

11/99

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

BIBLIOTHEQUE — المكتبة

Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département: Génie Civil

Mémoire de Fin d'Etude

*Pour l'Obtention du Diplôme
d'Ingénieur d'Etat en Génie Civil*

THEME

**Approche numérique du
comportement Elastoplastique
des structures**

Promoteur :

M^r ZEGHLACHE Brahim

Réalisé par:

M^r LOUAILECHE Nadir

M^r MEDJDOUB Abdennour

Co-Promotrice :

M^{me} CHERID

Promotion: 1998/1999

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

الدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département: Génie Civil

Mémoire de Fin d'Etude

*Pour l'Obtention du Diplôme
d'Ingénieur d'Etat en Génie Civil*

THEME

Approche numérique du comportement Elastoplastique des structures

Promoteur :

M^r ZEGHLACHE Brahim

Co-Promotrice :

M^{me} CHERID

Réalisé par :

M^r LOUAILECHE Nadir

M^r MEDJDOUB Abdennour

Promotion: 1998/1999

Dédicaces

A ma chère famille

A tous mes amis

Je dédie ce modeste travail

Abdenmour

Dédicaces

A mes parents que j'aime beaucoup

A mes adorables soeurs

A mes chers frères

A tout mes amis

Je dédie ce modeste travail



Nadir

Remerciements

A l'occasion de la présentation de cette thèse , nous remercions avec une sincère gratitude , notre promoteur M B. ZEGHLACHE pour tous les encouragements et la sollicitude avec laquelle il nous a orienté tout au long de ce travail .

Toute notre gratitude va aussi à notre co-promotrice M^{ne} CHERID pour l'intérêt qu'elle a témoigné à l'égard de notre travail .

Nous remercions également l'ensemble des enseignants qui ont eu l'amabilité de nous accorder leurs aides précieuses ainsi que leurs conseils , et spécialement M^{ne} MOHABDINE et M LAKHAL .

*Sans oublier l'ensemble du personnel du centre de calcul de l'école , et de la bibliothèque
Qui n'ont guère tardés a nous soutenir .*

Et tous ceux qui ont participer de loin ou de près pour aboutir à ce résultat .

RESUME

L'objet de ce travail est l'étude, dans le cas statique, du comportement elastoplastique parfait des structures. Cette étude a nécessité tout d'abord l'élaboration d'un logiciel de calcul par éléments finis. Ce logiciel permet de résoudre un problème linéaire ou non linéaire de statique. Divers type d'algorithme ont été considéré et une stratégie de calcul à été élaboré en introduisant le modèle de Drucker Prager.

Une application au comportement du sol sous une fondation superficielle rigide constitue la deuxième partie de ce travail.

Mots clés:

Elastoplasticité - Elasticité - Elément fini - Modèle de Drucker Prager - Fondation - Sol - Non-linéaire - Ecrouissage - Intégration - Rigidité - Comportement - Frottement - Charge - Déplacement - Déformation - Cohésion - Mécanique des sols.

Résumé

L'objet de ce travail est l'étude, dans le cas statique du comportement elastoplastique des structures par la méthode des éléments finis.

Mots clés : Elastoplasticité – Elasticité – Élément fini – modèle de Drucker-Prager – Frottement – Charge – Cohésion – Déformation.

Abstract

The subject of this study is the application of finite element method for studying in static the elastoplastic behaviour of structures.

Key Words : Elastoplastic – Elastic – Finite element – Drucker Prager model – Stress-Strain.

ملخص:

يهدف هذا البحث إلى دراسة في حالة حمولة ساكنة السلوك الإلستوبلاستيكي للمنشآت، باستعمال العناصر المنتهية.

الكلمات المفتاحية : الإلستوبلاستيك - إلتستيك - عناصر منتهية - احتكاك - حمولة.

Sommaire

CHAPITRE I

INTRODUCTION GENERALE

1

CHAPITRE II

LE COMPORTEMENT ELASTIQUE

II.1 Introduction	4
II.2 Les relations contraintes déformations en élasticité	4
II.2.1 Elasticité tridimensionnelle (cas général)	4
II.2.2 Elasticité plane	6
II.2.2.1 Contraintes planes	6
II.2.2.2 Déformations planes	7
II.3 Invariants des tenseurs contraintes et déformations	7

CHAPITRE III

LE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE

III.1 Le schéma elastoplastique et l'expérience de traction simple	10
III.2 Surface de charge	11
III.3 Cas de chargement ou de déchargement	12
III.4 Potentiel plastique. Règle d'écoulement	14
III.5 multiplicateur de plasticité .Module d'écrouissage	15
III.6 L'écrouissage	17
III.7 Déformation totale . Matrice de rigidité elastoplastique	20
III.8 Critères classiques de plasticité	21
a) Critère de Coulomb	22
b) Critère de Tresca	23
c) Critère de Mohr	23
d) Critère de Von Mises	24
III.9 Modèle de Drucker Prager	
1) Critère de Drucker Prager tangent intérieurement au critère de Coulomb	27
2) Critère de Drucker Prager circonscrit au critère de Coulomb	27
3) Critère intermédiaire	27
III.9.1 Formulation de la matrice de rigidité elastoplastique	27

CHAPITRE IV METHODE DES ELEMENTS FINIS

IV.1 Historique	29
IV.2 Différentes approximations de la méthode des éléments fins	30
IV.2.1 Approximation nodale	30
IV.2.2 Approximation par élément finis	31
IV.2.3 Définition de la géométrie des éléments	32
IV.2.3.1 Quelques formes classiques d'éléments	32
IV.2.3.2 Elément de référence	32
IV.2.4 Approximation sur un élément de référence	34
IV.3 Formulation intégrale	36
IV.3.1 Formulation intégrale et discrétisation	36
IV.3.2 Analyse locale . Calcul de la matrice de rigidité élémentaire	38
IV.3.3 Analyse globale .Assemblage	40

CHAPITRE V METHODES NUMERIQUES

V.1 Intégration numérique	41
V.1.1 Intégration numérique à une dimension	43
V.1.1.1 Méthode de Gauss	43
V.1.1.2 Méthode de Newton-Cotes	44
V.1.2 Intégration numérique à deux dimensions	45
a) Méthodes « produit »	45
b) Méthodes directes	45
V.1.2.1 Elément de référence carré	46
V.1.2.2 Elément de référence triangulaire	46
a) Méthode de Gauss-Radau	46
b) Méthode directe	46
V.1.3 Précision de l'intégration	47
V.1.4 Choix du nombre de points d'intégration	47
V.2 Résolution de systèmes d'équations linéaires	48
V.3 Méthodes de résolution des systèmes d'équations non linéaires	49
- Méthode de substitution	49
- Méthode de Newton-Raphson	50
- Méthode de Newton-Raphson modifiée	51
- Méthode de quasi-Newton	51
- Méthode incrémentale	53
V.4 Critères de convergence	54
1) Critère en déplacement	54
2) Critère en force	54
3) Critère en énergie interne	54

CHAPITRE VI
IMPLEMENTATION NUMERIQUE DES RELATIONS
INCREMENTALES DE L'ELASTOPLASTICITE

VI.1 Description générale	58
VI.2 Détermination de l'état de chargement	58
VI.3 Techniques d'intégration	61
VI.4 Contrôle et correction	66
VI.5 La procédure générale pour le calcul des contraintes	67

CHAPITRE VII
PRESENTATION DU PROGRAMME « PLAS »

VII.1 présentation générale	69
VII.2 Les organigrammes généraux	70

CHAPITRE VIII
APPLICATIONS DU CODE DE CALCUL ELABORE

VIII.1 Introduction	76
VIII.2 Stratégie de calcul	76
VIII.3 Applications	78
VIII.4 Modélisation du problème	79
VIII.5 Remarques et conclusions	92

CONCLUSION GENERALE	94
----------------------------	----

BIBLIOGRAPHIE
ANNEXES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

CHAPITRE

Introduction Générale

INTRODUCTION GENERALE

La conception des ouvrages et structures en génie civil implique généralement deux processus : le premier est l'évaluation du champ de forces appliqué à la structure du matériau, le second est la détermination de la réponse du matériau à ces champs. Le premier processus nécessite une analyse des contraintes à l'intérieur des éléments de la structure. Le deuxième, quant à lui, il nécessite une connaissance des propriétés et du comportement des matériaux de la structure.

