

المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية  
وزارة التعليم والبحث العلمي  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
BIBLIOTHEQUE

## ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

### PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'Etat

S U J E T

# **Effets D'extrêmités Dans Une Machine Asynchrone A Rotor Massif à Deux Entrefer**

Proposé par :

**M.E. ZAIM**

Etudié par :

**BOUCHEREK M.  
MOUHOUB A.**

Dirigé par :

**Mme NAMANE**

PROMOTION : Juin 1985



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

en vue de l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'état

## THEME

**Effets D'extrêmités Dans  
Une Machine Asynchrone  
A Rotor Massif à Deux Entrefers**

Proposé par :

**M. EH. ZAIM**

Etudié par :

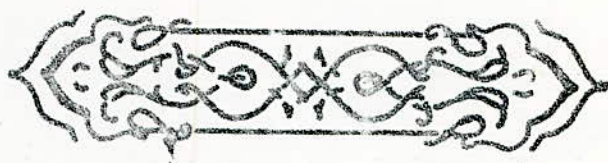
**BOUCHEREK M.  
MOUHOUB A.**

Dirigé par :

**Mme NAMANE**

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا



اللَّهُمَّ ارْزُقْنَا حُسْنَ التَّوَكُّلِ عَلَيْكَ

اللَّهُمَّ إِنِّي أَسْأَلُكَ عِلْمًا نَافِعًا

إِنَّكَ سَمِيعُ الدُّعَاءِ.

## DÉDICACES

- A la mémoire de mon père
- A ma mère
- A mes frères et sœurs
- A mes neveux et nièces
- A tous mes amis

Je dédie ce modeste travail  
Mahmoud.

- A la mémoire de mon père
- A mon cousin Brahim
- A ma femme Rabiha.
- A ma fille Amal.
- A tous les membres de ma famille.
- A tous mes amis

Je dédie ce travail de fin d'étude  
Abderrahmane.

## REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier vivement notre promotrice  
m<sup>me</sup> NAMANE pour son devouement et pour l'aide  
qu'elle nous a apporté.

Par la même occasion nous remercions m<sup>me</sup> ZAÏM  
qui n'a pas cessé de nous orienter dans le bon sens  
pour mener à bien notre travail.

Nous remercions également toutes les personnes qui ont,  
de près ou de loin, contribué à l'élaboration de ce  
projet.

Enfin nous remercions les membres de jury qui, par  
leur présence et leur jugement, vont honorer ce modeste  
travail.

# NOTATIONS

Symbole	Désignation.	Unité
A	Potentiel vecteur -----	T/m
B	Induction magnétique -----	T
H	Champ magnétique -----	A/m
E	Champ électrique -----	V/m
$E_s$	F. e. m statorique -----	V
$E_r$	F. e. m rotorique -----	V
$J_s$	Densité superficielle du courant à la surface du stator -----	A/m
$Z_{op}$	Impédance opérationnelle -----	$\Omega$
$X_f$	La réactance de fuite d'une phase statorique -----	$\Omega$
$R_s$	La résistance d'une phase statorique -----	$\Omega$
V	La valeur efficace de la tension d'alimentation (phase) -----	V
$I_s$	Le courant de phase statorique -----	A
D	Diamètre du stator -----	m
$\gamma$	La conductivité du matériau utilisé -----	$\Omega^{-1} m^{-1}$
$\mu_r$	La perméabilité relative -----	-
E	épaisseur de l'entrefer -----	m
$\alpha = \frac{2\pi}{\tau_p}$	Pulsation géométrique de l'entrefer -----	rd/m
$\tau_p = \frac{\pi D}{P}$	Le pas polaire -----	m
P	Le nombre de paires de pôles -----	-
L	Longueur utile du rotor -----	m

# NOTATIONS

Symbole	DÉSIGNATION	Unité
$\mu_0$	perméabilité du vide ( $4\pi \cdot 10^{-7}$ )	H/m
$t_r$	épaisseur du rotor	m
$\mu$	perméabilité du matériau utilisé au rotor	H/m
$q$	Nombre de phases	-
$k$	Coefficient de bobinage	-
$\lambda$	Expression Complexe, fonction du glissement	$m^2$
$N$	Nombre de spires par phase	-
$\Delta$	Opérateur Laplacien	-
$\nabla$	Opérateur NABLA	-
$T$	Le couple	N.m
$\cos\phi$	Le Facteur de puissance	-
$\eta_g$	Rendement de la génératrice	-
$\eta$	Rendement du moteur	-
$s$	Le glissement du moteur	-



# TABLE DES MATIÈRES

Introduction .....	1
Chapitre I	
Étude théorique:	
* Description de la machine .....	2
* Hypothèses générales et mise en équation .....	4
* Résolution de l'équation de Poisson dans le rotor quand le stator est seul alimenté.....	7
* Expressions générales des Composantes du potentiel vecteur et de l'induction magnétique...	12
* Détermination des constantes d'intégrations par les Conditions aux limites .....	15
* Détermination du flux radial à la surface du rotor...	25
* Détermination de l'impédance opérationnelle...	27
* Détermination du couple .....	28
Chapitre II	
Étude pratique:	
* Présentation de la machine .....	29
* Identification de la machine .....	29
* Essais .....	
* Étalonnage de la génératrice et détermination des pertes mécaniques du moteur .....	32

* Essais à tension d'alimentation Constante.....	32
* Mesure du champ magnétique à la surface du rotor -----	33
* Interprétation des résultats pratiques et théoriques.	36
- Conclusion	
- Annexe	
- Bibliographie.	

## Introduction

L'étude théorique complète d'une machine asynchrone à rotor massif est assez complexe; elle est basée essentiellement sur la résolution des équations de MAXWELL dans un milieu tridimensionnel linéaire ([3], [2]).

Les courants ne sont plus induits dans les conducteurs comme le cas des machines asynchrones classiques mais dans un milieu massif continu; en plus les courants se referment avant d'atteindre les extrémités de la machine ce qui provoque une diminution du couple utile.

Le flux statorique se réfracte sur les nappes du rotor sans pénétrer profondément (effet de peau). C'est à dire que la partie massive interne est faiblement affectée par le flux et il apparaît judicieux de la supprimer.

Le nouveau rotor aura donc la forme d'une cloche ce qui permet d'y introduire un deuxième stator.

L'étude que nous présentons porte sur le calcul des effets d'extrémités dans cette machine à deux entrefers.

Dans la première partie, nous développons un modèle théorique basé essentiellement sur la résolution des équations de Maxwell dans un milieu tridimensionnel linéaire.

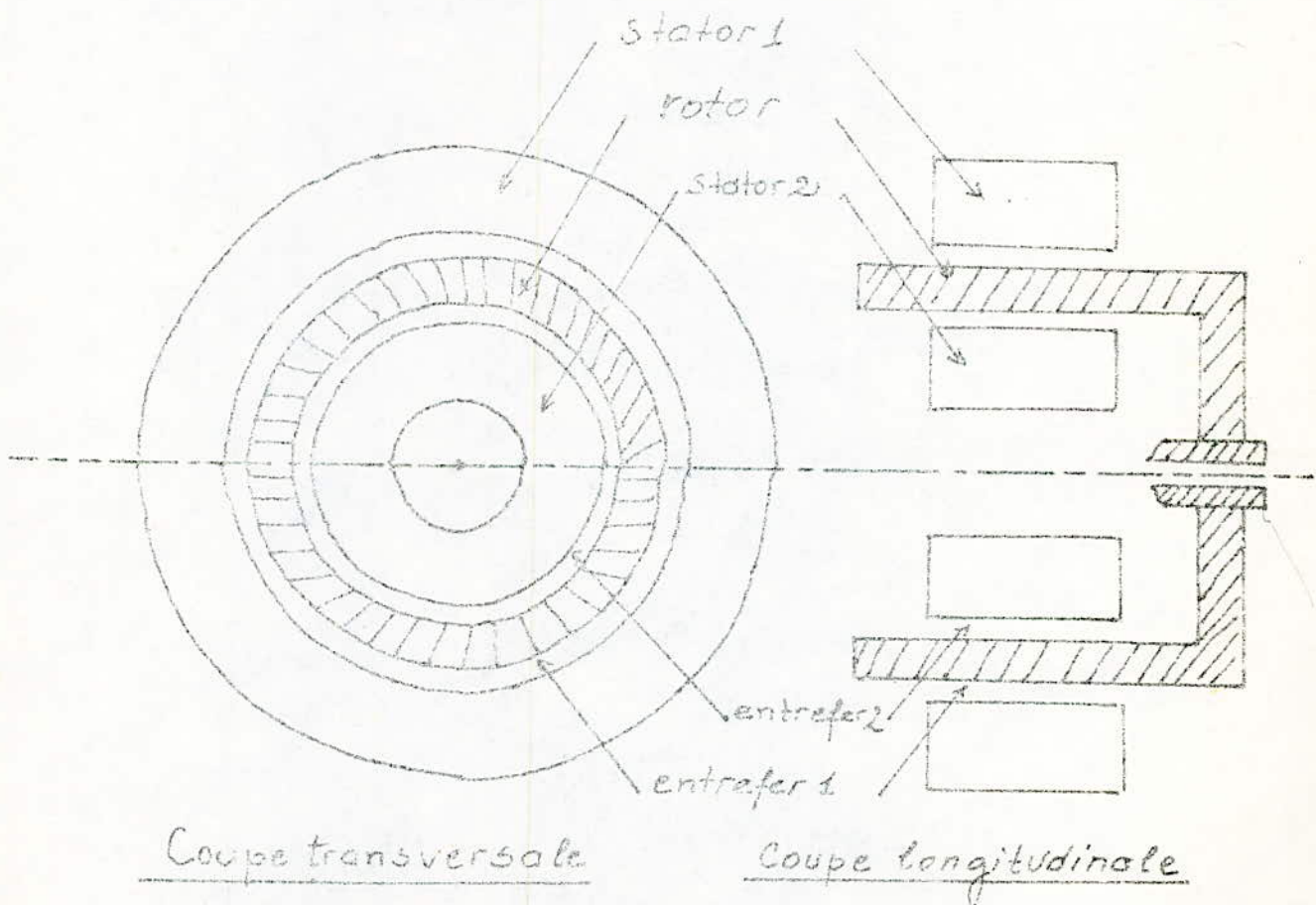
Nous présentons ensuite les essais effectués sur une machine réalisée au laboratoire des machines et nous comparons les résultats avec ceux obtenus théoriquement.

# ÉTUDE THÉORIQUE

## \* Description de la machine:

La machine à étudier est constituée de trois parties essentielles concentriques:

- Un stator extérieur, triphasé à  $2p$  pôles; (stator 1)
- Un stator intérieur triphasé à  $2p$  pôles; (stator 2)
- Un rotor massif cylindrique et creux.



## Hypothèses générales

- Le rotor est caractérisé en tout point par une perméabilité  $\mu$  et une conductivité  $\gamma$  constantes.
- Lorsque le rotor est soumis à un champ magnétique variable, la distribution du potentiel vecteur  $\vec{A}$  dans le rotor obéit à l'équation de Poisson

$$\Delta \vec{A} = \mu \gamma \partial \vec{A} / \partial t, \text{ tandis que la distribution}$$

dans l'entrefer obéit à l'équation de Laplace

$$\Delta \vec{A} = \vec{0}.$$

L'étude théorique complète conduit à la résolution de ces équations dans un domaine tridimensionnel avec certaines conditions aux limites concernant l'induction et le champ magnétiques aux surfaces de séparation :

stator-entrefer et entrefer-rotor.

Ce qui nécessite un calcul très complexe; on adopte alors des hypothèses simplificatrices:

- La perméabilité du stator est infinie ainsi que sa résistivité suivant l'axe de la machine par suite de son feuilletage.
- On admet que l'enroulement statorique est à répartition sinusoïdale on se limite donc au fondamental de la densité superficielle du courant  $J_s$

- à la surface du stator.

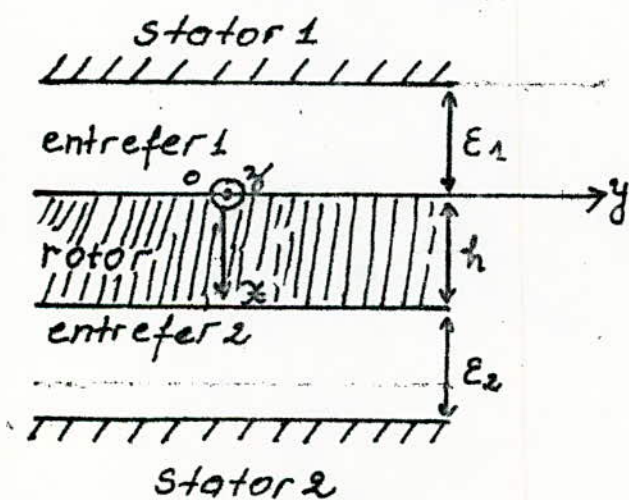
- L'entrefer est constant sous les pôles, on néglige donc l'effet des encoches.

- Les rayons du rotor et du stator sont très grands devant l'épaisseur de l'entrefer.

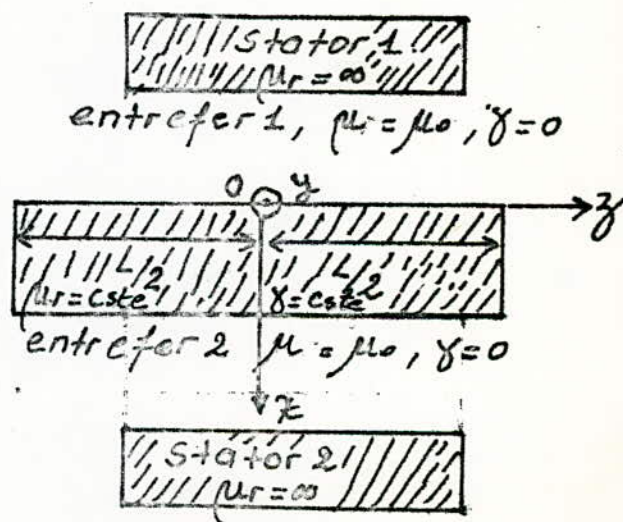
Compte tenu de ces hypothèses, on peut ramener l'étude à un repère cartésien  $(0, x, y, z)$  lié au rotor tel que l'axe  $ox$  soit radial et confondu avec l'axe magnétique de la machine.

L'axe  $oy$  soit parallèle à l'axe de rotation et l'axe  $oz$  soit tangent à la surface du rotor.

L'origine du repère  $o$  se trouve sur la surface extérieure du rotor et à égale distance des extrémités du rotor.



Coupe transversale



Coupe longitudinale

(fig 2)

$$\vec{A} = A_x \vec{x} + A_y \vec{y} + A_z \vec{z}$$

Nous devons résoudre dans le rotor l'équation de Poisson  $\Delta \vec{A} = \mu \gamma \cdot \delta \vec{A} / \delta t$ .

avec la Condition de Jauge  $\text{div} \vec{A} = 0$

et dans l'entrefer l'équation de Laplace

$$\Delta \vec{A} = \vec{0} \text{ avec la Condition de Jauge } \text{div} \vec{A} = 0$$

Notation

toute grandeur électromagnétique s'écrit par sa représentation complexe:

$$\bar{X}(x, y, z, t) = X(x, y) e^{j\omega t} e^{j\omega t}$$

Sa valeur instantanée est alors:

$$x = \text{Re} [\sqrt{2} \cdot X(x, y) e^{j\omega t} e^{j\omega t}]$$

L'étude se limite alors à la détermination de  $X(x, y)$ .

$\omega = 2\pi / T_p$  : la pulsation géométrique de l'entrefer

$T_p$  : le pas polaire

$g$  : le glissement

$i = 1$  ou  $2$  selon le cas: stator 1 ou stator 2



## Résolution de l'équation de Poisson

On considère les hypothèses supplémentaires suivantes:

- La densité du flux radial est invariante dans l'entrefer.
- $A_z = E_z = 0$  pour  $z = \pm l/2$  (1).

La machine étant symétrique par rapport au plan  $z=0$  - alors on a:

$$\begin{aligned}A_x(-z) &= -A_x(z) \\A_y(-z) &= -A_y(z) \\A_z(-z) &= A_z(z)\end{aligned}\quad (2)$$

## Résolution de l'équation de Poisson dans le rotor quand le stator est seul alimenté

Le potentiel vecteur dans le rotor est:

$$\vec{A}_1 = A_{1x} \vec{i} + A_{1y} \vec{j} + A_{1z} \vec{k}$$

avec les notations complexes:

$$A_{1x}(x, y, z, t) = A_{1x}(x, y) e^{j\omega y} e^{j\omega t}$$

$$A_{1y}(x, y, z, t) = A_{1y}(x, y) e^{j\omega y} e^{j\omega t}$$

$$A_{1z}(x, y, z, t) = A_{1z}(x, y) e^{j\omega y} e^{j\omega t}$$

L'équation de Poisson:  $\Delta \vec{A}_1 = \mu_0 \delta \vec{A}_1 / \delta t$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}_1}{\partial z^2} = \mu \delta \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{A}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}_1}{\partial z^2} = (\lambda^2 + a_1^2) \vec{A}_1} \quad (3)$$

avec  $\lambda^2 = j\omega\mu\epsilon$ .

La Condition de Jauge  $\text{div} \vec{A}_1 = 0$

$$\frac{\partial A_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial A_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial A_{1z}}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial A_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial A_{1z}}{\partial z} = -j a_1 A_{1y}} \quad (4).$$

La solution de (3) est obtenue par la superposition des 3 cas suivants:

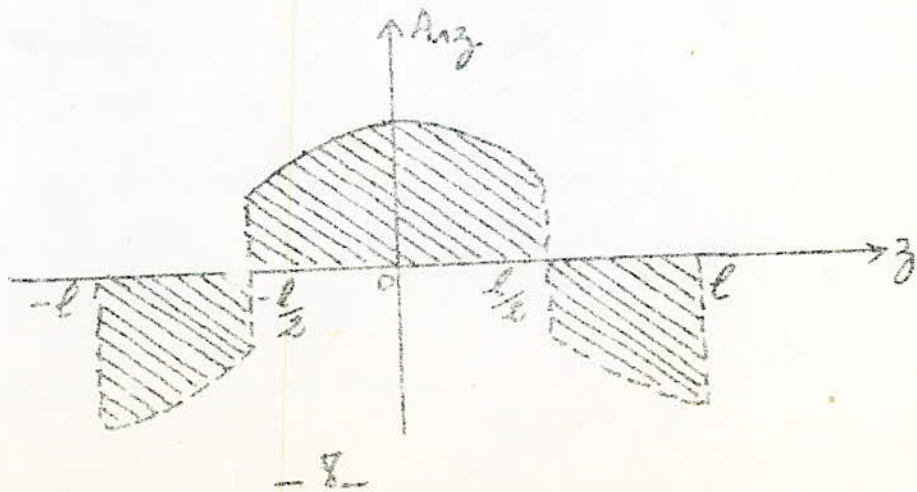
1)  $A_{1z} \neq 0$ ;  $B_{1z} = 0$

2)  $A_{1z} = 0$ ;  $B_{1z} \neq 0$

3)  $A_{1z} = 0$ ;  $B_{1z} = 0$

1)  $A_{1z} \neq 0$ ;  $B_{1z} = 0$

du fait de la parité de  $A_{1z}$  suivant  $z$ , nous choisissons l'allure suivante pour  $A_{1z}$ :



alors  $A_{1z}$  peut être approché par le développement en série de Fourier :

$$A_{1z} = \sum_{n=1,3,\dots} f(x, n) \cos \frac{n\pi}{l} z$$

$$\text{donc } \frac{\partial^2 A_{1z}}{\partial x^2} = \sum_{n=1,3,\dots} f''(x, n) \cdot \cos \frac{n\pi}{l} z$$

$$\text{et } \frac{\partial^2 A_{1z}}{\partial z^2} = - \sum_{n=1,3,\dots} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \cdot f(x, n) \cos \frac{n\pi}{l} z$$

par substitution dans (3); on trouve :

$$f''(x, n) - \delta_{1n}^2 f(x, n) = 0$$

$$\text{avec } \delta_{1n}^2 = \lambda^2 + a_1^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

$$\Rightarrow f(x, n) = a_{1n} e^{-\delta_{1n} x} + b_{1n} e^{\delta_{1n} x}$$

$$\Rightarrow A_{1z} = \sum_{n=1,3,\dots} (a_{1n} e^{-\delta_{1n} z} + b_{1n} e^{\delta_{1n} z}) \cos \frac{n\pi}{l} z$$

$$B_{1z} = 0 \xrightarrow{\vec{B}_1 = \text{rot } \vec{A}_1} \frac{\partial A_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial A_{1x}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A_{1y}}{\partial x} = j \alpha_1 A_{1x}$$

$$\text{de (4)} \Rightarrow \frac{\partial^2 A_{1x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{1x}}{\partial x \partial y} = -j \alpha_1 \frac{\partial A_{1y}}{\partial x} = \alpha_1^2 A_{1x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A_{1x}}{\partial x^2} - \alpha_1^2 A_{1x} = -\frac{\partial^2 A_{1y}}{\partial x \partial y}$$

par substitution on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 A_{1x}}{\partial x^2} - \alpha_1^2 A_{1x} = \sum_{n=1,3,\dots} \frac{n\pi}{l} \sin \left( b_{1n} e^{\frac{\delta_{1n} x}{l}} - a_{1n} e^{-\frac{\delta_{1n} x}{l}} \right) \sin \frac{n\pi}{l} y$$

$$\text{posons } \alpha_{1n} = -\frac{n\pi \delta_{1n}}{l} a_{1n}, \quad \beta_{1n} = \frac{n\pi \delta_{1n}}{l} b_{1n}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A_{1x}}{\partial x^2} - \alpha_1^2 A_{1x} = \sum_{n=1,3,\dots} \left( \alpha_{1n} e^{-\frac{\delta_{1n} x}{l}} + \beta_{1n} e^{\frac{\delta_{1n} x}{l}} \right) \sin \frac{n\pi}{l} y$$

