

105

وزارة التعليم العالي  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : ELECTRONIQUE

# PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

SYNTHESE DES CORRECTEURS

NUMERIQUES

Proposé par :

A. MOUSSAOUI

Etudié par :

F. TOUCHI

Dirigé par :

A. MOUSSAOUI

PROMOTION : JUIN 1990.

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

---

MINISTERE DELEGUE AUX UNIVERSITES

---

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

---

PROJET DE FIN D'ETUDE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR EN ELECTRONIQUE

THEME

***SYNTHESE DES CORRECTEURS  
NUMERIQUES***

---

Etudié par :

*F. TOUCHI*

Encadré par :

*A. MOUSSAOUI*

PROMOTION JUIN 1990

### REMERCIEMENTS

Il est pour moi un plaisir autant qu'un devoir d'exprimer mes plus vifs remerciements à mon encadreur "A. MOUSSAOUS" pour ses conseils et son aide qui m'ont été très précieux.

Je tiens à exprimer ma gratitude à toutes les personnes qui, de près ou de loin m'ont aidé à élaborer ce projet.

# SOMMAIRE

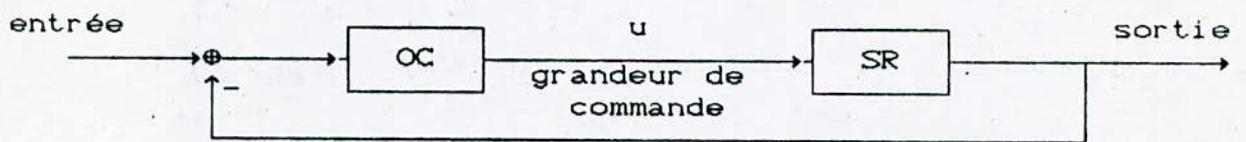
	page
INTRODUCTION	01
CHAPITRE I. SYSTEME ECHANTILLONNE.	03
I.1 ECHANTILLONNAGE IDEAL.	04
I.2 REPRESENTATION MATHEMATIQUE DE L'ECHANTILLON- NAGE IDEAL.	04
I.3 CHOIX DE LA PERIODE D'ECHANTILLONNAGE.	05
I.4 ELEMENT DE MAINTIEN.	05
I.5 CONVERSION.	07
I.6 TRANSFORMATION EN Z.	08
CHAPITRE II. CRITERES DE PERFORMANCES DES ASSERVISSEMENTS.	11
II.1 INTRODUCTION.	12
II.2 GENERALITES.	12
II.3 REPONSES A DES ENTREES TYPIQUES.	13
II.4 SPECIFICATIONS USUELLES.	14
II.5 STRUCTURE DE BASE D'UN CIRCUIT DE REGLAGE ECHANTILLONNE.	14
II.6 FONCTION DE TRANSFERT DU CIRCUIT DE REGLAGE ECHANTILLONNE.	15
II.7 ANALYSE DE LA STABILITE.	15
II.8 ESTIMATION DU REGIME TRANSITOIRE.	17
II.9 ESTIMATION DU REGIME PERMANENT.	19
II.10 CRITERE D'INTEGRALE.	21
II.11 CRITERE D'INTEGRALE AVEC PONDERATION DE LA GRANDEUR DE COMMANDE.	22
II.12 CONDITIONS POUR ANNULER L'ECART DE REGLAGE EN REGIME ETABLI.	23
II.13 DILEMME PRECISION-STABILITE.	26
CHAPITRE III. REGULATEUR PID.	28
III.1 INTRODUCTION.	29
III.2 REGULATEUR PID.	29
III.3 FONCTION DE TRANSFERT DISCRETE.	31
III.4 REGULATEUR DE STRUCTURE GENERALE.	32
III.5 ETUDE COMME SYSTEME CONTINU.	39
III.6 ORGANIGRAMME DE LA CORRECTION PID.	40

CHAPITRE IV.	REGULATEURS A TEMPS D'ETABLISSEMENT	
IV.1	INTRODUCTION.	43
IV.2	REGULATEURS A TEMPS D'ETABLISSEMENT FINI A ORDRE NORMALE.	43
IV.3	REGULATEUR DEADBEAT A UN ORDRE PLUS ELEVE.	48
IV.4	CHOIS DE LA PERIODE D'EHANTILLONNAGE D'UN REGULATEUR DEADBEAT.	50
IV.5	ORGANIGRAMME DE LA CORRECTION DEADBEAT.	52
CHAPITRE V.	APPLICATION.	54
CONCLUSION.		
BIBLIOGRAPHIE.		
ANNEXES.	Propriétés de la transformée en Z. Listing du correcteur PID. Listing du correcteur deadbeat.	

## INTRODUCTION

Les problèmes que les systèmes asservis posent à l'ingénieur sont extrêmement variés. L'un des plus importants autour duquel est axé ce projet est celui de la synthèse des correcteurs numériques.

Le schéma fonctionnel généralisé d'un système de commande automatique comporte un organe de commande (OC) et un système à asservir (SR).



La demande croissante des produits industriels tant sur la qualité que sur la quantité exige des processus une régulation assez poussée. La sortie du système doit s'adapter le plus rapidement possible au moindre changement que ce soit de l'entrée, de la perturbation ou des variations des paramètres de la structure de commande.

Pour répondre aux exigences de la technologie moderne dans le domaine de l'automatisme, les systèmes de surveillance et de navigation tels que radar, les unités industrielles telles que les laminoires, les centrales nucléaires ou thermiques, les unités de production chimique ou pétrolière etc..., ont nécessité un contrôle judicieux et permanent du fonctionnement de leurs organes fonctionnels.

Un contrôle précis et rapide à la fois n'a pu être obtenu qu'avec l'insertion de calculateurs numériques dans la chaîne de commande. Ces calculateurs de processus permettent l'élaboration digitale des algorithmes de réglage et remplacent ainsi les régulateurs classiques fonctionnant de manière continue. Ces systèmes qui fonctionnent d'une manière discontinue en fonction du temps nécessitent le découpage temporel de l'information: c'est l'échantillonnage, qui est sur le plan théorique certainement la

caractéristique la plus importante de l'insertion des calculateurs numériques . Dans ce cas on parle de réglages échantillonnés.

Pour l'étude de ces derniers, on ne peut pas utiliser les méthodes habituelles qui sont connues pour les systèmes fonctionnant de manière continue. Il est indispensable de faire appel à des méthodes d'analyse et de synthèse particulières qui tiennent compte du fonctionnement discontinu de ces réglages.

Pour présenter donc la théorie de réglage échantillonné sous une forme moderne on peut utiliser les deux méthodes principales suivantes:

- traitement par la transformation en Z.
- traitement dans l'espace d'état.

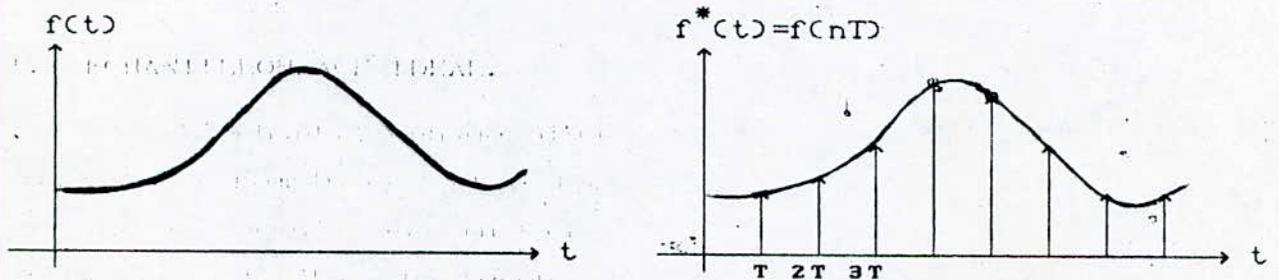
Notre étude se limitera au traitement des systèmes asservis linéaires échantillonnés par la méthode de la transformation en Z. On présentera en premier lieu les éléments mathématiques de base de la théorie des systèmes échantillonnés. On évaluera ensuite la qualité du réglage en faisant l'analyse par la transformée en Z. Ce qui nous permettra l'élaboration de deux algorithmes de synthèse de correcteurs l'un classique et l'autre spécifique (à temps d'établissement fini).

CHAPITRE I  
SYSTEME ECHANTILLONNE

L'échantillonnage de l'information étant nécessaire pour des calculateurs numériques, il est convenable de donner les notions élémentaires sur ce problème.

I.1 ECHANTILLONNAGE IDEAL.

L'échantillonnage d'une fonction donnée du temps  $f(t)$  consiste à remplacer cette fonction par la suite discontinue de ses valeurs  $f(nT)$  aux instants respectifs d'échantillonnage  $t=nT$  ( $n=0,1,2,\dots$ ). Nous parlerons d'échantillonnage idéal lorsque les valeurs  $f(nT)$  sont représentées par des impulsions d'aires respectivement égale à  $f(nT)$  aux instants  $t=nT$  ( $n=0,1,2,\dots$ ).



I.2 REPRESENTATION MATHEMATIQUE DE L'ECHANTILLONNAGE IDEAL.

La fonction  $f^*(t)$  est donc une suite d'impulsions se produisant aux instants  $t=nT$  ( $n=0,1,2,\dots$ ).

Une impulsion d'aire  $f(nT)$  à l'instant  $t=nT$  peut être considérée comme une impulsion d'aire  $f(nT)$  à l'instant  $t=0$  retardée de  $t=nT$ . On peut donc la représenter par  $f(nT)\delta(t-nT)$ , sa transformée de Laplace d'après le théorème du retard s'écrit:

$$L[f(nT)\delta(t-nT)] = f(nT) \cdot L[\delta(t)] \cdot e^{-nTp} = f(nT) \cdot e^{-nTp}$$

Comme  $f^*(t)$  est la somme de toutes les impulsions  $f(nT)\delta(t-nT)$  on peut la représenter par:

$$f^*(t) = f(0)\delta(t) + f(T)\delta(t-T) + \dots + f(nT)\delta(t-nT) + \dots$$

Sa transformée de Laplace s'écrit:

$$F^*(p) = L[f^*(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \cdot e^{-nTp}$$

On dit que  $f^*(t)$  est la fonction du temps échantillonnée ou pulsée associée à la fonction continue du temps  $f(t)$  et à la période d'échantillonnage  $T$ .

La fonction  $F^*(p)$  est la transformée de Laplace échantillonnée associée.

### I.3 CHOIX DE LA PERIODE D'ECHANTILLONNAGE.

Le choix de la période d'échantillonnage pose un problème important et dépend principalement du spectre en fréquence du signal à échantillonner (des performances de réglage que l'on désire) ainsi que du temps d'occupation qui est admissible pour le calculateur dans un ensemble de tâches données.

Sur le plan théorique le théorème de Shannon fixe une borne inférieure à la fréquence d'échantillonnage qui doit être au moins égale à deux fois la plus grande des fréquences continues dans le signal que l'on échantillonne. Pour reconstituer le signal initial à partir des échantillons il suffit d'utiliser un filtre passe bas à bande de fréquence  $B$  telle que:

$$f_{\max} \leq B \leq f_e - f_{\max}$$

\* La condition  $f_e = 2f_{\max}$  est une limite inférieure.

\* Le filtre passe-bas doit avoir un rapport d'amplitude égal à l'unité pour  $f \leq f_{\max}$  et nul pour  $f > f_e - f_{\max}$ .

Cependant on ne peut pas diminuer à volonté la valeur de la période d'échantillonnage. Lorsqu'on diminue cette période pour évaluer la qualité de réglage, il faut éventuellement tenir compte du temps de calcul.

Ce dernier introduit un retard qui peut exercer une influence néfaste sur la qualité de réglage. En aucun cas la période d'échantillonnage ne peut être inférieure au temps de calcul nécessaire. Ce critère impose donc une valeur minimale pour la période d'échantillonnage.

### I.4 ELEMENT DE MAINTIEN. système pulsé à mémoire.

Supposons que la valeur d'une grandeur physique  $x(t)$  soit mesurée par prélèvement périodiques, le dispositif de mesure ne donnant aucun renseignement entre les instants d'échantillonnage.

La façon la plus rudimentaire d'estimer la valeur réelle de  $x(t)$  est de la conserver entre deux instants d'échantillonnage, c'est ce qu'on appelle "mettre en mémoire" (ou bloquer) la valeur de la fonction analytique. La fonction  $y(t)$  est définie par:

$$y(t) = x(nT) \quad \text{pour } nT \leq t < (n+1)T$$

Un système pulsé à mémoire se laisse donc décomposer en un échantillonneur idéal suivi d'une mise en mémoire. on peut représenter  $y(t)$  de la façon suivante:

$$\text{pour } nT \leq t < (n+1)T \quad \text{on a: } y(t) = [u(t-nT) - u(t-(n+1)T)] x(nT).$$

$$\text{pour } 0 \leq t \quad \text{on a: } y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [u(t-nT) - u(t-(n+1)T)] x(nT)$$

$u(t)$ :  
échelon unité

$$\begin{aligned} \text{d'où: } Y(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{p} e^{-nTp} - \frac{1}{p} e^{-(n+1)Tp} \right] x(nT) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-Tp}}{p} e^{-nTp} x(nT) \\ &= \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-nTp}. \end{aligned}$$

Or par définition :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-nTp} = X^*(p) \quad \text{transformée de Laplace échantillonnée}$$

associée à  $x(t)$ .

$$Y(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} X^*(p) \quad (I.1)$$

Le système à mémoire est un système pulsé linéaire dont la partie linéaire a pour fonction de transfert:

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$$

La relation (I.1) qui permet le calcul de  $y(t)$  à tout instant est compliquée, mais on ne s'intéresse qu'aux valeurs de la sortie aux instants d'échantillonnages. La relation qui lie l'entrée échantillonnée et la sortie échantillonnée est:

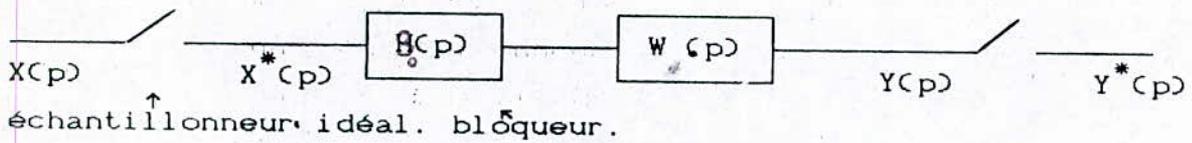
$$Y^*(p) = B_0^*(p) \cdot X^*(p).$$

Or  $X^*(p)$  ne dépend de  $p$  que par le facteur  $e^{-Tp}$ , on pose  $e^{-Tp} = z^{-1}$ . Les fonctions de transfert  $B_0(p)$  et  $W(p)$  passent aux systèmes discrets  $W(z)$  où  $z = e^{pT}$ .

$$W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} W(kT) \cdot z^{-k}$$

Donc pour l'étude des systèmes échantillonnés, on va devoir

travailler avec la transformée en Z des signaux discrets.

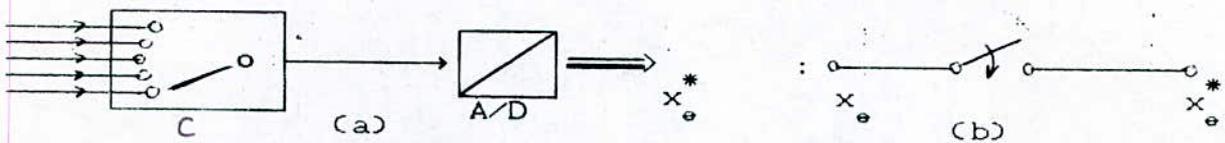


## I.5 CONVERSION.

L'échantillonneur idéal et l'élément de maintien permettent de représenter la structure générale de système échantillonnés. Les deux modèles particuliers qui possèdent ces éléments sont l'entrée et la sortie analogique d'un ordinateur de systèmes.

### I.5.1 Entrée analogique.

Une entrée analogique d'un ordinateur de système est en général composée d'un multiplexeur C et d'un convertisseur analogique/digital (A/D) comme suit:

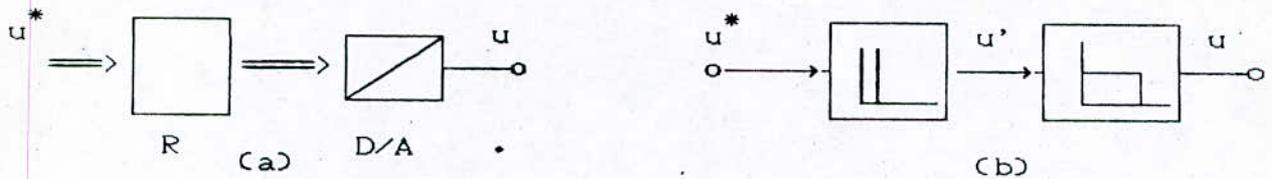


Normalement le temps de conversion est très petit par rapport à la période d'échantillonnage. On pourra donc représenter l'entrée analogique par un échantillonneur idéal (b).

### I.5.2 Sortie analogique.

La sortie analogique se compose en général d'un registre tampon R pour une grandeur digital et d'un convertisseur digital/analogique (D/A) (a).

Le mode pour la sortie analogique est simple, il est constitué d'un échantillonneur à pulsations et d'un élément de maintien (b). Le retard introduit par le temps de calcul du calculateur de système est supposé négligeable.



## I.6 TRANSFORMATION EN Z.

### I.6.1 Introduction.

Avant d'aborder le problème de synthèse proprement dite, nous rappellerons rapidement certains éléments mathématiques de la théorie des systèmes échantillonnés jugés essentiels, la théorie complète de la transformée en Z étant traitée de manière détaillée dans de nombreux ouvrages.

Comme on a vu au paragraphe I.2, la transformée de Laplace du signal échantillonné  $f^*(t)$  s'écrit:

$$L[f^*(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nt) \cdot e^{-nTp}$$

On introduit la nouvelle variable complexe:  $z = e^{pT}$ . L'expression précédente devient:

$$L[f^*(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \cdot z^{-n} = F(z).$$

Ainsi la transformée en Z d'une fonction continue n'est autre que la transformée de Laplace de sa fonction échantillonnée  $f^*(t)$ ; elle ne contient que les valeurs de la fonction aux instants d'échantillonnage et, aux instants positifs par rapport à l'origine de temps choisie pour instant initial.

Il est cependant possible, à l'aide de la transformée en Z dite modifiée, d'exprimer les valeurs de la fonction  $f(t)$  entre les instants d'échantillonnage.

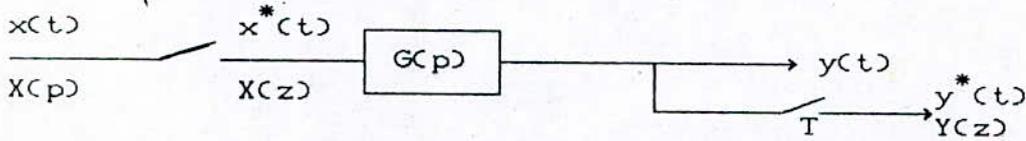
Les transformées en Z des fonctions élémentaires sont données par des tables de correspondance sous forme de fractions rationnelles en Z.

L'inversion de la transformée en Z qui consiste à retrouver la suite de valeurs  $f(nT)$  à partir de l'expression  $F(z)$  s'obtient par exemple en effectuant la division du polynôme au numérateur par celui du dénominateur suivant les puissances croissantes de  $z^{-1}$ , encore en utilisant la méthode de la décomposition

en fractions rationnelles.

### I.6.2 Transformée en Z de la sortie d'un système échantillonné.

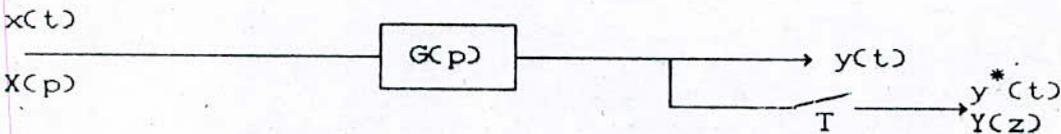
Si on considère un système précédé d'un échantillonneur suivant la figure:



est excité par un signal  $x(t)$ , la sortie  $y(t)$  a pour transformée en Z:

$$Y(z) = X(z) \cdot G(z)$$

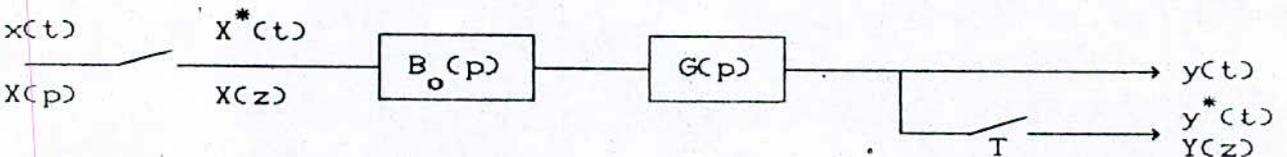
Si en revanche, le signal d'entrée n'est pas échantillonné, comme l'indique la figure suivante:



La sortie aura pour transformée en Z:

$$Y(z) = \overline{X \cdot G}(z) \quad \text{puisque } y(t) \text{ est dans le cas l'original de } \overline{X(p) \cdot G(p)}.$$

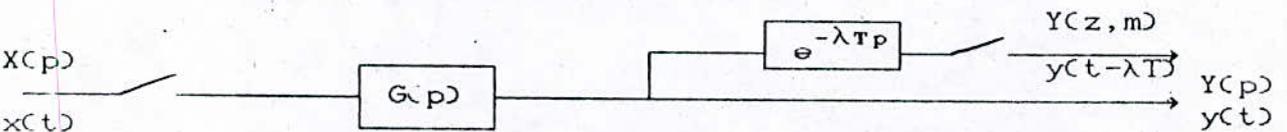
Dans le cas particulier où le système est précédé d'un échantillonneur-bloqueur comme indique la figure suivante:



la transformée en Z de la sortie est donnée par:  $Y(z) = X(z) \cdot \overline{B_0 G}(z)$

### I.6.3 Transformée en Z modifiée.

La pratique de la transformée en Z modifiée consiste à introduire un retard fictif  $\lambda T$  ( $\lambda \in [0, 1[$ ) en amont de l'échantillonneur fictif placé sur  $y(t)$  comme suit:



La transformée en Z modifiée de  $Y(t)$ , n'est donc autre chose que la transformée en Z de  $y(t-\lambda T)$ :

$$L_m [y(t)] = Y(z, m) = z^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y((n+m)T) \cdot z^{-n}$$

d'où on tire la relation entre la transformée en Z modifiée et la transformée en Z:  $Y(z) = \lim_{m \rightarrow 0} z \cdot Y(z, m)$ .

