

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT : GENIE CIVIL



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

Thème

**ETUDE DETERMINISTE ET STOCHASTIQUE
DES SYSTEMES DYNAMIQUES SOUMIS
A UNE EXCITATION SISMIQUE**

Etudié par :
MEHDI Samir
SAGHID Abdelhak

Dirigé par :
Mr : ZEGHLACHE

Promotion 2001

E.N.P 10, Avenue HASSEN BADI-EL HARRACH-ALGER

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT : GENIE CIVIL



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

Thème

**ETUDE DETERMINISTE ET STOCHASTIQUE
DES SYSTEMES DYNAMIQUES SOUMIS
A UNE EXCITATION SISMIQUE**

Etudié par :
MEHDI Samir
SAGHID Abdelhak

Dirigé par :
Mr : ZEGHLACHE

Promotion 2001

E.N.P 10, Avenue HASSEN BADI-EL HARRACH-ALGER

DEDICACES

Je dédie ce travail à :

mes parents en signe de reconnaissance pour tous les sacrifices consentis à mon égard, et pour leur soutien morale et matériel, et à mes frères et sœurs.

A toute ma famille.

Aux petits poussins (asmàa, amira)

A mon binôme samir et à fateh, farid, karim, abdelkader, abderahmène, sofiane,

pour tout laide que j'ai reçu.

A TOUT MES AMIS .

Abdelhak

Dédicaces

- *A mes parents, mes frères et sœurs auxquels je dois tout...*
- *A mon binôme et à tout mes copains ,spécialement fateh,adel, yassaa, poutchou, mixou,halim,karim....*

samir



REMERCIEMENTS

louange à dieu qui nous a donné la santé et le courage pour terminer ce modeste travail. Nous remercions nôtres promoteur monsieur **ZEGLACHE** qui est à l'origine de ce travail, pour son aide si précieuse et ses conseils éclairés tout au long du travail.

nous rendons hommage à tous ceux qui ,de prés ou de loin ,nous ont apportés de l'aide pour l'élaboration de ce travail, en particulier monsieur **NOUR(CGS)**, **SLIMANI(CGS)**, **HAMOUTENE**.

Nous exprimons nôtres profondes gratitude envers tout les enseignants du département GENIE CIVIL pour leurs efforts durant les trois derniers années . Nos remerciement vont également au président du jury ainsi que les membres du jury pour avoir accepter d'évaluer ce travail.

Enfin, nous tenons plus que tout, à exprimer nos remerciements les plus chaleureux à nos chères familles dont l'amour et les encouragements nous ont été d'un apport sans égal.

يوجد منهجان أساسيان لتقدير الاستجابة الديناميكية لبناية : منهج حتمي , ومنهج اتفاقي .
اختيار المنهج المراد يتعلق أساسا بأهمية البناية المعتبرة . كما أخذنا بعين الاعتبار المرونة
وفعل تراجع الجدران في هذه الدراسة على استجابتها .

Résumé

Ils existent deux approches fondamentales pour l'évaluation de la réponse dynamique d'une structure : l'approche déterministe et l'approche stochastique.

Le choix de l'approche approprié va dépendre essentiellement de l'importance de la structure considérée, la flexibilité a été prise en compte l'or de la cette étude ainsi que l'effet des décrochement sur la réponse .

Mots clefs

Détermination, stochastique, dynamique, séisme, superposition modale, spectre, accelerogramme, décrochement, flexibilité.

SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
Chapitre I : Généralités sur les séismes	3
I.1) Origine des séismes	3
I.2) Mécanisme général de production des séismes	3
I.3) Les ondes sismiques	4
I.3.1) Les ondes de volumes	4
I.3.2) Les Ondes longues (ondes de surface)	5
I.4) Paramètres descriptifs des séismes	6
I.4.1) Epicentre microscopique	6
I.4.2) Epicentre macroscopique	6
I.4.3) Distance focale	7
I.4.4) Magnitude	7
I.4.5) Intensité	7
I.4.6) Loi d'atténuation	7
I.4.7) enregistrement des mouvements du sol	8
Chapitre II: analyse déterministe	
II.1) Introduction	10
II.2) Caractéristique essentielle d'un phénomène dynamique	10
II.3) Formation des équations de mouvement	10
II.3) système a un degré de liberté	10
II.3.1) Principe D'ALEMBERT	10
II.3.2) Principe de déplacements virtuels	12
II.3.3) Principe de HAMILTON	13
II.3.4) Oscillateurs simples	14
II.3.4.1) oscillateurs libres	14
II.3.5) Etude de la réponse dans le temps	18
II.3.6) réponse d'un oscillateur simple à une excitation sismique	22
II.4) système a plusieurs degré de liberté	24
II.4.1) Matrice de rigidité :	25

II.4.2) matrice de masse:	26
II.4.3) matrice d'amortissement	26
II.4.4) Equation d'équilibre du mouvement	27
II.4.5)méthode de résolution des équations de mouvement	28
II.4.6)étude dans le domaine temporels	30
II.4.7) étude dans le domaine fréquentiel	33
Chapitre III: introduction au processus aléatoires	38
III .1)Définitions	38
III. 2) fonction de répartition d'une variable aléatoire	40
III. 3) densité de probabilité	40
III. 3.1) densité de probabilité du premier ordre	41
III. 3.2) densité de probabilité du second ordre	42
III. 4) l'espérance mathématique de la fonction aléatoire	43
III. 5) fonction d'auto corrélation	44
III. 6) fonction d'auto covariance	45
III. 7) processus stationnaires	45
III.8) fonction de densité spectrale	46
III.8.1) Fonction de densité spectrale de puissance	47
III.8.2) fonction de densité spectrale unilatérale	47
III.8.3) fonction de cross-corrélation et de cross-densité spectral	47
III.9) processus stationnaire a bande limité	48
CHAPITRE IV :Analyse non déterministe	51
IV.1) introduction	51
IV.2) Réponse des systèmes à plusieurs degrés de liberté à une excitation stationnaire	52
IV.3) Statistique du pic de la réponse à une excitation gaussienne	54
IV.4) méthode Modalo-spectrale basée sur le déplacement	56
IV.4.1) validité de la méthode	56
IV.4.2) sélection des modes utiles	57
IV.4.3) développement de la méthode Modalo-spectrale	57
IV.4.4) spectre de plancher	59
CHAPITRE V :ETUDE NUMERIQUE	61
conclusion	89

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

introduction

INTRODUCTION :

Le problème de l'ingénieur est de construire, sur un site donné, une structure qui doit résister à un éventuelle séisme . Pour la résolution de ce problème dynamique , deux philosophies d'esprit assez opposées existent

L'approche déterministe, qui suppose que l'évolution temporelle d'un chargement dynamique peut être parfaitement connue à tout instant.

Dés l'ors que l'excitation est déterministe la réponse l'est aussi.

L'approche stochastique va caractériser un chargement dynamique présentant une évolution qui apparaît comme irrégulière et qui ne peut être prédite que sous forme de probabilité de présence dans un certain intervalle. Ainsi la réponse correspondante est faite à travers ses propriétés statistiques.

Dans le contexte de notre travail ,on s'intéresse à l'analyse dynamique des structures qui a pour objectif ,la détermination des contraintes et des déformations.

Notre objectif, est d'évaluer la réponse des structures selon l'approche déterministe et l'approche stochastique .

Nous allons voir l'effet de la flexibilité et du décrochement de la structure sur sa réponse dynamique .

Enfin, il est tout à fait possible de continuer le travail ,et de déterminer la réponse d'un oscillateur soumis au mouvement du plancher support. En terme d'analyse sismique, cela veut dire qu'on va calculer le spectre de plancher.

Dans le chapitre I, nous exposons quelques notions simples de sismologie, ainsi que les principes utilisés pour définir les mouvements sismiques.

Dans le chapitre II. Nous allons voir les notions générales de la dynamique des structures, la formulation des équations de mouvement pour un seul degré de liberté puis on généralise pour plusieurs degrés de libertés. Enfin , la résolution de ces équations se fera dans le domaine temporel et fréquentiel .

En ce qui concerne le chapitre III, quelques notions générales sur la théorie des processus aléatoires seront nécessaires pour introduire la démarche stochastique.

L'objectif du chapitre IV est la détermination de la réponse aléatoire en utilisant la méthode modalo spectrale.

Dans le dernier chapitre ,nous allons interpréter les principaux résultats pour tirer les conclusions de cette étude.

chapitre I.

généralités sur les séismes

GENERALITES SUR LES SEISMES :

A la suite d'un fort séisme, on constate généralement que de nombreuses constructions, présentaient a priori une sécurité insuffisante, relativement aux moyens que le génie sismique pouvait mettre en œuvre à l'époque du séisme.

La conception des ouvrages sujets à des efforts dynamiques en général résultant des mouvements de fondations, nécessite la considération des caractéristiques du mouvement fort, et des propriétés dynamiques de la structure. Les mouvements forts causés par un séisme sont aléatoires, et l'amélioration de la connaissance de leurs caractéristiques reste liée au nombre d'enregistrements et à l'histoire sismique du site considéré.

Cependant, les études statiques de nombreux enregistrements sismiques permettent d'établir des spectres de réponses "enveloppes" pour la conception parasismique des bâtiments courants, presque tous les règlements en vigueur considèrent une charge statique horizontale à la base "équivalente" à la charge dynamique maximale amplifiée durant le séisme, il n'en demeure pas moins que de bon nombre d'ouvrages nécessitent pour leur "bonne conception" une plus "précise" connaissance de leurs comportements.

Les tremblements de terre ont représentés depuis toujours un des plus graves désastres de l'humanité, elle se produisant tant bien dans des zones dont la sismicité n'est plus à prouver, mais aussi dans des zones considérées parfois comme géologiquement stables.

I.1) ORIGINE DES SEISMES :

En dehors des séismes naturels, existent aussi des séismes engendrés par les activités humaines : ce sont ceux engendrés par des explosions de toutes natures et principalement les explosions nucléaires. Assez analogues aux séismes naturels dans les manifestations, ils peuvent l'être aussi par la quantité d'énergie mise en jeu : Certains séismes artificiels ont dépassé la magnitude 6 qui est celle de bon nombre de séismes destructeurs.

Il est bien sur connu qu'une activité volcanique engendre une activité sismique à son proche voisinage.

I.2) MECANISME GENERAL DE PRODUCTION DES SEISMES :

Les séismes tectoniques apparaissent comme des conséquences de toutes les déformations qui affectent les régions supérieures du globe terrestre et au cours des quels des quantités

considérables d'énergie s'accumulent dans les matériaux constitutifs, sous forme d'énergie de déformation.

Lorsqu'un point moins résistant ou plus sollicité que les autres, un équilibre limite vient à être dépassé, il se produit une rupture qui s'étend très rapidement de proche en proche aux régions voisines.

Dans l'hypothèse la plus couramment admise, ces ruptures d'équilibre interviennent le long des failles qui, par nature, constituent des points faibles et sont effectivement susceptibles de montrer des jeux importants tant longitudinaux que verticaux. Elles s'accompagnent de la brusque libération de l'énergie potentielle accumulée dans la déformation et donnent naissance à un ébranlement qui se propage au loin sous la forme d'onde sismique.

L'onde sismique, à son origine, est une onde de volume.

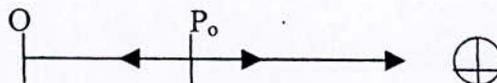
I.3) LES ONDES SISMIQUES :

I.3.1) Les ondes de volume :

La théorie montre que si l'on considère un milieu continu élastique, homogène isotrope s'étendant dans les trois dimensions. Une perturbation prenant naissance en une région donnée du milieu se propage en engendrant deux types d'ondes (et deux seulement).

a) Les ondes longitudinales

Ce sont des ondes de compression-dilatation dans lesquelles les particules se meuvent suivant la direction de propagation.



Dans le cas de ces ondes, tel^{que} ou les ondes sonores, la déformation consiste en changement de volume des éléments du milieu sans distorsion.

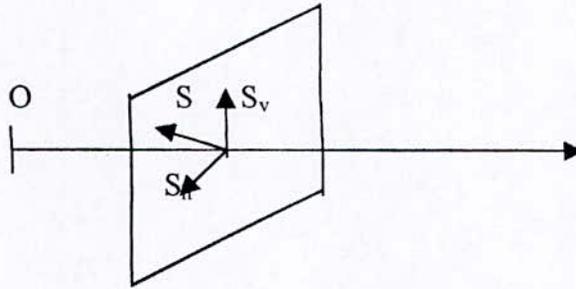
Ces ondes longitudinales sont aussi dites "ondes primaires" d'où la notation P. Leur vitesse de propagation est donnée par :

$$V_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho} \quad [1.1]$$

Ou λ et μ coefficient de lamé du milieu et ρ sa masse volumique

b) Les ondes transversales

Ce sont des ondes de distorsion dans lesquelles les particules se meuvent dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation.



Dans le cas de ces ondes, la déformation consiste en une distorsion à volume constant.

Ces ondes sont aussi dites "ondes secondaires", d'où la notation S. Leur vitesse de propagation est donnée par :

$$V_s = \sqrt{\mu / \rho} \quad [1.2]$$

I.3.2) les ondes longues ou de surface :

Ces ondes sont les dernières arrivées et peuvent être aussi bien de type longitudinal que transversal. Ces ondes se génèrent et circulent en surface, contrairement aux deux premiers types appelées aussi ondes de volumes.

En effet, les ondes de volume se propagent vers la surface du sol. rencontrent des hétérogénéités, des surfaces de discontinuités ou la surface libre. En heurtant ces surfaces, ces ondes sont partiellement réfléchies et réfractées et donnent naissance à des ondes de surface.

*les ondes R ou ondes de rayleigh :

ce sont des ondes pour lesquelles les points du sol décrivent des ellipses dans le plan vertical de propagation. Ce mouvement est semblable au mouvement de la houle et entraîne aussi bien des compressions (ou tractions) que des cisaillements dans le sol.

*les ondes Q ou ondes de love :

ce sont des ondes pour lesquelles, les points du sol se déplacent dans un plan tangent à la surface, perpendiculairement à la direction de propagation, elles engendrent des contraintes de cisaillement.

I.4) PARAMETRES DESCRIPTIFS DES SEISMES :

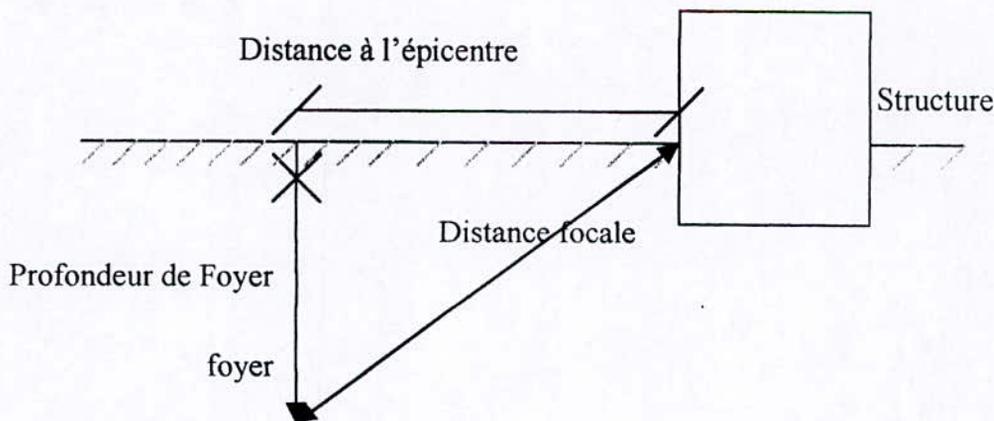
I.4.1) Epicentre microscopique :

Cette terminologie ne doit pas faire oublier que la libération de l'énergie sismique n'est pas un évènement ponctuel et instantané, mais au contraire un phénomène qui intéresse tout un volume du sol et dans lequel les ruptures d'équilibre ne sont pas synchrones. Il peut affecter des kilomètres ou même des centaines de kilomètres de taille.

On donne donc le nom d'épicentre microscopique (ou foyer) au point où a eu lieu la rupture initiale.

I.4.2) Epicentre macroscopique :

On donne le nom d'épicentre macroscopique (ou région épiscopentrale) au point et à la région où l'action sismique a été portée à son paroxysme.



I.4.3) Distance focale :

La détermination des foyers est basée sur la mesure des différences des temps de propagation des ondes P et S en différentes stations.

De façon plus précise si l'on désigne par l'intervalle de temps lu sur un sismogramme séparant les instants d'arrivées des ondes P et S de la distance focale (de l'épicentre à la station)

est donnée par :

$$d = \frac{\Delta t}{(1/V_s) - (1/V_p)} \quad [1.3]$$

I.4.4) Magnitude :

La magnitude est un paramètre d'origine instrumentale qui caractérise de façon intrinsèque l'importance des séismes considérés dans son ensemble.

On définit donc la magnitude comme le logarithme décimal de l'amplitude maximale A exprimée en microns, enregistrés sur un sismographe standard supposé placé à 100 km de l'épicentre.

La magnitude a été liée à l'énergie libérée par le séisme exprimé en Mégajoules, par la relation établie par RICHTER 1958.

$$E = 10^{1.5M-1.6} \quad [1.4]$$

I.4.5) Intensité:

A la différence de la magnitude qui caractérise la puissance d'ensemble du séisme, l'intensité est représentative de la violence avec laquelle une secousse est ressentie en un lieu donné. C'est donc une caractéristique attachée au point d'observation Maximale dans la région de l'épicentre, elle décroît régulièrement, sauf singularités, au fur et à mesure que l'on s'éloigne de ce point. Elle incorpore les effets des particularités géologiques ou géotechniques locales du site.

I.4.6) Loi d'atténuation :

Entre la magnitude de la source et l'intensité en un site donné il existe certaines relations empiriques, fonction de la distance à l'épicentre, soit un exemple :

$$i = 2.95 + 1.5M - 1.87 \ln(D + 15) \quad [1.5]$$

D : distance à l'épicentre

M : magnitude

I : intensité au niveau du site

I.4.7) enregistrement des mouvements du sol :

L'étude du mouvement vibratoire engendré par un séisme comporte deux volets :

- le premier concerne la recherche fondamentale touchant à la sismologie, dont le but est de rattacher la vibration à sa répartition spatiale (foyer, magnitude et propagation d'ondes dans la croûte terrestre).

Cette science fait usage du sismographe

- le deuxième volet . relève de l'étude de l'accélération des mouvements forts, qui constitue l'une des bases de l'approche relative à l'évaluation du risque sismique et également un paramètre primordial du génie sismique dans le cadre de l'évaluation de la sécurité des constructions (bâtiments, barrages, centrales nucléaires.....) , ce volet nécessite le recours à un appareil sensible aux mouvements forts, l'accélérographe.

a) le sismographe :

l'enregistrement des différentes ondes sismiques, est assuré par un instrument très sensible aux mouvements du sol appelé sismomètre. Les sismogrammes (graphiques obtenus par enregistrement), permettent la détermination de la magnitude, de l'épicentre, de la profondeur focale et du mécanisme au foyer.

b) l'accélérographe :

dans les études en génie parasismique, il est capital de bien connaître les caractéristiques générales des mouvements auxquels pourront être soumises les constructions. Ceci, nécessite l'enregistrement des mouvements sismiques à proximité des épicentres associés aux séismes importants.

Pour ce faire, des instruments pouvant mesurer les mouvements forts du sol ont été ¹¹ cocus et développés connus sous le nom d'accélérographes. ces derniers permettent l'enregistrement des séismes violents très proches.

Contrairement au sismomètre, qui est en permanence à l'écoute de tous les mouvements de la terre, l'accéléromètre ne se déclenche que si le mouvement du sol dépasse le seuil de réglage (1% de la gravité par exemple). La version la plus répandue est connue sous le nom d'accélérographe « strong motion » (mouvement fort).

Les appareils sont tous équipés de deux accéléromètres horizontaux (nord-sud et est-ouest) et un accéléromètre vertical.

Les enregistrements obtenus ou accélérogrammes sont utilisés afin de déterminer (le pic maximum d'accélération, la durée du mouvement pour un seuil de déclenchement donné, et le contenu fréquentiel du mouvement ou spectre de réponse).

chapitre : II

analyse déterministe

Introduction :

De nombreux problèmes d'analyses des structures, peuvent être traités par des méthodes d'analyse statique. Cependant il existe de nombreux cas, où l'on ne peut négliger les forces d'inerties et d'amortissements résultant de la variation des forces appliquées.

En générale, si la fréquence des forces appliquées est inférieure à $1/3$ de la fréquence propre fondamentale de la structure, le problème est quasi-statique. Mais dans le cas contraire, les termes inertiels et d'amortissements deviennent importants, on est alors amené à faire une étude dynamique du système.

Ce type d'étude a pour but de déterminer les contraintes et les déplacements d'une structure soumise à un chargement dynamique arbitraire.

Les problèmes dynamiques peuvent être divisés en deux catégories :

- Problèmes de propagation d'ondes.
- Problèmes de dynamiques des structures.

II.1) CARACTERISTIQUES ESSENTIELLES D'UN PHENOMENE DYNAMIQUE :

Un phénomène dynamique est caractérisé par son évolution dans le temps, c'est-à-dire qu'il existe une succession de solutions du problème à tout instants. De plus il existe des forces d'inerties qui est une caractéristique plus importante dans un problème de dynamique. Ces forces d'inerties résultant de l'accélération d'une structure répondant à un chargement dynamique.

II.2) FORMULATION DES EQUATIONS DE MOUVEMENT :

Dans l'étude dynamique, l'objectif primordial de l'analyse est d'évaluer les déplacements en fonction du temps. Il devient alors possible de déterminer ensuite les déformations et les contraintes en tout point de la structure. On distingue essentiellement trois approches possibles pour la formulation des équations de mouvement d'un système vibratoire.

II.3) SYSTEME A UN DEGRE DE LIBERTE :**II.3.1) Principe de D'ALEMBERT :**

Le modèle le plus simple du système à un degré de liberté est représenté sur la figure (2.1)

a): composantes élémentaires

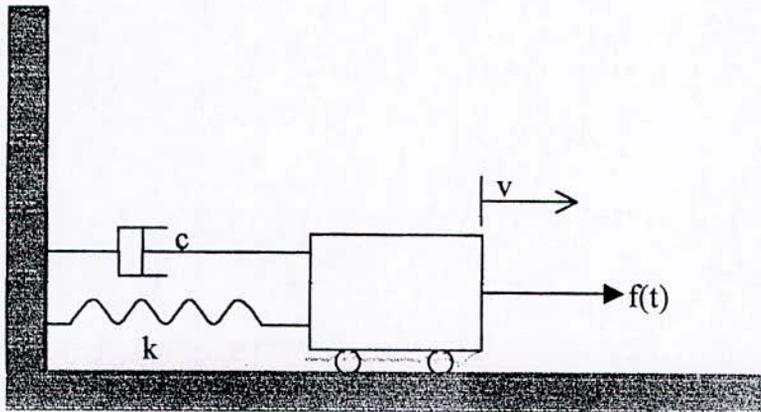
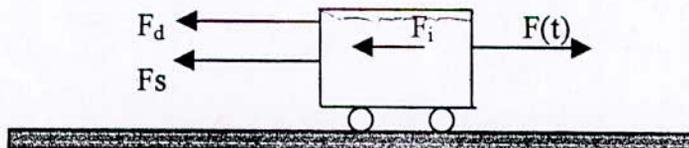


figure (2.1) : système idéalisé à un degré de liberté

b) : force participant à l'équilibre



L'ensemble des forces agissantes représentent les vecteurs des forces extérieures incluent, dans ce cas, les forces élastiques F_s , les forces d'amortissements visqueux F_d , ainsi que les forces extérieures $F(t)$. cette somme de force peut être interprétée comme une force d'inertie F_i .

Les équations du mouvement dynamique quelconque sont les expressions de la deuxième loi de Newton, selon laquelle le taux d'accroissement de la quantité de mouvement d'une masse quelconque " m " est égale a la force qui lui est appliquée.

$$f(i) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dv}{dt} \right) \quad [3.1]$$

où $f(i)$: vecteur force appliquée ;

$v(t)$: vecteur position de la masse m ;

Si l'on considère m constante au cours du temps, alors l'équation [3.1] devient :

$$f(i) = m \frac{d^2 v}{dt^2} = m \ddot{v}(t) \quad [3.2]$$

$m \ddot{v}(t)$: est appelée force d'inertie qui s'oppose à l'accélération de la masse m

cette loi est appelée principe D'ALEMBERT

L'équation d'équilibre de la masse m est donnée par :

$$f_d + f_s + f_i = f(t) \quad [3.3]$$

Ou f_i : force d'inertie : $f_i = m\ddot{v}$

f_s : force de rappel du ressort élastique : $f_s = kv$

f_d : force de viscosité : $f_d = c\dot{v}$

On reporte ces équations dans l'équation [3.3], on obtient :

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = f(t) \quad [3.4]$$

où :

m :masse

k : rigidité

c :coefficient d'amortissement

$f(t)$:chargement extérieur

II.3.2) Principe des déplacements virtuels :

Si un système qui est en équilibre sous l'action d'un ensemble de forces est soumise à un déplacement virtuel, alors le travail total effectué par les forces est nuls.

Les équations de la réponse d'un système dynamique peuvent donc s'établir comme suit :

On relève toutes les forces agissants sur les masses du système, y compris les forces d'inerties définies par D'ALEMBERT, puis les équations du mouvement sont obtenues en considérant des déplacements virtuels correspondants à chaque degré de liberté, et en annulant le travail effectué. Si on communique à la masse m un déplacement virtuel, alors le travail effectué par le système peut s'écrire :

$$- f_i \delta v - f_d \delta v - f_s \delta v + f(t) \delta v = 0 \quad [3.5]$$

En remplaçant les forces agissants par leurs valeurs, on obtient :

$$[-m\ddot{v} - c\dot{v} - kv + f(t)] \delta v = 0 \quad [3.6]$$

Comme δv est non nul, on peut facilement mettre cette équation sous la forme de l'équation [3.4]

II.3.3) Principe de Hamilton :

Le principe de Hamilton peut s'expliquer comme étant la somme nulle de la variation d'énergie cinétique et potentielle et de la variation du travail effectué par les forces non conservatrices.

Ce principe s'exprime comme suit :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad [3.4]$$

Où T : est l'énergie totale du système

U : est l'énergie potentielle du système

W_{nc} : est le travail des forces non conservatrices

δ : variation subit durant l'intervalle du temps considéré.