La solution de cette équation est de la forme :

$$A_{1x} = \sum_{n=1,3,\dots} \left( c_{1n} e^{-\frac{\delta_{1n} x}{l}} + d_{1n} e^{\frac{\delta_{1n} x}{l}} \right) \sin \frac{n\pi}{l} y$$

par substitution dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\delta_{1n}^2 c_{1n} - \alpha_1^2 c_{1n} = \alpha_{1n}$$

$$\delta_{1n}^2 d_{1n} - \alpha_1^2 d_{1n} = \beta_{1n}$$

$$\Rightarrow c_{1n} = \frac{\alpha_{1n}}{\delta_{1n}^2 - \alpha_1^2} = -\frac{n \delta_{1n} a_{1n}}{n^2 + (\ell \lambda / \pi)^2} \cdot \frac{\ell}{\pi}$$

$$d_{1n} = \frac{\beta_{1n}}{\delta_{1n}^2 - \alpha_1^2} = \frac{n \delta_{1n} b_{1n}}{n^2 + (\ell \lambda / \pi)^2} \cdot \frac{\ell}{\pi}$$

$$\Rightarrow A_{1x} = \sum_{n=1,3,\dots} \frac{n \delta_{1n} \ell}{n^2 + (\ell \lambda / \pi)^2} \left( b_{1n} e^{\frac{\delta_{1n} x}{l}} - a_{1n} e^{-\frac{\delta_{1n} x}{l}} \right) \sin \frac{n\pi}{l} y$$

$$\frac{\partial A_{1y}}{\partial x} = j a_1 A_{1x} \Rightarrow A_{1y} = j a_1 \int_x A_{1x} dx \Rightarrow$$

$$A_{1y} = \sum_{n=1,3,\dots} \frac{n}{n^2 + (\ell \lambda / \pi)^2} \cdot j a_1 \frac{\ell}{\pi} (b \sin x e^{\delta \sin x} + a \sin x e^{-\delta \sin x}) \sin \frac{n\pi}{\ell} z$$

2)  $A_{1z} = 0; B_{1z} \neq 0$

d'après (2), on peut choisir:  $A_{1y} = \sum_{n=1,3,\dots} g(x, n) \sin \frac{n\pi}{\ell} z$   
 par substitution dans (3), on obtient:

$$g''(x, n) - \delta^2 \sin g(x, n) = 0$$

$$\Rightarrow g(x, n) = c \sin x e^{-\delta \sin x} + d \sin x e^{\delta \sin x}$$

$$\Rightarrow A_{1y} = \sum_{n=1,3,\dots} (c \sin x e^{-\delta \sin x} + d \sin x e^{\delta \sin x}) \sin \frac{n\pi}{\ell} z$$

$$A_{1z} = 0 \xrightarrow{(4)} \frac{\partial A_{1x}}{\partial x} = -j a_1 A_{1y} \Rightarrow A_{1x} = -j a_1 \int_x A_{1y} dx$$

$$\Rightarrow A_{1x} = \sum_{n=1,3,\dots} j \frac{a_1}{\delta \sin} (c \sin x e^{-\delta \sin x} - d \sin x e^{\delta \sin x}) \sin \frac{n\pi}{\ell} z$$

3)  $A_{1z} = 0; B_{1z} = 0$

$$A_{1z} = 0 \xrightarrow{(4)} \frac{\partial A_{1x}}{\partial x} = j a_1 A_{1y}$$

$$B_{1z} = 0 \xrightarrow{\vec{B}_1 = \text{rot} \vec{A}_1} \frac{\partial A_{1y}}{\partial x} = j a_1 A_{1x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A_{1y}}{\partial x^2} - a_1^2 A_{1y} = 0 \Rightarrow A_{1y} = G_1(z) e^{-a_1 x} + H_1(z) e^{a_1 x}$$

- d'autre part de (3) on a:

$$\frac{\partial^2 A_{1y}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_{1y}}{\partial x^2} = (a_1^2 + \lambda^2) A_{1y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A_{1y}}{\partial z^2} - \lambda^2 A_{1y} = 0 \Rightarrow A_{1y} = \alpha_1(x) e^{-\lambda z} + \beta_1(x) e^{\lambda z}$$

mais d'après (2)  $A_{1y}(-z) = -A_{1y}(z) \Rightarrow \alpha_1(x) = -\beta_1(x)$

$$A_{1y} = \beta_1(x) \cdot (e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}) = 2\beta_1(x) \operatorname{sh} \lambda y$$

$$A_{1y} = 2\beta_1(x) \operatorname{sh} \lambda y \quad *$$

alors pour  $y = \pm l/2$  on doit avoir:

$$G_1'(l/2) e^{-a_1 x} + H_1'(l/2) e^{a_1 x} = 2\beta_1(x) \operatorname{sh} \frac{\lambda l}{2}$$

$$\text{Soit } G_1'(l/2) = G_1, \quad H_1'(l/2) = H_1$$

$$\Rightarrow 2\beta_1(x) = (G_1 e^{-a_1 x} + H_1 e^{a_1 x}) / \operatorname{sh} \frac{\lambda l}{2}$$

$$\Rightarrow A_{1y} = (G_1 e^{-a_1 x} + H_1 e^{a_1 x}) \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda l/2}$$

$$\frac{\partial A_{1y}}{\partial x} = j a_1 A_{1x} \Rightarrow A_{1x} = -j \frac{1}{a_1} \frac{\partial A_{1y}}{\partial x}$$

$$A_{1x} = j (G_1 e^{-a_1 x} - H_1 e^{a_1 x}) \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda l/2}$$

### EXPRESSIONS GÉNÉRALES DES COMPOSANTES DU POTENTIEL VECTORIEL $\vec{A}_1$ DANS LE ROTOR

$$A_{1x} = \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\pi l n \delta_{1n}}{n^2 \pi^2 + l^2 \lambda^2} (b_n e^{-\sin x} - d_n e^{\sin x}) \sin \frac{n\pi}{l} z + j (G_1 e^{-a_1 x} - H_1 e^{a_1 x}) \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda l/2}$$

$$+ \sum_{n=1,3,\dots} j \frac{a_1}{\delta_{1n}} (C_n e^{-\sin x} - d_n e^{\sin x}) \sin \frac{n\pi}{l} z$$

$$A_{1y} = \sum_{n=1,3,\dots} j \frac{\pi l n a_1}{\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2} (a_n e^{-\sin x} + b_n e^{\sin x}) \sin \frac{n\pi}{l} z + (G_1 e^{-a_1 x} + H_1 e^{a_1 x}) \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda l/2}$$

$$+ \sum_{n=1,3,\dots} (C_n e^{-\sin x} + d_n e^{\sin x}) \sin \frac{n\pi}{l} z$$

$$A_{1z} = \sum_{n=1,3,\dots} (a_n e^{-\sin x} - b_n e^{\sin x}) \cos \frac{n\pi}{l} z$$

# Expressions générales des Composantes du vecteur induction

$\vec{B}_1$  dans le rotor

$$\vec{B}_1 = \vec{rot} \vec{A}_1 = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_{1x} & A_{1y} & A_{1z} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_{1x} = j a_1 A_{1z} - \partial A_{1y} / \partial z \\ B_{1y} = \partial A_{1x} / \partial z - \partial A_{1z} / \partial x \\ B_{1z} = \partial A_{1y} / \partial x - j a_1 A_{1x} \end{cases}$$

$$* B_{1x} = \sum_{n=1,3,\dots} \frac{j a_1 l^2 \lambda^2}{\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2} (a_{1n} e^{-\delta_{1n} x} - b_{1n} e^{\delta_{1n} x}) \cos \frac{n \pi y}{l} \\ - \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\pi n}{l} (c_{1n} e^{-\delta_{1n} x} + d_{1n} e^{\delta_{1n} x}) \cos \frac{n \pi y}{l} - \lambda (g_{1n} e^{-a_{1n} x} + h_{1n} e^{a_{1n} x}) \frac{\cosh \lambda z}{\sinh \frac{\lambda l}{2}}$$

$$* B_{1y} = \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\lambda^2 l^2 \delta_{1n}}{\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2} (a_{1n} e^{-\delta_{1n} x} - b_{1n} e^{\delta_{1n} x}) \cos \frac{n \pi y}{l} + \\ \sum_{n=1,3} \frac{j \pi a_{1n}}{l \delta_{1n}} (c_{1n} e^{-\delta_{1n} x} - d_{1n} e^{\delta_{1n} x}) \cos \frac{n \pi y}{l} + j \lambda (g_{1n} e^{-a_{1n} x} - h_{1n} e^{a_{1n} x}) \frac{\cosh \lambda z}{\sinh \frac{\lambda l}{2}}$$

$$* B_{1z} = \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2}{l^2 \delta_{1n}} (d_{1n} e^{\delta_{1n} x} - c_{1n} e^{-\delta_{1n} x}) \sin \frac{n \pi y}{l}$$

Remarque

Dans le cas de notre machine on peut faire l'approximation suivante:

$$|\lambda|^2 = g_{\text{air}} \mu_0 \mu_r \delta \gg \left( a_{1n}^2 + \frac{\pi^2 n^2 l^2}{l^2} \right)$$

$$c. \bar{a}. d \quad \delta_{1n}^v = \lambda^v + a_1^v + \frac{\pi^v n^v}{l^2} \approx \lambda^v$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \delta_{1n}}$$

Cette approximation est d'autant plus valable que le rang de l'harmonique est faible et le glissement est grand, donc les expressions des composantes du vecteur induction deviennent:

$$B_{1x} = j a_1 l^2 \lambda^v \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2} (a_{1n} e^{-\lambda x} + b_{1n} e^{\lambda x}) \cos \frac{n\pi}{l} y$$

$$- \frac{\pi}{l} \sum_{n=1,3,\dots} n (c_{1n} e^{-\lambda x} + d_{1n} e^{\lambda x}) \cos \frac{n\pi}{l} y - \lambda (G_1 e^{-\lambda x} + H_1 e^{\lambda x}) \frac{\operatorname{ch} \lambda z}{\operatorname{sh} \frac{\lambda l}{2}}$$

$$B_{1y} = \sum_{n=1,3,\dots} l^2 \lambda^3 \frac{1}{\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2} (a_{1n} e^{-\lambda x} - b_{1n} e^{\lambda x}) \cos \frac{n\pi}{l} y$$

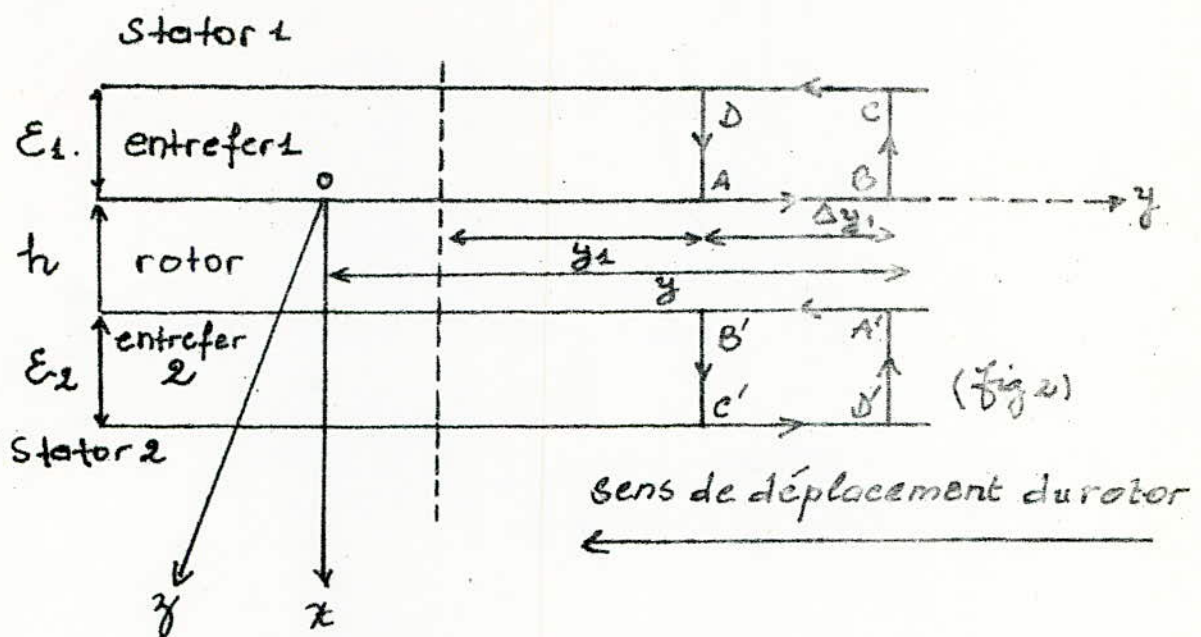
$$+ j \frac{a_1 \pi}{l \lambda} \sum_{n=1,3,\dots} n (c_{1n} e^{-\lambda x} - d_{1n} e^{\lambda x}) \cos \frac{n\pi}{l} y + j (G_1 e^{-\lambda x} - H_1 e^{\lambda x}) \frac{\operatorname{ch} \lambda z}{\operatorname{sh} \frac{\lambda l}{2}}$$

$$B_{1z} = \frac{1}{\lambda l^2} \sum_{n=1,3,\dots} (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2) (d_{1n} e^{\lambda x} - c_{1n} e^{-\lambda x}) \sin \frac{n\pi}{l} y$$

Les constantes d'intégrations  $a_{1n}$ ,  $b_{1n}$ ,  $c_{1n}$ ,  $d_{1n}$ ,  $G_1$ ,  $H_1$  se déterminent à partir des conditions aux limites stator 1 - entrefer 1, entrefer 1 - rotor et rotor - entrefer 2 ; entrefer 2 - stator 2.



# DÉTERMINATION DES CONSTANTES D'INTEGRATIONS



## CONDITIONS AUX LIMITES Stator 1. entrefer 1, entrefer 1. rotor

Par application du théorème d'Ampère au circuit  $AB\zeta DA$

$$H_{E1y}(x=0)\Delta y_1 + \int_0^{-E_1} H_{E1x}(y_1 + \Delta y_1) dz - H_{E1y}(x=-E_1)\Delta y_1 + \int_{-E_1}^0 H_{E1x}(y_1) dz = 0$$

à  $x = -E_1$  on a discontinuité de la composante tangentielle du champ  $\vec{H}$ , c'est à dire  $H_{E1y}(x=E_1) - H_{stator y} = J_{s1}$ .

dans le stator ( $\mu_r = \infty \Rightarrow H_{stator y} = 0 \Rightarrow H_{E1y}(x=-E_1) = J_{s1}$

$J_{s1}$  = densité superficielle du courant dans le stator 1

$$\Rightarrow J_{s1} = H_{E1y}(x=0) + \frac{1}{\Delta y_1} \int_0^{-E_1} [H_{E1x}(y_1 + \Delta y_1) - H_{E1x}(y_1)] dz$$

$$J_{s1} = H_{E1y}(x=0) - \frac{E_1}{\Delta y_1} \frac{H_{E1x}(y_1 + \Delta y_1) - H_{E1x}(y_1)}{\Delta y_1}$$

$$\frac{H_{E1x}(y_1 + \Delta y_1) - H_{E1x}(y_1)}{\Delta y_1} = \frac{H_{E1x}(y_1 + \Delta y_1) - H_{E1x}(y_1)}{(y_1 + \Delta y_1 - y_1)} = \frac{\partial H_{E1x}}{\partial y_1}$$

$$\boxed{J_{s1} = H_{1y} - \epsilon_1 \frac{\partial H_{1z}}{\partial y}} \quad z=0$$

à  $z=0$  on a conservation de la composante radiale de l'induction  $\vec{B}$ , et de la composante tangentielle du champ  $\vec{H}$  ce qui se traduit par :

$$B_{1z} = B_{e1z} = \mu_0 H_{1z} \quad \text{et} \quad H_{1y} = H_{e1y}$$

$$\Rightarrow J_{s1} = H_{1y} - \frac{\epsilon_1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial B_{1z}}{\partial y} \quad (z=0)$$

$$\text{ou encore} \quad J_{s1} = H_{1y} - j \frac{\sigma_1 \epsilon_1}{\mu_0} B_{1z} \quad (z=0)$$

$J_{s1}$  est indépendante de la variable  $y$ .

$$\boxed{\frac{\partial H_{1y}}{\partial y} - j \frac{\sigma_1 \epsilon_1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial B_{1z}}{\partial y} = 0} \quad z=0 \quad \odot$$

En plus à la surface du rotor ( $z=0$ ), il n'y a pas de courant radial; c'est à dire :  $A_{1z}(z=0) = E_{1z}(z=0) = 0$

à partir des équations de MAXWELL on a :  $\vec{\text{rot}} \vec{B}_1 = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t}$

ou encore  $\vec{\text{rot}} \vec{B}_1 = -\lambda^2 \vec{A}_1$  avec  $\lambda^2 = j\omega\sigma\mu$ .

$$\text{de} \quad A_{1z}(z=0) = E_{1z}(z=0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_{1y}}{\partial z} = \frac{\partial B_{1z}}{\partial y}$$

$$\boxed{\frac{\partial B_{1y}}{\partial y} = j\sigma_1 B_{1z}} \quad (A_1)$$

$$\text{de} \quad \odot \quad \text{et} \quad B_{1y} = \mu_0 H_{1y} \Rightarrow \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{1y}}{\partial y} - \frac{j\sigma_1 \epsilon_1}{\mu_0} \frac{\partial B_{1z}}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B_{1y} - \mu_r \epsilon_1 \frac{\partial B_{1z}}{\partial y} = 0} \quad z=0 \quad (A_2)$$

En remplaçant  $B_{1y}$  et  $B_{1z}$  on obtient :

$$\cdot \pi l \lambda \sum_{n=1,3,\dots} \frac{n}{\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2} (a_{1n} - b_{1n}) \sin \frac{n\pi y}{l} - j (G_1 - H_1) \frac{\text{sh} \lambda z}{\text{sh} \lambda l/2}$$

$$- j \sum_{n=1,3,\dots} \frac{a_{1n}}{\lambda} (c_{1n} - d_{1n}) \sin \frac{n\pi y}{l} \quad (A_1)'$$

de même pour l'équation  $(A_2) \Rightarrow (A_2)'$

$$\cdot j \frac{a_1 l^2 \lambda^2}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{n}{n^2 \pi^2 + l^2 \lambda^2} (a_{1n} + b_{1n}) \sin \frac{n\pi y}{l} + j \frac{l^2 \lambda^2}{\pi^2} (G_2 + H_1) \frac{\text{sh} \lambda z}{\text{sh} \lambda l/2} +$$

$$\sum_{n=1,3,\dots} \left\{ \left[ \left( \frac{1}{\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2} \right) \frac{1}{\mu r \epsilon_1 \pi^2} - n^2 \right] d_{1n} - \left[ \left( \frac{1}{\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2} \right) \frac{1}{\pi^2 \lambda \mu r \epsilon_1} + n^2 \right] c_{1n} \right\} \sin \frac{n\pi y}{l} = 0$$

CONDITIONS AUX LIMITES : rotor-entrefer 2; entrefer 2-stator 2

soit le circuit (A'B'C'D'A').

