\xi x} dx \tag{3.7a}$$

$$\tilde{V}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) e^{j\xi x} dx \tag{3.7b}$$

Le potentiel statique  $\phi(x, y)$  vérifie l'équation de Laplace dans le plan x, y. Donc sa transformée  $\tilde{\phi}(\xi, y)$  satisfait l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\left( -\xi^2 + \frac{d^2}{dy^2} \right) \tilde{\phi}(\xi, y) = 0 \tag{3.8}$$

*et de conti*

plus les conditions aux limites, formulées dans le domaine spectral

$$\text{à } y = 0 \quad \tilde{\phi}(\xi, y) = 0 \tag{3.9a}$$

$$\text{à } y = h \quad \tilde{\phi}(\xi, h^+) = \tilde{\phi}(\xi, h^-) \tag{3.9b}$$

$$\text{à } y = \infty \quad \tilde{\phi}(\xi, \infty) = 0 \tag{3.9c}$$

Les signes (+) et (-) indiquent respectivement les deux régions (air et diélectrique).

La résolution du problème de Dirichlet, mentionné par l'équations (3.8) et les conditions aux limites (3.9), donne l'expression algébrique du potentiel  $\tilde{\phi}(\xi, y)$

$$\tilde{\phi}(\xi, y) = \begin{cases} \tilde{V}(\xi) \frac{\sinh |\xi| y}{\sinh |\xi| h} & y \leq h \\ \tilde{V}(\xi) e^{|\xi|(y-h)} & y \geq h \end{cases} \quad (3.10)$$

Dans le domaine spatial la forme analytique du potentiel  $\phi(x, y)$  sera très compliquée. L'avantage principal de travailler dans le domaine spectral est de simplifier les expressions algébriques des potentiels.

La seconde étape de l'analyse consiste à calculer l'énergie électrique  $W_e$  stockée dans la structure, donnée par

$$W_e = W_{e1} + W_{e2} \quad (3.11)$$

$W_{e1}$  est l'énergie emmagasinée dans le diélectrique écrit comme suit

$$W_{e1} = \frac{1}{2} \varepsilon \iint \vec{E}_t \cdot \vec{E}_t^* ds = \frac{1}{2} \varepsilon \int_0^{h+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\vec{\nabla}_t \phi)^2 dx dy \quad (3.12)$$

En appliquant la première identité de Green

$$\iint (\vec{\nabla}_t \phi)^2 ds = \oint \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dl - \iint \nabla_t^2 \phi ds$$

et en utilisant l'égalité de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \psi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}(\xi) \tilde{\psi}^*(\xi) d\xi$$

on trouve

$$W_{e1} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}(\xi, y) \Big|_{y=h} \frac{\partial \tilde{\phi}^*(\xi, y)}{\partial y} \Big|_{y=h} d\xi \quad (3.13)$$

ou encore

$$W_{e1} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{V}(\xi)|^2 |\xi| \coth |\xi| h d\xi \quad (3.14)$$

$W_{e2}$  est l'énergie emmagasinée dans la deuxième région (air). Elle est donnée par

$$W_{e2} = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{V}(\xi)|^2 |\xi| d\xi \quad (3.15)$$

L'expression finale de l'énergie totale  $W_e$  sera alors

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{V}(\xi)|^2 |\xi| (1 + \varepsilon_r \coth |\xi| h) d\xi \quad (3.16)$$

Finalement la limite supérieure de la capacité est évaluée par la relation

$$C_{\text{sup}} = \frac{\epsilon_0}{2\pi V_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{V}(\xi)|^2 |1 + \epsilon_r \coth |\xi|h| d\xi \quad (3.17)$$

où  $V_0$  le potentiel statique sur le ruban conducteur.

Connaissant la distribution du potentiel  $V(x)$  au niveau de l'interface air - diélectrique, on peut évaluer numériquement l'intégrale (3.17), donnant la valeur de la capacité  $C_{\text{sup}}$ .

### b2) Limite inférieure de la capacité [20]

L'expression variationnelle de la limite inférieure de la capacité  $C$  est donnée par la relation

$$\frac{1}{C} = \frac{\int_S \rho(x, y) \phi(x, y) dl}{Q^2} \quad (3.18a)$$

$$\text{avec } Q = \int_S \rho(x, y) dl \quad (3.18b)$$

Les intégrales dans (3.18a) et (3.18b) sont prises sur toutes les surfaces conductrices où la charge  $\rho(x, y)$  est distribuée. Pour une épaisseur du ruban infiniment petite, la distribution de charge est donnée comme étant

$$\rho(x, y) = f(x) \delta(y - h) \quad (3.19)$$

$\delta(y - h)$  est la fonction de Dirac, et  $f(x)$  est une fonction paire.

Le potentiel  $\tilde{\phi}(\xi, y)$  à  $y = h$ , solution de l'équation (3.8), vérifiant les conditions (3.9), plus la relation

$$\frac{d}{dy} \tilde{\phi}(\xi, h^+) = \epsilon_r \frac{d}{dy} \tilde{\phi}(\xi, h^-) \quad (3.20)$$

est donnée par

$$\tilde{\phi}(\xi, h) = \frac{\tilde{f}(\xi)}{\epsilon_0 |\xi| (1 + \epsilon_r \coth |\xi|h)} \quad (3.21)$$

Puisque l'épaisseur du ruban est négligeable, on peut écrire l'expression variationnelle (3.18a) sous la forme

$$\frac{1}{C} = \frac{\int_{-w}^w f(x) \phi(x, h) dx}{\left( \int_{-w}^w f(x) dx \right)^2} \quad (3.22)$$

qui peut être formulée dans le domaine spectral, à l'aide de l'égalité de Parseval comme suit

$$\frac{1}{C_{\text{inf}}} = \frac{1}{\pi \epsilon_0 Q^2} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{f}(\xi)}{\xi (1 + \epsilon_r \coth (\xi h))} d\xi \quad (3.23)$$

La fonction  $f(x)$  étant donnée, on peut donc facilement évaluer la capacité  $C_{\text{inf}}$ .

### 3.2.2. Méthode spectrale

#### 3.2.2.1. Généralités

En haute fréquences, la propagation dans la ligne microruban présente des dispersions dues au fait que la structure est inhomogène. Par conséquent, l'approximation quasi -TEM n'est plus applicable, et les caractéristiques de la ligne sont déterminées d'une façon plus rigoureuse. Denlinger [21] était le premier qui a traité ce problème, par les équations intégrales. Dans cette méthode, la précision est liée à l'approximation faite sur la distribution du courant dans les conducteurs. La méthode spectrale intervient pour éliminer cette difficulté par l'introduction de la solution de Galerkin. Cette méthode a subi par la suite, des améliorations concernant les algorithmes, la précision et le temps de calcul. Elle est devenue très utile dans l'analyse des lignes planaires et certaines classes de composantes passives, essentiellement utilisée pour évaluer la constante de propagation, les courants de surface, et l'impédance caractéristique.

L'efficacité numérique de la méthode Galerkin est due à l'utilisation des formalismes mathématiques. Ceci introduit des limitations, par rapport à plusieurs méthodes numériques intensives [22]. La méthode spectrale est applicable en posant quelques restrictions par rapport au cas réel:

- Le plan de masse et les couches diélectriques s'étendent à l'infini.
- Les conducteurs (plan de masse et ruban) sont infiniment minces et parfaitement conducteurs.
- Les matériaux diélectriques employés sont isotropes, homogènes et non magnétiques.
- Les discontinuités dans le diélectrique et dans les conducteurs ne sont pas considérées.

Dans la méthode spectrale, la fonction de Green et les conditions aux limites sont formulées dans le domaine des transformées. L'équation intégrale est aussi résolue dans le domaine spectral. L'avantage de cette méthode est que la fonction de Green est donnée sous forme algébrique relativement simple par rapport à la fonction de Green spatiale.

Nous allons développer dans la section suivante la méthode spectrale afin d'évaluer les propriétés dispersives d'une ligne microruban ouverte.

#### 3.2.2.2. Analyse d'une ligne microruban ouverte par la méthode spectrale

##### a) Evaluation de la constante de propagation $\beta$

Le mode naturel de propagation dans la structure de la figure 3.3, est un mode hybride (mode LSE ou mode LSM). Les équations caractérisant les modes LSE et LSM sont données par [3]:

$$\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a}_y \psi_h(x, y, z) \quad \text{mode LSE} \quad (3.24a)$$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a}_y \psi_e(x, y, z) \quad \text{mode LSM} \quad (3.24b)$$

On définit les fonctions  $f$  et  $g$ , transformées de Fourier des potentiels scalaires électrique  $\psi_e(x, y, z)$  et magnétique  $\psi_h(x, y, z)$ , comme suit

$$e^{-j\beta z} f(y, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\xi x - j\beta z} \psi_h(x, y) dx \quad (3.25)$$

$$e^{-j\beta z} g(y, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\xi x - j\beta z} \psi_e(x, y) dx \quad (2.26)$$

Les fonctions  $f$  et  $g$  vérifient les deux équations suivantes

$$\left[ \frac{d^2}{dy^2} + (\epsilon_r k_0^2 - \gamma^2) \right] \begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix} = 0 \quad 0 \leq y < h \quad (3.27a)$$

$$\left[ \frac{d^2}{dy^2} + (k_0^2 - \gamma^2) \right] \begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix} = 0 \quad y > h \quad (3.27b)$$

avec  $\gamma^2 = \xi^2 + \beta^2$ .

Le ruban étant un conducteur parfait, les conditions aux limites s'écrivent alors sous la forme

$$E_x = E_z = 0 \quad \text{sur le ruban, } -w \leq x \leq +w \quad (3.28a)$$

$$H_x^+ - H_x^- = -J_z \quad y = h, \quad -w \leq x \leq +w \quad (3.28b)$$

$$H_z^+ - H_z^- = J_x \quad y = h, \quad -w \leq x \leq +w \quad (3.28c)$$

$J_x$  et  $J_z$  sont respectivement les densités de courant surfacique suivant  $x$  et  $z$ . Le symbole (-) correspond à la région inférieure (diélectrique), et le symbole (+) correspond à la région supérieure (air).

En utilisant les équations de Maxwell, on trouve

$$E_x = -\frac{\partial \psi_h}{\partial z} \quad (3.29a)$$

$$E_z = \frac{\partial \psi_h}{\partial x} \quad (3.29b)$$

$$j\xi \mu_0 H_x = -\frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (3.29c)$$

$$j\xi \mu_0 H_y = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (3.29d)$$

$$j\xi \mu_0 H_z = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (3.29e)$$

La fonction  $f$ , solution de (3.27), doit vérifier les conditions aux limites et de continuité. Sa forme générale est donnée par [3]

$$f(y, \xi) = \begin{cases} A(\xi) \sin(l y) & y \leq h \\ A(\xi) \sin(l h) e^{-p(y-h)} & y \geq h \end{cases} \quad (3.30)$$

avec  $l^2 = \epsilon_r k_0^2 - \gamma^2$  et  $p^2 = \gamma^2 - k_0^2$ .

Nous suivons la même procédure pour le mode LSM, à partir des équations de Maxwell, on obtient

$$H_x = -\frac{\partial \psi_e}{\partial z} \quad (3.31a)$$

$$H_z = \frac{\partial \psi_e}{\partial x} \quad (3.31b)$$

$$j\xi \epsilon_0 \epsilon E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (3.31c)$$

$$j\xi \epsilon_0 \epsilon_r E_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (3.31d)$$

$$j\xi \epsilon_0 \epsilon_r E_z = -\frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (3.31e)$$

En utilisant les conditions aux limites et de continuité, ainsi que les équations (3.27), il est possible d'écrire  $g$  sous la forme [3]

$$g(y, \xi) = \begin{cases} B(\xi) \cos(\xi y) & y < h \\ \frac{1}{\epsilon_r p} B(\xi) \sin(\xi h) e^{-p(y-h)} & y > h \end{cases} \quad (3.32)$$

Si on passe au domaine spectral les expressions (3.28b) et (3.28c) seront

$$\tilde{H}_x^+ - \tilde{H}_x^- = -\tilde{J}_z \quad (3.33a)$$

$$\tilde{H}_z^+ - \tilde{H}_z^- = +\tilde{J}_x \quad (3.33b)$$

En exprimant les champs magnétiques  $\tilde{H}_x^\pm$  et  $\tilde{H}_z^\pm$  en fonction de  $f$  et  $g$ , il est possible d'évaluer les densités de courant  $\tilde{J}_x$  et  $\tilde{J}_z$ .

La présence du ruban permet de coupler les modes LSE et LSM, en utilisant les équations (3.29) et (3.31), les expressions des composantes du champ électromagnétique s'écrivent *l'parme*

$$\tilde{H}_x = \frac{\xi}{k_0 Z_0} \frac{df}{dy} + j\beta g \quad (3.34a)$$

$$\tilde{H}_y = \frac{j}{k_0 Z_0} \left\{ \xi^2 + \beta^2 \right\} f \quad (3.34b)$$

$$\tilde{H}_z = \frac{\beta}{k_0 Z_0} \frac{df}{dy} - j\xi g \quad (3.34c)$$

$$\tilde{E}_x = -\frac{\xi Z_0}{\epsilon_r k_0} \frac{dg}{dy} + j\beta f \quad (3.34d)$$

$$\tilde{E}_y = -j \frac{Z_0}{\epsilon_r k_0} (\xi^2 + \beta^2) g \quad (3.34e)$$

$$\tilde{E}_z = +\frac{\beta Z_0}{\epsilon_r k_0} \frac{dg}{dy} - j\xi f \quad (3.34f)$$

Pour déterminer les expressions de  $A(\xi)$  et de  $B(\xi)$ , on utilise les relations (3.33), qui donnent

$$A(\xi) = k_0 Z_0 \frac{A'(\xi)}{p \sin(\xi h) + 1 \cos(\xi h)} \quad (3.35a)$$

$$B(\xi) = \frac{B'(\xi)}{\cos(\xi h) - \frac{1}{\epsilon_r p} \sin(\xi h)} \quad (3.35b)$$

avec

$$A'(\xi) = \frac{\xi \tilde{J}_z - \beta \tilde{J}_x}{\beta^2 + \xi^2} \quad (3.36a)$$

$$B'(\xi) = -\frac{j(\beta \tilde{J}_z + \xi \tilde{J}_x)}{\beta^2 + \xi^2} \quad (3.36b)$$

**Solution de Galerkin**

La solution de Galerkin nécessite la détermination de l'équation caractéristique. Généralement les champs électrique et magnétique sont liés aux fonctions de Green dyadiques par les relations suivantes

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{v'} \vec{G}_e(\vec{r}/\vec{r}') \cdot \vec{J}_s(\vec{r}') dv' \tag{3.37a}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \int_{v'} \vec{G}_h(\vec{r}/\vec{r}') \cdot \vec{J}_s(\vec{r}') dv' \tag{3.37b}$$

$\vec{G}_e$  et  $\vec{G}_h$  sont respectivement les fonctions de Green dyadiques électrique et magnétique.

$\vec{J}_s$  est la densité de courant surfacique ;

$\vec{r}$  est le point observateur ;

$\vec{r}'$  est le Point source.

Donc nous pouvons décrire un problème de champ électromagnétique au moyen d'une entrée ou excitation, d'une fonction de transfert et d'une sortie (Fig. 3.4). La fonction de transfert s'identifie à la réponse impulsionnelle du système.

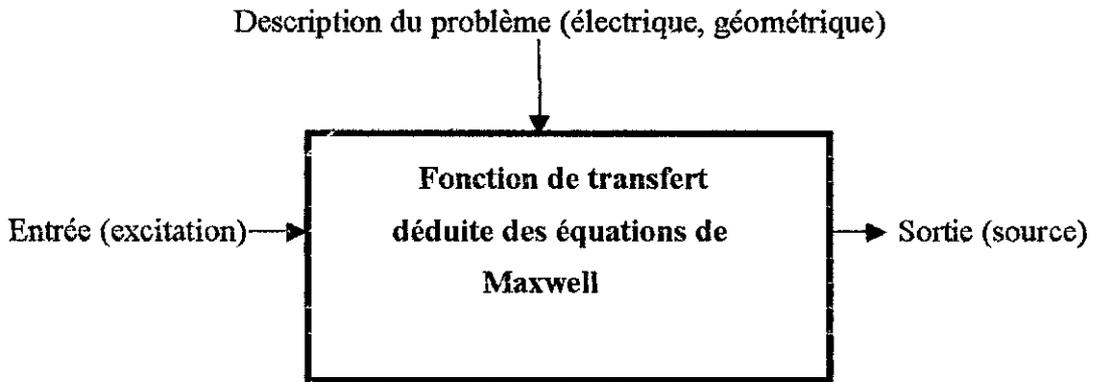


Fig. 3.4 La fonction de transfert électromagnétique[23].

Ces fonctions de Green dyadiques ne dépendent que de la structure. Elles sont totalement indépendantes de l'excitation.