L'énergie cinétique du système est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{v}^2 \quad [3.3a]$$

L'énergie potentielle, qui représente simplement l'énergie de déformation du ressort, est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} k v^2 \quad [3.3b]$$

Les forces non conservatrices sont la force d'amortissement f_d et la charge appliquée $f(t)$, leur travail s'expriment par :

$$\delta W_{nc} = f(t) \delta v - c \dot{v} \delta v \quad [3.3c]$$

En reportant les équations [3.3] dans l'équation [3.4], on obtient :

$$\int_{t_1}^{t_2} [m \ddot{v} \delta v - k v \delta v - c \dot{v} \delta v + f(t) \delta v] dt = 0 \quad [3.9]$$

or :

$$\int_{t_1}^{t_2} [m \ddot{v} \delta v = m v d\dot{v}]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m v \delta \ddot{v} dt$$

Mais comme l'une des hypothèses du principe de HAMILTON est que la variation δv s'annule aux bornes d'intégration t_1 et t_2 , le premier résultat peut s'écrire :

$$\int_{t_1}^{t_2} [-m \ddot{v} - c \dot{v} - k v + f(t)] \delta v dt = 0 \quad [3.10]$$

Cette équation n'est valable que si le terme entre crochets s'annule d'où on obtient la forme de l'équation [3.4]

II.3.4) Oscillateurs simples :

II.3.4.1) Oscillations libres :

un oscillateur n'est pas soumis à une force excitatrice $F(t)$, l'équation du mouvement [3.4] s'écrit :

$$\ddot{v} + \frac{c}{m}\dot{v} + \omega^2 v = 0 \quad [3.11]$$

la solution prend une forme différente selon que l'oscillateur est amorti ou non.

a) Oscillateur non amorti :

dans ce cas $c=0$, l'équation devient:

$$\ddot{v} + \omega^2 v = 0 \quad [3.12]$$

qui a pour solution : $v = A \cos \omega.t + B \sin \omega.t$

A et B sont des constantes qui dépendent des conditions initiales $t=0$. si l'on se donne par exemple le déplacement $v(0)$ et la vitesse $\dot{v}(0)$ au temps $t=0$, on obtient :

$$v(t) = v(0) \cos \omega.t + \frac{\dot{v}(0)}{\omega} \sin \omega.t$$

Le mouvement est donc sinusoïdal de période : $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

ω : pulsation

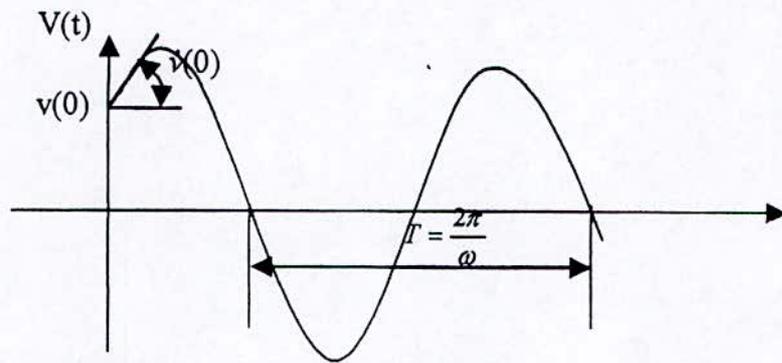


figure 2.2 : réponse en oscillation libre sans amortissement

b- Oscillateur amorti :

$$\ddot{v} + \frac{c}{m} \dot{v} + \omega^2 v = 0 \quad [3.13]$$

on cherche une solution de la forme :

$$v = A e^{st}$$

d'où : $\dot{v} = sA e^{st}$ et $\ddot{v} = s^2 A e^{st}$

l'équation [3.13] s'écrit alors :

$$A e^{st} (s^2 + \frac{c}{m} s + \omega^2) = 0$$

On doit donc résoudre :

$$(s^2 + \frac{c}{m} s + \omega^2) = 0$$

Cette équation a pour racine :

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \quad [3.14]$$

Trois cas sont possible selon la valeur du terme sous le radical :

b.1 : Amortissement critique : $C = 2m \omega$

Le terme sous le radical est nul pour $c/2m = \omega$

Soit : $C = 2m \omega$

La valeur de s donnée par [3.14] est donc :

$$s = -\frac{2m\omega}{2m} = -\omega$$

D'où une solution :

$$v = A e^{-\alpha t}$$

Pour résoudre entièrement le problème, il faut trouver une deuxième solution. on essaie l'expression :

$$v = B t e^{-\alpha t}$$

D'où

$$\dot{v} = B e^{-\alpha t} - B \alpha t e^{-\alpha t}$$

$$\ddot{v} = B \omega^2 t e^{-\alpha t} - 2B \omega e^{-\alpha t}$$

En remplaçant dans [3.4] et compte tenu de la valeur de c donnée :

$$B e^{-\alpha t} (\omega^2 t - 2\omega + 2\omega(1 - \omega t) + \omega^2 t) = 0$$

On vérifie bien que $v = B t e^{-\alpha t}$ est une solution.

D'où la solution générale :

$$v = e^{-\alpha t} (A + B t)$$

En fonction du déplacement $v(0)$ et de la vitesse $\dot{v}(0)$ à $t=0$, on obtient :

$$v = [v(0)(1 + \omega t) + \dot{v}(0)t] e^{-\alpha t}$$

La solution est représentée sur la figure.3 aucune oscillation ne se produit.

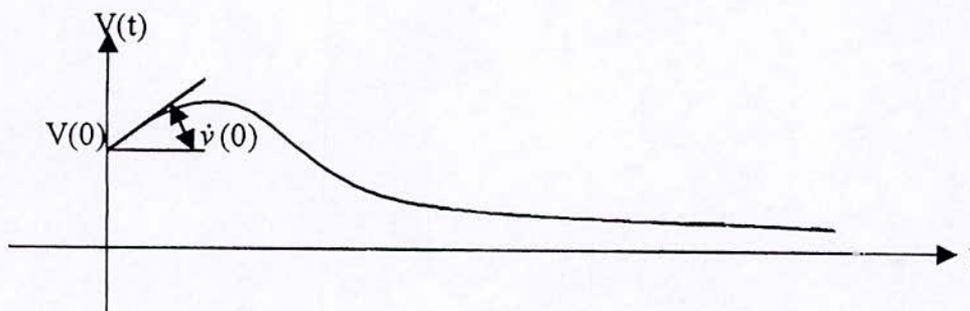


figure :(2.3) oscillateurs libres amorties

b.2- oscillateur sous amortis : $C < 2m\omega$

C'est le cas des structures, celles ci ayant toujours un amortissement inférieur à l'amortissement critique.

On pose :

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} < 1$$

où: ξ : rapport d'amortissement

La solution [3.14] s'écrit :

$$S = -\omega\xi \pm \sqrt{\omega^2 + \xi^2 - \omega^2}$$

Soit : $S = -\xi\omega \pm i\omega_D$

Avec :

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$$

Dans les cas usuels, il est inférieur à 10%, donc diffère de ω de moins de 0.5% ce qui est négligeable.

La solution est donc :

$$v = A e^{-\xi\omega t + i\omega_D t} + B e^{-\xi\omega t - i\omega_D t}$$

$$v = e^{-\xi\omega t} (A e^{i\omega_D t} + B e^{-i\omega_D t})$$

si on introduit les conditions initiales $v(0)$ et $\dot{v}(0)$ on obtient :

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\dot{v}(0) + v(0)\xi\omega}{\omega_D} \sin\omega_D t + v(0)\cos\omega_D t \right]$$

le mouvement est représenté sur la fig (2.4)

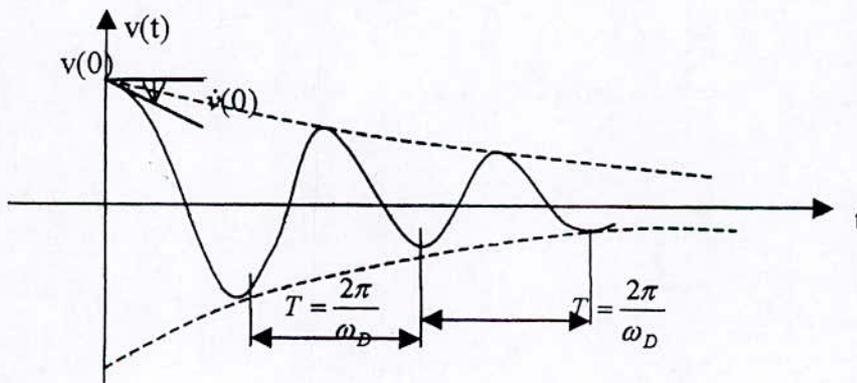


figure : (2.4) : Oscillateur libre sous amorties.

b.3- oscillateur sur amortis : $C > 2m\omega$

La solution est de la forme :

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} (Ae^{\omega_D t} + B e^{-\omega_D t})$$

avec :

$$\omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \text{ Elle ne nous intéresse pas en pratique.}$$

II.3.5) étude de la réponse dans domaine temporelle : (chargement harmonique)**A) système non amorti :*****solution homogène :**

supposons que le système est soumis à un chargement harmonique $p(t) = p_0 \sin \omega t$
l'équation différentielle du mouvement devient :

$$m\ddot{v}(t) + kv(t) = p_0 \sin \omega t \quad [3.15]$$

la solution homogène de cette équation donne la réponse en oscillation libre :

$$v_h(t) = B \cos \omega t + A \sin \omega t$$

***solution particulière :**

La composante de la réponse dépend directement de la fonction de chargement.

$$v_p(t) = G \sin \omega t \quad [3.16]$$

on substituant l'équation [3.16] dans [3.15] on détermine G.

$$G = \frac{p_0}{k} \cdot \frac{1}{(1 - \beta^2)}$$

***solution générale :**

la solution générale est donnée par la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{p_0}{k} \cdot \frac{1}{(1 - \beta^2)} \sin \omega t.$$

pour $v(0) = \dot{v}(0) = 0$

On a :
$$A = -\frac{p_0 \beta}{k} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)}$$

D'où :
$$v(t) = \frac{p_0}{k} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)} (\sin \omega t - \beta \cos \omega t)$$

ou : $\frac{p_0}{k} = v_{st}$: déplacement statique.

$\frac{1}{(1-\beta^2)}$: facteur d'amplification, et $\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$

$\sin \omega t$: réponse en oscillation permanente.

$\beta \cos \omega t$: Effet d'oscillations libres qui dépend des conditions initiales (réponse transitoire).

B) système amorti :

l'équation différentielle du mouvement devient :

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = p_0 \sin \omega t$$

on obtient :

$$\ddot{v}(t) + 2\xi\omega_n \dot{v}(t) + \omega_n^2 v(t) = \frac{p_0}{m} \sin \omega t$$

la solution homogène est :

$$v_h(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t)$$

la solution particulière est de la forme :

$$v_p(t) = G_1 \sin \omega t + G_2 \cos \omega t$$

on reportant dans l'équation du mouvement, on obtient :

$$G_1 = \frac{p_0}{k} \cdot \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

$$G_2 = \frac{p_0}{k} \cdot \frac{2\xi\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

d'où :

$$v(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t) + \frac{p_0}{k} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1-\beta^2) \sin \omega t - 2\xi\beta \cos \omega t]$$

Le premier terme représente la réponse transitoire.

Le second terme représente la composante permanente de la réponse.

Le module ρ de résolution représente l'amplitude de la réponse permanente.

$$\rho = \frac{p_0}{k} \left[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

le déphasage est donné par :

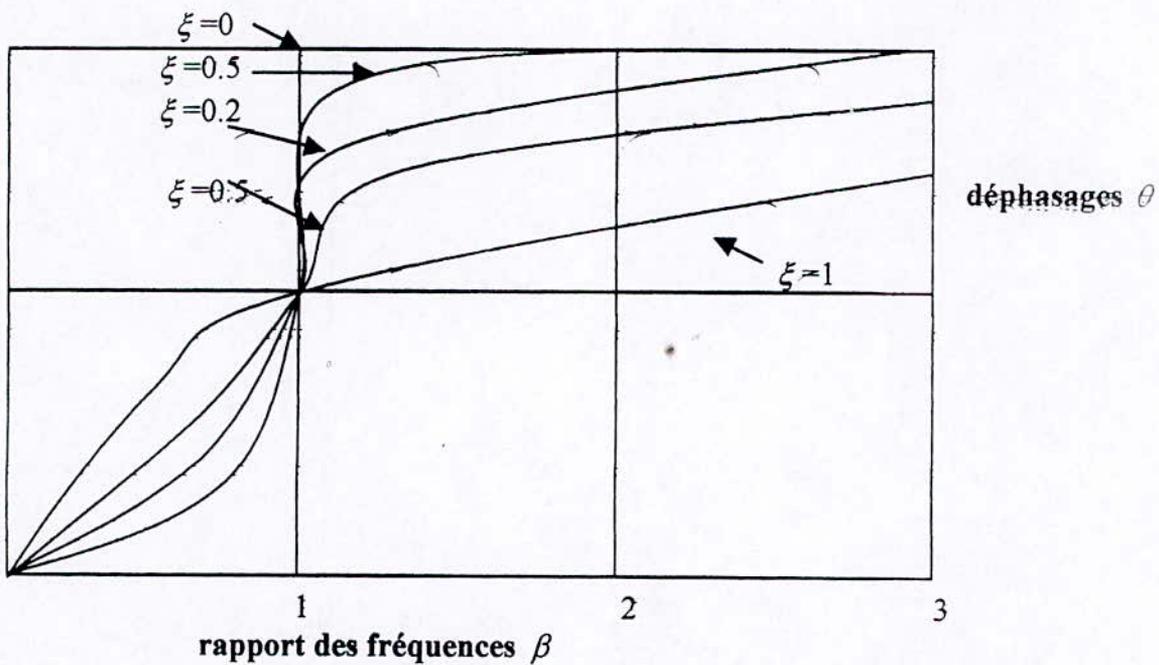
$$\theta = \tan^{-1} \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}$$

d'où :

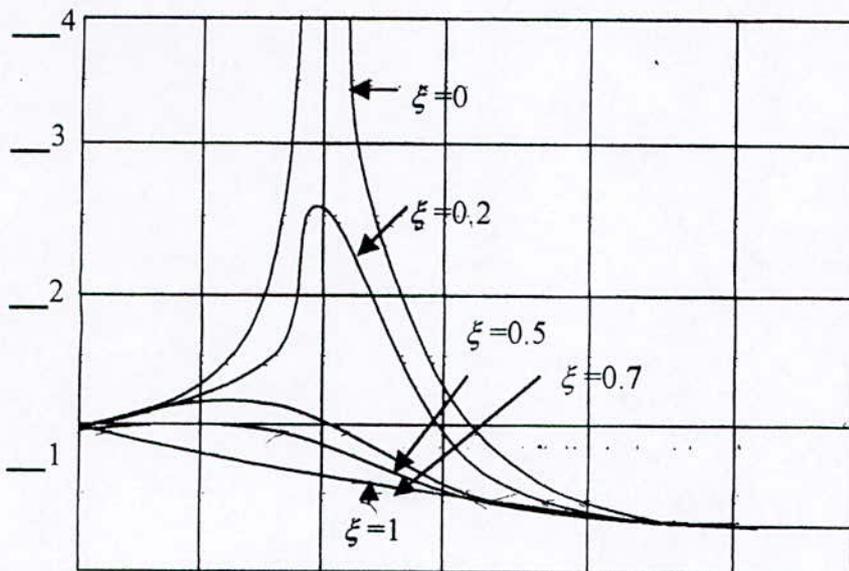
$$v(t) = \rho \sin(\omega t - \theta)$$

le facteur d'amplification dynamique D est donnée par le rapport :

$$D = \frac{\rho}{\frac{p_0}{k}} = \left[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$



a) variation du déphasage avec l'amortissement et la fréquence.



b) variation du facteur d'amplification dynamique en fonction de l'amortissement et de la fréquence.

a) Déplacement d'appui d'un oscillateur simple :

On considère une masse m liée à une console verticale encadrée en un point A (figure :2.5), ce qui constitue l'équivalent d'un oscillateur simple.

Le point A est soumis à un déplacement horizontal $V_g(t) = \overline{OA}$

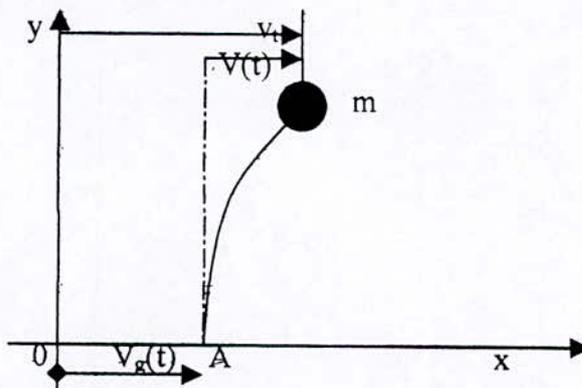


figure :(2.5) :déplacement d'appui de l'oscillateur.

les déplacements de la masse m sont mesurés, soit dans un repère relatif lié au point A (déplacement $V(t)$) soit dans un repère absolu (déplacement $V_i(t)$)

le déplacement absolu de la masse m a pour expression :

$$V_i(t) = V_g(t) + v(t)$$

On en déduit l'accélération absolue :

$$\ddot{V}_i = \ddot{V}_g + \ddot{v}$$

les forces appliquées sur la masse m sont :

- une force de rappel proportionnelle à la déformation relative $v(t)$

$$F_s = -k v$$

- une force d'amortissement supposée proportionnelle à la vitesse relative.

$$F_d = -c \dot{v}$$

L'équation d'équilibre :

$$F_d + F_s = m \ddot{v}$$

S'écrit :

$$m \ddot{V}_i + c \dot{v} + k v = 0$$

soit :

$$m \ddot{V}_i + c \dot{v} + k v = F(t) \quad \text{et} \quad F(t) = -m \ddot{V}_g(t) \quad [3.17]$$

On note $V_g(t)$ le déplacement absolu du sol

$\ddot{V}_g(t)$ L'accélération absolue du sol qui est donné par l'accélérogramme.

$V(t)$ le déplacement relatif de la masse m dans la représentative lié à l'oscillateur

C : la constante d'amortissement.

On voit qu'on se ramène à l'étude d'un oscillateur simple dans le repère relatif lié à l'oscillateur, en considère la force fictive $F(t) = -m \ddot{V}_g(t)$ proportionnelle à l'accélération absolue du point d'appui A (accélération du sol).

On peut ainsi calculer la déformation relative $v(t)$ qui seul nous intéresse pour l'évaluation des efforts dans la console (et plus généralement dans les structures soumises au séismes).

II.3.6) Réponse d'un oscillateur simple à une excitation sismique :

On considère une masse m liée à un poteau de rigidité k encastré au niveau du sol. Le séisme est défini par son Accélérogramme (**fig2.5**) : les mouvements du sol sont supposés horizontaux.

D'après [3.16], l'équation du mouvement s'écrit :

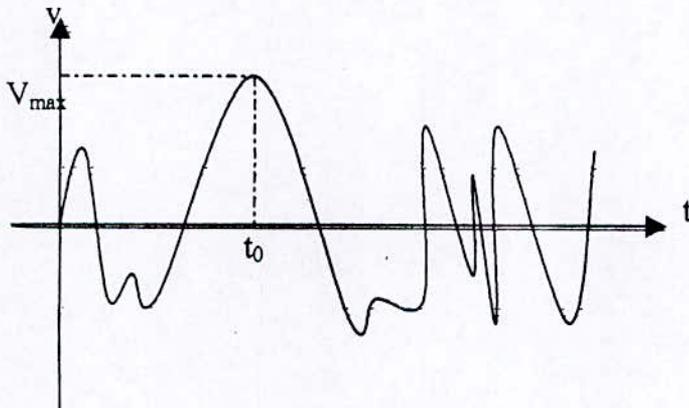
$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = -m\ddot{v}_g(t) = F(t)$$

la solution est donnée par l'intégrale de DUHAMEL :

$$v(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau$$

$$\text{avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \dots \quad \xi = \frac{c}{2m\omega} \quad \dots \quad \omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$$

La fonction $\ddot{v}_g(\tau)$ étant complexe, le calcul de la valeur de v pour un temps t donné sera effectué à l'aide d'une intégration par partie. Amplitude du mouvement est variable en fonction du temps. On note V_{\max} le déplacement maximum qui se produit à un temps t_0 .

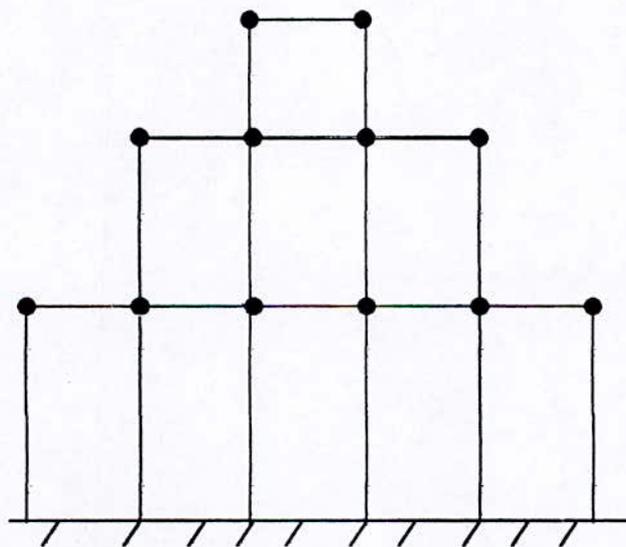


II.4) SYSTEME A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE :

Introduction :

Bien que la plupart des systèmes mécaniques réels soient de nature continue, avec des propriétés mécaniques réparties (élastique, massique et dissipatives); Il est toujours possible d'opérer une discrétisation du système afin de représenter son état de déformation par un nombre fini de degré de liberté.

Les procédures utilisées à cette fin peuvent être, soit une méthode numérique générale telle que les éléments finis, soit une approche simplifiée à base d'hypothèses réductrices sur le comportement du système. L'étude des systèmes discrets à nombres finis de degré de liberté couvre donc un domaine d'application particulièrement vaste.



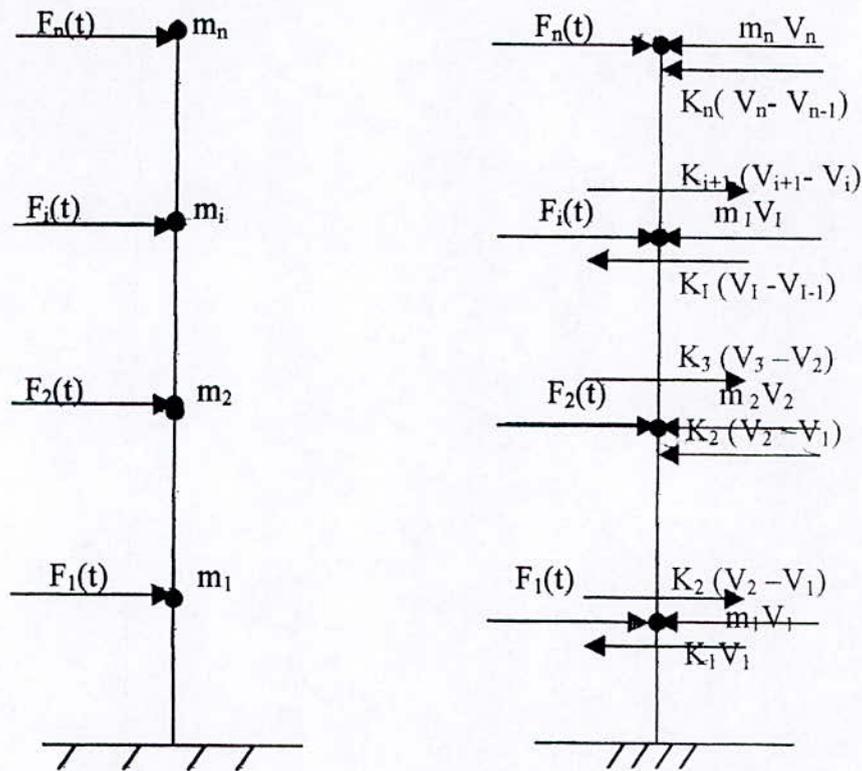
Portique plan



Console verticale

II.4.1) Matrice de rigidité :

On considère une structure à P nœuds comportant au total n degré de liberté.



On appelle :

- F_j : la force extérieure ou le moment appliqué à la structure dans le nœud du degré de liberté j .
- V_j : le déplacement selon le degré de liberté j .

Il existe une relation linéaire entre les forces et les déplacements :

$$F_s = K.V$$

L'équilibre de chaque masse :

$$M_1 \ddot{V}_1 + K_1 V_1 - K_2 (V_2 - V_1) = F(t)$$

.....

$$M_n \ddot{V}_n + K_n (V_n - V_{n-1}) = F_n(t)$$

C_j : coefficient d'amortissement relativement au neud j .

Généralement, on présente la matrice d'amortissement par :

$$C = a_0 M + a_1 K$$

M et K sont des matrices de masse et de rigidité.

Rayleigh a montré qu'une matrice d'amortissement peut s'écrire sous la forme :

$$C = a_0 M + a_1 K$$

Dans cette matrice a_0 et a_1 sont des coefficients arbitraires qui satisferont la condition d'orthogonalité, en générale, a_0 et a_1 peuvent être reliés aux facteurs d'amortissement de n'importe quel mode j par

$$\xi_j = a_0 / 2 \omega_j + a_1 \omega_j / 2$$

ξ_j : facteur d'amortissement du mode j .

ω_j : fréquence angulaire propre au mode j , elle peut être déterminée par l'analyse d'oscillateur libre. Si on ne tient que des deux premiers modes :

$$a_0 = 2 \omega_1 \omega_2 (\omega_2 \omega_1 - \omega_1 \omega_2) / (\omega_1^2 - \omega_2^2).$$

$$a_1 = 2 (\omega_1 \omega_1 - \omega_2 \omega_2) / (\omega_1^2 - \omega_2^2).$$

II.4.4) Equation d'équilibre du mouvement:

Quelle que soit la méthode employée pour discrétiser un système mécanique complexe, linéaire et invariant dans le temps, les équations d'équilibres dynamiques correspondant à un bilan des efforts interne et externe, qui s'exercent sur le système dont le comportement est décrit par le vecteur $V(t)$ des n degrés de liberté :

Efforts d'inerties: $-M \ddot{V}(t)$

Efforts dissipatifs : $-C \dot{V}(t)$

Efforts élastiques : $-KV(t)$

Efforts extérieurs : $-F(t)$

En effet, il est nécessaire d'introduire trois matrices qui servent à discrétiser les différents types d'efforts, M matrice de masse, C matrice d'amortissement linéaire visqueux (difficile à

établir en réalité) et K matrice de rigidité. Si la force excitatrice $F(t)$ est une action sismique donnée par un Accélérogramme \ddot{V}_g , l'équilibre dynamique s'écrit alors simplement sous forme matricielle :

$$M\ddot{V}(t) + C\dot{V}(t) + KV(t) = F(t) = -[M][b]\ddot{V}_g$$

Avec les conditions initiales $V(0)$ et $\dot{V}(0)$. $[b]$ vecteur d'influence du chargement sismique : ses composantes valent 1 pour les ddl de translation orientés dans la direction de l'excitation et 0 pour les ddl de rotation ou translations orientées normalement à la direction de l'excitation.