Le sol, ce matériau complexe, qui sert non seulement de support pour les ouvrages mais aussi de matériau de construction pour les routes et les barrages, a, depuis 1773, donné naissance à une nouvelle science «la mécanique des sols». Comparer avec les autres branches de l'ingénieur, les propriétés du matériau en mécanique des sols doivent être mesurées au lieu d'être spécifiées par un fabricant ou autre.

La relation linéaire entre contraintes et déformations dans les matériaux (sols) idéalisés forme la base de la théorie mathématique d'élasticité. Cette hypothèse trop contraignante, a amené les chercheurs à proposer un comportement au delà de l'élasticité, c'est à dire, la plasticité.

La théorie de la plasticité représente une extension nécessaire de la théorie d'élasticité. Elle fournit une estimation plus réaliste des capacités de chargement des éléments de la construction.

Coulomb en 1773 fut le premier à proposer un critère de plasticité qui fut appliqué par **Porcelet** (1840) et **Rankine** (1853) aux calculs de travaux de soutènements. **Tresca** en 1864 publia les résultats de ses expériences sur les métaux et proposa un nouveau critère basé sur la constatation qu'un métal présente un comportement plastique quand la contrainte de cisaillement atteint un seuil critique. **Saint – Venant** appliqua le critère de **Tresca** en 1870-1872 pour étudier un tube sous torsion ou flexion et introduisit le concept du corps parfaitement plastique pour ce problème. En 1871 **Lévy** adoptant ce concept proposa des relations tridimensionnelles entre contraintes et incréments de déformations plastiques :

$$d\Sigma_{ij} = S_{ij} \cdot d\lambda$$

où Σ_{ij} est le tenseur des déformations,
 S_{ij} le tenseur deviatorique des contraintes,
 $d\lambda$ un scalaire

Les équation de Levy ne trouvèrent pas une large diffusion en dehors de la France jusqu'en 1913 où von Mises les formula indépendamment.

L'inconvénient des équations de Levy – Mises qui supposent un matériau fictif à déformations élastiques nulles fut levé par **Prandtl** en 1924 pour le problème plan et par **Reuss** en 1930 pour le problème tridimensionnel. **Reuss** écrivait :

$$d\Sigma_{ij}^P = S_{ij} d\lambda$$

Où Σ_{ij}^P est le tenseur des déformations plastiques.

Au début des années cinquante, grâce à l'avancée des recherches théoriques, des expérimentations en laboratoire et des méthodes d'analyse numérique, un nombre de chercheurs se pencheront de façon plus aiguë sur le comportement elastoplastique des sols. **Prager** publie en 1949 un plan général de travail pour les relations constitutives interminables de plasticité. Il introduit les concepts de l'écroutissement, la fonction de charge, la condition de consistance. **Hill** en 1950 publia lui aussi «The mathematical theory of plasticity» où il introduisit l'hypothèse du «travail maximal» et posa les bases d'une conception complète de la théorie de plasticité. Ses dernières quarante années, une multitude de publications a paru sur ce sujet, de nombreux modèles mathématiques ont été élaborés pour représenter le plus fidèlement possible le comportement des sols.

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes adaptées à l'étude du comportement des sols. Elle s'applique aux problèmes stationnaires ou dépendant du temps, linéaire ou non, à une, deux ou trois variables d'espaces indépendantes.

Nous avons opté pour cette méthode vue les avantages qu'elle présente. En effet, malgré la difficulté de sa programmation, cette méthode permet :

- La facilité de prendre en compte les conditions aux limites.
- La souplesse considérable dans le choix du maillage (éléments à formes et dimensions variables)

La recherche entreprise ici s'organise en 3 parties (7 chapitres) :

La première partie est une synthèse bibliographique qui fait le point des connaissances actuelles sur le comportement des sols.

Chapitre 2 : comportement élastique.

Chapitre 3 : comportement elastoplastique.

La deuxième partie est la mise au point d'algorithmes de résolutions par la méthode des éléments finis des problèmes linéaires et non linéaires.

Chapitre 4 : présentation de la MEF.

Chapitre 5 : méthodes des résolutions d'équations linéaires et non linéaires.

Chapitre 6 : Implémentation numérique des relations incrémentales de l'elastoplasticite

Chapitre 7 : présentation de l'organisation générale du programme

Enfin, la troisième partie présente un certain nombre d'applications et de mises en œuvre du programme.

CHAPITRE

Le comportement Elastique

COMPORTEMENT ELASTIQUE

II.1 Introduction :

Dans les problèmes pratiques, on peut considérer les sols comme des massifs semis – infinis ou finis à deux ou trois dimensions.

L'homme, mais aussi la nature, soumettent ces massifs à différentes sollicitations. Parmi lesquelles on peut distinguer :

- Les forces massiques :
 - Pesanteur,
 - Poussée d'écoulement, ...
- Les charges surfaciques :
 - Ponctuelles,
 - Reparties.

Si ces efforts sont faibles ou modérés eu égard à la résistance du sol, les déformations du massif restent faibles, se stabilisent dans le temps et sont grossièrement proportionnelles aux forces appliquées, on peut considérer que le sol se comporte comme un solide élastique et appliquer la théorie de l'élasticité.

II.2 Les relations contraintes-déformations en élasticité :

II.2.1 Elasticité tridimensionnelle (cas général) :

Dans ce cas, la relation contrainte – déformation est donnée par la loi de **Hook** généralisée. Celle-ci s'écrit (en notation matricielle) :

$$[\sigma] = [c] \cdot [\varepsilon] \quad (\text{II.1})$$

où :

*/ $[\sigma]$ est le tenseur contrainte.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

on peut aussi écrire :

$$[\sigma] = [\sigma]^S + [\sigma]^D \quad (\text{II.3})$$

où : $[\sigma]^S$ est le tenseur contrainte sphérique responsable de la dilatation volumique.
 et $[\sigma]^D$ est le tenseur contrainte déviatorique responsable de la scission et de l'écart des contraintes normales par rapport à la contrainte moyenne.

$$[\sigma]^S = P. [I] \quad (\text{II.4})$$

$$\text{et } [\sigma]^D = [\sigma] - P.[I] \quad (\text{II.5})$$

$$\text{avec } p = \frac{1}{3}(\sigma_{ii}) = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})}{3} \quad \text{et } [I] \text{ la matrice unité.}$$

Un élément du tenseur contrainte déviatorique $[\sigma]^D$ est noté "Sij".

*/ $[\varepsilon]$ est le tenseur déformation.

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

on peut aussi écrire comme le cas du tenseur contrainte :

$$[\varepsilon] = [\varepsilon]^S + [\varepsilon]^D \quad (\text{II.7})$$

où : $[\varepsilon]^S$ est le tenseur de déformation sphérique responsable de la dilatation volumique $\frac{\Delta v}{v}$

et $[\varepsilon]^D$ est le tenseur déviatorique.

$$[\varepsilon]^S = \frac{(\varepsilon_{ii})}{3} [I] \quad (\text{II.8})$$

$$[\varepsilon]^D = [\varepsilon] - \frac{(\varepsilon_{ii})}{3} \cdot [I] \quad \text{avec } [I] \text{ la matrice unité,} \quad (\text{II.9})$$

$$\text{et } (\varepsilon_{ii}) = \frac{\Delta v}{v} \quad (\text{II.10})$$

Un élément du tenseur deviatorique est noté (e_{ij}) .

*/ $[C]$ est la matrice relation contrainte – déformation.

Pour un matériau isotrope, les constantes élastiques sont indépendantes des axes de coordonnées, la matrice relation contrainte – déformation $[C]$ s'écrit :

$$[C] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ \text{Symétrique} & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé, avec :

$$\lambda = \frac{\nu}{(1+\nu)} \cdot \frac{E}{(1+2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

E : module de Young ,

ν : coefficient de poisson ,

G : module de cisaillement.

II.2.2 Elasticité plane :

Quand les équations écrites précédemment (dans le cas tridimensionnel) ne dépendent pas de l'une des trois dimensions, le problème se réduit donc à deux dimensions, ce cas est appelé «Elasticité plane ».

Les problèmes d'élasticité plane sont placés en deux catégories :

- Contraintes planes ,
- Déformations planes.