On utilise souvent les fonctions de Green dyadiques spectrales, qui sont une représentation spectrale des fonctions de Green dyadiques, nous pouvons aussi parler de représentation aux valeurs propres des fonctions de Green. Dans le domaine spectral, les relations entre le champ et le courant s'écrivent de la forme suivante

$$\vec{E}(\xi) = \int \vec{G}_e(\xi) \cdot \vec{J}_s(\xi) d\Gamma' \tag{3.38a}$$

$$\vec{H}(\xi) = \int \vec{G}_h(\xi) \cdot \vec{J}_s(\xi) d\Gamma' \tag{3.38b}$$

Si  $\vec{J}_s$  est horizontale alors

$$\vec{E}(\xi) = \vec{G}_e(\xi) \cdot \vec{J}_s(\xi) \tag{3.39a}$$

$$\vec{H}(\xi) = \vec{G}_h(\xi) \cdot \vec{J}_s(\xi) \tag{3.39b}$$

En effet, la fonction de Green dyadique caractérise un système donné. Dans le domaine spatial, elle représente la réponse (le champ) d'un système à un courant localisé en un point (x, y, z) [15].

En d'autres termes, pour un courant quelconque, on pourra obtenir le champ correspondant en faisant la convolution [24] entre ce courant et la réponse impulsionnelle (fonction de Green). Dans le domaine spectral, la double intégrale qui constituait l'opération de convolution va se simplifier en un simple produit (on comprend alors la raison pour laquelle il est préférable de travailler dans le domaine spectral).

Pour la ligne microruban ouverte (Fig. 3.3), la solution du champ électrique transverse dans le domaine spatial peut être exprimée comme suit (en utilisant 3.37a)

$$\vec{E}_t(x, y) = \int_{-w}^{+w} \vec{G}_e(x - x', y, h) \vec{J}(x') dx' \tag{3.40}$$

L'étape suivante consiste à décomposer les densités de courant  $J_x$  et  $J_z$  en une série de fonctions ( $\phi_{xn}$ ,  $\phi_{zn}$ ), dites fonctions de base données par

$$J_x(x) = \sum_{n=1}^N I_{xn} \phi_{xn}(x) \tag{3.41a}$$

$$J_z(x) = \sum_{n=1}^N I_{zn} \phi_{zn}(x) \tag{3.41b}$$

Le choix des fonctions de base est une étape cruciale lors de l'utilisation de la méthode spectrale. En général, on choisit un ensemble de fonctions permettant de représenter avec meilleure précision la fonction à déterminer tout en minimisant le temps de calcul. Théoriquement, il existe une panoplie de fonctions utilisées en tant que fonctions de base. En pratique, un nombre restreint est utilisé [25]. Le choix d'un tel ou tel ensemble est fortement dépendant du problème physique. Nous pouvons penser que si on augmentait le degré des fonctions de base, la précision qu'on atteindrait serait meilleure, mais le problème alors est de savoir si on aura amélioré le rapport précision/temps de calcul, chose qui n'est pas évidente.

Dans notre cas, on choisit les fonctions de base suivantes

$$\phi_{xn}(x) = \frac{T_{2n}(x/w)}{\sqrt{1 - (x/w)^2}} \quad \text{et} \quad \phi_{zn} = j \sqrt{1 - (x/w)^2} U_{2n}(x/w)$$

où  $T_{2n}$  est le polynôme de Chebyshev du premier ordre et  $U_{2n}$  est le polynôme de Chebyshev du second ordre.

Les transformées de Fourier associées à ces deux fonctions sont données par

$$\phi_{xn}(\xi) = 2(-1)^n J_{2n}(w\xi) \quad \text{et} \quad \phi_{zn}(\xi) = (-1)^n \frac{4n\pi}{\xi} J_{2n}(w\xi)$$

$J_{2n}$  est la fonction de Bessel du première espèce.

Substituons les décompositions (3.41a) et (3.41b) dans (3.40), et appliquons la condition au limite ( $E_t = 0$ ), sur le ruban à  $y = h$ , puis passons au domaine des transformés à l'aide du théorème de Parseval, on obtient le système suivant

$$\sum_{n=1}^N I_{xn} K_{mn}^{(1,1)} + \sum_{n=1}^N I_{zn} K_{mn}^{(1,2)} = 0 \tag{3.42a}$$

$$\sum_{n=1}^N I_{xn} K_{mn}^{(2,1)} + \sum_{n=1}^N I_{zn} K_{mn}^{(2,2)} = 0 \tag{3.42b}$$

$m = 1, 2, 3, \dots, N.$

avec

$$K_{mn}^{(1,1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}_{xm}(\xi) \tilde{G}_{xx}(\xi) \tilde{\phi}_{xn}(\xi) d\xi \quad (3.43a)$$

$$K_{mn}^{(1,2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}_{xm}(\xi) \tilde{G}_{xz}(\xi) \tilde{\phi}_{zn}(\xi) d\xi \quad (3.43b)$$

$$K_{mn}^{(2,1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}_{zm}(\xi) \tilde{G}_{zx}(\xi) \phi_{xn}(\xi) d\xi \quad (3.43c)$$

$$K_{mn}^{(2,2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}_{zm}(\xi) \tilde{G}_{zz}(\xi) \tilde{\phi}_{zn}(\xi) d\xi \quad (3.43d)$$

Les coefficients  $K_{mn}^{(i,j)}$  ( $i,j=1,2$ ) sont donnés dans l'annexe C.

En utilisant les équations (3.34d) et (3.34e), et les solutions de  $A'(\xi)$  et  $B'(\xi)$ , la fonction de Green dyadique à  $y = h$ , s'écrit

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\xi) = & \frac{j Z_0 \sin lh}{k_0 [p \sin lh + l \cos lh] [\epsilon_r p \cos lh - l \sin lh]} \\ & \times \left\{ \tilde{a}_x \tilde{a}_x \left[ (\xi^2 - k^2) p \cos lh - (\xi^2 - k_0^2) \sin lh \right] \right. \\ & + (\tilde{a}_x \tilde{a}_z + \tilde{a}_z \tilde{a}_x) [\xi \beta (p \cos lh - l \sin lh)] \\ & \left. + \tilde{a}_z \tilde{a}_z \left[ (\beta^2 - k^2) p \cos lh - (\beta^2 - k_0^2) \sin lh \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.44)$$

avec  $k^2 = \epsilon_r k_0^2$ ,  $l^2 = k^2 - \xi^2 - \beta^2$ ,  $p^2 = \beta^2 + \xi^2 - k_0^2$

Cette méthode génère  $2N$  équations en  $I_{xm}$  et  $I_{zn}$ . Le système (3.42) est résolu pour une constante de propagation  $\beta$  correspondante à une fréquence  $f$ . La procédure consiste à trouver la valeur de  $\beta$  qui annule le déterminant du système, chaque racine en  $\beta(\omega)$  donne un mode. La propriété dispersive d'une ligne microruban est liée donc à la valeur de  $\beta$  trouvée. Une fois  $\beta$  est calculée, il est possible de déterminer les valeurs de la constante diélectrique effective  $\epsilon_{\text{eff}}$  et la vitesse de phase  $V_p$ , en utilisant les deux relations suivantes

$$\epsilon_{\text{eff}} = \frac{\beta^2}{k_0^2} \quad (3.45a)$$

$$V_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (3.45b)$$

### b) Evaluation de l'impédance caractéristique $Z_c$ :

Pour calculer l'impédance caractéristique de ligne microruban (Fig. 3.3) par la méthode spectrale, il faut tout d'abord déterminer la valeur de la constante de phase  $\beta$ . Nous allons suivre l'extension de la méthode spectrale pour évaluer  $Z_c$ .

Il existe trois définitions pour l'impédance caractéristique d'une ligne microruban [26]. En négligeant le courant transverse, l'impédance est exprimée comme suit

$$Z_c = \frac{P_{\text{moy}}}{I_0^2} \quad (3.46)$$

$I_0$  est le courant total sur le ruban suivant la direction  $z$ , il est donné par la relation

$$I_0 = \int_{-w}^{+w} J_z(x) dx \quad (3.47a)$$

$P_{\text{moy}}$  est la puissance moyenne obtenue à partir du vecteur de Poynting

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{2} \text{Re} \iint_s (E_x H_y^* - E_y H_x^*) dx dy \quad (3.47b)$$

Les champs transverses sont obtenus à l'aide des relations (3.29a), (3.29c), (3.29d), (3.31a), (3.31c) et (3.31d). En appliquant le théorème de Parseval, l'expression (3.47b) devient

$$\begin{aligned} P_{\text{moy}} &= \frac{1}{4\pi} \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [E_x(\xi, y) H_y^*(\xi, y) - E_y(\xi, y) H_x^*(\xi, y)] dy d\xi \\ P_{\text{moy}} &= \frac{1}{2\pi} \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} [E_x(\xi, y) H_y^*(\xi, y) - E_y(\xi, y) H_x^*(\xi, y)] dy d\xi \\ P_{\text{moy}} &= \frac{1}{2\pi} \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} (Eh_1 + Eh_2) d\xi \end{aligned} \quad (3.48)$$

avec

$$Eh_1 = \int_0^h (\tilde{E}_x^- \tilde{H}_y^{*-} - \tilde{E}_y^- \tilde{H}_x^{*-}) dy \quad (3.49a)$$

$$Eh_2 = \int_h^{+\infty} (\tilde{E}_x^+ \tilde{H}_y^{*+} - \tilde{E}_y^+ \tilde{H}_x^{*+}) dy \quad (3.49b)$$

Les deux intégrales  $Eh_1$  et  $Eh_2$  sont calculées dans l'annexe C, et l'intégrale dans (3.48) sera évaluée numériquement.

### 3.3 Influence de l'épaisseur $t$ du ruban

Pour la plupart des lignes microrubans, l'effet de cette épaisseur sur les paramètres de conception est négligeable. Pour quelques circuits amicroruban avec des substrats en plastique et des circuits où les microrubans sont conçues pour supporter une certaine puissance, l'épaisseur  $t$  peut jouer un rôle important. La modification dans la distribution du champ électrique est illustrée par la figure 3.5.

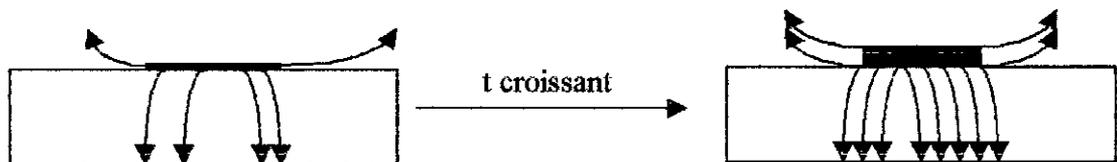


Fig. 3.5 Illustration de l'effet de l'épaisseur du ruban.

Typiquement, cette épaisseur est de l'ordre de 1-3µm dans les circuits monolithiques et 5-20 µm dans les circuits hybrides [27]. Quelques expressions simples et précises ont été proposées et établit pour déterminer les caractéristiques de la ligne (impédance caractéristique, permittivité effective,...).

L'effet de l'épaisseur du ruban sur les caractéristiques de la ligne microruban est déterminé par le principe variationnel et la transformation conforme [28]. En appliquant cette technique, les singularités des champs au niveau des bords sont considérées [29].

### 3.4 Influence de l'existence du boîtier

On est souvent amené à enfermer les circuits dans un boîtier pour diminuer le rayonnement, faciliter le montage des connecteurs. Cela peut modifier la répartition des champs, donc agir sur  $Z_c$  et  $\epsilon_{eff}$  en les diminuant [30].

Dans ce qui suit nous allons utiliser la méthode spectrale pour déterminer les caractéristiques dispersives d'une ligne microruban couverte ou fermée.

#### 3.4.1. Etude d'une ligne microruban couverte [31]

##### 3.4.1.1. Formulation du problème

La figure 3.6 présente la section transversale d'une ligne microruban fermée. La structure est supposée uniforme et infinie dans la direction de propagation (axe z). Les métaux utilisés sont parfaitement conducteurs. Le substrat diélectrique est sans pertes de paramètres électriques  $\mu_r$  et  $\epsilon_r$ .

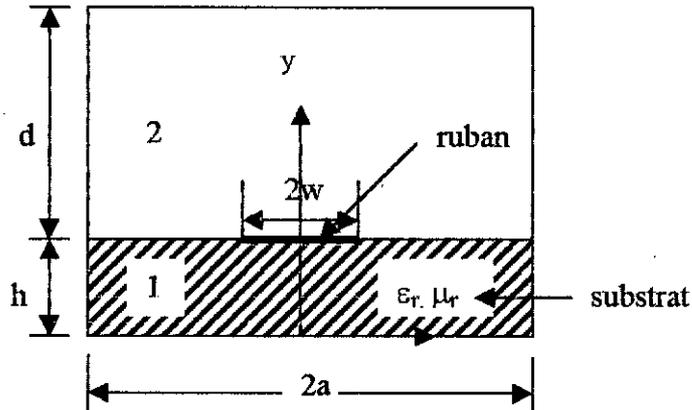


Fig. 3.6 Section transversale d'une ligne microruban fermée.

Les composantes des champs hybrides dans la ligne, sont obtenues par la superposition des modes TE et TM. Elles sont exprimées en fonction des potentiels scalaires  $\psi^{(e)}$  et  $\psi^{(h)}$  comme suit

$$E_{zi} = \frac{k_i^2 - \beta^2}{\beta} \psi_i^{(e)}(x, y) e^{-j\beta z} \tag{3.50a}$$

$$H_{zi} = j \frac{k_i^2 - \beta^2}{\beta} \psi_i^{(h)}(x, y) e^{-j\beta z} \tag{3.50b}$$

L'indice  $i = 1, 2$  désigne la région 1 (substrat) ou 2 (air),  $\beta$  est la constante de propagation et  $\omega$  la pulsation. Les indices (e) et (h) correspondent respectivement aux champs TE et TM

et  $k_1 = \omega (\epsilon_r \mu_r \epsilon_0 \mu_0)^{1/2}$ ,  $k_2 = \omega (\epsilon_0 \mu_0)^{1/2} = k_0$ .

Les autres composantes des champs sont obtenues à partir des équations de Maxwell.

On suit la même procédure d'analyse d'une ligne microruban ouverte (section 3.2.2). Sauf que la nature limitée de la géométrie d'une ligne couverte, nécessite l'utilisation de la transformée de Fourier discrète au lieu de la transformée de Fourier conventionnelle. La transformée de Fourier discrète des potentiels scalaires est définie par

$$\tilde{\psi}^{(p)}(n, y) = \int_{-a}^a \psi_i^{(p)}(x, y) e^{jk_n x} dx; \quad p = e \text{ ou } h; i = 1, 2 \quad (3.51)$$

$\hat{k}_n = (n - 1/2) \frac{\pi}{a}$  pour les modes  $E_z$  pair et  $H_z$  impair, et  $\hat{k}_n = n \frac{\pi}{a}$  pour les modes  $E_z$  impair et  $H_z$  pair.

La seconde étape consiste à trouver les transformées des champs, en utilisant des expressions similaires à (3.51). En appliquant les conditions aux limites et de continuité dans le domaine spectral et utilisant quelques manipulations mathématiques, on obtient le système suivant

$$\tilde{G}_{11}(n, \beta) \tilde{J}_x(n) + \tilde{G}_{12}(n, \beta) \tilde{J}_z(n) = \tilde{E}_z(n) \quad (3.52a)$$

$$\tilde{G}_{21}(n, \beta) \tilde{J}_z(n) + \tilde{G}_{22}(n, \beta) \tilde{J}_x(n) = \tilde{E}_x(n) \quad (3.52b)$$

avec

$$\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{22} = \hat{k}_n \beta (\gamma_2 \tanh \gamma_2 d + \mu_r \gamma_1 \tanh \gamma_1 h) / \det \quad (3.53a)$$

$$\tilde{G}_{12} = \left[ (\epsilon_r \mu_r k_0^2 - \beta^2) \gamma_2 \tanh \gamma_2 d + \mu_r (k_0^2 - \beta^2) \gamma_1 \tanh \gamma_1 h \right] / \det \quad (3.53b)$$

$$\tilde{G}_{21} = \left[ (\epsilon_r \mu_r k_0^2 - \hat{k}_n^2) \gamma_2 \tanh \gamma_2 d + \mu_r (k_0^2 - \hat{k}_n^2) \gamma_1 \tanh \gamma_1 h \right] / \det \quad (3.53c)$$

$$\det = (\gamma_1 \tanh \gamma_1 h + \epsilon_r \gamma_2 \tanh \gamma_2 d) (\gamma_1 \coth \gamma_1 h + \mu_r \gamma_2 \coth \gamma_2 d) \quad (3.53c)$$

$$\gamma_1^2 = \hat{k}_n^2 + \beta^2 - k_1^2, \quad \gamma_2^2 = \hat{k}_n^2 + \beta^2 - k_2^2,$$

et

$$\tilde{J}_x(n) = \int_{-w}^w J_x(x) e^{(jk_n x)} dx \quad (3.54a)$$

$$\tilde{J}_z(n) = \int_{-w}^w J_z(x) e^{(jk_n x)} dx \quad (3.54b)$$

$$\tilde{E}_x(n) = K_x \int_{-a}^a E(x, h) e^{(jk_n x)} dx \quad (3.55a)$$

$$\tilde{E}_z(n) = K_z \int_{-a}^a E(z, h) e^{(jk_n x)} dx \quad (3.55b)$$

$K_x$  et  $K_z$  sont des constantes. On note que les champs  $\tilde{E}_x$  et  $\tilde{E}_z$  à  $y = h$ , existent si  $w < |x| < a$ , et sont nuls sur le ruban. Le couple d'équations donné par (3.52) est un ensemble d'équations algébriques.