II.4.5) Méthodes de résolution des équations de mouvement :

méthodes de superpositions des modes :

- Détermination des fréquences propres de vibrations :

En l'absence d'effets dissipatifs, et d'efforts extérieurs, le comportement dynamique du système est régi par l'équation :

$$M\ddot{V} + kV = 0$$

Le mouvement s'exprime sous la forme :

$$V_n(t) = v_n \sin(\omega t + \theta)$$

Où v_n : représente les modes de déformations possibles du système.

θ : un angle de déphasage.

$$\ddot{V}_n = -\omega^2 v_n \sin(\omega t + \theta) = -\omega^2 V_n$$

Nous reportons ces deux expressions dans la première équation nous obtenons :

$[K - \omega^2 M]V_n = 0$. Comme V_n n'est pas nul, la solution est donnée par :

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{c} k - \omega^2 M \end{array} \right| = 0$$

les solutions de ce déterminant sont les carrés des fréquences des N modes de vibration possible:

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$$

Soit $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$

Le mode correspondant à la fréquence la plus basse est appelé le premier mode. le second mode correspondent à la fréquence suivante etc. :

les vecteurs propres seront obtenues en remplaçant les pulsations propres ω_i dans le système. on obtient :

$$([k] - \omega_i^2 [M]) \{\phi\}_i = 0$$

Chacune des N modes vibratoires peut être déterminé de la même manière. C .a .d :

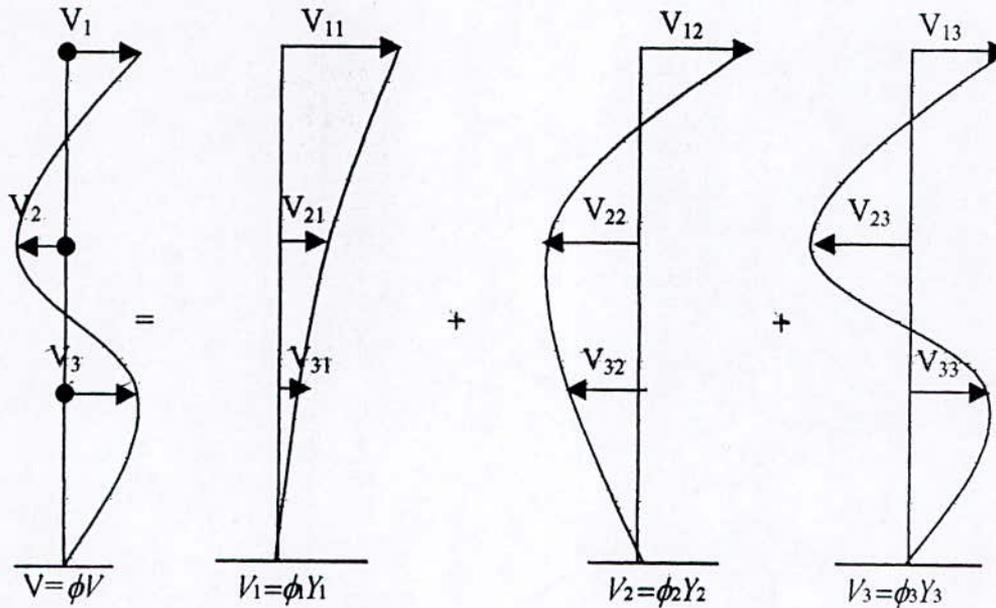
$$\omega = \omega_1 \quad \phi_1^T = [\phi_{11}, \phi_{21}, \phi_{31}, \dots, \phi_{n1}]$$

la matrice modale représentant les N modes vibratoires :

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{pmatrix}$$

II.4.6) Etude dans le domaine temporels :

A) coordonnées principales (normales) :



Considérons une poutre encadrée. On représente sur cette poutre un vecteur de déplacement quelconque.

En superposant les amplitudes convenablement déterminées des n modes de vibrations, pour chaque composante modale \hat{V}_n les déplacements sont données par le vecteur modale ϕ_n multiplié par l'amplitude modale Y_n :

$$\hat{V}_n = \phi_n Y_n$$

Les déplacements sont la somme des composantes modales :

$$V = \phi_1 Y_1 + \phi_2 Y_2 + \dots + \phi_n Y_n$$

En notation matricielle :

$$V = \phi Y$$

Les amplitudes modales, ou coordonnées généralisées, sont appelées : Coordonnées principales (ou normales) de la structure.

Elles s'expriment comme suit :

$$Y_n = \frac{\phi_n^T [M] V}{\phi_n^T [M] \phi_n}$$

B) Equations découplées du mouvement non amorti :

Equation du mouvement deviennent :

$$m\ddot{V} + kV = -mb\ddot{V}_g(t)$$

où : $V = \phi Y$

on obtient :

$$m\phi\ddot{Y} + k\phi Y = -mb\ddot{V}_g(t)$$

On multiplie les deux termes par ϕ^T il en résulte que :

$$\phi^T m\phi\ddot{Y} + \phi^T k\phi Y = -\phi^T bm\ddot{V}_g(t)$$

et en remarquant que :

$$\phi_n^T m\phi_m = \phi_n^T k\phi_m = 0 \quad \text{si } n \neq m$$

Il en résulte que :

$$\phi_n^T m\phi_n \ddot{Y}_n + \phi_n^T k\phi_n Y_n = -\phi_n^T mb\ddot{V}_g(t)$$

On définit :

$$M_n = \phi_n^T m\phi_n$$

$$K_n = \phi_n^T k\phi_n = \omega_n^2 M_n$$

Appelées respectivement coordonnées principales de masse généralisée, et de rigidité généralisée pour le n ième mode.

L'équation prend la forme de :

$$M_n \ddot{Y}_n + k_n Y_n = -mb\ddot{V}_g(t)$$

qui est l'équation du mouvement découplé correspondant au N^{ieme} modes.

Conclusion :

L'emploi des coordonnées principales permet de transformer les équations du mouvement couplées par les termes non diagonaux des matrices de masse et de rigidité à un système de n équations indépendantes rapportées en coordonnées principales.

La réponse dynamique peut donc être obtenue en calculant séparément les réponses de chaque mode.

C) Equation découplée du mouvement amorti :

L'équation du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{V} + c\dot{V} + kV = -mb\ddot{V}_g(t)$$

les déplacements s'expriment dans la base des vecteurs propres par :

$$V = \sum_i \phi_i Y_i = \Phi Y$$

l'équation du mouvement devient :

$$\phi^T m \phi \ddot{Y} + \phi^T c \phi \dot{Y} + \phi^T k \phi Y = -\phi^T m b \ddot{V}_g(t)$$

mais cette résolution n'est possible que si l'amortissement se présente sous une forme particulière.

$$C_n = 2\xi_n \omega_n M_n$$

et remarquant que :

$$\phi_n^T m \phi_m = \phi_n^T k \phi_m = \phi_n^T C \phi_m = 0 \quad \text{si } n \neq m$$

On peut écrire cette équation comme :

$$Y_n + 2\xi_n \omega_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{-(\phi_n^T m b)}{M_n} \ddot{V}_g(t) = q_n \ddot{V}_g(t)$$

q_n = facteur de participation du mode n dans sa direction b du séisme.

On a supposé que la transformation en coordonnées principales permettait de découpler les forces d'amortissements de la même manière qu'elle découple les forces d'inerties et de

rappel élastique, il convient de déterminer la forme de la matrice à laquelle s'applique les conditions d'orthogonalités.

- La solution de l'équation du mouvement est donnée par l'intégrale de DUHAMEL :

$$Y_n(t) = -\frac{q_n}{\omega_D} \int_0^t \ddot{V}_g(\tau) \exp(-\xi_n \omega_n (t - \tau)) \sin \omega_{Dn} (t - \tau) d\tau$$

$$\text{où } \omega_D = \omega_n (1 - \xi_n^2)^{1/2}$$

Le vecteur de déplacement V est ensuite obtenu par la superposition de toutes les réponses modales :

$$\begin{aligned} V(t) &= \sum_{n=1}^n Y_n(t) \phi_n \\ &= \phi_1 Y_1(t) + \phi_2 Y_2(t) + \dots + \phi_n Y_n(t) \end{aligned}$$

remarque :

On remarquera que dans la plupart des cas, les contributions des différents modes sont plus importantes pour les fréquences basses, et tend à décroître pour les fréquences plus hautes. Il en résulte qu'il n'est généralement pas nécessaire d'inclure tous les modes de vibration à fréquences élevées dans la superposition.

II.4.7) Etude dans le Domaine fréquentiel :

L'étude précédente dans le domaine des temps est complètement générale et peut servir à déterminer la réponse de tous systèmes linéaires à un degré de liberté soumis à une excitation quelconque ; mais il est parfois plus commode d'effectuer l'étude dans le domaine des fréquences qui est analogue dans sa conception à l'étude en présence de charges périodiques.

Pour appliquer la technique des charges périodiques à des charges quelconques, il est plus nécessaire de généraliser l'application des séries de FOURIER. à la représentation de fonction non périodique. Il est commode d'utiliser la forme exponentielle des séries de FOURIER.

a) Forme exponentielle de la solution par série de FOURIER.

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j.n\omega_1 t} \quad [4.1]$$

où :

$$C_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} F(t) e^{-j.n\omega_1 t} dt \quad [4.2]$$

T_p : est appelée pseudo-périodique.

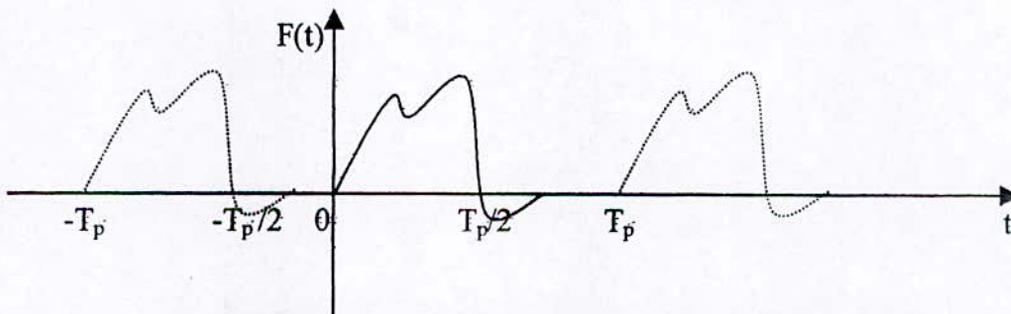
Si $T_p \rightarrow \infty$, alors les changements répétitifs fictifs peuvent être éliminés.

On a :

$$\frac{1}{T_p} = \frac{\omega_1}{2\pi} \equiv \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

$$n\omega_1 \equiv n\Delta\omega \equiv \omega_n$$

$$C_n \equiv \frac{1}{T_p} c(\omega_n) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} c(\omega_n)$$



chargement arbitraire à représenter en série de FOURIER

$$[4.1] \text{ devient } F(t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(\omega_n) e^{j.\omega_n.t} \quad [4.3]$$

$$[4.2] \text{ devient } c(\omega_n) = T_p c_n = \int_{t=-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} F(t) e^{-j.\omega_n.t} dt$$

si $T_p \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta\omega \rightarrow d\omega$, alors les fréquences discrète ω_n deviennent une fonction continue ω , ainsi à la limite l'expression de la série de FOURIER [4.3] devient l'intégrale de FOURIER.

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{j.\omega.t} d\omega \quad [4.4]$$

où la fonction amplitude harmonique est donnée par:

$$c(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \quad [4.5]$$

on suppose que le chargement a duré suffisamment longtemps pour que le transitoire soit amorti. Introduire la fonction excitation complexe unité:

$e^{i\omega t}$ dans l'équation découplé du mouvement.

$$M\ddot{y}_j(t) + 2\xi\dot{y}_j(t) + ky_j(t) = e^{i\omega t} \quad [4.6]$$

dont la solution en régime permanent est de la forme.

$$y_j(t) = H(\omega) e^{i\omega t} \quad [4.7]$$

si on reporte [4.7] dans [4.6] on obtient:

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 M + 2i\omega\xi + k} \text{ :appelé fonction de réponse en fréquence complexe.}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{k(-\beta^2 + 2i\beta\xi + 1)} \text{ :avec } \beta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

La réponse sera donc:

$$y_j(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} H(\omega) c(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

la réponse en fréquence complexe à une fréquence d'excitation $\omega_n = n\omega_1$ sera:

$$H(n\omega_1) = \frac{1}{k(-n^2\beta_1^2 + 2in\beta_1\xi + 1)} \quad \text{et } \beta_1 = \frac{\omega}{\omega_0}$$

par le principe de superposition, on obtient la réponse suivante:

$$y_j(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(n\omega_1) C_n e^{in\omega_1 t}$$

b) Transformation de FOURIER dite rapide:

on a:

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_1 t}$$

$$C_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} F(t) e^{-in\omega_1 t} dt$$

*transformation directe de FOURIER:

si on divise l'intervalle de la période T_p en intervalles élémentaires:

$$\Delta t = \frac{T_p}{N_p} \Rightarrow C_n = \frac{\Delta t}{T_p} \sum_{k=0}^{N_p-1} F(k) e^{-i.n.\omega_1.k.\Delta t}$$

$$t = \Delta t \quad k = 0, \dots, N_p-1$$

$$C_n = \frac{1}{N_p} \sum_{k=0}^{N_p-1} F(k) e^{-i\frac{2\pi}{N_p}nk}$$

on peut remarquer que:

$$C_{N_p-n} = C_{-n}$$

d'où on peut déterminer les C_n ($n=1,2,\dots$)

*transformation inverse de fourier:

connaissant les coefficients C_n du spectre en déduire la fonction $F(t)$:

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i.n.\omega_1.t}$$

Si on pose encore $\Delta t = \frac{T}{N_p}$, on $t = k\Delta t$

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2\pi}{N_p}n.k}$$

En suppose que l'on connaît les coefficients C_n entre $C_{-N_p/2}$ et $C_{N_p/2}$ et que les autres peuvent être négligés .on peut écrire:

$$F(k) = \sum_{n=-N_p/2}^{\infty} C_n e^{i\frac{2\pi}{N_p}nk}$$

et comme : $C_{N_p-n} = C_{-n}$, $F(k)$ devient:

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N_p-1} C_n e^{i\frac{2\pi}{N_p}nk}$$

Remarque :

Le calcul des sommes qui figure dans les deux équations de transformée discrète de fourrier est grandement simplifié par le fait que les fonctions exponentielles présentes sont harmoniques et s'étendent sur un intervalle N^2

le calcul de la somme sera plus efficace si le nombre N d'incrément est une puissance m de 2

chapitre III

processus aléatoires

INTRODUCTION AUX PROCESSUS ALEATOIRES :

III .1. DEFINITIONS :

Un grand nombre de phénomènes physiques, et notamment ceux d'origine naturelle, (séismes, vent, houle...), Prennent, au cours de leurs réalisations, des valeurs qu'il n'est pas possible de considérer comme déterministes. La connaissance de l'état $x(t)$ du phénomène a l'instant t (ainsi qu'éventuellement tout son historique jusqu'à l'instant t) ne permet pas de déterminer l'état $x(t+dt)$ a l'instant suivant $t+dt$: l'état $x(t+dt)$ ne peut être prédit que sous forme de probabilité.

Si tous les enregistrements différents les uns des autres, alors le processus est dit aléatoire. Par exemple, un coup de vent ou une excitation sismique est considérée comme un évènement aléatoire. Un évènement qui se produit obligatoirement est dit certain. Un évènement qui ne peut pas se réaliser est dit impossible.

Dans ce dernier cas, un échantillon particulier ne peut prétendre en général être représentatif du phénomène comme est réellement significative une description statistique de l'ensemble des enregistrements possibles.

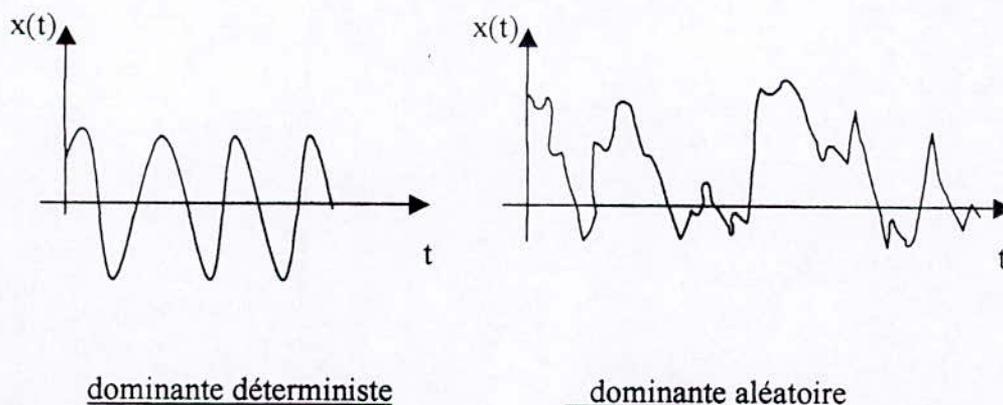


Fig1 :échantillon a caractère déterministe ou aléatoire

Un processus aléatoire $X(t)$ est un ensemble paramètre de variables aléatoires définies pour des

instants donnés en nombre M :

$$\forall t \in \{t_1, t_2, \dots, t_M\} \quad X(t) = \{x^{(k)}(t), k=1, 2, \dots, N\}$$

Un échantillon $X^{(k)}(t)$ du processus aléatoire $X(t)$ correspond à un enregistrement particulier, appartenant à l'ensemble paramétré des N enregistrements.

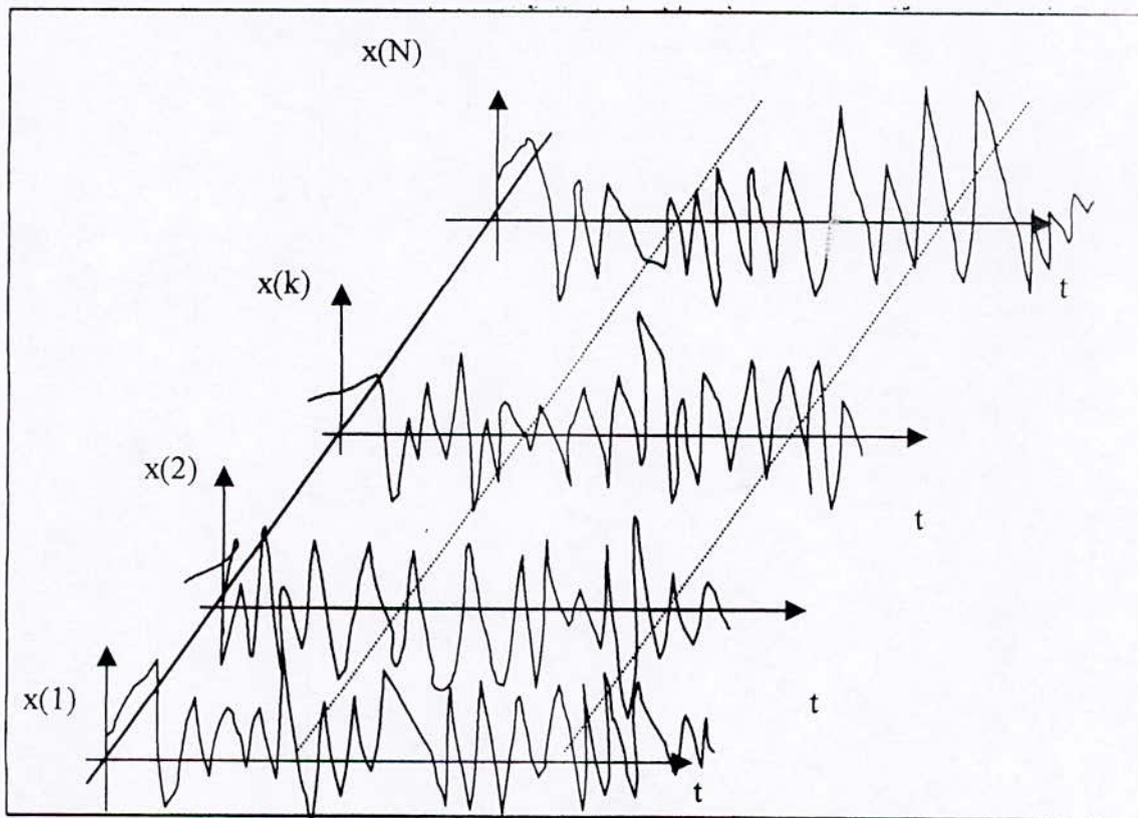


Figure 2: échantillons d'un processus aléatoire.

Tous les échantillons sont supposés avoir été obtenus pour un état identique des conditions d'essais. Cependant certains échantillons apparaissent plus probables que d'autre. En fait, une information de type probabiliste apparaît nécessaire pour décrire correctement le processus.

III. 2) FONCTION DE REPARTITION D'UNE VARIABLE ALEATOIRE:

Une variable aléatoire sera complètement déterminée du point de vue probabiliste lorsque sera connue la probabilité de chacune de ses valeurs réalisables une telle correspondance est appelée loi de répartition de la variable aléatoire discrète $P(x)$ qui correspond à la probabilité que la variable aléatoire X soit inférieure à la valeur x , où x désigne une certaine variable courante.

$$p(x) = \text{proba} [X \leq x]$$

la fonction de répartition doit obligatoirement satisfaire la condition

$$0 \leq p(x) \leq 1$$

III. 3) DENSITE DE PROBABILITE:

Considérons un processus aléatoire $X(t)$ constitué de N échantillons $x^{(k)}(t)$.

pour l'instant $t = t_1$ fixé, l'ensemble des valeurs prises au travers des échantillons constitue une variable aléatoire discrète X_1 indexé par le temps t_1 :

$$t = t_1 \Rightarrow X_1 = X(t_1) = \{x^{(k)}(t_1), k=1, 2, \dots, N\}$$

Il est alors possible de déterminer **la fonction de densité de probabilité** de cette variable aléatoire, en tant que mesure de la probabilité de présence dans un certain intervalle.

Pour obtenir une description probabiliste complète du processus. Il est en fait nécessaire d'établir l'ensemble infini des fonctions de densité de probabilité.

En effet . En définissant les variables aléatoires $X_1 = X(t_1)$, $X_2 = X(t_2)$, ..., . comme les réalisations du processus aux instants $t = t_1, t = t_2, \dots$, une connaissance précise du processus passe par la détermination de toutes les fonctions de densité de probabilité reliant les différentes variables aléatoires ainsi définies entre elles:

Ordre 1: $p_1(x_1)$

Ordre 2: $p_2(x_2)$

.....

Ordre n : $p_{12\dots n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (n tendant vers l'infini)

En pratique, il n'est nul besoin d'aller au-delà des densités de probabilité jointes du second ordre reliant deux à deux les variables aléatoires entre elles.

III. 3.1) Densité de probabilité du premier ordre:

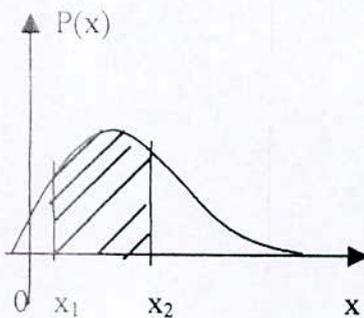
La fonction de densité de probabilité du premier ordre $p(x)$ est définie par la probabilité de présence dans l'intervalle x et $x+dx$:

$$\text{proba}[x \leq X \leq x+dx] = p(x)dx$$

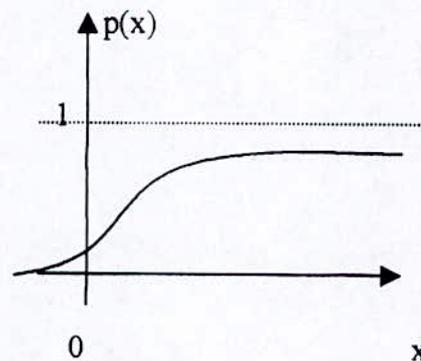
La fonction de densité de probabilité apparaît donc comme la dérivée de la fonction de répartition de probabilité.

$$f(x) = \frac{dP(x)}{dx}$$

Il résulte : $dP(x) = f(x) dx$



densité de probabilité



répartition de probabilité

Figure3: fonctions de probabilité

En intégrant l'expression précédente, il revient:

$$P(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy$$

La probabilité pour que la variable aléatoire se trouve dans l'intervalle (x_1, x_2) est égale à :

$$\text{proba}[x_1 \leq X \leq x_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx$$

$$\text{proba}[-\infty \leq X \leq +\infty] = 1$$

La fonction de densité de probabilité d'un signal temporel $x(t)$, défini sur l'intervalle $[0, T]$ peut être déterminée pour chaque valeur de x et pour un intervalle dx donné en sommant tous les intervalles de temps dt_i pendant lesquels la variable aléatoire $x(t)$ demeure comprise entre x et $x+dx$.

$$\text{Proba}[x \leq x(t) \leq x + dx] = \frac{1}{T} \sum_i dt_i = p(x).dx$$

$$p(x) = \frac{1}{T} \sum_i \frac{dt_i}{dx}$$

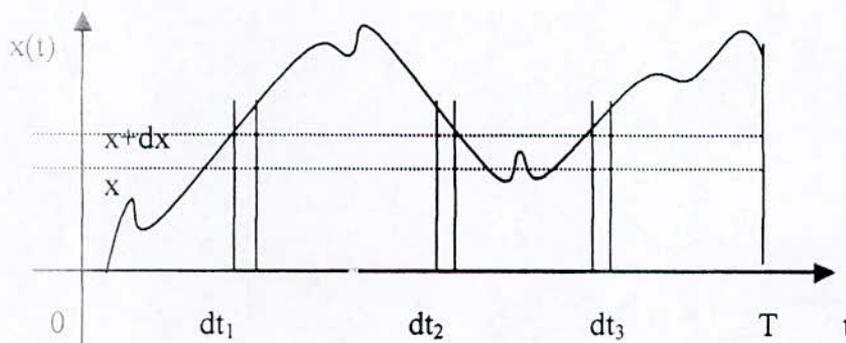


Figure 4: calcul de la densité de probabilité d'un signal temporel

III. 3.2) Densité de probabilité du second ordre:

la fonction de densité de probabilité jointe du second ordre pour les variables aléatoires $X(t_1)$ et $X(t_2)$ correspond à une fonction $P(x_1, x_2)$ telle que la probabilité pour que les variables $X(t_1)$ et $X(t_2)$ soient comprises respectivement entre x_1 et x_1+dx_1 , et x_2 et x_2+dx_2 soit donnée par :

$$\text{proba}[x_1 \leq X(t_1) \leq x_1 + dx_1 \quad \text{et} \quad x_2 \leq X(t_2) \leq x_2 + dx_2] = p(x_1, x_2).dx_1 dx_2$$

On définit la fonction de répartition du second ordre $P(x_1, x_2)$:

$$\text{Proba}[X(t_1) \leq x_1 \text{ et } X(t_2) \leq x_2] = P(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} P(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Avec la relation:
$$p(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 P(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

On peut obtenir la densité de probabilité de chacune des variables aléatoires grâce à la densité de probabilité conjointe et à l'aide des formules :

$$p(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} p(x_1, x_2) dx_2 \quad p(x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} p(x_1, x_2) dx_1$$

III. 4) l'espérance mathématique de la fonction aléatoire : (moyennes d'ensemble).

L'espérance mathématique du processus aléatoire caractérise le comportement moyen du processus en fonction du temps, pour toute fonction $g(x_1)$ de la variable aléatoire $X_1 = X(t_1)$, l'espérance mathématique se définit à l'aide de la fonction densité de probabilité $P(x_1)$ par l'expression :

$$E[g(x_1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) p(x) dx$$

L'espérance mathématique $E[.]$, Opérateur valeur moyenne, est en fait une **moyenne d'ensemble** définie à travers l'ensemble des échantillons $x^{(k)}(t_1)$ du processus, pour un instant t_1 fixé.

$$E[g(x_1)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g[x^{(k)}(t_1)]$$

* **Valeur moyenne :**

L'espérance mathématique de la variable aléatoire est égale à la valeur moyenne \bar{X} , elle caractérise le comportement moyen du processus en fonction du temps :

$$\bar{X} = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) \cdot dx$$

* **Carré moyen :**

L'espérance mathématique du carré de la fonction aléatoire caractérise en fonction du temps la dispersion des valeurs de la fonction autour de sa valeur moyenne.

$$\overline{X^2} = E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p(x) \cdot dx$$

* Variance et l'écart -type :

La variance σ_x^2 , est définie comme le carré moyen de la variable centrée $X(t) - \bar{X}$, elle est égale au carré de l'écart type σ_x :

$$\sigma_x^2 = E \left[(X - \bar{X})^2 \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{X})^2 \cdot p(x) \cdot dx \Rightarrow \sigma_x^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2$$

est son écart type : $\sigma_x = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2}$

III. 5) FONCTION D'AUTO CORRELATION :

Pour caractériser plus complètement la fonction aléatoire on introduit encore une fonction non aléatoire qui permet d'établir le degré de dépendance de deux valeurs de la fonction aléatoire (figure 5 aux instant t_1, t_2).