#### I.6.4 Techniques de discrétisation.

Sachant que  $p$  est l'inverse d'une intégration, les différentes approximations discrètes d'une intégration fournissent autant de façons de remplacer l'opérateur " $p$ " par un équivalent en " $z$ ". C'est ainsi que:

- l'approximation rectangulaire :  $y_n = y_{n-1} + T x_n$  conduit à remplacer  $p$  par  $\frac{1}{T} \frac{z-1}{z}$
- l'approximation trapézoïdale :  $y_n = y_{n-1} + \frac{T}{2} (x_n + x_{n-1})$  conduit à remplacer  $p$  par  $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$ .
- l'approximation de simpson :  $y_n = y_{n-1} + \frac{T}{3} (x_n + 4x_{n-1} + x_{n-2})$  conduit à remplacer  $p$  par  $\frac{3}{T} \frac{z^2-1}{z^2+4z+1}$ .

Parmi ces trois formules, la transformation trapézoïdale (ou bilinéaire) réalise le meilleur compromis, entre l'ordre de l'approximation et la stabilité du schéma d'intégration.

Cette correspondance entre  $p$  et  $z$  peut s'obtenir en faisant le développement de Taylor pour de faibles périodes  $T$ .

$$p = \frac{1}{T} \ln z \approx \frac{2}{T} \left[ \frac{z-1}{z+1} + \frac{(z-1)^3}{3(z+1)^3} + \dots \right]$$

et en s'arrêtant au premier terme.

Ces approximations sont utiles lors de l'établissement de la relation entre les régulateurs discrets et continus.

## CHAPITRE II

### CRITERES DE PERFORMANCES DES ASSERVISSEMENTS

### II.1 INTRODUCTION.

Les systèmes asservis doivent être stables tout en assurant certaines rapidité et précision minimales. Cette dernière prescription concerne aussi bien le régime stationnaire que transitoire.

En régime stationnaire la précision est déterminée par l'erreur stationnaire, et en régime transitoire par l'écart entre la grandeur réglée réelle et celle qui a été imposée (c'est à dire par la valeur du dépassement et le temps de la réponse transitoire).

Lors de l'étude des systèmes de commande asservis, il faut non seulement résoudre les problèmes liés à la stabilité, mais encore s'efforcer d'assurer l'allure souhaitée des régimes stationnaire et transitoire de l'asservissement. L'ensemble des prescriptions imposées à la précision, rapidité, régularité du système de réglage etc... est réuni sous la notion de performances.

Donc au cours de la conception d'asservissement, il serait évident de faire une estimation de ces performances et de les prendre par la suite comme des exigences déterminant le choix de la structure et des paramètres du correcteur.

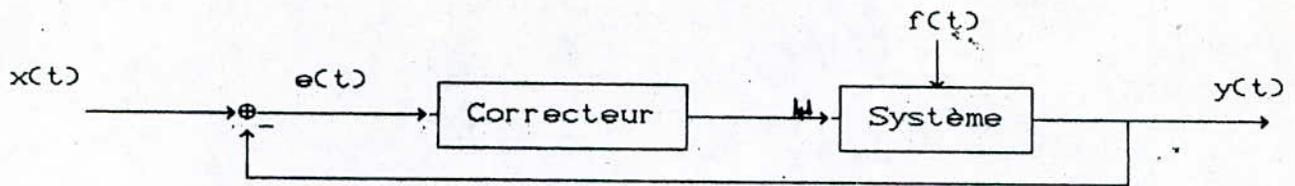
### II.2 GENERALITES

Asservir une grandeur de sortie  $y(t)$  à une entrée  $x(t)$  c'est réaliser un système tel qu'on ait:

$$y(t) = x(t)$$

- a) de quelque manière que varie l'entrée (problème de poursuite).
- b) quelque soient les perturbations extérieures qui interviennent (problème de régulation).

On dira donc qu'un asservissement idéal serait le maintien de l'erreur  $e(t) = x(t) - y(t)$  égal à zéro quelque soit la commande et malgré les perturbations.



$x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $f(t)$  et  $e(t)$  sont respectivement l'entrée, la sortie, la perturbation et l'erreur du système asservi.

Or il n'est pratiquement pas possible de réaliser un asservissement idéal garantissant une erreur rigoureusement nulle. D'où l'idée de chercher à maintenir l'erreur aussi petite que possible selon les spécifications données par l'utilisateur. Dans ce qui suit, on se limite aux asservissements linéaires.

### II.3 REPONSES A DES ENTREES TYPIQUES.

Les entrées (commandes et perturbations) auxquelles sont soumis les systèmes asservis sont aléatoires, donc pour juger les performances de ces systèmes, on doit logiquement faire appel à des méthodes statistiques. Dans la pratique courante on caractérise les performances d'un système par la manière dont il répond à un certain nombre d'entrées typiques qui sont en nombre de quatre:

- échelon unité  $u(t)$ .
- la rampe unité  $e(t) = t \cdot u(t)$ .
- l'impulsion unité  $\delta(t)$  ou impulsion de Dirac.
- la sinusoïde  $e(t) = e_0 \sin(\omega t + \varphi) u(t)$ .

Le système, soumis à une de ces quatre types finit en général par présenter une sortie appartenant aussi à un de ces types, on dit qu'il a atteint son régime définitif ou permanent. Or il lui faut un certain temps pour le faire, pendant ce temps, on dit qu'il est en régime transitoire.

Remarque: Si le signal de commande opère avec le signal de la perturbation, on peut estimer la précision de cet asservissement par l'erreur de l'action commune de ces signaux.

## II.4 SPECIFICATIONS USUELLES.

Les performances d'un système de commande se jugent par la qualité de leur régime transitoire (rapidité et amortissement) et de leur régime définitif (erreur de position ou de trainage, propriétés des réponses en fréquences). On est ainsi amené à déterminer (par le calcul ou expérimentalement) ses réponses aux entrées typiques et à les juger au sens des critères suivants:

1) Pour le régime définitif: faibles erreurs de position et de trainage.

2) Pour le régime transitoire: bien amorti, assez rapide.

A ces exigences s'ajoute dans le cas d'un système à retour, la condition de stabilité.

## II.5 STRUCTURE DE BASE D'UN CIRCUIT DE REGLAGE ECHANTILLONNE.

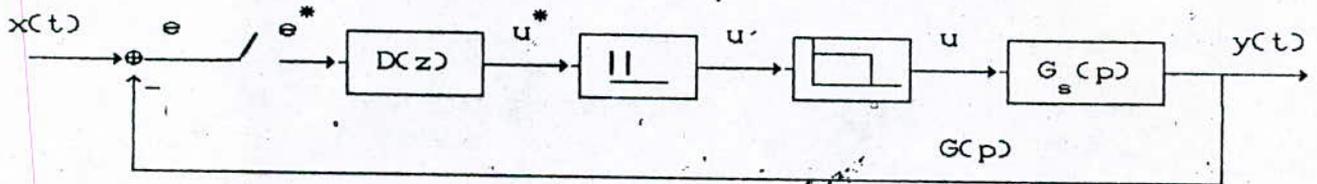
La figure suivante montre le schéma bloc de la structure de base d'un circuit de réglage échantillonné. La signification des différents symboles utilisés est la suivantes:

$x$  : grandeur de consigne.

$y$  : grandeur de sortie ( ou à régler).

$e$  : écart de réglage.

$u$  : grandeur de commande.



La différence entre la grandeur de consigne et la grandeur à régler donne l'écart de réglage " $e$ " qui est échantillonné par un échantillonneur idéal, ce qui donne l'écart de réglage discret " $e^*$ ". Il intervient sur le régulateur discret dont la fonction de transfert est donnée par  $D(z)$ . Ce régulateur fournit la grandeur de commande " $u^*$ " sous forme d'un signal discret. Par l'intermédiaire d'un échantillonneur à pulsation et d'un élément de maintien, on obtient la grandeur de commande " $u$ ". Cette grandeur intervient sur

le système à régler qui possède la fonction de transfert normale  $G(p)$ . A la sortie du système apparaît la grandeur à régler "y".

## II.6 FONCTION DE TRANSFERT DU CIRCUIT DE REGLAGE ECHANTILLONNE.

On reunit l'élément de maintien et le système à régler en un seul bloc qui possède la fonction de transfert échantillonnée  $G(z)$ . On tire donc les équations:

$$Y(z) = G(z) \cdot D(z) \cdot E(z) \quad \text{et} \quad E(z) = X(z) - Y(z)$$

d'où:  $E(z) = \frac{1}{1 + G(z) \cdot D(z)} \cdot X(z)$  et  $Y(z) = \frac{G(z) \cdot D(z)}{1 + G(z) \cdot D(z)} \cdot X(z)$

$Y(z) = G_x(z) \cdot X(z)$  avec  $G_x(z) = \frac{G(z) \cdot D(z)}{1 + G(z) \cdot D(z)}$ : Fonction de transfert du circuit de réglage échantillonné fermé.

## II.7. ANALYSE DE LA STABILITE.

La condition de stabilité est impérative, il est nécessaire qu'un asservissement soit stable avant toute autre considération.

Cette condition étant une condition de sécurité, il est convenant de garantir une certaine marge de sécurité. La stabilité doit être maintenue en cas par exemple de petites variations de réglage ou de retards dont on n'a pas tenu compte dans les équations.

### II.7.1 Conditions de stabilité:

La condition fondamentale de stabilité d'un système est que les poles de sa fonction de transfert normale aient leur partie réelle négative.

Par conséquent afin que le circuit de réglage échantillonné soit stable, il est indispensable que les racines de l'équation caractéristique se trouvent à l'intérieur du cercle unité.

### II.7.2 Methodes d'analyse de la stabilité.

La recherche des solutions de l'équation caractéristique

devient difficile lorsque son degré est supérieur à trois. C'est pourquoi on utilise des critères qui, sans avoir à résoudre l'équation caractéristique, permettent de savoir si le module de ces racines est inférieur à 1.

Etant donné que les méthodes d'analyse de la stabilité sont très similaires aux méthodes utilisées dans les systèmes continus bouclés, et que celles-ci sont traitées de manière détaillée dans plusieurs ouvrages, on se contente de citer ces méthodes sans avoir à les détailler:

a) méthodes algébriques:

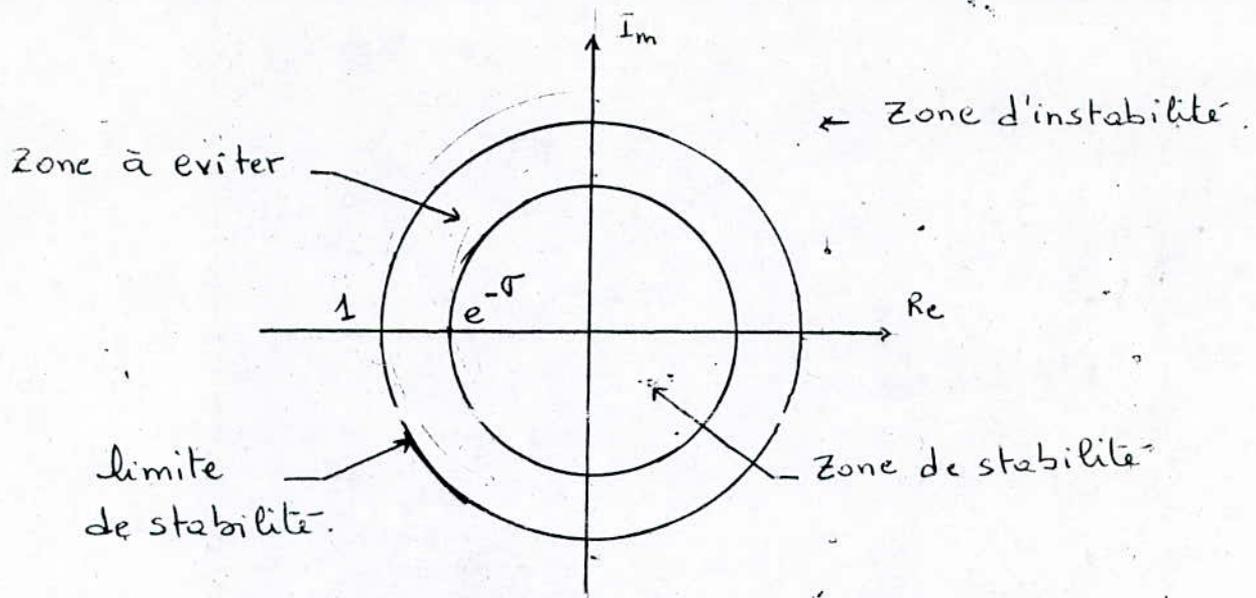
- critère de Schur-Cohn.
- critère de Jury.
- critère de Routh-Hurwitz.
- etc...

b) méthodes géométriques:

- critère de Nyquist.
- lieu des racines.
- diagramme de Bode.
- etc...

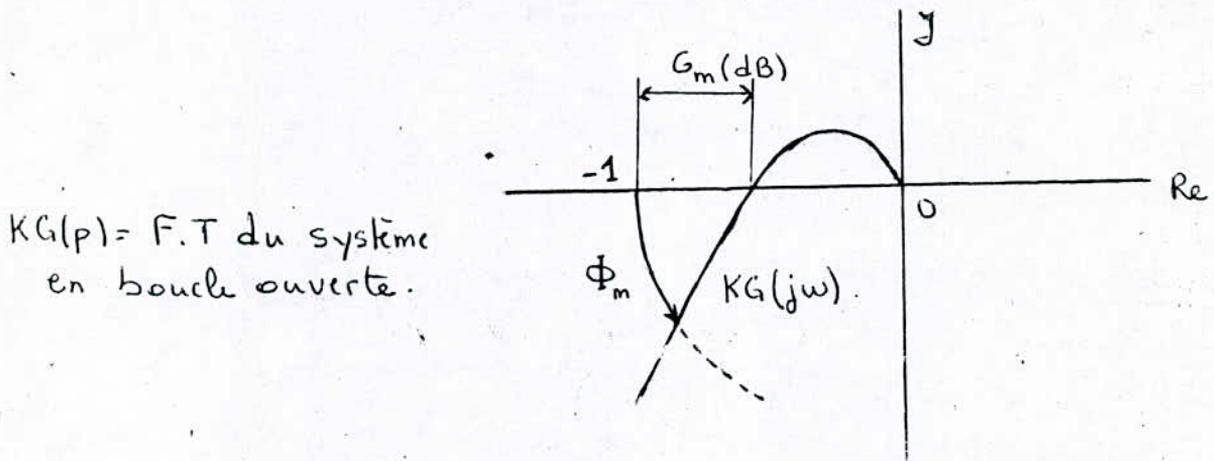
### II.7.3 Degré de stabilité.

Afin de garantir que la stabilité persiste malgré l'influence d'éventuels facteurs mal connus, qu'il n'a pas été possible d'inclure dans la mise en équations, il convient d'imposer une marge de sécurité. En effet on impose aux racines de l'équation caractéristique du système de se trouver à l'intérieur d'un cercle de rayon  $e^{-\sigma}$  qui a le même centre que le cercle de rayon 1.



### II.7.3 Marge de gain, marge de phase

Le degré de stabilité est souvent chiffré <sup>Par</sup> la marge de phase et la marge de gain définies sur la figure suivante:



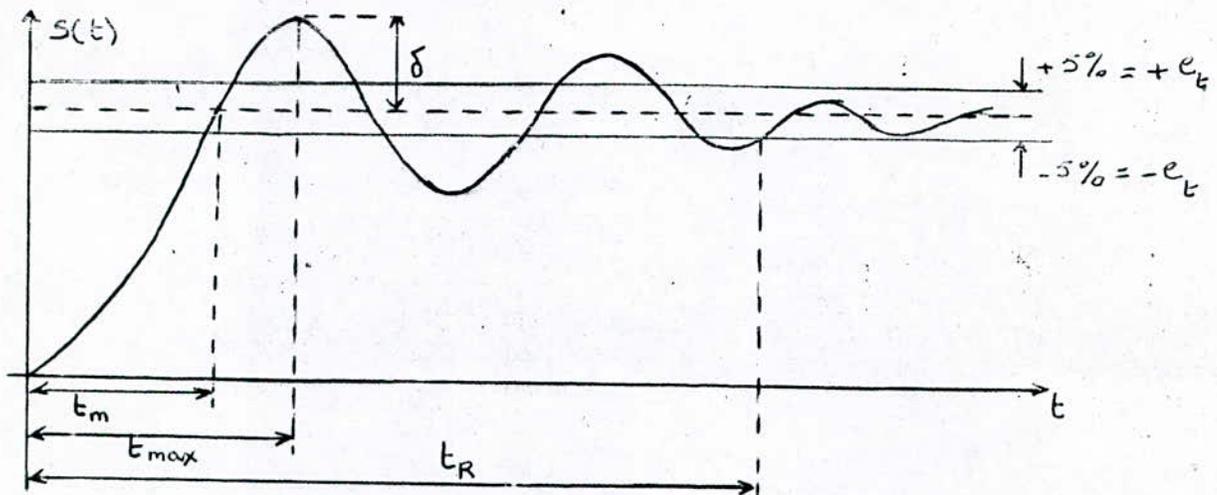
$KG(p)$  = F.T du système en boucle ouverte.

Plus  $G_m$  et  $\phi_m$  sont élevées, plus la stabilité est bonne. Ce critère est non seulement un critère de bonne stabilité, mais constitue aussi un critère de performance pour le régime transitoire.

### II.8 ESTIMATION DU REGIME TRANSITOIRE.

Les phénomènes transitoires lors d'une variation de la grandeur de consigne ou de la grandeur de perturbation doivent être bien amortis. Pour évaluer ce comportement, on fait appel en général à la réponse indicielle du circuit de réglage fermé par rapport à la grandeur de consigne ou par rapport à la grandeur de perturbation.

La figure suivante montre l'allure de la réponse indicielle que présente la grandeur à régler  $y(t)$  d'un circuit de réglage lors de la variation par un saut unité de la grandeur de consigne  $x(t)$ .



Le comportement dynamique peut être caractérisé par le dépassement maximum  $\delta$ , le temps de montée  $t_m$  et le temps de réglage  $t_r$ .

Le dépassement maximum  $\delta$  est la différence entre la valeur maximale  $y_m$  de la réponse indicielle et la valeur  $x=1$ .

Le temps de montée  $t_m$  correspond au temps qui s'écoule à partir de la variation de la grandeur de consigne jusqu'à ce que la réponse  $y(t)$  prenne pour la première fois la valeur  $y(t)=1$ . On l'appelle aussi temps d'établissement.

Le temps de réglage  $t_r$  correspond au temps qui est nécessaire jusqu'à ce que la réponse indicielle reste à l'intérieur d'une bande de tolérance  $\pm e_t$  par rapport à la valeur finale  $y_\infty$  en régime permanent (ou établi). Ce temps définit la durée du transitoire, il caractérise la rapidité et dépend fortement de la valeur choisie pour la bande de tolérance.

Il est aussi possible de définir des grandeurs caractéristiques sur la réponse indicielle par rapport à la grandeur de perturbation. le dépassement maximum sera égal à la valeur maximale de la réponse indicielle.

## II.9 ESTIMATION DU REGIME PERMANENT.

### II.9.1 Constantes d'erreur.

Soit le système asservi de la figure du §.II.5. L'erreur d'asservissement s'écrit;

$$e(t) = x(t) - y(t)$$

D'après le théorème de la valeur finale on peut écrire

$$e(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{E(z)}{1+G(z)}$$

Ceci représente l'erreur en régime permanent. Nous allons l'évaluer dans le cas de trois entrées types (échelon de position, de vitesse et d'accélération).

a) Echelon de position:

$$x(t) = 1 \quad ; \quad X(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$e_p(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1+G(z)}$$

$$e_p(\infty) = \frac{1}{1+G(1)} = \frac{1}{K_p}$$

$K_p$  est appelé constante d'erreur de position

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1+G(z)]$$

b) Echelon de vitesse:

$$x(t) = t \quad ; \quad X(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$e_v(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{z-1} \frac{1}{1+G(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(z-1)G(z)} = \frac{T}{K_v}$$

$K_v$  : constante d'erreur de vitesse.

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z).$$

c) Echelon d'accélération:

$$x(t) = \frac{1}{2} t^2 \quad ; \quad X(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

$$e_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2 [1+G(z)]} = T^2 \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1)^2 G(z)} = \frac{T^2}{K_a}$$

$K_a$  : constante d'erreur d'accélération.

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z).$$

$e_p(\omega)$ ,  $e_v(\omega)$  et  $e_a(\omega)$  sont les erreurs de position, vitesse et accélération. On voit que le type de la transmittance défini par le nombre de poles à  $z=1$  renseigne sur ces erreurs.

type	$e_p$	$e_v$	$e_a$	...
1	$1/K_a$	$\infty$	$\infty$	...
1	0	$T/K_v$	$\infty$	...
2	0	0	$T^2/K_a$	...
3	0	0	0	...
...	...	...	...	...

### II.9.2 Coefficients d'erreurs

nous allons étendre la notion de constante d'erreur à un type d'entrée quelconque, ce qui définit les coefficients d'erreur.

On a: 
$$\frac{E(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+G(z)} = W(z).$$

d'où l'on déduit:

$$\begin{cases} e(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} w(kT) x[(n-k)T] \\ \text{avec } x[(n-k)T] = 0 \text{ pour } k > n. \end{cases}$$

En développant  $x[(n-k)T]$  en série de Taylor, sous réserve de l'existence des dérivées:

$$x[(n-k)T] = x(nT) - kT x'(nT) + \frac{(kT)^2}{2!} x''(nT) + \dots$$

On déduit:

$$e(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ w(kT) x(nT) - kT w(kT) x'(nT) + \frac{(kT)^2}{2!} w(kT) x''(nT) + \dots \right]$$

$$= \left[ x(nT) \sum_{k=0}^{\infty} w(kT) - x'(nT) \sum_{k=0}^{\infty} kT w(kT) + \frac{x''(nT)}{2!} \sum_{k=0}^{\infty} w(kT)^2 + \dots \right]$$

$$= C_0 x(nT) + \frac{C_1}{1!} x'(nT) + \frac{C_2}{2!} x''(nT) + \dots$$

en posant :

$$C_0 = \sum_{k=0}^{\infty} w(kT) \dots$$

$$C_1 = -\sum_{k=0}^{\infty} kT w(kT)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$C_m = (-1)^m \sum_{k=0}^{\infty} (kT)^m w(kT)$$

$C_0, C_1, C_2, \dots$  sont les coefficients d'erreur: Vérifions que:

$$C_m = \left[ \frac{d^m}{dp^m} W^*(p) \right]_{p=0} = W^{*(m)}(0)$$

$$\begin{cases} W^*(p) = w(0) + w(T)e^{-Tp} + w(2T)e^{-2Tp} + \dots \\ W^*(0) = \sum_{k=0}^{\infty} w(kT) = C_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} W'^*(p) = -T [ w(T)e^{-Tp} + 2w(2T)e^{-2Tp} + \dots \\ W'^*(0) = -T \sum_{k=0}^{\infty} kw(kT) = C_1, \quad \text{etc...} \end{cases}$$

N.B.: De la même manière, on peut calculer les coefficients d'erreur par rapport à la grandeur de perturbation.