### 3.4.1.2. Analyse

Nous allons présenter dans cette section une méthode efficace pour résoudre le système (3.52), qui contient quatre inconnus  $\tilde{J}_x$ ,  $\tilde{J}_z$ ,  $\tilde{E}_x$  et  $\tilde{E}_z$ . En utilisant quelques propriétés de ces fonctions, il est possible d'éliminer les inconnus  $\tilde{E}_x$  et  $\tilde{E}_z$ . Appliquons la méthode de Galerkin pour résoudre ce problème. On va décomposer  $\tilde{J}_x$  et  $\tilde{J}_z$  en une série de fonctions de base  $\tilde{\phi}_{xm}$  et  $\tilde{\phi}_{zm}$  :

$$\tilde{J}_x(n) = \sum_{m=1}^M I_{xm} \tilde{\phi}_{xm}(n) \quad (3.56a)$$

$$\tilde{J}_z(n) = \sum_{m=1}^M I_{zm} \tilde{\phi}_{zm}(n) \quad (3.56b)$$

$I_{xm}$  et  $I_{zm}$  sont des constantes inconnues. Les fonctions de base doivent être choisies d'une façon que leurs transformées inverses existent seulement sur le ruban. En substituant (3.56a) et (3.56b) dans (3.52), et en calculant le produit intérieur avec les fonctions de base  $\phi_{xi}$  et  $\phi_{zi}$  pour les différentes valeurs de  $i$ , on trouve

$$\sum_{m=1}^M K_{im}^{(1,1)} I_{xm} + \sum_{m=1}^N K_{im}^{(1,2)} I_{zm} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.57a)$$

$$\sum_{m=1}^M K_{im}^{(2,1)} I_{xm} + \sum_{m=1}^N K_{im}^{(2,2)} I_{zm} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.57b)$$

à partir de la définition du produit intérieur, les coefficients  $K_{im}$  s'écrivent sous la forme

$$K_{im}^{(1,1)}(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\phi}_{zi}(n) \tilde{G}_{11}(n, \beta) \tilde{\phi}_{xm}(n) \quad (3.58a)$$

$$K_{im}^{(1,2)}(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\phi}_{zi}(n) \tilde{G}_{12}(n, \beta) \tilde{\phi}_{zm}(n) \quad (3.58b)$$

$$K_{im}^{(2,1)}(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\phi}_{xi}(n) \tilde{G}_{21}(n, \beta) \tilde{\phi}_{xm}(n) \quad (3.58c)$$

$$K_{im}^{(2,2)}(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\phi}_{xi}(n) \tilde{G}_{22}(n, \beta) \tilde{\phi}_{zm}(n) \quad (3.58d)$$

La constante de propagation  $\beta$  est obtenue lorsque le déterminant du système (3.57) est nul.

### 3.5 Pertes dans la ligne microruban

Le coefficient de propagation d'une ligne microruban avec pertes s'écrit

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (3.59)$$

Le terme d'atténuation  $\alpha$ , tenant compte des diverses pertes (ohmiques, diélectriques et par rayonnement), s'écrit comme suit

$$\alpha = \alpha_c + \alpha_d + \alpha_r \quad (3.60)$$

#### 3.5.1. Pertes dans les conducteurs

Les pertes ohmiques dans les conducteurs sont essentiellement dues à la conductivité finie de ces conducteurs. Cependant, l'épaisseur non nulle du conducteur supérieur et la rugosité de la surface des dépôts métalliques peuvent accroître sensiblement ces pertes. Divers modèles donnent [32] une formulation décrivant les pertes ohmiques à l'aide des expressions fermées. Le modèle le plus précis, dû à Pues (1983) et cité par Van de Capelle [33], donne une valeur des pertes dans les conducteurs sous forme d'expressions aisément programmables. Le conducteur supérieur est caractérisé par sa conductivité finie  $\sigma_c$  et la rugosité de sa surface  $\Delta s$ . Le plan de masse est caractérisé par sa conductivité  $\sigma_g$  et la rugosité de sa surface  $\Delta g$ .

$$\alpha_c = \alpha_s + \alpha_g \quad (3.61)$$

$$\text{avec } \alpha_s = \alpha_n = R_m F_{\Delta s} F_s$$

$$\alpha_g = \alpha_n R_g F_{\Delta g}$$

$$R_m = \sqrt{\pi f \mu_0 / \sigma_c}$$

$$R_g = \sqrt{\pi f \mu_0 / \sigma_g}$$

$$F_{\Delta g} = 1 + \frac{2}{u_r} \left( 1 - \frac{1}{\pi} \frac{\Delta u_r}{t/h} \right)$$

$$F_{\Delta s} = 1 + \frac{2}{\pi} \text{Arctg} \left\{ 1.4 (R_s \Delta s \sigma_c)^2 \right\}$$

$$F_{\Delta g} = 1 + \frac{2}{\pi} \text{Arctg} \left\{ 1.4 (R_g \Delta s \sigma_g)^2 \right\}$$

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{4 \pi h Z_c(0)} \frac{32 - u_r^2}{32 + u_r^2} & u_r < 1 \\ \frac{\sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}(0)}}{2 Z_0 w_{\text{eff}}(0)} \left\{ u_r + \frac{0.667 u_r}{u_r + 1.444} \right\} & u_r > 1 \end{cases}$$

$$w_{\text{eff}}(0) = \frac{Z_0 h}{\sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}(0)} Z_c(0)}$$

$$u_r = u + \Delta u_r$$

$$\Delta u_r = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{\cosh \sqrt{\varepsilon_r - 1}} \right] \Delta u_1$$

$$u = w/h$$

$$\Delta u_1 = \frac{t'}{\pi} \ln \left( 1 + \frac{4 \exp(1)}{t' \coth^2 \sqrt{6.517 u}} \right)$$

$$\text{avec } t' = t/h$$

### 3.5.2. Pertes diélectriques

Elles sont dues à l'énergie dissipée dans le diélectrique qui est proportionnelle au facteur de pertes  $\text{tg}\delta$ . L'expression la plus précise, du facteur  $\alpha_d$  tenant compte de la dispersion s'écrit [34]

$$\alpha_d = \frac{\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}(f)} \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_{\text{eff}}(f)} \frac{\varepsilon_{\text{eff}}(f) - 1}{\varepsilon_{\text{eff}}(f) + 1} \text{tg}\delta \quad (3.62)$$

### 3.5.3. Pertes par rayonnement

La figure 3.7 illustre qualitativement les différents types d'onde existants dans une structure microruban. Dans une ligne de transmission, on souhaite favoriser l'existence d'ondes guidées (A) et on essaie d'éviter la présence d'ondes de surface et de rayonnement. Ces deux types d'onde peuvent en effet produire des couplages indésirables entre différents éléments d'un circuit.

Une ligne à diélectrique uniforme ne rayonne pas en principe. Dans la réalité, il existe toujours des discontinuités: source d'énergie rayonnée. L'analyse des discontinuités dans la ligne microruban est traitée dans plusieurs ouvrages [13]. Pour des lignes d'impédance  $Z_c$  de l'ordre de  $50\Omega$ , l'énergie rayonnée est proportionnelle à  $h^2 f^2 / (\varepsilon_r)^{1/2}$ . On est donc conduit à diminuer  $h$  et à

utiliser des matériaux de  $\epsilon_r$  élevée, mais cela peut conduire à des largeurs  $2w$  trop faibles, on doit alors blinder le circuit.

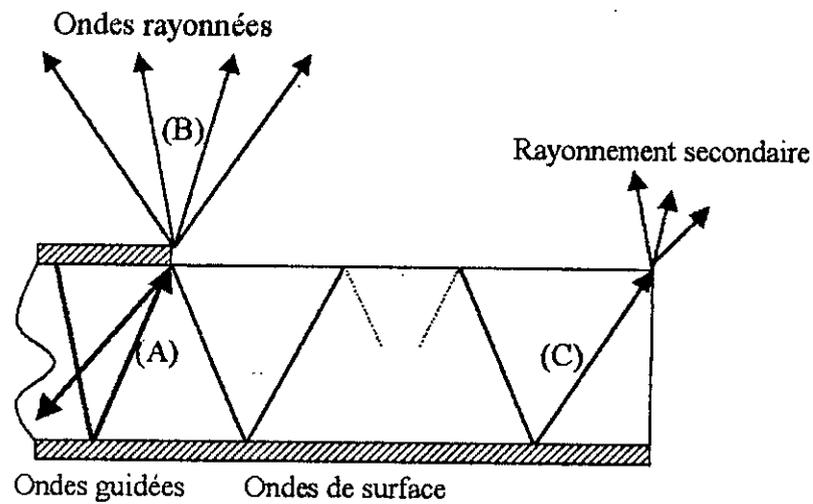


Fig. 3.7 Types d'onde dans une structure microruban [34].

### 3.6 Conclusion

En conclusion, on peut dire que la ligne microruban est une structure très employée dans les applications des circuits intégrés micro-ondes. Elle permet d'atteindre des fréquences de travail très élevées. Comme c'est une structure inhomogène, la ligne microruban génère des distorsions au niveau de la réception. Pour les lignes de transmission ce phénomène est très gênant à fur et à mesure que la fréquence augmente.

# **CHAPITRE 4**

## **ANALYSE DES RESULTATS OBTENUS**

Après avoir établi dans les deux chapitres précédents toutes les formulations mathématiques des caractéristiques des lignes planaires (ligne triplaque et ligne microruban), nous consacrons ce chapitre aux résultats numériques obtenus pour différentes structures. Ces résultats seront confrontés à des mesures présentées par d'autres auteurs. L'influence de divers paramètres sur l'évolution de ces caractéristiques sera également présentée et interprétée.

## 4.1 Caractéristiques des lignes triplaques

### 4.1.1. Impédance caractéristique

#### 4.1.1.1. Cas où l'épaisseur du ruban est négligeable (Transformation de Schwarz-Cristoffel)

Les résultats numériques obtenus à l'aide d'un programme écrit en Fortran, nous permet de tracer les variations de l'impédance caractéristique  $Z_c$  d'une ligne triplaque (Fig.4.1).

Cette figure donne l'allure de l'impédance caractéristique en fonction du rapport  $L/d$ , pour trois milieux diélectriques différents ( $\epsilon_r = 1, \epsilon_r = 2.53, \epsilon_r = 9.7$ ). Les valeurs numériques sont obtenues par la méthode de Schwarz-Cristoffel, dans le cas limite où l'épaisseur  $t$  du ruban est égale à zéro. Nous constatons que l'impédance caractéristique diminue lorsque la largeur du ruban  $2L$  est plus grande que l'épaisseur du substrat  $2d$ . Ainsi, plus la structure est étroite l'impédance de la ligne est faible.

Les résultats obtenus par la théorie de Schwartz-Cristoffel s'accordent bien avec les résultats donnés par Schneider [35].

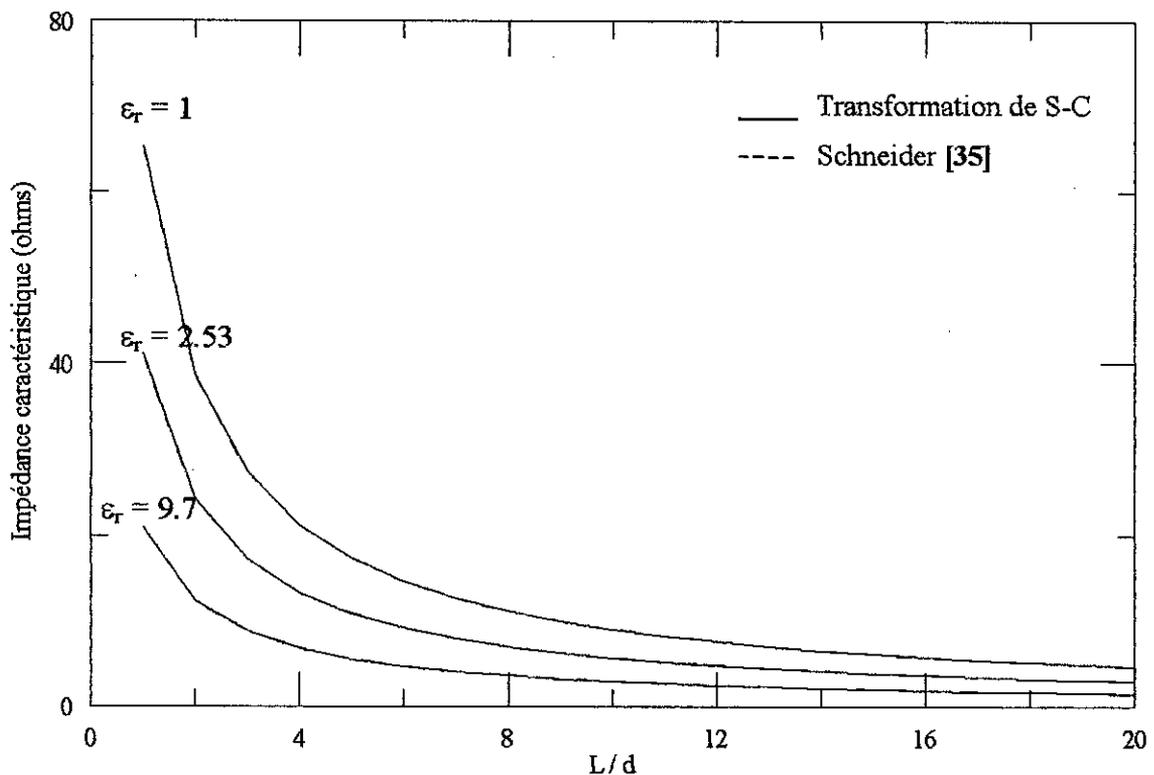


Fig. 4.1 Impédance caractéristique d'une ligne triplaque en fonction du rapport  $L/d$  pour  $t = 0$  mm.

De point de vue numérique la méthode de Schwarz-Cristoffel est une méthode très efficace, du fait qu'elle donne une meilleure précision (l'erreur est inférieure à 1%), elle est simple à programmer et le temps de calcul est très réduit.

#### 4.1.1.2. Cas où l'épaisseur du ruban est non nulle (méthode variationnelle)

Dans la figure 4.2, la valeur moyenne de l'impédance caractéristique calculée à partir des limites inférieure et supérieure (méthode variationnelle), ainsi que les valeurs données par Schneider [35] sont tracées en fonction du rapport  $L/d$ , pour une valeur fixe de l'épaisseur  $t$ :  $t = 0.2 d$ , et en utilisant trois milieux diélectriques ( $\epsilon_r = 1, \epsilon_r = 2.53, \epsilon_r = 9.7$ ).

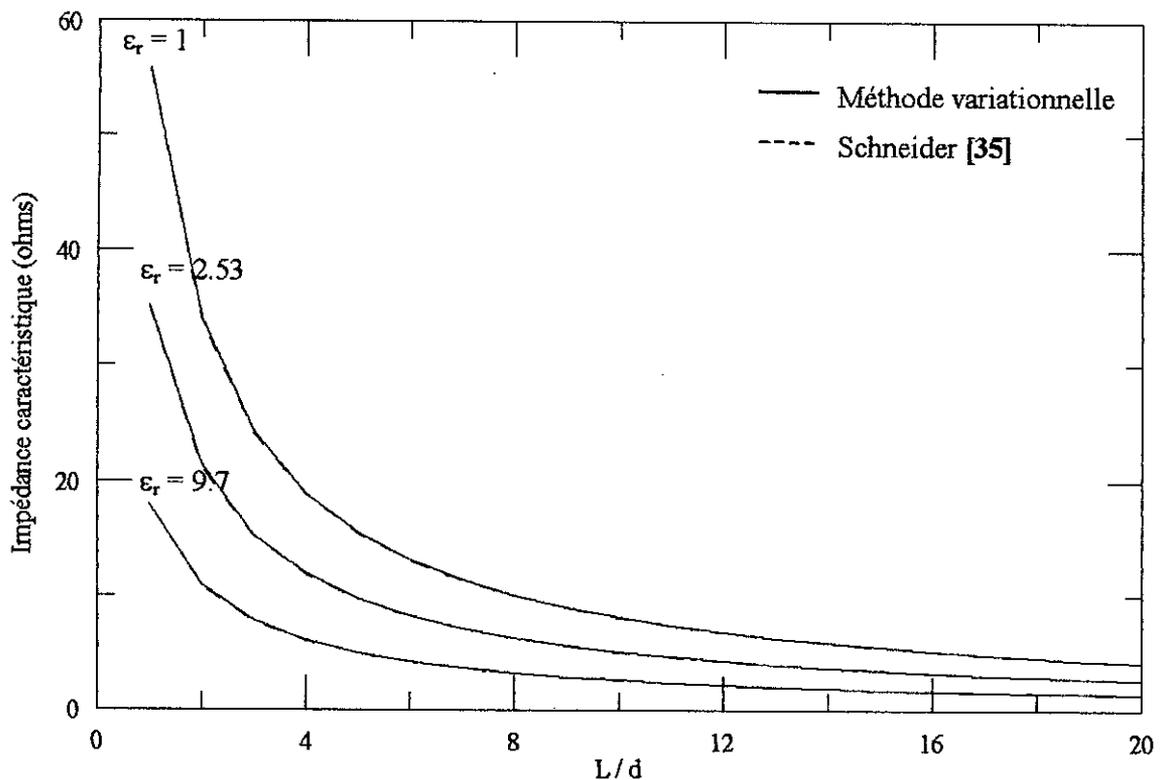


Fig. 4.2 Impédance caractéristique d'une ligne triplaque en fonction du rapport  $L/d$  pour  $t = 0.2d$ .