Le stator 2 n'est pas alimenté ( $I_{s2} = 0$ ) et  $H_{stator 2} = 0$  car  $\mu = \infty$ .

par application du théorème d'Ampère au circuit (A'B'C'D'A')

$$- H_{e2y} (x=h) \cdot \Delta y_1 + \int_h^{h+\epsilon_2} H_{e2x}(y_1) dx + \int_{h+\epsilon_2}^h H_{e2x}(y_1 + \Delta y_1) dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta y_1} \int_{h+\epsilon_2}^h [H_{e2x}(y_1 + \Delta y_1) - H_{e2x}(y_1)] dx = H_{e2y} (x=h)$$

$$\Rightarrow H_{e2y} + \epsilon_2 \frac{\partial H_{e2x}}{\partial y} \quad x=h$$

Mais pour  $x=h$ ; on a conservation de la composante tangentielle du champ  $\vec{H}$  et de la composante radiale de l'induction magnétique  $\vec{B}$ ; ce qui se traduit par :

$$H_{e2y} = H_{e1y} \quad \text{et} \quad B_{1x} = B_{e2x} = \mu H_{e2x}$$

$$\Rightarrow H_{1y} + \frac{\epsilon_2}{\mu_0} \frac{\partial B_{1x}}{\partial y} = 0 \quad \text{ou encore}$$

$$B_{1y} = j a_1 \mu r \epsilon_2 B_{1x} = 0 \quad (A_3)$$

à la surface du rotor ( $z=h$ ), il n'y a pas de courant radial c'est à dire  $A_{1z}(z=h) = E_{1z}(z=h) = 0$   
 ce qui se traduit (avec  $\text{rot } \vec{B}_1 = -\lambda \vec{A}_1$ ), par l'équation:

$$\boxed{\frac{\partial B_{1y}}{\partial y} - j a_1 B_{1y} = 0} \quad z=h \quad (A_4)$$

On dérive (A3) par rapport à y.

$$\boxed{\frac{\partial B_{1y}}{\partial y} + j a_1 \mu r \epsilon_2 \frac{\partial B_{1x}}{\partial y} = 0} \quad z=h$$

$$\Rightarrow -\pi l \lambda^2 \sum_{n=1,3,\dots} \frac{n}{\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2} \left[ (\lambda - a_1 \mu r \epsilon_2) e^{-\lambda h} a_{1n} - (\lambda + a_1 \mu r \epsilon_2) e^{+\lambda h} b_{1n} \right] \sin \frac{n\pi}{l} y$$

$$-j \frac{\pi a_1}{l \mu r} \sum_{n=1,3,\dots} n^2 \left[ (1 - \lambda \mu r \epsilon_2) e^{-\lambda h} c_{1n} - (\lambda \mu r \epsilon_2 + 1) e^{+\lambda h} d_{1n} \right] \sin \frac{n\pi}{l} y$$

$$+ j \lambda^2 \left[ (1 - a_1 \mu r \epsilon_2) e^{-a_1 h} G_1 - (1 + a_1 \mu r \epsilon_2) e^{+a_1 h} H_1 \right] \frac{\text{sh } \lambda z}{\text{sh } \lambda l/2} = 0$$

De (A4)  $\Rightarrow$  (A4)'

$$\sum_{n=1,3,\dots} \pi l \lambda \frac{n}{\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2} \left( e^{-\lambda h} a_{1n} - e^{+\lambda h} b_{1n} \right) \sin \frac{n\pi}{l} y - j \left( e^{-a_1 h} G_1 - e^{+a_1 h} H_1 \right) \frac{\text{sh } \lambda z}{\text{sh } \lambda l/2}$$

$$- j \frac{a_1}{\lambda} \sum_{n=1,3,\dots} \left( e^{-\lambda h} c_{1n} - e^{+\lambda h} d_{1n} \right) \sin \frac{n\pi}{l} y = 0$$

En développant en série de Fourier la fonction  $\text{sh } \lambda z$   
 et on remplace dans les quatre équations précédentes  
 on obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{aligned}
 & * \pi l^3 \lambda^3 n [(\lambda - a_1' \mu r \epsilon_2) e^{-\lambda h} a_{1n} - (\lambda + a_1'' \mu r \epsilon_2) e^{\lambda h} b_{1n}] + j \pi^2 a_1 n^2 [\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2] \left[ \begin{aligned} & (1 - \lambda \mu r \epsilon_2) e^{-\lambda h} c_{1n} - (1 + \epsilon_2 \lambda \mu r) e^{\lambda h} d_{1n} \end{aligned} \right] = j 4 l^3 \lambda^4 \left[ (1 - a_1 \mu r \epsilon_2) G_1 e^{-\frac{a_1 h}{2}} \right. \\
 & \left. (1 + a_1 \mu r \epsilon_2) e^{\frac{a_1 h}{2}} H_1 \right] (-1)^{\frac{n-1}{2}} \text{Coth} \frac{\lambda l}{2} \quad (1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & * j \pi a_1 l^3 \lambda^3 \mu r \epsilon_2 n (a_{1n} + b_{1n}) - (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2) [(1 + \lambda \mu r \epsilon_1) \pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2] G_2 \\
 & + (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2) [(1 - \lambda \mu r \epsilon_2) \pi^2 n^2 + \pi^2 n^2] d_{1n} = \\
 & - j 4 l^3 \lambda^4 (G_1 + H_1) \mu r \epsilon_1 (-1)^{\frac{n-1}{2}} \text{Coth} \frac{\lambda l}{2} \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & * \pi l \lambda^2 n (e^{-\lambda h} a_{1n} - e^{\lambda h} b_{1n}) - j a_1 (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2) (e^{-\lambda h} c_{1n} - e^{\lambda h} d_{1n}) = \\
 & j 4 \pi l \lambda^2 (e^{-\frac{a_1 h}{2}} G_1 - e^{\frac{a_1 h}{2}} H_1) \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \text{Coth} \frac{\lambda l}{2} \quad (3).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & * \pi l \lambda^2 n (a_{1n} - b_{1n}) - j a_1 (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2) (c_{1n} - d_{1n}) = \\
 & j 4 \pi l \lambda^2 (G_1 - H_1) \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \text{Coth} \frac{\lambda l}{2} \quad (4)
 \end{aligned}$$

En négligeant 1 devant  $\lambda \mu r \epsilon_2$  ou  $\lambda \mu r \epsilon_1$  et en posant

$$a_1 - \lambda / \mu r \epsilon_1 = \bar{v}_{11}, \quad a_1 + \lambda / \mu r \epsilon_1 = v_{11}^+$$

$$a_1 - \lambda / \mu r \epsilon_2 = \bar{v}_{12}, \quad a_1 + \lambda / \mu r \epsilon_2 = v_{12}^+$$

$$a_1 - 1 / \mu r \epsilon_2 = \bar{\eta}_{12}, \quad a_1 + 1 / \mu r \epsilon_2 = \eta_{12}^+$$

$$a_1 = \lambda / \mu r \epsilon_1.$$

Le système d'équations précédent peut se mettre sous la forme matricielle:

$$(A)_1 \cdot (X)_1 = (b)_1$$

$$\text{Alors } (X)_1 = (A)_1^{-1} \cdot (b)_1$$

$$(A)_1 = \begin{bmatrix} -\pi l^3 \lambda^3 \mu r \epsilon_2 \sqrt{\epsilon_1} n e^{-\lambda h} & -\pi l^3 \lambda^3 \mu r \epsilon_2 \sqrt{\epsilon_1} n e^{+\lambda h} \\ j \pi a_1 l^3 \lambda^3 \mu r \epsilon_1 n & +j \pi a_1 l^3 \lambda^3 \mu r \epsilon_1 n \\ \pi l \lambda^2 n e^{-\lambda h} & -\pi l \lambda^2 n e^{+\lambda h} \\ \pi l \lambda^2 n & -\pi l n \lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -j \pi^2 a_1 \lambda \mu r \epsilon_2 n^2 (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2) e^{-\lambda h} & -j \pi^2 a_1 \lambda \mu r \epsilon_2 (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2) e^{+\lambda h} n^2 \\ -\lambda \mu r \epsilon_1 (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2) (\pi^2 n^2 + l^2 a_1) & -\lambda \mu r \epsilon_2 (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2) (\pi^2 n^2 - a_1 l^2) \\ -j a_1 (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2) e^{-\lambda h} & j a_1 (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2) e^{+\lambda h} \\ -j a_1 (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2) & j a_1 (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2) \end{bmatrix}$$

$$(b)_1 = \begin{bmatrix} -l^2 \lambda^2 \mu r \epsilon_2 (\eta_1^- e^{-a_1 h} G_1 + \eta_1^+ e^{a_1 h} H_1) \\ -l^2 \lambda^2 \mu r \epsilon_1 (G_1 + H_1) \\ \begin{pmatrix} -a_1 h & a_1 h \\ e^{-a_1 h} & e^{a_1 h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 \\ H_1 \end{pmatrix} \\ (G_1 + H_1) \end{bmatrix} \quad j 4 l \lambda^2 \text{Coth} \frac{\lambda l}{2} (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$(X)_1 = \begin{bmatrix} a_1 n \\ b_1 n \\ c_1 n \\ d_1 n \end{bmatrix}$$

tout Calcul fait, on trouve.

$$(X)_1 = \frac{4l^2 \lambda \operatorname{Coth} \frac{\lambda l}{2} (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(A_{17n} + A_{18n}) \operatorname{sh} \lambda h} (M)_1 \cdot (GH)_1$$

$$(GH)_1 = \begin{bmatrix} G_1 \\ H_1 \end{bmatrix}$$

$$A_{17n} = (\pi^2 n^2 + \sqrt{\epsilon_1} l^2) \cdot (\pi^2 n^2 + \sqrt{\epsilon_2} l^2)^{-\lambda h} e^{-\lambda h}$$

$$A_{18n} = -(\pi^2 n^2 + \sqrt{\epsilon_1} l^2) \cdot (\pi^2 n^2 + \sqrt{\epsilon_2} l^2)^{\lambda h} e^{\lambda h}$$

$$(M)_1 = \begin{bmatrix} \frac{A_{11n} + A_{12n} + A_{13n}}{\pi n} & \frac{A_{14n} + A_{15n} + A_{16n}}{\pi n} \\ \frac{B_{11n} + B_{12n} + B_{13n}}{\pi n} & \frac{B_{14n} + B_{15n} + B_{16n}}{\pi n} \\ \frac{(C_{11n} + C_{12n} + C_{13n}) l \lambda^2}{a_1 (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2)} & \frac{(C_{14n} + C_{15n} + C_{16n}) l \lambda^2}{a_1 (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2)} \\ \frac{(D_{11n} + D_{12n} + D_{13n}) l \lambda^2}{a_1 (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2)} & \frac{(D_{14n} + D_{15n} + D_{16n}) l \lambda^2}{a_1 (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2)} \end{bmatrix}$$

$$(M)_{ij} = \frac{4l^2 \lambda \operatorname{Coth} \frac{\lambda l}{2} (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(A_{17n} + A_{18n}) \operatorname{sh} \lambda h} \cdot (M_{ij})_1$$

$$i = 1, 4, \quad j = 1, 2$$

$$A_{11n} = j \left[ (\pi^2 n^2 + \sqrt{\epsilon_1} l^2) \bar{\eta}_1^{-\alpha h} e^{-\alpha h} - j a_1 (\pi^2 n^2 + \sqrt{\epsilon_2} l^2) e^{\lambda h} \right] \operatorname{sh} \lambda h.$$

$$A_{12n} = j \frac{1}{2 \mu \epsilon_2} \left( e^{(\lambda - a_1) h} - 1 \right) \cdot \left( \pi^2 n^2 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \sqrt{\epsilon_1} l^2 \right)$$

$$A_{13n} = -j \frac{1}{2\ell^2\lambda} \left( e^{-\alpha_1 h} - e^{\lambda h} \right) \left[ \pi^2 n^2 (\pi^2 n^2 + \ell^2 \nu_{11}^-) e^{-\lambda h} - (\pi^2 n^2 + \alpha_1 \ell^2) \times (\pi^2 n^2 + \nu_{12}^+) e^{\lambda h} \right].$$

$$A_{14n} = j \left[ \eta_1^+ e^{\alpha_1 h} (\pi^2 n^2 + \ell^2 \nu_{11}^-) - j \alpha_1 (\pi^2 n^2 + \nu_{12}^+ \ell^2) e^{\lambda h} \right] \text{sh} \lambda h.$$

$$A_{15n} = -\frac{1}{2\mu_r \epsilon_2} \left( e^{(\lambda + \alpha_1)h} - 1 \right) (\pi^2 n^2 + \ell^2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \nu_{12}^-).$$

$$A_{16n} = j \frac{1}{2\ell^2\lambda} \left( e^{\alpha_1 h} - e^{\lambda h} \right) \left[ \pi^2 n^2 (\pi^2 n^2 + \ell^2 \nu_{11}^-) e^{-\lambda h} - (\pi^2 n^2 + \nu_{12}^+ \ell^2) \right. \\ \left. (\pi^2 n^2 + \alpha_1 \ell^2) e^{\lambda h} \right].$$

$$B_{11n} = j \left[ \bar{\eta}_1^- e^{-\alpha_1 h} (\pi^2 n^2 + \nu_{11}^+ \ell^2) - j \alpha_1 (\pi^2 n^2 + \nu_{12}^- \ell^2) e^{-\lambda h} \right] \text{sh} \lambda h.$$

$$B_{12n} = -\frac{1}{2\mu_r \epsilon_2} \left( e^{(-\alpha_1 - \lambda)h} - 1 \right) (\pi^2 n^2 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \nu_{12}^- \ell^2).$$

$$B_{13n} = j \frac{1}{2\ell^2\lambda} \left( e^{-\alpha_1 h} - e^{-\lambda h} \right) \left[ \pi^2 n^2 (\pi^2 n^2 + \nu_{11}^+ \ell^2) e^{\lambda h} + (\pi^2 n^2 - \ell^2 \alpha_1) \times (\pi^2 n^2 + \nu_{12}^- \ell^2) e^{-\lambda h} \right].$$

$$B_{14n} = j \left[ \eta_1^+ e^{\alpha_1 h} (\pi^2 n^2 + \nu_{11}^+ \ell^2) - j \alpha_1 (\pi^2 n^2 + \nu_{12}^- \ell^2) e^{-\lambda h} \right] \text{sh} \lambda h.$$

$$B_{15n} = j \frac{1}{2\mu_r \epsilon_2} \left( e^{(-\lambda + \alpha_1)h} - 1 \right) \cdot (\pi^2 n^2 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \nu_{12}^- \ell^2).$$

$$B_{16n} = -j \frac{1}{2\ell^2\lambda} \left( e^{\alpha_1 h} - e^{-\lambda h} \right) \cdot \left[ \pi^2 n^2 (\pi^2 n^2 + \nu_{11}^+ \ell^2) e^{\lambda h} + (\pi^2 n^2 - \alpha_1 \ell^2) (\pi^2 n^2 + \ell^2 \nu_{12}^-) e^{-\lambda h} \right].$$

$$C_{11n} = \left[ \eta_1^- e^{-\alpha_1 h} (\pi^2 n^2 + \nu_{11}^- \ell^2) - j \alpha_1 (\pi^2 n^2 + \nu_{12}^+ \ell^2) e^{\lambda h} \right] \text{sh} \lambda h.$$



$$C_{13n} = \frac{1}{2\lambda} \left( e^{-a_1 h} - e^{-\lambda h} \right) \left[ (\pi^2 n^2 + \nu_{11}^2 \ell^2) \nu_{12}^- e^{-\lambda h} - (\pi^2 n^2 + \nu_{12}^2 \ell^2) e^{\lambda h} \right]$$

$$C_{14n} = \left[ \eta_1^+ e^{a_1 h} (\pi^2 n^2 + \nu_{11}^2 \ell^2) - j a_1 (\pi^2 n^2 + \nu_{12}^2 \ell^2) e^{\lambda h} \right] \text{sh} \lambda h.$$

$$C_{15n} = -\frac{1}{2\mu r \epsilon_2} \left( e^{(\lambda + a_1) h} - 1 \right) \cdot \left( \pi^2 n^2 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \nu_{12}^2 \ell^2 \right)$$

$$C_{16n} = -\frac{1}{2\lambda} \left( e^{a_1 h} - e^{-\lambda h} \right) \cdot \left[ (\pi^2 n^2 + \nu_{11}^2 \ell^2) \nu_{12}^- e^{-\lambda h} - a_1 (\pi^2 n^2 + \nu_{12}^2 \ell^2) e^{\lambda h} \right]$$

$$D_{11n} = \left[ \eta_1^- e^{-a_1 h} (\pi^2 n^2 + \nu_{11}^2 \ell^2) - j a_1 (\pi^2 n^2 + \nu_{12}^2 \ell^2) e^{-\lambda h} \right] \text{sh} \lambda h$$

$$D_{12n} = \left[ e^{(-\lambda - a_1) h} - 1 \right] \left( \pi^2 n^2 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \nu_{12}^2 \ell^2 \right) \frac{1}{2\mu r \epsilon_2}$$

$$D_{13n} = \frac{1}{2\lambda} \left( e^{-a_1 h} - e^{-\lambda h} \right) \left[ (\pi^2 n^2 + \nu_{11}^2 \ell^2) \nu_{12}^+ e^{-\lambda h} - a_1^2 (\pi^2 n^2 + \nu_{12}^2 \ell^2) e^{-\lambda h} \right]$$

$$D_{14n} = \left[ \eta_1^- e^{a_1 h} (\pi^2 n^2 + \nu_{11}^2 \ell^2) - j a_1 (\pi^2 n^2 + \nu_{12}^2 \ell^2) e^{-\lambda h} \right] \text{sh} \lambda h.$$

$$D_{15n} = \frac{1}{2\mu r \epsilon_2} \left( e^{(a_1 - \lambda) h} - 1 \right) \left( \pi^2 n^2 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \nu_{12}^2 \ell^2 \right)$$

$$D_{16n} = -\frac{1}{2\lambda} \left( e^{a_1 h} - e^{-\lambda h} \right) \left[ (\pi^2 n^2 + \nu_{11}^2 \ell^2) \nu_{12}^+ e^{\lambda h} - a_1^2 (\pi^2 n^2 + \nu_{12}^2 \ell^2) e^{-\lambda h} \right]$$

## Détermination de $(GH)_1$

Le vecteur  $(GH)_1$  se détermine à partir des 2 équations suivantes :

$$B_1 y - j a_1 \epsilon_1 \mu_r B_1 x = \mu_0 \mu_r J_{s1} \quad (x=0) \quad \textcircled{I}$$

En développant  $J_{s1}$  en série de Fourier :

$$J_{s1} = \frac{4J_{s1}}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cos \frac{n\pi}{\ell} z.$$

$$B_1 y + j a_1 \epsilon_2 \mu_r B_1 x = 0 \quad (x=h) \quad \textcircled{II}$$

à partir de  $\textcircled{I}$  et  $\textcircled{II}$  on aboutit au système d'équations :

$$T_{11} G_1 + T_{12} H_1 = 0$$

$$T_{21} G_1 + T_{22} H_1 = b_1$$

d'où on tire :

$$G_1 = \frac{T_{22} \cdot b_1}{T_{11} \cdot T_{22} - T_{21} \cdot T_{12}}$$

$$H_1 = -\frac{T_{21} b_1}{T_{22} \cdot T_{11} - T_{12} \cdot T_{21}}$$

avec :

$$T_{11} = \pi \ell^3 \lambda^2 \mu_r \epsilon_1 n (\sqrt{\lambda_1}^+ M_{11} + \sqrt{\lambda_1}^- M_{21}) + j \pi^2 a_1 \mu_r \epsilon_1 n^2 * (\pi n^2 + \ell^2 \lambda^2) (M_{31} + M_{41}) + j 4 \pi^2 \ell \lambda n^2 (1 + a_1 \mu_r \epsilon_1) \coth \frac{\lambda \ell}{2} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

$$T_{21} = \ell^3 \lambda^2 \mu_r \epsilon_2 (\sqrt{\lambda_2}^- M_{11} e^{-\lambda h} + \sqrt{\lambda_2}^+ M_{21} e^{\lambda h}) + j \pi a_1 \mu_r \epsilon_1 n * (\pi n^2 + \ell^2 \lambda^2) (M_{31} e^{-\lambda h} + M_{41} e^{\lambda h}) - j 4 \pi \ell \lambda (1 - a_1 \mu_r \epsilon_2) * e^{-a_1 h} \coth \frac{\lambda \ell}{2} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

$$T_{12} = \pi l^3 \lambda^2 \mu_r \epsilon_1 n (\bar{v}_{11} M_{12} + \bar{v}_{11} M_{22}) + j \pi^2 a_1 \mu_r \epsilon_1 n^2 * \\ (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2) (M_{32} + M_{42}) + j 4 \pi^2 \lambda n l (-1 + a_1 \mu_r \epsilon_1) \text{Coth} \frac{\lambda l}{2} (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$T_{22} = l^3 \lambda^2 \mu_r \epsilon_2 (\bar{v}_{12} M_{12} e^{-\lambda h} + M_{22} \bar{v}_{12} e^{\lambda h}) + j \pi a_1 \mu_r \epsilon_2 n * \\ (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2) \cdot (e^{-\lambda h} M_{32} + e^{\lambda h} M_{42}) + j 4 \pi l \lambda (1 + a_1 \mu_r \epsilon_2) * \\ e^{a_1 h} \text{Coth} \frac{\lambda l}{2} (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$b_1 = 4 l \mu_0 \mu_r J_{s1} (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2) \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad b_2 = 0.$$

Détermination du flux radial à la surface du rotor.

$$\Phi_{1x}(x=0) = \iint_{zy} B_{1x}(x=0) dz \cdot e^{j a_1 y} dy$$

$$B_{1x}(x=0) = j a_1 l^2 \lambda^2 \sum_{n=1,3,\dots} \frac{a_1 n + b_1 n}{\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2} \cos \frac{n \pi}{l} z$$

$$- \frac{\pi}{l} \sum_{n=1,3,\dots} n (c_1 n + d_1 n) \cos \frac{n \pi}{l} z - 4 \pi \lambda (G_1 + H_1) \text{Coth} \frac{\lambda l}{2} *$$

$$\sum_{n=1,3,\dots} \frac{n (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2} \cos \frac{n \pi}{l} z.$$

$$a_1 n + b_1 n = \frac{(M_{11} + M_{21}) T_{22} - (M_{12} + M_{22}) T_{21}}{(T_{11} \cdot T_{22} - T_{12} \cdot T_{21})} \cdot b_1$$

$$c_1 n + d_1 n = \frac{(M_{31} + M_{41}) T_{22} - (M_{32} + M_{42}) T_{21}}{(T_{11} \cdot T_{22} - T_{12} \cdot T_{21})} \cdot b_1$$

$$G_1 + H_1 = \frac{(T_{22} - T_{21})}{(T_{22} \cdot T_{11} - T_{12} \cdot T_{21})} b_1$$

d où on trouve l'expression de l'induction magnétique.

$$B_{1x}(x=0) = 4\mu_0\mu_r J_{s1} \sum_{n=1,3,\dots} \left\{ j a_1 l^3 \lambda^n \left[ (M_{11} + M_{21}) T_{22} - (M_{12} + M_{42}) T_{21} \right] - \pi n (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2) \left[ (M_{31} + M_{41}) T_{22} - (M_{32} + M_{42}) T_{21} \right] - 4\pi l \lambda \coth \frac{\lambda l}{2} n (T_{22} - T_{21}) \sin \frac{n\pi}{2} \right\} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{(T_{11} T_{22} - T_{21} T_{12})} \cos \frac{n\pi}{2} z$$

On a  $\sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$  pour  $n = 1, 3, 5, \dots$

$$\begin{aligned} \Phi_{1z}(x=0) &= \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-l/2}^{l/2} B_{1x}(x=0) dz \cdot e^{j a_1 y} dy \\ &= \int_{-l/2}^{l/2} B_{1z}(x=0) dz \cdot \int_0^{\pi/a_1} e^{j a_1 y} dy = j \frac{2}{a_1} \int_{-l/2}^{l/2} B_{1x}(x=0) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{1z}(x=0) &= j \frac{16\mu_0\mu_r l}{\pi a_1} J_{s1} \sum_{n=1,3,\dots} \left\{ j a_1 l^3 \lambda^n \left[ (M_{11} + M_{21}) T_{22} - (M_{12} + M_{22}) T_{21} \right] - \pi n (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2) \left[ (M_{31} + M_{41}) T_{22} - (M_{32} + M_{42}) T_{21} \right] - 4\pi l \lambda \coth \frac{\lambda l}{2} n (T_{22} - T_{21}) \sin \frac{n\pi}{2} \right\} \cdot \frac{1}{n (T_{22} T_{11} - T_{12} T_{21})} \end{aligned}$$

$$J_{s1} = \frac{q_1}{p_1 \pi} (N_1 K_1) a_1 I_{s1}$$

$$\Phi_{1x}(x=0) = \frac{16 q_1 N_1 k_1 l \mu_0 \mu_r I s_1}{\pi^2 n^2} \sum_{n=1,3,\dots} \left\{ j a_1 l^3 \lambda^2 [(M_{11} + M_{21}) T_{22} - (M_{12} + M_{22}) T_{21}] - \pi n (\pi^2 n^2 + l^2 \lambda^2) [(M_{31} + M_{41}) T_{22} - (M_{32} + M_{42}) T_{21}] - 4 \pi l \lambda \coth \frac{\lambda l}{2} \cdot n (T_{22} - T_{21}) \sin \frac{n\pi}{2} \right\} \cdot \frac{1}{(T_{11} \cdot T_{22} - T_{21} \cdot T_{12}) n}$$

- Le flux  $\Phi_{1x}$  induit dans le rotor la F.e.m  $E_{r1}$ :

$$E_{r1} = d\Phi_{1x} / dt = j\omega \Phi_{1x}$$

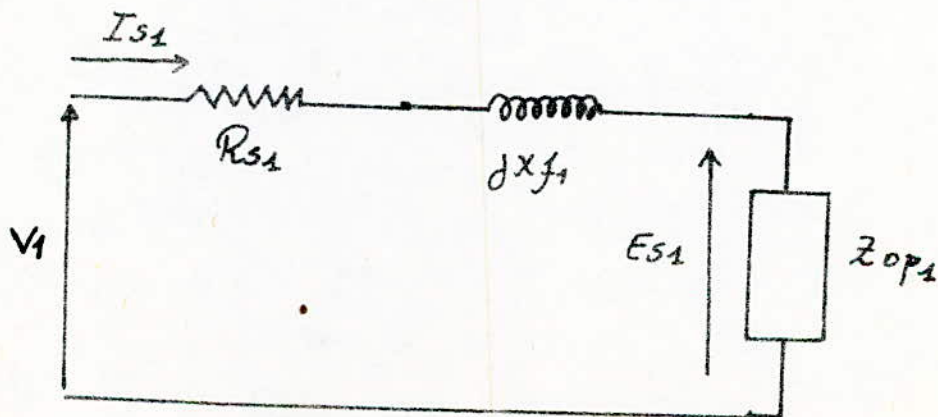
- Le flux normal à la surface du stator est égal à celui de la surface du rotor.