II.2.2.1 Contraintes planes :

Pour les solides minces avec un état de contrainte caractérisé par $\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$, la relation contrainte – déformation s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

ou :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

II.2.2.2 Déformations planes :

Pour un solide, dont la dimension suivant l'axe Z est très grande, avec un état de déformation caractérisé par $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0$,

la relation contrainte -déformation s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

Notons dans ce cas que la contrainte σ_{zz} peut être déterminée en fonction des autres composantes :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{zz} = 0 \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (\text{II.15})$$

II.3 Invariants des tenseurs contraintes et déformations :

L'utilisation des invariants des tenseurs contraintes rend plus commode la formulation d'un nombre de relations par la suite.

Pour le tenseur contrainte $[\sigma]$ défini dans un repère orthonormé Mxyz, les invariants sont:

$$I_1 = (\sigma_{ii}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (\text{II.16})$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{II.18})$$

Où le symbole " $\begin{vmatrix} \end{vmatrix}$ " signifie déterminant.

Si le repère Mxyz est un repère principal. Soient $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ses contraintes principales ordonnées dans l'ordre décroissant $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Alors ses invariants s'écrivent :

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1 \\ I_3 &= \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

Pour le tenseur contrainte deviatorique $[\sigma]^D$ défini dans un repère orthonormé Mxyz, les invariants sont comme précédemment avec les notations " S_{ij} " au lieu de " σ_{ij} ".

$$[\sigma]^D = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & & \sigma_{33} - p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

Ses invariants sont :

$$\begin{aligned} J_1 &= S_{ii} \\ &= S_{11} + S_{22} + S_{33} = S_X + S_Y + S_Z \end{aligned} \quad (\text{II-21})$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} S_{ij} \cdot S_{ji} \\ &= \frac{1}{2} (S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 + 2 S_{12}^2 + 2 S_{23}^2 + 2 S_{13}^2) \\ &= \frac{1}{2} (S_X^2 + S_Y^2 + S_Z^2 + 2 S_{XY}^2 + 2 S_{XZ}^2 + 2 S_{YZ}^2) \end{aligned} \quad (\text{II-22})$$

$$J_3 = \frac{1}{2} S_{ij} \cdot S_{jk} \cdot S_{ki} \quad (\text{II-23})$$

Dans le repère principal précédent Mxyz, les contraintes principales du tenseur deviatorique sont S_1 , S_2 et S_3 avec :

$$S_i = \frac{2\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k}{3}, \quad i \neq j \neq k \quad (\text{II-24})$$

σ_i la contrainte principale du tenseur contrainte.

Ses invariants seront :

$$\begin{aligned} J_1 &= S_1 + S_2 + S_3 \\ J_2 &= \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \\ J_3 &= S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \end{aligned} \quad (\text{II-25})$$

Pour les tenseurs déformations, on a exactement les mêmes expressions pour les invariants notés alors I_1 , I_2 , I_3 et J_1 , J_2 , J_3 relatifs aux invariants respectifs I_1 , I_2 , I_3 et J_1 , J_2 , J_3 ; avec σ_{ij} et S_{ij} respectivement ε_{ij} et e_{ij} ; au lieu des quantités principales σ_i et S_i respectivement les déformations principales ε_i et e_i relativement aux mêmes axes.

CHAPITRE

Le comportement Elastoplastique

LE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE

Pour pouvoir étudier les modèles élastoplastiques et les programmer par la méthode des éléments finis, nous présenterons brièvement dans les paragraphes suivants des généralités sur l'élastoplasticité.

Un corps est dit avoir un comportement «élastoplastique» quant au-delà d'un certain niveau de chargement il présente des déformations réversibles (élastiques) mais aussi des déformations irréversibles (plastiques) et que ces déformations et contraintes obéissent à des lois bien précises.

Le schéma élastoplastique pour le comportement des matériaux a été initialement élaboré à partir des résultats expérimentaux relatifs au comportement des métaux. Les domaines d'application de cette modélisation débordent maintenant ce cadre puisque l'on résout des problèmes d'élastoplasticité pour des applications tant en mécanique des sols qu'en calcul des structures.

Ce schéma de comportement exclut tout effet de vieillissement, de viscosité du matériau et du paramètre temps, il s'appuie sur les deux concepts fondamentaux suivants :

- Le critère de plasticité, qui généralise la notion du seuil de plasticité mise en évidence dans les expériences de sollicitations uniaxiales.
- La règle d'écoulement plastique, qui définit dans le cas des sollicitations multiaxiales, la façon dont évolue la déformation plastique.

III.1 Le schéma élastoplastique et l'expérience de traction simple :

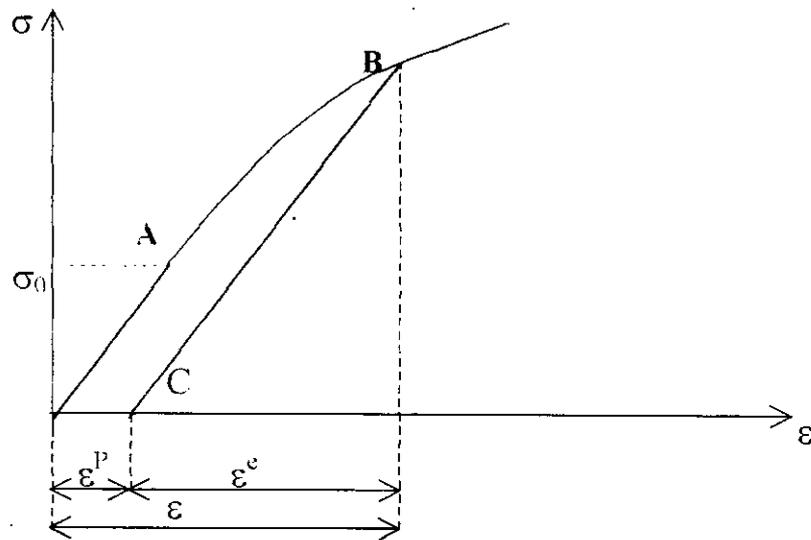
Considérons une sollicitation uniaxiale sur un corps ayant un comportement élastoplastique écrouissable (fig III.1). L'effet du temps est supposé négligeable.

Le comportement du matériau jusqu'au point A est élastique linéaire. En déchargeant, on revient au point de départ 0 ; toutes les déformations sont réversibles. En continuant le chargement, des déformations irréversibles (dites déformations plastique ϵ^p) apparaissent. Dans ce cas, la déformation totale est la somme des déformations élastique ϵ^e et plastique ϵ^p

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

Le point A, au-delà duquel on a des déformations plastiques est le seuil de plasticité initial. Le point B est le seuil de plasticité actuel.

Cette élévation du seuil de plasticité s'appelle : **l'écrouissage**.



FigIII.1 Déformations réversible et irréversible

III.2 Surface de charge :

D'une façon plus générale et pour le cas de la sollicitation multiaxiale, le seuil de plasticité est remplacé par une fonction scalaire f qu'on peut écrire en général sous la forme :

$$f(\sigma_{ij}, R) = 0 \quad (III.1)$$

Avec :

σ_{ij} : tenseur des contraintes,

R : l'ensemble des paramètres «cachés» ou «d'écrouissage»

Les paramètres d'écrouissage sont des fonctions déformations plastiques.

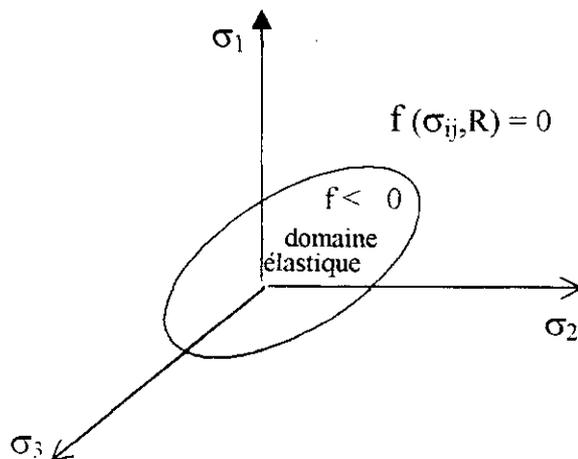


Fig III.2 Surface de charge.

La fonction $f = 0$ est représentée, dans l'espace des contraintes, par une surface dite « surface de charge ». f est appelée fonction de charge ou encore fonction d'écoulement.

Pour $f < 0$, on est dans le domaine d'élasticité et les déformations sont uniquement élastiques.