On définit les variables aléatoires $X_1 = X(t_1)$ et $X_2 = X(t_2)$ associées au processus $X(t)$, la moyenne d'ensemble du produit des 2 fonctions quelconques $f(X_1)$ et $g(X_2)$ peut se calculer directement par :

$$\overline{f(X_1) \cdot g(X_2)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f[x^{(k)}(t_1)] g[x^{(k)}(t_2)]$$

connaissant la fonction de densité de probabilité du second ordre $p(x_1, x_2)$, l'espérance mathématique du produit des 2 fonctions $f(x_1)$ et $g(x_2)$ s'écrit :

$$E[f(X_1) \cdot g(X_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1) \cdot g(x_2) \cdot p(x_1, x_2) \cdot dx_1 dx_2$$

pour le cas particulier des fonctions f et g telles que $f(X) = g(X) = X$, l'espérance mathématique du produit est appelée **fonction d'auto corrélation** :

$$\overline{X(t_1) \cdot X(t_2)} = E[X_1 \cdot X_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot p(x_1, x_2) \cdot dx_1 dx_2$$

Le terme autocorrélation provient du fait que le calcul de l'espérance du produit $E[X_1 \cdot X_2]$ correspond à une volonté d'établir une corrélation entre 2 variables aléatoires définies sur le même échantillon mais à 2 instants différents.

En général, la fonction d'autocorrélation R_x ainsi définie est dépendante des deux temps t_1 et t_2 pour lesquels elle a été évaluée :

$$R_x(t_1, t_2) = E[X(t_1) X(t_2)] = \overline{X(t_1) \cdot X(t_2)}$$

III. 6) FONCTION D'AUTO COVARIANCE :

La fonction d'auto covariance est définie comme l'espérance mathématique du produit des variables aléatoires centrées, issues du même processus ; de même que la fonction d'autocorrélation, la fonction d'autocovariance dépend des 2 temps t_1 et t_2 .

$$\Gamma_x(t_1, t_2) = E[(X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2)]$$

$$\Gamma_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2$$

* coefficient de corrélation :

la fonction d'autocovariance est souvent utilisée sous forme normalisée (coefficient de corrélation)

$$\rho_x(t_1, t_2) = \frac{\Gamma_x(t_1, t_2)}{\sigma_{x_1} \sigma_{x_2}}$$

le coefficient de corrélation satisfait alors les inégalités :

$$-1 \leq \rho_x(t_1, t_2) \leq 1$$

III. 7) - PROCESSUS STATIONNAIRES :

un processus aléatoire est stationnaire au sens strict si toutes ses propriétés statistiques sont indépendantes de l'origine des temps, cela veut dire que la densité de probabilité du premier ordre est indépendante du temps et que celles d'ordre supérieur ne dépendent que des différences relatives entre les instants considérés, ceci implique

$$p_1(x) = p(x, t + \tau) \quad \text{indépendant de } t$$

$$p_{12}(x_1, x_2) = p(x_1, t_1; x_2, t_1 + \tau) \quad \text{indépendant de } t \text{ mais fonction de } \tau$$

Un processus est dit faiblement stationnaire ou stationnaire au sens large si seulement sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation satisfont les conditions de stationnarité.

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) \cdot dx = \bar{X} = \text{constante}$$

et de même la variance est indépendante du temps

$$E[(x(t) - \bar{X})^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 p(x) dx = \sigma_x^2 = \text{constante.}$$

les fonctions d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de covariance $\Gamma_x(\tau)$ sont aussi indépendantes du temps et ne dépendent que de la différence du temps $\tau = t_2 - t_1$.

$$R_x(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = \overline{X(t).X(t+\tau)}$$

Il est très souvent adéquat de considérer en pratique les processus aléatoires et stationnaire pour l'essentiel de la durée, ou bien il peut être divisé en plusieurs tranches qui sont approximativement stationnaires.

a) propriété de la fonction d'autocorrélation et d'autocovariance :

* la fonction d'autocorrélation :

$R(t_1, t_2) = R(\tau)$ fonction de la différence des temps $\tau = t_2 - t_1$

$R(0) = E[X^2]$ carré moyenne à l'origine.

$R(-\tau) = R(\tau)$ fonction paire.

$|R(\tau)| \leq R(0)$ maximum atteint pour $\tau = 0$

$R(\tau)$ est périodique quand $X(t)$ est périodique

$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0$ quand $X(t)$ est aléatoire

+ La fonction d'auto covariance :

$$\Gamma_x(\tau) = R_x(\tau) - \bar{X}^2$$

$$\Gamma_x(\tau) = \Gamma_x(-\tau)$$

$$|\Gamma_x(\tau)| \leq \Gamma_x(0) = \sigma_x^2$$

III.8) FONCTION DE DENSITE SPECTRALE :

Pour un processus stationnaire, la fonction d'autocorrélation ne dépend que de la différence des temps $\tau = t_2 - t_1$, Il est donc possible de réaliser une décomposition fréquentielle de la fonction $R(\tau)$:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cdot \exp(i\omega\tau) \cdot d\omega$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) \cdot \exp(-i\omega\tau) \cdot d\tau$$

les formules si dessus est dite relations de Winer-Khintchine.

Il résulte que $S(\omega)d\omega$ est amplitude dans l'intervalle de fréquence $[\omega, \omega+d\omega]$, cela signifie qu'on peut considérer $S(\omega)$ comme la « densité » la fonction $S(\omega)$ est appelée densité spectrale.

III.8.1) Fonction de densité spectrale de puissance :

Pour $\tau=0$, la fonction d'autocorrélation prend comme valeur le carré moyen :

$$R(0) = E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cdot d\omega$$

La fonction $S(\omega)$ s'interprète donc comme la densité en fréquence du carré moyen, elle est appelée pour cette raison fonction de densité spectrale de puissance.

Dans le cas d'un processus réel, la fonction $S(\omega)$ est une fonction paire, positive ou nulle :

$$\forall \omega, S(-\omega) = S(\omega) \quad \text{et} \quad S(\omega) \geq 0$$

III.8.2) fonction de densité spectrale unilatérale :

Dans la pratique des mesures, il est usuel de ne considérer que le domaine des fréquences positives. la fonction de densité spectrale $S(\omega)$ est alors transformée en densité spectrale unilatérale en fréquence $G(f)$, par conservation du carré moyen :

$$R(0) = E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cdot d\omega = \int_0^{+\infty} G(f) \cdot df \Rightarrow G(f) = 4\pi S(\omega)$$

III.8.3) fonction de cross-corrélation et de cross-densité spectral :

soient $x(t)$ et $y(t)$ 2 processus stochastiques stationnaires réels.

$E[x(t) \cdot y(t + \tau)] = R_{xy}(\tau)$ fonction réelle indépendante de t .

$(R_{xy}(\tau))$ est bornée : $|R_{xy}(\tau) - E[x]E[y]| \leq \sigma_x \sigma_y$

$E[y(t) \cdot x(t + \tau)] = R_{yx}(\tau) = R_{xy}(\tau)$

$R_{xy}(\tau)$ n'est ni fonction paire, ni fonction impaire.

La fonction de cross-densité spectrale $S_{xy}(\omega)$ est définie par :

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad \text{fonction générale complexe.}$$

III.9) PROCESSUS STATIONNAIRE A BANDE LIMITE :

a) processus à bande large :

un processus a bande limitée sera dit à bande large quand la largeur de bande $\Delta\omega$ sera du même ordre de grandeur que la fréquence centrale ω_0

$$\Delta\omega \approx \omega_0 \quad \omega_0 = 0,5(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$



Figure 9.1 : Echantillon d'un processus a bande large.

Un processus a densité spectrale constante S_0 est dite bruit blanc.

• Bruit blanc idéal :

La fonction d'autocorrélation $R(\tau)$ correspond a une fonction de Dirac . $\tau = 0$

$$\forall \omega \quad S(\omega) = S_0 \quad \Rightarrow \forall \tau \quad R(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau)$$

$\delta(\tau)$: fonction de dirac.

Bruit blanc à bande limitée, correspond à une bonne approximation des phénomènes physiques, ou :

$$E[X^2] = 2S_0 \Delta\omega$$

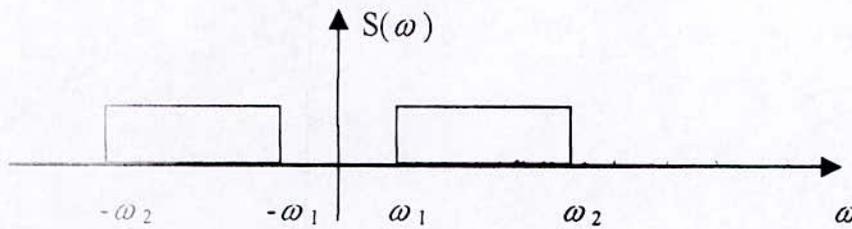


figure 10 :densité spectrale d'un bruit blanc à bande limitée

la fonction d'autocorrélation $R(\tau)$ se calcul en fonction ω_1, ω_2 .

$$\forall |\omega| \in [\omega_1, \omega_2] \quad S(\omega) = S_0 \Rightarrow R(\tau) = 2S_0 \cdot \frac{\sin \omega_2 \tau - \sin \omega_1 \tau}{\tau}$$

b) processus à bande étroite :

un processus à bande limitée sera dit à bande étroite quand sa largeur de bande $\Delta\omega$ sera largement inférieur à sa fréquence centrale ω_0

$$\Delta\omega \ll \omega_0$$

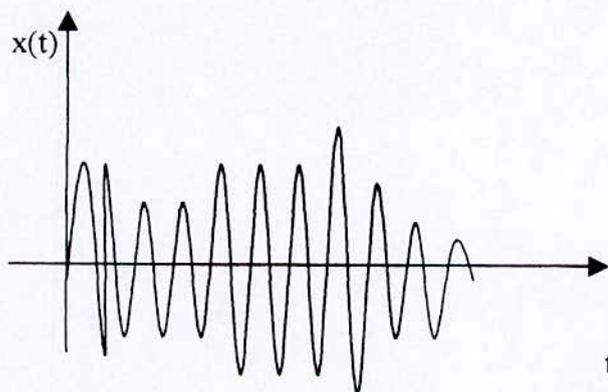
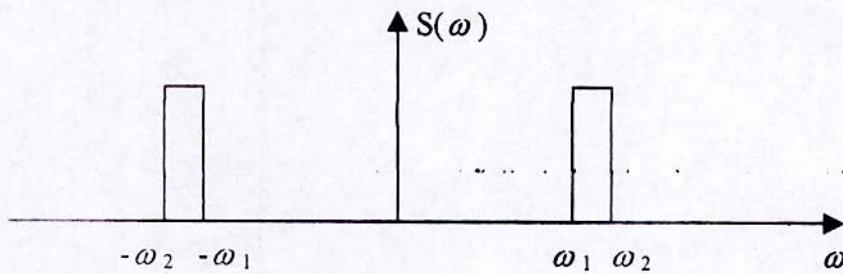


figure 11 : échantillon d'un processus à bande étroite

un échantillon d'un processus à bande étroite a l'apparence d'un signal sinusoïdal de pulsation ω_0 mais d'amplitude aléatoire variant lentement dans le temps.

Un processus à bande étroite est souvent représenté sous la forme simplifiée suivante d'un bruit blanc à bande étroite.



chapitre IV

analyse stochastique

IV) ANALYSE STOCHASTIQUE :

IV.1) INTRODUCTION:

Dans l'analyse des vibrations aléatoires des structures soumises aux excitations stationnaires, une description de l'excitation input en termes de fonction de densité spectrale de puissance est généralement employée. Pour les systèmes linéaires, il est bien connu que la densité spectrale de puissance de la réponse soit le produit de la fonction de transfert du système et de la densité spectrale de puissance de l'input. également, la plus part des mesures statistiques de la réponse ayant un intérêt pratique en engineering, sont obtenues en fonction des premiers moments spectraux S_m pour $m=0,1,2$ et 4 . Dans le cas spécial où le processus de réponse est gaussien, les trois premiers moments spectraux sont également suffisant pour déterminer la distribution cumulée, la moyenne et la variance du pic de la réponse pendant une durée certaine.

Dans certaines applications telles qu'en génie parasismique, la spécification de l'excitation par sa fonction de densité spectrale FDS, s'avère être une méthode peu convenable. Effectivement, une description plus avantageuse est celle basée sur le spectre de réponse moyen.

Le spectre de réponse représente les caractéristiques spectrales d'un ensemble de mouvements du sol, occasionné par les séismes qui sont supposés se produire dans un site donné, et procure pour cela un meilleur "outil de travail" permettant de définir l'input de design nécessaire à l'analyse des structures.

En pratique, la description de l'input en termes de spectre de réponse est préférée lors du calcul dynamique des structures pour plusieurs raisons. La raison principale en est peut être la "tradition"; ainsi la plupart des spécifications et codes structuraux existants sont basés sur la technique du spectre de réponse, qui est très appréciée par la communauté des ingénieurs praticiens.

Une autre raison est qu'il est plus convenable de générer des spectres de réponse, plutôt que des densités spectrales à partir des données disponibles.

Enfin, dans le but de déterminer certaines quantités critiques de la réponse comme la moyenne du pic de la réponse à une formulation basée sur le spectre de réponse moyen s'avère être plus simple du point de vue calcul que celle basée sur la fonction de densité spectrale (FDS).

Sous certaines conditions, les trois premiers moments de la FDS de réponse pour une structure linéaire peuvent être approximativement obtenue en terme du spectre de réponse moyen de l'excitation et des propriétés modales de la structure.

Ces conditions sont les suivant :

- La structure doit avoir des modes classiques
- L'excitation doit être un processus gaussien stationnaire
- L'excitation doit être à bande large, c à d que la FDS varie légèrement couvrant ainsi les modes les plus significatifs.

A partir des 3 moments spectraux, on détermine les quantités statistiques tel que, l'écart type de la réponse et sa dérive par rapport au temps, la pulsation moyenne de la réponse, la moyenne et la variance du pic de la réponse, qui sont une combinaison des moyennes des maximums des réponses modales.

Cette méthode tient compte des effets des cross-corrélations entre les réponses modales. Ils peuvent être très importante pour des structures avec des modes proches.

Les restrictions sous lesquelles cette méthode est applicable, peuvent être considérablement réduites. En effet, cette méthode peut être utilisée pour les réponses transitoires des structures soumises à un input gaussien à bande large, pourvu que le pic arrive durant la phase stationnaire de l'input avec une durée plusieurs fois plus grande que la période fondamentale de la structure.

IV.2) REPONSE DES SYSTEMES A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTES A UNE EXCITATION STATIONNAIRE.

Considérons une structure linéaire à N DDL, ayant un amortissement visqueux. Supposons qu'elle a des modes classiques.

Il est bien connue qu'en utilisant la procédure de superposition modale, toute réponse $R(t)$ d'une telle structure peut être exprimée en terme de ses réponses modales.

$$R(t) = \sum_i R_i(t) = \sum_i \psi_i S_i(t) \quad [4.1]$$

$$\psi_i = \phi_i \omega_i$$

où:

$R_i(t) = \psi_i S_i(t)$ est la réponse dans le mode i .

ψ_i : est le facteur de participation effective.

$S_i(t)$ est la i ème coordonnée normale qui représente la réponse d'un oscillateur de pulsation ω_i et de coefficient d'amortissement ξ_i , à une input donnée.

Considérons la réponse stationnaire d'un système à une input $F(t)$ stationnaire, décrite par sa densité spectral de puissance $G_F(\omega)$. alors la FDS de réponse est donnée par :

$$G_R(\omega) = \sum_i \sum_j \psi_i \psi_j G_F(\omega) H_i(\omega) \overline{H_j(\omega)} \quad [4.2]$$

$$H_i(\omega) = \frac{1}{(\omega_i^2 - \omega^2 + 2i\xi_i\omega_i\omega)}$$

est la fonction de transfert en fréquence de la réponse du mode i . en utilisant [4.2], les moments spectraux s'expriment en fonction de la FDS de reponse $G_R(\omega)$ par l'expression:

$$\lambda_m = \int_0^{\infty} \omega^m G_R(\omega) d\omega = \sum_i \sum_j \psi_i \psi_j \lambda_{m,ij} \quad [4.3]$$

où :

$$\lambda_{m,ij} = \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} \omega^m G_F(\omega) H_i(\omega) \overline{H_j(\omega)} d\omega \right] \quad [4.4]$$

sont les moments cross spectraux de la coordonnée normale associés aux modes i et j .
introduisons les coefficients $\rho_{m,ij}$ tel que :

$$\rho_{m,ij} = \frac{\lambda_{m,ij}}{\sqrt{\lambda_{m,ii} \lambda_{m,jj}}}$$

l'équation devient :

$$\lambda_m = \sum_i \sum_j \psi_i \psi_j \rho_{m,ij} \sqrt{\lambda_{m,ii} \lambda_{m,jj}} \quad [4.5]$$

On sait que :

$$\lambda_0 = \sigma_R^2 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \sigma_{\dot{R}}^2$$

ils représentent la variance de la réponse $R(t)$ et sa dérivée, $\dot{R}(t)$ respectivement.
 $\lambda_{0,ii}$ et $\lambda_{2,ii}$ sont les variances des i eme coordonnées normales, $S_i(t)$ et sa dérivé $\dot{S}_i(t)$ respectivement. Les moments λ_1 et $\lambda_{1,ii}$ sont reliés à l'enveloppe du processus de réponse. Leur coefficient correspondant $\rho_{1,ij}$ n'apas de sens physique. Néanmoins son comportement est similaire au coefficient de corrélation.

Les DSP du bruit blanc et du bruit blanc filtré sont données respectivement comme suit :

$$\begin{cases} G_F(\omega) = G_0 & [4.6] \\ G_F(\omega) = \frac{\omega_g^2 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} G_0 & [4.7] \end{cases}$$

G_0 est une constante dépendant de l'accélération du signal sismique.

ξ_g et ω_g traduisent les propriétés dynamiques du sol.

Les coefficients de cross-corrélations basés sur la réponse à un bruit blanc semble être une bonne approximation pour les coefficients basés sur la réponse à une input à bande large.

Les expressions approximatives de $\rho_{m,ij}$ sont les suivant :

$$\rho_{0,ij} = \frac{2\sqrt{\xi_i \xi_j} [(\omega_i + \omega_j)^2 (\xi_i + \xi_j) + (\omega_i^2 + \omega_j^2)(\xi_i - \xi_j)]}{4(\omega_i - \omega_j)^2 + (\omega_i + \omega_j)^2 (\xi_i + \xi_j)^2} \quad [4.8]$$

$$\rho_{1,ij} = \frac{2\sqrt{\xi_i \xi_j} [(\omega_i + \omega_j)^2 (\xi_i + \xi_j) - 4(\omega_i + \omega_j)^2 / \pi]}{4(\omega_i - \omega_j)^2 + (\omega_i + \omega_j)^2 (\xi_i + \xi_j)^2} \quad [4.9]$$

$$\rho_{2,ij} = \frac{2\sqrt{\xi_i \xi_j} [(\omega_i + \omega_j)^2 (\xi_i + \xi_j) - (\omega_i^2 + \omega_j^2)(\xi_i - \xi_j)]}{4(\omega_i - \omega_j)^2 + (\omega_i + \omega_j)^2 (\xi_i + \xi_j)^2} \quad [4.10]$$

ces expressions sont simples mais apportent une bonne approximation des résultats exactes.

Elles seront utilisées pour la réponse à une input a bande large avec une DSP de forme quelconque.

Il ne nous reste plus qu'à calculer les moments spectraux :

$$\lambda_{m,ii} = \int_0^{\infty} \omega^m G_f(\omega) |H_i(\omega)|^2 d\omega \quad [4.11]$$

les moments spectraux $\lambda_{m,ii}$ seront par la suite donnés en terme de coordonnées de la moyennes du spectre de réponse.

IV.3) STATISTIQUE DU PIC DE LA REPONSE A UNE EXCITATION GAUSSIENNE :

En vibration aléatoire, si une structure linéaire est soumise à une excitation Gaussienne de moyenne nulle, sa réponse sera aussi un processus Gaussien de moyenne nulle. Vannmarke a exprimé la distribution du premier passage d'un seuil donné pour un tel processus, en fonction de ses trois premiers moments spectraux.

En utilisant la formulation de Vannmarke, la distribution cumulée du pic de la valeur absolue de la réponse sur une durée τ est défini par :

$$R_\tau = \max_{t \in [0, \tau]} |R(t)| \quad [4.12]$$

peut être exprimée ainsi :

$$F_{R_\tau}(r) = [1 - \exp(-s^2/2)] \exp\left[-\nu \tau \frac{1 - \exp(-\sqrt{\pi/2} \delta_e s)}{\exp[(s^2/2 - 1)]}\right], r > 0 \quad [4.13]$$

dans cette expression $s = \frac{r}{\sigma_R} = \frac{r}{\sqrt{\lambda_0}}$ est un seuil normalisé ou une valeur réduite du seuil.

Le taux moyen des passages par zéro du processus est défini par :

$$\nu = \frac{\sigma_{\dot{R}}}{\pi \sigma_R} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} \quad [4.14]$$

avec :

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0 \lambda_2}}, \quad \delta_e = \delta^{1,2} \quad [4.15]$$

δ est le facteur de forme de la densité spectrale de la réponse et dont la valeur varie entre 0 et 1 (une faible valeur de δ marque un processus en bande étroite).

La moyenne et l'écart type de $\overline{R_\tau}$ sont en général obtenus respectivement par les relations :

$$\begin{cases} \overline{R_\tau} = p\sigma_R \\ \sigma_{R_\tau} = q\sigma_R \end{cases}$$

où p et q sont les facteurs de pic qui s'expriment en fonction des moments spectraux sur une durée τ par les formules suivantes :

$$p = \sqrt{2 \ln \nu_e \tau} + \frac{0.5772}{\sqrt{2 \ln \nu_e \tau}} \quad [4.16]$$

$$q = \frac{1.2}{\sqrt{2 \ln \nu_e \tau}} - \frac{5.4}{13 + (2 \ln \nu_e \tau)^{3.2}} \quad [4.17]$$

avec :

$$\nu_e = \begin{cases} (1.63\delta^{0.45} - 0.38)\nu, & \delta < 0.69 \\ \nu & \delta \geq 0.69 \end{cases} \quad [4.18]$$

où τ est le taux moyen des passages par zéro statistiquement indépendants.

Ses résultats similaires à ceux mentionné ci-dessous s'appliquent à un oscillateur simple dont la fréquences ω_i et amortissement ξ_i sont ceux correspondant au modes i et dont la réponse est $S_i(t)$, il suffit alors de remplacer R par S_i et λ_m par $\lambda_{m,ii}$ dans chacune des équations

Les paramètres ν, δ, p, q seront respectivement notés $\nu_i, \delta_i, p_i, q_i$ pour cet oscillateur de caractéristiques (ω_i, ξ_i) dans la suite de l'analyse.

Des formules simplifiées sont cependant valides pour la réponse d'un oscillateur simple, soumis à un input de FDS arbitraire pour que certaines conditions soient vérifiées.

Ainsi, il a été démontré par Vanmarke et Der kivreghian que le taux moyen de passage par zéro

$$\nu_i = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda_{2,ii}}{\lambda_{0,ii}}} \quad \text{de même que le facteur de forme } \delta_i = \sqrt{1 - \frac{\lambda_{1,ii}^2}{\lambda_{0,ii} \lambda_{2,ii}}} \quad \text{correspondant à un}$$

oscillateur de paramètre (ω_i, ξ_i) sont peu sensibles à la forme de la FDS de l'input, pour que ce dernier soit à bande large, et que la fréquence de l'oscillateurs soit proche des fréquences de l'input.

dans ces conditions ν_i et δ_i basés sur un input bruit blanc, constituent une bonne approximation à celles correspondant à la réponse d'un oscillateur de même caractéristique (ω_i, ξ_i) et soumis à un input wide band dont la FDS est de forme arbitraire. les résultats fournis pour un bruit blanc sont :

$$\nu_i = \frac{\omega_i}{\pi} \quad [4.19]$$

$$\delta_i = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi_i^2}} \left(1 - \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{\xi_i}{\sqrt{1 - \xi_i^2}} \right) \right]^2 \approx 2 \left(\frac{\xi_i}{\pi} \right)^2 \quad [4.20]$$

la dernière approximation étant valide pour de faibles amortissements, ces équations seront donc utilisées dans les équations [4.19] et [4.20] afin d'estimer les facteurs de pic p_i et q_i correspondant à un oscillateur simple dont les caractéristiques (ω_i, ξ_i) sont celles du mode i .