- La f.e.m d'entrefer ramené au stator est égale à :

$$E_{s1} = j\omega \frac{N_1}{2} k_1 \Phi_{1x}$$

Détermination de l'impédance opérationnelle.

On choisit le schéma équivalent suivant :



D'après le schéma équivalent pna :

$$E_{s1} = Z_{op1} \cdot I_{s1} \Rightarrow Z_{op1} = E_{s1} / I_{s1} = j\omega N_1 K_1 \frac{\Phi_{12}}{2 I_{s1}}$$

$$Z_{op1} = \frac{8 \mu_0 N_1^2 K_1^2 l N_0 N_r \omega}{\pi^2 P_1} \sum_{n=1,3,\dots} \left\{ j a_1 l^3 \lambda^2 \left[ (M_{11} + M_{21}) T_{22} - (M_{12} + M_{22}) T_{21} \right] - \pi l (n^2 \pi^2 + l^2 \lambda^2) \left[ (M_{31} + M_{41}) T_{22} - (M_{32} + M_{42}) T_{21} \right] - 4\pi l \lambda \coth \frac{\lambda l}{2} n (T_{22} - T_{21}) \sin \frac{n\lambda}{2} \right\} \cdot \frac{1}{n (T_{11} T_{22} - T_{21} T_{12})}$$

### Détermination du couple:

Le couple est donné par:

$$\Gamma_1 = \frac{3 P_1}{\omega} |I_{s1}|^2 \operatorname{Re}(Z_{op1})$$

$$I_{s1} = \frac{V_1}{R_{s1} + jX_{f1} + Z_{op1}}$$

$$\Gamma_1 = \frac{3 P_1 V_1^2}{\omega} \frac{\operatorname{Re}(Z_{op1})}{|R_{s1} + jX_{f1} + Z_{op1}|^2}$$

Remarque: tous les calculs théoriques sont faits par ordinateur après avoir établi un programme en langage Fortran.

## Chapitre II

### Etude expérimentale

Nous présentons dans cette partie la machine utilisée et nous décrivons les essais effectués : ceux-ci concernent des essais directs à différentes tensions et fréquences, ainsi que des mesures du champ magnétique à la surface du rotor. Nous comparons enfin les résultats théoriques et expérimentaux.

### Présentation de la machine :

Elle est constituée de trois parties principales, deux stators et un rotor.

#### Le stator extérieur (1)

Il est identique à celui d'une machine classique et présente les caractéristiques suivantes.

Nombre de phases	-----	$q = 3$
Nombre de paires de pôles	-----	$p = 2$
Nombre de spires par phase	-----	$N = 144$
Nombre total d'encoches	-----	$N_z = 36$
Nombre de conducteurs par encoche	-----	$n = 24$
Diamètre intérieur du stator	-----	$D = 190 \text{ mm}$
Longueur utile du fer	-----	$L = 100 \text{ mm}$

tension d'alimentation	-----	$U = 380/220V \ Y/\Delta$
Courant de phase	-----	$I_s = 12,35A$
Résistance d'une phase statorique	-----	$R_{s1} = 0,45 \Omega$
Réactance de fuite statorique	-----	$X_{f1} = 1,7 \Omega$

### Stator interieur (2)

Son bobinage est identique à celui décrit précédemment

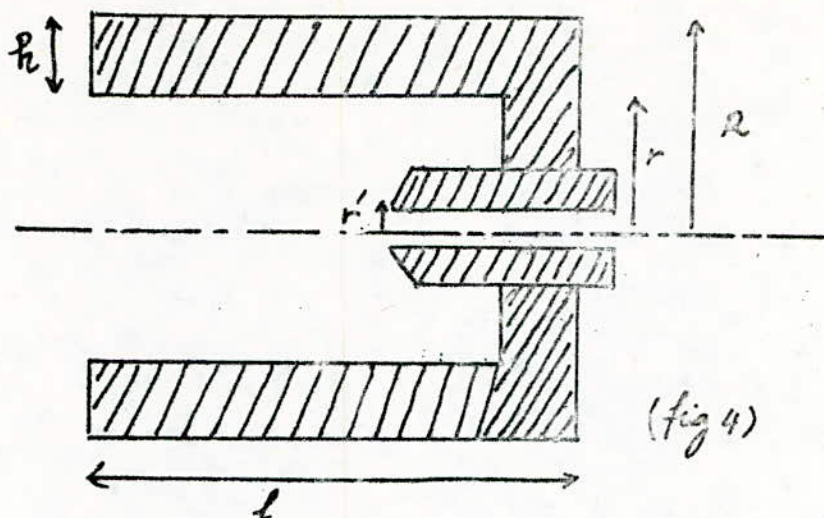
Ses caractéristiques sont les suivantes:

Nombre de phases	-----	$q = 3$
Nombre de paires de pôles	-----	$p = 2$
Nombre de spires par phase	-----	$N = 162$
Nombre total d'encoches	-----	$N_e = 36$
Nombre de conducteurs par encoche	-----	$n = 27$
Diamètre extérieur du stator	-----	$D = 174 \text{ mm}$
Longueur utile du fer	-----	$L = 100 \text{ mm}$
Pas polaire	-----	$Z_p = 274 \text{ mm}$
tension d'alimentation	-----	$380/220V \ Y/\Delta$
Courant de phase	-----	$I_s = 6,64A$
Résistance d'une phase statorique	-----	$R_{s2} = 0,75 \Omega$
Réactance de fuite statorique	-----	$X_{f2} = 1,8 \Omega$

### Le Rotor:

Il a la forme d'un cylindre creux d'épaisseur  $R_2$  fixé sur l'arbre par l'une de ses bases. (fig 4)





Nous avons utilisé un rotor en aluminium ( $\mu_r = 1$ ) et de  
 Résistivité  $\rho = 2,9 \cdot 10^8 \text{ } \Omega \cdot \text{m}$  et un autre en acier xc 38.  
 Ces deux rotors ont les dimensions identiques représentées  
 sur (la figure 4)

Longueur du rotor	.....	$l = 190 \text{ mm}$
Rayon du rotor	.....	$R = 94 \text{ mm}$
Épaisseur du rotor	.....	$t = 6,5 \text{ mm}$
Rayon de l'axe de rotation	.....	$r = 29 \text{ mm}$

## Essais expérimentaux.

La machine fonctionnant en moteur entraîne une dynamo-balance que nous avons préalablement étalonné.

### Étalonnage de la génératrice et détermination des pertes mécaniques du moteur.

Le rendement de la génératrice (fig 6), (non accouplée au moteur) en fonction du courant de charge est obtenu à excitation de 0,6 A pour différentes vitesses.

### Essais à tension d'alimentation constante.

À tensions constantes de 50V et 80V et à fréquence industrielle, nous avons relevé les caractéristiques:

Courant, puissance, vitesse pour les 2 rotors décrit précédemment.

- Le couple du moteur est déterminé indirectement

par:

$$\Gamma = \frac{P_c / \eta_g + P_m}{\omega_R}$$

$P_m$  = Les pertes mécaniques du moteur en fonction du glissement

$P_c$  = la puissance fournie par la génératrice à la charge résistive

$\omega_R$  = la vitesse rotorique en (rd/s).

$\eta_g$  = rendement de la génératrice préalablement étalonné.

- Le rendement du moteur peut être calculé à partir de:

$$\eta = \frac{P_c}{\eta_g(I, g) \cdot P_{ab}}$$

où  $P_{ab}$ : est la puissance absorbée par le moteur.

### Mesure du champ magnétique

Pour pouvoir mesurer l'induction magnétique à la surface du rotor, nous avons réalisé et placé 12 sondes sur une même génératrice du rotor (fig 5).  
Celles-ci sont réalisées à partir d'un fil de 0,1 de diamètre et comportent quinze spires de diamètre moyen  $D = 6 \text{ mm}$ , leur faible épaisseur permet leur introduction dans les deux entrefers.

La valeur efficace de l'induction magnétique radiale à la surface du rotor, dans une section égale à  $\pi D/4$  est calculée par:

$$\begin{aligned} B &= E / (\sqrt{2} \times 4,44 \times 5 \times n \times f) \\ &= 375,7 E / f. \end{aligned}$$

$f$  = la fréquence de la tension d'alimentation.

$n$  = nombre de spires de la sonde.

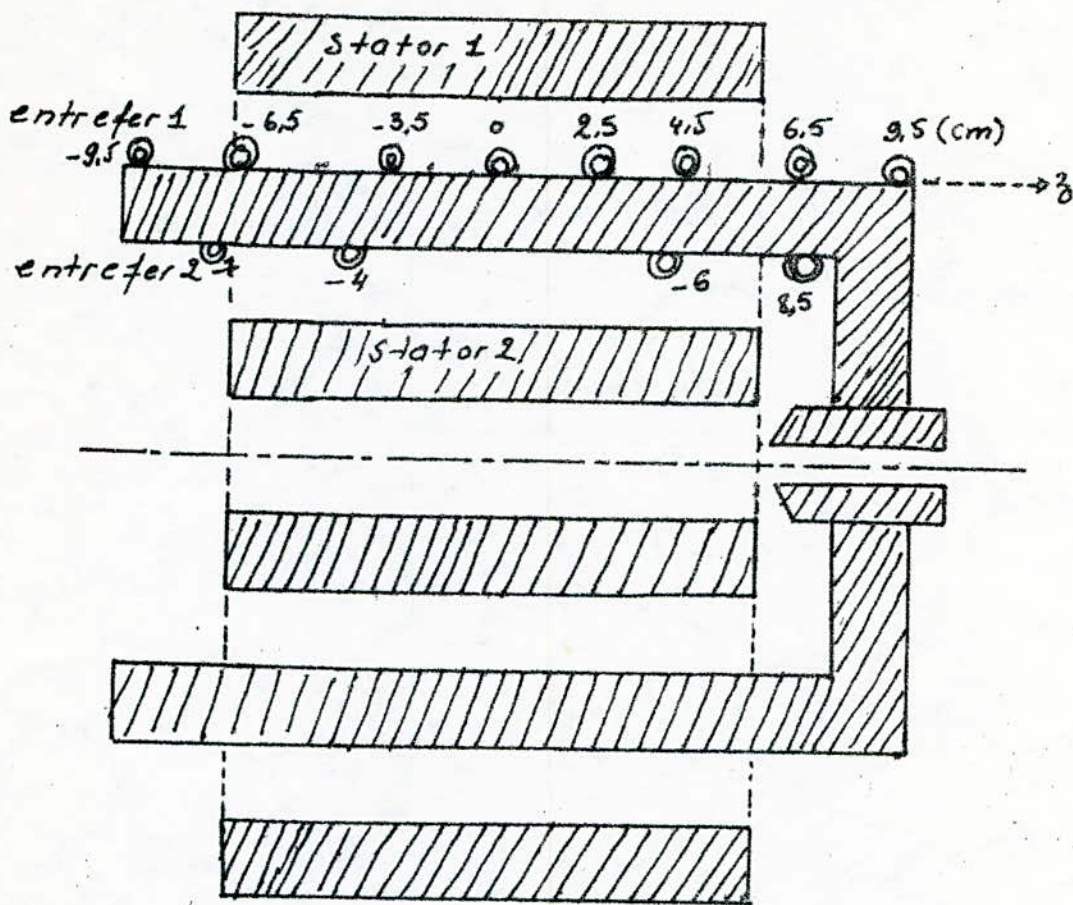
Le rotor étant maintenu à l'arrêt, on alimente les deux stators séparément ou ensemble à différentes tensions triphasées (de 10 à 50V) et à différentes fréquences de (10 à 50 Hz).

Nous gardons le rapport  $v/f = 1$  ce qui permet de travailler approximativement à flux constant.

Nous obtenons les différentes fréquences d'alimentation par un alternateur entraîné à différentes vitesses par un moteur à courant continu.

Les tensions recueillies aux bornes des sondes sont relevées sur un millivoltmètre et visualisées sur un oscilloscope à mémoire. Les tensions sont très faibles et présentent beaucoup d'harmoniques; les tensions ne sont donc pas précises, particulièrement en basses fréquences (10 Hz) où il est difficile de trouver un appareil adéquat.

On obtient ainsi les variations de la composante normale de l'induction magnétique à la surface du rotor en fonction de la position des sondes pour différentes fréquences; c'est à dire à différents glissements.



(fig 5)

⊙ = sondes sur la surface (externe et interne) du rotor  
 o = le centre du rotor et l'origine du repère  
 choisi

## Interprétation (des résultats) et Comparaison des résultats pratiques et théoriques.

A fréquence industrielle le module de l'impédance opérationnelle décroît de façon exponentielle avec le glissement, et augmente avec la perméabilité (fig 7 et 8).

L'impédance opérationnelle obtenue par le modèle linéaire est indépendante de la tension d'alimentation.

Par contre dans la même gamme de tension utilisée (50V et 80V) celle obtenue pratiquement varie légèrement avec la tension d'alimentation. Nous vérifions donc la non saturation du circuit magnétique pour les tensions utilisées.

Les variations du courant mesuré en fonction du glissement à différentes perméabilités sont proches des courbes théoriques (fig 9, 10, 11, 12).

Le courant dans la gamme des faibles glissements reste pratiquement constant pour les glissements élevés. Le rotor en aluminium absorbe un courant plus élevé car il possède une impédance opérationnelle faible.

Les caractéristiques Courant watté - Courant déwatté du rotor en aluminium (fig 13 et 14) sont approximativement des arcs de cercle (fig 13, 14) de rayon croissant avec la

tension, tandis que celles de l'acier (fig 13, 14, 15) sont des petits arcs de cercle pour des faibles glissements, et sensiblement des droites pour les glissements élevés, Les courbes théoriques sont semblables à celles obtenues pratiquement.

Lorsque la perméabilité relative est inférieure à 100; le couple (fig 18, 19, 20) possède un maximum correspondant à un glissement voisin de 0,2, ce maximum se déplace pour les perméabilités plus grandes. Le couple de démarrage augmente avec la perméabilité.

- Le rendement - glissement passe par un maximum de 40% environ (fig 17).

- Le facteur de puissance expérimental (fig 15) est plus élevé que celui obtenu théoriquement, ce dernier reste sensiblement indépendant de la tension mais dépendant de la nature du rotor utilisé (fig 16).

- Les mesures de champ magnétique à la surface du rotor ne sont pas précises; néanmoins elles montrent l'augmentation du champ magnétique au voisinage des extrémités de la zone utile du rotor; par suite de resserrement de ligne de courant dans cette zone.

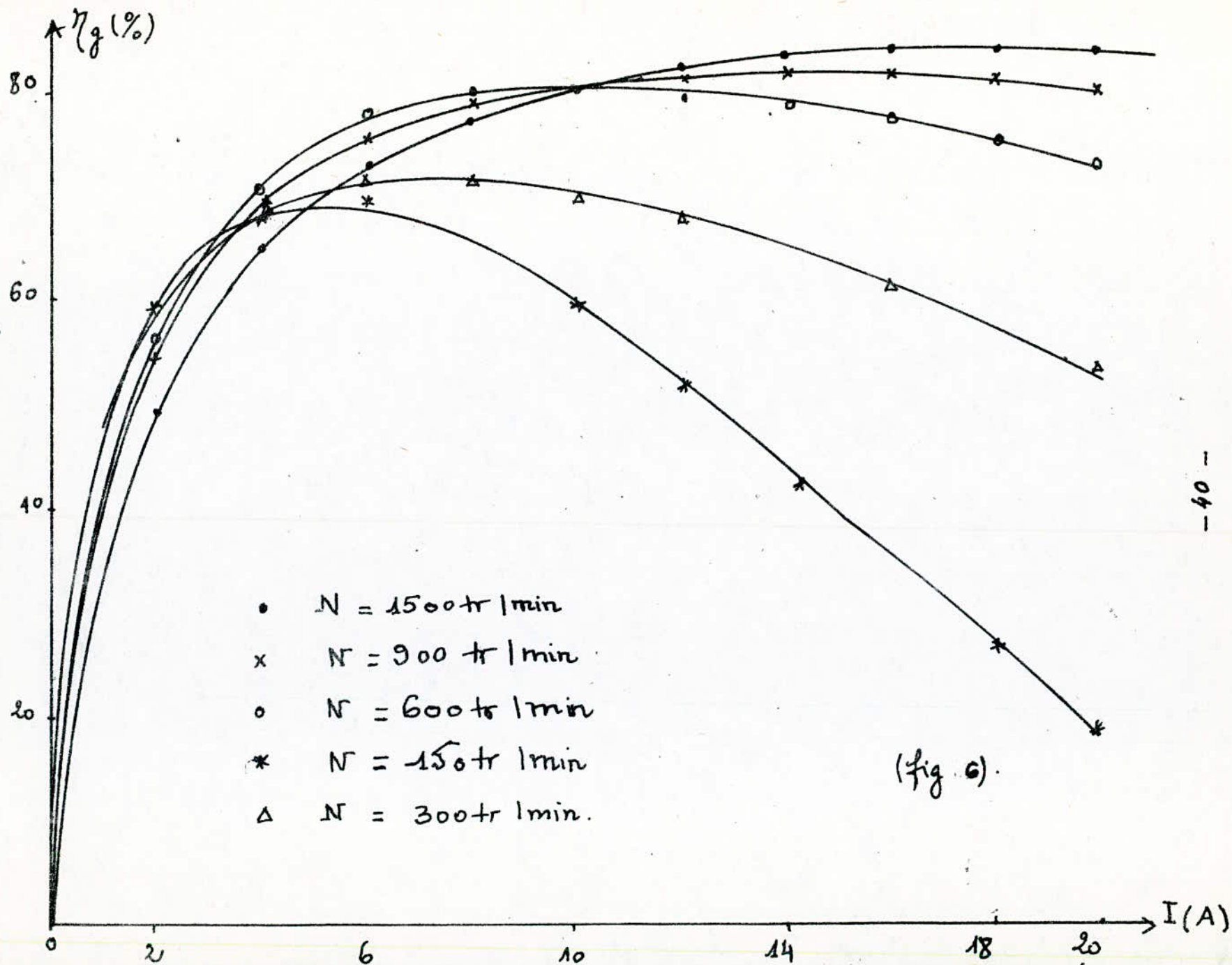
à glissement donné, les variations du champ à la surface du rotor sont différentes de celles obtenues dans le cas

d'un rotor massif plein [3] Ce dernier présente des effets d'extrémités plus importantes. Par ailleurs le rotor chauffe au cours des essais ce qui influe sur les mesures et les propriétés magnétiques de la machine.



Représentation des caractéristiques

Courbes d'étalonnage de la génératrice.  $[\eta_g(I)]$ .



(fig 6).