Pour $f = 0$, les déformations élastiques peuvent être éventuellement accompagnées de déformations plastiques.

$f > 0$, est un état de contraintes physiquement impossible.

Quand l'expression de la surface de charge ne contient pas de paramètres d'écrouissage, la plasticité est dite parfaite.

III.3 Cas de chargement ou de déchargement :

Pour un état de contrainte σ_{ij} tel que $f(\sigma_{ij}, R) = 0$, on peut avoir deux cas possibles :

1^{er} cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\sigma_{ij}, R) = 0 \quad \text{(III.2a)} \\ \frac{\partial f(\sigma_{ij}, R^{el})}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\sigma_{ij} < 0 \quad \text{(III.2b)} \end{array} \right.$$

Ceci est le cas de la décharge, c'est à dire que $d\sigma_{ij}$ est dirigé vers l'intérieur du domaine d'élasticité actuelle. Donc la variation de déformation est purement élastique.

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e$$

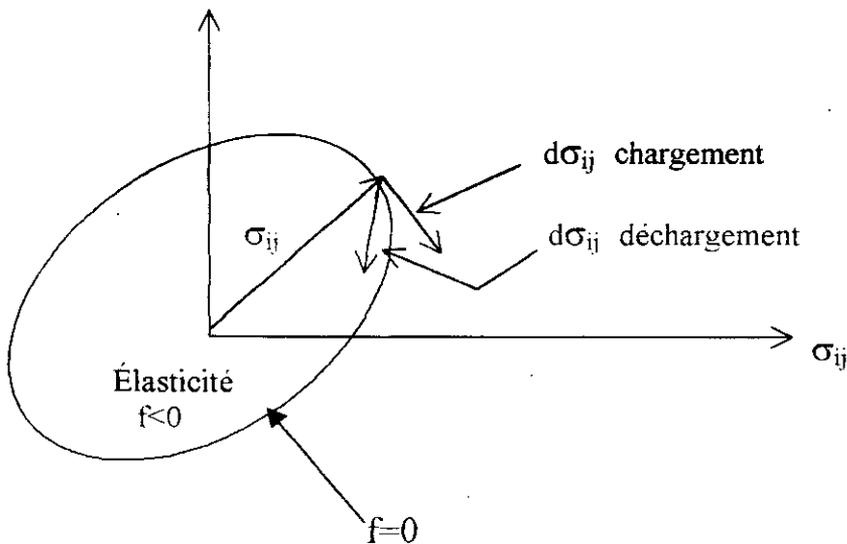


Fig III.3 Cas de chargement et de déchargement.

2^{eme} cas

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\sigma_{ij}, R) = 0 \\ \frac{df}{dR}(\sigma_{ij}, R) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}(\sigma_{ij}, R) \cdot d\sigma_{ij} \geq 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(III.3a)} \\ \text{(III.3b)} \\ \text{(III.3c)} \end{array}$$

L'équation (III.3b) est la condition de consistance ou équation de compatibilité.

Dans ce cas l'incrément de contrainte $d\epsilon_{ij}$ est dirigé vers l'intérieur du domaine d'élasticité actuel, et il y'a apparition des déformations plastiques.

La variation des déformations est due d'une part à la variation des déformations élastiques et d'autre part à la variation des déformations plastiques

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad \text{(III-4)}$$

On remarque que le signe de $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\sigma_{ij}$ détermine le cas de charge ou

de décharge et par conséquent l'existence de déformation plastique.

Quand $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\sigma_{ij} = 0$, $d\sigma_{ij}$ se trouve dans le plan tangent à la surface de

charge(chargement neutre).

III. 4 Potentiel Plastique. Règle d'écoulement :

Soit $d\epsilon_{ij}^p$ l'incrément de déformation plastique correspondant à un état de contrainte σ_{ij} , de façon générale, l'équation d'écoulement plastique ou règle d'écoulement peut s'écrire sous la forme :

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial g(\sigma_{ij}, R)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{III.5})$$

où :

g est le potentiel plastique ,

$d\lambda$ est le multiplicateur de plasticité (scalaire).

$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$ définit les directions de déformations plastiques, celles-ci étant normales à

la surface $g(\sigma_{ij}, R) = C^{lc}$.

Le potentiel plastique est dit associé quand la surface de charge et le potentiel plastique sont définis par la même équation ($f = g$). On dit alors que le matériau satisfait la condition de normalité. Pour un matériau qui obéit au principe du travail maximal (Hill, 1950), la surface de charge est convexe, et les déformations plastiques sont dirigées suivant la normale extérieure à la surface de charge :

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial f(\sigma_{ij}, R)}{\partial \sigma_{ij}}$$

Pour les matériaux non standards, l'équation du potentiel plastique est différente de celle de la surface de charge et le potentiel plastique est dit non associé.

III.5 Multiplicateur de plasticité $d\lambda$, modèle d'écrouissage h :

L'équation de comptabilité (III.3b) peut être détaillée de la manière suivante :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^T \cdot d\sigma_{ij} + \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) \cdot dR = 0 \quad (\text{III.6})$$

d'où :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^T \cdot d\sigma_{ij} = -\frac{\partial f}{\partial R} \cdot dR. \quad (\text{III.7})$$

En posant :

$$\frac{\partial f}{\partial R} \cdot dR = -d\lambda \cdot h(\sigma_{ij}, R) \quad (\text{III.8})$$

Ou obtient :

$$d\lambda = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^T \cdot d\sigma_{ij} \quad (\text{III.9})$$

h est appelé le module d'écrouissage,

$d\lambda \geq 0$: est le multiplicateur de plasticité.

$d\lambda=0$ si $d\sigma_{ij}$ est contenu dans le plan tangent à la surface de charge (chargement neutre). Cette condition est nécessaire pour assurer le passage continu des déformations plastiques aux déformations élastiques .

En utilisant les équations (III.5) et (III.8), l'écoulement est défini de la manière suivante :

$$d\varepsilon^p_{ij} = \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^T \cdot d\sigma_{ij} \quad (\text{III.10})$$

Prenons $R=R(k)$ avec $k=k(\varepsilon^p_{ij})$, l'équation (III.8) s'écrit :

$$d\lambda \cdot h = -\frac{\partial f}{\partial R} \cdot dR = -\frac{\partial f}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial k} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon^p_{ij}} \right)^T \cdot d\varepsilon^p_{ij} \quad (\text{III.11})$$

En tenant compte de l'équation (III.5) :

$$h = -\frac{\partial f}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial k} \cdot \left(\frac{\partial k}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \right)^T \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{III.12})$$

Dans le cas de la plasticité parfaite, f est seulement fonction de σ_{ij} et par conséquent

$$\frac{\partial f}{\partial R} = h = 0.$$

En tenant compte de l'équation (III.12) et de la définition du tenseur d'élasticité C_{ij} :

$$d\sigma_{ij} = C_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}^e \quad (\text{III.13})$$

On peut obtenir une autre équation pour $d\lambda$ car l'équation (III.4) s'écrit :

$$d\sigma_{ij} = C_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij} - C_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}^p \quad (\text{III.14})$$

Ou encore , en tenant compte de l'équation (III.7) :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^T \cdot d\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^T \cdot C_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij} - \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^T \cdot C_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}^p = -\frac{\partial f}{\partial R} \cdot dR \quad (\text{III.15})$$

En combinant les équations (III.15) , (III.8) et (III.5) ,on obtient :

$$d\lambda = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^T \cdot C_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}}{h + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^T \cdot C_{ij} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right)} \quad (\text{III.16})$$

III.6 Ecrouissage :

Soit σ_{ij} situe sur la surface de charge, $f(\sigma_{ij}, R)=0$ (Point A sur la fig (III.4)).

L'accroissement infiniment petit de contrainte tel que :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\sigma_{ij} > 0$$

provoque des déformations plastiques.