IV.4) METHODE MODALO-SPECTRALE BASEE SUR LE DEPLACEMENT :

IV.4.1) VALIDITE DE LA METHODE :

il est important pour cette analyse, d'exposer une méthode de décomposition modale permettant d'évaluer la réponse d'un système MDOF dont l'input (excitation) est un processus Gaussien, stationnaire à bande large et de moyenne nulle spécifié par son spectre de réponse moyen.

La technique proposée est particulièrement utile en génie parasismique, où la description du mouvement du sol est souvent faite grâce à des spectres de réponses. Pour l'appliquer, il est nécessaire de vérifier la validité des suppositions de base de cette méthode relativement aux excitations sismiques.

Il s'avère impératif, de vérifier d'une part que le mouvement du sol est un processus gaussien, stationnaire dont la FDS est à bande large et d'autre part que la réponse de la structure linéaire est aussi un processus stationnaire.

En effet, bien que les séismes induits par le mouvement du sol soient normalement non stationnaire, leur phase forte est souvent caractérisée par sa quasistationnarité, de plus la réponse du pic se manifeste généralement durant cette phase.

Il semble donc raisonnable, dans le but de développer une méthode Modalo-spectrale, de supposer que le processus est stationnaire.

la supposition d'une excitation Gaussienne est acceptable sur la base du théorème de la limite centrale, du fait que le mouvement sismique résulte de superposition d'un grand nombre d'impulsions arrivant d'une manière aléatoire dans le temps.

Par ailleurs, les enregistrement des mouvements du sol ont permis de vérifier la supposition concernant la largeur de bande des mouvements sismiques, qui s'avère être le plus souvent acceptable.

finalement, l'hypothèse de stationnarité de la réponse a été validée sous certaines conditions. en effet, en vertu du fait que la réponse d'un oscillateur, pas très faiblement amorti, à un input à bande large atteint la stationnarité après quelques cycles, on admet que, le

processus de réponse est stationnaire pour des structures dont la période fondamentale est plusieurs fois plus faible que la durée de la phase forte du mouvement du sol.

Ainsi, le spectre de réponse étant une description incomplète de l'input, la méthode développée est nécessairement approximative, rappelons que sa précision est meilleure si l'input est un processus à bande fréquentielle large, dont la durée de stationnarité est longue (plusieurs fois plus longue que celle de la période fondamentale de la structure étudiée) et si de plus, les modes significatifs de vibration sont contenus dans la bande fréquentielle de l'excitation.

IV.4.2) SELECTION DES MODES UTILES :

pour cette étude, on ne conserve que les modes qui donnent des efforts notables. soit n : le nombre de modes « utiles » dans la résolution du problème. Il est d'usage de considérer que les modes utiles sont ceux dont la somme des masses modales atteint 90 à 95%

de la masse totale . $0.90 \text{ à } 0.95 M = \sum_i q_i^2 M_i$

IV.4.3) DEVELOPPEMENT DE LA METHODE MODALO-SPECTRALE :

Il est clair que $\overline{S_2}(\omega, \xi)$ représente la valeur moyenne du maximum de la valeur absolue de la réponse d'un oscillateur sur une durée τ de sa réponse stationnaire, lorsqu'il est soumis à une excitation stationnaire $\dot{V}_g(t)$, où ω et ξ sont respectivement la fréquence et le coefficient d'amortissement de l'oscillateur.

Ainsi l'ordonné du spectre de réponse moyen peut s'exprimer en fonction du moment spectrale $\lambda_{0,ii}$ par la solution :

$$\overline{S_{i\tau}}(\omega_i, \xi_i) = p_i \sqrt{\lambda_{0,ii}} \quad [4.21]$$

où p_i est le facteur de pic associé au i ème mode.

D'où on tire :

$$\lambda_{0,ii} = \frac{1}{p_i^2} \overline{S_{i\tau}}^2(\omega_i, \xi_i) \quad [4.22]$$

on utilisant les relations $\nu_i = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda_{2,ii}}{\lambda_{0,ii}}}$ et $\delta_i = \sqrt{1 - \frac{\lambda_{1,ii}^2}{\lambda_{0,ii} \lambda_{2,ii}}}$

avec la relation précédente et les équations, on tire le premier et le second moment spectral

$$\lambda_{1,ii} = \frac{\omega_i \sqrt{1 - 4\xi_i / \pi}}{p_i^2} \overline{S_{i\tau}}^2(\omega_i, \xi_i) \quad [4.23]$$

$$\lambda_{2,ii} = \frac{\omega_i^2}{p_i^2} \overline{S_{i\tau}}^2(\omega_i, \xi_i) \quad [4.24]$$

ces résultats sont, bien sûr, valide seulement pour la réponse à une input a bande large et pour les modes pour lesquels leur fréquences sont inférieures aux fréquences dominantes de l'excitation.

en utilisant les équations [4.22] et [4.24] avec les équations [4.8] et [4.4] dans l'équation [4.5], les moments λ_0 , λ_4 et λ_2 de la DSP sont obtenues en terme des coordonnées de spectre de réponse.

On a :
$$\overline{R_{i\tau}} = \overline{\psi_{i\tau} S_{\tau}}(\omega_i, \xi_i)$$

Où $\overline{R_{i\tau}}$ est la moyenne du maximum de la réponse dans le mode i , ceci nous mène à la règle de combinaison modale pour les réponses suivantes :
écart type de la réponse :

$$\sigma_R = \left(\sum_i \sum_j \frac{1}{P_i P_j} \rho_{0,ij} \overline{R_{i\tau}} \overline{R_{j\tau}} \right)^{1/2} \quad [4.25]$$

l'écart type de la réponse dérivé :

$$\sigma_{\dot{R}} = \left(\sum_i \sum_j \frac{\omega_i \omega_j}{P_i P_j} \rho_{2,ij} \overline{R_{i\tau}} \overline{R_{j\tau}} \right)^{1/2} \quad [4.26]$$

la moyenne du pic de la réponse (methode modale- spectrale)

$$\overline{R_{\tau}} = P \sigma_R = \left(\sum_i \sum_j \frac{P^2}{P_i P_j} \rho_{0,ij} \overline{R_{i\tau}} \overline{R_{j\tau}} \right)^{1/2} \quad [4.27]$$

Ecart type du pic de la réponse :

$$\sigma_{R_{\tau}} = q \sigma_R = \left[\sum_i \sum_j \frac{q^2}{P_i P_j} \rho_{0,ij} \overline{R_{i\tau}} \overline{R_{j\tau}} \right] \quad [4.28]$$

où p et q dans les deux dernières équations sont les facteurs de pic pour la réponse et sont obtenus à partir d'Eqs. [4.16]-[4.18] en termes du taux moyen de passage par zéro (Eq. [4.14]) et le facteur de forme (Eq. [4.15]) du processus de réponse. une autre quantité d'intérêt pratique est la fréquence moyenne de la réponse exprimée par $\overline{\omega}$

$$\overline{\omega} = \pi V = \frac{\sigma_{\dot{R}}}{\sigma_R} = \frac{\left[\sum_i \sum_j \frac{\omega_i \omega_j}{P_i P_j} \rho_{2,ij} \overline{R_{i\tau}} \overline{R_{j\tau}} \right]}{\left[\sum_i \sum_j \frac{1}{P_i P_j} \rho_{0,ij} \overline{R_{i\tau}} \overline{R_{j\tau}} \right]} \quad [4.29]$$

Cette fréquence détermine le nombre moyen de cycles de réponse pendant une durée unité et elle est utile dans certaines études comme pour la ruine par fatigue.

Dans la pratique, la moyenne du pic de la réponse est tout ce qui est exigé. il est donc intéressant d'obtenir des simplifications de l'équation [4.27].

pour la plupart des structures les rapports $\frac{P}{P_i}$, tendraient vers l'unité. ainsi, ces rapports peuvent être négligés sans trop d'erreurs. Avec cette simplification, l'éq [4.27] se

pour la plupart des structures les rapports $\frac{p}{\rho^i}$, tendraient vers l'unité. ainsi ,ces rapports peuvent être négligés sans trop d'erreurs .Avec cette simplification ,l'éq [4.27] se réduit à

$$\overline{R_\tau} = \left(\sum_i \sum_j \rho_{0ij} \overline{R_{i\tau}} \cdot \overline{R_{j\tau}} \right)^{1/2} \quad [4.30]$$

(CQC: complet quadrate combination)

une autre simplification similaire de l'expression de la fréquence moyenne de réponse, est également possible, qui après la multiplication du numérateur et du dénominateur dans l'éq. [4.30] par p et en négligeant les rapports $\frac{p}{\rho^i}$, elle se réduit à :

$$\overline{\omega} = \left[\frac{\sum_i \sum_j \omega_i \omega_j \rho_{0ij} \overline{R_{i\tau}} \cdot \overline{R_{j\tau}}}{\sum_i \sum_j \rho_{0ij} \overline{R_{i\tau}} \cdot \overline{R_{j\tau}}} \right]^{1/2} \quad [4.31]$$

une autre simplification peut aussi être faite. en effet, pour des structure dont les fréquences sont très éloignées ,les termes $\rho_{m,ij}$ s'annulent, ainsi tous les cross-termes présents dans les expressions précédantes peuvent être négligés. Ceci reste vrai lorsque les fréquences modales vérifient l'inéquation suivante:

$$\frac{\omega_i}{\omega_j} < \frac{0.2}{(\xi_i + \xi_j + 0.2)}$$

ce qui correspond à $\rho_{m,ij} < 0.1$ en particulier la moyenne du pic de la réponse se simplifie à l'expression suivante:

$$\overline{R_\tau} = \left(\sum_i^n (\overline{R_{i\tau}})^2 \right)^{1/2} \quad [4.32]$$

connue sous le nom , règle de combinaison modale SRSS (square root of sum of squares). Il est clair que cette règle est seulement adéquate pour les structures ayant des modes bien séparés.

IV.4.4) SPECTRE DE PLANCHER :

pour une structure donnée, soumise à une excitation à la base ,le spectre de plancher conventionnel est l'ensemble des réponses maximales d'un oscillateur de fréquence et % d'amortissement variables ,attache à un point donne (plancher) de la structure.

Il est à noter que ,les spectre de plancher ,sont utilises pour la conception parasismique des équipements, qui sont modélises tels des oscillateurs à un DDL avec un point d'attache unique sur la structure primaire.

Pour mieux voir, considérons une structure linéaire à N DDL (structure primaire), le spectre de plancher associé au k ème DDL (c-à-d k ème plancher) est généré par l'analyse du système composé à $(N+1)$ DDL, qui consiste en cette structure à laquelle est associé un oscillateur simple à 1 DDL de fréquence ω_e variable, attaché au k ème DDL.

Pour une sélection donnée de ω_e , le spectre de plancher est le pic de la réponse de l'oscillateur.

chapitre : V

application

V) APPLICATION

V.1) INTRODUCTION:

On se propose en premier lieu de déterminer à travers cette étude la réponse de quatre structures (R+6) uniformes et avec décrochements soumises à une excitation sismique à bande large. Cette structure est représentée de deux manières :

- *plancher rigide
- *plancher flexible

V.2) CARACTERISTIQUES DES STRUCTURES

tout les structures ont les même caractéristique tels que
la hauteur d'étage $h=4\text{m}$
la portée des travées est de 3m

V.3) PRESENTATION DES STRUCTURES:

V.3.1) STRUCTURE I

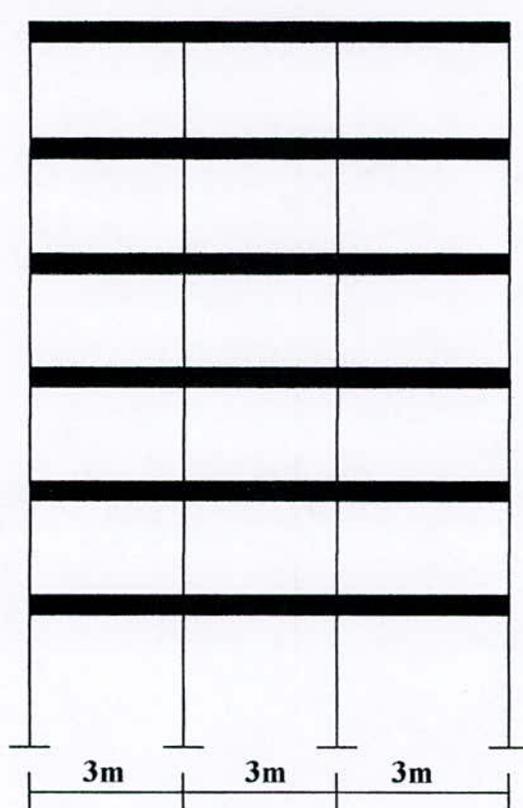


figure V.1. structure uniforme $R_v=0\%$

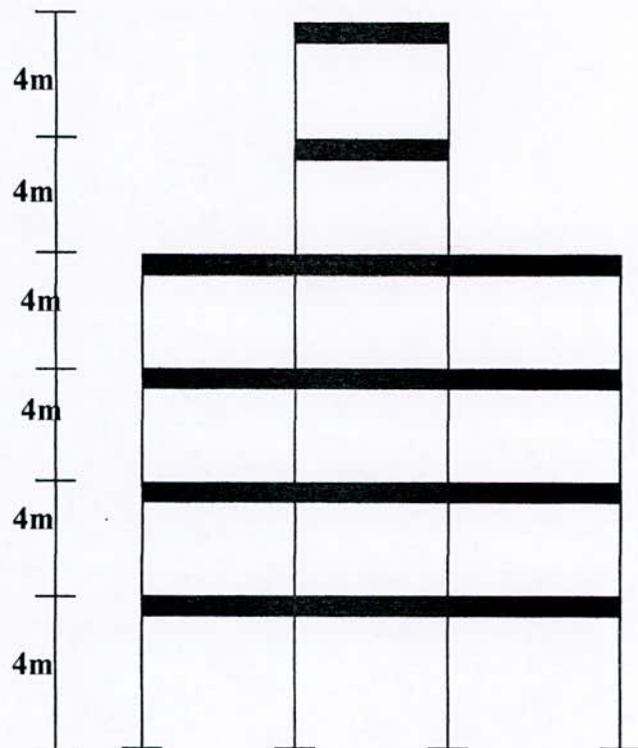


figure V. structure décrochement $R_v= 33\%$

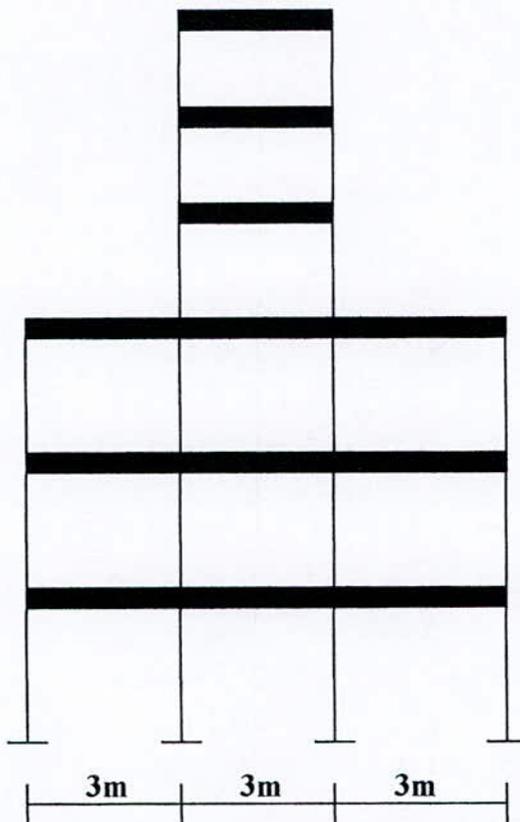


figure V.1. structure a décrochement
 $R_v = 50\%$

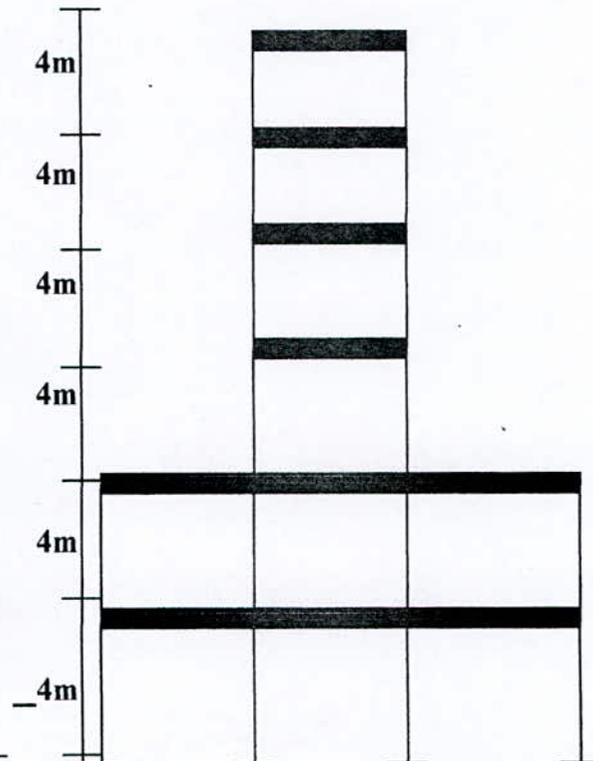


figure V.1. structure a décrochement
 $R_v = 67\%$

Ou R_v est le pourcentage de décrochement

A/ STRUCTURE I: (0% DECROCHEMENT)

La première structure proposée pour l'étude est un bâtiment à six niveaux (R+6) avec une hauteur d'étage $h=4m$. les masses sont concentrées au niveau des planchers. Les valeurs des rigidités sont exprimées en KN/m.

a)cas des planchers rigides:

$$K_{0,1}=8422,85$$

$$K_{3,4}=8422,85$$

$$K_{1,2}=8422,85$$

$$K_{4,5}=8422,85$$

$$K_{2,3}=8422,85$$

$$K_{5,6}=8422,85$$

b)cas des planchers flexibles:

$$K_{0,1}= 8205,64$$

$$K_{1,3}=-876,51$$

$$K_{3,4}= 8085,42$$

$$K_{4,6}= -814,88$$

$$K_{0,2}= -880,84$$

$$K_{2,3}= 8086,36$$

$$K_{3,5}= -864$$

$$K_{5,6}= 7068,44$$

$$K_{1,2}= 8165,71$$

$$K_{2,4}= -869,54$$

$$K_{4,5}= 8072,13$$

Tout les planchers ont une masse $M_i= 10,125t$

B / STRUCTURES I :(33% DECROCHEMENT)

Même structures avec décrochement 33% .

a) cas des planchers rigides:

$$\begin{array}{lll} K_{0,1}=8422,85 & K_{1,2}=8422,85 & K_{2,3}=8422,85 \\ K_{3,4}=8422,85 & K_{4,5}=4211,43 & K_{5,6}=4211,43 \end{array}$$

b) Cas des planchers flexibles:

$$\begin{array}{lll} K_{0,1}= 8205,64 & K_{0,2}= -880,7772 & K_{1,2}= 8165.65 \\ K_{1,3}=-870,776 & K_{2,3}= 8072,79 & K_{2,4}= -813.962 \\ K_{3,4}= 7303,77 & K_{3,5}= -250.492 & K_{4,5}= 4025.26 \\ K_{4,6}= -634,472 & K_{5,6}= 3424.75 & \end{array}$$

La masse de chaque plancher est :

$$M1=10.125 \quad M2=10.125 \quad M3= 10.125 \quad M4= 10.125 \quad M5=3.375 \quad M6=3.375$$

B /STRUCTURES I :(50% DECROCHEMENT)

Même structures avec décrochement 50% .

a) Cas des planchers rigides:

$$\begin{array}{lll} K_{0,1}=8422,85 & K_{1,2}=8422,85 & K_{2,3}=8422,85 \\ K_{3,4}=4211,43 & K_{4,5}=4211,43 & K_{5,6}=4211,43 \end{array}$$

b) Cas des planchers flexibles:

$$\begin{array}{lll} K_{0,1}= 8205,643 & K_{0,2}= -876.5255 & K_{1,2}= 8152.22 \\ K_{1,3}=-821.22 & K_{2,3}= 7308.58 & K_{2,4}= -246.057 \\ K_{3,4}= 4007.12 & K_{3,5}= -543.524 & K_{4,5}= 4152.72 \\ K_{4,6}= -569.375 & K_{5,6}= 3445.22 & \end{array}$$

La masse de chaque plancher est :

$$M1=10.125 \quad M2=10.125 \quad M3= 10.125 \quad M4= 3.375 \quad M5=3.375 \quad M6=3.375$$

C / STRUCTURES I :(67% DECROCHEMENT)

Même structures avec décrochement 67% .

a) Cas des planchers rigides:

$$\begin{array}{lll} K_{0,1}=8422,85 & K_{1,2}=8422,85 & K_{2,3}=4211,43 \\ K_{3,4}=4211,43 & K_{4,5}=4211,43 & K_{5,6}=4211,43 \end{array}$$

b) Cas des planchers flexibles:

$$\begin{array}{lll} K_{0,1}= 8190.242 & K_{0,2}= -814.621 & K_{1,2}= 7383.31 \\ K_{1,3}=-243.589 & K_{2,3}= 3998.74 & K_{2,4}= -560.853 \\ K_{3,4}= 4155.76 & K_{3,5}= -566.654 & K_{4,5}= 4138.7 \\ K_{4,6}= -544.27 & K_{5,6}= 3442.05 & \end{array}$$

La masse de chaque plancher est :

$M_1=10.125$ $M_2=10.125$ $M_3= 3.375$ $M_4= 3.375$ $M_5=3.375$

$M_6=3.375$

* DETERMINATION DES MODES PROPRES:

L'analyse modale nous permet de calculer les modes propres qui contribuent dans la réponse des structures et les vecteurs propres qui leur correspondent. on obtient les résultats suivants:

A/ STRUCTURE I:(0% DECROCHEMENT)

a) Cas des planchers rigides:

Fréquence naturelle	facteur de participation
6.9531	7,26826
20.455	2,3264
32.769	1,28329
43.1759	0,5034
51.6545	0,7654
55.2744	0,01764

b) Cas des planchers flexibles:

Fréquence naturelle	facteur de participation
5,42387	7,16322
16,5375	2,43394
27,8603	1,45219
38,7617	0,95912
48,1327	0,63754
54,2513	0,23542

A/STRUCTURE I:(33% DECROCHEMENT)

a) Cas des planchers rigides:

Fréquence naturelle	facteur de participation
8.6231	6.4143
21.9429	1.8446
32.0241	1.3635
44.6824	0,8294
55.1129	0,3499
57.6947	-0,1716

b) Cas des planchers flexibles:

Fréquence naturelle	facteur de participation
6.8260	6.30149
17.1798	1.8627
26.4525	1.6313
40.1867	1.0478
52.525	0,52250
53.5790	-0,01971

A/ STRUCTURE I:(50% DECROCHEMENT)**a) Cas des planchers rigides:**

Fréquence naturelle	facteur de participation
9.41024	5.78106
20.065121	2.17791
35.8430	1.3638
46.0246	0,48229
52.9272	-0,477183
64.1095	-0,067449

b) Cas des planchers flexibles:

Fréquence naturelle	facteur de participation
7.4537	5.60765
15.5881	2.3869
30.6737	1.55697
39.7389	0,657223
49.959	0,691501
61.1326	-0,036174

A/ STRUCTURE I:(67% DECROCHEMENT)**a) Cas des planchers rigides:**

Fréquence naturelle	facteur de participation
9.61210	4.93838
21.0612	2.81358
36.4003	-0,78631
47.3857	0,90787
55.6836	0,15553
66.5856	0,006894

b) Cas des planchers flexibles:

Fréquence naturelle	facteur de participation
7.3797	4.6548
16.8070	3.13375
29.6032	-0,93799
43.2266	1.12876
50.2412	0,3304721
64.3357	0,0344871

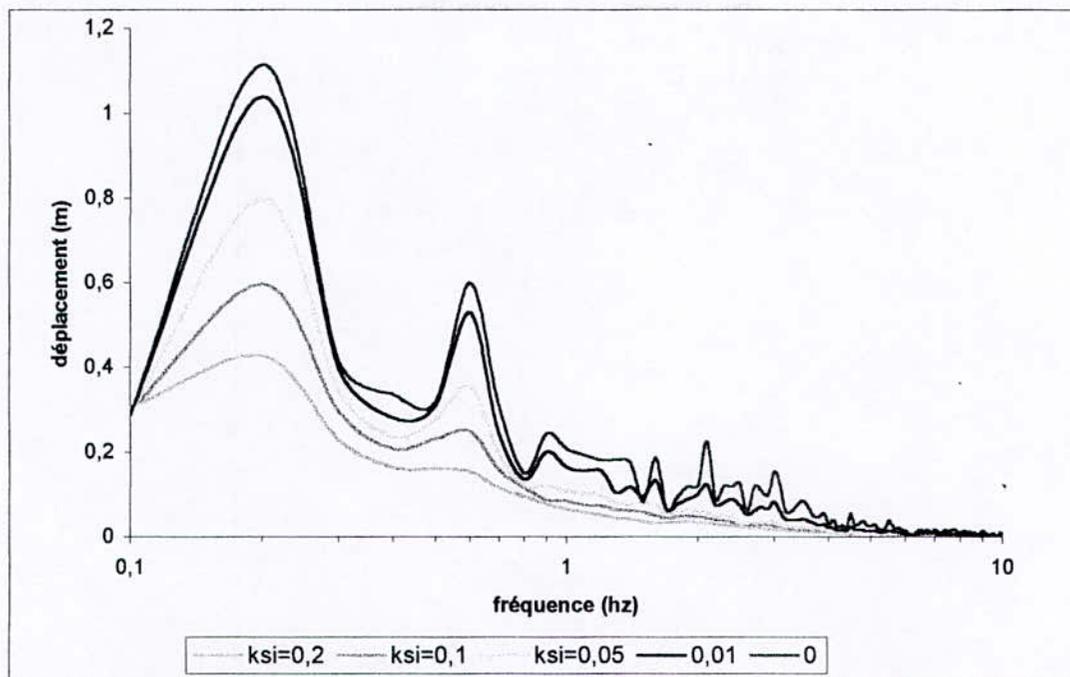


Figure V.2. Spectre de déplacement de l'excitation sismique wide bande simulée.