Pour toutes les valeurs de  $L/d$  supérieure à 0.5, l'erreur maximale sur la valeur moyenne de l'impédance caractéristique est inférieure à 1%, cette erreur diminue avec l'augmentation du rapport  $L/d$ .

#### 4.1.2. Pertes dans la ligne triplaque

Les figures 4.3 et 4.4 illustrent les variations des constantes d'atténuation  $\alpha_c$  et  $\alpha_d$  dues respectivement aux pertes dans les conducteurs et dans le diélectrique, en fonction de la fréquence, pour un rapport fixe  $L/d = 6$  et  $t = 0.005 d$ . Les résultats sont donnés pour différents milieux diélectriques. Sachant que le métal utilisé pour la conception de la ligne est le cuivre ( $\sigma_c = 5.8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ ).

Une première comparaison permet de différencier l'écart entre les pertes métalliques et diélectriques jusqu'à des fréquences assez élevées où cet écart diminue sensiblement et les valeurs de  $\alpha_d$  s'approchent de celles de  $\alpha_c$ , car les pertes diélectriques augmentent linéairement en fonction de la fréquence. Tandis que les pertes par conduction sont proportionnelles à la racine carrée de la fréquence.

Pour des matériaux ayant une permittivité relative élevée tels que Ga As ( $\epsilon_r = 12.3$ ), les pertes diélectriques à fréquences élevées, seront plus importantes que les pertes par conduction.

Si on trace les valeurs de  $\alpha_c$  en fonction des dimensions de la ligne, c'est à dire vis à vis de la géométrie de la structure, on obtient les courbes de la figure 4.5, pour une fréquence fixe égale à 1GHz et pour trois milieux diélectriques. comme le montre la figure 4.5, l'augmentation du rapport  $L/d$  entraîne une diminution dans les valeurs de  $\alpha_c$ , elles deviennent presque constantes pour des rapports  $L/d$  assez élevés.

Il n'a pas lieu de tracer les variations de la constante d'atténuation diélectrique en fonction des dimensions de la ligne, car  $\alpha_d$  est indépendante de la géométrie de la structure, elle dépend seulement de la fréquence et de la nature du substrat.

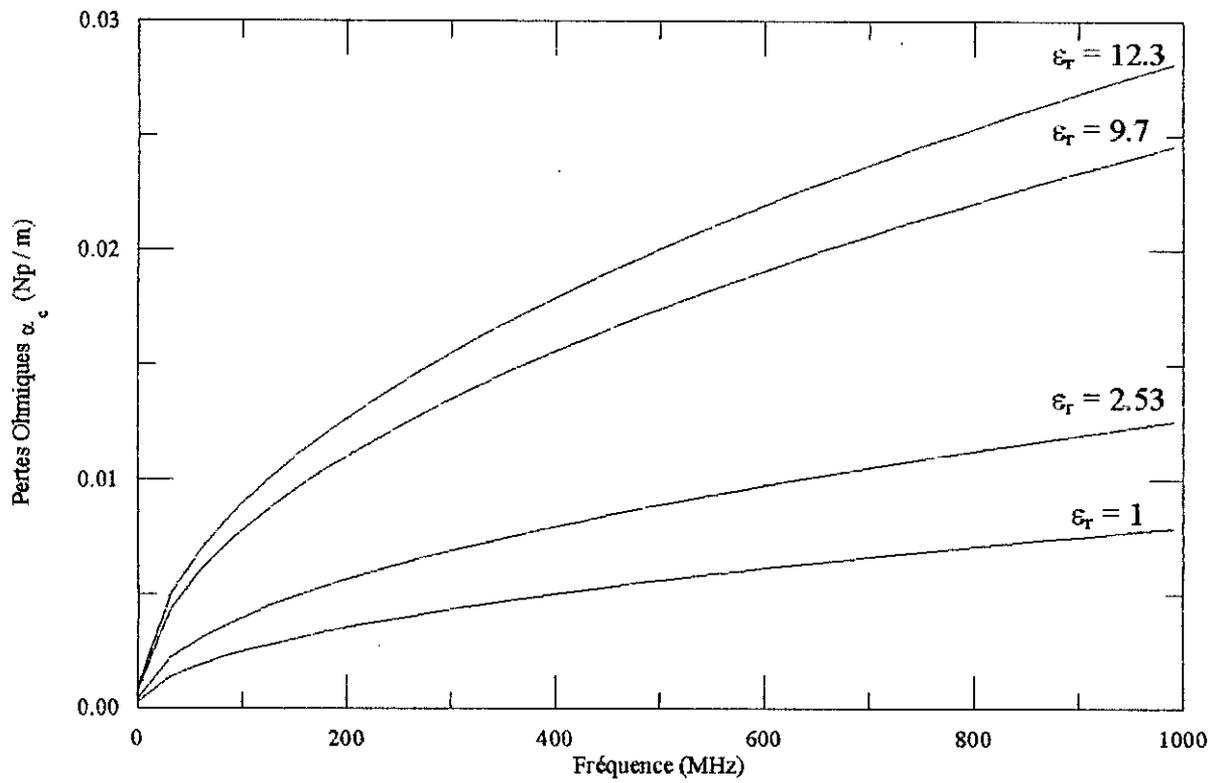


Fig. 4. 3 Pertes ohmiques dans une ligne triplaque en fonction de la fréquence pour  $t = 0.005d$  et  $L / d = 6$

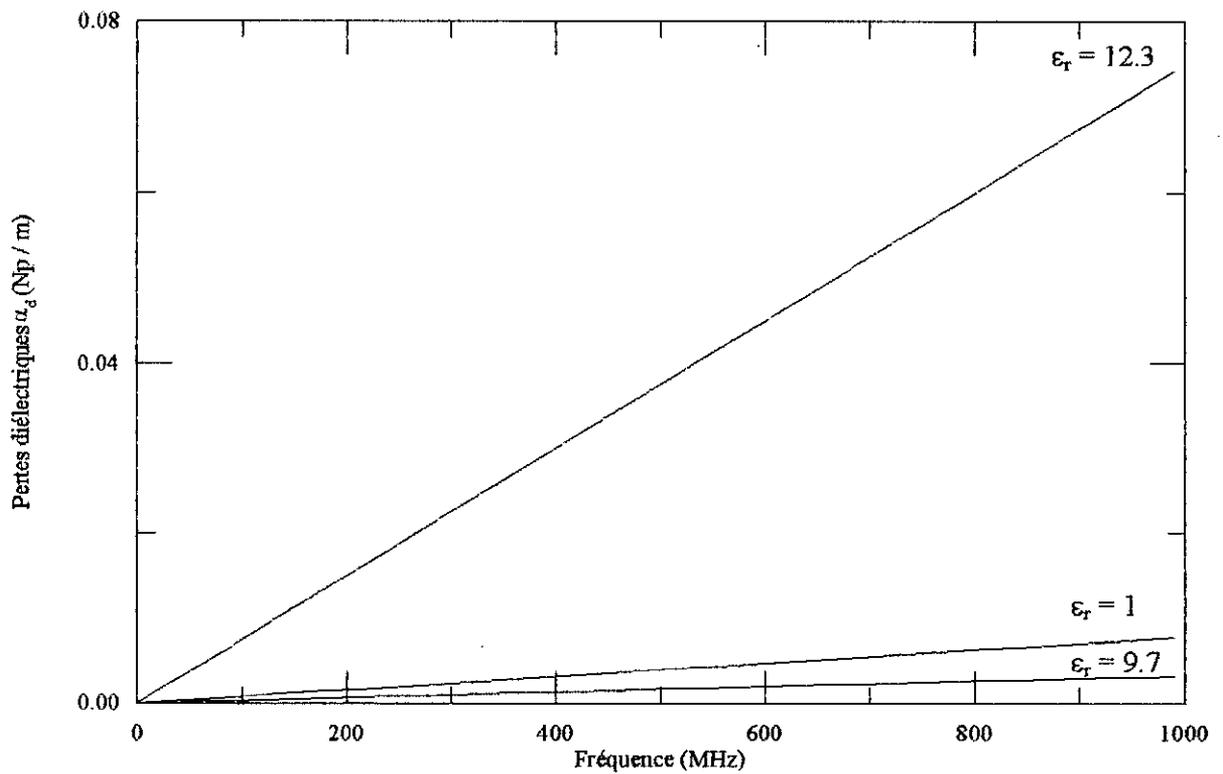
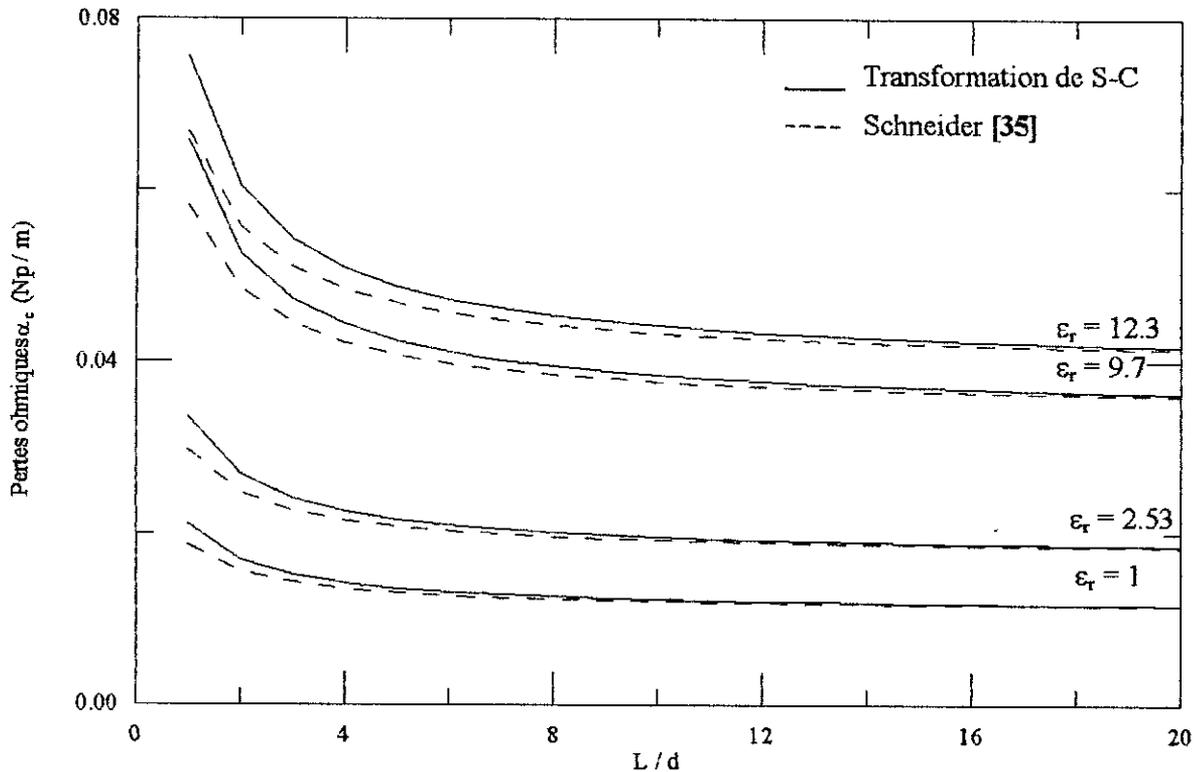


Fig. 4.4 Pertes diélectriques dans une ligne triplaque en fonction de la Fréquence pour  $t = 0.005d$  et  $L / d = 6$



**Fig. 4.5** Pertes ohmiques dans une ligne triplaque en fonction du rapport  $L / d$  Pour  $t = 0.005d$  et  $f = 1\text{GHz}$ .

Une ligne de transmission sert essentiellement à transférer l'information, donc on souhaite à favoriser les ondes guidées, et à diminuer les pertes. Pour ce type de ligne, les pertes par rayonnement n'existent pas. Les pertes diélectriques et métalliques peuvent être diminuées par un choix convenable du milieu et des dimensions de la structure. On note que la ligne triplaque ne présente pas un comportement dispersif, elle est indépendante vis à vis de la fréquence, ce qui présente l'avantage principal de cette ligne.

## 4.2 Caractéristiques des lignes microrubans

### 4.2.1. Caractéristiques statiques (Application de la méthode variationnelle)

Dans une analyse quasi statique, les paramètres caractérisant une ligne ne dépendent pas de la fréquence. La figure 4.6 illustre la valeur moyenne de la capacité linéique en fonction de divers paramètres ( $w / h$  et  $\epsilon_r$ ). Cette valeur est calculée à partir des limites inférieure et supérieure données par les équations (3.17) et (3.23).

On note que le choix des fonctions  $f(x)$  et  $V(x)$  est très important dans le calcul de ces deux limites. Elles sont données par [19, 20]:

$$f(x) = x^2$$

$$\text{et } V(x) = \begin{cases} 1 & |x| < w \\ 1 - \frac{4}{5} \sqrt{\frac{|x| - w}{d}} & w < |x| < w + d \\ \frac{1}{5} \left( \frac{d}{|x| - w} \right)^2 & |x| > w + d \end{cases}$$

L'impédance caractéristique de la ligne microruban est représentée sur la figure 4.7, pour les valeurs de  $\epsilon_r$  suivantes:  $\epsilon_r = 1$ ,  $\epsilon_r = 2.65$ ,  $\epsilon_r = 4.2$  et  $\epsilon_r = 8.9$ . La figure 4.8 donne la longueur d'onde en fonction de divers paramètres. Pour illustrer l'effet de l'épaisseur du ruban ( $t$ ), la figure 4.9 représente les variations de l'impédance caractéristique en fonction du rapport  $w/h$  pour différentes valeurs de  $t$ . D'après cette figure on remarque que l'épaisseur a peu d'effet sur les variations de  $Z_c$ .

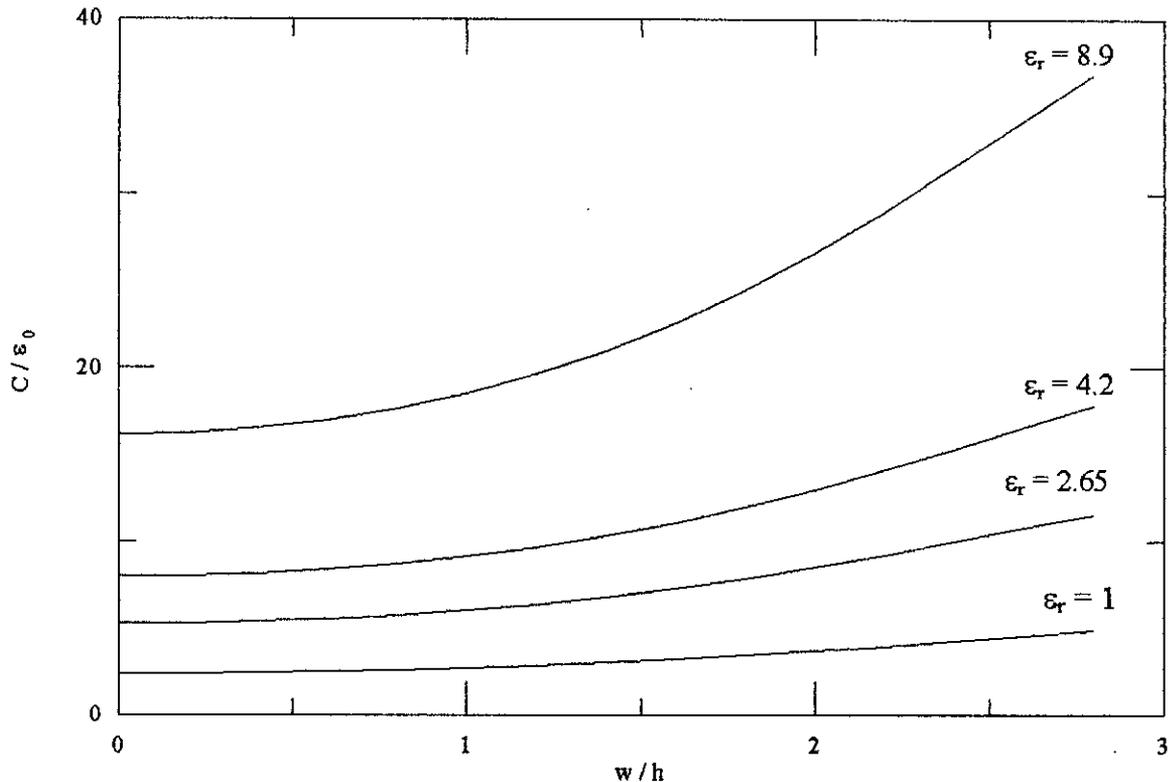


Fig. 4.6 Capacité d'une ligne microruban en fonction du rapport  $w/h$  pour  $t = 0\text{mm}$ .