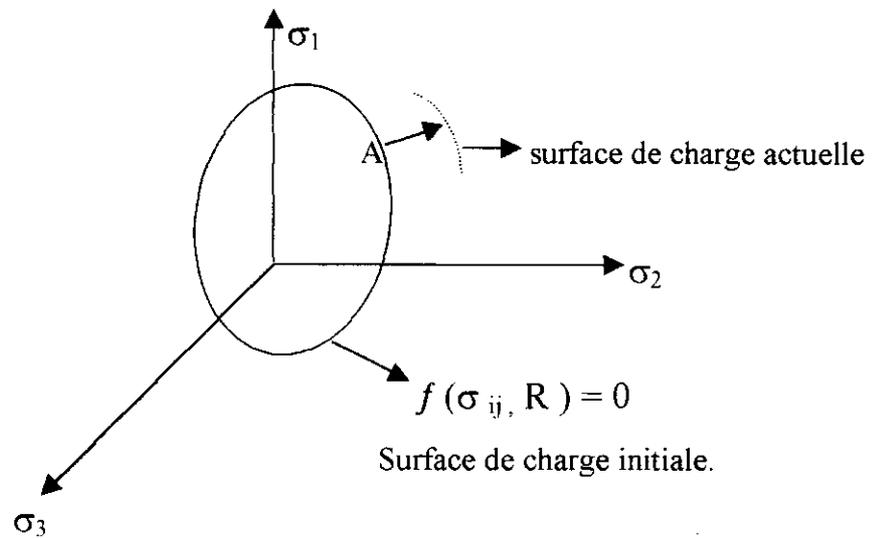


Fig. III.4 Écrouissage.

L'évolution des déformations plastiques dans le cas des matériaux écrouissables conduit à un changement de limite élastique (dit écrouissage). La surface de charge se dilate et se déplace au fur et à mesure que se développe l'écrouissage.

A ce propos, divers modèles ont été proposés pour le phénomène d'écrouissage et nous citons ici les deux tendances principales :

(1) Celle de la théorie d'écrouissage « isotrope » qui admet que dans le domaine élastique intérieur à la surface de charge se transforme par homothétie de centre 0 pendant l'écrouissage (fig III.5) .

(2) Et celle de la théorie de l'écrouissage cinématique qui propose que le domaine élastique se translate dans l'espace des contraintes (fig III.6).

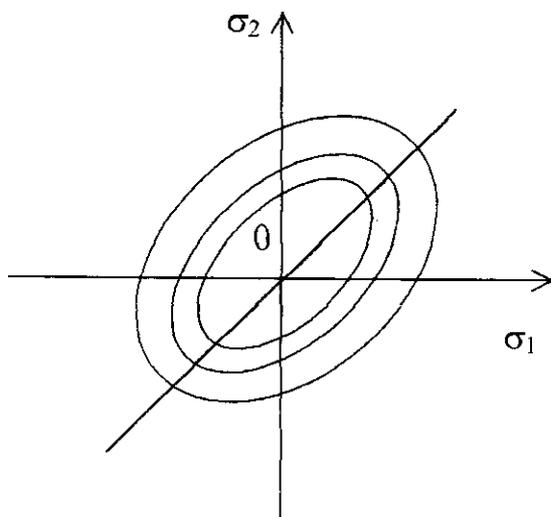


Fig III.5 Modèle d'écrouissage isotrope.

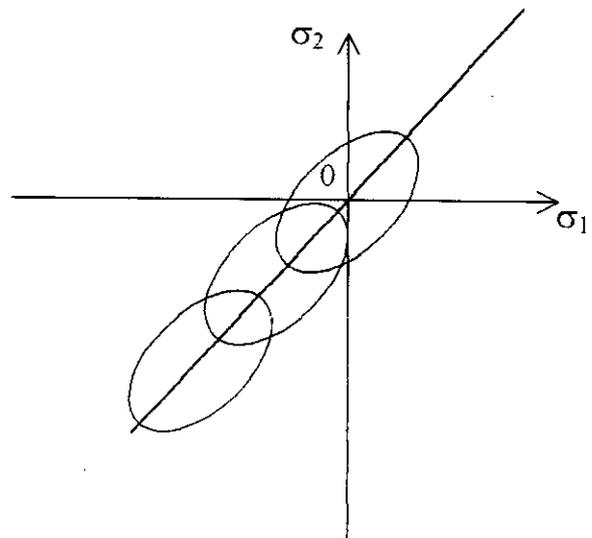


Fig III.6 Modèle d'écrouissage cinématique.

Notons enfin que la tendance aujourd'hui est une combinaison des deux théories pour créer un modèle "anisotrope cinématique".

L'allure de la courbe (σ - ϵ) donnée dans la figure (III-1) est valable pour un écrouissage positif ($h > 0$), il y a des matériaux qui, sous un certain chemin de sollicitation, et au-delà d'un certain pic, présentent un ramollissement ou écrouissage négatif ($h < 0$),

(fig. III.7). Dans ce cas le signe de $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\sigma_{ij}$ ne suffit plus pour déterminer si on est en charge ou en décharge.

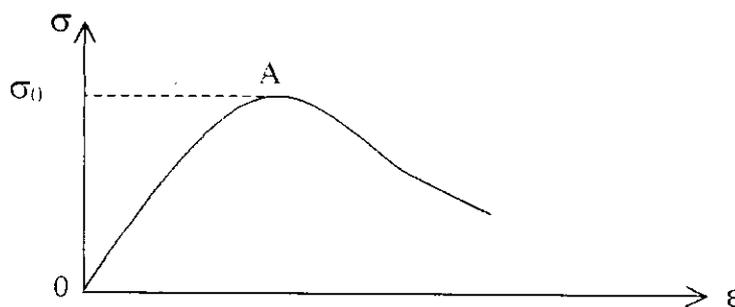


Fig III.7 Courbe (σ - ϵ) avec écrouissage négatif.

Le matériau pour lequel on ne peut jamais dépasser le premier seuil de plasticité (pas d'écrouissage, $h=0$), donc pour lequel avec une contrainte σ_0 , on peut avoir l'allongement illimité, est dit parfaitement plastique (Fig III.8).

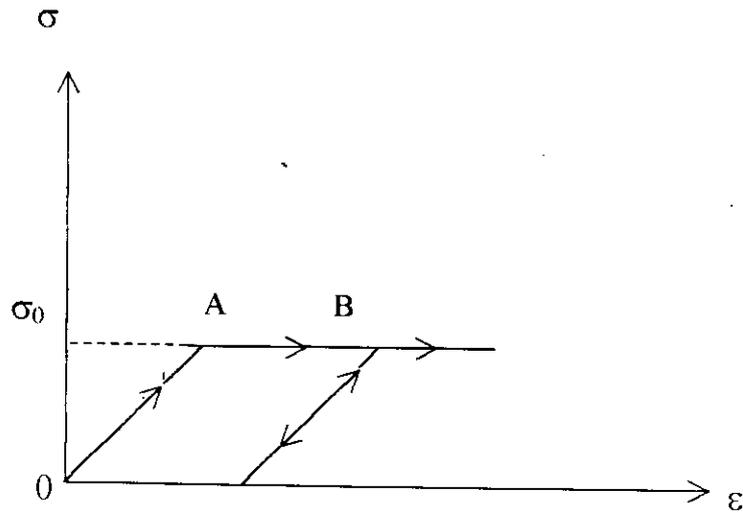


Fig III.8 Matériau élastique parfaitement plastique.

III.7 Déformation totale. Matrice de Rigidité Elastoplastique :

L'équation d'écoulement peut être écrite sous la forme :

$$d\varepsilon_{ij}^p = \alpha \cdot d\lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \tag{III.17a}$$

$$\alpha = 1, \text{ pour } \begin{cases} f = 0 \\ df = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\sigma_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

$$\alpha = 0, \quad \text{Sinon} \tag{III.17b}$$

L'équation (III.14), en tenant compte des équations (III.16) et (III.17), s'écrit alors :

$$d\sigma_{ij} = C_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij} - \alpha \cdot \frac{C_{ij} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^T \cdot C_{ij}}{h + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^T \cdot C_{ij} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} d\varepsilon_{ij} \quad (\text{III.18})$$

En posant :

$$C^{p}_{ij} = \frac{C_{ij} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^T \cdot C_{ij}}{h + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^T \cdot C_{ij} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} \quad (\text{III.19a})$$

$$\text{(où : } C^{p}_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij} = d\lambda \cdot C_{ij} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \text{)} \quad (\text{III.19b})$$

on trouve :

$$d\sigma_{ij} = C^{ep}_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij} \quad (\text{III.20})$$

C^{ep}_{ij} étant la matrice de rigidité elastoplastique :

$$C^{ep}_{ij} = C_{ij} - \alpha \cdot C^{p}_{ij} \quad (\text{III.21})$$

L'équation (III.20) est équivalente à :

$$d\varepsilon_{ij} = \left(C^{ep}_{ij} \right)^{-1} \cdot d\sigma_{ij} \quad (\text{III.22})$$

avec :

$$\left(C^{ep}_{ij} \right)^{-1} = \left(C_{ij} \right)^{-1} + \frac{\alpha}{h} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^T \quad (\text{III.23})$$

III.8 Critères classiques de plasticité.