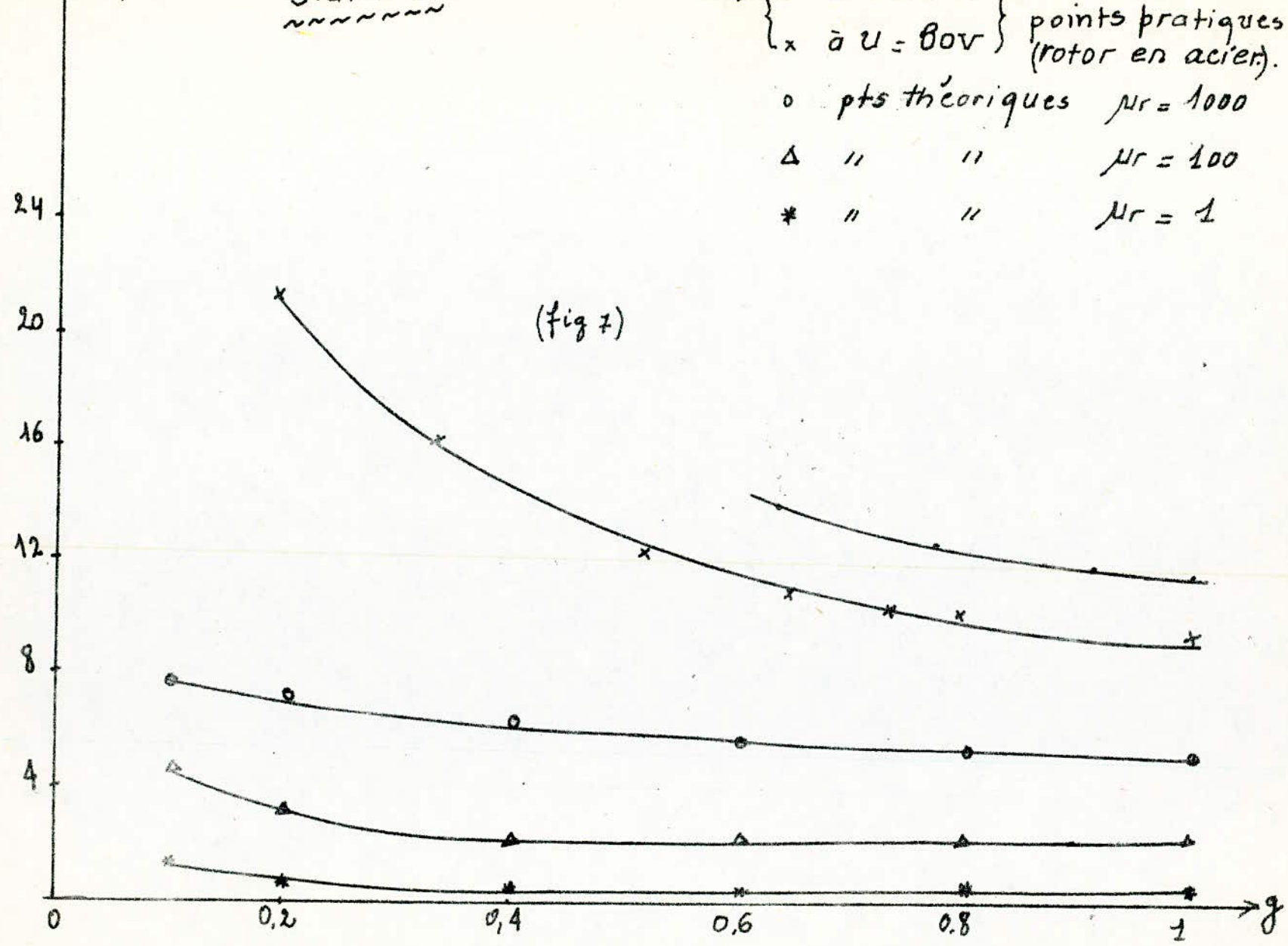
Variation de l'impédance opérationnelle en fonction de  $g$