On constate que plus les coefficients d'erreur sont petits plus l'erreur est petite.

Or les valeurs des dérivées d'ordre supérieur des signaux sont négligeables (les sources des signaux ont des puissances limitées) alors on ne considère que les premiers coefficients, i.e  $C_0, C_1$  et  $C_2$ .

## II.10 CRITERE D'INTEGRALE.

Le critère d'intégrale le plus utilisé pour caractériser la qualité d'un asservissement est donnée par l'intégrale en fonction du temps du carrée de l'écart de réglage :  $e(t) = x(t) - y(t)$ . La définition est donc :

$$I_e = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad \text{C.I.P. 45}$$

En générale on prend la réponse indicielle, c'est à dire  $y(t)=h(t)$  lors d'une variation par saut unité de la grandeur de consigne  $x$  pour obtenir l'allure temporelle de l'écart de réglage. On a donc:

$$e(t) = 1-h(t)$$

Ce critère d'intégrale peut aussi être appliqué lors d'une variation par saut unité de la grandeur de perturbation  $f$ . dans ce cas, on doit introduire dans (II.1) l'expression:

$$e(t) = h_f(t).$$

Dans le cas des systèmes de réglage échantillonné, on se limite normalement à prendre en considération les valeurs de réglage aux instants d'échantillonnage. ainsi le critère devient:

$$I_e = T \sum_{k=0}^{\infty} e^2(kT)$$

On devrait donc parler plus correctement d'un critère, de somme. dans cette relation on a introduit la période d'échantillonnage  $T$  comme facteur. Ceci est très utile lorsqu'on doit étudier l'influence de la période d'échantillonnage sur la qualité de réglage.

On constate que l'écart de position en régime établi, doit être nul afin que la valeur du critère d'intégrale reste finie. en effet une valeur de  $I_e$  finie garantit l'absence d'écart de position.

## II.11 CRITERE D'INTEGRALE AVEC PONDERATION DE LA GRANDEUR DE COMMANDE

En minimisant la valeur du critère d'intégrale  $I_e$  qui s'applique uniquement sur l'écart de réglage, il est possible que la grandeur de commande  $u$  prenne des valeurs excessivement élevées. Il est alors convenable de faire appel aussi à l'intégrale en fonction du temps sur la valeur quadratique de la différence de la grandeur de commande  $u$  par rapport à la valeur finale  $u_{\infty}$ , à savoir:

$$I_u = \int_0^{\infty} u_e(t) dt.$$

avec

$$u_e(t) = u(t) - u_\infty$$

$I_u$  est donc une mesure pour l'énergie employée par l'organe de commande lors d'un phénomène transitoire. Il est donc important de calculer avec la différence de  $u(t)$  par rapport à la finale  $u_\infty$ , puisque cette valeur est souvent différente de zéro et l'intégrale deviendrait infinie.

Les deux intégrales  $I_e$  et  $I_u$  peuvent être réunies en un seul critère d'intégrale selon:

$$I = I_e + rI_u = \int_0^\infty e^2(t) dt + r \int_0^\infty u_e^2(t) dt \quad (\text{II.2})$$

où  $r$  est un facteur qui permet de pondérer l'influence de la grandeur de commande par rapport à l'écart de réglage.

Lorsqu'on se limite aux valeurs aux instants d'échantillonnage, la relation (II.2) devient:

$$I = T \left[ \sum_{k=0}^{\infty} e^2(kT) + r \sum_{k=0}^{\infty} u_e^2(kT) \right]$$

On note que ces relations sont valables soit pour des variations de la grandeur de consigne, soit pour des variations de la grandeur de perturbation.

## II.12 CONDITIONS POUR ANNULER L'ECART DE REGLAGE EN REGIME ETABLI.

Une des tâches les plus importantes qui sont posées aux régulateurs est celle d'annuler l'écart de réglage en régime permanent. Cet écart dépend particulièrement de la forme du signal d'entrée  $x(t)$ , de la forme du signal de sortie  $y(t)$ , de la forme du signal de perturbation et des propriétés dynamiques du système à régler.

### II.12.1 Ecart de réglage en régime permanent par rapport à la grandeur de consigne.

L'écart de réglage discret  $e_\infty^*$  en régime établi peut être déterminée à partir de sa transformée en Z à l'aide du théorème de

la valeur finale, on obtient:

$$e_{\infty}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} e^*(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E^*(z)$$

On remplace  $E(z)$  par sa valeur

$$e_{\infty}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1+G(z).D(z)} X(z) \quad (\text{II.3})$$

En toute généralité, le système à régler possède un pôle à  $z=1$  avec un ordre de multiplicité  $\nu$ . On peut écrire pour la fonction de transfert  $G(z)$  du système à régler:

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)^\nu} G'(z)$$

Lorsque la fonction de transfert  $G(z)$  ne possède aucun pôle à  $z=1$ , i.e. si le système continu correspondant ne possède pas de comportement intégral, on a  $\nu=0$ , et  $G'(z) = G(z)$ .

Par analogie, on peut exprimer la fonction de transfert  $D(z)$  du régulateur discret par:

$$D(z) = \frac{1}{(z-1)^\mu} D'(z)$$

où  $\mu$  est l'ordre de multiplicité d'un pôle à  $z=1$  du régulateur.

En ce qui concerne  $X(z)$ , on doit considérer plusieurs allures pour la grandeur de consigne. Dans le cas le plus simple et le plus fréquent, i.e. la variation par gradin (échelon unité), on a:

$$X(z) = \frac{1}{z-1} x_1$$

où  $x_1$  est l'amplitude du gradin.

Lorsque la grandeur de consigne varie proportionnellement en fonction du temps (allure d'une rampe  $x(t)=x_1 t$ ), on a:

$$X(z) = \frac{1}{(z-1)^2} x_1$$

$x_1$  est dans ce cas la variation de la grandeur de consigne pendant une période d'échantillonnage.

En toute généralité, on peut poser:

$$X(z) = \frac{1}{(z-1)^k} X'(z)$$

$k$  est l'ordre de multiplicité d'un pôle  $z=1$  que présente la fonction  $X(z)$ .  $X'(z)$  n'a donc aucun pôle à  $z=1$ .

Compte tenu de ces relations, l'expression (II.3) devient:

$$e_{\infty}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^{1+\nu+\mu-k}}{(z-1)^{\nu+\mu} + G'(z)D'(z)} X'(z) \quad (\text{II.4})$$

### II.12.2 Condition pour annuler l'écart de réglage

L'écart de réglage s'annule en régime permanent lorsque l'exposant de  $(z-1)$  au numérateur de (II.4) est plus grand ou égal à 1, i.e. pour:

$$\nu + \mu \geq k$$

En effet lors du passage à la limite on obtient:

$$e_{\infty}^* = 0$$

Si par contre  $1+\nu+\mu-k = 0$ , l'écart  $e_{\infty}^*$  en régime permanent ne s'annule pas. le passage à la limite dans (II.4) fournit alors:

$$e_{\infty}^* = \frac{X'(1)}{G'(1)D'(1)}$$

on obtient ainsi une valeur finie.

Si, l'on a  $1+\nu+\mu-k < 0$ , le passage à la limite dans (II.4) donne  $e_{\infty}^* = \infty$ . Dans un tel cas, le régulateur est mal adapté à la tâche posée.

### II.12.3 Condition à poser au régulateur

Afin que le régulateur discret puisse annuler l'écart de réglage en régime permanent, il est indispensable que sa fonction de transfert  $D(z)$  possède un pôle à  $z=1$  dont l'ordre de multiplicité doit être:

$$\mu \geq k - \nu$$

Lorsque  $G(z)$  ne possède aucun pôle à  $z=1$  i.e. pour  $\nu=0$  on a:

$$\mu \geq k$$

Pour une variation par gradient de la grandeur de consigne ( $k=1$ ), il faut que  $\mu \geq 1$ . Il suffit donc que le régulateur possède un pôle simple à  $z=1$ . Si la grandeur de consigne varie par une rampe ( $k=2$ ),

il est nécessaire que  $\mu \geq 2$ , il faut alors au moins un pôle double à  $z=1$ .

Dans le cas où le système à régler possède un comportement intégral, i.e. lorsque  $G(z)$  présente un seul pôle à  $z=1$ , on obtient avec  $\nu=1$ :

$$\mu \geq k - 1$$

L'ordre de multiplicité du pôle à  $z=1$  du régulateur peut alors être réduit de 1 par rapport au cas précédent.

Puisque  $k \geq 1$ , on a en tout cas:

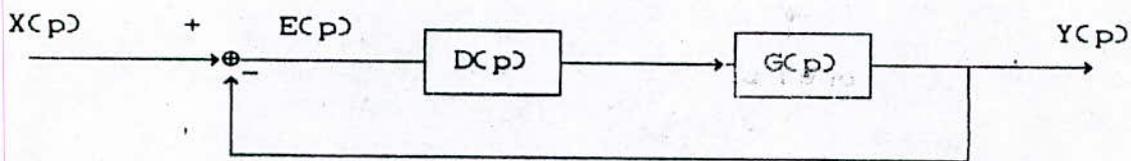
$$\mu + \nu \geq 1$$

### II.13 DILEMME PRECISION-STABILITE

De manière générale on considère comme bon un asservissement:

- stable
- pas d'erreur de position ou de traînage
- la réponse doit être rapide et bien amortie.

Soit le système:



$$E_x(p) = \frac{1}{1+G_o(p)} X(p) \quad \text{avec } G_o(p) = D(p)G(p)$$

L'écart de réglage  $e_\infty$  peut être déterminé à l'aide du théorème de la valeur finale:

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1+G_o(p)}$$

- Cas où  $G_o(p)$  ne contient pas d'intégration

$$\text{On suppose que } G_o = \frac{b_n p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^m + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{où } a_0 \neq 0$$

$$\text{on a : } \lim_{p \rightarrow 0} G_o(p) = \frac{b_0}{a_0}$$

$$\text{d'où : } e_x = \frac{1}{1 + \frac{b_0}{a_0}} = \frac{1}{1+K}$$

Si l'on veut que l'erreur de position soit très petite, il nous faut augmenter K, donc le gain du système doit être le plus grand possible, mais on aura un risque d'instabilité.

$G_0(p)$  avec intégration

Dans ce cas  $a_0 = 0$

$$\text{d'où : } \frac{1}{p} \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_m p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1}$$

et  $\lim_{p \rightarrow 0} G(p) = \infty$  d'où  $e_0 = 0$

Conclusion:

Ou bien on choisit K faible pour être tranquille du côté de la stabilité, mais la réponse devient lente et peu précise, ou bien on augmente K ou on insère un intégrateur dans la chaîne directe, mais le système risque de devenir instable. On fait donc un compromis.

CHAPITRE III

REGULATEURS PID

## II.1 INTRODUCTION

Les correcteurs classiques de type proportionnel, intégrateur et dérivée (PID) sont largement utilisés dans l'industrie. Leur succès est dû à la simplicité de l'algorithme de réglage et des expériences acquises dans le domaine des réglages continus.

Toute-fois en présence d'évolutions temporelles lentes ou rapides du système à commander, ces correcteurs classiques montrent leurs limites. Sous ces conditions il est nécessaire d'utiliser, des régulateurs numériques dont les paramètres peuvent être ajustés de façon permanente pour assurer de hautes performances.

## III.2 REGULATEURS PID

Les régulateurs PID permettent d'engendrer à partir de l'écart entre consigne et sortie à réguler, une grandeur proportionnelle d'une part à l'erreur, à sa dérivée et à son intégrale.

$$u(t) = K \left[ e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^{\infty} e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (\text{III.1})$$

avec pour paramètres:

K : gain

$T_I$  : constante d'intégration

$T_D$  : " de dérivation

Cette équation peut être transformées en équations aux différences en remplaçant la dérivation par une différence du premier ordre et l'intégration par une somme, à partir des méthodes d'intégration numériques. Le temps d'échantillonnage T est supposé suffisamment petit.

$$\frac{de(t)}{dt} \approx \frac{\Delta e(k)}{T} = \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

Si on utilise l'approximation rectangulaire pour l'intégrale on a:

$$\int_0^t e(\tau) d\tau \approx T \sum_{i=1}^k e(i-1) \quad (III.2)$$

La relation (III.1) devient donc:

$$u(k) = K \left[ e(k) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^k e(i-1) + \frac{T_D}{T} (e(k) - e(k-1)) \right] \quad (III.3)$$

Cet algorithme de régulation est non récursif, on l'appelle algorithme de position.

Cependant les algorithmes récursifs sont plus convenables en programmation sur ordinateur. Le terme  $u(k)$  dépend alors uniquement du terme précédent  $u(k-1)$  et des termes de corrections. Pour avoir cet algorithme on soustrait de l'équation (III.3):

$$u(k-1) = K \left[ e(k-1) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e(i-1) + \frac{T_D}{T} (e(k-1) - e(k-2)) \right]$$

D'où :  $u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)$

avec :

$$\begin{cases} q_0 = K \left( 1 + \frac{T_D}{T} \right) \\ q_1 = -K \left( 1 + 2 \frac{T_D}{T} + \frac{T}{T_I} \right) \\ q_2 = K \frac{T_D}{T} \end{cases} \quad (III.4)$$

On a donc calculé la variation du signal de commande :

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$$

On note que parfois, l'approximation de l'intégration est modifiée dans l'équation (III.2), on utilise  $e(i)$  au lieu de  $e(i-1)$ . Dans ce cas les coefficients  $q_0$  et  $q_1$  changent de valeurs. Les résultats suivants ne sont plus valables et doivent être modifiés.

Si on utilise l'approximation trapézoïdale, on obtient:

$$u(k) = K \left[ e(k) + \frac{T}{T_I} \left( \frac{e(0) + e(k)}{2} + \sum_{i=0}^{k-1} e(i) \right) + \frac{T_D}{T} (e(k) - e(k-1)) \right]$$

De la même façon que précédemment, on détermine  $u(k-1)$  et on fait la différence  $u(k) - u(k-1)$ , on obtient ainsi une autre relation

réursive de la forme suivante:

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} q_0 = K \left( 1 + \frac{T}{2T_I} + \frac{T_D}{T} \right) \\ q_1 = -K \left( 1 + 2 \frac{T_D}{T} - \frac{T}{2T_I} \right) \\ q_2 = K \frac{T_D}{T} \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Pour de faibles valeurs de la période d'échantillonnage, on peut calculer  $q_0$ ,  $q_1$  et  $q_2$  à partir des valeurs de  $K$ ,  $T_I$  et  $T_D$  du régulateur PID analogique équivalent en utilisant les équations (III.4) et (III.5).

### III. 3 . FONCTION DE TRANSFERT DISCRETE

De la relation (III.3), on obtient par la transformation en Z, la relation :

$$U(z) = \left( K_P + K_I \frac{1}{z-1} + K_D \frac{z-1}{z} \right) E(z) \quad (\text{III.6})$$

$$\text{avec : } K_P = K ; K_I = K \frac{T}{T_I} \text{ et } K_D = K \frac{T_D}{T}$$

La fonction de transfert discrète du régulateur PID devient alors:

$$D(z) = K_P + K_I \frac{1}{z-1} + K_D \frac{z-1}{z} \quad (\text{III.7})$$

Le premier terme est la composante proportionnelle, le deuxième terme la composante intégrale et le troisième terme la composante dérivée.

L'expression (III.7) peut s'écrire sous la forme:

$$D(z) = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{z(z-1)} \quad (\text{III.8})$$

$$\text{avec : } q_0 = K_P + K_D$$

$$q_1 = -(K_P + 2K_D - K_I) \quad (\text{III.9})$$

$$q_2 = K_D$$

Le régulateur PID discret est donc un système du deuxième ordre. sa fonction de transfert possède un pôle  $z_1=0$  et un pôle

$z_2=1$ . En principe ce régulateur peut annuler l'écart de réglage en régime permanent.

On remarque que le dénominateur de la fonction de transfert d'un régulateur PID discret et par conséquent aussi les poles sont independants des coefficients  $K_P$ ,  $K_I$  et  $K_D$  du régulateur. Ces coefficients n'interviennent que sur le numérateur et par conséquent sur les zéros de la fonction de transfert.

On note que dans le cas où  $q_2=0$  (i.e  $K_D=0$ ), on obtient un régulateur PI.

### III.4. REGULATEUR DE STRUCTURE GENERALE

Le régulateur standard précédent possède une fonction de transfert du premier ou du deuxième ordre. En plus les coefficients du dénominateur sont imposées. Cependant, avec des régulateurs discrets d'ordre supérieur à deux, on obtient souvent une qualité de réglage meilleure.

#### III.4.1. Relation de base.

En toute généralité la fonction de base d'un régulateur discret d'ordre  $n$  peut être décrité par l'équation aux différences suivante:

$$p_0 u(k) + p_1 u(k-1) + \dots + p_n u(k-n) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + \dots + q_n e(k-n)$$

où  $p_0, p_1, \dots, p_n$  et  $q_0, q_1, \dots, q_n$  sont les coefficients qui déterminent le comportement du régulateur discret. Il est possible que certains de ces coefficients soient nuls.

#### III.4.2. Condition de realisabilite.

Le coefficient  $p_0$  ne doit pas s'annuler, en effet si  $p_0=0$ , on devrait déterminer  $u(k-1)$  à l'instant d'échantillonnage  $k-1$  avec un écart de réglage  $e(k)$  à l'instant d'échantillonnage  $k$ . Ceci exige que l'on puisse déterminer la grandeur de commande  $u(k)$  à l'instant d'échantillonnage  $k$  en connaissant l'écart  $e(k+1)$  à l'instant d'échantillonnage  $k+1$ . une telle exigence est

incompatible avec une fonction causale. La condition  $a_n \neq 0$  exige également que le degré du numérateur de la fonction de transfert ne soit pas plus grand que le degré du dénominateur. On prend en général  $a_n=1$ .

### III.4.3 Regulateurs standard.

En utilisant le théorème de la valeur finale, on remarque que le régulateur doit avoir un pôle à  $z=1$ . Le plus simple des algorithmes d'ordre  $n$  a pour structure:

$$D(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_n z^{-n}}{1 - z^{-1}} \quad (\text{III.10})$$

pour  $n=1$  on aura un régulateur PI

"  $n=2$  " " " " PID

"  $n=3$  " " " " PID2

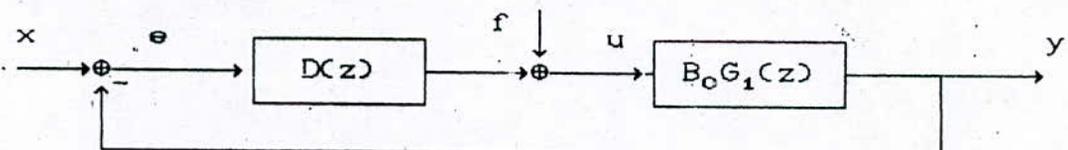
etc...

Le tableau ci-dessous, contient les indications quand à la fonction de transfert discrète des régulateurs standard. On y trouve l'expression pour le dénominateur  $P(z)$  de celle-ci. Le numérateur  $Q(z)$  est donné sous forme d'un polynome. Ses coefficients  $q_0$ ,  $q_1$  et  $q_2$  sont liés avec les coefficients  $K_P$ ,  $K_I$ ,  $K_D$ , et  $K_{D2}$  qui apparaissent dans les relations de base des régulateurs.

Régulateur	$P(z)$	$Q(z)$	$q_0$	$q_1$	$q_2$
P	1	$q_2$	-	-	$K_P$
I	$z-1$	$q_1 z$	-	$K_I$	-
PI	$z-1$	$q_1 z + q_2$	-	$K_P$	$-K_P + K_I$
PID	$z(z-1)$	$q_0 z^2 + q_1 z + q_2$	$K_P + K_D$	$-(K_P + 2K_D + K_I)$	$K_D$
PD	$z$	$q_1 z + q_2$	-	$K_P + K_D$	$-K_D$
PD2	$z^2$	$q_0 z^2 + q_1 z + q_2$	$K_P + K_D + K_{D2}$	$-(K_D + 2K_{D2})$	$K_{D2}$

### III.4.4 Choix du regulateur.

On considère le système de la figure suivante:



La fonction de transfert du système +bloqueur (d'ordre 0) est:

$$G(z) = B_0 G_1(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} z^{-d} \quad (\text{III.11})$$

De l'équation (III.10) on tire l'équation aux différences qui sera de la forme:

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + \dots + q_n e(k-n) \quad (\text{III.12})$$

Les coefficients  $q_0, q_1, \dots, q_n$  doivent être ajustés sur le processus de façon à obtenir de bonnes performances de réglage, plusieurs méthodes sont ainsi disponibles:

a) on peut obtenir ces paramètres en minimisant un critère de performances selon le modèle du processus.

b) On peut utiliser des règles d'ajustage. Ce qui conduit approximativement à des paramètres de régulateurs optimaux basés sur certains critères. Ici par exemple, les caractéristiques des réponses échelons sont ainsi déterminées.

c) En commençant par de faibles valeurs (un gain faible) jusqu'à obtenir un amortissement acceptable en boucle fermée.

Pour les systèmes simples et des critères pas trop exigés les méthodes b) et c) suffisent. Par contre pour avoir des performances assez élevées on utilise la méthode a) qui est aussi convenable pour la simulation sur ordinateur.

La question d'évaluation des systèmes de réglage dépend des considérations pratiques, elle reste souvent un aspect subjectif.

La synthèse des systèmes de réglage à paramètres optimisés, est basée sur l'évaluation d'un critère de performances. Parmi les différents critères on utilise très souvent le critère quadratique:

$$S_{eu}^2 = \sum [e^2(k) + r u_e^2(k)]$$

où  $e(k) = x(k) - y(k)$  est l'erreur de réglage

$u_e^2(k) = u(k) - \bar{u}$  est la variation de la valeur de commande.

$\bar{u} = u_\infty$  valeur finale pour les perturbations en échelon.

$\bar{u} = E[u(k)]$  valeur moyenne pour les perturbations

aléatoires.

On peut considérer ainsi les critères quadratiques moyens:

- pour le signal d'erreur:

$$S_e^2 = \overline{e^2(k)} = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M e^2(k)$$

- pour le signal de commande:

$$S_u^2 = \overline{u_e^2(k)} = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M u_e^2(k)$$

Le coefficient  $r$  détermine lequel des deux termes est prédominant ou a le plus d'influence. Si on choisit  $r$  petit,  $S_e^2$  est minimisé en fournissant plus d'énergie  $S_u^2$ . Quand  $r$  augmente, l'erreur augmente aussi et la variation de  $u$  est faible.