Plusieurs critères de plasticité parfaite ont été initialement développés pour les métaux, et ont ensuite été utilisés pour les sols, notamment en tant que critères de rupture.

a) Critère de Coulomb :

Coulomb proposa en 1773 le premier critère de plasticité en mécanique des sols, et ce dernier est encore maintenant très utilisé. Il se compose de deux droites dans le plan de Mohr (τ, σ) (fig.III.9). L'équation de ces droites est :

$$f(\sigma) = \sigma_1 - \sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi + 2C \cdot \cos \varphi = 0 \quad (\text{III.24})$$

où : σ_1, σ_3 sont les contraintes principales extrêmes,
 φ , l'angle de frottement, et C la cohésion.

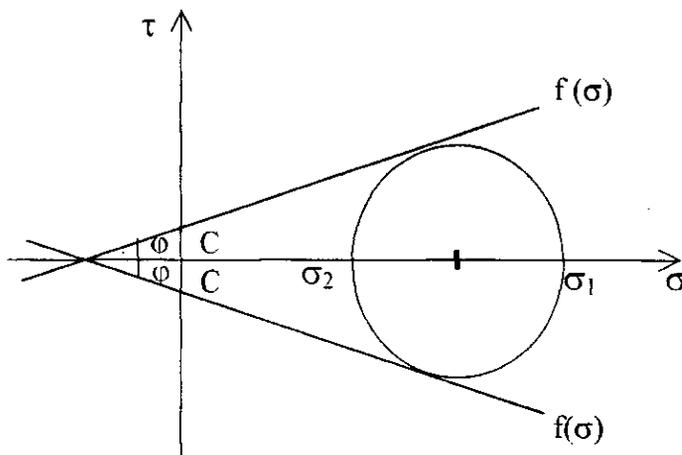


Fig III.9 Critère de coulomb

Dans l'espace des contraintes $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$, la surface définie par la fonction de charge est une pyramide de base hexagonale et d'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (fig III.10a) et (Fig III.10b)

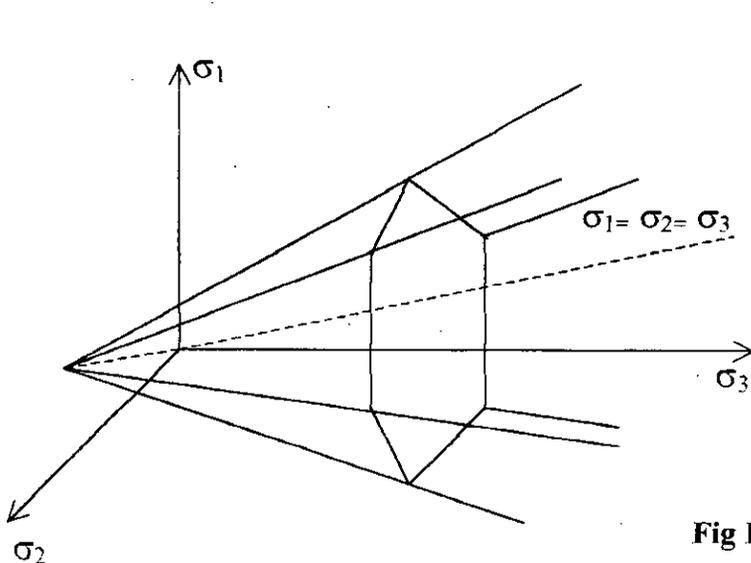


Fig III.10a Critère de Coulomb dans l'espace.

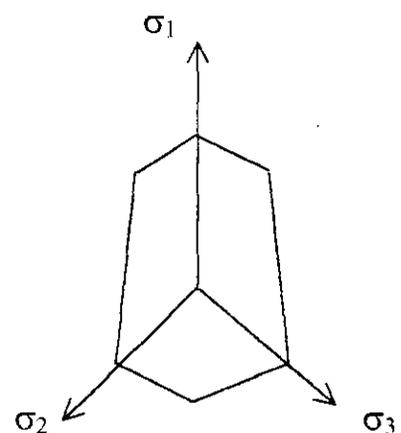


Fig III.10b Section de la pyramide de Coulomb par plan π (plan d'équation $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$)

d'équation $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$)

b) Critère de Tresca :

Tresca (1864), après des essais sur du plomb, conclut que la plastification arrive quand la contrainte tangentielle maximale atteint une certaine limite. On peut écrire donc :

$$f(\sigma) = \sigma_1 - \sigma_3 - 2k = 0 \tag{III.25}$$

où : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ et k une constante (cohésion dans le cas d'un sol).

Remarquons que la contrainte principale intermédiaire ne joue aucun rôle comme dans le critère de coulomb.

Dans l'espace $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$, la surface définie par la fonction de charge est un prisme parallèle à l'axe $(1,1,1)$ à base hexagonale régulière (fig III. 11a et fig III.11b).

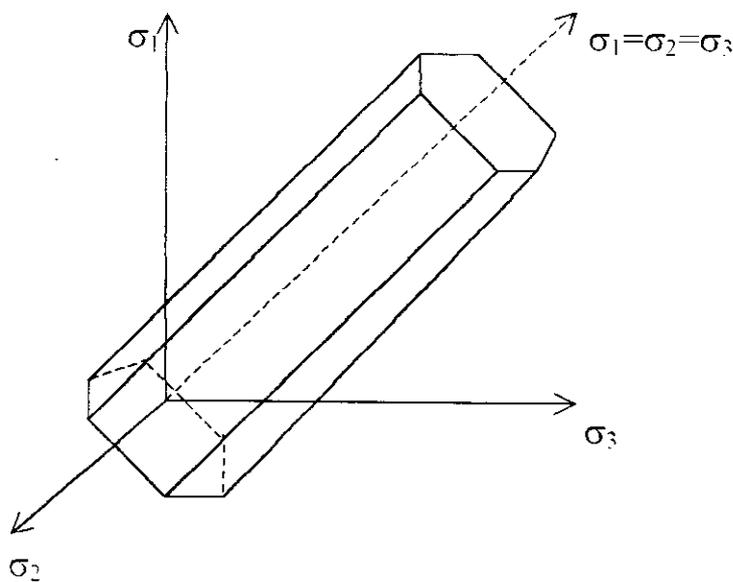


Fig III.11a Représentation du critère de Tresca dans l'espace $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$.

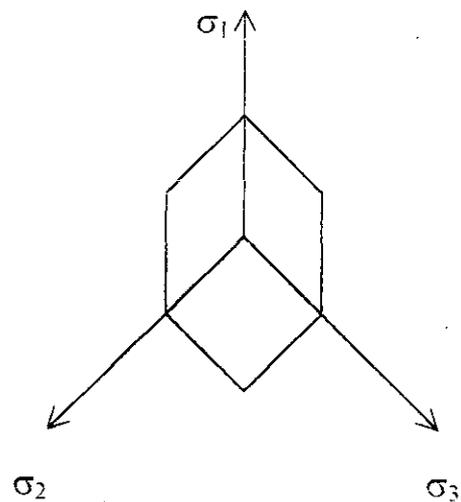


Fig III.11b Section du prisme par le plan $\pi (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0)$.

C) Critère de Mohr :

Mohr (1900) propose une généralisation des critères de coulomb et de tresca sous la forme :

$$F(\sigma) = \sigma_1 - \sigma_3 - g(\sigma_1 + \sigma_3) = 0 \tag{III.26}$$

Où :

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ et g une fonction à déterminer expérimentalement.

L'équation (III.26) d'écrit dans le plan (σ, τ) deux courbes dites courbes intrinsèques du matériau, symétriques par rapport à l'axe des σ (fig III.12) et qui sont tangentes aux cercles de Mohr.