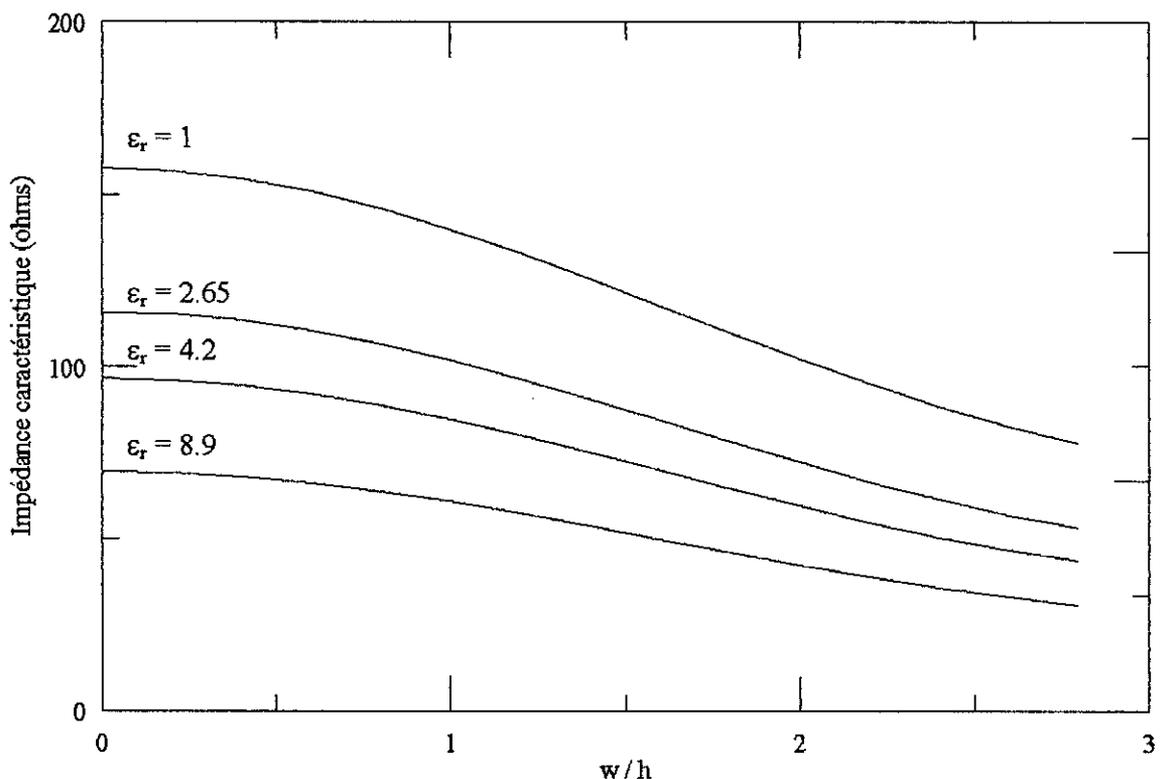


Fig. 4.7 Impédance caractéristique d'une ligne microruban en fonction du rapport  $w/h$  pour  $t = 0\text{mm}$ .

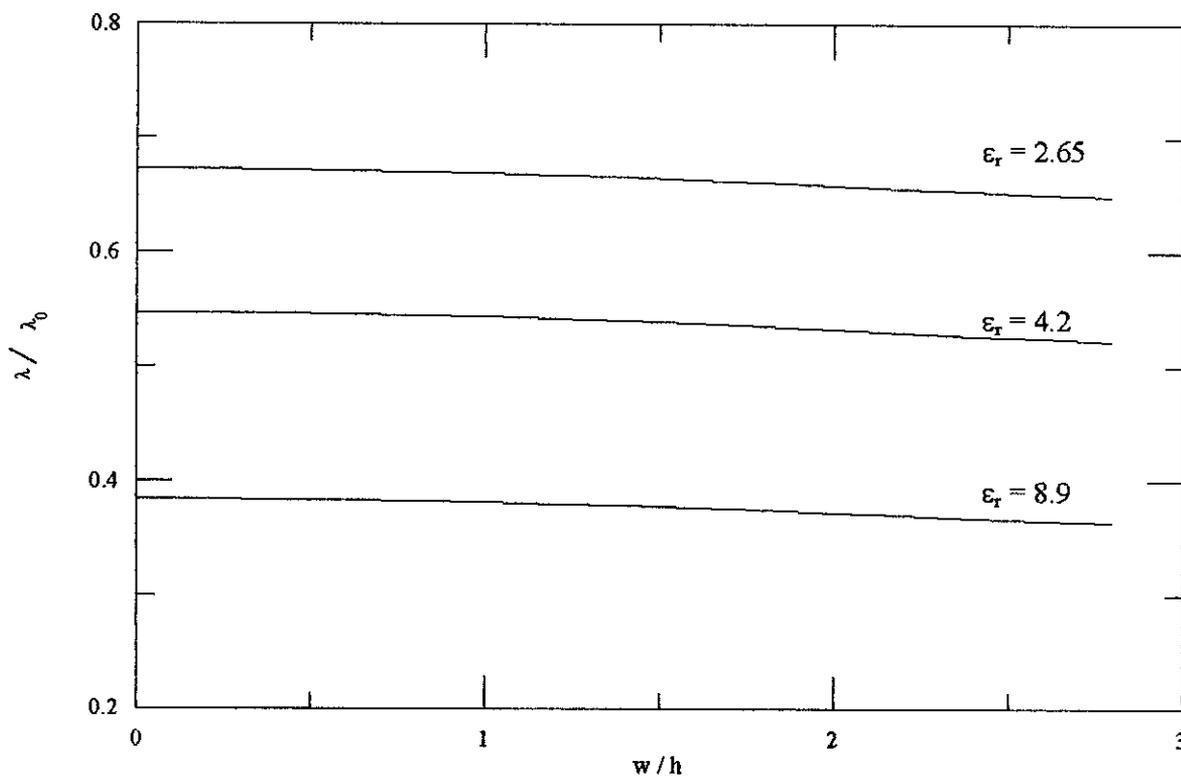


Fig. 4.8 Longueur d'onde dans une ligne microruban en fonction du rapport  $w/h$  pour  $t = 0\text{mm}$ .

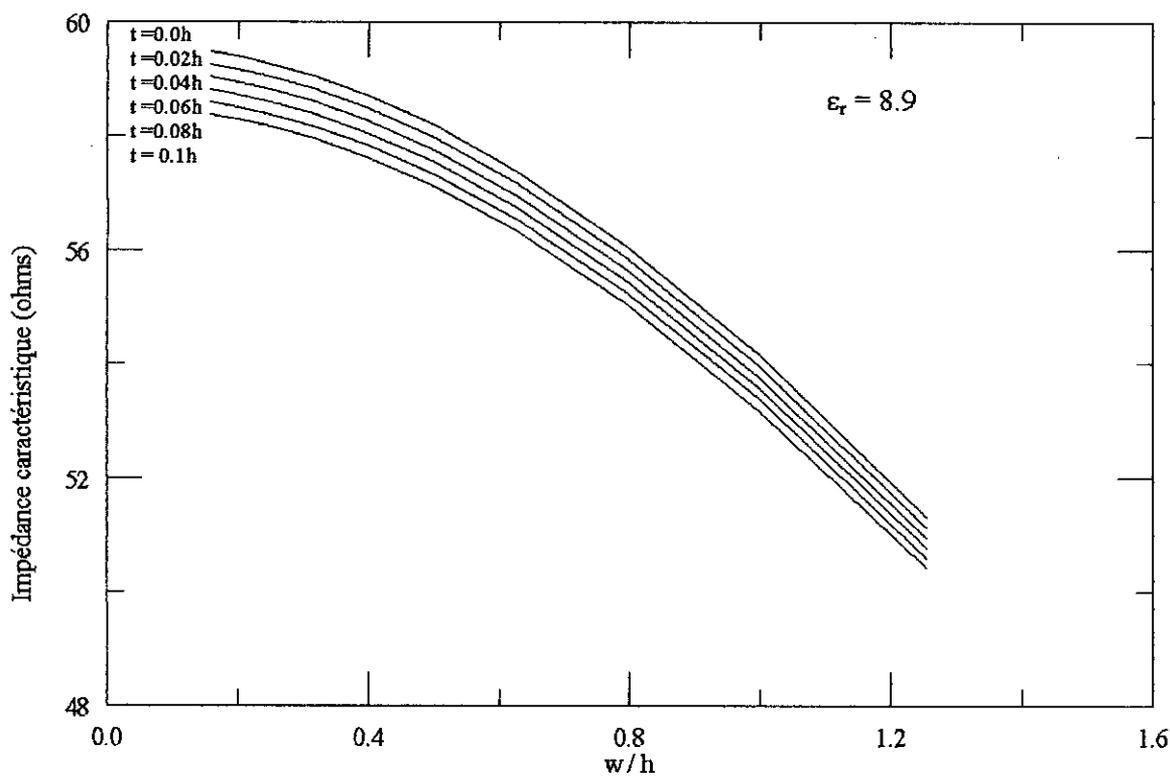


Fig. 4.9 Effet de l'épaisseur du ruban sur les variations de l'impédance caractéristique pour  $\epsilon_r = 8.9$

Dans une étude quasi statique, l'impédance caractéristique, la permittivité effective  $\epsilon_{\text{eff}} = (\lambda_0 / \lambda)^2$  dépendent seulement de la permittivité relative du diélectrique et de la géométrie de la ligne.

## 4.2.2 Caractéristiques dispersives (Application de méthode spectrale)

### 4.2.2.1. Permittivité effective

La figure 4.10 représente les variations de la permittivité effective sur une bande de fréquence s'étalant jusqu'à 30 GHz. Le tracé de  $\epsilon_{\text{eff}}(f)$  s'approche asymptotiquement de la permittivité relative  $\epsilon_r$ , au fur et à mesure que la fréquence augmente. Ce qui montre que pour des fréquences assez élevées, l'énergie reste confinée dans le diélectrique. Cela est dû au fait que le mode hybride considéré est obtenu par une superposition d'un nombre infini d'ondes de surfaces.

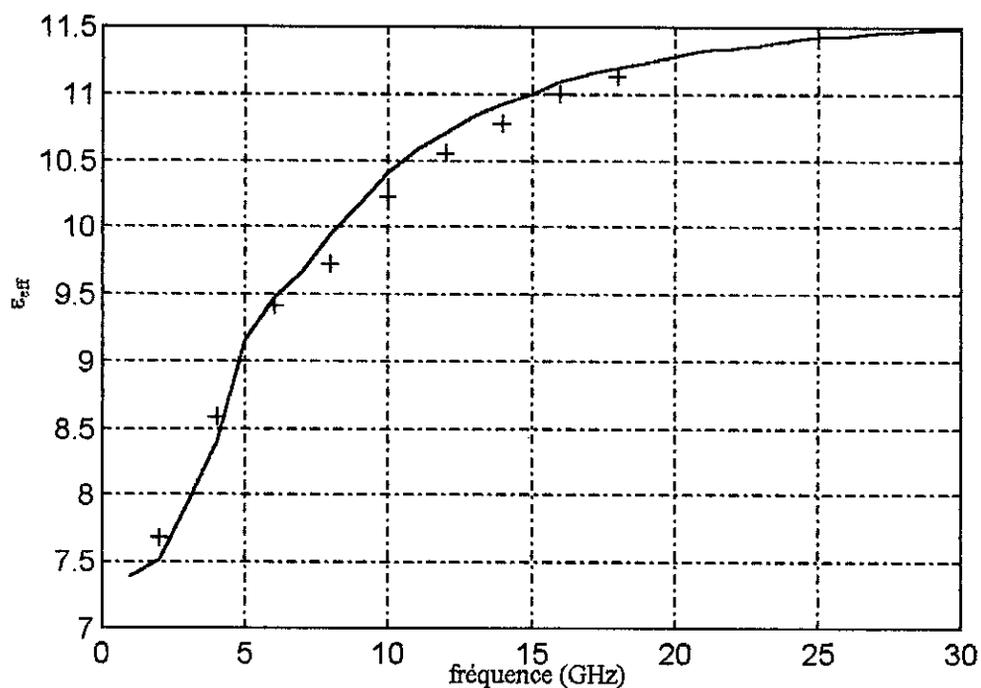


Fig. 4.10 Constante diélectrique effective en fonction de la fréquence  
 $\epsilon_r = 11.7$ ;  $w/h = 0.96$ ;  $h = 3.17$  mm

Nous constatons que les résultats théoriques s'accordent bien avec les résultats obtenus par Denlinger [21]. L'analyse proposée par Denlinger est basée sur l'utilisation des fonctions de Maxwell. Dans ce cas, la distribution du courant est calculée à partir de la densité de charge.

La figure 4.11 illustre les variations de la vitesse de phase, en fonction de la fréquence, issus de nos résultats ainsi que les calculs de Denlinger [21]. L'erreur maximale attribuée est de l'ordre de 2%.

Parallèlement à l'attribution fréquentielle sur la variation de la permittivité effective, les dimensions de la ligne ont un effet remarquable sur cette variation. Ainsi la figure 4.12 montre l'influence de la géométrie de la ligne microruban sur les valeurs de la permittivité effective.

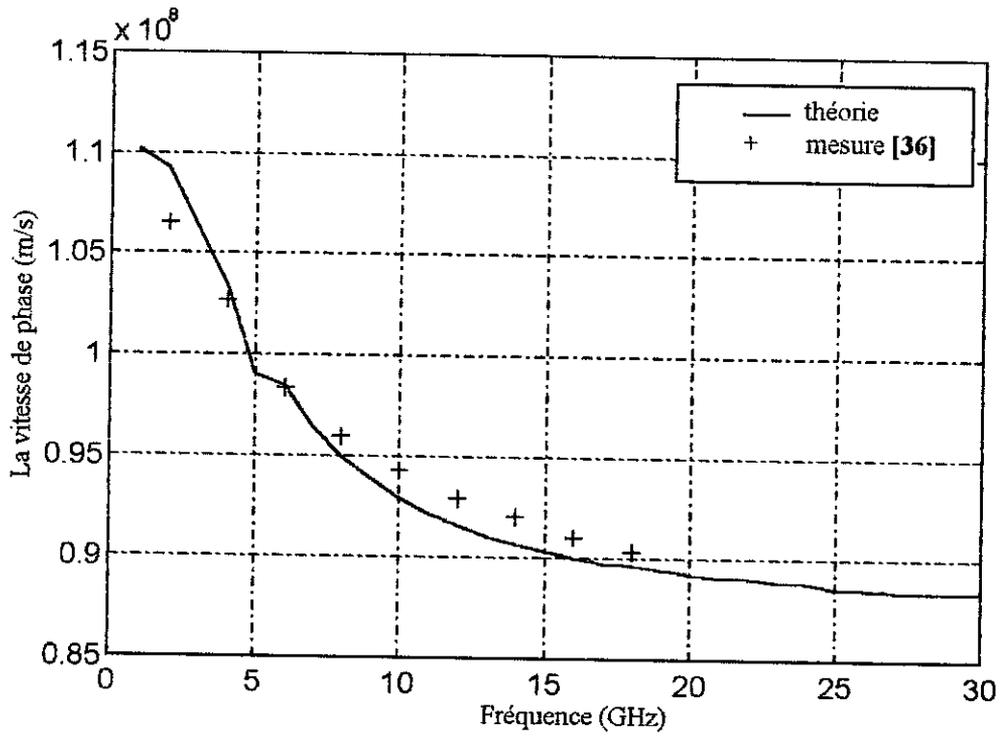


Fig. 4.11 Vitesse de phase en fonction de la fréquence  
 $\epsilon_r = 11.7$ ;  $w/h = 0.96$ ;  $h = 3.17$  mm

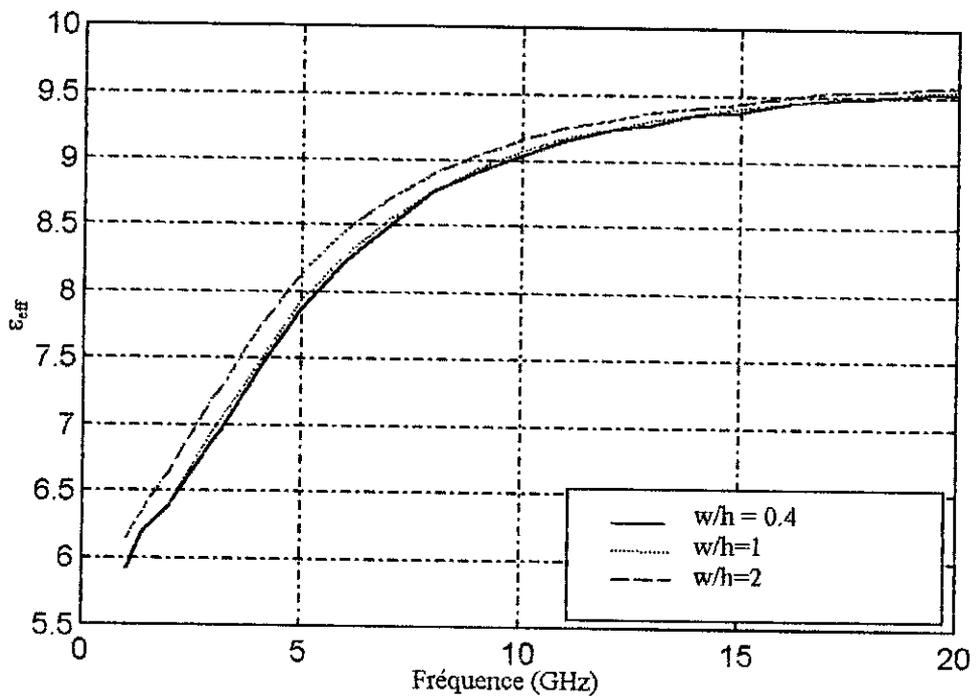


Fig. 4.12 Constante diélectrique effective en fonction de la fréquence  
 $\epsilon_r = 9.74$ ,  $h = 6.35$  mm,  $w = (2.54, 6.35, 12.7)$  mm.