Dans les régulateurs à paramètres optimisés, les paramètres  $q_i = [q_0 \ q_1 \ \dots \ q_n]$  sont choisis de façon que la valeur de  $S_{eu}^2$  soit minimale, i.e. tels que:

$$\frac{dS_{eu}^2}{dq_i} = 0$$

### III.4.5 Algorithmes de réglage pour les systèmes d'ordre 1 et 2.

#### a) Systèmes du deuxième ordre.

Pour  $n=2$  l'équation (III.10) donne:

$$D(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad \text{(III.13)}$$

et l'équation (III.9) donne:

$$u(z) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)$$

On suppose une entrée échelon du régulateur

$$e(k) = 1(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k \geq 0 \\ 0 & \text{pour } k < 0 \end{cases}$$

La réponse du régulateur sera alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0) = q_0 \\ u(1) = u(0) + q_0 + q_1 = 2q_0 + q_1 \\ u(2) = u(1) + q_0 + q_1 + q_2 = 3q_0 + 2q_1 + q_2 \\ \dots \dots \dots \\ u(k) = u(k-1) + q_0 + q_1 + q_2 = (k+1)q_0 + kq_1 + (k-1)q_2 \end{array} \right.$$

Si  $u(1) < u(0)$  on obtient un régulateur discret équivalent à un régulateur PID continu avec un retard pur d'ordre 1. Pour les paramètres du régulateur avec  $q_0 > 0$  nous avons:

$$\text{De } u(1) < u(0) : \quad q_0 + q_1 < 0 \quad \text{ou } q_1 < -q_0$$

$$\text{De } u(k) > u(k-1) \text{ pour } k \geq 2: \quad q_0 + q_1 + q_2 > 0 \quad \text{ou } q_2 > -(q_0 + q_1)$$

pour un gain positif (voir éq. (III.15)), on a en résumé:

$$q_0 > 0; \quad q_1 < -q_0; \quad -(q_0 + q_1) < q_2 < q_0 \quad (\text{III.14})$$

La réponse à l'échelon est donnée par la figure (III.1a), les valeurs des paramètres par la fig. (III.2). Le paramètre  $q_0$  détermine la valeur  $u(0)$  après l'application de l'échelon à l'entrée.

On peut définir les coeff. caractéristiques suivants:

$$\begin{aligned} K &= q_0 - q_2 && \text{gain} \\ C_D &= q_2 / K && \text{coeff. de dérivation} \\ C_I &= (q_0 + q_1 + q_2) / K && \text{coeff. d'intégration.} \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Voir fig. (III.3) la réponse à l'échelon unité pour ces coefficients. Pour un temps d'échantillonnage très court, il sont reliés aux paramètres d'un PID continu comme suit:

$$K \equiv K; \quad C_D \equiv \frac{T_D}{T}; \quad C_I \equiv \frac{T}{T_I} \quad (\text{III.16})$$

D'après la formule (III.14), pour un régulateur PID on a:

$$C_D > 0; \quad C_I > 0; \quad C_I < C_D. \quad (\text{III.17})$$

Si on substitue ces coefficients dans l'équation (III.13), la fonction de transfert pulsée devient:

$$G_x(z) = \frac{K[(1+C_D) + (C_I - 2C_D - 1)z^{-1} + C_D z^{-2}]}{1 - z^{-1}}$$

On note que cet algorithme du 2<sup>ème</sup> ordre n'est semblable à un PID continu que si les conditions (III.14) et (III.17) sont vérifiées. Les paramètres déterminés par optimisation peuvent, dépendant du processus, du choix du critère de performances et du signal de perturbation, échouer à réaliser ces conditions.

b) Système du premier ordre

En posant  $q_2=0$ , la F.T. pulsée devient

$$D(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (\text{III.18})$$

et l'équation aux différences est:

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1)$$

La réponse à l'échelon devient donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0) = q_0 \\ u(1) = u(0) + q_0 + q_1 = 2q_0 + q_1 \\ u(2) = u(1) + q_0 + q_1 = 3q_0 + q_1 \\ \dots\dots\dots \\ u(k) = u(k-1) + q_0 + q_1 = (k+1)q_0 + kq_1. \end{array} \right.$$

Pour  $u(1) > u(0)$ , le régulateur d'ordre 1 peut être comparé avec un régulateur PI continu sans retard. Avec  $q_0 > 0$  on obtient

$$q_0 + q_1 > 0 \quad \text{i.e. } q_1 > -q_0.$$

Voir fig. (III.1b) pour la réponse échelon correspondante. On peut définir les coefficients suivants

$$K = q_0 \quad \text{gain}$$

$$C_I = (q_0 + q_1) / K \quad \text{coefficient d'intégration}$$

Pour un comportement PI, avec coeff. caractéristiques positifs  $C_I > 0$ , on introduit ces facteurs dans l'équation (III.18), On obtient:

$$D(z) = \frac{K[1 + (C_I - 1)z^{-1}]}{1 - z^{-1}}$$

Si on choisit  $q_0=0$ , on obtient un régulateur à action intégrale avec F.T.:

$$D(z) = \frac{q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

et l'équation récurrente sera:

$$u(k) = u(k-1) + q_1 e(k-1).$$

D'autres cas particuliers sont obtenus en mettant  $C_1=0$  dans l'équation (III.13):

le régulateur à action proportionnelle

$$D(z) = q_0 \quad \text{ou} \quad u(k) = q_0 e(k)$$

et le régulateur à action proportionnelle et dérivée

$$D(z) = q_0 - q_2 z^{-1} \quad \text{ou} \quad u(k) = q_0 e(k) - q_2 e(k-1)$$

### III.4.6 Régulateurs à signal d'action prédefini.

La fonction de transfert entre l'action de commande et la consigne est:

$$\frac{U(z)}{X(z)} = \frac{D(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

En introduisant la F.T. du processus (III.11), la F.T. du régulateur du 2<sup>e</sup> ordre (III.13) et en mettant  $b_0=0$ , on obtient le résultat suivant:

$$\begin{aligned} & [(1-z^{-1})(1+a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}) + \\ & (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}) z^{-d}] U(z) \\ & = (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(1+a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}) X(z) \end{aligned}$$

Ou encore:

$$\begin{aligned} u(k) = & (1-a_1)u(k-1) + (a_1-a_2)u(k-2) + \dots \\ & + q_0 b_1 u(k-d-1) - (q_0 b_2 + q_1 b_1)u(k-d-2) + \dots \\ & + q_0 x(k) + (q_0 a_1 + q_1)x(k-1) + (q_0 a_2 + q_1 a_1 + q_2)x(k-2) + \dots \end{aligned}$$

Pour  $x(k) = 1(k)$ , les deux premières valeurs de  $u(k)$  sont:

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ cas:} \quad & d = 0 \\ & u(0) = q_0 \\ & u(1) = q_0(2 - q_0 b_1) + q_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \text{ cas:} \quad & d \geq 1 \\ & u(0) = q_0 \\ & u(1) = 2q_0 + q_1 \end{aligned}$$

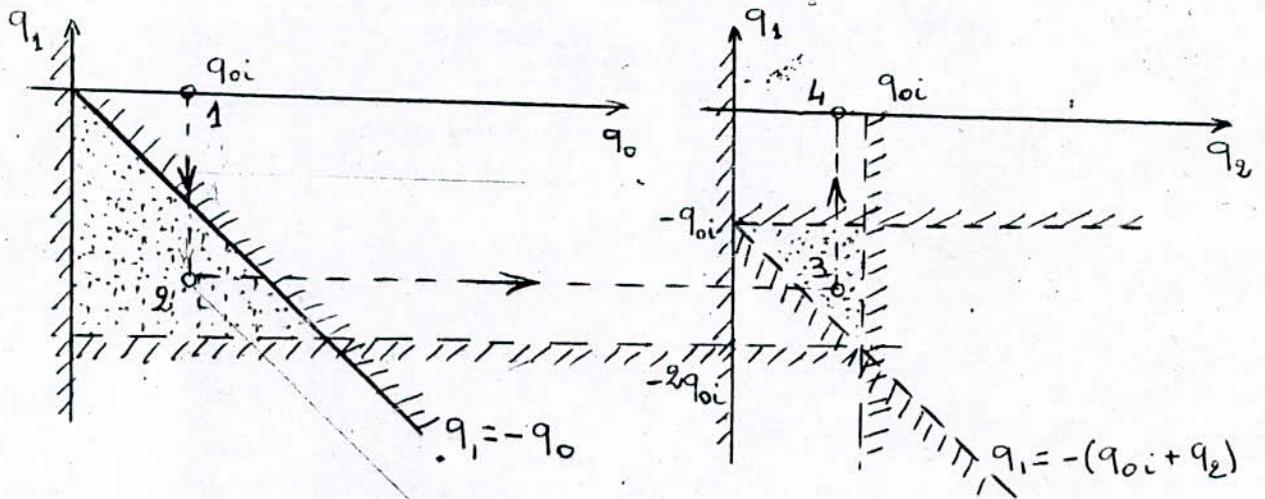
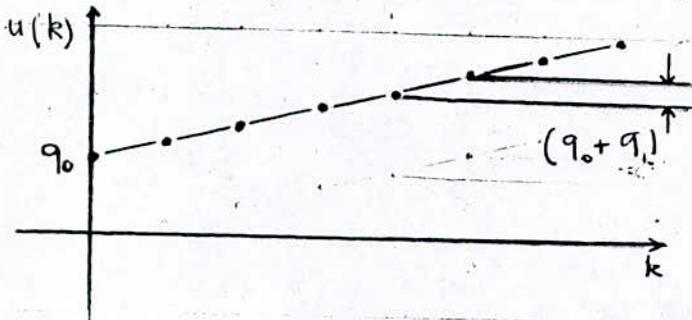
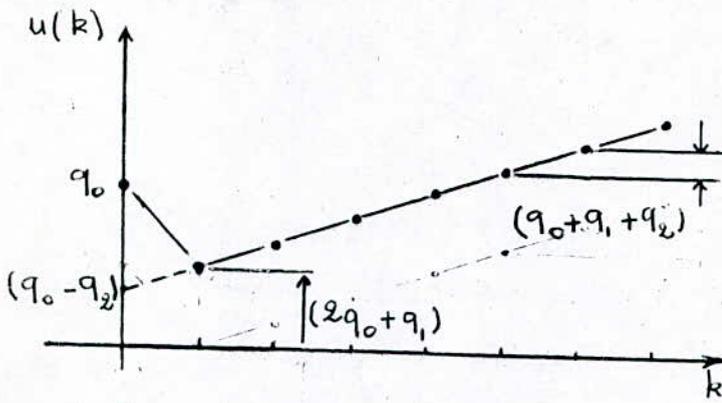
On remarque ainsi que la valeur  $u(0)$  ne dépend pas du retard pur  $d$ . Dans ce cas on choisit  $u(0)$  au départ pour fixer ainsi la valeur du paramètre  $q_0$ .

Fig(III.1)

Réponse indicielle

a) Régulateur PID (second ordre).

b) Régulateur PI (premier ordre).



Fig(III.2) : Zones des paramètres  $q_0$ ,  $q_1$ , et  $q_2$  d'un PID.

Fig(III.3)

Réponse indicielle

avec :

gain

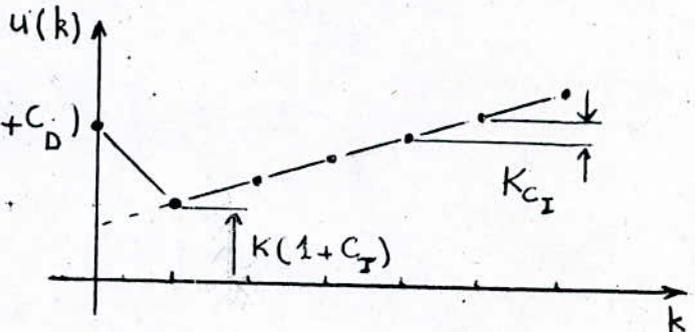
coeff. de dérivation

" d'intégration

$K$

$C_D$

$C_I$



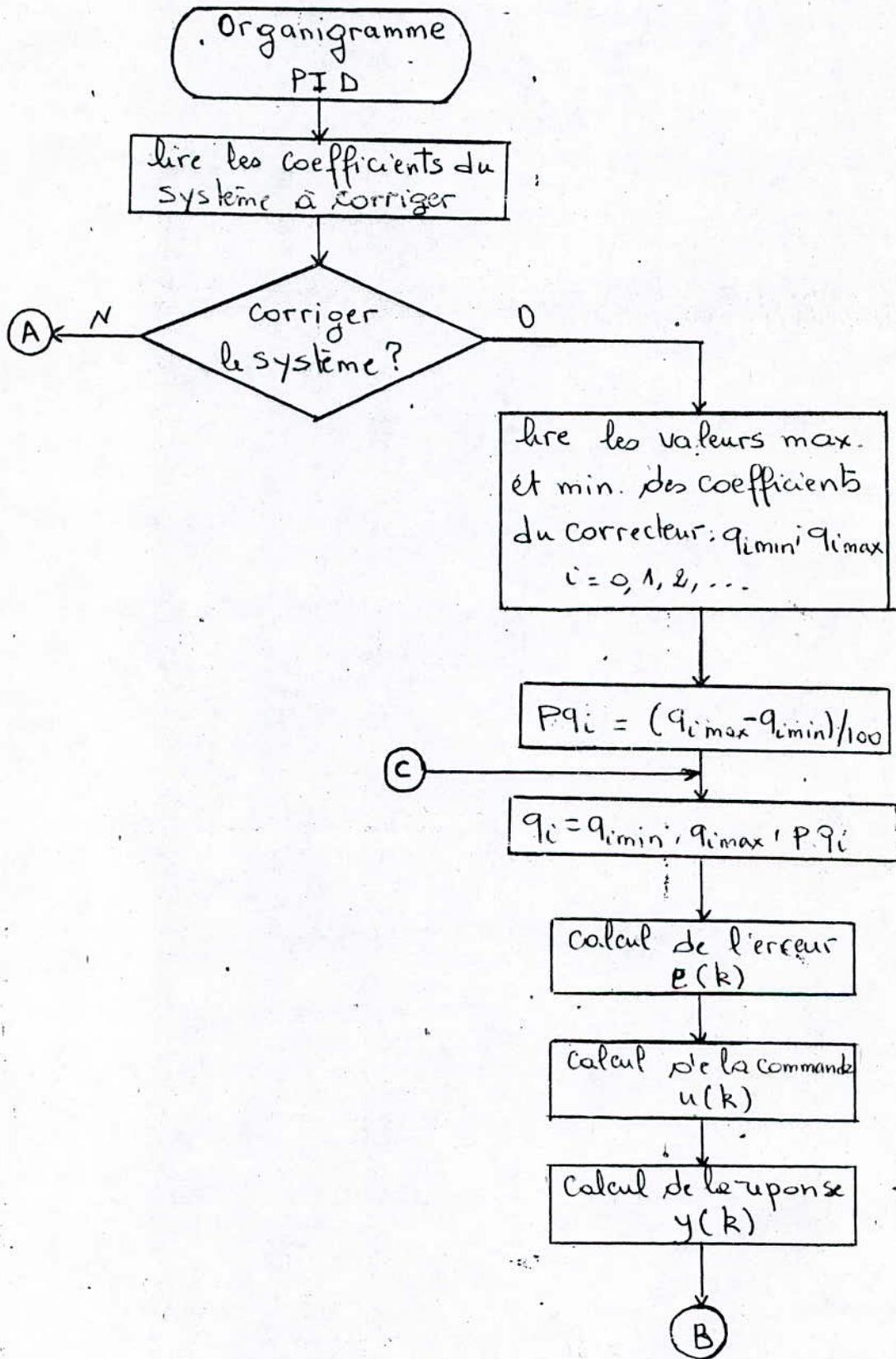
### III.5 ETUDE COMME SYSTEME CONTINU ,

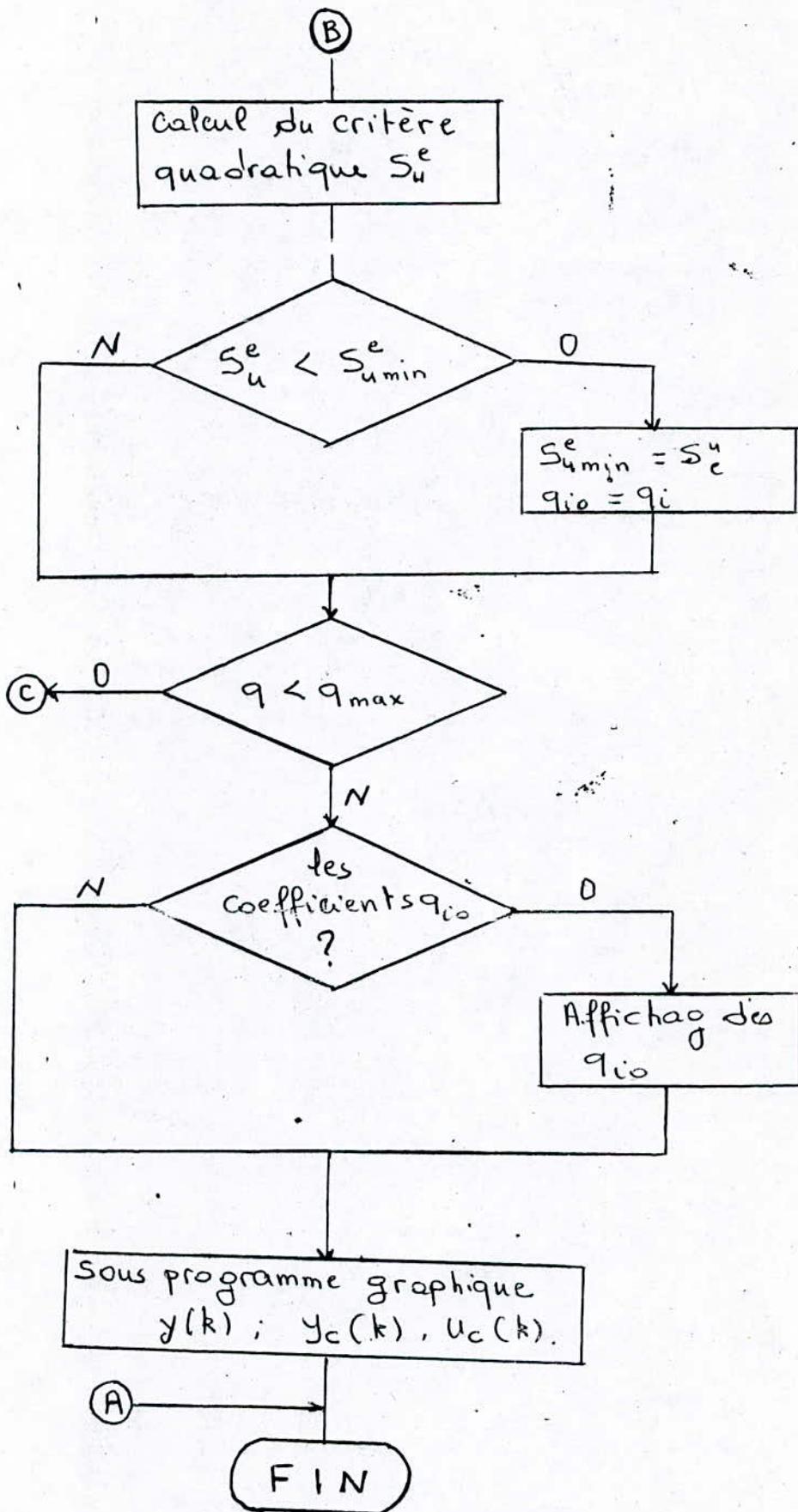
Lorsque la période d'échantillonnage  $T$  est relativement petite, ( $T/T_i \leq 0.5$ ,  $T_i$  étant la plus petite des constantes de temps dominantes), il est possible d'étudier le système échantillonné comme un système continu.

L'avantage du traitement comme système continu est le fait que le procédé devient assez simple et ne nécessite pas l'emploi de la transformation en  $Z$ .

Lorsqu'on introduit l'approximation:  $z = e^{pT} \cong \frac{1+pT/2}{1-pT/2}$  dans l'expression de la F.T. discrète du régulateur, et en comparant avec la F.T. normale du régulateur continu correspondant, on trouve la relation entre les coefficients du régulateur discret et ceux du régulateur continu. Cette approximation peut introduire une petite constante de temps.

III.6 ORGANIGRAMME DE LA CORRECTION PID.





CHAPITRE IV

REGULATEURS A TEMPS D'ETABLISSEMENT FINI

## CHAPITRE IV    REGULATEURS A TEMPS D'ETABLISSEMENT FINI

### IV.1 INTRODUCTION

Un système est dit à temps d'établissement fini (temps de réglage fini ou deadbeat), lorsque la sortie atteint son régime définitif en un nombre fini d'échantillons. Ceci veut dire qu'on exige que le régime permanent soit établi en un temps fini aussi bien pour la variable commandée  $y$  que pour le signal de commande  $u$ .

Pour une variation en échelon du signal de consigne, l'entrée et la sortie du système doivent être dans un nouveau régime établi en un temps fini bien déterminé. Dans ce qui suit, on va présenter quelques méthodes qui permettent de réaliser ce genre de régulateurs.

### IV.2 REGULATEURS A TEMPS D'ETABLISSEMENT FINI A ORDRE NORMAL

On suppose que le signal de consigne est un signal échelon unité:

$$u(k) = 1 \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \dots$$

Afin que l'écart de réglage s'annule exactement après  $m$  périodes d'échantillonnage et que le phénomène de réglage soit effectivement terminé après  $m$  périodes, on doit imposer les conditions suivantes:

$$y(k) = x(k) = 1 \quad \text{pour } k \geq m$$

$$u(k) = u(m) \quad \text{pour } k \geq m$$

La transformée en  $Z$  de tous les signaux (consigne, commande et sortie) devient:

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (\text{IV.1})$$

$$Y(z) = y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots + 1(z^{-m} + z^{-(m+1)} + \dots) \quad (\text{IV.2})$$

$$U(z) = u(0) + u(1)z^{-1} + \dots + u(m)(z^{-m} + z^{-(m+1)} + \dots) \quad (\text{IV.3})$$

On note qu'on prend  $y(0) = b_0 = 0$ , le système à régler est supposé sans discontinuités aux instants d'échantillonnage.