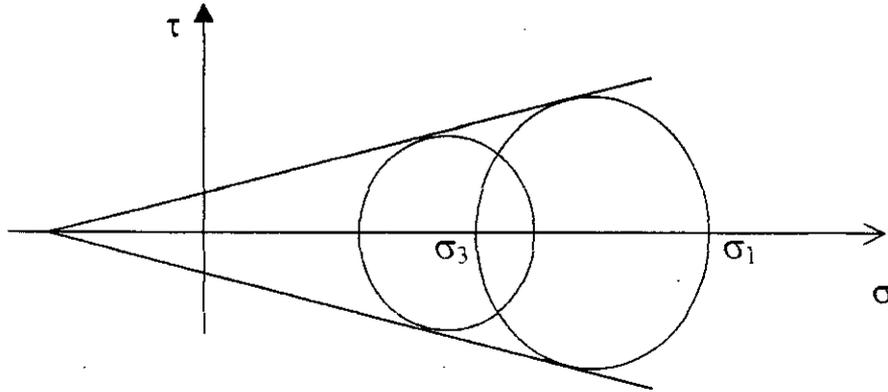


Fig III.12 Courbes intrinsèques de Mohr.

d) critère de von Mises :

pour tenir compte de la contrainte intermédiaire, von Mises(1913)proposa que la plastification ne commence que quand le deuxième invariant du tenseur deviatorique (J_2) atteint une valeur limite, c'est à dire :

$$f(\sigma) = J_2 - k^2 = 0 \quad (\text{III.27a})$$

où :

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} \cdot S_{ij}$$

ou :

$$f(\sigma) = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - k^2 = 0 \quad (\text{III.27b})$$

ou encore :

$$f(\sigma) = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) - k^2 = 0. \quad (\text{III.27c})$$

où k est une constante. On peut remarquer facilement que dans le cas du cisaillement simple plan ($\sigma_1 = -\sigma_2, \sigma_3 = 0$), On a :

$$J_2 = \sigma_1^2 = k^2 \tag{III.27d}$$

Donc la constante k représente la contrainte maximale admissible en cisaillement simple.

Dans l'espace $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$, la surface définie par la fonction de charge est un cylindre de révolution parallèle à l'axe $(1, 1, 1)$. Sa section, dans le plan π ($\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$), est un cercle de rayon $k\sqrt{2}$ (fig III.13a et fig III.13b).

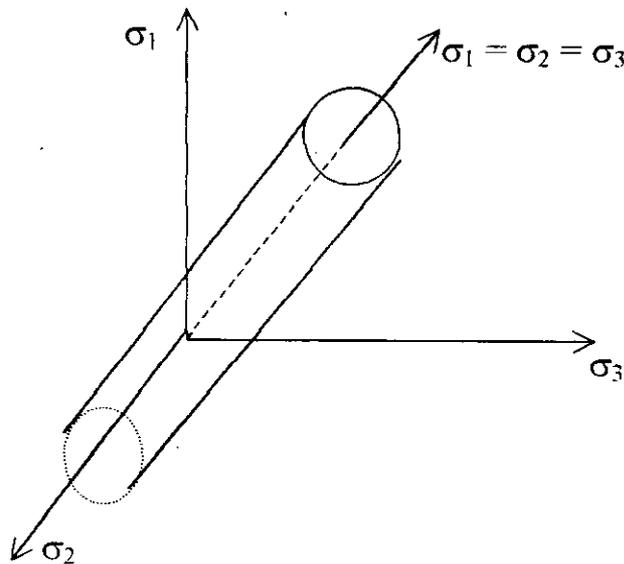


Fig III.13a Représentation du critère de Von Mises dans l'espace $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$.

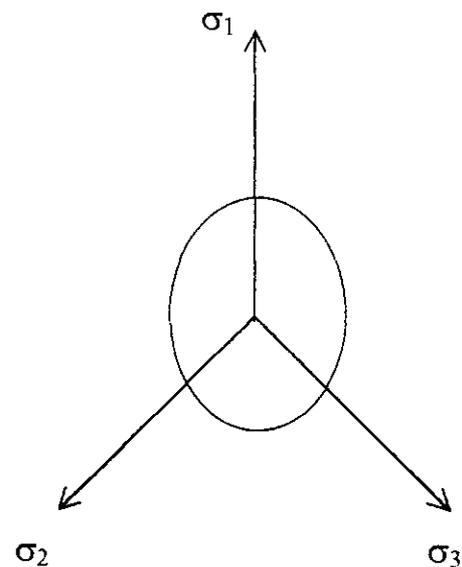


Fig III.13b Section du cylindre par plan π ($\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$).

III.9 Modèle de drucker-Prager :

Drucker et Prager(1952) ont présenté un critère qui prend en compte le premier invariant du tenseur des contraintes(I_1) et le deuxième invariant du tenseur deviatorique des contraintes(J_2). Sa fonction de charge est donnée par l'expression :

$$f(\sigma) = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - k = 0 \tag{III.28a}$$

où : α une constante physique déterminée expérimentalement ,

k la contrainte maximale admissible en cisaillement simple ($\alpha = 0$).

La surface représentatrice du critère dans l'espace $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ est un cône de sommet situé sur la droite $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$. Ce cône dégénère en cylindre si $\alpha = 0$ (cas d'un critère de VonMises).

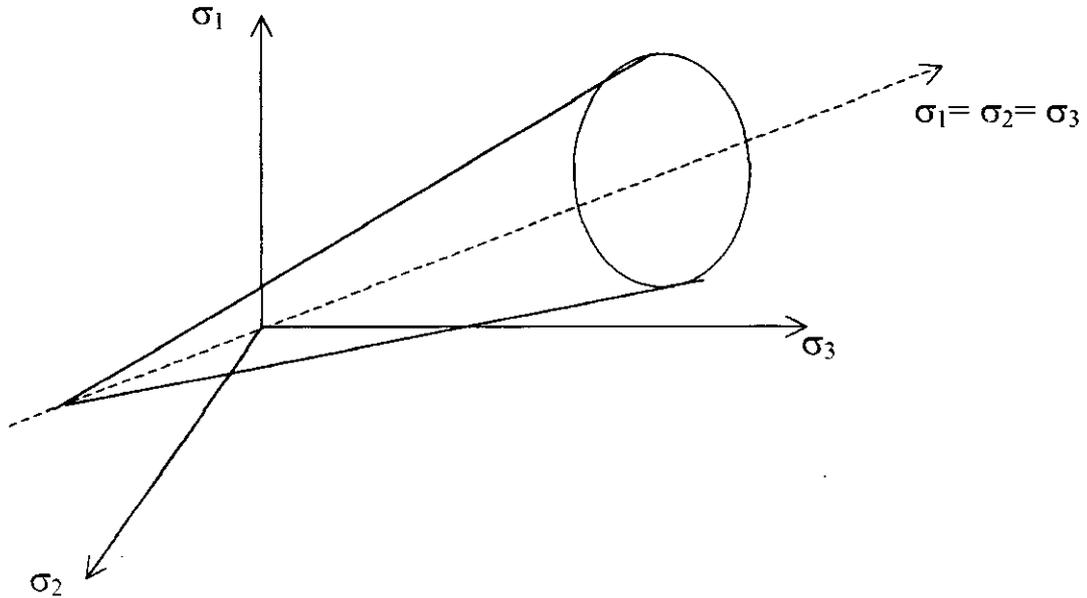


Fig III.14a Critère de Druker Prager dans l'espace $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

Notons que pour certaines valeurs de α et k , le critère Drucker-Prager devient tangent intérieurement ou extérieurement au critère de Coulomb (fig III. 14b).