Le tableau 4.1 illustre l'effet des différents paramètres sur la constante diélectrique effective de la ligne microruban. Cette illustration est issue de nos résultats ainsi que des calculs de Kobayashi [36].

$\epsilon_R$	$\frac{H/\lambda_0}{W/H}$	0.05		0.1		0.2		0.3		0.4		0.7	
		A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
4	0.4	2.926	2.748	3.106	2.983	3.413	3.435	3.614	3.683	3.738	3.802	3.905	3.924
	1	3.105	2.748	3.317	3.018	3.595	3.453	3.737	3.683	3.814	3.802	3.916	3.929
	2	3.311	2.815	3.523	3.088	3.734	3.529	3.825	3.735	3.875	3.832	3.940	3.935
8	0.4	5.650	5.312	6.241	6.223	7.067	7.272	7.472	7.623	7.671	7.538	7.881	7.365
	1	6.124	5.405	6.742	6.274	7.361	7.229	7.620	7.642	7.747	7.776	7.898	7.365
	2	6.633	5.595	7.158	6.478	7.574	7.382	7.739	7.680	7.823	7.818	7.924	7.388
16	0.4	11.48	11.13	13.11	13.52	14.79	15.16	15.42	15.60	15.65	15.77	15.88	15.36
	1	12.59	11.27	14.01	13.60	15.13	15.16	15.52	15.60	15.70	15.77	15.89	15.36
	2	13.63	11.68	14.68	13.89	15.40	15.32	15.66	15.79	15.78	15.81	15.91	15.39

Tableau 4.1 La permittivité diélectrique effective  
h = 6.35 mm, B: théorie, A: mesures [36]

Nous constatons que les résultats sont en bon accord avec les mesures tant qu'on s'écarte des faibles valeurs du rapport  $h/\lambda_0$ . L'écart pour les faibles valeurs de la fréquence (un rapport  $h/\lambda_0$  faible) est dû au choix des fonctions de base.

En effet, Kobayashi [36] a utilisé les fonctions de Maxwell qui présentent une meilleure précision pour les fréquences basses [37]. Tandis que dans notre cas, on a utilisé les polynômes de Chebyshev.

La figure 4.13 représente l'erreur relative calculée à partir des résultats théoriques et les mesures de Kobayashi [36]. L'écart existant entre ces résultats est lié au nombre de fonctions de base utilisé. Kobayashi [36] a utilisé dix fonctions de base dans chaque développement des deux densités de courants  $J_x(x)$  et  $J_z(x)$ , par contre une seule fonction de base pour chaque développement dans notre cas est utilisée.

Les écarts que nous avons constatés précédemment peuvent être aussi attribués à la précision de calcul, à la limitation de la machine utilisée ainsi qu'aux tolérances lors de la mesure des paramètres.

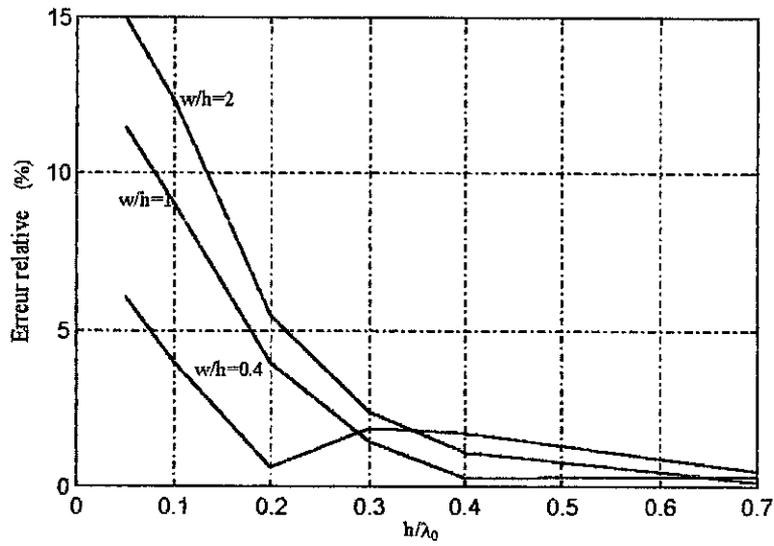


Fig. 4.13a ε<sub>r</sub> = 4

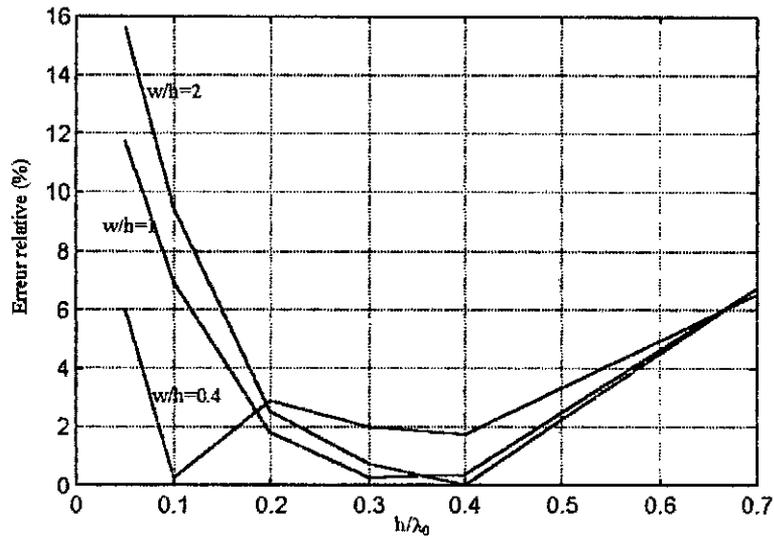


Fig. 4.13b ε<sub>r</sub> = 8

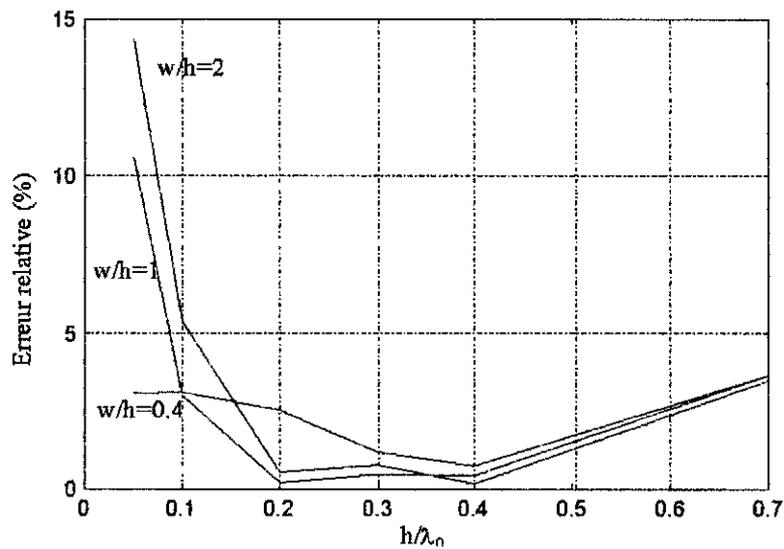


Fig. 4.13c ε<sub>r</sub> = 16

Fig. 4.13 L'écart relatif en (%) entre les mesures [36] et la théorie en fonction du rapport  $h/\lambda_0$ ,  $h = 6.35\text{mm}$ ,  $w = (2.54, 6.35, 12.7)\text{ mm}$ .

#### 4.2.2.2. Impédance caractéristique

La figure 4.14 montre les variations de l'impédance caractéristique de la ligne microruban sur une bande de fréquence de 20 GHz. Les courbes de cette figure sont obtenues pour certaines valeurs du rapport  $w/h$ .

La première constatation à tirée est que la fréquence présente un effet dispersif sur la variation de l'impédance caractéristique. D'autre part, l'augmentation du rapport  $w/h$  implique une augmentation de la valeur de l'impédance caractéristique. La hauteur du substrat diélectrique  $h$  a un rôle major dans la détermination des caractéristiques de la ligne microruban.

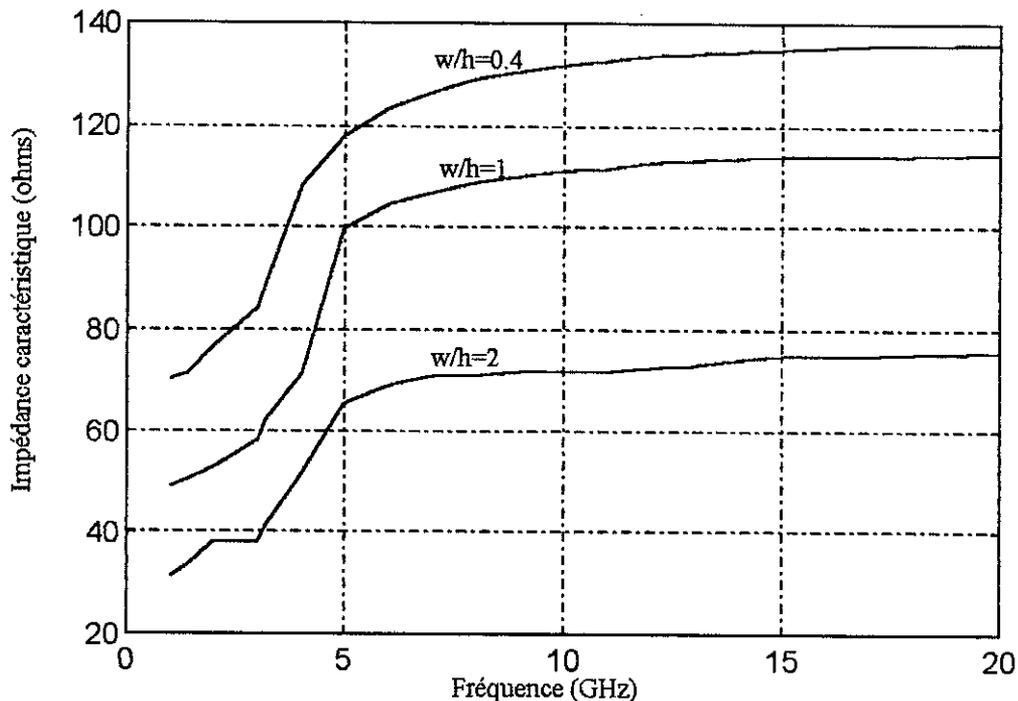


Fig. 4.14 Impédance caractéristique de la ligne microruban en fonction de la fréquence,  $\epsilon_r=9.74$ ,  $h=6.35$ mm,  $w=(2.54, 6.35, 12.7)$  mm

En pratique, pour une ligne de transmission, on souhaite favoriser l'existence d'ondes guidées, ce qui exige une faible valeur de  $h$  [34]. Par conséquent, l'impédance caractéristique obtenue est relativement faible (pour une ligne microruban dans une bande de fréquence s'étalant à 60 GHz, l'impédance caractéristique varie entre 20 à 125 ohms). Dans le domaine des micro-ondes, les caractéristiques électriques de la structure microruban dépendent aussi bien de ses dimensions que de ses paramètres électriques. Ce sont eux qui définissent l'impédance caractéristique et le coefficient de propagation des lignes microrubans. Le substrat utilisé doit être de bonne qualité, homogène, de permittivité soigneusement contrôlée et la réalisation doit s'effectuer avec un très grand soin pour assurer une bonne précision dimensionnelle. Ainsi lors de la conception des lignes microrubans, les dimensions et les propriétés du diélectrique devraient être choisies judicieusement pour assurer un tel fonctionnement dans la bande de fréquence adéquate. Il en est de même pour l'épaisseur du substrat. Il a été montré dans la pratique [33] qu'un diélectrique mince a tendance à concentrer le champ entre les deux conducteurs de la ligne microruban (plan de masse et le conducteur central), alors qu'un diélectrique épais favorise l'excitation des ondes de surface.

#### 4.2.3 Effet du blindage de la ligne

On a utilisé la théorie présentée dans la section 3.4, pour déterminer l'allure de la constante diélectrique effective d'une ligne microruban fermée en fonction de la fréquence. On note que le choix des fonctions de base est très important dans l'efficacité numérique de la méthode. Si on choisit bien nos fonctions de base, la dimension de la matrice pourra être réduite, sans affecter la

choix des fonctions de base est très important dans l'efficacité numérique de la méthode. Si on choisit bien nos fonctions de base, la dimension de la matrice pourra être réduite, sans affecter la précision. On prend alors  $M = 1$  et  $N = 1$ . Pour le mode dominant, nous choisissons ces deux formes pour  $J_{x1}$  et  $J_{z1}$ .

$$J_{z1} = \begin{cases} \frac{1}{2w} \left\{ 1 + \left[ \frac{|x|}{w} \right]^2 \right\}, & |x| < w \\ 0, & w < |x| < a \end{cases} \quad \text{et } J_{x1} = \begin{cases} \frac{1}{w} \sin \frac{\pi x}{w}, & |x| < w \\ 0, & w < |x| < a \end{cases}$$

Leurs transformées sont données par

$$J_{z1}(n) = \frac{2 \sin(k_n w)}{k_n w} + \frac{3}{(k_n w)^3} \left\{ \cos(k_n w) - \frac{2 \sin(k_n w)}{k_n w} + \frac{2[1 - \cos(k_n w)]}{(k_n w)^2} \right\}$$

$$J_{x1} = \frac{2\pi \sin(k_n w)}{(k_n w)^2 - \pi^2}$$

On note également que le calcul numérique des éléments de la matrice nécessite l'évaluation des sommes infinies, qui peuvent être évaluées d'une manière efficace. En effet pour  $i$  très grand chaque terme dans ces sommations tend vers  $(k_n w)^{-3}$ . La figure 4.15 illustre l'influence boîtier sur les variations de la constante diélectrique effective en fonction de la fréquence, pour  $N = 1$  et  $M = 1$ . Nous avons présentés aussi les résultats expérimentales pour une ligne microruban ouverte [38]. Il est clair que le blindage de la ligne microruban diminue la constante diélectrique effective par rapport à la ligne ouverte.

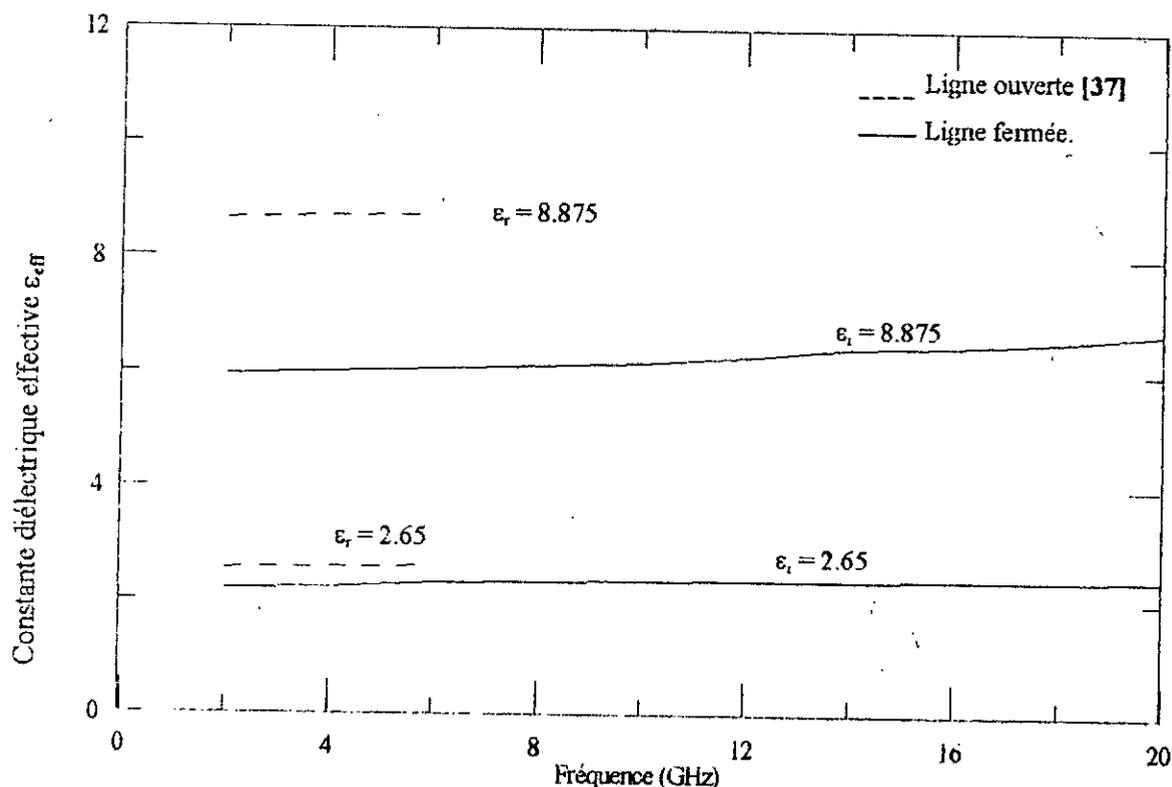


Fig. 4.15 Constante diélectrique effective d'une ligne microruban fermée en fonction de la fréquence Pour  $a = 6.35\text{mm}$ ,  $w = 1.27\text{mm}$ ,  $h = 1.27\text{mm}$  et  $d = 11.43\text{mm}$ .