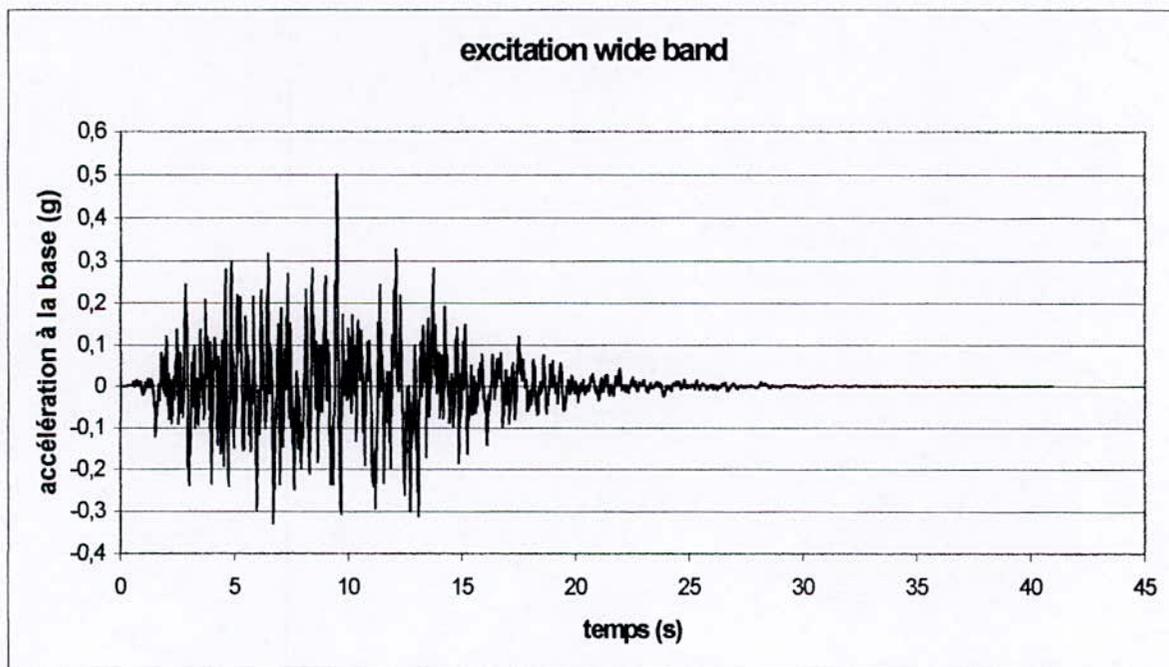


Figure V.3. Echantillon de excitation sismique wide band simulée.

LA DENSITE SPECTRALE :

Le filtre de la densité spectrale a été choisis comme suit :

$$\omega_g = 15$$

$$\xi_g = 0.6$$

$$G_0 = 0,01822$$

l'une des hypothèses de base de validité de l'approche stochastique suscitée est que , la largeur de bande de l'excitation doit être assez large .

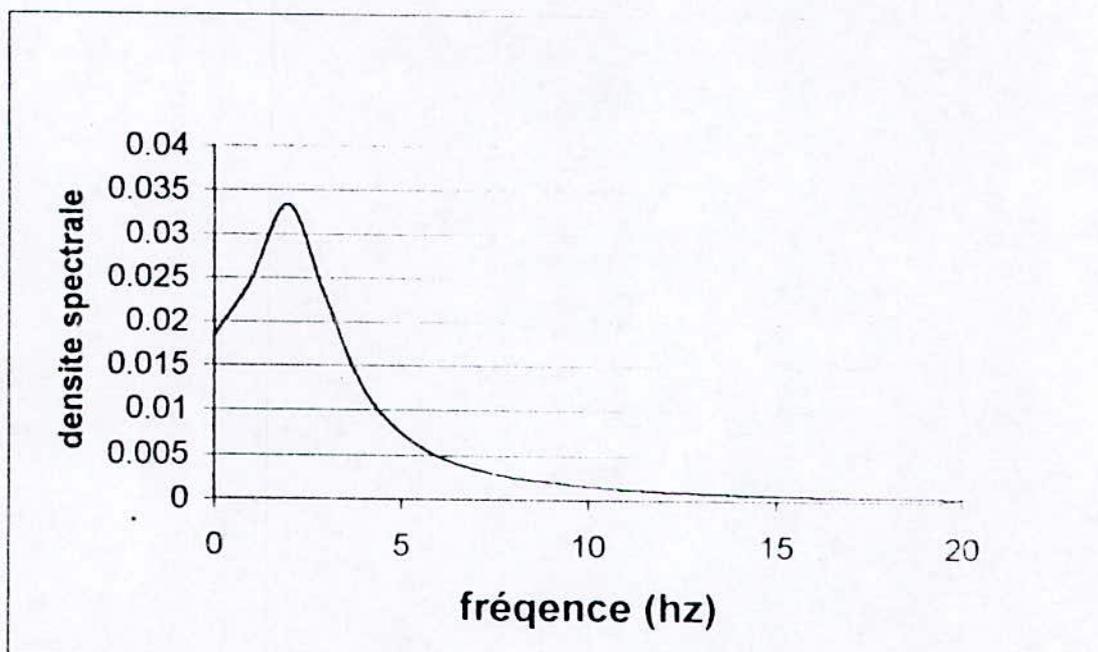


Figure V4 :Densité spectrale de l'excitation wide band

Remarque :

Les figures (A1,,A8) représentent l'histoire temporelle du 6 ème étage de chaque structure

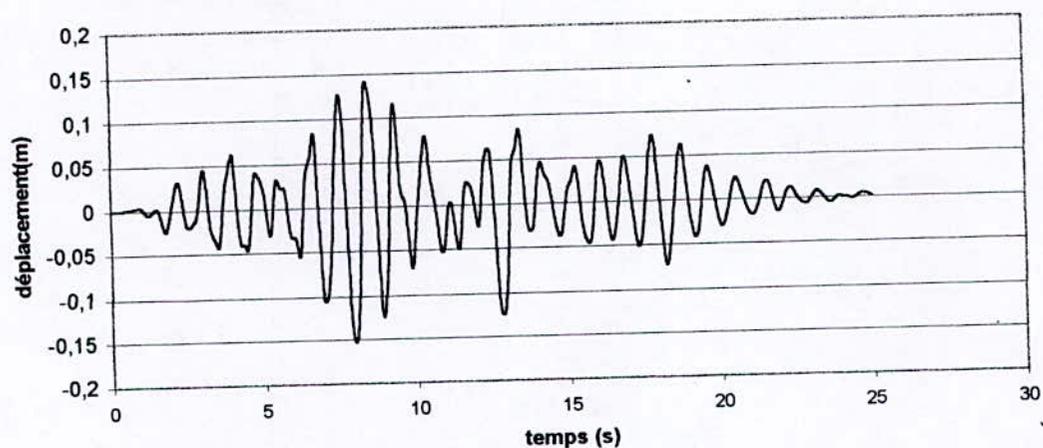
A) ETUDE DETERMINISTE

Figure (A.1) histoire temporelle de la structure uniforme dans le cas rigide

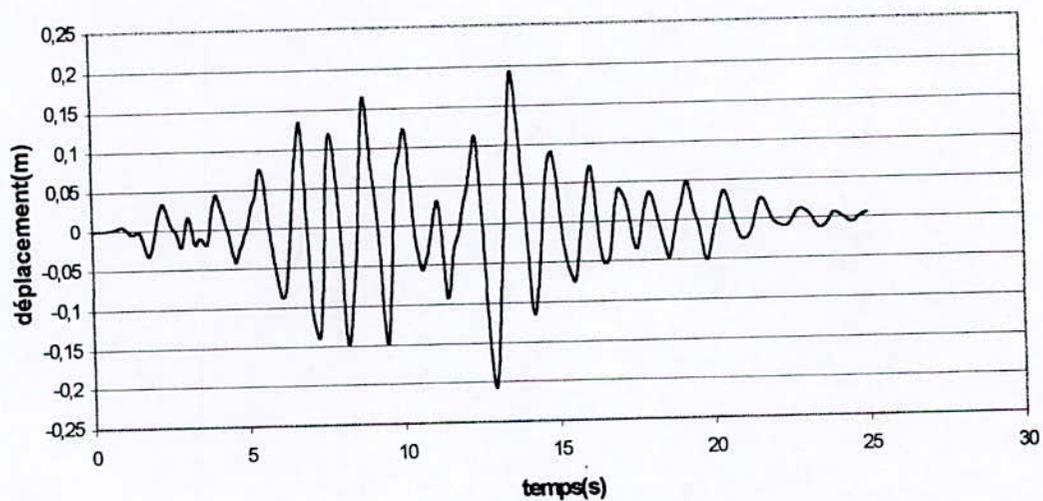


Figure (A.2) histoire temporelle de la structure uniforme dans le cas flexible

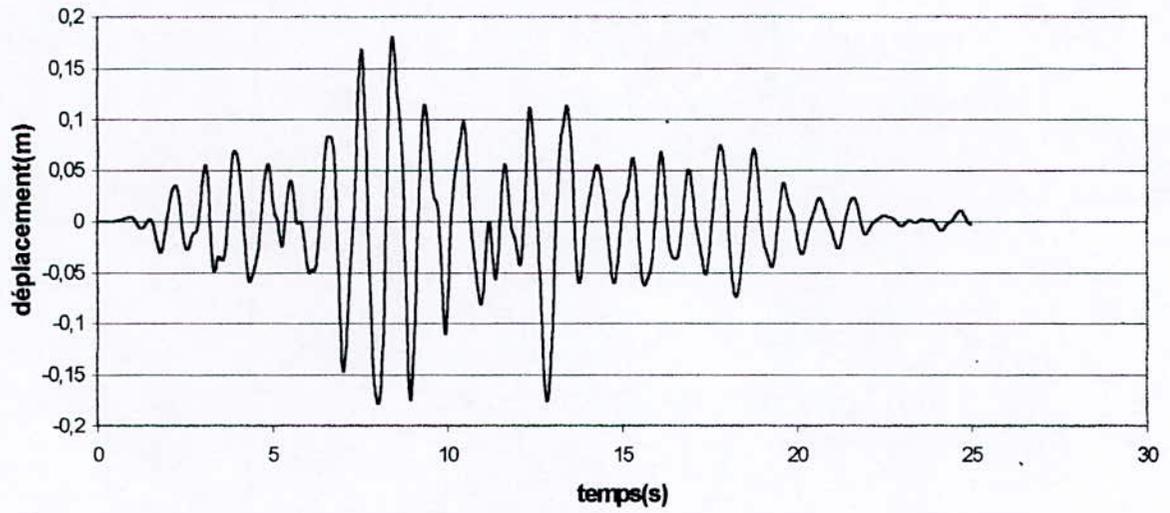


Figure (A.3) histoire temporelle de la structure avec décrochement 33% dans le cas flexible.

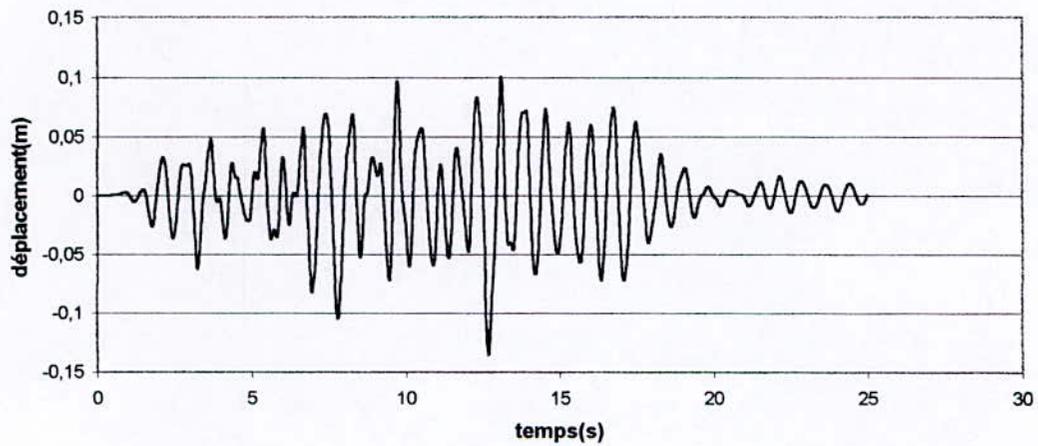


Figure (A.4) histoire temporelle de la structure avec décrochement 33% dans le cas rigide.

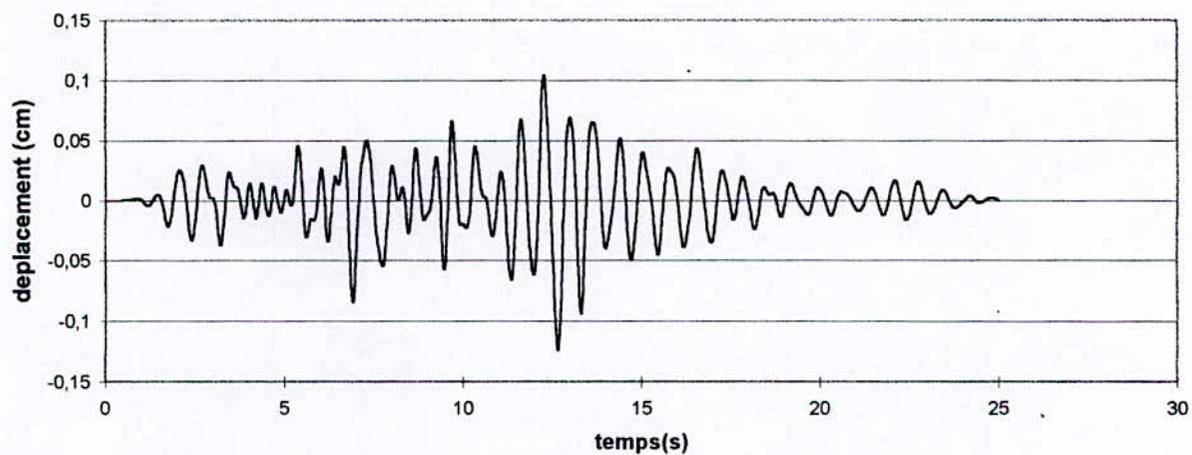


Figure (A.5) histoire temporelle de la structure avec décrochement 50% dans le cas rigide.

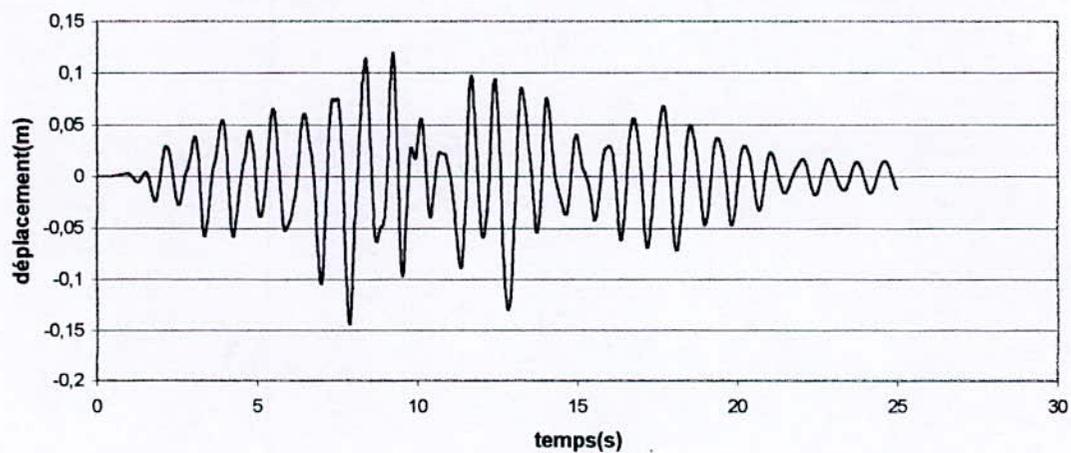


Figure (A.6) histoire temporelle de la structure avec décrochement 50% dans le cas flexible

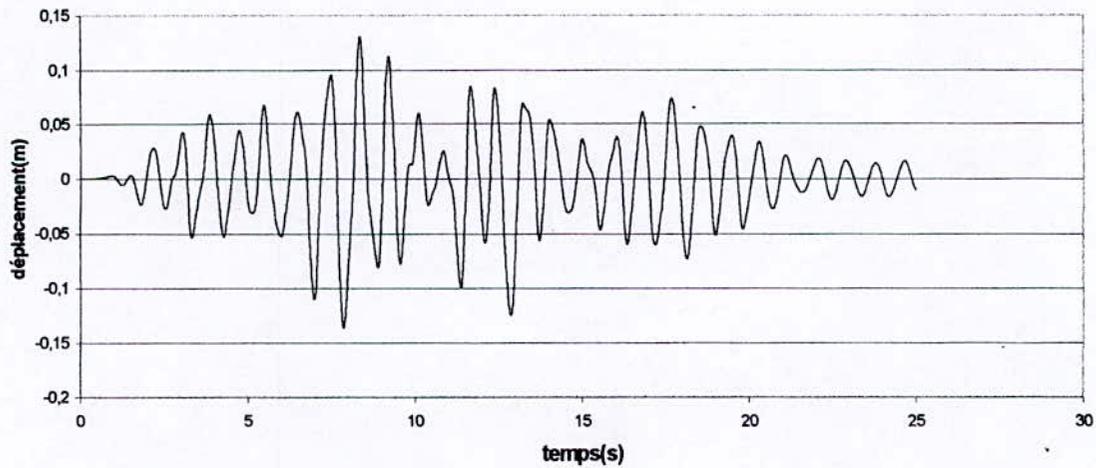


Figure (A.7) histoire temporelle de la structure avec décrochement 67% dans le cas flexible

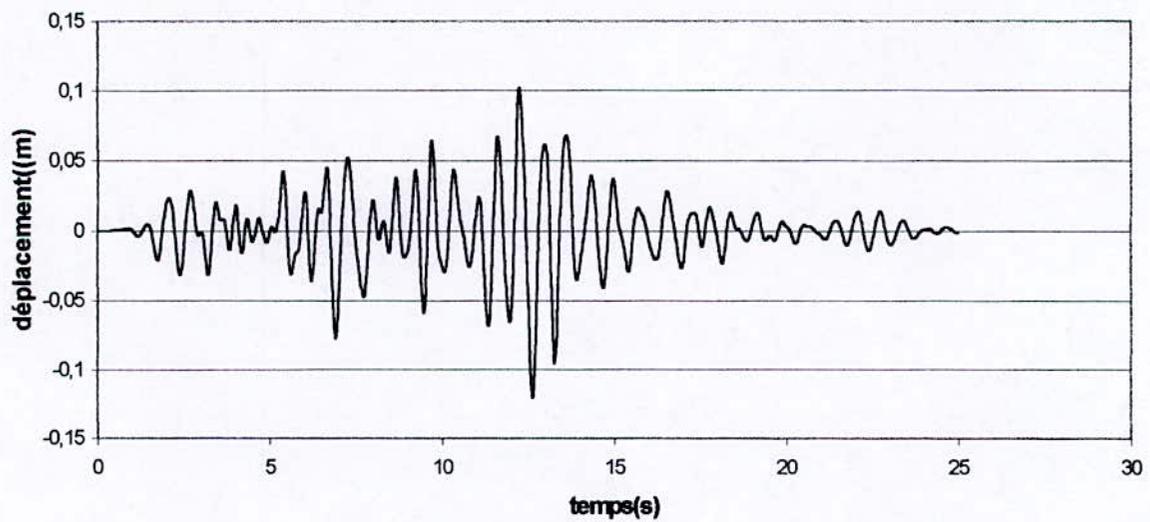


Figure (A.8) histoire temporelle de la structure avec décrochement 67% dans le cas rigide.

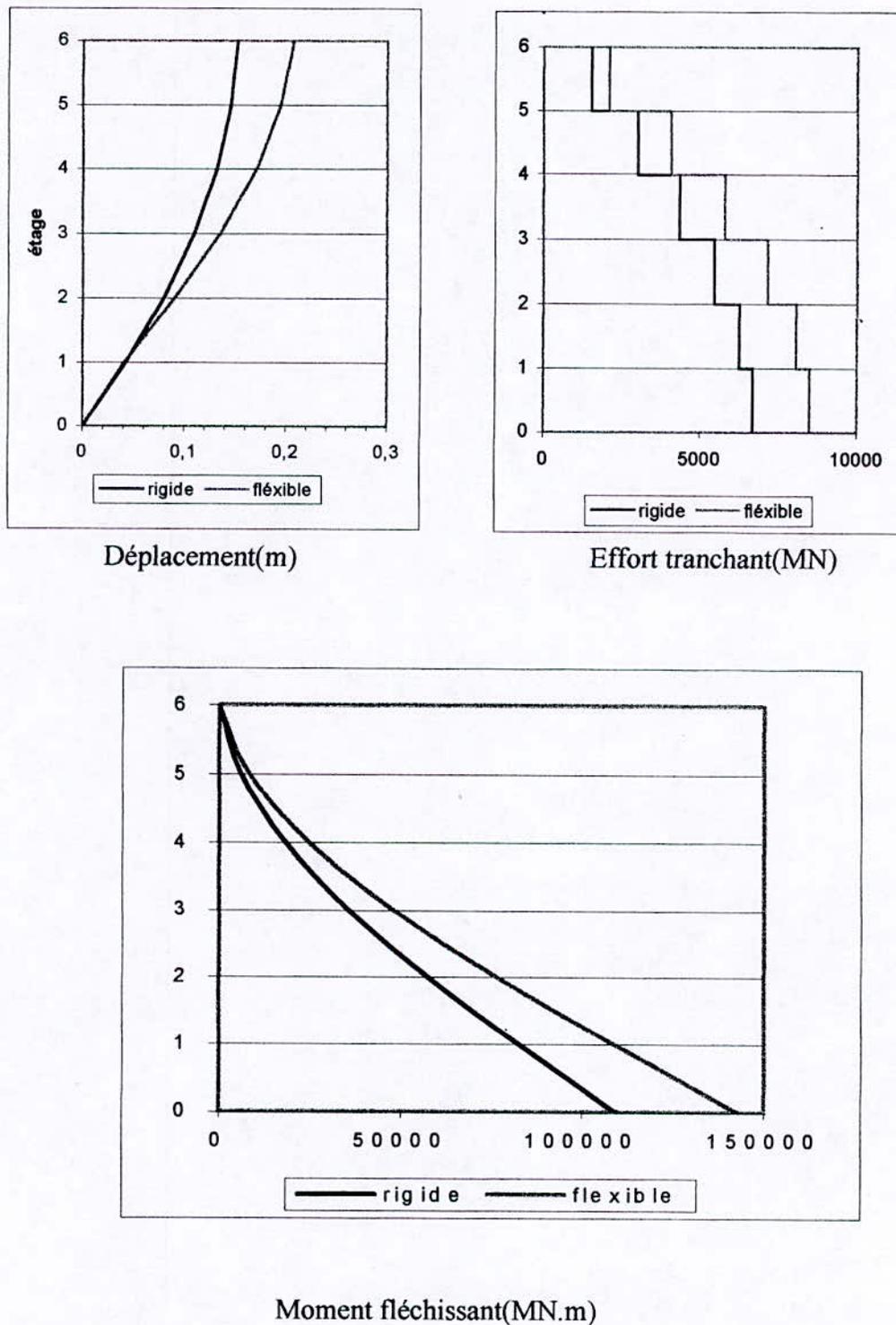
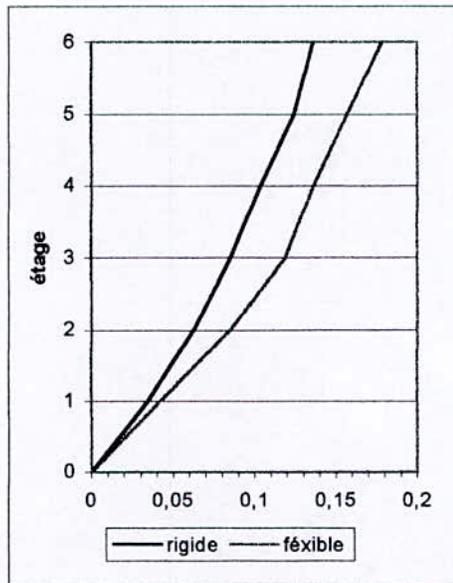
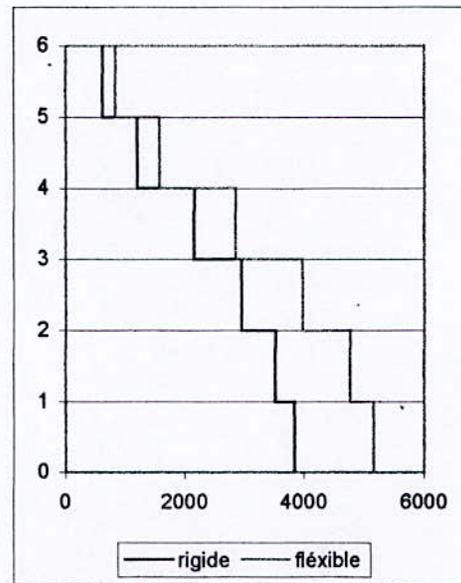


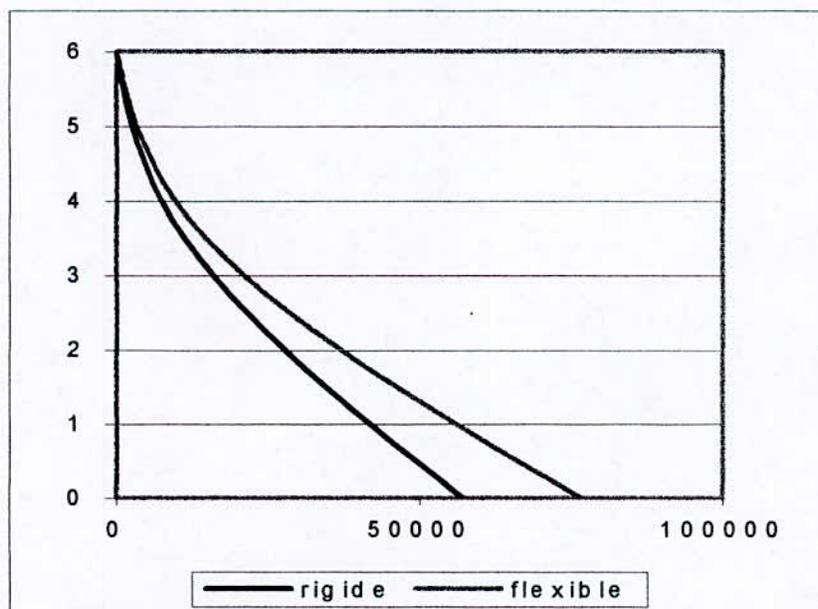
Figure (A.9) effet de la flexibilité sur la réponse déterministe de la structure uniforme.