En divisant les équations (IV.2) et (IV.3) par (IV.1) on tire:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_m z^{-m} = P(z) \quad (\text{IV.4})$$

avec:

$$p_1 = y(1)$$

$$p_2 = y(2) - y(1)$$

.....

$$p_m = 1 - y(m-1)$$

et

$$\frac{U(z)}{X(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m} = Q(z) \quad (\text{IV.5})$$

avec:

$$q_0 = u(0)$$

$$q_1 = u(1) - u(0)$$

.....

$$q_m = u(m) - u(m-1)$$

On note que:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1 \quad (\text{IV.6})$$

$$q_0 + q_1 + \dots + q_m = u(m) = \frac{1}{K} = \frac{1}{G(1)} \quad (\text{IV.7})$$

La fonction de transfert en boucle fermée est:

$$G_x(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)} \quad (\text{IV.8})$$

La fonction de transfert du régulateur est donc:

$$D(z) = \frac{1}{G(z)} \cdot \frac{G_x(z)}{1-G_x(z)} \quad (\text{IV.9})$$

En comparant les équations (IV.4) et (IV.8) on peut écrire:

$$G_x(z) = P(z) \quad (\text{IV.10})$$

De plus il vient des équations (IV.4) et (IV.5):

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (\text{IV.11})$$

et avec l'équation (IV.9), le régulateur devient:

$$D(z) = \frac{Q(z)}{1-P(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - \dots - p_m z^{-m}} \quad (\text{IV.12})$$

#### Coefficients du régulateur

Les paramètres de ce régulateur sont obtenus par comparaison des coefficients dans l'équation (IV.11), et avec les équations (IV.6) et (IV.7) :

$$\begin{aligned}
 q_1 &= a_1 q_0 & p_1 &= b_1 q_0 \\
 q_2 &= a_2 q_0 & p_2 &= b_2 q_0 \\
 &\dots & & \\
 q_m &= a_m q_0 & p_m &= b_m q_0
 \end{aligned}$$

$$q_0 = \frac{1}{b_1 + b_2 + \dots + b_m} = u(0)$$

On s'aperçoit que les paramètres du régulateur sont facilement calculables. De plus, la valeur initiale  $u(0)$  du signal de commande dépend uniquement de la somme des paramètres  $b_i$  du processus et que cette somme elle même décroît avec la période d'échantillonnage.

#### Equation caractéristique

Avec les équations (IV.10) et (IV.4), la fonction de transfert en boucle fermée devient:

$$G_x = P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_m z^{-m} = \frac{p_m z^{m-1} + \dots + p_1}{z^m} \quad (\text{IV.13})$$

L'équation caractéristique est donc

$$1 + D(z)G(z) = z^m = 0 \quad (\text{IV.14})$$

De là on constate que la boucle de réglage avec un régulateur deadbeat a une fonction de transfert qui possède un pôle multiple d'ordre  $m$  à l'origine.

On a aussi:

$$G_x(z) = \frac{q_0(b_1 z^{m-1} + \dots + b_m)}{z^m} = \frac{q_0 B(z)}{z^m} = \frac{u(0) B(z)}{z^m} \quad (\text{IV.15})$$

Donc en plus, cette fonction de transfert possède comme numérateur, le numérateur  $B(z)$  de la F.T. du système à régler, multiplié par la valeur initiale  $u(0)$  de la grandeur de commande.

#### Cas où $d \neq 0$

Si  $d \neq 0$ , nous avons intérêt à utiliser le modèle du processus suivant:

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-(1+d)} + \dots + b_m z^{-(m+d)}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}$$

$$= \frac{b'_m z^{-1} + \dots + b'_{d+1} z^{-(1+d)} + \dots + b'_\nu z^{-\nu}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m} + \dots + a_\nu z^{-\nu}} \quad (\text{IV.16})$$

avec:

$$\begin{aligned} b'_1 = b'_2 = \dots = b'_d = 0 & \quad a_{m+1} = 0 \\ b'_{1+d} = b_1 & \quad \dots \\ \dots & \quad a_\nu = 0 \\ b' = b_m & \end{aligned}$$

On exige que la commande vérifie

$$\begin{aligned} y(k) = x(k) = 1 & \quad \text{pour } k \geq \nu = m + d \\ u(k) = u(m) & \quad \text{pour } k \geq m \end{aligned}$$

Les relations de (IV.1) à (IV.13) peuvent être appliquées en utilisant l'équation (IV.16). Puis des équations (IV.16) et (IV.11) il vient:

$$\begin{aligned} q_1 = a_1 q_0 & \quad p_1 = b'_1 q_0 = 0 \\ q_2 = a_2 q_0 & \quad \dots \\ \dots & \quad \dots \\ q_m = a_m q_0 & \quad p_d = b'_d q_0 = 0 \quad (\text{IV.17}) \\ q_{m+1} = a_{m+1} q_0 = 0 & \quad p_{1+d} = b'_{1+d} q_0 = b_1 q_0 \\ \dots & \quad \dots \\ q_\nu = a_\nu q_0 = 0 & \quad p_\nu = b'_\nu q_0 = b_m q_0 \\ q_0 = \frac{1}{b_1 + b_2 + \dots + b_m} = u(0) & \end{aligned}$$

La fonction de transfert du régulateur est donc:

$$D(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m}}{1 - p_{1+d} z^{-(1+d)} - \dots - p_{m+d} z^{-(m+d)}} \quad (\text{IV.18})$$

Des équations (IV.17) et (IV.18), la F.T. du régulateur deadbeat d'ordre  $\nu$  devient:

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0 A(z^{-1})}{1 - q_0 B(z^{-1})z^{-d}} \quad (\text{IV.19})$$

Par conséquent, la fonction de transfert de commande pour un tel processus est:

$$G_x(z) = \frac{q_0 B(z^{-1})z^{-d}}{1} = \frac{q_0 B'(z)}{z^{(m+d)}} \quad (\text{IV.20})$$

L'équation caractéristique devient alors

$$z^{(m+d)} = 0$$

Il faut que le régulateur à temps d'établissement fini élimine les poles du système.

Comportement entre les instants d'échantillonnage

Pour connaître le comportement de la grandeur à régler entre les instants d'échantillonnage, il est nécessaire de faire appel à la F.T. complète  $G_x(z, \epsilon)$ . (donnée par la transformée en Z modifiée) On doit vérifier si l'on obtient  $y(k, \epsilon) = 1$  pour  $k \geq m$  et  $0 \leq \epsilon \leq 1$ .

On a  $Y(z, \epsilon) = G(z, \epsilon) D(z) E(z)$

avec  $E(z) = X(z) - Y(z) = \frac{1}{1 + G(z) D(z)} X(z)$

d'où:  $G_x(z, \epsilon) = \frac{G(z, \epsilon) D(z)}{1 + G(z) D(z)}$

Or  $D(z) = \frac{1}{D(z)} \frac{G_x(z)}{1 - G_x(z)}$

on a donc  $G_x(z, \epsilon) = \frac{G(z, \epsilon)}{G(z)} G_x(z)$

On constate que le comportement entre les instants d'échantillonnage ne dépend que du système à régler et que la F.T. du régulateur n'intervient pas directement dans cette relation. La transformée en Z de la grandeur à régler est alors donnée par

$$Y(z, \epsilon) = G_x(z, \epsilon) X(z)$$

avec  $G_x(z, \epsilon) = G_d(z) G(z, \epsilon)$

pour le cas où l'entrée est un échelon unité, on a

$$Y(z, \epsilon) = \frac{z}{z-1} G_d(z) G(z, \epsilon)$$

et d'après le théorème de la valeur finale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k, \epsilon) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) Y(z, \epsilon) = G_d(1) \lim_{z \rightarrow 1} G(z, \epsilon)$$

Or  $G(z, \epsilon) = \left[ \sum_{i=1}^n b_i(\epsilon) z^{-i} \right] / A(z^{-1})$

Pour que  $\lim_{z \rightarrow 1} G(z, \epsilon)$  soit indépendante de  $\epsilon$  il faut que  $\sum_{i=1}^n b_i$  soit elle même indépendante de  $\epsilon$ .

### IV.3 REGULATEUR DEADBEAT A UN ORDRE PLUS ELEVE

Si on augmente le temps d'établissement du régime permanent de  $m$  à  $m+1$ , alors on peut fixer ou prescrire une valeur de la variable de commande  $u$ . Or la valeur initiale  $u(0)$  est généralement grande. On préfère réduire cette valeur en la fixant.

On ajoute une autre itération aux équations (IV.2) et (IV.3). Les équations (IV.4) et (IV.5) deviennent donc:

$$P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_{m+1} z^{-(m+1)} \quad (IV.21)$$

$$q(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_{m+1} z^{-(m+1)} \quad (IV.22)$$

Comparons les coefficients dans l'équation (IV.11), ce qui conduit à:

$$\frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} = \frac{p_1 z^{-1} + \dots + p_{m+1} z^{-(m+1)}}{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{m+1} z^{-(m+1)}} \quad (IV.23)$$

Cette équation n'est vérifiée que si le terme de droite à une même racine au numérateur et au dénominateur i.e.:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{(p_1 z^{-1} + \dots + p_m z^{-m})(\alpha - z^{-1})}{(q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m})(\alpha - z^{-1})} \quad (IV.24)$$

Si les coefficients dans l'éq. (IV.23) sont comparés, on obtient, après division par  $q_0$ :

$$\begin{aligned} q_1'' &= a_1 q_0'' & p_1 &= b_1 q_0'' \\ q_2'' &= a_2 q_0'' & p_2 &= b_2 q_0'' \\ \dots & & \dots & \\ q_m'' &= a_m q_0'' & p_m &= b_m q_0'' \end{aligned} \quad (IV.25)$$

On écrit de nouveau le numérateur et le dénominateur de l'équation (IV.24), et en comparant les coefficients avec le terme de droite des équations (IV.23) et (IV.24), on obtient les équations:

$$\begin{aligned} q_0 &= \alpha q_0'' & p_1 &= \alpha p_1'' \\ q_1 &= \alpha q_1'' - q_0'' & p_2 &= \alpha p_2'' - p_1'' \\ \dots & & \dots & \\ q_m &= \alpha q_m'' - q_{m-1}'' & p_m &= \alpha p_m'' - p_{m-1}'' \\ q_{m+1} &= -q_m'' & p_{m+1} &= -p_m'' \end{aligned} \quad (IV.26)$$

De l'équation (IV.16), on a:

$$q_0 = \alpha q_0 = u(0) \quad (\text{IV.27})$$

et avec les équations (IV.21) ou (IV.4):

$$p_1 + \dots + p_{m+1} = 1$$

Il s'ensuit qu'à partir des équations (IV.25) et (IV.26):

$$q_0 = q_0 - \frac{1}{b_1 + b_2 + \dots + b_m} = q_0 - \frac{1}{\sum b_i} \quad (\text{IV.28})$$

Les paramètres du régulateur se liront alors en utilisant les équations (IV.27) et (IV.28)

$$\begin{aligned} q_0 &= u(0) \quad (\text{donné}) \\ q_1 &= q_0 (a_1 - 1) + \frac{1}{\sum b_i} \\ q_2 &= q_0 (a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum b_i} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

$$\begin{aligned} q_m &= q_0 (a_m - a_{m-1}) + \frac{a_{m-1}}{\sum b_i} \\ q_{m+1} &= a_m (-q_0 + \frac{1}{\sum b_i}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= q_0 b_1 \\ p_2 &= q_0 (b_2 - b_1) + \frac{b_1}{\sum b_i} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

$$\begin{aligned} p_m &= q_0 (b_m - b_{m-1}) + \frac{b_{m-1}}{\sum b_i} \\ p_{m+1} &= a_m (-q_0 + \frac{1}{\sum b_i}) \end{aligned}$$

La fonction de transfert du régulateur est maintenant, (éq. (IV.12)):

$$D(z) = \frac{Q(z)}{1-P(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{m+1} z^{-(m+1)}}{1 - p_1 z^{-1} - \dots - p_{m+1} z^{-(m+1)}} \quad (\text{IV.31})$$

A l'opposé du régulateur donné par l'éq. (IV.12), ici la valeur initiale de la variable de commande  $u(0) = q_0$  est donné ou fixée. La deuxième variable de commande devient, (voir éq. (IV.5) et (IV.29)):

$$u(1) = q_1 + q_0 = q_1 u(0) + \frac{1}{\sum b_i}$$

$u(0)$  ne doit pas être trop petit car on aurait  $u(1) > u(0)$ , ce qui est indésirable dans la plus part des cas.

Si  $u(1) \leq u(0)$ , on peut choisir:

$$u(0) = q_0 \geq \frac{1}{(1-a_1)\sum b_i}$$

Même si  $u(1) \leq u(0)$  est vérifiée, il n'est pas certain que pour  $k \geq 2$ , on aura  $|u(k)| < |u(0)|$ . Comme le calcul des paramètres est relativement simple, on procède de manière itérative, i.e. on varie  $u(0)$  tant de fois jusqu'à avoir un comportement adéquat du système. Souvent le choix de  $u(1)=u(0)$  donne de bons résultats.

Pour les processus avec un temps de retard  $d > 0$ , on procède de la même manière selon les éq. de (IV.17) à (IV.21). Puis en se basant sur les éq. correspondant à (IV. ), (IV. ) et (IV. ), la F.T. du deadbeat régulateur  $DB(\nu+1)$  devient:

$$D(z) = \frac{q_0 A(z^{-1}) [1 - z^{-1}/\alpha]}{1 - q_0 B(z^{-1}) z^{-d} [1 - z^{-1}/\alpha]} \quad (IV.32)$$

avec  $\frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{q_0 \sum b_i}$

L'équation caractéristique est:

$$z^{m+d+1} = 0$$

#### IV.4 CHOIX DE LA PERIODE D'ECHANTILLONNAGE D'UN REGULATEUR DEADBEAT

De l'équation (IV.13), la variable de commande  $u(0)$  est inversement proportionnelle à la somme des coefficients du numérateur du modèle du système. Cette somme augmente avec la période d'échantillonnage (Table IV.1), ainsi la valeur de  $u(k)$  diminue quand la période d'échantillonnage augmente et vice versa; d'où on peut déterminer une période d'échantillonnage convenable pour une certaine marge du signal échelon de référence. La table (IV.1) montre  $u(0)$  en fonction de la période d'échantillonnage  $T$  pour un système du 3<sup>e</sup> ordre donné par la table(IV.1).

$$G_s(p) = \frac{1}{(1+10p)(1+7.5p)(1+5p)} \quad (F.T.I)$$

Régulateur	T(sec)	2	4	6	8	10
	$b_1$	0.0027	0.018	0.051	0.099	0.159
	$b_2$	0.0093	0.049	0.109	0.172	0.226
	$b_3$	0.0019	0.0078	0.014	0.017	0.018
	$a_1$	-2.255	-1.706	-1.299	-0.995	-0.767
	$a_2$	1.689	0.958	0.547	0.315	0.182
	$a_3$	-0.420	-0.177	-0.074	-0.031	-0.013
	$\Sigma b_i = 1 + \Sigma a_i$	0.014	0.075	0.174	0.288	0.402
DB( $\nu$ )	$u(0) = q_0$	71.5	13.3	5.75	3.81	2.50
	$(1-a_1)$	3.25	2.71	2.30	2.00	1.77
DB( $\nu+1$ )	$u(0) = q_0$	22.0	4.91	2.50	1.91	1.41

Table(IV.1): Influence du temps d'échantillonnage sur la variable et la commande  $u(0)$  pour un régulateur deadbeat du 3<sup>e</sup> ordre.

Pour éviter que  $u(0)$  devienne très grand, la période d'échantillonnage du régulateur DB( $\nu$ ) doit être supérieure ou égale à 8sec., ceci veut correspond à:

$$\frac{T}{T_{\Sigma}} \geq 0.36 \quad \text{ou} \quad \frac{T}{T_{95}} \geq 0.18$$

où  $T_{\Sigma}$  est la somme des constantes de temps.

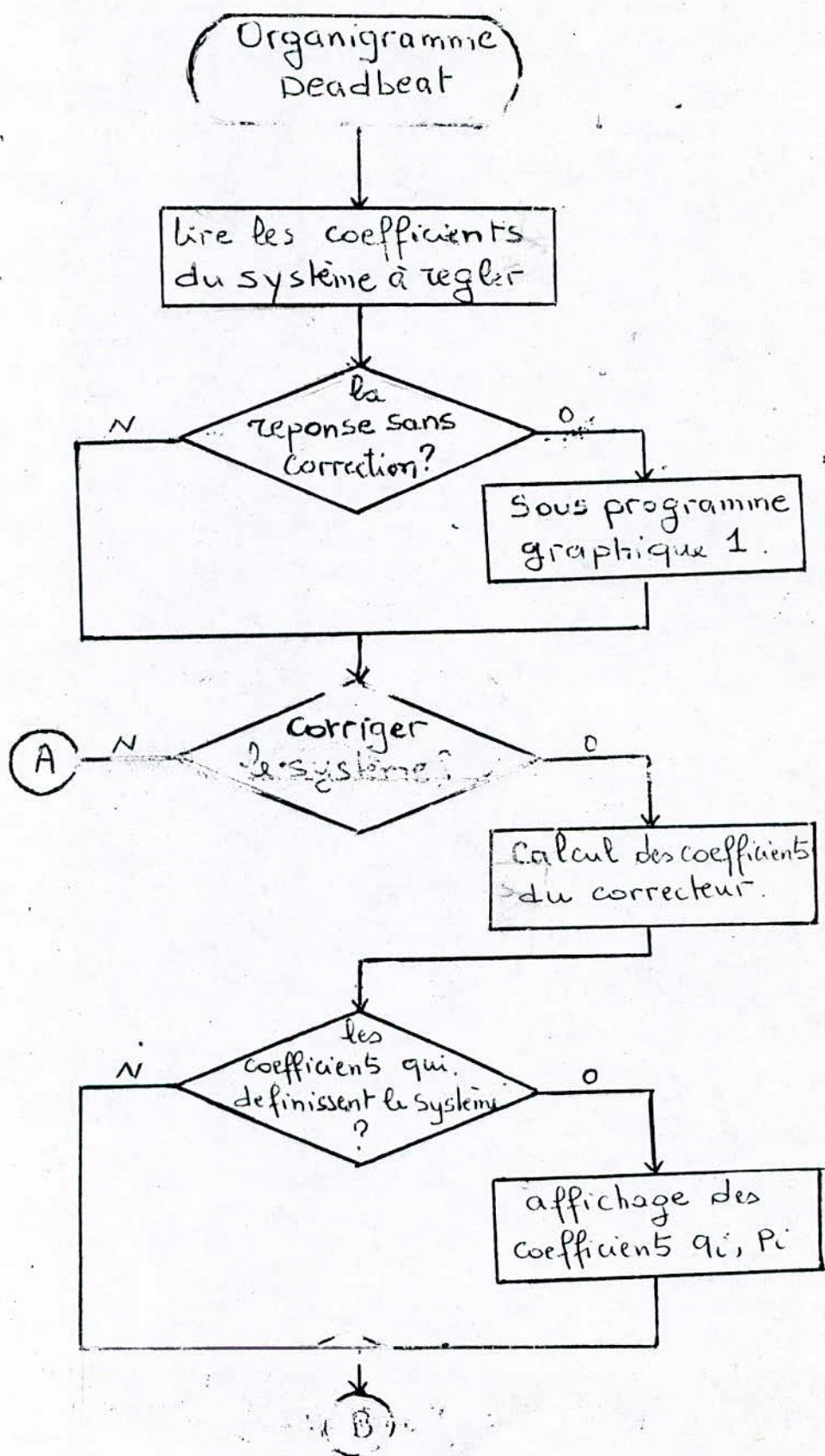
$T_{95}$  est le temps à 95% du régime établi.

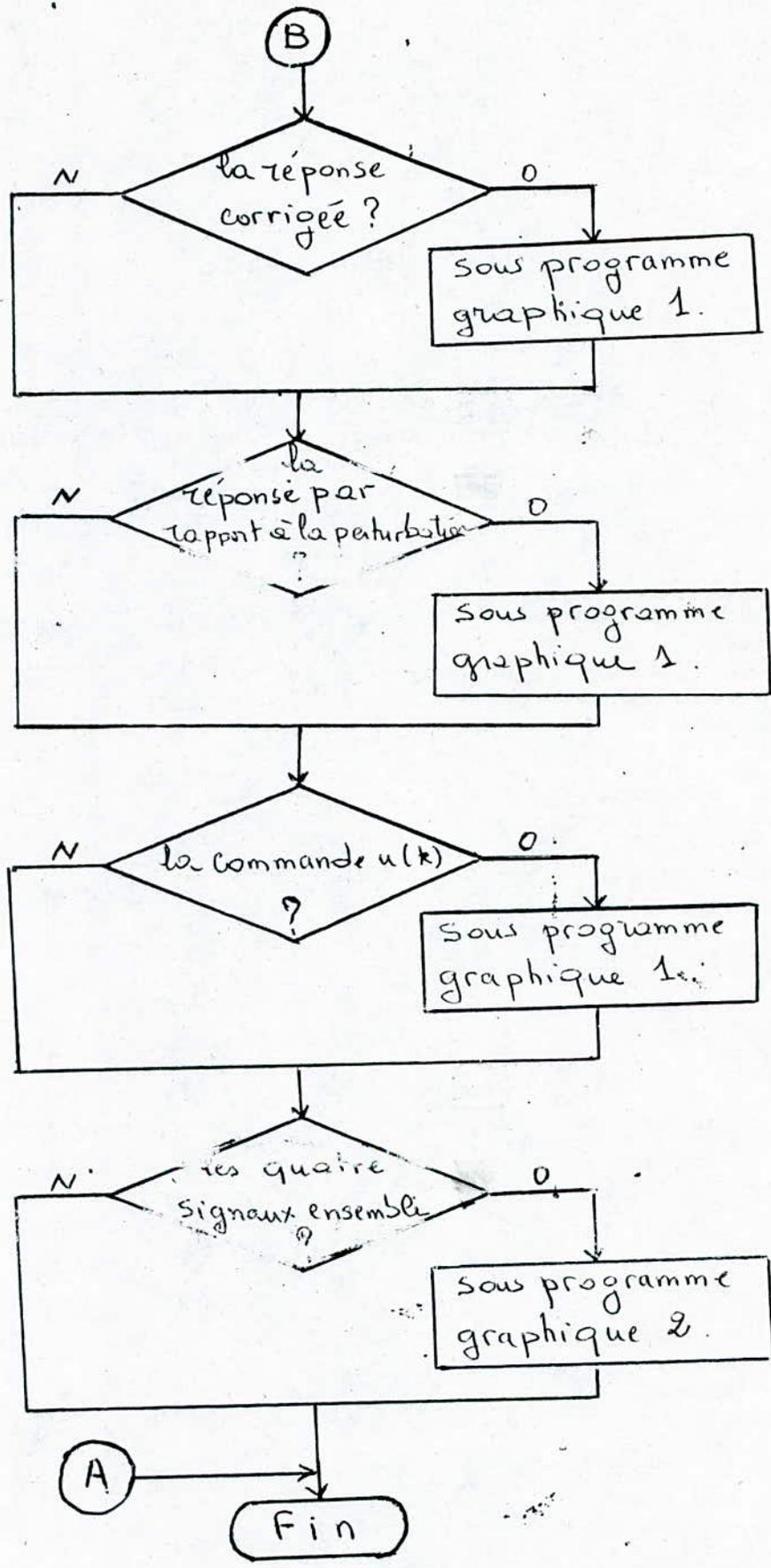
Si on utilise un régulateur DB( $\nu+1$ ) de l'équation (IV.31),  $u(0)$  sera diminué par le facteur  $(1-a_1)$  au plus. C'est-à-dire, d'après la table (IV.1), une diminution de l'ordre de 1.8 à 3.3, selon la valeur de T. Pour ce régulateur la période T devra être  $\geq 5s$  ou:

$$\frac{T_0}{T_{\Sigma}} \geq 0.22 \quad \text{ou} \quad \frac{T_0}{T_{\Sigma}} \geq 0.11.$$

Pour un maximum possible de  $u(0)$ , appartenant au domaine admissible de u, la période d'échantillonnage pour le régulateur DB( $\nu+1$ ) peut être inférieure à celle pour le régulateur DB( $\nu$ ).