$Z_{op}(\Omega)$

stator 1.  
~~~~~

→ {  
 •  $\bar{a} U = 50V$   
 x  $\bar{a} U = 80V$  } points pratiques (rotor en acier).  
 o pts théoriques  $\mu_r = 1000$   
 Δ " "  $\mu_r = 100$   
 \* " "  $\mu_r = 1$

(fig 7)



variation de l'impédance opérationnelle en fonction de  $\delta$

$Z_{op}(Ω)$

points pratiqués:

rotor en acier

- x U = 80V
  - U = 50V
  - \* U = 80V
  - o U = 50V
  - ▽ U = 80V
  - ◻ U = 50V
- } stator 2 alimenté  
 } 2 stators sont alimentés.

(fig 8)

⊙ (rotor en Aluminium) U = 50V stator 1 alimenté..

28  
24  
20  
16  
12  
8  
4

0,2

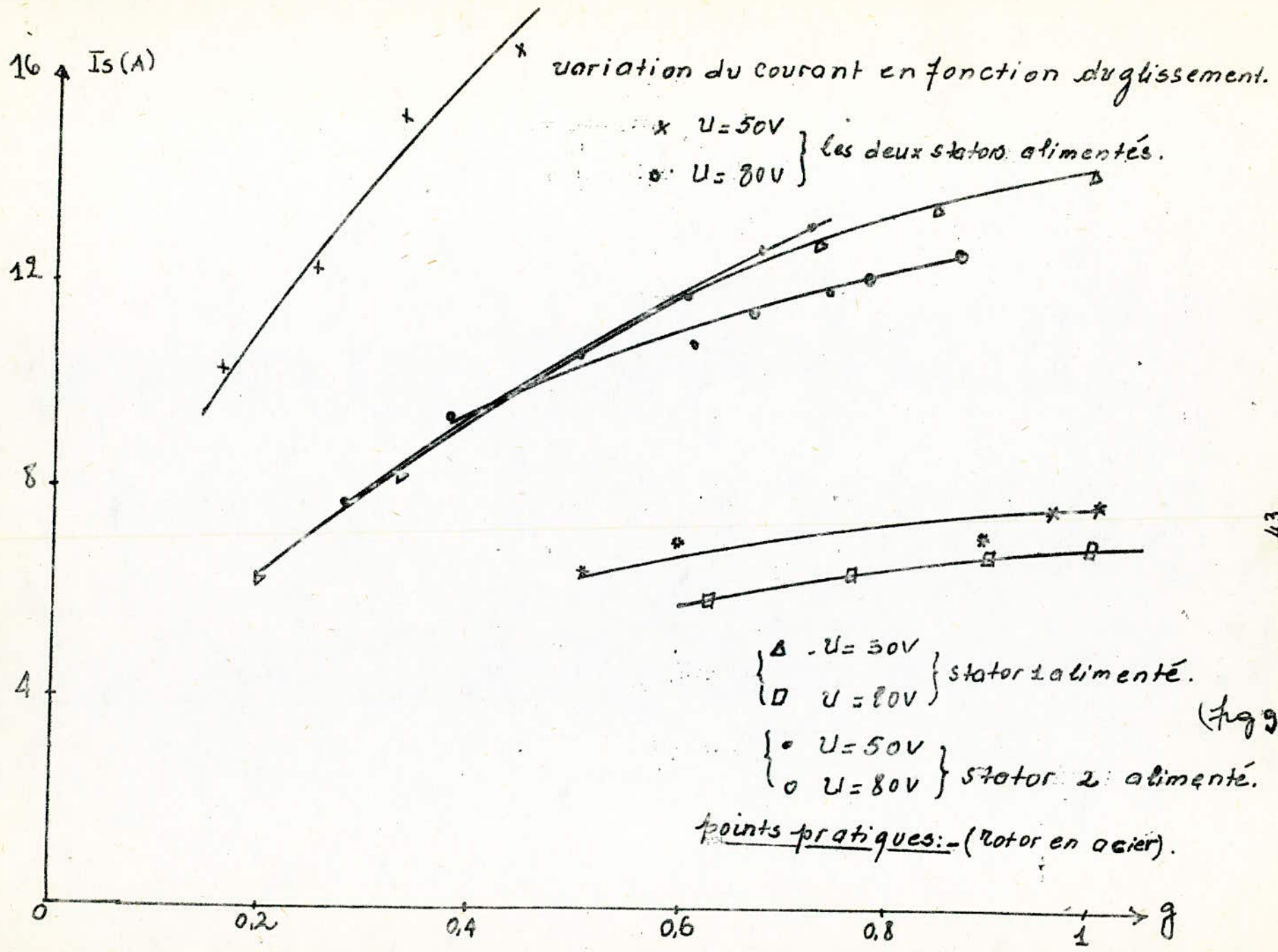
0,4

0,6

0,8

1

$\delta$



Variation du courant en fonction du glissement

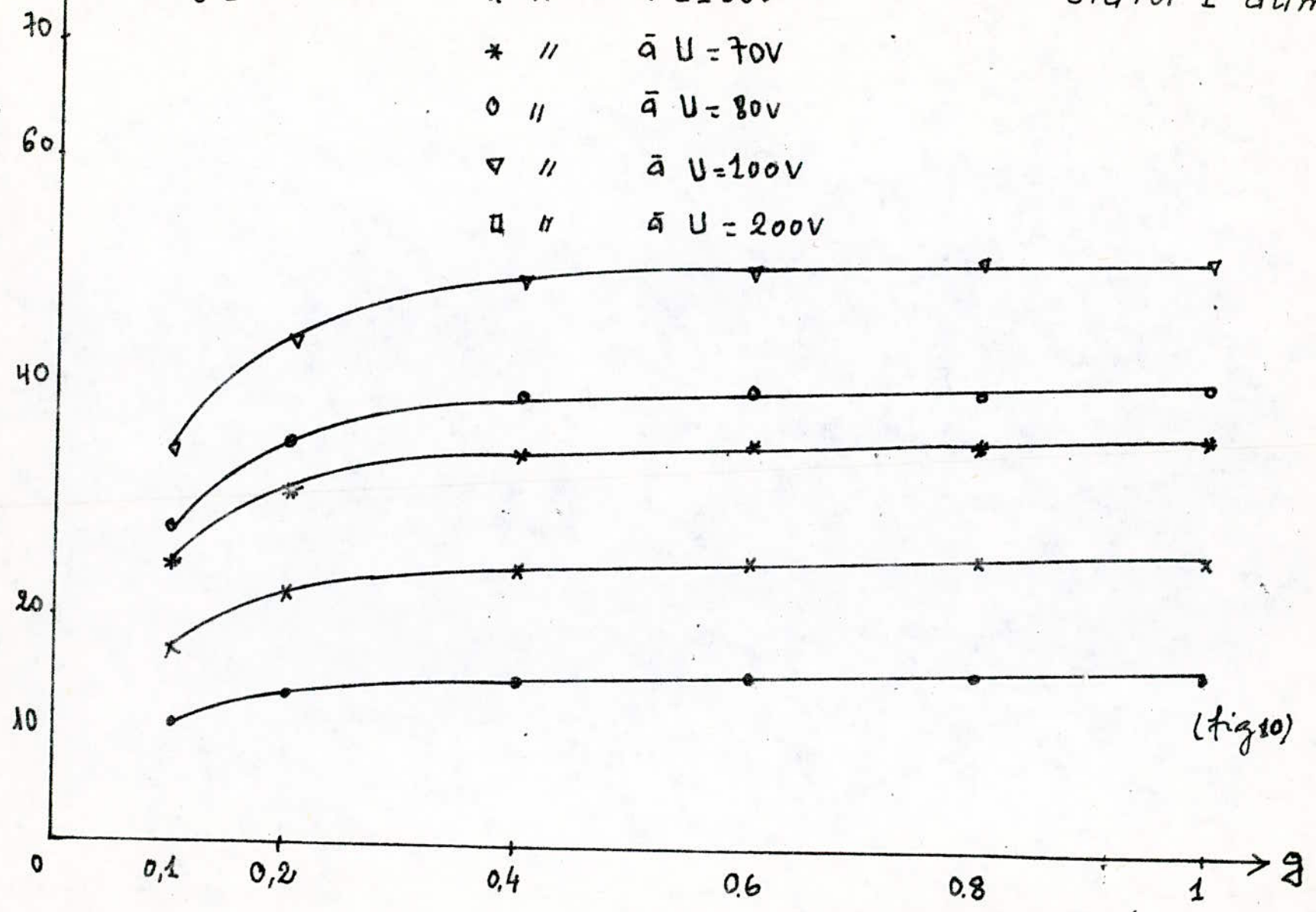
ISCA)

$\mu_r = 1.$   
 $\delta = 34 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-2}$

- points  $\bar{a}$  U = 30v
- x //  $\bar{a}$  U = 50v
- \* //  $\bar{a}$  U = 70v
- o //  $\bar{a}$  U = 80v
- ∇ //  $\bar{a}$  U = 100v
- //  $\bar{a}$  U = 200v

(points théoriques)

stator 1 alimenté.



(fig 10)

$\delta = 5,6 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\Omega \cdot m}, N_r = 100$  (points théoriques).

• points  $\bar{a}$   $U = 30V$

x "  $\bar{a}$   $U = 50V$

o "  $\bar{a}$   $U = 70V$

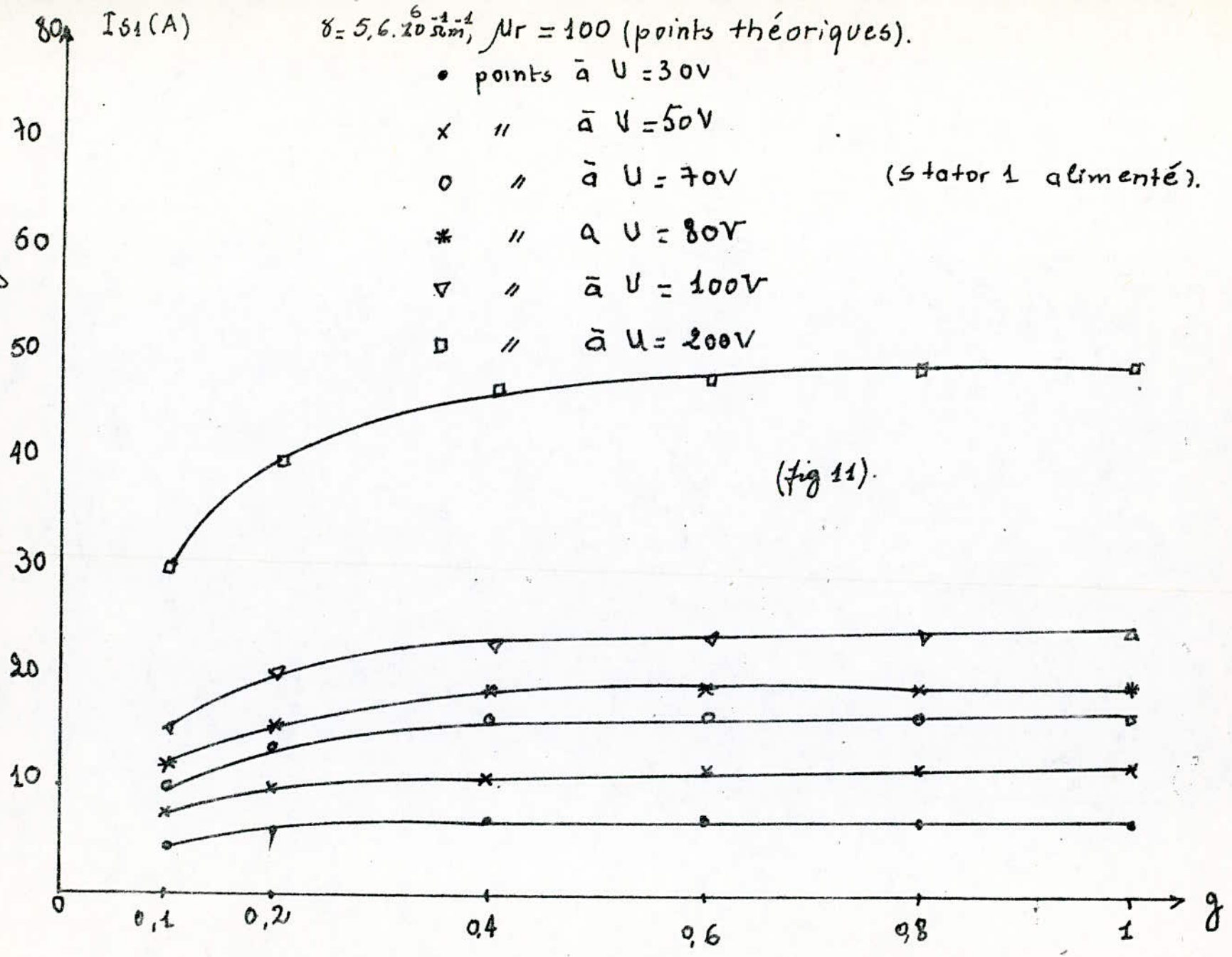
\* "  $\bar{a}$   $U = 80V$

∇ "  $\bar{a}$   $U = 100V$

□ "  $\bar{a}$   $U = 200V$

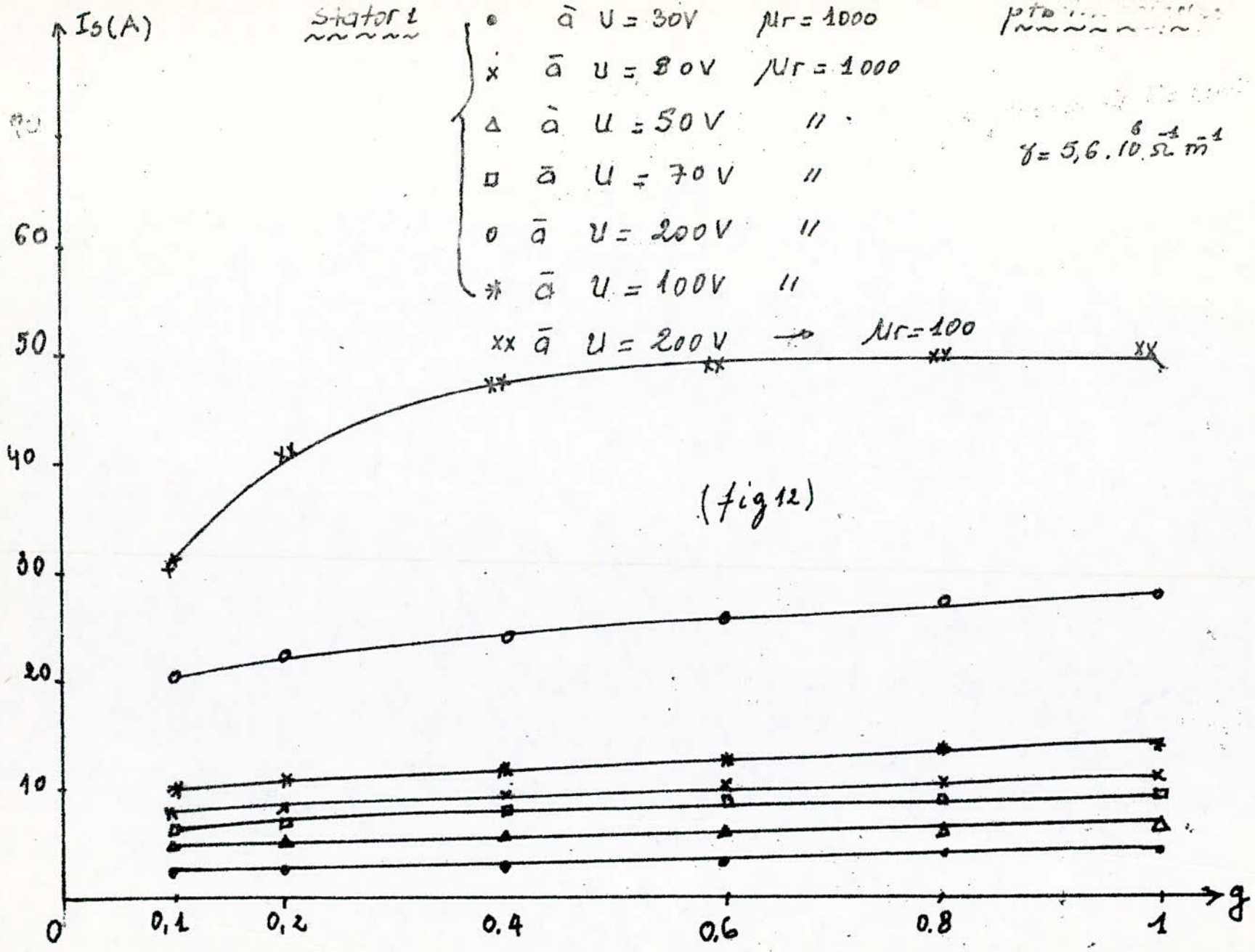
(stator 1 alimenté).

Variation du courant en fonction du glissement



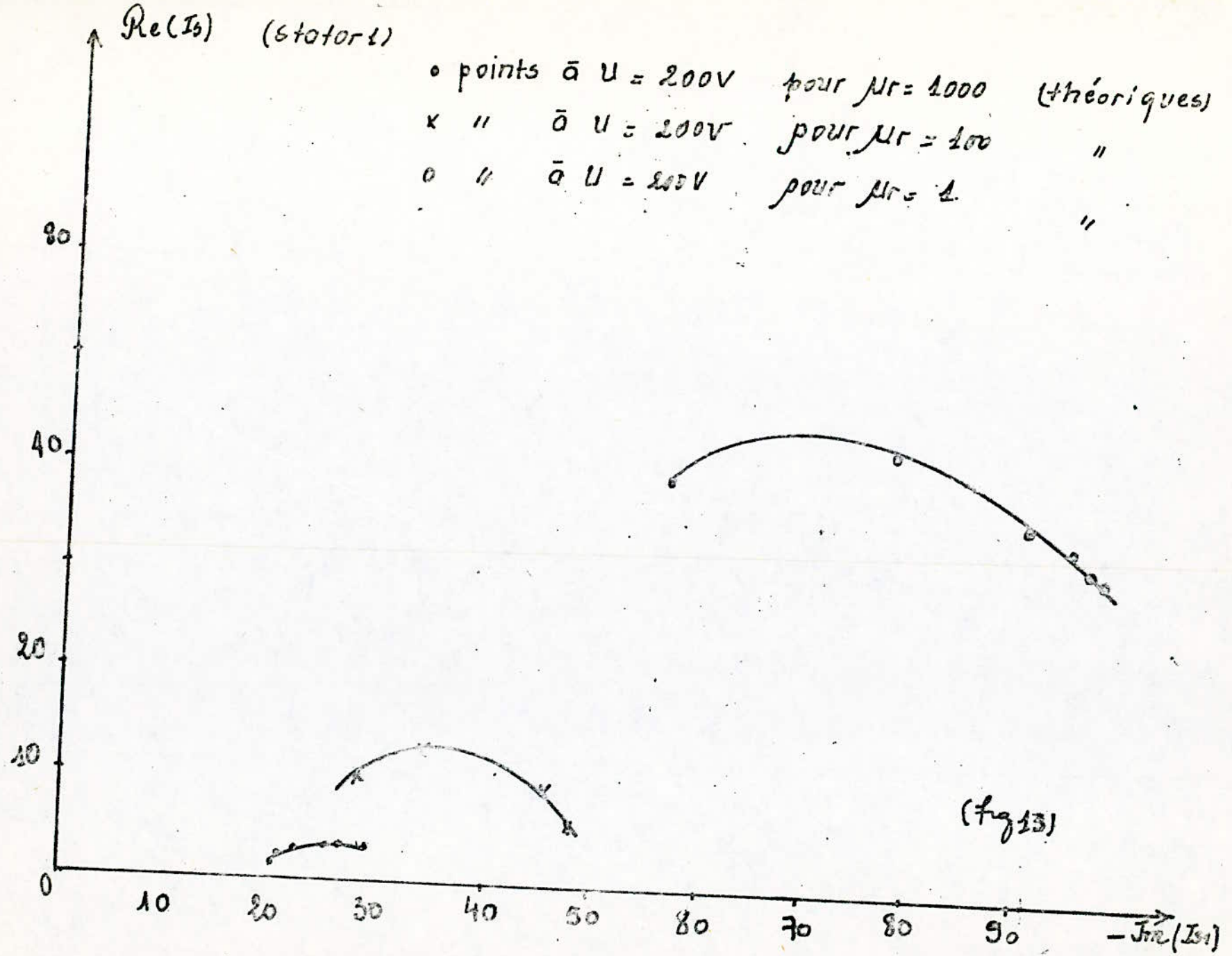
(fig 11).

Variation du courant en fonction du glissement.



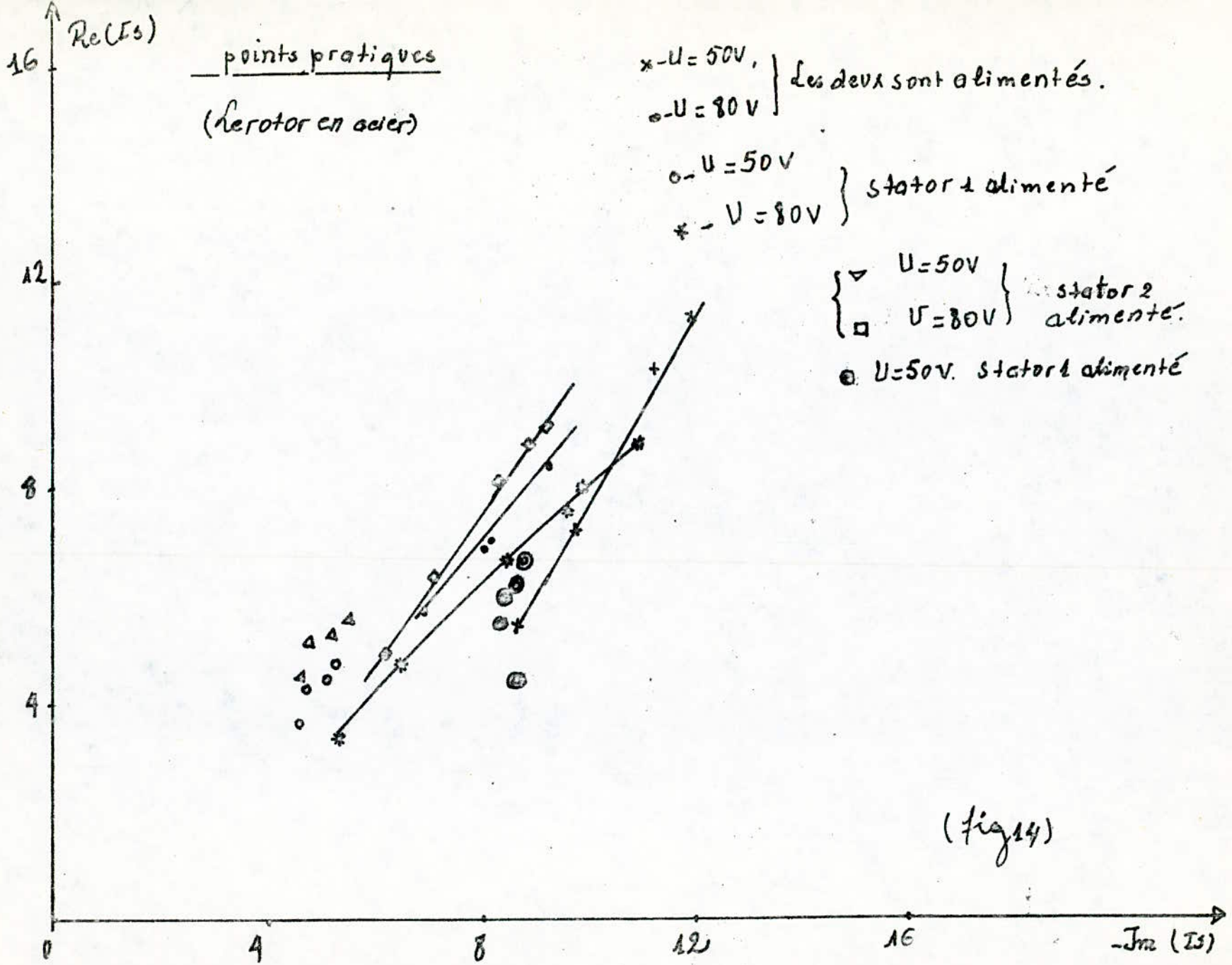


Variation du courant excité en fonction du courant d'excitation.



47

Variation du Courant watté en fonction du Courant déwatté



(fig 14)

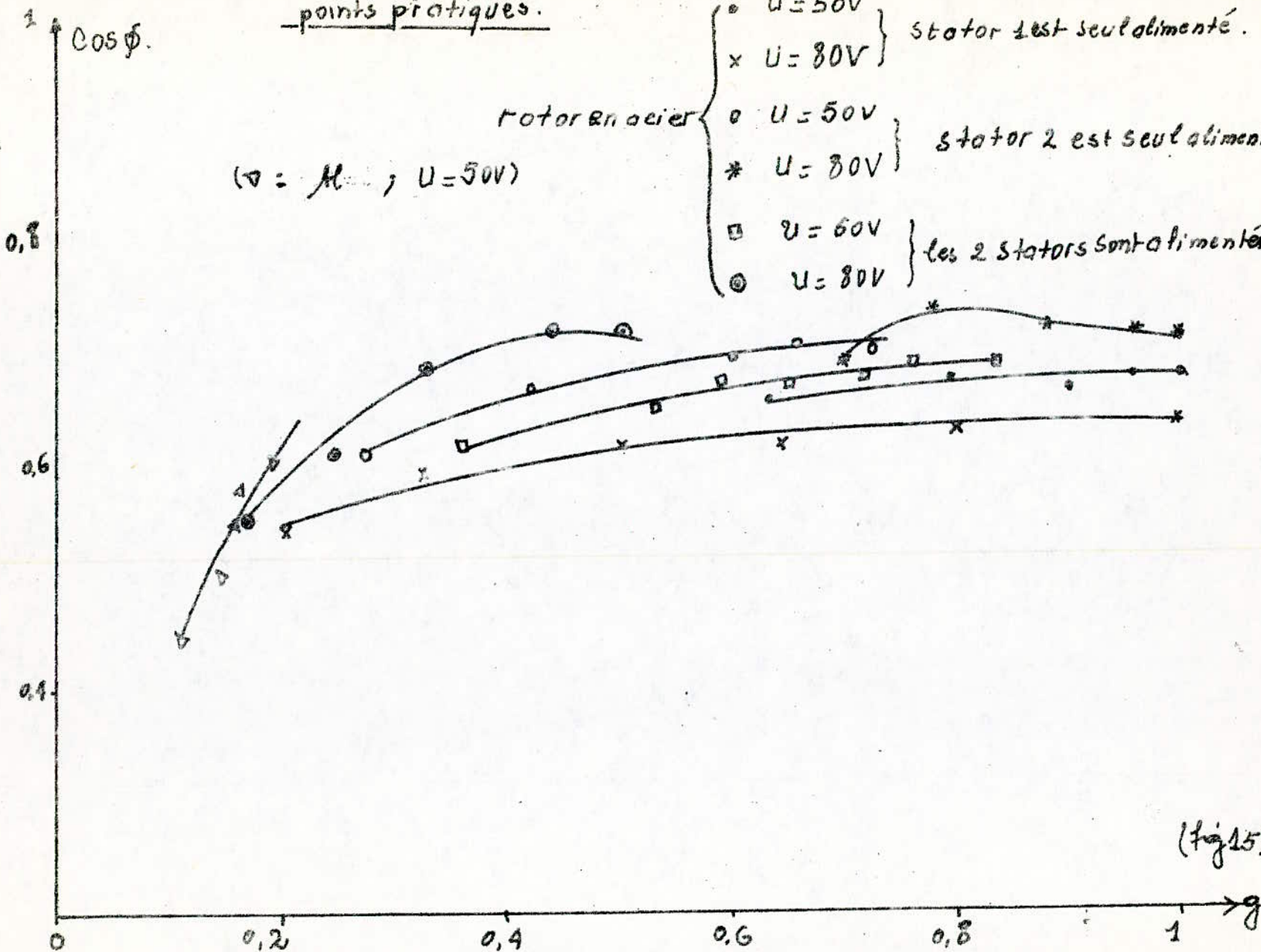
variation du facteur de puissance en fonction du glissement

points pratiques.

( $\Delta = M$ ;  $U = 50V$ )

rotor en acier

- $U = 50V$
  - ×  $U = 80V$
  - $U = 50V$
  - \*  $U = 80V$
  - $U = 60V$
  - ⊙  $U = 80V$
- stator 1 est seul alimenté.  
stator 2 est seul alimenté  
les 2 stators sont alimentés

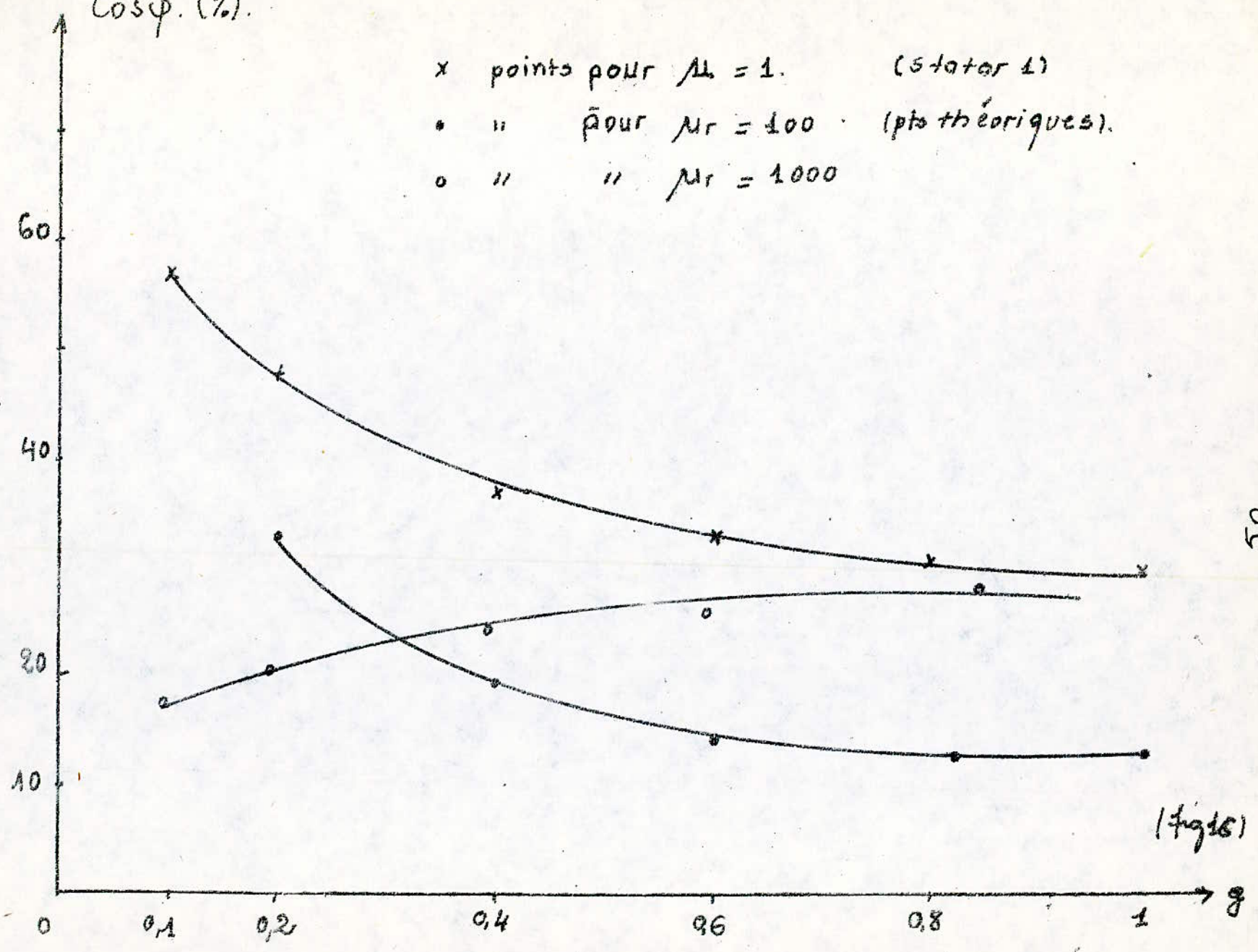


(fig 15)

Variation du Facteur de puissance en fonction de  $g$

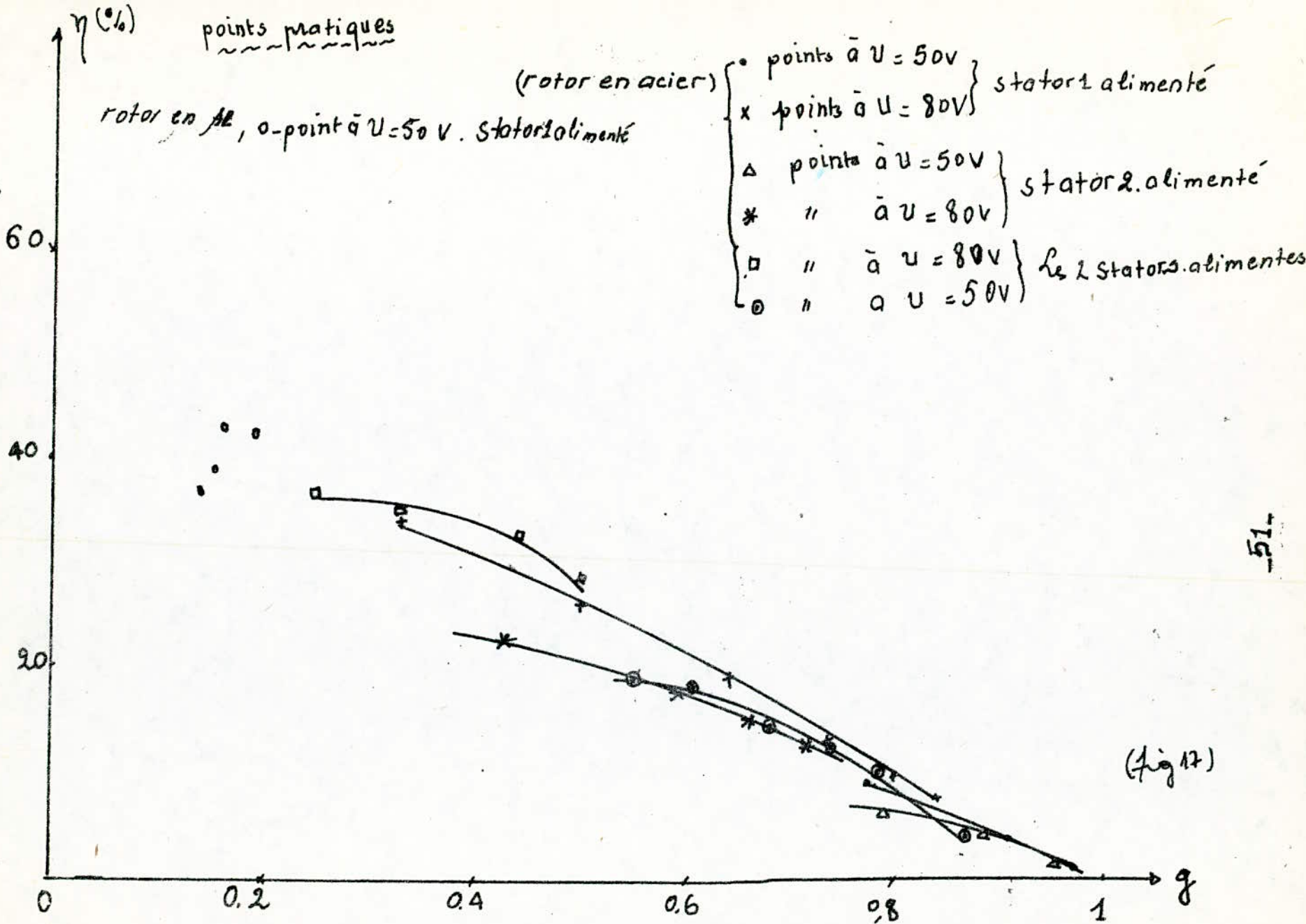
$\text{Cos } \varphi$  (%)