Déplacement(m)



Effort tranchant(MN)



Moment fléchissant(MN.m)

Figure (A.10) effet de la flexibilité sur la réponse déterministe de la structure avec décrochement 33%.

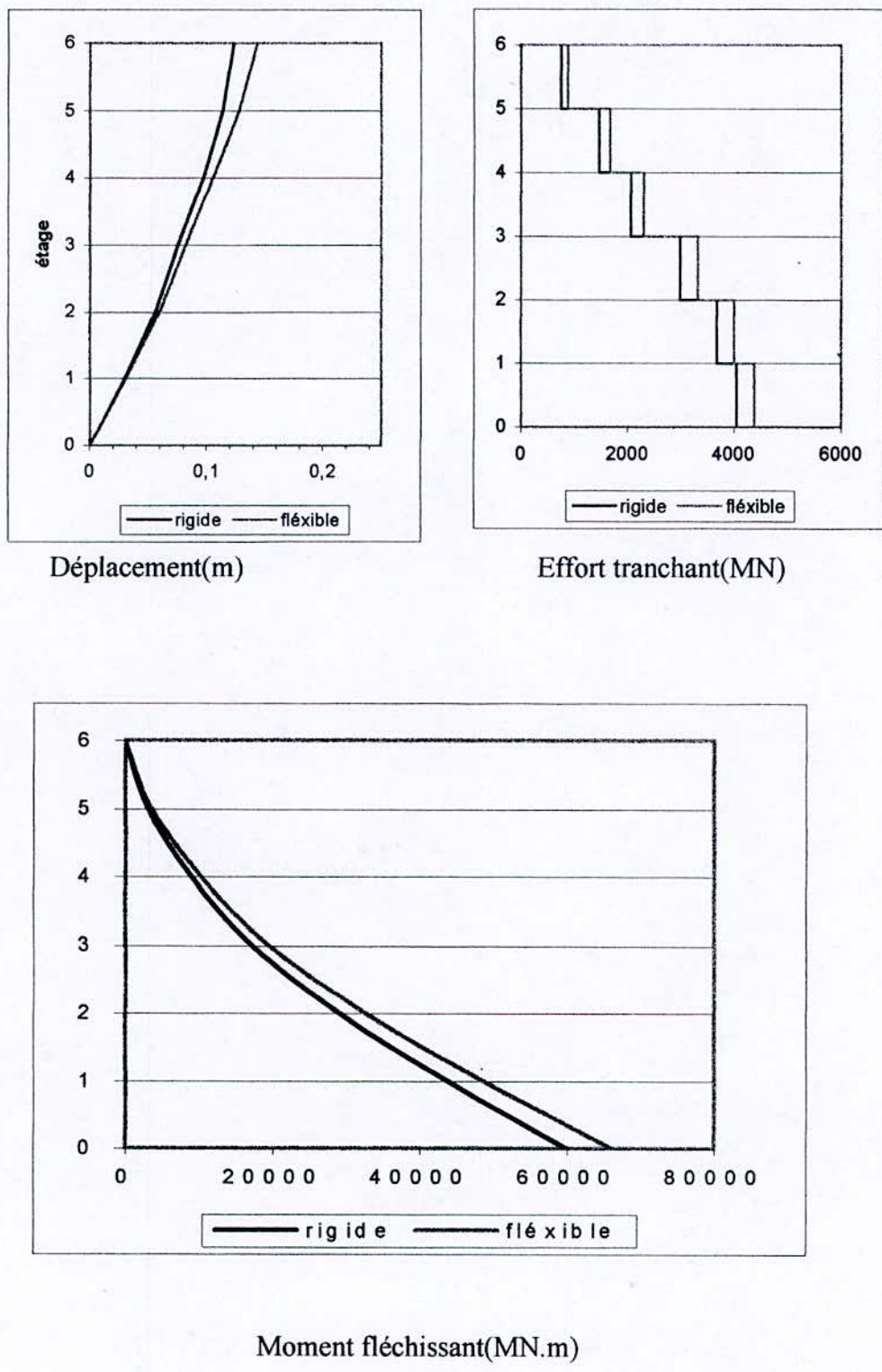


Figure (A.11) effet de la flexibilité sur la réponse déterministe de la structure avec décrochement 50%.

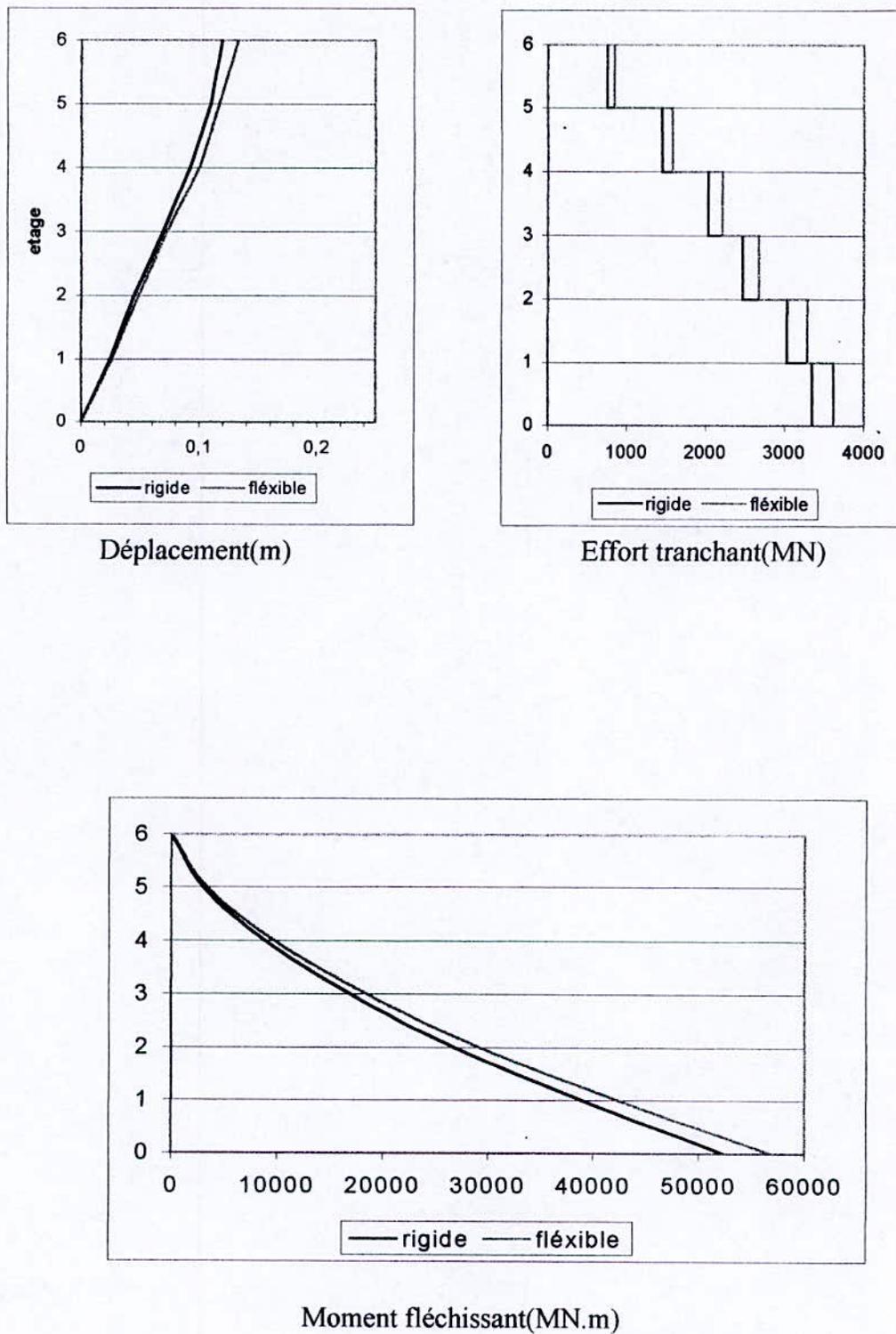
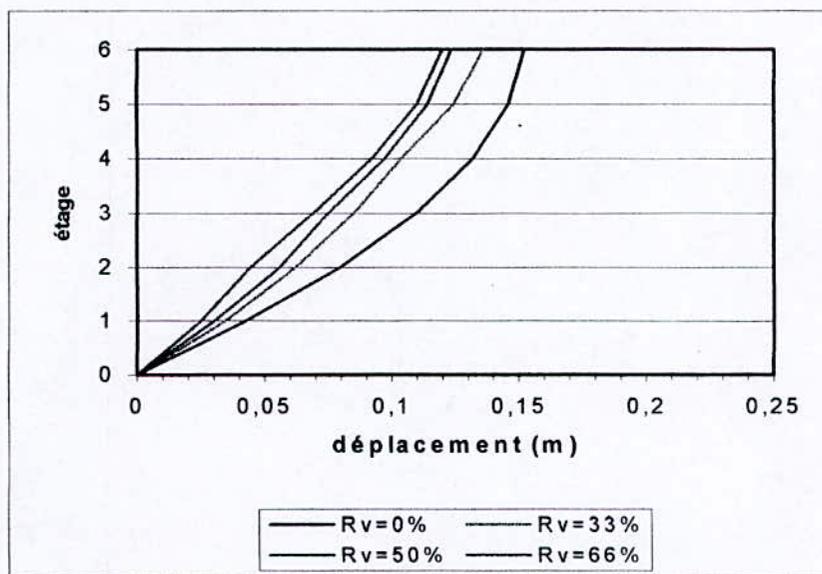
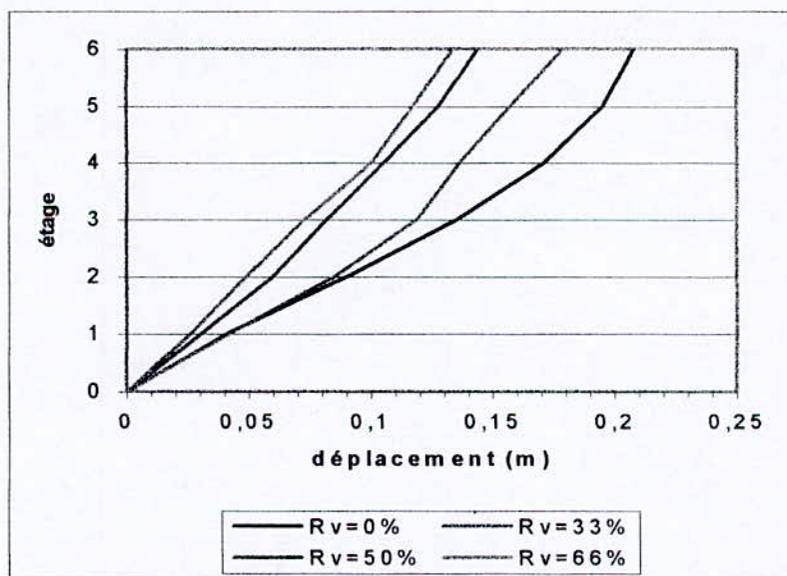


Figure (A.12) effet de la flexibilité sur la réponse déterministe de la structure avec décrochement 67%.

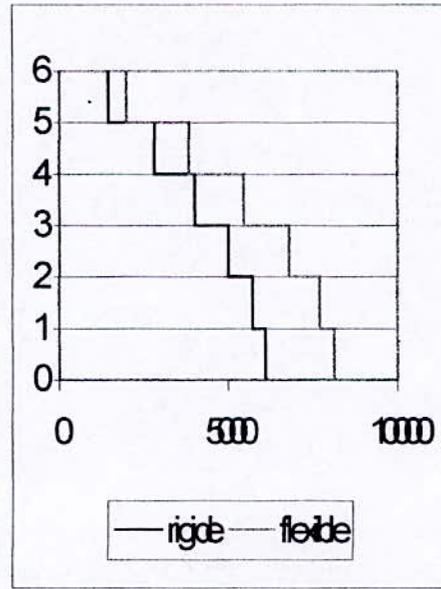
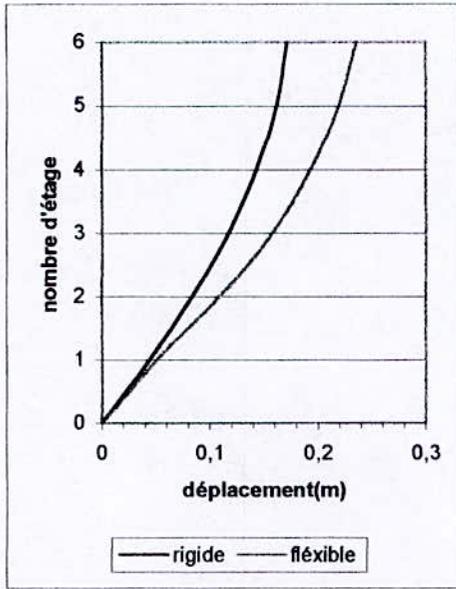


Figure(A.13) Effet du décrochement sur la réponse déterministe (planchers rigides).



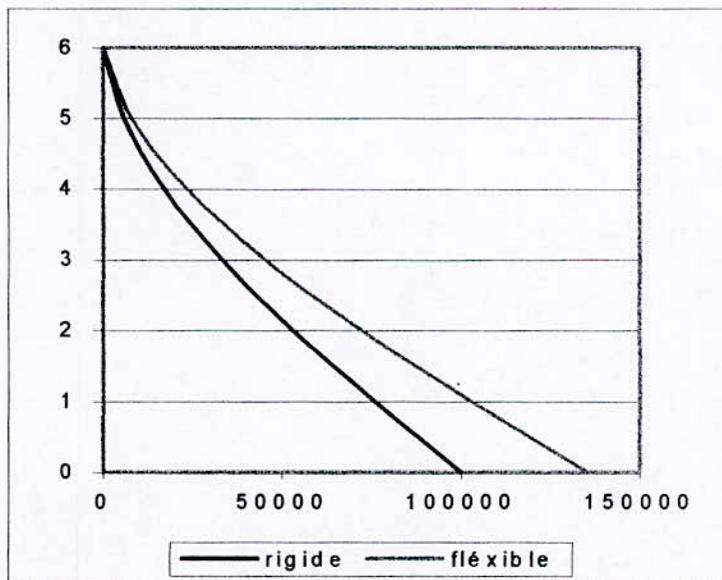
Figure(A.14) Effet du décrochement sur la réponse déterministe (planchers flexibles).

B) ETUDE STOCHASTIQUE



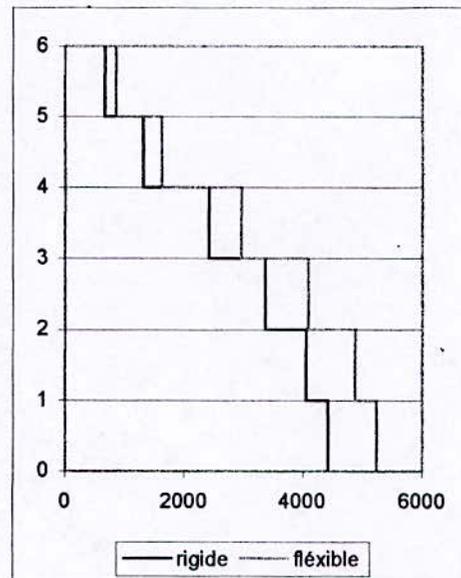
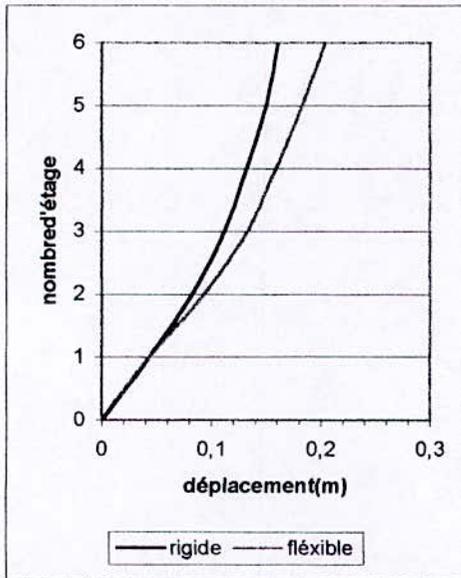
Déplacement(m)

Effort tranchant(MN)



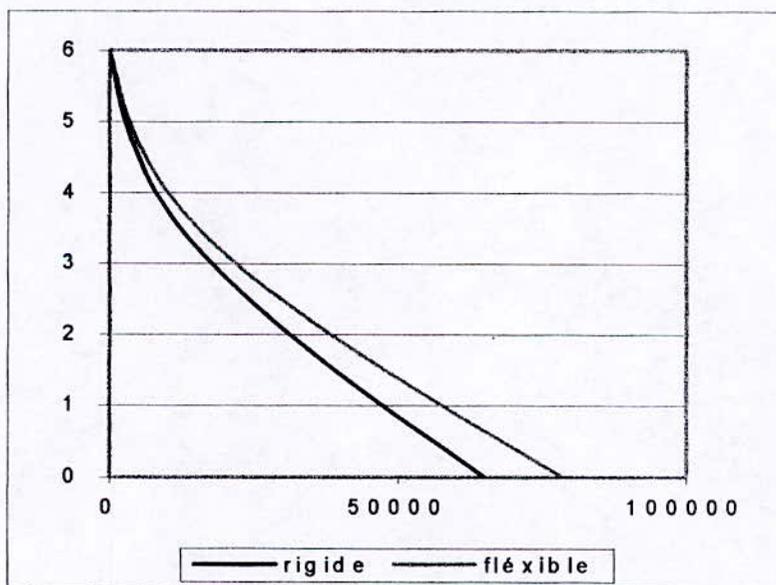
Moment fléchissant(MN.m)

Figure (B.1) effet de la flexibilité sur la réponse stochastique de la structure uniforme



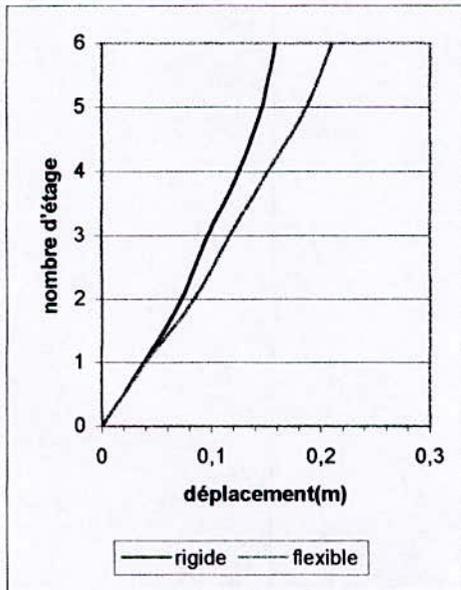
Déplacement(m)

Effort tranchant(MN)

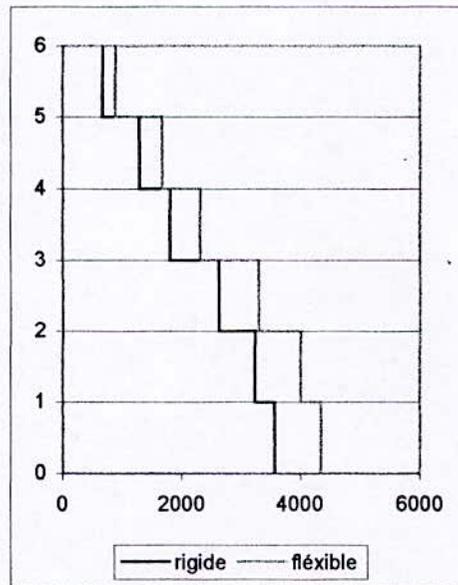


Moment fléchissant(MN.m)

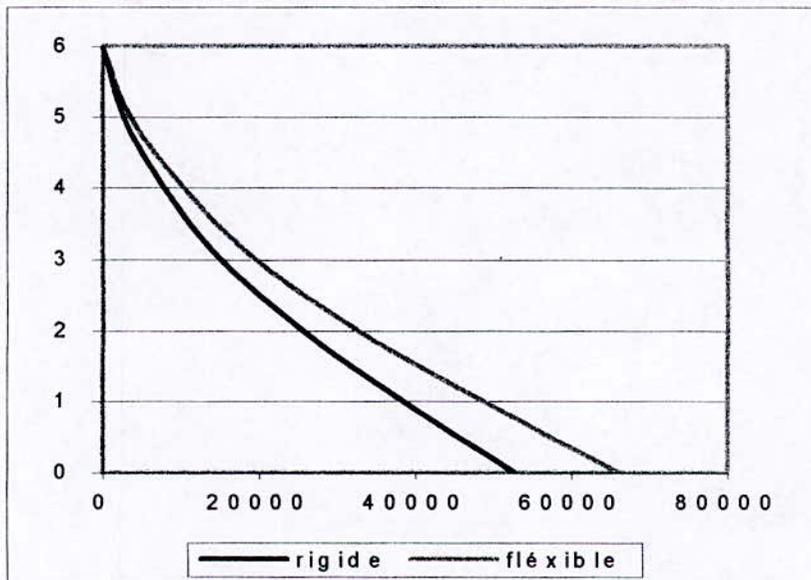
Figure (B.2) effet de la flexibilité sur la réponse stochastique de la structure avec décrochement 33%.



Déplacement(m)

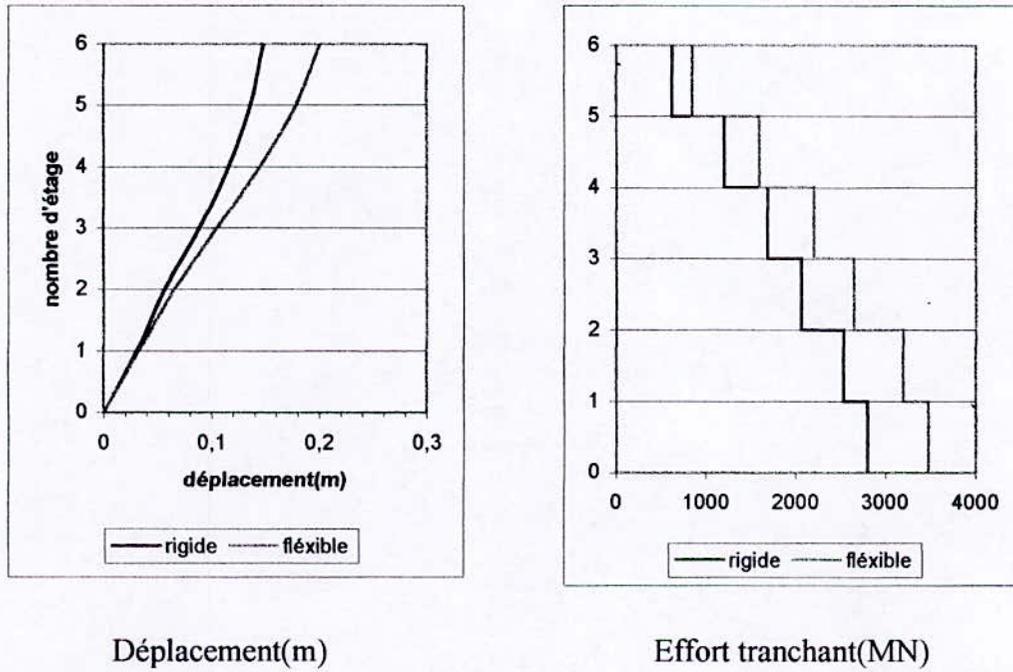


Effort tranchant(MN)



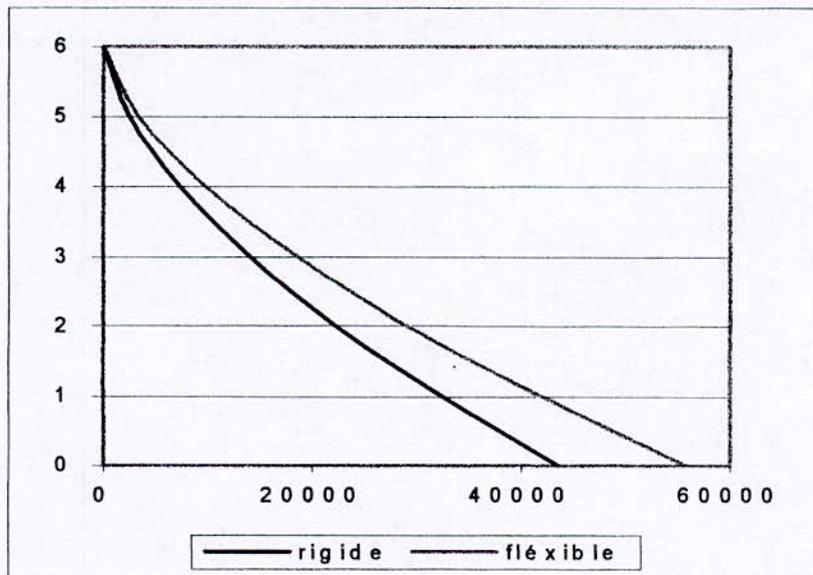
Moment fléchissant(MN.m)

Figure (B.3) effet de la flexibilité sur la réponse stochastique de la structure avec décrochement 50%.