La méthode est implémentée avec un simple programme qui ne nécessite pas un temps de calcul exagéré (10-15 s / structure).

### **4.3 Conclusion**

Nous avons pu déterminer les caractéristiques de deux types de ligne de transmission : ligne triplaque et ligne microruban. L'influence de divers paramètres, des lignes considérées, sur ces caractéristiques est mise en évidence et interprétée.

Les caractéristiques de la ligne triplaque sont indépendantes de la fréquence. Elles dépendent seulement de la nature du milieu et de la géométrie de la ligne.

Par contre la ligne microruban présente un comportement dispersif en hautes fréquences dû à la dominance du mode hybride.

# CONCLUSION

## *Conclusion*

En vue de leurs utilisations dans les circuits intégrés micro-ondes, l'étude des lignes de transmission planaires devient de plus en plus rigoureuse. Avec le développement de l'analyse numérique, diverses études ont été élaborées. Ainsi, l'objectif de ce travail consistait à examiner les structures des lignes planaires, à exposer quelques méthodes d'analyse et à les appliquer pour déterminer les caractéristiques de ces lignes.

Les chapitres et paragraphes précédents ont mis évidence l'existence d'un nombre varié de lignes de transmission, particulièrement la ligne triplaque et la ligne microruban, toutes, sont utilisées en pratique. On peut dès lors se demander quels critères adopter dans le choix d'une structure de transmission à fréquence relativement élevée.

En fait, la ligne triplaque est techniquement plus difficile à réaliser mais elle présente l'avantage d'une moindre dispersion. Ceci est dû à la présence des deux plans de base qui constituent un blindage assez efficace: la dispersion ne provient plus que des pertes électromagnétiques le long de l'interface verticale diélectrique-air. Le mode principal de propagation sera donc d'autant plus semblable à un mode TEM que la largeur des plans de base est grande par rapport à celle du conducteur.

La ligne microruban quant à elle, présente un ensemble d'avantages dont on peut citer :

- Toute configuration du conducteur supérieur peut être déposée directement sur le diélectrique, ce qui est une opération peu coûteuse.
- Des éléments semi-conducteurs peuvent être aisément fixés à cette structure puisqu'elle est de configuration plane.
- Tous les éléments incorporés à la structure sont aisément accessibles.

Par contre, il faut noter les inconvénients suivants :

- Les pertes  $\gamma$  sont les plus élevées par suite de rayonnement. Elles dépendent fortement de l'épaisseur et de la constante diélectrique du substrat.
- Le mode dominant de propagation n'est pas TEM. On a vu en effet, que la présence d'une inhomogénéité impose toutefois des conditions aux limites supplémentaires. Le mode dominant sera « quasi-TEM » si la constante diélectrique du substrat est suffisamment petite et si la largeur du conducteur supérieur est suffisamment élevée par rapport à la largeur du plan conducteur de base. Ce mode est d'autant plus semblable à un mode TEM que la fréquence est basse. A fréquence croissante, toutefois, une dispersion croissante apparaît. Dans ce cas, on passe des analyses simples à d'autres analyses de plus en plus rigoureuses.

Les caractéristiques dispersives et quasi-statiques ont fait l'objet de quelques communications [39,40].

Parmi une multitude des méthodes d'analyses, on a développer trois différentes méthodes. Pour des structures géométriquement simples, la méthode de Schwarz-Cristoffel est très efficace et très simple à programmer avec un temps de calcul très réduit. L'inconvénient de cette méthode se rencontre dans la détermination de la transformation adéquate.

La méthode variationnelle quant à elle, présente l'avantage de fournir des expressions stationnaires. Cette méthode aboutie aussi à des résultats très précis sans nécessiter un temps de calcul exagéré. Seulement le choix inadéquat des fonctions d'essai peut aboutir à des résultats d'une précision de l'ordre de 20% sans que la méthode ne diverge.

Malgré le caractère approché de la méthode de Galerkin, elle offre des résultats satisfaisants. Néanmoins, elle présente l'inconvénient de nécessiter un temps d'exécution très lent, ce qui exige des machines relativement puissantes. Aussi les fonctions de base doivent être appropriées aux problèmes étudiés car un choix quelconque de ces fonctions pourraient provoquer la divergence de la méthode.

# REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

*Références Bibliographiques*

- [1] C. VASSALLO  
"Théorie des Guides d'Ondes Electromagnétiques."  
EYROLLES, 1985.
- [2] F. GARDIOL  
"Les Hyperfréquences: Traité d'électricité"  
Presses Polytechnique Romandes.
- [3] R.E. COLLIN  
"Field Theory of Guided Waves"  
NEW YORK MCGRAW - HILL, 1989
- [4] A. VANDERVORST  
"Les Hyperfréquences: Théorie, Pratique, et Mesure"  
LOUVAIN- LA- NEUVE, 1992.
- [5] R.A. PUCCEL, D.J. MASSE, C.P. HARTWIG  
"Losses in microstrip"  
IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-16, no. 6, pp. 342-350, Jun 1968.
- [6] R.M. BARRET  
"Etched Sheets Serve as Microwave Components"  
Electronics, vol: 25, pp. 114-118, jun 1952.
- [7] BHAARTHI, BAHL, SHIDANK, KAUL  
"Analysis Design and Applications of Finelines"  
ARTECH HOUSE, 1987
- [8] S.B. COHN  
"Problème in Strip Transmission Lines"  
IRE. Trans Microwave Theory Thech, vol: MTT- 3 pp. 119 - 129, 1955.
- [9] A. ANGOT  
"Complément des Mathématiques"  
DUNOD 1961.
- [10] A. VANDERVORST  
"Electromagnétisme: Champs, Forces et Circuits "  
LOUVAIN-LA-NEUVE, 1992.
- [11] ABRAMOWITZ, MILTON and STEGUN  
"Handbook of Mathematical Functions"  
DOVER PUBLICATIONS N.Y, 1968.
- [12] P.M. MORSE  
"Methods of Theoretical Physics"  
New York Mc Graw-Hill Book Company Inc, 1953.
- [13] K.C. GUPTA, R. GARG, I.J. BAHL  
"Microstrip Lines and Slotlines"  
ARTECH HOUE, 1979
- [14] S. LEFEUVRE  
"Techniques des Micro-ondes"  
Institut National Polytechnique de Toulouse, 1980
- [15] CHEN -TO-TAI  
"Dyadique Green Fonctions on Electromagnétisme"  
IEEE PRESS.

- [16] K. C. GUPTA, R. GARG, R. CHADHA,  
"Computer-Aided Design of Microwave Circuits",  
ARTECH HOUSE 1981
- [17] M. KIRSHINING, R.H. JANSEN  
"Arguments and an accurate model for the power-currents formulation of microstrip characteristic impedance"  
Artech. Elek. Übertragung (AEU), Vol 37. 1983. P.108-112
- [18] R.H. JANSEN, M. KIRSCHNING  
"Accurate model for effective dielectric constant of microstrip with validity up millimeter-wave frequencies"  
Electr. Letters, Vol.18,1982, p.272-278.
- [19] K. ARAKI, Y. NAITO  
"Upper Bound Calculations on Capacitance of Microstrip Line Using Variational Method and Spectral Domain Approach"  
IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., MTT-26, pp. 506-509, 1978.
- [20] YAMASHITA, R. MITTRA  
"Variational Method for the Analysis of Microstrip Lines"  
IEEE Trans Microwave Theory and Tech, vol: MTT-16, 1956, p.166-172
- [21] E.J. DENLINGER  
"A Frequency Dependent Solution for Microstrip Transmission Lines"  
IEEE Trans Microwave Theory and Tech, vol : MTT-19, Jan 1971, pp. 30-39
- [22] E.YAMASHITA  
"Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems"  
A RTECH HOUSE, 1990.
- [23] MILLER  
"Survey of computational electromagnetic"  
IEEE Trans. Ant. Prop., Jan 1973. pp. 116-119.
- [24] T.M. WILLIS, D.L. SENGUPTA  
"Spectral Analysis of Microstrip Antennas With CG-FFT: Two Dimensional Results"  
IEEE Trans Antennas and Propagation, vol: MTT-37, N°7, July 1989, pp. 810-816
- [25] C.A. BALANIS  
"Antenna Theory Analysis and Design"  
JOHN WILEY & SONS, INC.
- [26] T.ITOH, R. MITTRA  
"Spectral Domain Approach for Calculating the Dispersion Characteristics of Microstrip Lines", IEEE Trans Microwave Theory and Tech, vol: MTT-21, 1973, p. 496-499
- [27] W.H.CHANG  
"Analytical IC Metal-Line Capacitance Formulas"  
IEEE Trans Microwave Theory and Tech, vol: MTT-24, Sept 1976, pp. 608-611
- [28] C.SHIH, R.B.WU, S.K.JENG, C.H.CHEN  
"Frequency-Dependent Characteristics of Open Microstrip Lines With Finite Strip Thickness"  
IEEE Trans Microwave Theory and Tech, vol: 37, N°4, Apr. 1989
- [29] P. WALDOW, L. JEFF  
"The Skin-Effect at High Frequencies"  
IEEE Trans Microwave Theory and Tech, vol: MTT-33, Oct 1985, pp. 1076-1082

- [30] R. BADOUI,  
"Les micro-ondes: Circuits. Microrubans. Fibres"  
MASSON, 1984.
- [31] T. ITOH, R. MITTRA  
"A Technique for Computing Dispersion Characteristics of Shielded Lines"  
IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol MTT- , oct. 1974, pp. 896-898
- [32] H.A. WHEELER  
"Transmission-line properties of a strip on a dielectric sheet on a plane."  
IEEE trans. Microwave Theory Tech . vol. MTT-25 , no.8, pp.631, Aug.1977.
- [33] A. VAN DE CAPELLEA  
"Microstrip antennas and array."  
Int. Research Report of the K.U., pp. 11-12, Oct.1988.  
IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-36, no.6, pp. 621-631, Mar.1978.
- [34] R.AKSAS  
"Analyse d'antennes microruban de forme quelconque par une approche basée sur la  
technique  
des lignes de transmission. Application aux géométrie circulaires"  
Thèse de doctorat présenté à l'Ecole Nationale Polytechnique.
- [35] M.V Schneider  
"Microstrip lines for microwave integrated circuits"  
B.S.T.J., Vol. 48, 1969, pp. 1421-1444.
- [36] M. KOBAYASHI, F. ANDO  
"Dispersion Characteristics of open microstrip lines."  
IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-35, no26, pp. 101-105, FEB.1987.
- [37] K. UCHIDA, T. NODA, T. MATSUNGA  
"New Type of spectral-Domain Analysis of a Microstrip line."  
IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-37, no.6, pp. 947-951, Jun.1989.
- [38] R. MITTRA, T. ITOH  
"A new technique for the analysis of the dispersion characteristics of microstrip lines."  
IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-19, pp. 47-56, Jan.1971.

# ANNEXES

## ANNEXE A

### Détermination de l'exposant de propagation d'une ligne avec pertes

L'étude est établit pour une ligne de transmission avec pertes, constituée de deux conducteurs (Fig. 1.3). La direction de propagation est suivant l'axe z. Nous allons utiliser le principe variationnel pour déterminer les parties réelle et imaginaire ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) de l'exposant de propagation  $\gamma$ .

Considérons l'équation homogène de Helmotz donnée par

$$\nabla_t^2 \psi + k_c^2 \psi = 0 \quad (\text{A.1})$$

$\psi$  est la fonction du potentiel scalaire, et  $k_c^2 = k^2 + \gamma^2$ .

En multipliant cette équation par  $\psi$  et en intégrant sur le plan xy, on obtient

$$k_c^2 = - \frac{\iint \psi \nabla_t^2 \psi \, dS}{\iint \psi^2 \, dS} \quad (\text{A.2})$$

Vérifions que cette expression est stationnaire. On suppose une variation  $\delta\psi$  sur  $\psi$ , l'expression (A.2) s'écrit donc

$$2k_c \delta k_c \iint \psi^2 \, dS + 2k_c^2 \iint \psi \delta\psi \, dS = - \iint (\delta\psi \nabla_t^2 \psi + \psi \nabla_t^2 \delta\psi) \, dS \quad (\text{A.3})$$

En utilisant la seconde identité de Green

$$\iint (\psi \nabla_t^2 \delta\psi - \delta\psi \nabla_t^2 \psi) \, ds = \oint_c \left( \psi \frac{\partial \delta\psi}{\partial n} - \delta\psi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \, ds$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normale sortant (Fig. 1.4).

L'expression (A.3) devient

$$2k_c \delta k_c \iint \psi^2 \, dS = -2 \iint \delta\psi (k_c^2 \psi + \nabla_t^2 \psi) \, dS - \oint_c \left( \psi \frac{\partial \delta\psi}{\partial n} - \delta\psi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \, ds \quad (\text{A.4})$$

Puisque la fonction du potentiel  $\psi$  vérifie l'équation homogène de Helmotz, l'intégrale surfacique est nulle. La variation  $\delta k_c$  égale à zéro si l'intégrale linéique est nulle. Nous devons ajouter un terme à l'équation (A.2), qui permet d'annuler l'intégrale linéique sans affecter la valeur de  $k_c$ .

La fonction potentiel  $\psi$  doit vérifier la condition au limite d'impédance [3]

$$g \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi = 0 \quad (\text{A.5})$$

avec  $g = j\omega\epsilon Z_m / k_c^2$ .

Toute fonction multipliée par l'expression  $j\omega\epsilon Z_m (\partial\psi / \partial n) - k_c^2 \psi$  annule l'intégrale linéique. En effectuant des combinaisons de  $\psi$  et  $\partial\psi / \partial n$ , nous trouvons l'expression convenable à ajouter au numérateur de (A.2), donnée par

$$\oint_c \left( \frac{j\omega\epsilon Z_m}{k_c^2} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \right) \frac{\partial \psi}{\partial n} \, dl$$

L'expression (A.4) devient

$$2\delta k_c \left[ k_c \iint \psi^2 dS + \frac{g}{k_c} \int_C \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)^2 dl \right] = -2 \iint \delta \psi (k_c^2 \psi + \nabla_t^2 \psi) dS + 2 \int_C \left( g \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \right) \frac{\partial \delta \psi}{\partial n} dl = 0$$

Puisque  $\psi$  est une solution de (A.2) et (A.5), l'expression variationnelle de  $k_c^2$  est donnée par

$$k_c^2 = - \frac{\iint \psi \nabla_t^2 \psi dS - \int_C \left( \frac{j\omega \epsilon Z_m}{k_c^2} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \right) \frac{\partial \psi}{\partial n} dl}{\iint \psi^2 dS} \quad (\text{A.6})$$

L'intégrale  $\iint \psi^2 dS$  est un terme de normalisation. Nous devons choisir une fonction approximative de  $\psi$  telle que  $\iint \psi^2 dS$  égale à l'unité.

Pour une ligne de transmission idéale, on note par  $\psi_0$  la fonction potentiel exacte. Cette fonction peut être considérée comme une approximation de  $\psi$ . Les champs électrique et magnétique s'écrivent en fonction de  $\psi_0$  comme suit:  $H_x = \mu_0^{-1} \partial \psi / \partial y$ ,  $H_y = \mu_0^{-1} \partial \psi / \partial x$ ,  $E_x = Z H_y$  et  $E_y = -Z H_x$ .

En terme de la fonction potentiel  $\phi$  introduite dans l'analyse d'une ligne idéale (section 1.3), on a:  $H_x = Y \partial \phi / \partial y$  et  $H_y = -Y \partial \phi / \partial x$ . On peut donc identifier  $\psi_0$  à  $\mu_0 Y \phi$ . La densité de courant sur les conducteurs est donnée par  $\mu_0 |J_s| = |\partial \psi_0 / \partial n|$ . Sur le premier conducteur on a  $\psi_0 = \mu_0 Y V_0 / 2$  et sur le deuxième on a  $\psi_0 = -\mu_0 Y V_0 / 2$ .