IV.5 ORGANIGRAMME DE LA CORRECTION DEADBEAT





CHAPITRE V

APPLICATION

## CHAPITRE V. APPLICATION

On considère le système de la fig. (III.1). Soit la fonction de transfert (II) du système:

$$G_s(p) = \frac{K(1-T_1 p)}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$$

Determination de la F.T. discrète du système + bloqueur

$$B(p)G_s(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \frac{K(1-T_1 p)}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$$

$$G_1(p) = \frac{G_s(p)}{pe^{-T_1 p}} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p + \frac{1}{T_1}} + \frac{A_2}{p + \frac{1}{T_2}}$$

$$A_i = \lim_{p \rightarrow p_i} (p - p_i) G_1(p) \quad \text{ou} \quad p_i = -\frac{1}{T_i}$$

$$G_1(z) = \sum A_i \frac{z}{z - z_i} \quad \text{ou} \quad z_i = e^{p_i T}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1}) G_1(z)$$

Après avoir fait les calculs élémentaires,  $G(z)$  peut s'écrire sous la forme suivante:

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Le tableau suivant donne les paramètres de ce système pour:

$K=1$ ;  $T_1 = 10$  sec;  $T_2 = 7$  sec;  $T_3 = 3$  sec;  $T_4 = 2$  sec.

T	4	8
$b_1$	-0.073	0.13
$b_2$	0.28	0.34
$a_1$	-1.04	-0.58
$a_2$	0.25	0.06

Si on considère la F.T. (IFI) du système:

$$G_s(p) = \frac{1}{p(p+1)}$$

Sa transformée en Z (y compris le bloqueur est:

$$\begin{aligned} Z \left[ \frac{1-e^{-p}}{p^2(p+1)} \right] &= (1-z^{-1}) Z \left[ \frac{1}{p^2(p+1)} \right] \\ &= (1-z^{-1}) \left[ \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{1-e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})} z \right] \end{aligned}$$

Tout calcul fait on trouve pour  $T = 1 \text{ sec.}$

$$G(z) = \frac{0.368 z^{-1}(1+0.718z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

d'où: 
$$G_x(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.368 z^{-1} + 0.264 z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.632 z^{-2}}$$

Comportement entre les instants d'échantillonnage pour la réponse d'un système corrigé par un régulateur Deadbeat

Pour voir si l'erreur est aussi nulle entre les instants d'échantillonnage on vérifie si la condition  $\Sigma b_i(\varepsilon)$  est indépendante de  $\varepsilon$ , (§ IV. ), pour cela on doit calculer  $G(z, \varepsilon)$ . On peut utiliser les tableaux de correspondance. Pour l'exemple III on trouve:

$$\begin{aligned} G(z, \varepsilon) &= Z_m \left[ \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{(1-e^{-\varepsilon})z}{(z-1)(z-e^{-\varepsilon})} \right] \\ &= \frac{\varepsilon}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} - \frac{e^{-\varepsilon}}{z-e^{-\varepsilon}} \end{aligned}$$

Après mise au même dénominateur on trouve:

$$G(z, \varepsilon) = \frac{b_0(\varepsilon) + b_1(\varepsilon)z^{-1} + b_2(\varepsilon)z^{-2}}{A(z^{-1})}$$

avec

$$\begin{aligned} b_0(\varepsilon) &= \varepsilon - 1 + e^{-\varepsilon} \\ b_1(\varepsilon) &= 1 - 2e^{-\varepsilon} - \varepsilon(1+e^{-1}) + (1+e^{-1}) \\ b_2(\varepsilon) &= (\varepsilon-2)e^{-1} + e^{-\varepsilon} \end{aligned}$$

d'où  $\Sigma b_i(\varepsilon) = 1 - e^{-1} = \text{Cste}$

On a fait le tracé ci-joint pour différents systèmes et différentes périodes d'échantillonnage  $T$  pour une correction à temps d'établissement fini. Pour la correction PID on a fait le tracé des réponses du système (II) pour deux périodes  $T$ .

## COMMENTAIRE.

Le correcteur PID a été réalisé en utilisant la méthode de la minimisation par critère quadratique, le résultat obtenu est satisfaisant du fait que la réponse est plus rapide, le temps de montée est nettement plus petit et temps de réglage s'améliore.

On obtient des performances d'autant meilleures que la période d'échantillonnage est plus petite. Cependant la valeur de  $u(0)$  diminue quand  $T$  augmente.

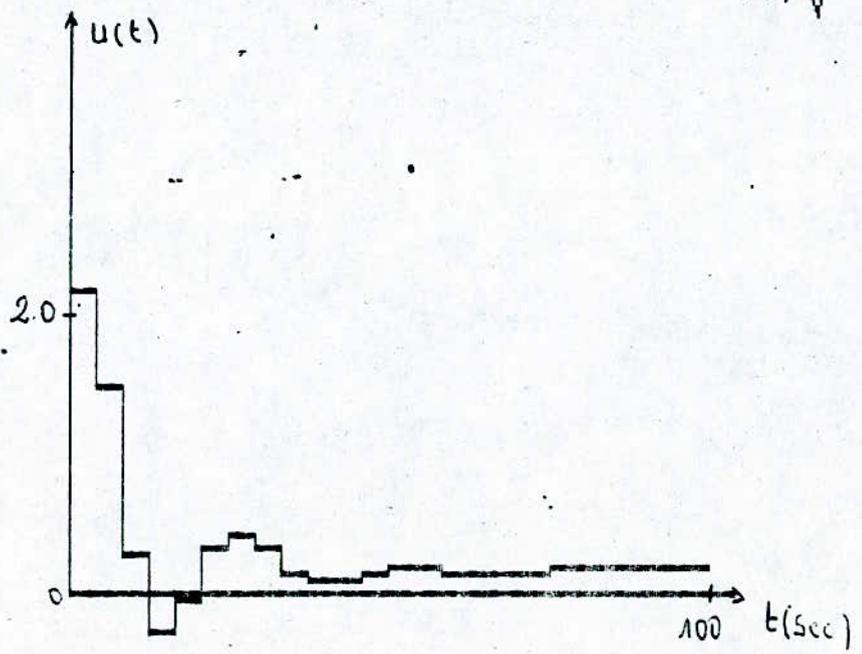
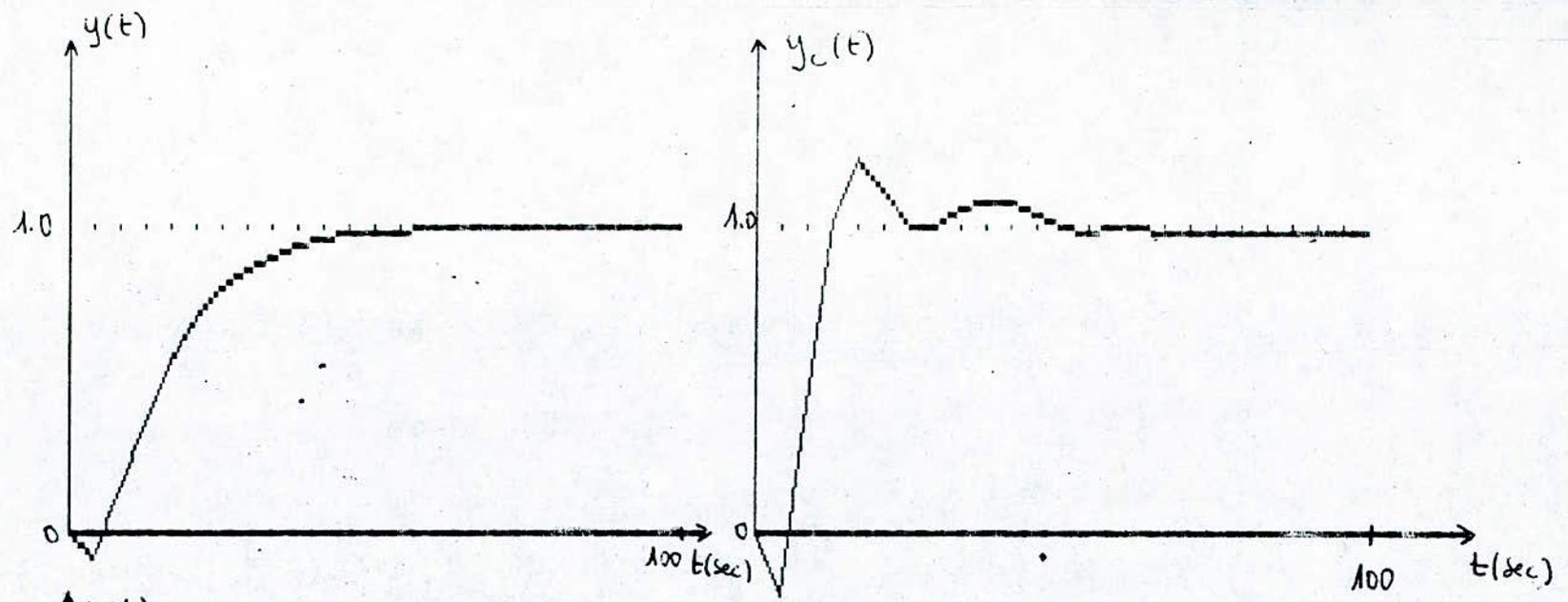
On note qu'il est mieux de stabiliser un système non stable par un régulateur standard.

La forme de régulateurs "deadbeat" demande particulièrement moins de calcul; elle est donc appliquée lorsque la synthèse est répétée plusieurs fois, par exemple dans le cas des systèmes à commande adaptative. Cependant comme ces régulateurs compensent les pôles du processus, il n'est pas convenable de les utiliser lorsque ces pôles sont situés à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle unité mais voisin de celui-ci.

L'application de ces régulateurs est donc restreinte aux systèmes asymptotiquement stables, c'est-à-dire à pôles à l'intérieur du cercle unité et suffisamment loin de celui-ci.

On voit sur les graphes ci-joints qu'avec cette correction la réponse s'améliore nettement du fait que les ondulations s'éliminent et que la durée du régime transitoire est bien limitée. Cette durée dépend de la période d'échantillonnage et augmente avec celle-ci, de même que la réponse par rapport à la perturbation. Par contre la valeur de la commande diminue.

PID

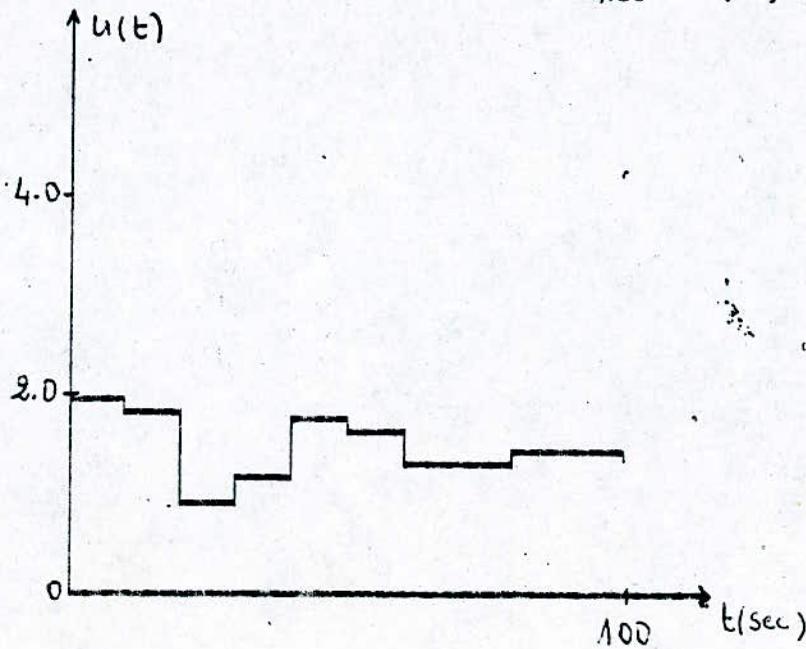
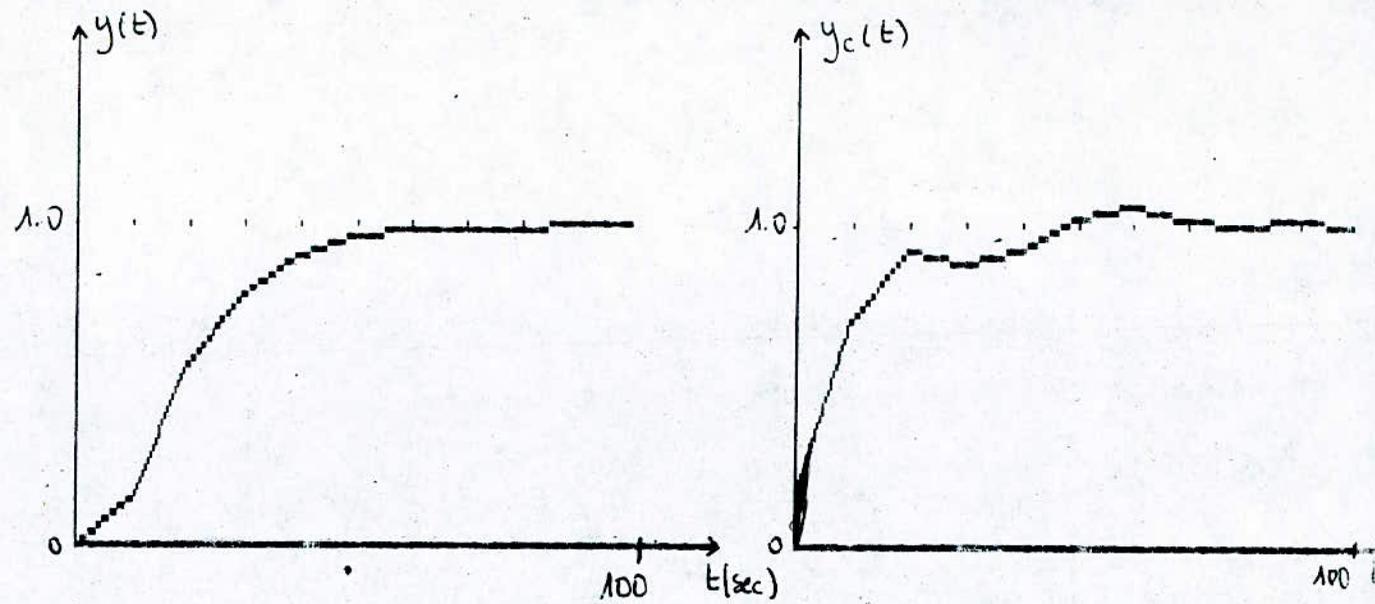


$$\begin{aligned}
 q_0 &= 2,33 \\
 q_1 &= -3,1 \\
 q_2 &= 1,1
 \end{aligned}$$

F.T (□) . T = 4 sec

$$G_s(p) = \frac{(1 - 4p)}{(1 + 4p)(1 + 10p)}$$

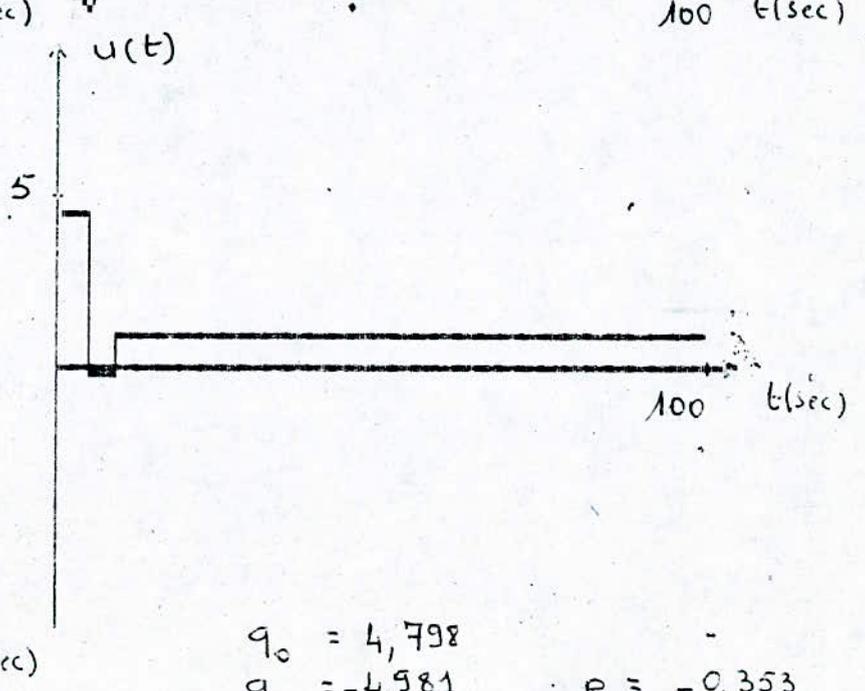
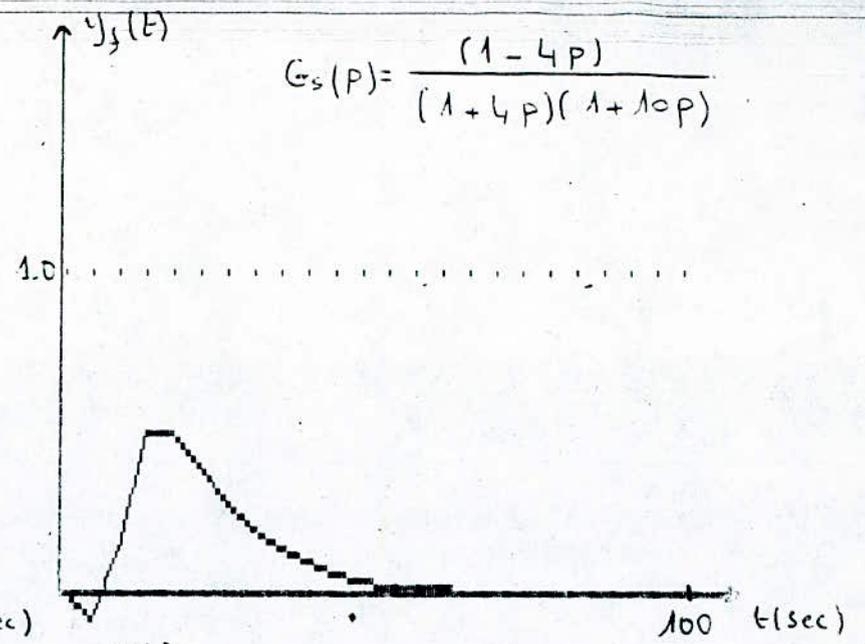
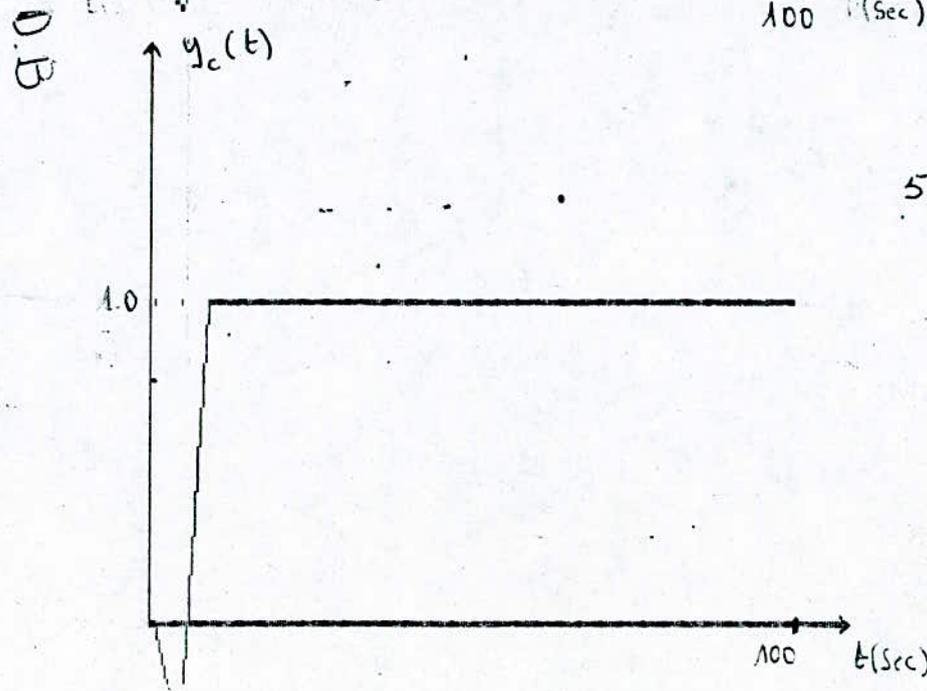
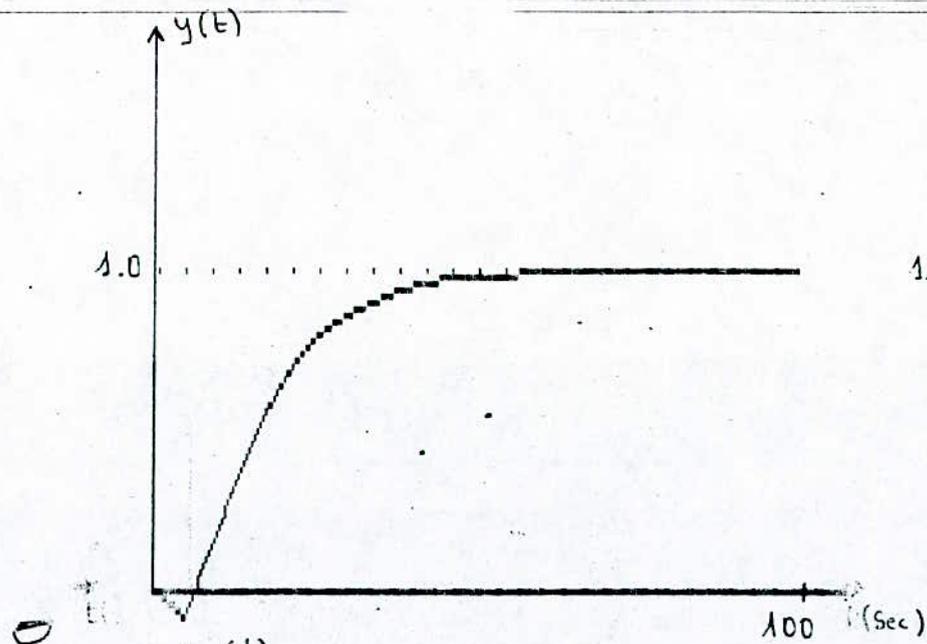
P.I.D