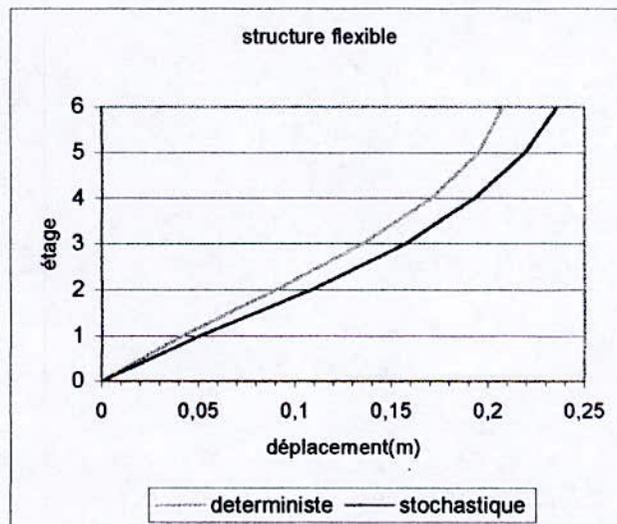
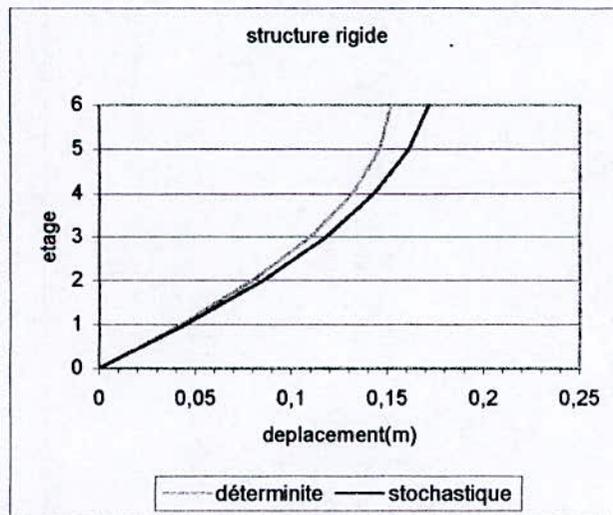
Déplacement(m)

Effort tranchant(MN)

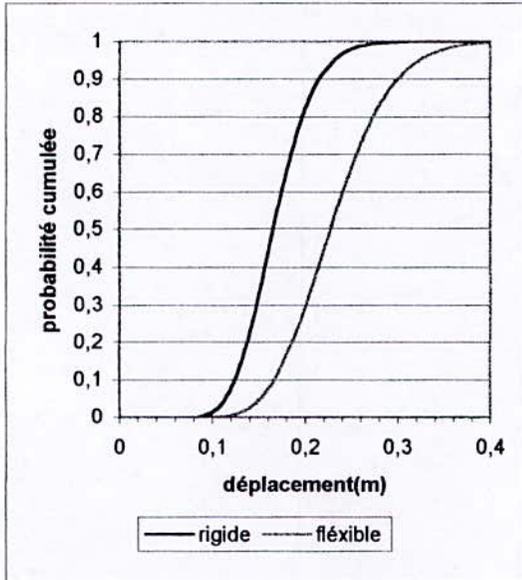


Moment fléchissant(MN.m)

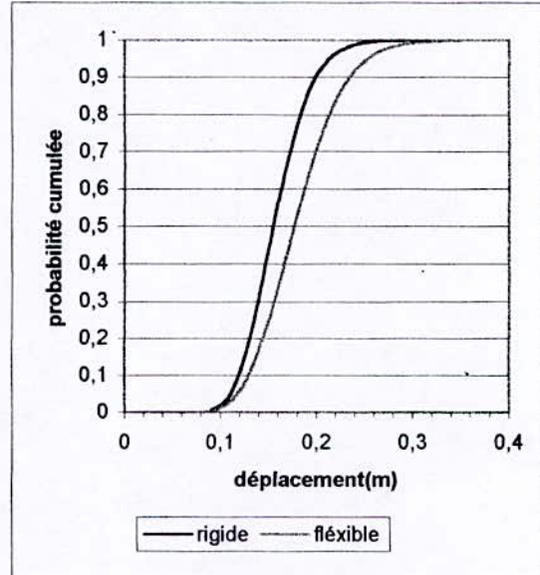
Figure (B.4) effet de la flexibilité sur la réponse stochastique de la structure avec décrochement 67%.



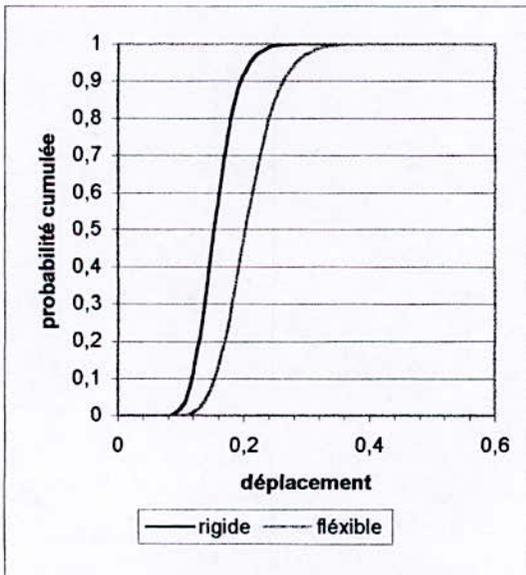
Figure(B.5) comparaison entre les déplacements de la structure uniforme obtenus selon les deux approches déterministes et stochastique pour des structures (rigide et flexible)



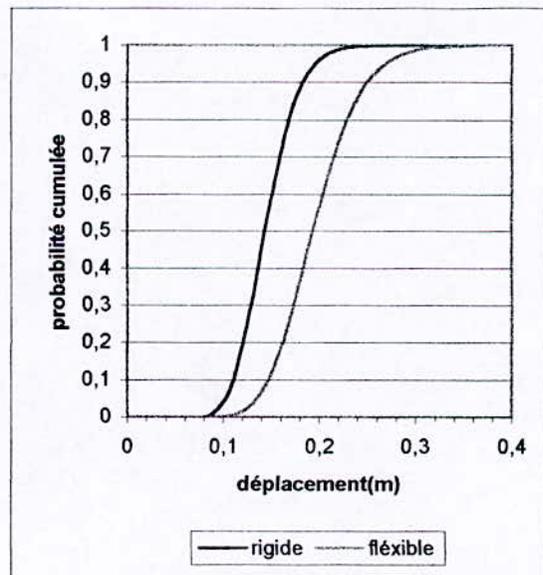
Décrochement 0%



Décrochement 33%

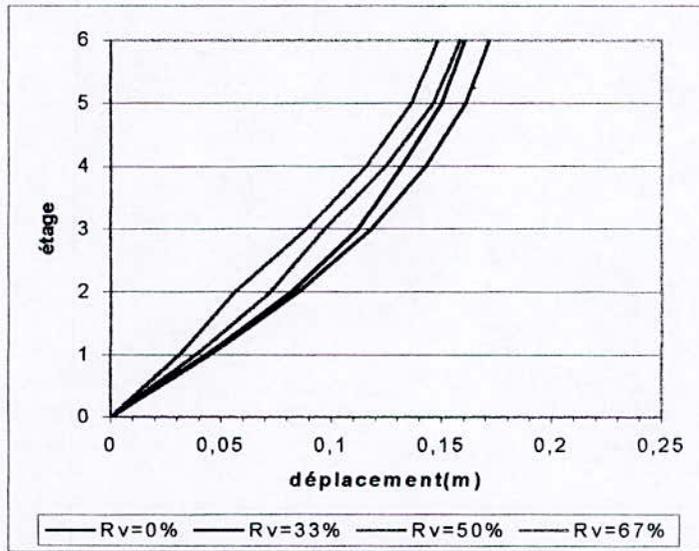


Décrochement 50%



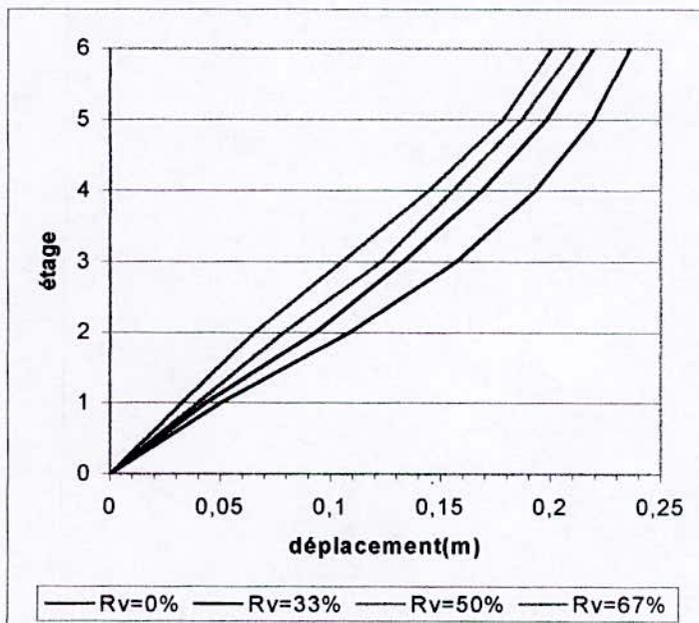
Décrochement 67%

Figure (B.6) effet de la flexibilité de la structure sur la distribution de probabilité .



Structure rigide

Figure(B.7) Effet du décrochement sur la réponse stochastique.



Structure flexible

Figure(B.8) Effet du décrochement sur la réponse stochastique.

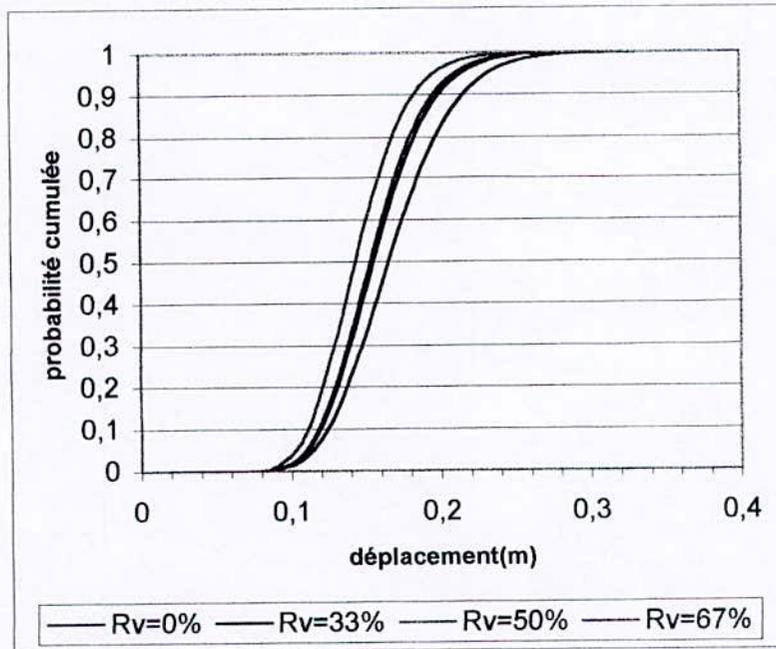


Figure (B.9) effet du décrochement de la structure sur la distribution de probabilité dans le cas des planchers rigides.

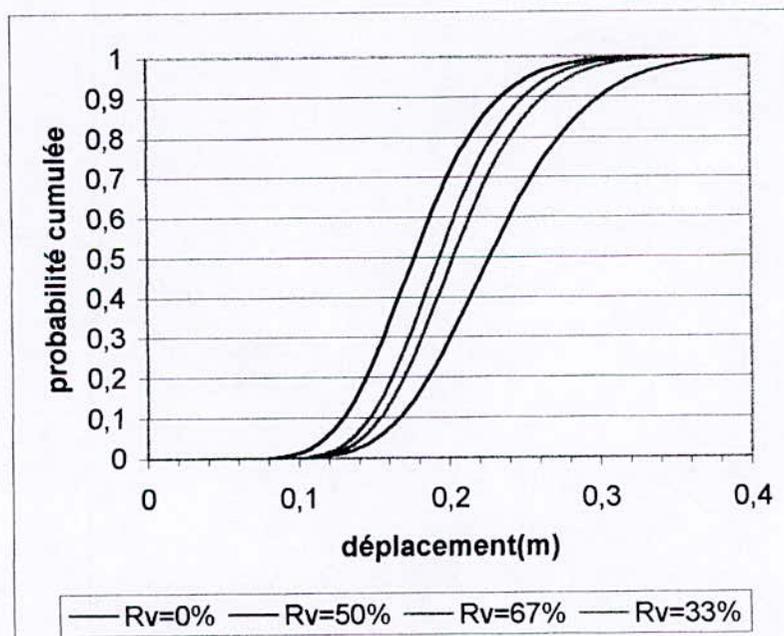


Figure (B.10) effet du décrochement de la structure sur la distribution de probabilité dans le cas des planchers flexibles.

V.3.2) STRUCTURE II:

La deuxième structure est du type P-S (primaire-secondaire). la structure primaire consiste en une structure à deux degrés de liberté (2DDL), supportant une structure secondaire, constituée d'un équipement léger à 1 DDL que nous désignons par un oscillateur.

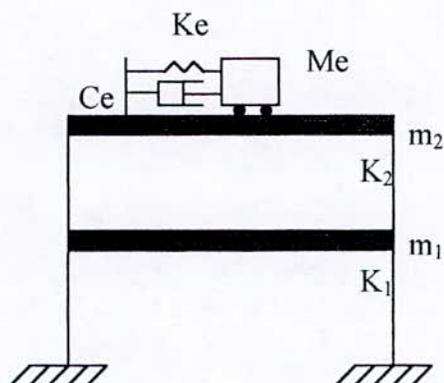
Ces caractéristiques du système primaire sont:

$$m_1 = m_2 = 30t$$

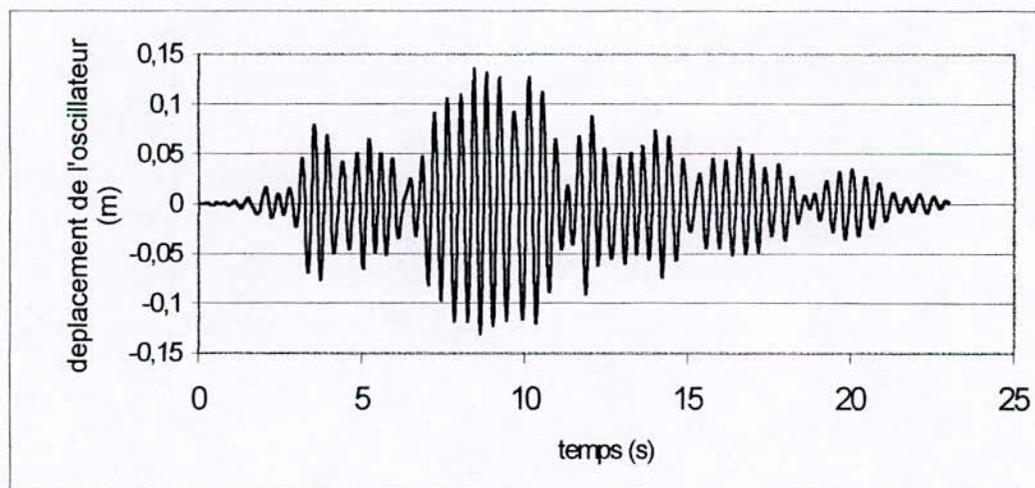
$$K_1 = K_2 = 19379 \text{ KN/m}$$

$$M_e = 0,003t$$

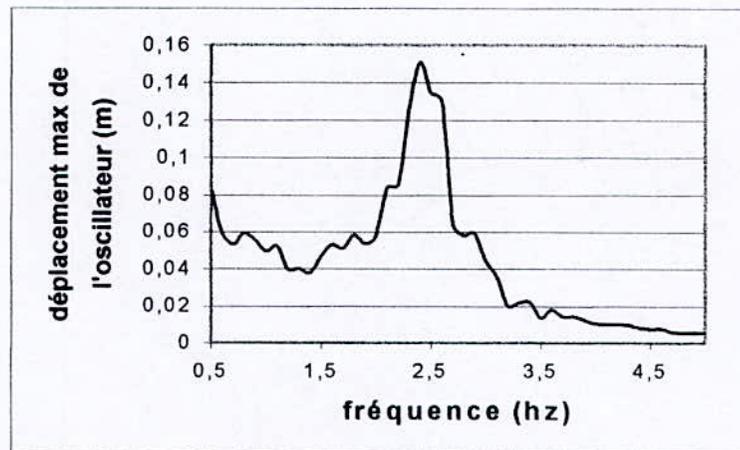
K_e est variable



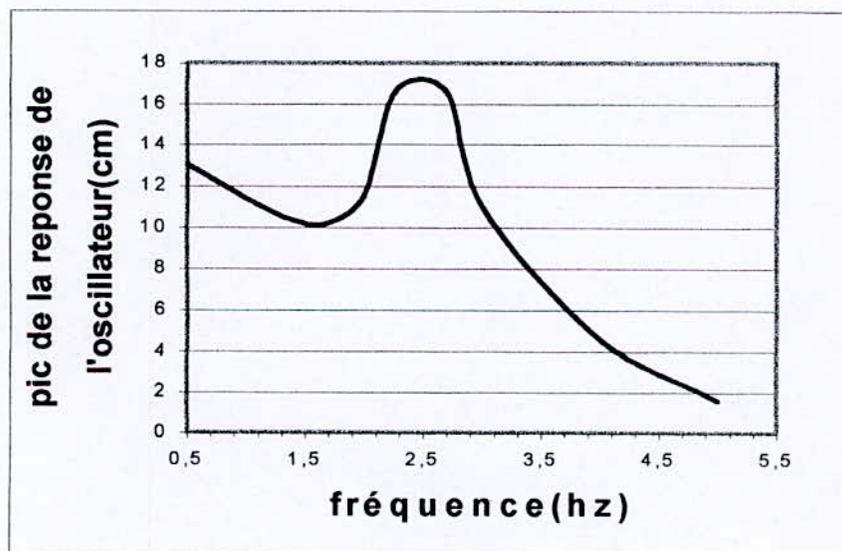
Structure primaire à deux DDL supportant un équipement à un DDL



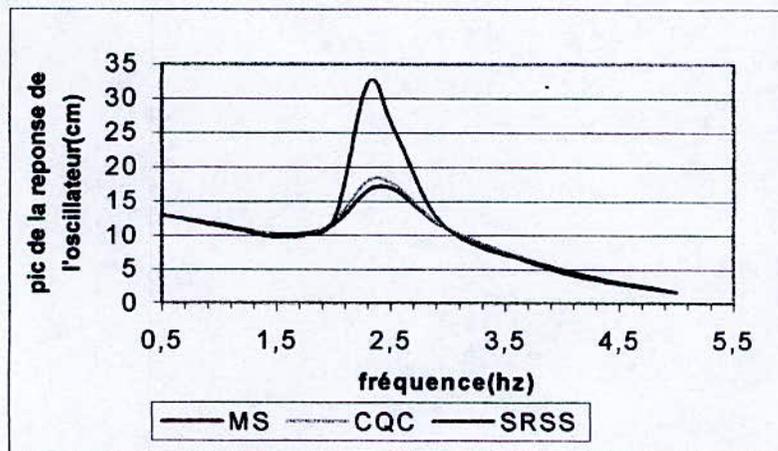
Figure(II.1) Histoire temporelle de l'oscillateur $\xi=0,05$ ($\omega_e=2,5\text{hz}$)



Figure(II.2) Spectre de plancher de oscillateur (déterministe) $\xi=0,05$.



Figure(II.3) Spectre de plancher de oscillateur (stochastique) $\xi=0,05$.
Méthode modalo- spectrale



Figure(II.3) Comparaison entre les trois méthodes (CQC,MS,SRSS)

Interprétation des résultats

Il a été largement explicite dans les chapitres précédents qu'il y a lieu de distinguer entre deux analyses fondamentalement différentes l'une de l'autre, cette distinction étant inhérente au mode de définition de l'excitation dynamique.

En effet, rappelons que si l'évolution dans le temps du chargement dynamique est connue, une analyse déterministe s'applique parfaitement, dans le cas contraire, une analyse stochastique s'impose.

Ainsi vue l'importance du mode de définition de l'excitation sismique, il nous a semblé intéressant de voir l'effet de la flexibilité des planchers ainsi que l'incidence du décrochement sur la réponse dynamique des structures autostables, selon les deux approches suscitées. Nous allons voir aussi l'effet de la flexibilité et du décrochement sur la deuxième application, on va s'intéresser à la réponse d'un oscillateur (équipement) fixé sur la deuxième plancher, d'une structure (primaire /secondaire).

Nous allons voir l'évolution de cet oscillateur pour une fréquence unique, ainsi que l'incidence de la variation de la fréquence de cet oscillateur sur sa réponse maximale.

La question nous conduit à déterminer le spectre de plancher fournis par les deux approches déterministe et stochastique.

Trois méthodes seront utilisées pour la détermination du spectre de plancher dans l'approche stochastique

- MS (méthode modale spectrale)
- CQC (combinaison quadratique)
- SRSS (square root of sum of squares)

Ainsi on peut voir l'effet des corrélations sur la réponse dynamique des structures.

Analyse des résultats

Nous constatons d'après les tableaux précédents que la période fondamentale de la structure A uniforme est plus grande que celle des structures avec décrochement.

La période fondamentale d'une structure dans le cas flexible est plus grande que celle dans le cas rigide

Effet de la flexibilité

L'un des objectifs, de cette étude est de voir la variation de la réponse avec la flexibilité selon les deux approches déterministe et aléatoire.

On remarque d'après les figures (A.1.2.3.....12) et de (B.1....4) les déplacements sont pour les quatre structures, plus importants dans le cas où les planchers sont supposés flexibles, ce qui implique que les efforts tranchants et les moments de flexion sont aussi importants que lorsque on considère que les planchers sont rigides.

Cela implique ainsi que la distribution de probabilité est plus importante dans le cas des planchers flexibles.

Effet du décrochement

On voit dans les figures (A.13) et (A.14) que plus le décrochement de la structure est important plus le déplacement maximum des étages diminue et cela est vérifié pour les structures à planchers rigide ou flexible.

D'après les figures on remarque que les déplacements maximaux des étages des structures avec décrochement vertical sont plus petits que ceux des étages du bâtiment uniforme.

On a constaté, ainsi que lorsque le décrochement croît la distribution de probabilité décroît ce qui est tout à fait prévisible.

On ce qui concerne la deuxième application nous avons déterminé l'histoire temporelle de l'oscillateur, pour une fréquence de l'oscillateur égale à 2,5 Hz ce qui correspond à la fréquence du mode fondamentale de la structure primaire, elle est appelée fréquence de tuning Figure (II.2)

Nous avons aussi varié la fréquence de l'oscillateur pour avoir l'incidence de celle-ci sur la réponse maximale. Ce qui nous conduit à calculer le spectre de plancher.

On peut remarquer que la réponse est maximale pour la fréquence de tuning et ce la pour les deux approches déterministe et stochastique.

Dans la figure (II.3) on voit que la méthode MS et CQC nous donne des résultats satisfaisants.

On voit ainsi que les résultats obtenus pour la méthode SRSS au voisinage de la fréquence de tuning sont très élevés, cela est dû au fait que le tuning donne naissance à des fréquences modales très proches et fortement corrélées et en plus ces corrélations intermodales sont des valeurs négatives. Il est évident que, l'omission de ces corrélations

Pour la SRSS provoque des surestimations irréalistes de la réponse. Ce la est une preuve de l'incapacité de la méthode de combinaison modale SRSS à estimer la réponse lorsque les méthodes sont voisines.

conclusion.

CONCLUSION:

Les principaux résultats et conclusions de cette étude peuvent être récapitulés comme suit :

- La période fondamentale d'une structure est plus grande dans le cas des planchers flexibles que dans le cas des planchers rigides.
- Les déplacements maximums des étages des structures avec décrochement vertical sont plus petits que ceux des étages du bâtiment uniforme.
- Les déplacements sont plus importants dans le cas où les planchers sont supposés flexibles .
- La période fondamentale d'une structure uniforme est plus grande que celle des structures en décrochements.
- Deux approches différentes l'une de l'autre ont été utilisées dans l'application :
 - Approche déterministe
 - Approche stochastique
- Les cross corrélations entre les réponses modales sont très significatives pour des modes avec des fréquences très proches.
- La méthode conventionnelle SRSS de combinaison modale qui néglige cette corrélation, ne peut être employée dans ce cas .
- La réponse des équipements fixes sur un plancher d'une structure est maximale pour des fréquences de tuning.
- L'approche déterministe utilise une représentation temporelle du séisme. Elle consiste à résoudre les équations de la dynamique sur un modèle mathématique de la structure étudiée. Elle nécessite le choix préalable des mouvements sismiques correspondant à un spectre de réponse d'oscillateur (SRO) de dimensionnement.
- Compte tenu du caractère aléatoire des signaux sismiques, l'utilisation d'un certain nombre de signaux différents est nécessaire pour atteindre une précision statistique suffisante (approche stochastique).

Notons qu'il est intéressant d'introduire d'autre paramètres et de prendre en compte d'autre considérations tel que :

- La non stationnarité des processus
- La non linéarité des déformations
- L'interaction sol structure
- L'amortissement non classique
- Les structures étendues dont l'excitation n'est pas uniforme.

ANNEXE

1. PROCESSUS DE GAUSS

1.1) variable aléatoires gaussienne :

une variable aléatoire est *gaussienne* ou *normale* si sa densité de probabilité peut se mettre sous forme :

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \quad -\infty < x < +\infty$$

m et σ sont respectivement la moyenne et l'écart type de la distribution.

$$m = E(x) = \int x p_x(x) dx$$

$$\sigma^2 = E[(x-c)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-c)^2 p_x(x) dx$$

ces deux constantes caractérisent complètement la distribution Gaussienne.

1.2) variable aléatoires conjointement Gaussiennes :

Deux variable aléatoires X et Y ont une distribution Gaussienne conjointe si leur densité peut s'écrire.

$$p_{x,y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y(1-\rho_{xy}^2)} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho_{xy} \frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right]\right\}$$

$$m_x = E(X)$$

$$m_y = E(Y)$$

$$\sigma_x^2 = E[(X-m_x)^2]$$

$$\sigma_y^2 = E[(Y-m_y)^2]$$

$$E[(X-m_x)(Y-m_y)] = \sigma_x\sigma_y\rho_{xy}$$

ces cinq grandeurs sont les seules impliquées dans la densité de probabilité. Elles la déterminent par conséquent complètement.

1.3) processus aléatoire Gaussien :

un processus stochastique $X(t)$ est dit Gaussien si les variables aléatoires $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ sont conjointement Gaussiennes pour toutes les valeurs t_1, t_2, \dots, t_n .

2) THEOREME DE LA LIMITE CENTRALE :

ce théorème établit que sous certaines conditions, la distribution d'une somme de variables aléatoires indépendantes est, à la limite, Gaussienne.

Soient x_i des VA indépendantes, identiquement distribuées, alors la distribution de la variable aléatoire définie par $y_i = \sum_{i=1}^N X_i$ approche lorsque N tend vers l'infini, une distribution dont la densité est la suivante :

$$p_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left[-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]$$

(m_y, σ_y) représentant respectivement la moyenne et l'écart type de la VA Y ($\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2}$)

la VA Y suit donc la distribution d'une loi normale de paramètres $(\sigma_y = \sigma_y^2)$. On note : $Y \approx N(m_y, \sigma_y^2)$

BIBLIOGRAPHIE

- (1) R. W. CLOUGH and J. PENZIEN, "dynamics of structures", Mac Crow-Hill 1975
- (2) V. DAVIDOVICI, "Génie parasismique", presse de l'école Nationale des ponts et chaussées 1985.
- (3) A. PREUMONT E, "vibration aléatoire et analyse spectrale", presse polytechnique et universitaire Romandes 1990.
- (4) CAPRA "
- (5) ZIDEMAL N, investigation du problème du premier passage de la réponse dynamique aléatoire des structures"
- (6) M. BENFERDJALLAH, "modélisation des planchers déformables pour l'étude de la réponse dynamique des structures auto-stable en décrochement"
- (7) LEBIB N, analyse déterministe et non déterministe des systèmes dynamique a amortissement non classique.
- (8) SLIMANI (8)"analyse dynamique des structures étendues soumises à l'effet de la variabilité spatiale de l'action sismique.
- (9) ORSERO (P)"analyse probabiliste des structures"
- (10) BATOZ et DATT : "modélisation des structures par éléments finis"
- (11) P. Piletier "techniques numérique appliquées au calcul scientifique"