Nous supposons que  $\psi_0$  est normalisée c'est à dire  $\iint \psi_0^2 dS = \mu_0 \epsilon$ , donc  $\iint \psi^2 dS$  égale à l'unité. En introduisant les valeurs de  $\psi_0$  et  $\partial \psi_0 / \partial n$ , l'expression de  $k_c^2$  devient

$$k_c^2 = -Z \frac{V_0}{2} \left( \oint_{c_1} |\vec{J}_s| dl + \oint_{c_2} |\vec{J}_s| dl \right) + \frac{j k Z Z_m}{k_c^2} \oint_{c_1+c_2} |\vec{J}_s|^2 dl \quad (\text{A.7})$$

La première intégrale dans (A.7) donne  $2ZP$ ,  $P$  est la puissance totale. Tandis que  $R_m \int_{c_1+c_2} |\vec{J}_s|^2 dS = 2P_c$ ,  $P_c$  est la puissance dissipée dans les conducteurs. Puisque la conductivité des métaux est finie, l'énergie magnétique interne est égale à

$$W_{mi} = \frac{1}{4} \mu_0 \int_0^{u_0} \oint_{c_1+c_2} |\vec{J}_s|^2 e^{-2u/\delta_s} du dl$$

L'intégrale sur  $u$ , consiste à prendre les points internes où le champ est négligeable, on aura donc

$$W_{mi} = \frac{1}{8} \mu_0 \frac{\delta_s^2}{2} \oint_{c_1+c_2} |\vec{J}_s|^2 dl = \frac{1}{8} (\omega \sigma \delta_s)^{-1} \oint_{c_1+c_2} |\vec{J}_s|^2 dl = \frac{P_c}{2\omega} \quad (\text{A.8})$$

$\delta_s = (2 / \omega \mu_0 \sigma_c)^{1/2}$  est la profondeur de pénétration. Remplaçons l'intégrale dans (A.7) par  $-2kZ (-jP_c + 2\omega W_{mi})$ , l'équation donnant  $k_c^2$  devient

$$k_c^4 + 2ZPk_c^2 (-jP_c + 2\omega W_{mi}) = 0$$

La solution de cette équation est égale à

$$k_c^2 = -ZP + \left[ (ZP)^2 + 2kZ (jP_c - 2\omega W_{mi}) \right]^{1/2} \approx \frac{k(jP_c - 2\omega W_{mi})}{P} \quad (\text{A.9})$$

En remplaçant  $k_c^2$  par  $k^2 + (j\beta + \alpha)^2$ , on obtient

$$2\beta\alpha = \frac{k P_c}{P} \quad (\text{A.10})$$

$$k^2 - \beta^2 + \alpha^2 = \frac{2 W_{mi} \omega k}{P} \quad (\text{A.11})$$

Puisque les pertes sont faibles, on doit prendre  $\beta \approx k$ . L'équation (A.10) s'écrit

$$\alpha = \frac{P_c}{2P} \quad (\text{A.12})$$

Dans (A.11), si on remplace  $k^2 - \beta^2$  par  $(k - \beta)(k + \beta) \approx 2k(k - \beta)$ , on obtient

$$2k(k - \beta) = -\frac{2\omega W_{mi}}{P} - \alpha^2 = -\frac{2\omega W_{mi}}{P} \quad (\text{A.13})$$

La constante de phase  $\beta$  sera donc

$$\beta = k + \frac{\omega W_{mi}}{P} \quad (\text{A.14})$$

## ANNEXE B

Évaluation de l'intégrale  $\oint_w \left| \frac{dw'}{dw} \right| dw'$ 

On note par I l'intégrale à évaluer. Le contour d'intégration dans le plan  $W'$  est représenté sur la figure 2.10b

$$I = \oint_w \left| \frac{dw'}{dw} \right| dw' \quad (\text{B.1})$$

D'après les relations (2.21) et (2.25), on trouve

$$\left| \frac{dw'}{dz} \right| = \frac{d}{\pi} \left| [z(z+1)]^{-1/2} \right| \quad (\text{B.2})$$

$$\left| \frac{dw'}{dz} \right| = \frac{|A_0| x_0^{1/2}}{2} \left| [z(z+x_0)(z+1)]^{-1/2} \right| \quad (\text{B.3})$$

avec  $A_0 = \left[ \text{sn}^{-1}(1, k) - \text{sn}^{-1}(k^{-1}, k) \right]^{-1} = (jK')^{-1}$ ,  $k^2 = x_0^{-1}$

En substituant (B.2) et (B.3) dans (B.1), on obtient

$$I = \frac{\pi}{2K'd} \oint_w \frac{|dw'|}{\left| \left[ 1 - k^2 \text{sn}^2(jK'w' - jK' + K, k) \right]^{1/2} \right|} \quad (\text{B.4})$$

L'intégration dans le plan  $W'$ , est effectuée sur deux contours: le premier pour  $v' = v_0$  et  $0 < u' < 1$  qui correspond aux deux plans de masse. Le deuxième quand  $v' = \Delta v$  et  $0 < u' < 1$ , qui correspond au ruban central. On note par  $I_1$  l'intégrale associée au premier contour, et par  $I_2$  celle associée au deuxième contour.

Calculons ces deux intégrales. Pour  $w' = u' + jv_0 = u' + jK/K'$  (premier contour), on a [3]

$$\text{sn}(jK'w' - jK' + K, k) = \text{sn}(jK'u' - jK', k) = [k \text{sn}(jK'u', k)]^{-1} = [jk \text{tn}(K'u', k')]^{-1}$$

avec  $k' = (1-k^2)^{1/2}$ . Le long de ce contour l'intégrand devient

$$\left[ 1 - k^2 \text{sn}^2(jK'w' - jK' + K, k) \right]^{-1/2} = \text{sn}(K'u', k) \quad (\text{B.5})$$

Car  $\text{tn}(K'u', k') = \text{sn}(K'u', k') / \text{cn}(K'u', k')$  et  $\text{sn}^2(K'u', k') + \text{cn}^2(K'u', k') = 1$ .

L'intégrale  $I_1$  s'écrit sous la forme

$$I_1 = \frac{\pi}{2dK'} \int_0^1 \text{sn}(K'u', k) du' = \frac{\pi}{2dK'^2} \int_0^{K'} \text{sn}(K'u', k') d(K'u') \\ I_1 = \frac{\pi}{2k'K'^2} \ln \frac{\text{dn}(K', k') - k' \text{cn}(K', k')}{1 - k'} \quad (\text{B.6})$$

En utilisant les relations  $\text{dn}^2(K', k') = 1 - k'^2 \text{sn}^2(K', k')$ ,  $\text{dn}(K', k') = k$  et  $\text{cn}(K', k') = 0$ , l'équation (B.6) devient

$$I_1 = \frac{\pi}{2dk'K'} \ln \frac{k}{1-k'} \quad (\text{B.7})$$

Si  $L \geq 2d$ , on aura

$$k - x_0^{-1/2} = 2 e^{-\pi L/2d}, \quad k' = 1 - 2 e^{-\pi L/2d} \approx 1, \quad K = \frac{\pi}{2}, \quad K' = \ln 2 + \frac{\pi L}{2d}.$$

Sous ces conditions l'intégrale  $I_1$  devient

$$I_1 = \frac{\pi^2 L}{4d \left( \ln 2 + \frac{\pi L}{2d} \right)^2} \quad (\text{B.8})$$

Pour la seconde intégrale  $I_2$  où  $v' = \Delta v$ ,  $0 < u' < 1$ , on aura

$$\text{sn}(jK'(u' + j\Delta v) - jK' + K, k) = k^{-1} \text{dn}(K'u' + jK'\Delta v, k')$$

$$\text{et } 1 - \text{dn}^2(K'u' + jK'\Delta v, k) = k'^2 \text{sn}^2(K'u' + jK'\Delta v, k')$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\pi}{2d K' k'} \int_0^1 \frac{du'}{\left| \text{sn}(K'u' + jK'\Delta v, k') \right|} \\ &= \frac{\pi}{2d K' k'} \int_0^{K'} \frac{du}{\left| \text{sn}(u + jK'\Delta v, k') \right|} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Si on prend  $\Delta v \leq 0.1v_0$  et on suppose que  $L \geq 2d$ , alors

$$K'\Delta v = K \frac{\Delta v}{v_0} \leq \frac{\pi}{20}$$

et  $\text{sn}(u + jK'\Delta v, k') \approx \text{sn}(u, k') + jK'\Delta v \text{cn}(u, k') \text{dn}(u, k')$ . Le module de ce terme est donné par

$$\left[ \text{sn}^2(u, k') + (K'\Delta v)^2 \text{cn}^2(u, k') \text{dn}^2(u, k') \right]^{1/2} \approx \left[ \text{sn}^2(u, k') + (K'\Delta v)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{B.10})$$

Car pour  $u \rightarrow 0$ ,  $\text{cn}(u, k')$  et  $\text{dn}(u, k') \rightarrow 1$ . Quand  $u = K'$ ,  $\text{cn}(K', k')$  égal à zéro, et  $\text{sn}(K', k')$  égal à l'unité, ce qui introduit une erreur acceptable en faisant l'approximation  $(K'\Delta v)^2$ . On constate également que pour  $u < u_1 = 0.4$ ,  $\text{sn}(u, k') \approx u$  et pour  $u > u_1$ , le terme  $(K'\Delta v)^2$  est négligeable par rapport à  $\text{sn}^2(u, k')$ .

En utilisant ces approximations l'intégrale  $I_2$  s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\pi}{2k'K'^2} \left[ \int_0^{u_1} \frac{du}{\left[ u^2 + (K'\Delta v)^2 \right]^{1/2}} + \int_{u_1}^{K'} \frac{du}{\text{sn}(u, k')} \right] \\ &= \frac{\pi}{2k'K'} \ln \frac{4}{k K'\Delta v} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

La valeur de  $\Delta v$  peut être exprimé en fonction de l'épaisseur  $t$  du ruban comme suit

$$K'\Delta v = \frac{\pi t}{4d} \quad (\text{B.12})$$

En substituant (B.12) dans (B.11), la forme finale de  $I_2$  sera

$$I_2 = \frac{\pi}{2k'K'} \ln \frac{16d}{k \pi t} \quad (\text{B.13})$$

## ANNEXE C

## Calcul de l'impédance caractéristique (3.45)

C.1 Détermination des coefficients  $K_{mn}^{(i,j)}$ 

$$K_{mn}^{(1,1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}_{xm}(\xi) \tilde{G}_{xx}(\xi) \tilde{\phi}_{xm}(\xi) d\xi \quad (C.1)$$

$$K_{mn}^{(1,2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}_{xm}(\xi) \tilde{G}_{xz}(\xi) \tilde{\phi}_{zm}(\xi) d\xi \quad (C.2)$$

$$K_{mn}^{(2,1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}_{zm}(\xi) \tilde{G}_{zx}(\xi) \tilde{\phi}_{xm}(\xi) d\xi \quad (C.3)$$

$$K_{mn}^{(2,2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}_{zm}(\xi) \tilde{G}_{zz}(\xi) \tilde{\phi}_{zm}(\xi) d\xi \quad (C.4)$$

Les fonctions  $\tilde{\phi}_{ov}(\xi)$ ,  $o = (x, y)$ ,  $v = (m, n)$  sont données par

$$\tilde{\phi}_{xn}(\xi) = (-1)^n \frac{4n\pi}{\xi} J_{2n}(\xi w) \quad (C.5)$$

$$\tilde{\phi}_{xm}(\xi) = (-1)^m \frac{4m\pi}{\xi} J_{2m}(\xi w) \quad (C.6)$$

$$\tilde{\phi}_{zn}(\xi) = (-1)^n 2\pi w J_{2n}(\xi w) \quad (C.7)$$

$$\tilde{\phi}_{zm}(\xi) = (-1)^m 2\pi w J_{2m}(\xi w) \quad (C.8)$$

$J_{2n}(w\xi)$  et  $J_{2m}(w\xi)$  sont les fonctions de Bessel d'ordre  $2n$ .

C.2 Calcul des paramètres  $C(\xi)$  et  $B(\xi)$ 

On se limitant dans le cas où  $N = 1$ ,  $M = 0$ , les relations (3.19c) et (3.19b) seront de la forme

$$\tilde{J}_x(\xi) = -I_{x1} \frac{4\pi}{\xi} J_2(\xi w) \quad (C.9)$$

$$\tilde{J}_z(\xi) = 2\pi I_{z0} w J_0(\xi w) \quad (C.10)$$

En utilisant les relations (3.17a), (3.17b) on trouve

$$A'(\xi) = \frac{2\pi}{\beta^2 + \xi^2} \left\{ \xi w J_0(\xi w) I_{z0} + \frac{2\beta}{\xi} J_2(\xi w) I_{x1} \right\} \quad (C.11)$$

$$B'(\xi) = -\frac{j2\pi}{\beta^2 + \xi^2} \left\{ \beta w J_0(\xi w) I_{z0} - 2 J_2(\xi w) I_{x1} \right\} \quad (C.12)$$

Les equations (3.16a) et (3.16b) donnent

$$A(\xi) = \frac{2\pi k_0 Z_0}{\beta^2 + \xi^2} \frac{\xi w J_0(\xi w) I_{z0} + \frac{2\beta}{\xi} J_2(\xi w) I_{x1}}{p \sin(lh) + l \cos(lh)} \quad (C.13)$$

$$B(\xi) = \frac{-2\pi j \beta w J_0(\xi w) I_{z0} - 2 J_2(\xi w) I_{x1}}{\beta^2 + \xi^2} \frac{1}{p \sin(lh) + l \cos(lh)} \quad (C.14)$$

### C.3. Calcul des champs $\tilde{E}_{oi}, \tilde{H}_{oi}$ $i = 1, 2;$ $o = x, y$

La relation (3.15c) avec (3.6) et (3.11) donne

$$\tilde{E}_{x1} = \left\{ j\beta A(\xi) + \frac{\xi l Z_0}{\epsilon_r k_0} B(\xi) \right\} \sin(l y) \quad , y \leq h \quad (C.15)$$

La relation (3.15b) avec (3.11) donne

$$\tilde{E}_{y1} = \frac{Z_0}{j\epsilon_r k_0} (\xi^2 + \beta^2) B(\xi) \cos(l y) \quad , y \leq h \quad (C.16)$$

La relation (3.14c) avec (3.6) et (3.11) donne

$$\tilde{H}_{x1} = \left\{ j\beta B(\xi) + \frac{\xi l}{Z_0 k_0} A(\xi) \right\} \cos(l y) \quad , y \leq h \quad (C.17)$$

La relation (3.14b) avec (3.6) donne

$$\tilde{H}_{y1} = \frac{j}{Z_0 k_0} (\xi^2 + \beta^2) A(\xi) \sin(l y) \quad , y \leq h \quad (C.18)$$

De même, pour  $y \geq h$  on trouve

$$\tilde{E}_{x2} = \left\{ j\beta A(\xi) + \frac{\xi l Z_0}{\epsilon_r^2 k_0} B(\xi) \right\} \sin(l h) e^{-p(y-h)} \quad , y \geq h \quad (C.19)$$

$$\tilde{E}_{y2} = \frac{Z_0 l}{j\epsilon_r^2 k_0 p} (\xi^2 + \beta^2) B(\xi) \sin(l h) e^{-p(y-h)} \quad , y \geq h \quad (C.20)$$

$$\tilde{H}_{x2} = \left\{ j\beta \frac{1}{\epsilon_r p} B(\xi) - \frac{\xi p}{Z_0 k_0} A(\xi) \right\} \sin(l h) e^{-p(y-h)} \quad , y \geq h \quad (C.21)$$

$$\tilde{H}_{y2} = \frac{j}{Z_0 k_0} (\xi^2 + \beta^2) A(\xi) \sin(l h) e^{-p(y-h)} \quad , y \geq h \quad (C.22)$$

### C.4 Evaluation des intégrales Eh1 et Eh2

Une combinaison entre les relations de la section (C.3) permet d'écrire

$$\tilde{E}_{x1} \tilde{H}_{y1}^* = R_1 R_7^* \sin(l y) \sin(l^* y) \quad (C.23)$$

$$\tilde{E}_{y1} \tilde{H}_{x1}^* = R_3 R_5^* \cos(l y) \cos(l^* y) \quad (C.24)$$

$$\tilde{E}_{x2} \tilde{H}_{y2}^* = R_2 R_8^* e^{-p(y-h)} e^{-p^*(y-h)} \quad (C.25)$$

$$\tilde{E}_{y2} \tilde{H}_{x2}^* = R_4 R_6^* e^{-p(y-h)} e^{-p^*(y-h)} \quad (C.26)$$

L'intégration des expressions (3.35c) et (3.35b) donne

$$Eh1 = (R_1 R_7^* - R_3 R_5^*) \frac{\sin(2 j h \operatorname{Im}g(l))}{4 j \operatorname{Im}g(l)} + (R_1 R_7^* + R_3 R_5^*) \frac{\sin(2 h \operatorname{Re}(l))}{4 \operatorname{Re}(l)} \quad (C.27)$$

$$Eh2 = \frac{(R_2 R_8^* - R_4 R_6^*)}{2 \operatorname{Re}(p)} \quad (C.28)$$

Les coefficients  $R_i$  ( $i=1,8$ ) sont formulés comme suit

$$R_1 = j\beta A(\xi) + \frac{\xi l Z_0}{\epsilon_r k_0} B(\xi)$$

$$R_2 = \left\{ j\beta A(\xi) + \frac{\xi l Z_0}{\epsilon_r^2 k_0} B(\xi) \right\} \sin(l h)$$

$$R_3 = \frac{Z_0}{j\epsilon_r k_0} (\xi^2 + \beta^2) B(\xi)$$

$$R_4 = \frac{Z_0 l}{j\epsilon_r^2 k_0 p} (\xi^2 + \beta^2) B(\xi) \sin(l h)$$

$$R_5 = j\beta B(\xi) + \frac{\xi l}{Z_0 k_0} A(\xi)$$

$$R_6 = \left\{ j\beta \frac{l}{\epsilon_r p} B(\xi) - \frac{\xi p}{Z_0 k_0} A(\xi) \right\} \sin(l h)$$

$$R_7 = \frac{j}{Z_0 k_0} (\xi^2 + \beta^2) A(\xi)$$

$$R_8 = \frac{j}{Z_0 k_0} (\xi^2 + \beta^2) A(\xi) \sin(l h)$$

### C.5 Calcul du courant total $I_0$

Dans la relation (3.19c), pour  $M = 0$ , on a

$$J_{z0}(x) = \frac{I_{z0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{w}\right)^2}} \quad (C.29)$$

Le courant total  $I_0$  est donné par l'intégrale

$$I_0 = \int_{-w}^{+w} J_{z0}(x) dx = \int_0^{\pi} w I_{z0} d\theta = \pi w I_{z0} \quad (C.30)$$