$$\begin{aligned} q_0 &= 2 \\ q_1 &= -2,1 \\ q_2 &= 0,75 \end{aligned}$$

$$G_s(p) = \frac{(1-4p)}{(1+4p)(1+10p)}$$

F.T. (II)  $T = 8 \text{ sec}$



$$G_s(p) = \frac{(1 - 4p)}{(1 + 4p)(1 + 10p)}$$

$$q_0 = 4,798$$

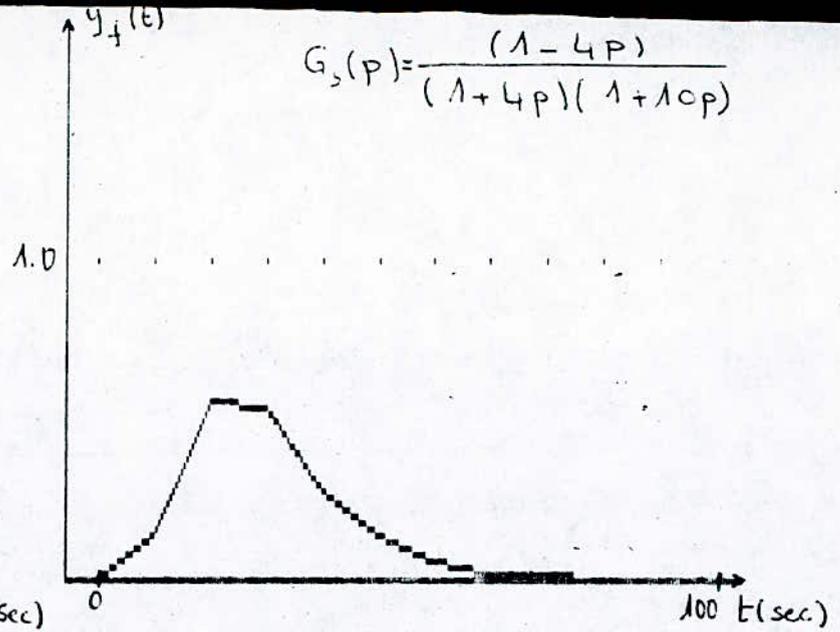
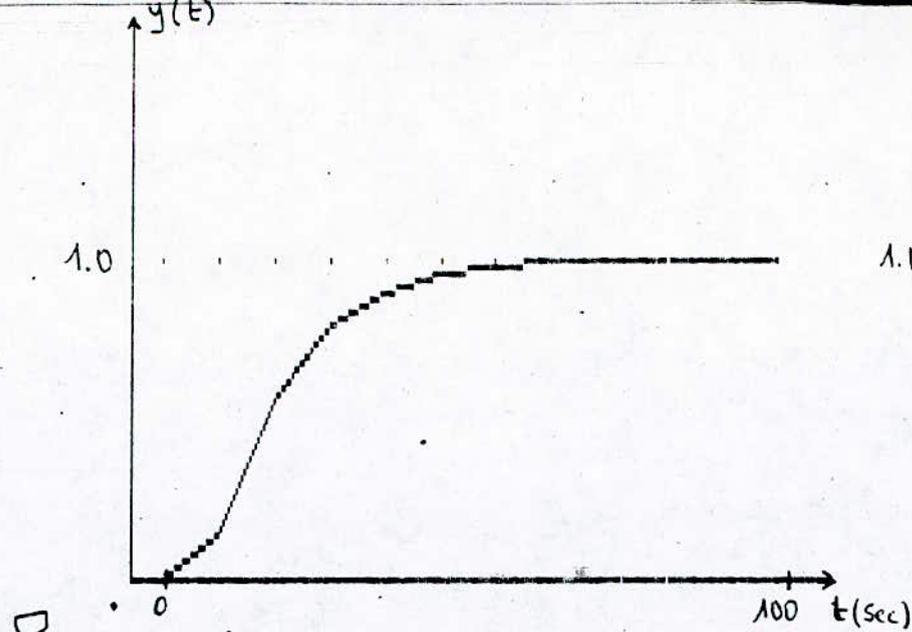
$$q_1 = -4,981$$

$$q_2 = 1,183$$

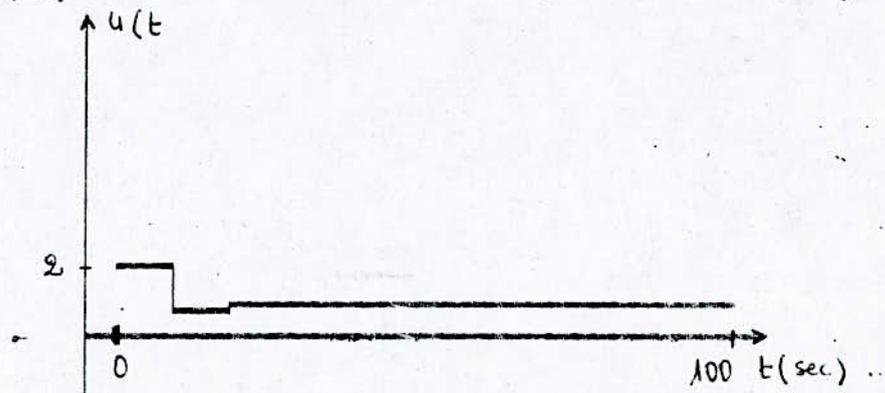
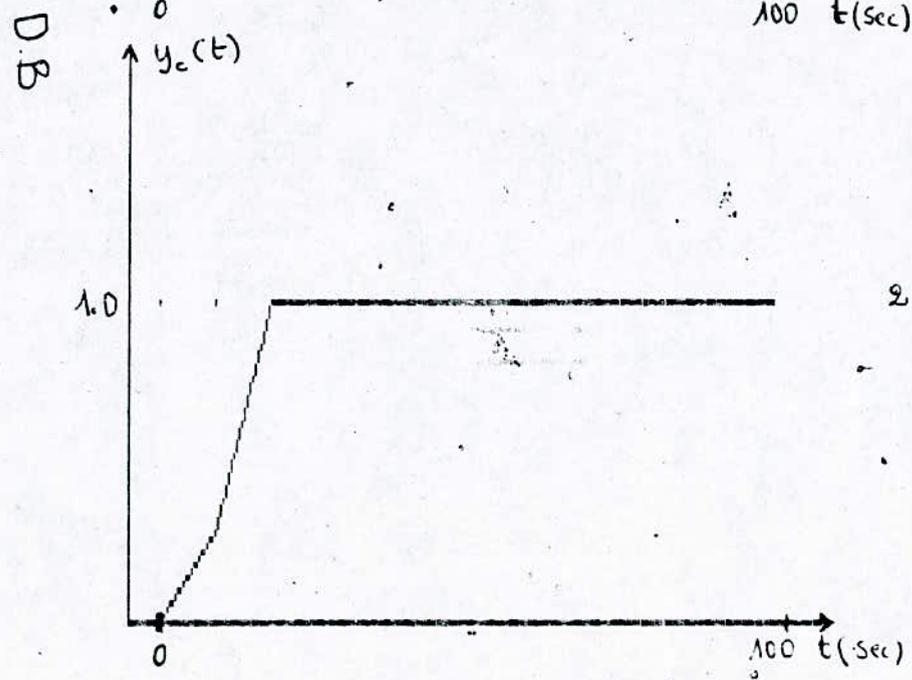
$$p_1 = -0,353$$

$$p_2 = 1,353$$

F.T. (II).  $T = 4 \text{ sec.}$

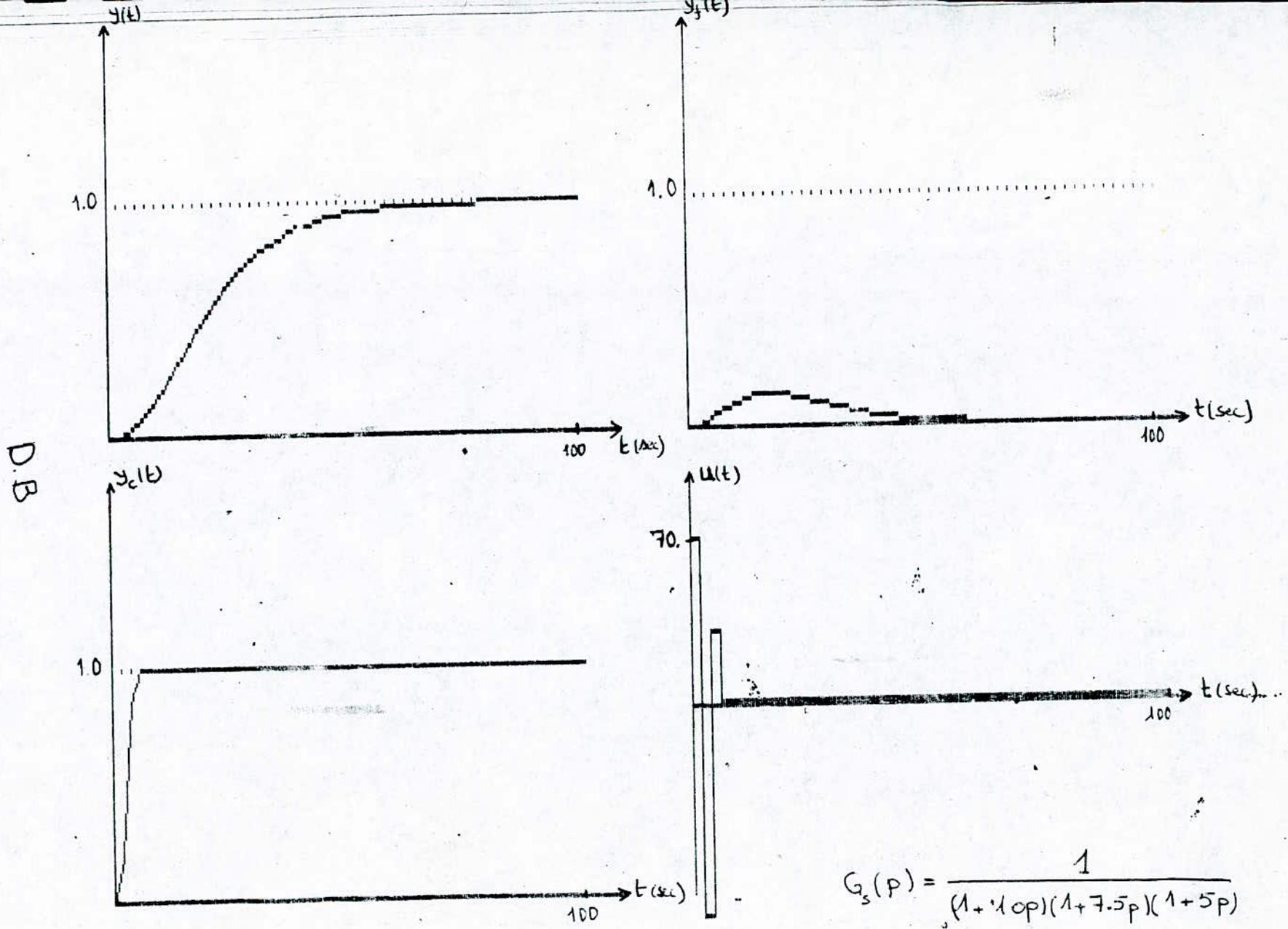


$$G_s(p) = \frac{(1-4p)}{(1+4p)(1+10p)}$$



F.T. (II)  $T = 8 \text{ sec}$

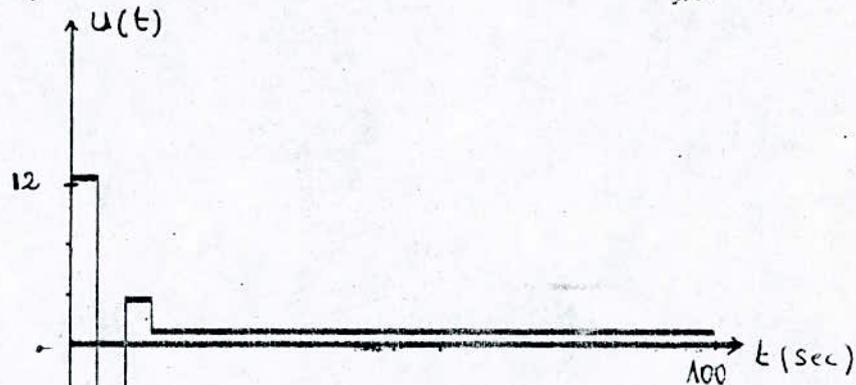
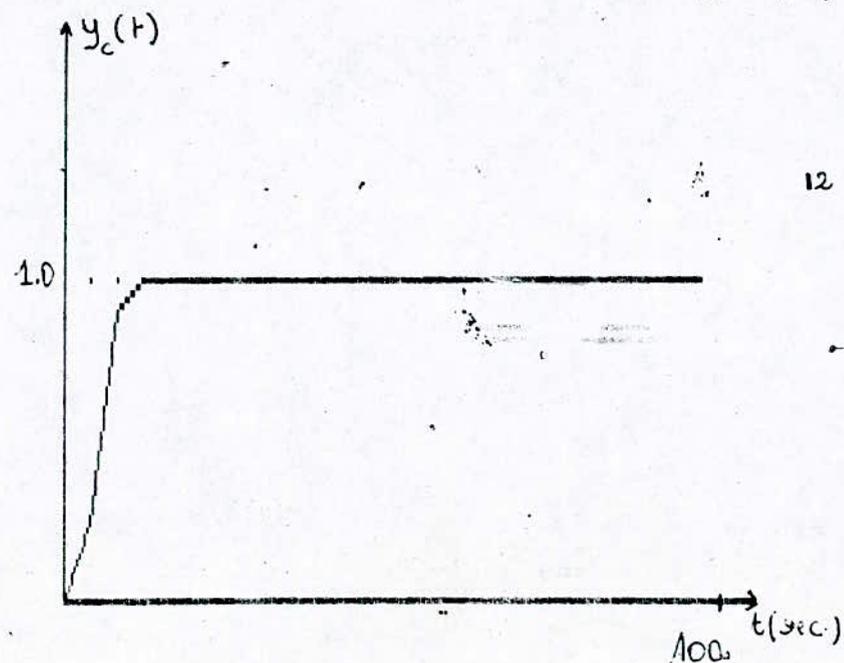
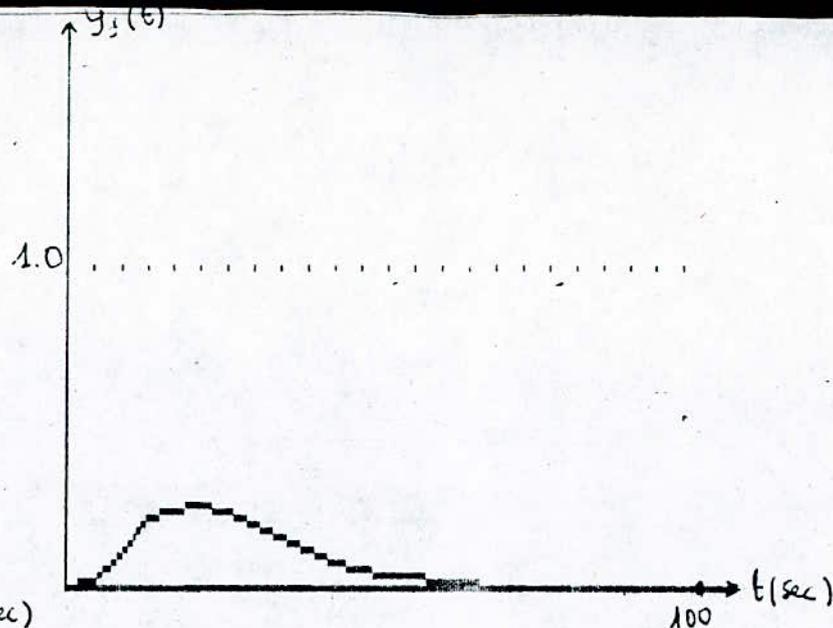
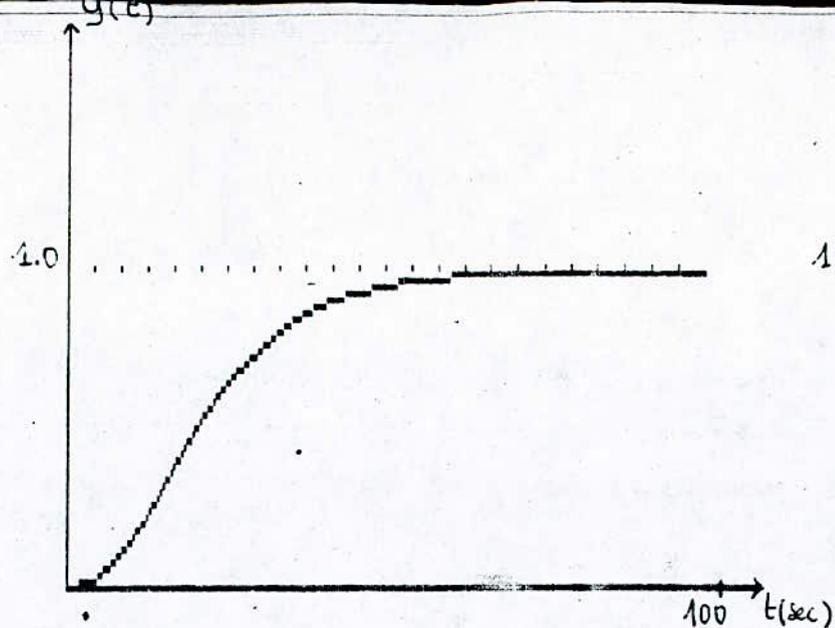
$$\begin{aligned} q_0 &= 2,10 & p_1 &= 0,277 \\ q_1 &= -1,226 & p_2 &= 0,722 \\ q_2 &= 0,126 & & \end{aligned}$$



$$G_s(p) = \frac{1}{(1+1.0p)(1+7.5p)(1+5p)}$$

F.T. (I) -  $T=2\text{sec}$ .

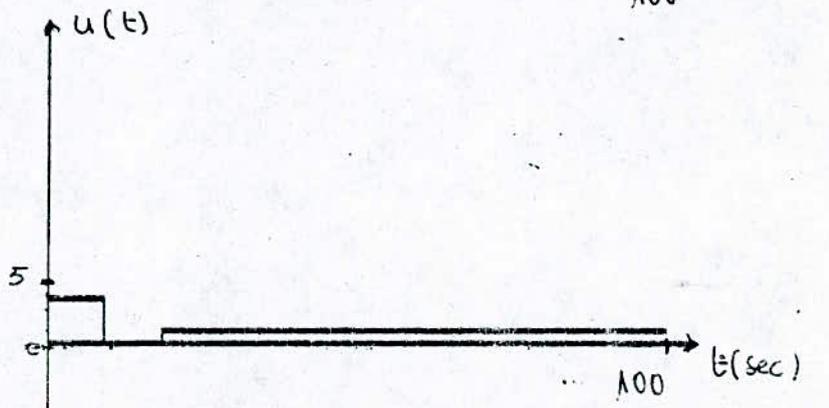
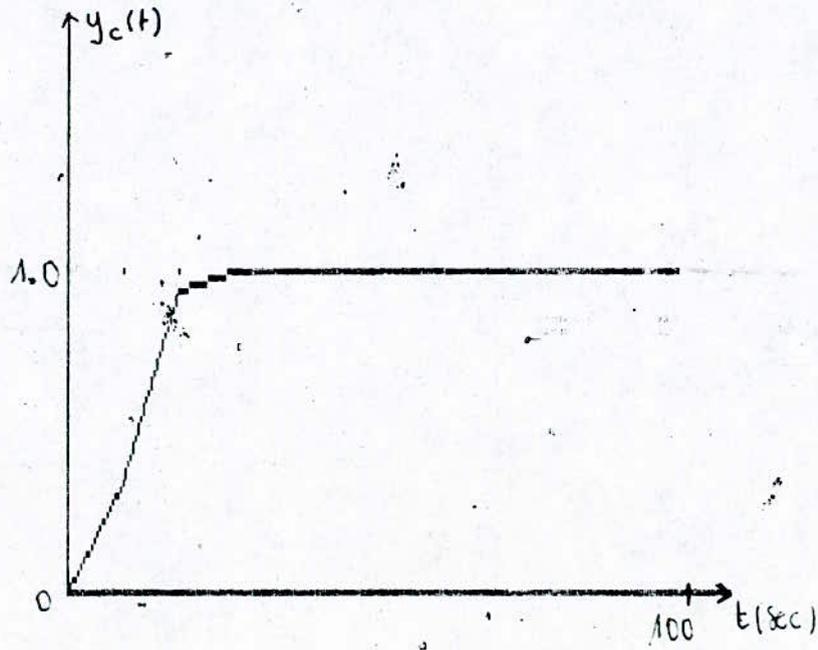
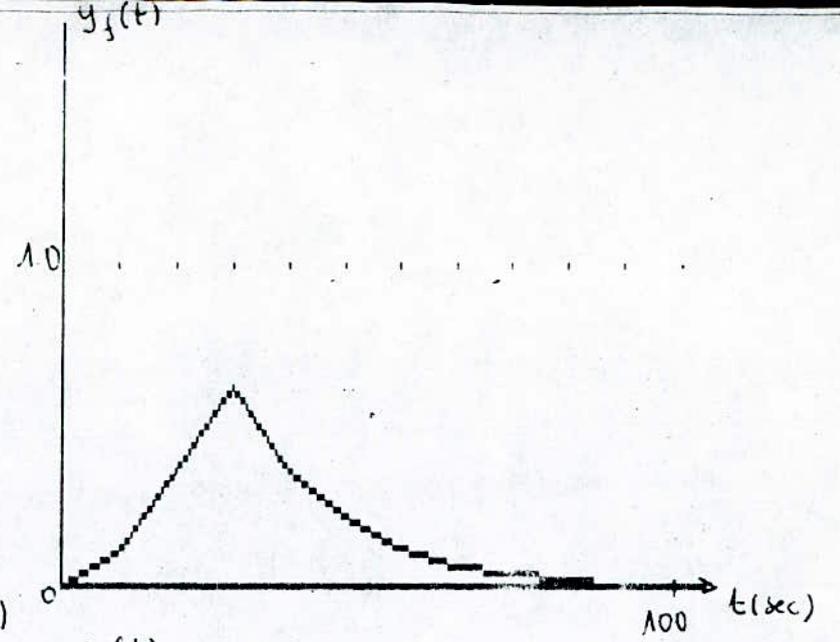
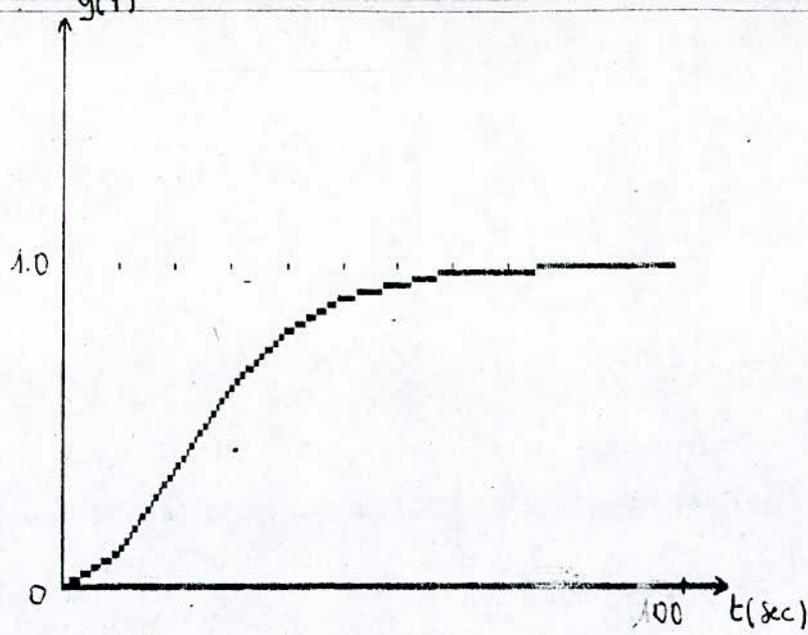
D.B