- x points pour  $M = 1$ . (stator 1)
- " pour  $M_r = 100$  (pts théoriques).
- o " "  $M_r = 1000$

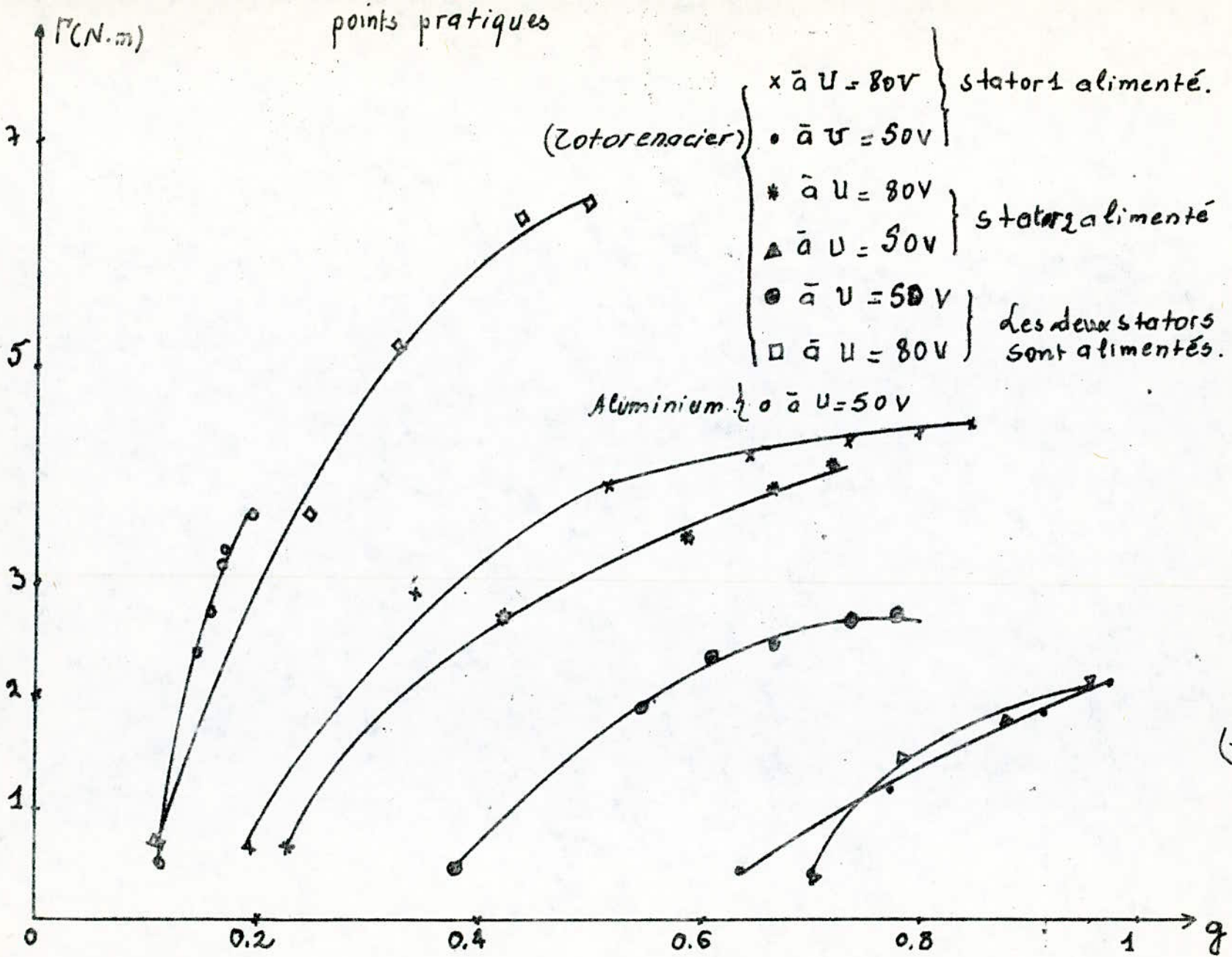


(fig 16)

variation du rendement du moteur en fonction du glissement



Variation du couple en fonction du glissement.



(fig 18)

variation du couple en fonction du glissement.

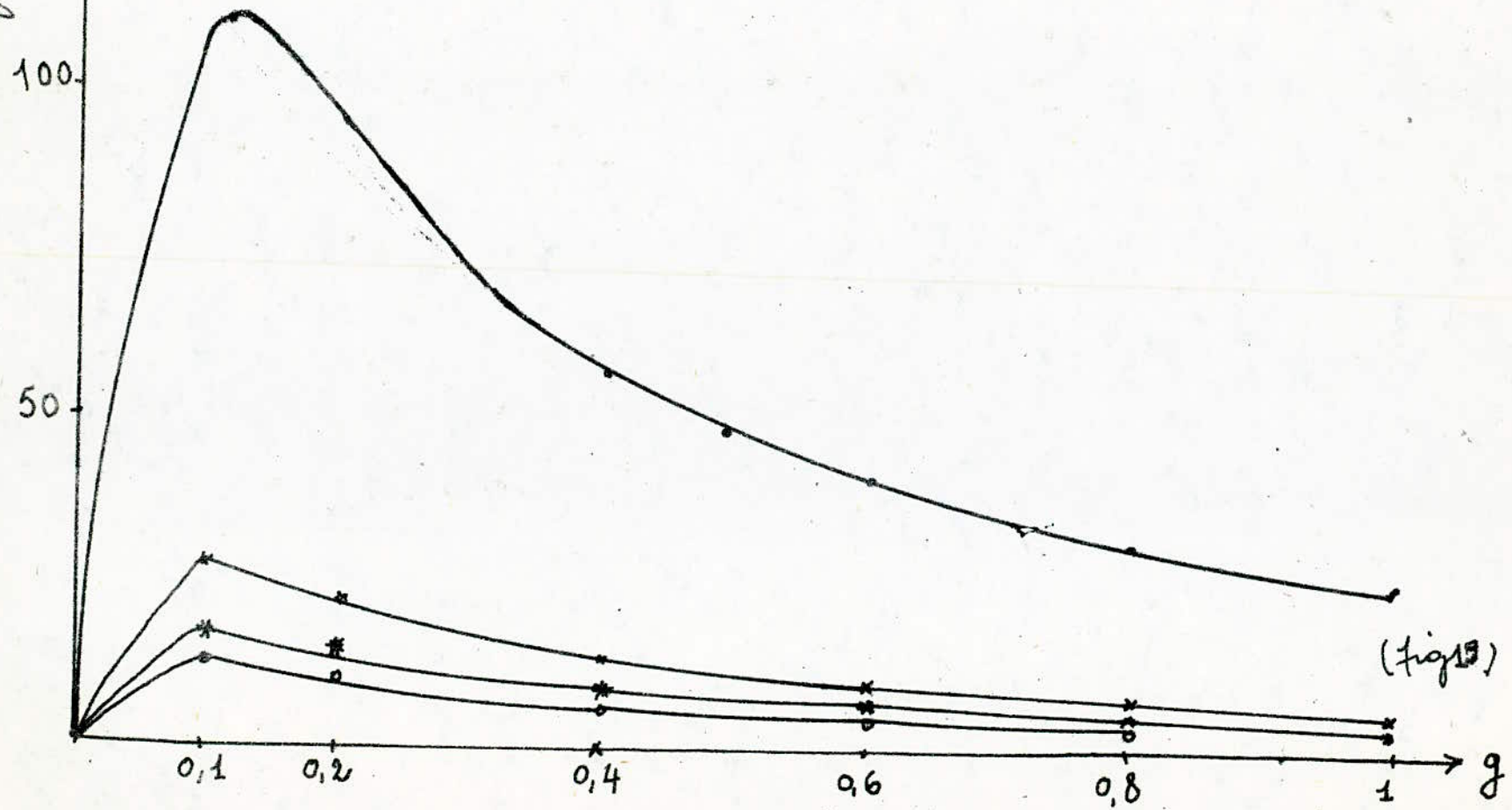
$\Gamma$  (N.m)

$Nr=1.$   
 $\gamma = 34 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$

points théoriques.

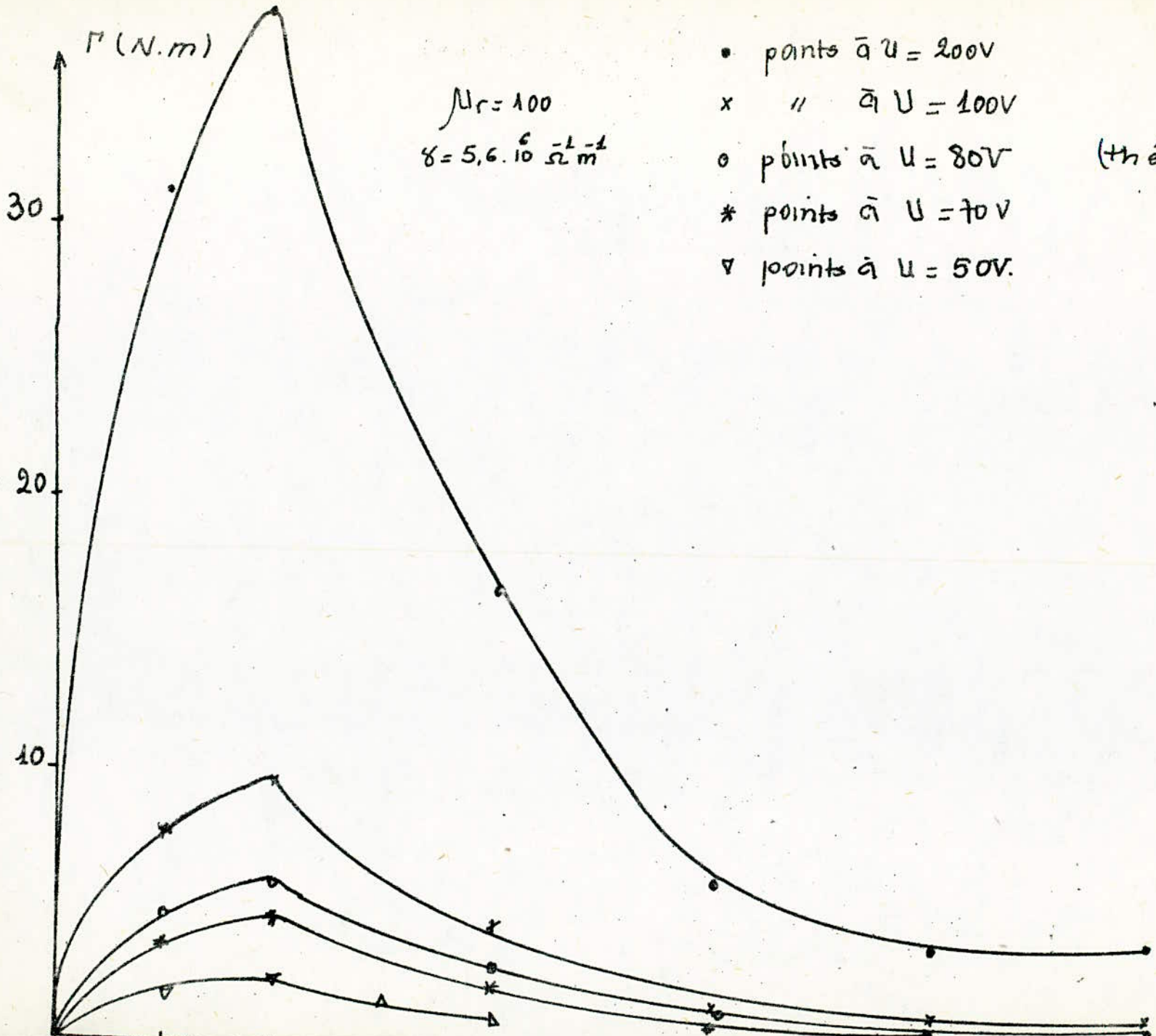
Stator 1. alimenté

- $U = 200V$
- ×  $U = 100V$
- \*  $U = 80V$
- o  $U = 70V$



(fig 15)

Variation du Couple en fonction du glissement (stator alimenté)



(fig 20)

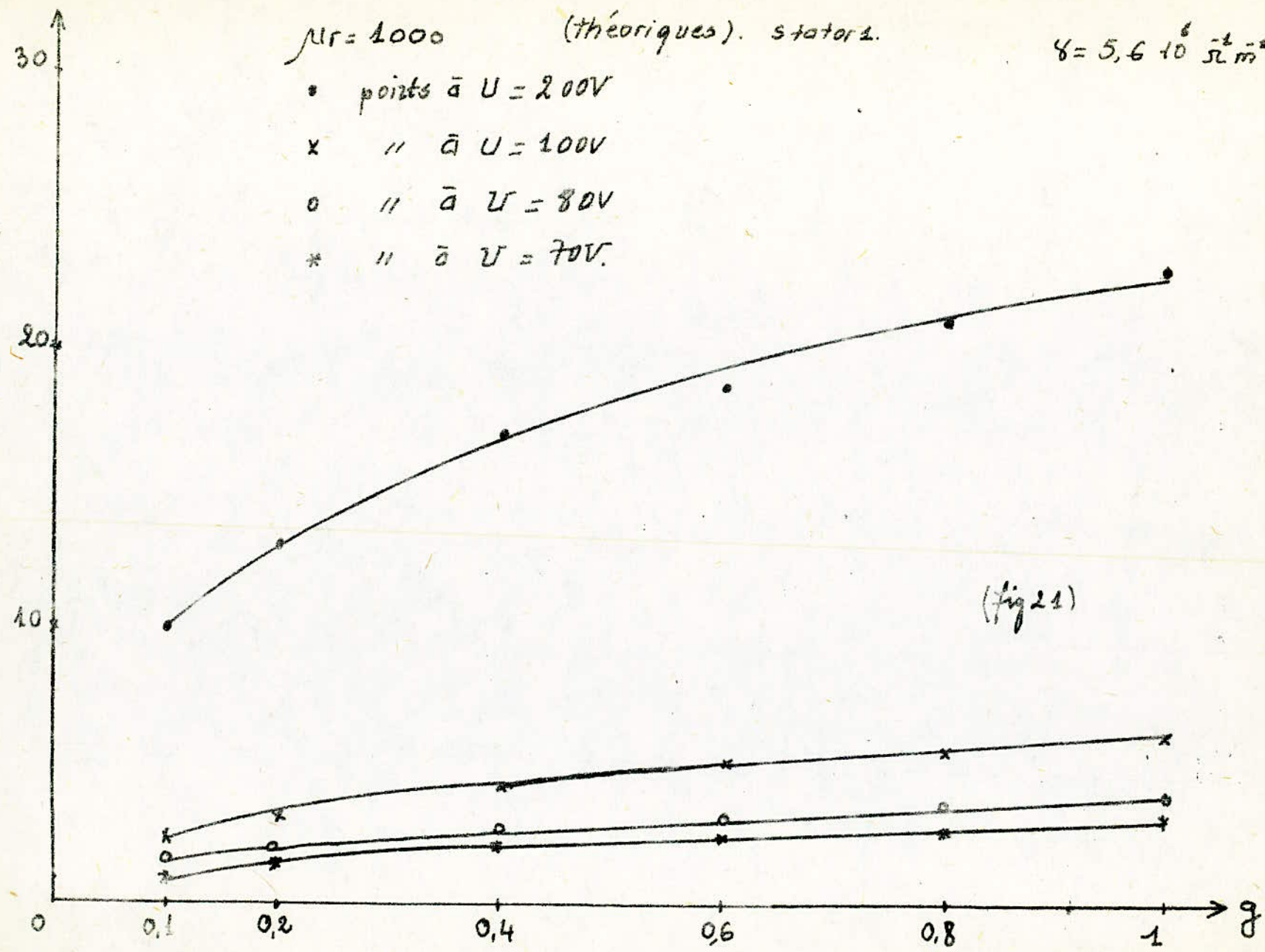


variation du couple en fonction du glissement.

$Nr = 1000$  (théoriques). stator 1.

$$\gamma = 5,6 \cdot 10^6 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}^2}$$

- points  $\bar{a}$   $U = 200V$
- x "  $\bar{a}$   $U = 100V$
- o "  $\bar{a}$   $U = 80V$
- \* "  $\bar{a}$   $U = 70V$

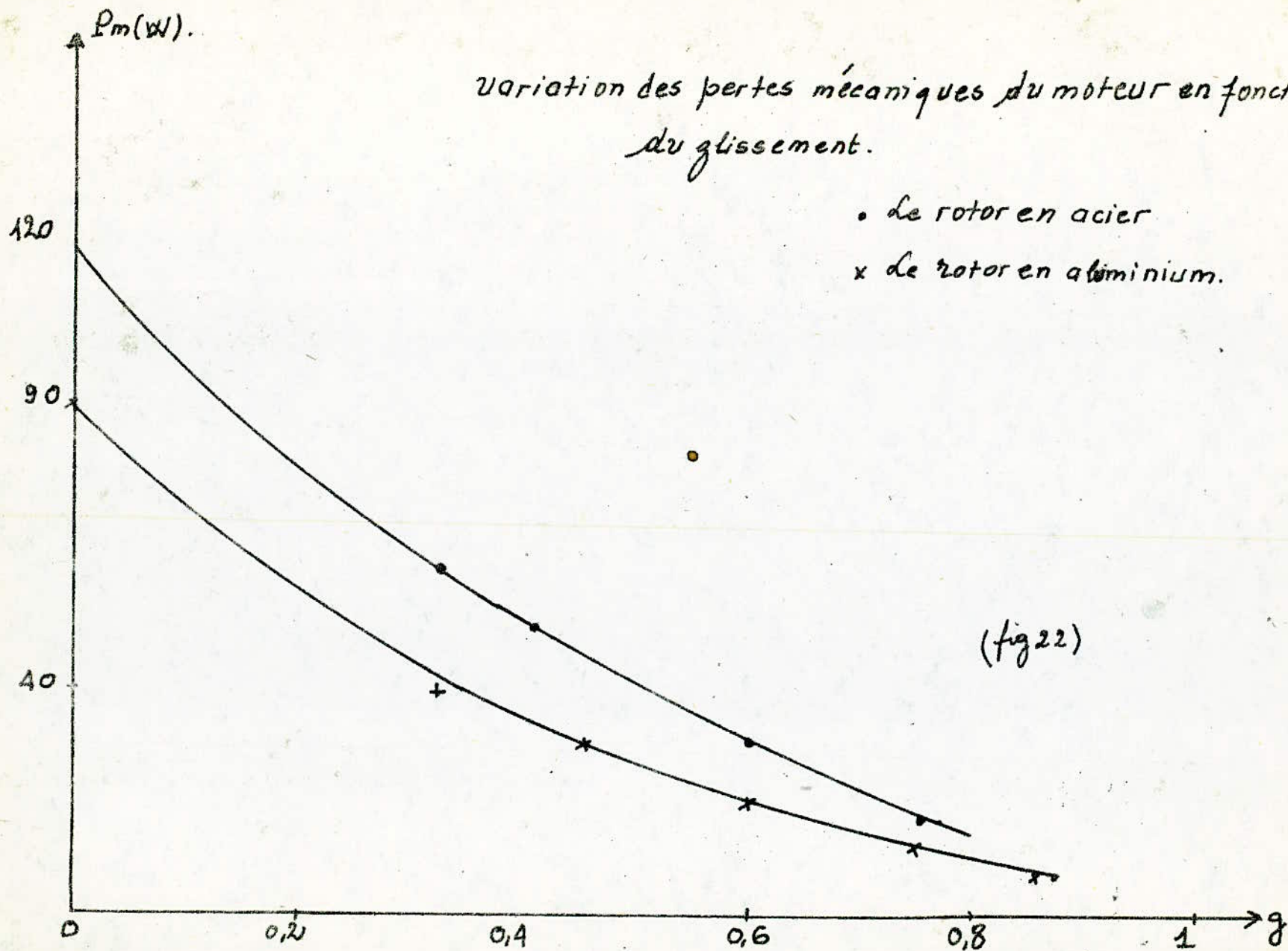


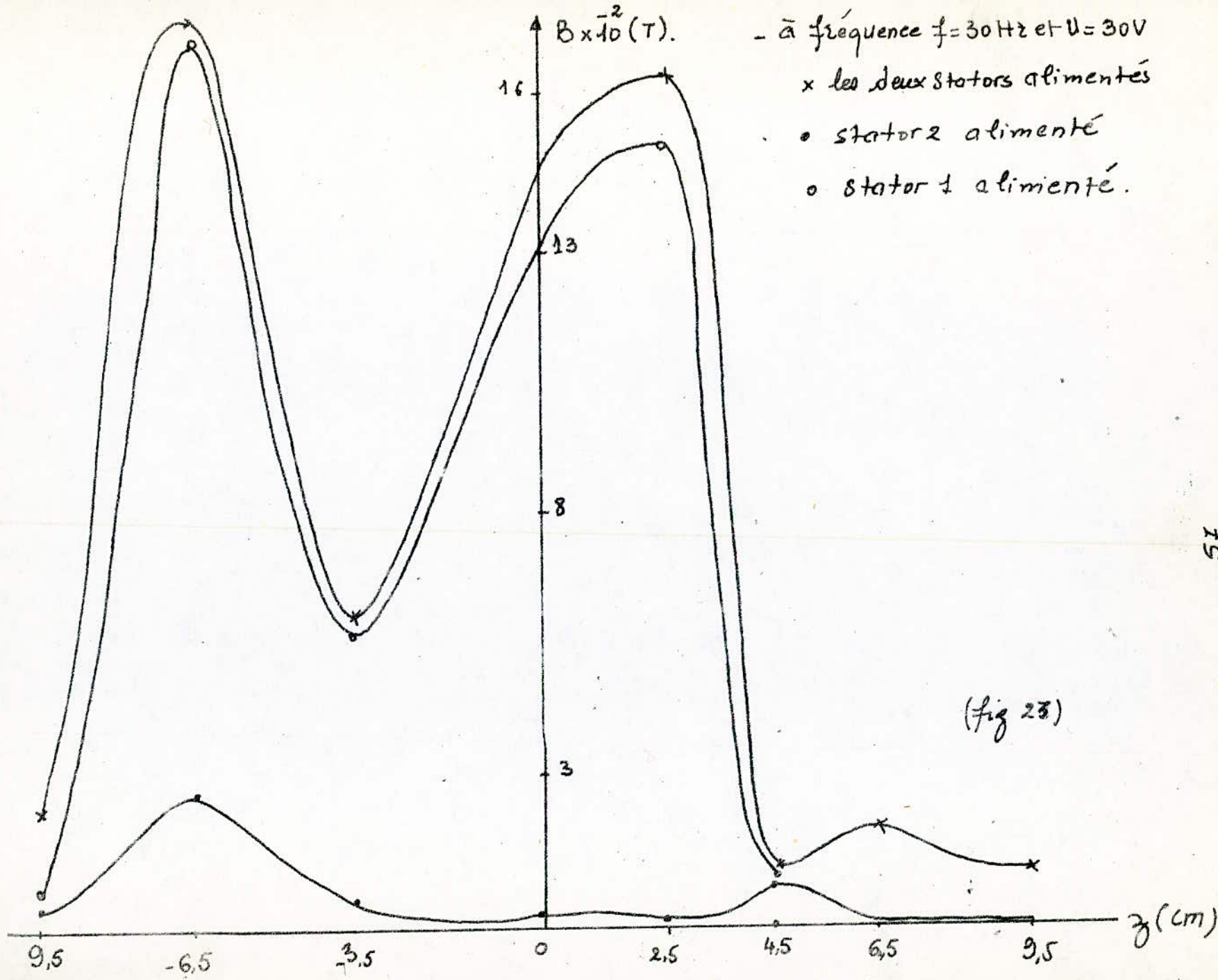
(fig 21)

Variation des pertes mécaniques du moteur en fonction du glissement.

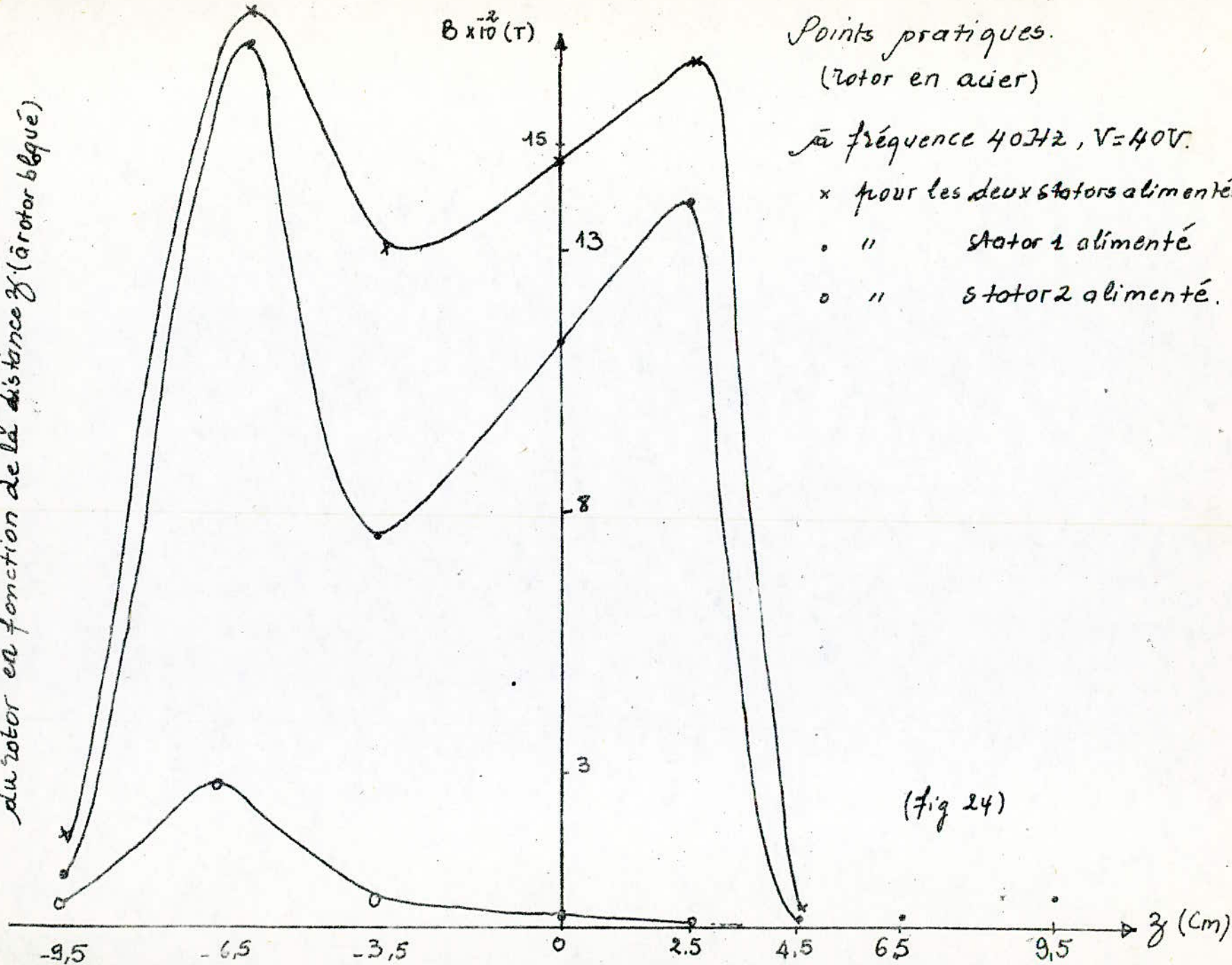
• de rotor en acier

x de rotor en aluminium.

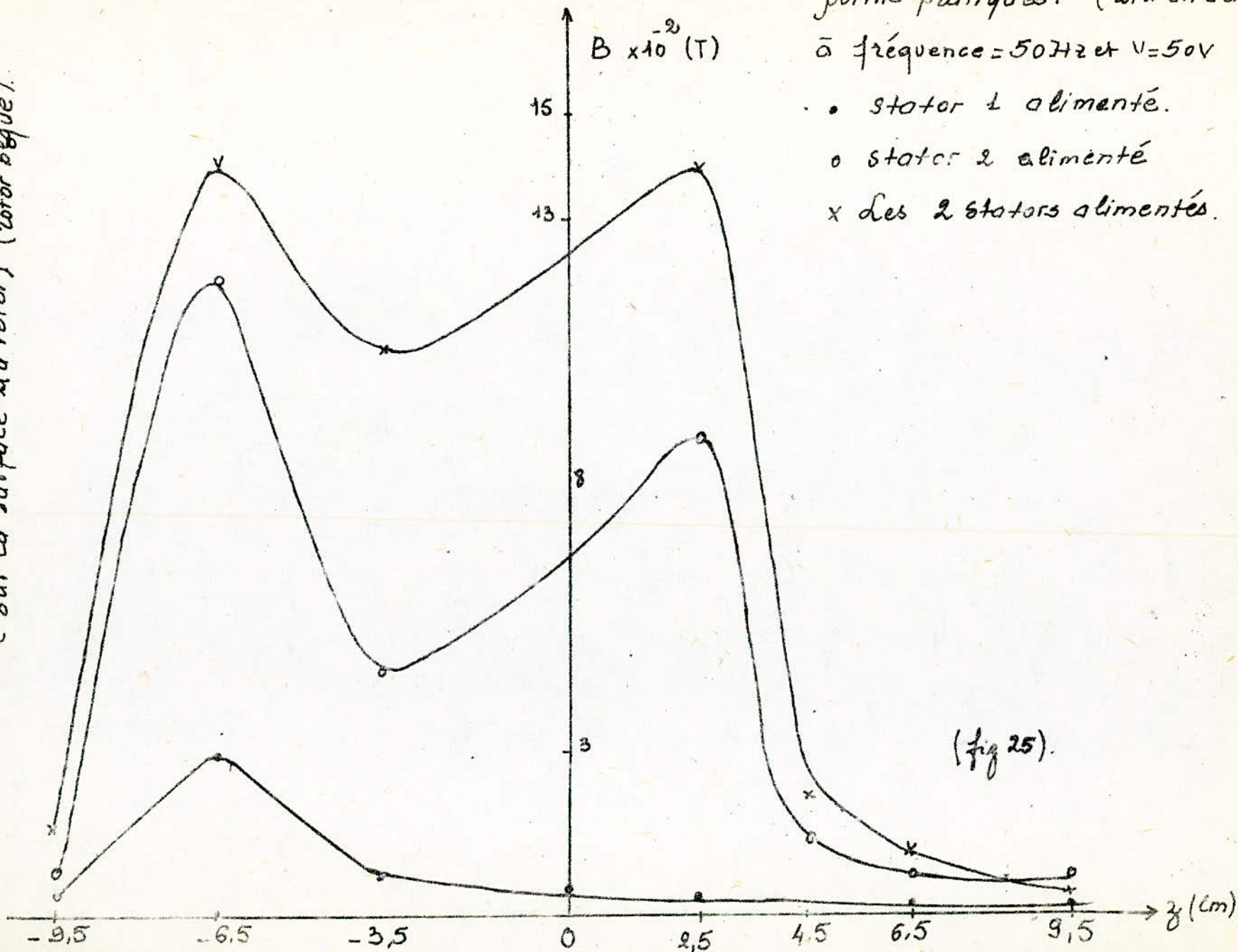




variation de l'induction magnétique à la surface  
du rotor en fonction de la distance  $z$  (à rotor bloqué)



Variation de l'induction magnétique en fonction de  $z$ .  
(sur la surface du rotor) (rotor bloqué).



Variation de l'induction magnétique à la surface intérieure du rotor

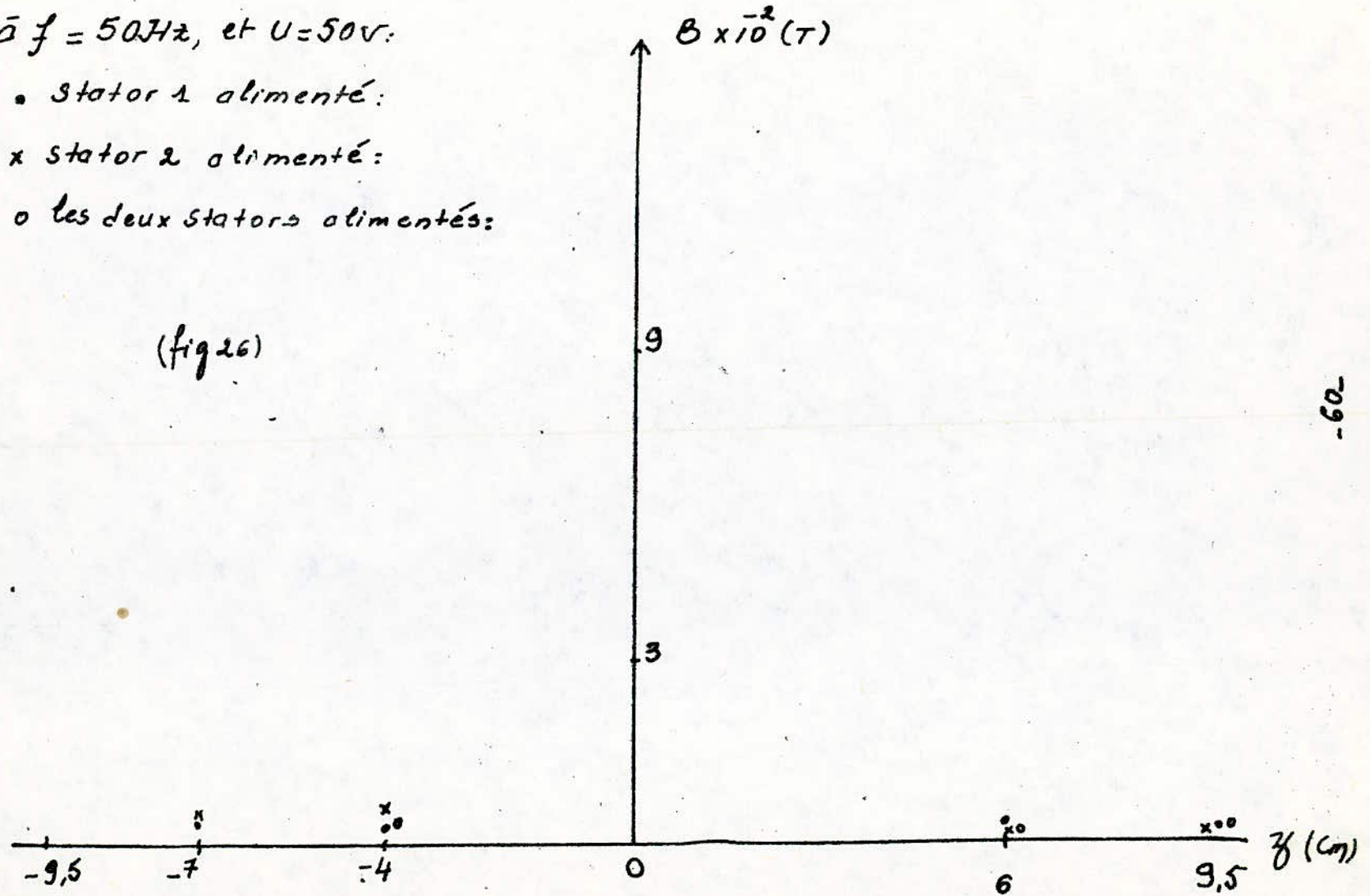
$\bar{f} = 50\text{Hz}$ , et  $U = 50\text{V}$ :

• Stator 1 alimenté:

x Stator 2 alimenté:

o les deux stators alimentés:

(fig 26)



variation de l'induction magnétique  
à la surface du rotor.

(théoriques)

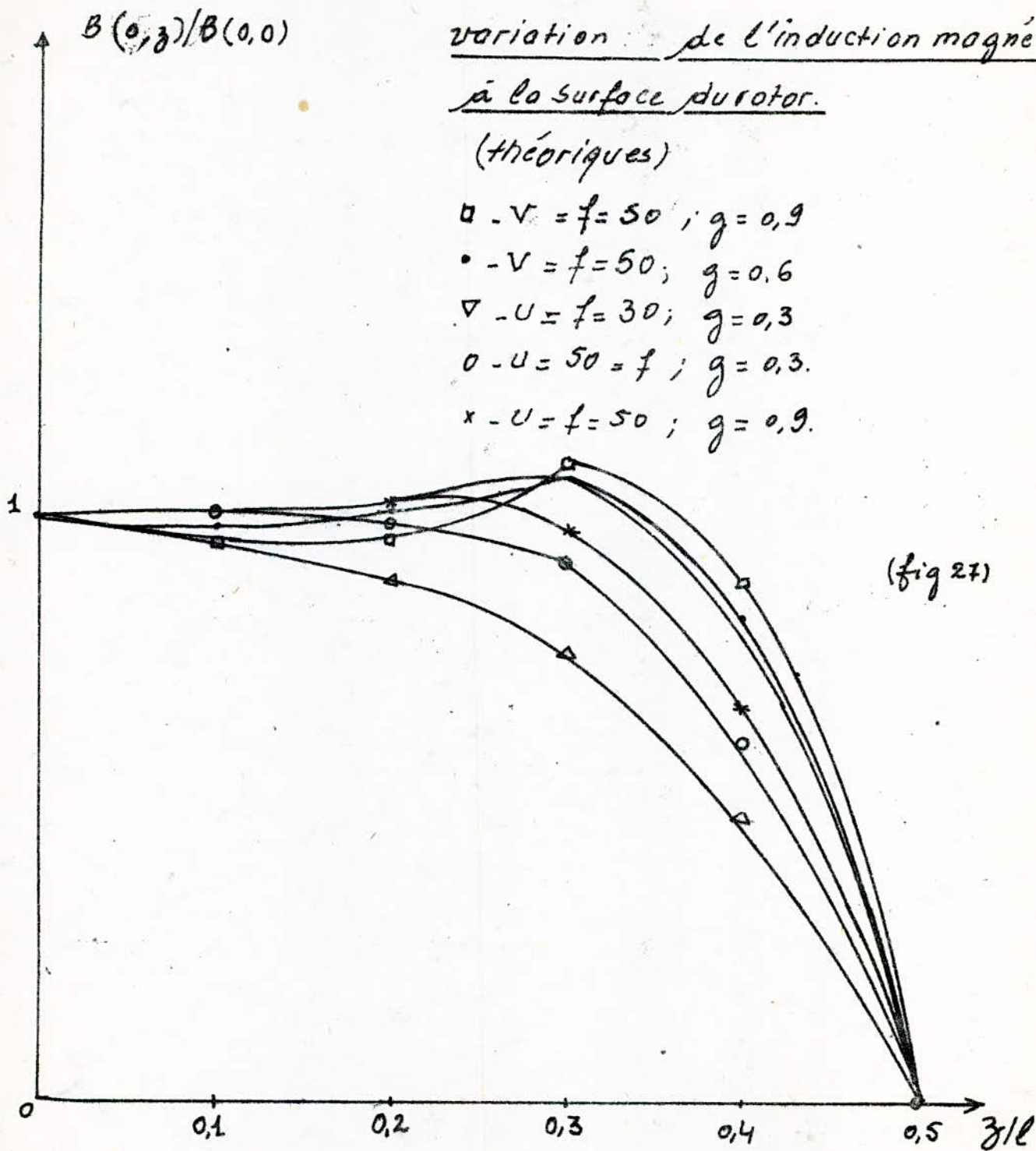
□ -  $v = f = 50$  ;  $g = 0,9$

• -  $v = f = 50$  ;  $g = 0,6$

▽ -  $u = f = 30$  ;  $g = 0,3$

○ -  $u = 50 = f$  ;  $g = 0,3$

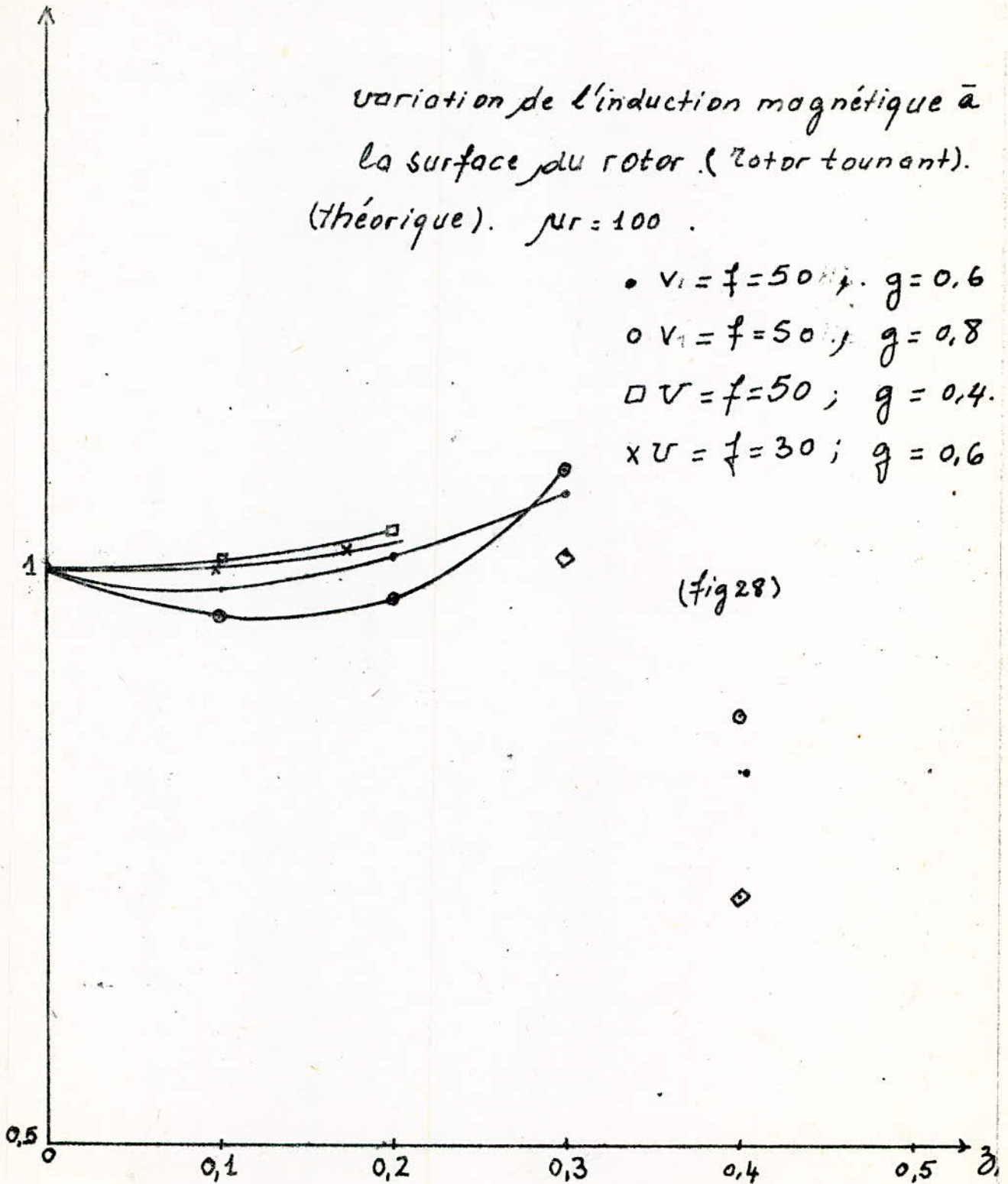
x -  $u = f = 50$  ;  $g = 0,9$



$$B_z(0, z) / B_z(0, 0).$$

variation de l'induction magnétique à  
la surface du rotor (rotor tournant).  
(théorique).  $\mu_r = 100$ .

- $v_1 = f = 50$ ;  $g = 0,6$
- $v_1 = f = 50$ ;  $g = 0,8$
- $v_1 = f = 50$ ;  $g = 0,4$
- ×  $v_1 = f = 30$ ;  $g = 0,6$





## Conclusion

Le travail nous a permis de progresser dans l'étude des effets d'extrémités d'une part et dans l'étude des machines asynchrones à rotor massif d'autre part.

L'étude des effets d'extrémités en régime linéaire menée dans le cas particulier de la machine à rotor en cloche met en évidence :

- L'influence du rapport de la profondeur de peau sur l'épaisseur du rotor. Le couple maximum est obtenu lorsque le rapport est égal à l'unité.

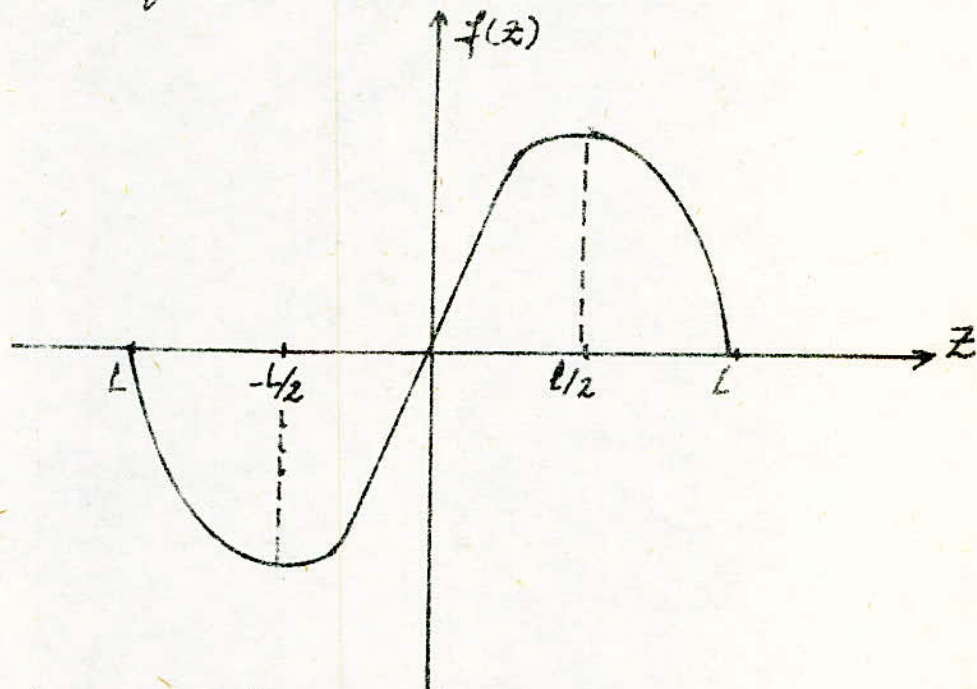
- L'amélioration du couple obtenu pour des faibles glissements (par rapport au rotor plein). La profondeur de pénétration est limitée par l'épaisseur du rotor (en cloche) tandis qu'elle peut être relativement grande pour un rotor massif plein.

- La plupart des essais expérimentaux ont montré une relative concordance avec le modèle théorique, ceci montre la nécessité de la prise en compte des effets d'extrémités.

Cependant une étude approfondie de ces effets nécessite des moyens de mesure de grandes précisions principalement pour la mesure du champ magnétique.

## Annexe

Développement en série de Fourier de la fonction  $\text{sh } \alpha z$  dans l'intervalle  $[-L, L]$  nous voulons uniquement garder les harmoniques impaires.



La fonction  $f$  est définie par :

$$f(z) = \begin{cases} -\text{sh } \alpha(z+L) & \text{si } -L < z < -L/2 \\ \text{sh } \alpha z & \text{si } -L/2 < z < L/2 \\ -\text{sh } \alpha(z-L/2) & \text{si } L/2 < z < L \end{cases}$$

on trouve :

$$f(z) = \text{sh } \alpha z = \sum_{n=1,3,\dots} \frac{4L\alpha \text{ch } \frac{\alpha L}{2} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi^2 + \ell^2\alpha^2} \sin \frac{n\pi z}{\ell}$$

# Bibliographie

[1] - K Youcef

« Contribution au calcul et réalisation d'un moteur asynchrone à deux entrefers »

Projet de Fin d'étude Ingénieur

E.N.P Juin 1969

[2] - H. Yee. « Effet of finite length in solid iron induction machine »

Proc. IEE. VOL 118; N°8 August 1971

[3] N. Mouss . D. Sator

« effets d'extrémités dans une machine asynchrone à rotor massif lisse »

Projet de fin d'étude Ingénieur

E.N.P Juin 1983.

[4] A. MEDJAHED - Y. ZEBBOUDJ.

« Étude de la machine Asynchrone à rotor massif à deux entrefers »

Projet de fin d'étude Ingénieur

E.N.P. Janvier 1984.