$$G_s(P) = \frac{1}{(1+10p)(1+7.5p)(1+5p)}$$

F.T. (I)  $T = 4$  sec

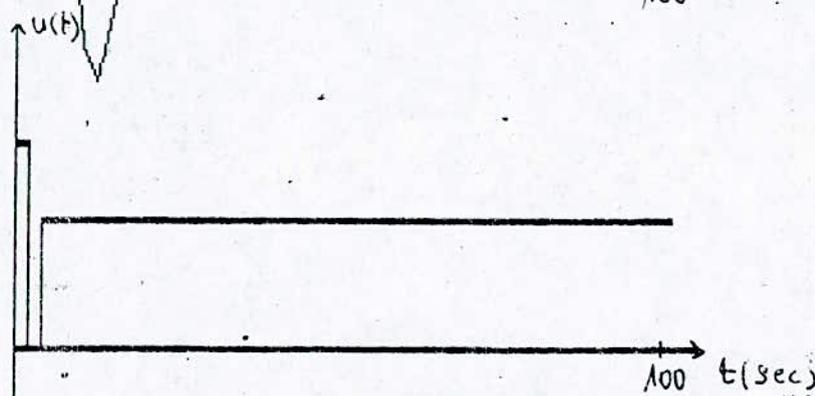
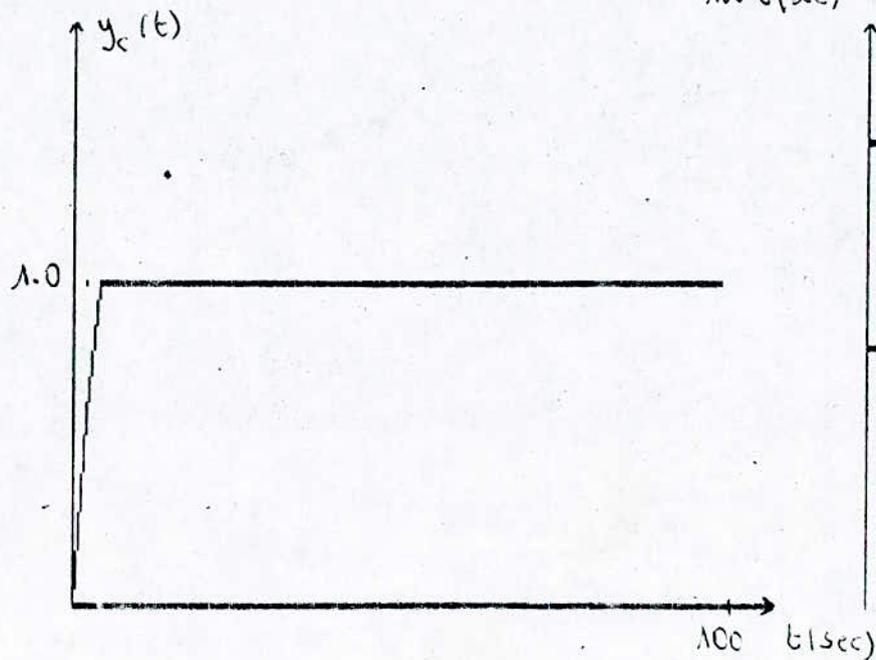
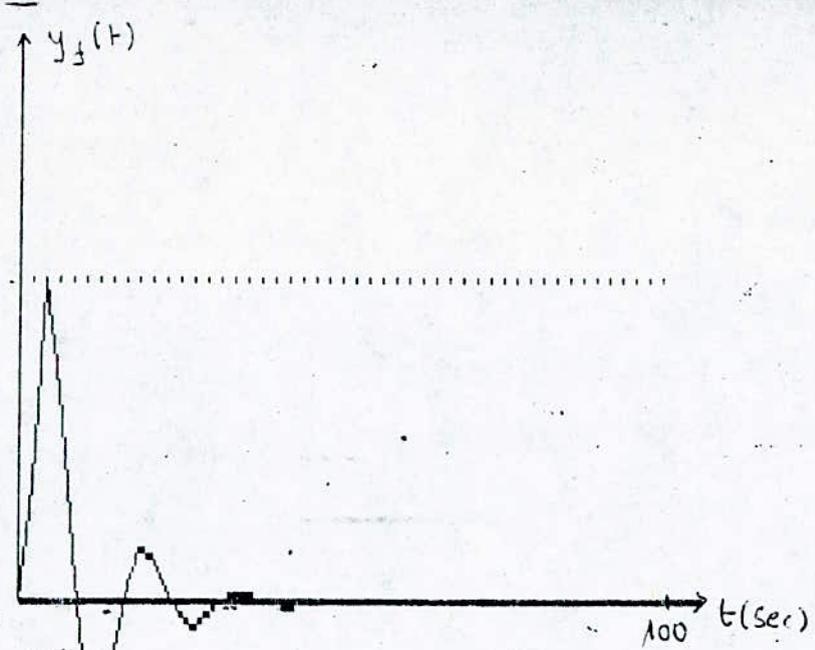
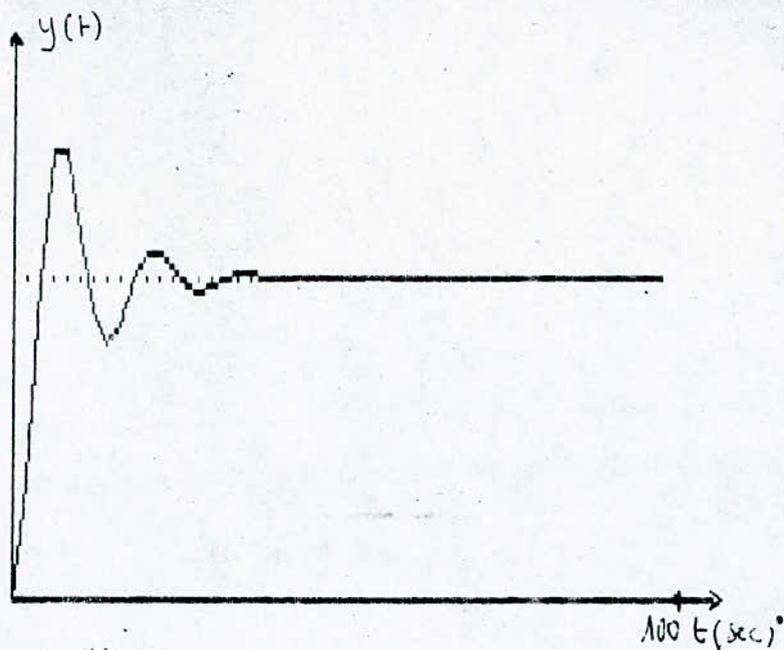
D.B



F.T.(1) -  $T = 8 \text{ sec}$

$$G_s(P) = \frac{1}{(1+10p)(1+7.5p)(1+5p)}$$

D.B



$$G_s(p) = \frac{1}{p(p+1)}$$

F.T. (III)  $T = 1 \text{ sec.}$

## CONCLUSION

L'introduction des calculateurs numériques dans les chaînes d'asservissement, bien qu'elle nécessite l'échantillonnage de l'information, laisse à l'utilisateur une grande possibilité de satisfaire aux spécifications imposées aux systèmes. La méthode d'étude des systèmes échantillonnés par la transformée en Z que nous avons utilisée, constitue une des techniques d'analyse et de synthèse particulièrement simple et puissante compte tenu des résultats qu'elle donne.

Cependant il est parfois nécessaire de céder au prolongement du temps de réponse pour éviter que la valeur de commande dépasse les valeurs permises par le système. Les deux régulateurs que nous avons utilisés montrent leurs capacités de réglage. Pour faire le choix entre eux, on se base sur les performances à exiger et le système à étudier.

Les calculateurs peuvent transmettre les informations à distance et s'utilisent dans de larges domaines de contrôles industriels (régulation des chaînes industrielles), ou spatiaux (poursuite de satellites), et pédagogiques (simulation de travaux pratiques en laboratoire). Plusieurs applications dérivent de notre système de réglage telles que les réglages en cascade.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ISERMAN R                      Digital control systems  
  springer - verlag. BERLIN  
  NEW YORK 1981
- [2] BÜHLER H                      Reglages échantillonnés  
  Presses polytechniques romandes  
  SUISSE 1982
- [3] SEVELY                        Systèmes et asservissement linéaires  
  échantillonnés  
  Edition Dunod 1981
- [4] GILLES J. C                    Théorie et calcul des asservissements  
  et les autres                      linéaires  
  Edition Dunod PARIS 1982
- [5] NASLIN P                      Technologie et calcul pratique des  
  systèmes asservis  
  Dunod 1968
- [6] MILSANT F                    Asservissement linéaire  
  EYROLLES 1983
- [7] MEEROV                        Principe de la commande automatique  
  et les autres                      Edition MIR MOSCOU 1979
- [8] FOULARD C                    Commande et régulation par  
  et les autres                      calculateurs numériques  
  EYROLLES PARIS 1979
- [9] NAJIM K                        Pratique de la régulation numérique  
  MURATET G                        des processus industriels  
  Masson 1983
- [10] BOUMAH RAT M                Méthodes numériques appliquées  
  GOURDIN A                        O. P. U ALGER 1983
- [11] TRGÉASSOU J. C              Recherche de modèles expérimentaux.  
  assistée par ordinateur  
  Langage et informatique TOULOUSE 1988

## Propriétés de la transformée en Z

— Linéarité:

$$Z(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 Z(f_1) + \lambda_2 Z(f_2)$$

— Translation temporelle:

\* retardée:

$$Z[f(t-kT)] = z^{-k} F(z)$$

\* avancée:

$$Z[f(t+kT)] = z^k F(z) - z^k f(0) + z^{k-1} f(T) + \dots - z f[(k-1)T]$$

— Translation complexe:

$$Z[F(p+a)] = Z[e^{-at} f(t)] = F(z e^{aT})$$

— Multiplication par  $t^k$ :

$$Z[t^k f(t)] = -TZ \frac{d}{dz} Z[t^{k-1} f(t)]$$

— Théorème de la sommation:

$$Z\left[\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\right] = \frac{z}{z-1} F(z)$$

— Théorème de la valeur initiale:

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

— Théorème de la valeur finale:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z)$$

— Théorème de convolution discète:

$$F_1(z) F_2(z) = Z\left[\sum_{n=0}^{\infty} f_1(kT) \cdot f_2[(k-n)T]\right]$$

```

rem
rem *****
rem !
rem !           SYSTHESE DES CORRECTEURS PID NUMERIGUES
rem !
rem *****
rem
rem
rem !
rem ! La réponse indicielle d'un systeme dont la fonction de
rem ! transfert est de la forme:
rem !
rem !           -1      -m      -d      -1      -m
rem !   H(z)=(a0+alz  +...+adnzp )z  /(1+b1z  +...+bddz  )
rem !
rem ! an,bn et d des constantes qui définissent le système à
rem ! étudier.
rem ! Le système à étudier peut être de premier ordre, de deux-
rem ! ième ordre ou de troisième ordre sans ou avec retard.
rem !
rem !-----
rem !
rem !           La réponse indicielle du système sans correction
rem !-----
rem
input "entrer l'ordre du systeme a etudier m";m
dim b(m),a(m)
for i=1 to m: print "entrer la constante b";i
input b(i): next i
for i=1 to m: print "entrer la constante a";i
input a(i): next i
input " entrer la periode d'echantillonnage T";T
input " la constante r";r
N=int(100/T)
dim X(N),E(N),U(N),y(N),UC(N),YC(N),YC1(N)
for k=1 to N : X(k)=1. :next k
rem
rem
rem !-----
rem !           la reponse indicielle du systeme sans correction
rem !-----
rem
for k=1 to N
y(k)=0
for i=0 to m
if (k-i-d)<1 goto 3
y(k)=y(k)+a(i+1)*X(k-i)
next i
for i=1 to m
if (k-i)<1 goto 4
y(k)=y(k)-b(i)*y(k-i)
next i
next k

```



```

rem
rem =====
rem !          calcul de la commande U(k)          !
rem =====
rem
U(1)=q0*E(1)
U(2)=U(1)+q0*E(2)
for k=3 to N
U(k)=U(k-1)+q0*E(k)+q1*E(k-1)+q2*E(k-2)
next k
rem
rem =====
rem !          calcul de la reponse y(k)          !
rem =====
rem
for k=1 to N
YC(k)=0.
for i=1 to m
if (k-i)<1 goto 14
YC(k)=YC(k)+b(i)*U(k-i)
next i
for i=1 to m
if (k-i)<1 goto 15
YC(k)=YC(k)-a(i)*YC(k-i)
next i
next k
rem
rem =====
rem !          calcul du critere quadratique          !
rem =====
rem
cq=0
for k=1 to N
cq=cq+E(k)^2+r*(U(k)-U(N))^2
next k
if q0=q0min then if q1=q1min then if q2=q2min then cqmin=cq
if cq>cqmin goto 16
q00=q0:q01=q1:q02=q2
for k=1 to N:UC(k)=U(k):yc1(k)=yc(k):next k
next q2:next q1:next q0
print q00,q01,q02
input "voulez vous les graphisme les signaux -0/N":r3$
if r3$="0" then gosub 17
end
rem
rem =====
rem !          sous programme graphique          !
rem =====
rem

```

```
rem  
cls: screen 2  
for i=1 to N  
x1=int(i*250/N)+30 :x2=int(i*250/N)+300  
y1=90-y(i)*50  
u1=190-UC(i)*50  
y2=90-yc1(i)*50  
pset(x1,y1) :pset(x1,u1):pset(x2,y2)  
next i  
line(30,30)-(30,90) :line(30,90)-(290,90)  
line(300,30)-(300,90):line(300,90)-(590,90)  
line(30,100)-(30,190):line(30,190)-(290,190) †  
end
```

```

rem
rem *****
rem !
rem !           synthèse des correcteurs à réponse pile           !
rem !
rem *****
rem -----
rem !           la fonction de transfert du système à régler           !
rem !
rem !           -1      -2      -m      -d      -1      -m           !
rem ! G(z) = (b1z  +b2z  +...+bmz )z  /(1+a1z  +...+amz  )           !
rem !
rem ! m,bi,ai et d des constantes qui définissent le système!
rem ! à étudier.
rem -----
rem =====
rem !           la réponse indicielle du système sans correction           !
rem =====
rem
input "entrer l'ordre du systeme a etudier m";m
dim b(m),a(m),q(m),p(m)
for i=1 to m:print "entrer la constante b";i
input b(i):next i
for i=1 to m:print "entrer la constante a";i
input a(i):next i
input "la constante du retard d";d
input "entrer la période d'échantillonnage T";T
N=int(100/T) :uu=0
dim yf1(N)
dim x(N),e(N),u(N),y(N),yf(N),yc(N),yy(N),PP(N),D(N),S(N),M(N)
for i=1 to N : x(i)=1. :Next i
rem
rem =====
rem !           sous programme de calcul de la sortie y(k)           !
rem !           sans correction           !
rem =====
rem
for k=1 to N
y(k)=0.
for i=1 to m
if (k-i-d)<1 goto 1
y(k)=y(k)+b(i)*x(k-i-d)
next i
for i=1 to m
if (k-i)<1 goto 2
y(k)=y(k)-a(i)*y(k-i)
next i
next k
for i=1 to N: yy(i)=y(i) :next i
gosub 4

```

```

locate 1,1 :input "voulez vous corriger votre systeme O/N":r$
if r$="N" then end
if r$="O" goto 5
rem
rem =====
rem ! calcul du regulateur à temps d'établissement finie !
rem !
rem !           -1           -m           -1-d           -2-d           -m-d !
rem ! D(z)=(q0+q1z +...+qmz )/(1-p1z -p2z -...-pmz )!
rem !
rem =====
rem
rem =====
rem ! sous programme de calcul des coefficients qi et pi !
rem =====
rem
qd=0.
for i=1 to m : qd=qd+b(i):next i
q0=1/qd
for i=1 to m : q(i)=a(i)*q0 : p(i)=b(i)*q0 :next i
rem
rem =====
rem ! calcul de la sortie corrigée !
rem =====
rem
for k=1 to N
yc(k)=0
for i=1 to m
if (k-i-d)<1 goto 3
yc(k)=yc(k)+p(i)*x(k-i-d)
next i
next k
for i=1 to N: yy(i)=yc(i) :next i
gosub 4
locate 1,1:input "voulez vous les constantes qi et pi O/N ",rr$
if rr$="N" then end
if rr$="O" goto 6
for i=1 to m :print q(i);p(i) : next i :print q0
locate 1,1:input "voulez vous la reponse par rapport a la
Aperturbation O/N":s$
if s$="N" then end
if s$="O" goto 9
rem
rem =====
rem ! sous programme de calcul de la réponse y(k) !
rem ! propre à la perturbation f(t)=x(t) !
rem =====
rem
for k=1 to N
yf(k)=0
for i=1 to m
if (k-i-d)<1 goto 7
yf1(k)=yf1(k)+p(i)*x(k-i-d)/q0
next i

```

```

A> for i=1 to m
if (k-i)<1 goto 8
yf1(k)=yf1(k)-q(i)*yf1(k-i)/q0
*yf(k)=yf(k)-q(i)*yf(k-i)/q0
next i
yf(k)=0
if (k-i)<1 goto 14
for i=1 to m:yf(k)=yf(k)-p(i)*yf1(k-i)
next i
4 yf(k)=yf1(k)+yf(k)
next k
for i=1 to N: yy(i)=yf(i) : next i
gosub 4
rem
locate 1,1:input "voulez vous la commande u 0/N";l$
if l$="N" then end
if l$="0" goto 10
rem
rem =====
rem ! calcul de la commande u(t) !
rem =====
0 for k=1 to N
u(k)=q0
for i=1 to m
if (k-i)<1 goto 11
u(k)=u(k)+q(i)*x(k-i)
1 next i
next k
for i=1 to N :yy(i)=u(i)/20 :next i :uu=1
gosub 4
rem
locate 1,1:input "voulez vous les quatre graphes ensemble 0/N";rf$
if rf$="N" then end
if rf$="0" then gosub 21
end
rem
rem =====
rem ! sous programme graphique de traçage de la réponse !
rem =====
rem
cls :screen 2
if uu=1 goto 12
gosub 16
line(48,30)-(48,170):line(48,170)-(600,170)
line(171,168)-(171,172):line(294,168)-(294,172)
line(417,168)-(417,172):line(540,168)-(540,172)
line(45,70)-(51,70):line(45,120)-(51,120)
locate 23,5 :print 0 :locate 23,21 :print 25
locate 23,36 :print 50: locate 23,51 :print 75
locate 23,66:print 100: locate 22,73: print "> t(sec)"
locate 15,1 :print "0.5":locate 9,1 :print "1.0"
goto 13

```

```

A>type
12  for i=1 to N-1
    x1=int(500*(i-1)/N)+48
    x2=int(500*i/N)+48
    y1=100-yy(i)*100
    y2=100-yy(i+1)*100
    line(x1,y1)-(x2,y1):line(x2,y1)-(x2,y2)
  next i
  line(48,10)-(48,190):line(48,100)-(600,100)
  line(171,98)-(171,102):line(294,98)-(294,102)
  line(417,98)-(417,102):line(540,98)-(540,102)
  line(45,40)-(51,40):line(45,160)-(51,160)
  line(45,65)-(51,65):line(45,135)-(51,135)
  locate 13,3 :print 0 :locate 14,21 :print 25
  locate 14,36 :print 50 :locate 14,51 :print 75
  locate 14,66 :print 100: locate 13,71 :print ">t(sec)"
  locate 21,2 :print "-12" :locate 6,1:print "+12"
  locate 9,2 :print "+6":locate 18,2 :print "-6"
  return
rem
rem =====
rem !   sous programme de lissage par fonctions splines   !
rem =====
rem
cls :screen 2 :
for i=1 to N
ii=int(500*i/N)+40
yy(i)=170-yy(i)*100
circle(ii,yy(i)),3
circle(ii,yy(i)),2
next i
PP(1)=-1:PP(2)=4
for k=3 to N-1 :PP(k)=-PP(k-2)-4*PP(k-1) :next k
S(1)=0:for k=2 to N-1
D(k)=6*(yy(k-1)-2*yy(k)+yy(k+1))
S(k)=S(k-1)-PP(k-1)*D(k):next k
M(1)=0 :M(N)=0
for k=N-1 to 1 step -1
M(k)=(S(k)+PP(k-1)*M(k+1))/PP(k) :next k
p1=.1:pset(48,yy(1))
for i=1 to N-1
for T=i to i+1+.01 step P1
if T=i then 20
b=i+1-T:c=T-i
S1=M(i)*b*b*b+M(i+1)*c*c*c+(6*yy(i+1)-M(i+1))*c
S1=(S1+(6*yy(i)-M(i))*b)/6
TT=int(500*T/N)+40
line-(TT,S1)
next T:next i
return

```

A>  
21

```
cls :screen 2
for i=1 to N-1
x1=int(i*250/N)+30 :x11=int((i+1)*250/N)+30
x2=x1+300 :x21=x11+300
y1=90-y(i)*50 :y2=90-y(i+1)*50
yc1=190-yc(i)*50:yc2=190-yc(i+1)*50
yf1=90-yf(i)*50:yf2=90-yf(i+1)*50
u1=150-u(i)*5:u2=150-u(i+1)*5
line(x1,y1)-(x11,y2):line(x1,yc1)-(x11,yc2)
line(x2,yf1)-(x21,yf2):line(x2,u1)-(x21,u1)
line(x21,u1)-(x21,u2):pset(x1,40):pset(x2,40):pset(x1,140)
next i
line(38,2)-(38,90):line(38,90)-(300,90)
line(38,100)-(38,190):line(38,190)-(300,190)
line(338,2)-(338,90):line(338,90)-(590,90)
line(338,100)-(338,190):line(338,150)-(590,150)
return
```