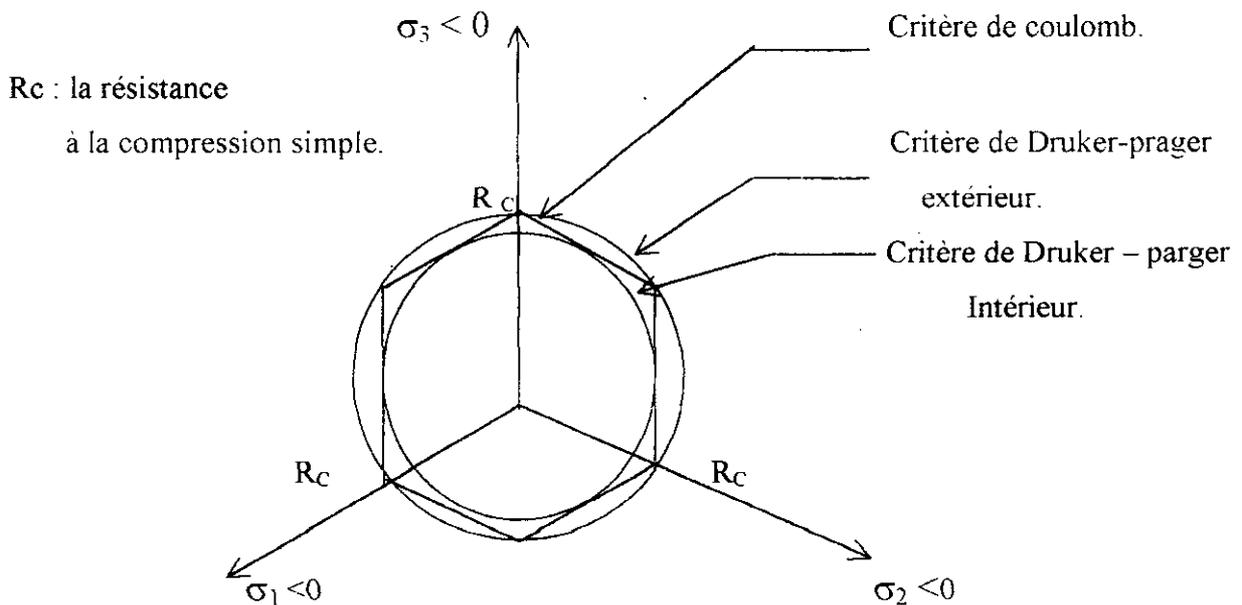


Fig III.14b

1) Critère de Drucker-Pager tangent intérieurement au critère de Coulomb :

L'écriture des conditions géométriques amène entre les paramètres des critères les relations suivantes :

$$\alpha = \frac{\operatorname{tg}(\varphi)}{\sqrt{9 + 12\operatorname{tg}^2(\varphi)}}, k = \frac{3C}{\sqrt{9 + 12\operatorname{tg}^2(\varphi)}} \quad (\text{III.28b})$$

2) Critère de Drucker-Pager circonscrit au critère de Coulomb :

$$\alpha = \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{3}}, k = \frac{2C \cdot \cos(\varphi)}{\sqrt{3}} \quad (\text{III.28c})$$

3) Critère « intermédiaire » :

$$\alpha = \frac{2\sin(\varphi)}{\sqrt{3} \cdot (3 + \sin(\varphi))}, k = \frac{6C \cdot \cos(\varphi)}{\sqrt{3} \cdot (3 + \sin(\varphi))} \quad (\text{III.28d})$$

III .9.1 Formulation de la matrice de rigidité élastoplastique :

Pour ce modèle, on a les relations suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2}} \cdot \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial J_3} \cdot \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{III.29})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \alpha \cdot \delta_{ij} + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \cdot S_{ij} \quad (\text{III.30})$$

avec :

δ_{ij} est le delta de Kronecker,

S_{ij} est le tenseur deviatorique de contraintes

En remplaçant (III.30) dans (III.16), on trouve :

$$d\lambda = \frac{\left(\begin{matrix} G \\ \sqrt{J_2} \end{matrix} \right) \cdot S_{ij} \cdot de_{ij} + 3K\alpha \cdot d\varepsilon_{kk}}{G + 9K\alpha^2} \quad (\text{III.31})$$

avec :

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Pour un matériau isotrope et dans le cas de déformation plane, On peut écrire en forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \\ d\sigma_z \end{Bmatrix} = [C^{ep}] \cdot \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

avec : $d\gamma_{xy} = 2d\varepsilon_{xy}$

En tenant compte de (III.21) :

$$[C^{ep}] = [C] + [C^p] \quad (\text{III.33})$$

où :

$$[C] = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 \\ 0 & 0 & G \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.34})$$

$$[C^p] = \frac{-1}{G+9K\alpha^2} \cdot \begin{bmatrix} H_1^2 & H_1H_2 & H_1H_3 \\ H_2H_1 & H_2^2 & H_2H_3 \\ H_3H_1 & H_3H_2 & H_3^2 \\ H_4H_1 & H_2H_4 & H_4H_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III.35a})$$

et :

$$\begin{aligned} H_1 &= 3K\alpha + \frac{G}{\sqrt{J_2}} S_x, & H_2 &= 3K\alpha + \frac{G}{\sqrt{J}} S_y \\ H_3 &= \frac{G}{\sqrt{J_2}} \tau_{xy}, & H_4 &= 3K\alpha + \frac{G}{\sqrt{J_2}} S_z \end{aligned} \quad (\text{III.35b})$$

CHAPITRE IV

Méthode des éléments finis

METHODE DES ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis est une méthode numérique matricielle, basée sur une Discrétisation de la structure à étudier en vue de traiter entre autres les problèmes de champs de contraintes et de déformations. Conçue au départ comme la formulation matricielle des deux méthodes de base en calcul des structures (la méthode des forces et la méthode des déplacements), la méthode des éléments finis présente en fait une similitude avec les procédés classiques d'analyse basés sur des principes variationnels (Méthodes Rayleigh , Ritz et Galerkin).

Ses extensions multiples, depuis le domaine linéaire, tant statique que dynamique, jusqu'aux problèmes d'instabilité et de plasticité en font aujourd'hui un des outils les plus puissants dont dispose l'ingénieur pour la résolution des structures complexes et en particulier pour les études de mécanique des sols et des roches.

IV.1 HISTORIQUE :

Depuis une cinquantaine d'années, la mécanique des structures permet l'analyse des assemblages de barres et de poutres .

Le comportement de chaque élément est représenté par une matrice de rigidité élémentaire grâce aux hypothèses de la ROM.

L'apparition des ordinateurs entraîne un développement rapide de la mécanique des structures entre 1950-1960.

Le concept d'élément fini est introduit par Furner, Clough ,Martin et Topp en 1956 .

Dès 1960, la MEF subit un essor rapide dans plusieurs directions :

- Reformulation de la méthode à partir de considérations énergétiques et variationnelles sous la forme des résidus pondérés.
- Création d'éléments de haute précision (éléments à cotés curvilignes ou isoparamétriques)
- Utilisation de la MEF dans de nouveaux domaines.
- Construction d'une base mathématique de la MEF à partir de L'analyse fonctionnelle.

IV.2 Différentes formulations de la MEF :

IV.2.1 Approximation nodale :

Un modèle mathématique d'un système physique fait intervenir plusieurs variables ou fonctions dites : exactes $U_{ex}(X)$. Celle-ci sont représentées par des fonctions «approchées» $U(X)$, telles que la différence :

$$e(X) = U(X) - U_{ex}(X) \quad (IV.1)$$

soit assez «petite» pour l'objectif visé .

Pour construire cette fonction approchée, il faut :

- Choisir un ensemble fini de fonctions dépendant de n paramètres a_i :

$$U(X, a_1, a_2, \dots, a_n) ,$$

- Déterminer les paramètres a_i pour satisfaire la condition (IV.1) .

Si la fonction approchée U est linéaire en a_i :

$$U(X) = \sum P_i(X) \cdot a_i = \langle P \rangle \{a\} \quad (IV.2)$$

avec $P_i(X)$ sont des fonctions connues linéairement indépendantes.

Nous pouvons choisir comme paramètres a_i , les valeurs de la fonction U_{ex} en n points appelés **nœuds** de coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n . Si on impose que la fonction approchée U coïncide avec la fonction exacte U_{ex} en ces nœuds :

$$U(X_i) = U_{ex}(X_i) = U_i$$

La fonction approchée (IV.2) s'écrit alors :

$$U(X) = \sum_{i=1}^n N_i(X) \cdot U_i = \langle N \rangle \cdot \{U_n\} \quad (IV.3)$$

U_i : paramètres nodaux ou variables nodales de l'approximation .

$N_i(X)$: fonctions d'interpolation.

La relation (IV.3) définit une **approximation nodale**.

IV.2.2 Approximation par éléments finis :

Lorsque le nombre n de nœuds et donc de paramètres U_i devient important et lorsque le domaine V a une forme complexe et si en plus la fonction $U(X)$ doit satisfaire des conditions aux limites sur la frontière de V , la méthode d'approximation nodales par sous-domaines simplifie la construction de $U(x)$ et s'adapte mieux au calcul sur ordinateur.

Elle consiste à :

- Identifier un ensemble de sous-domaines V^c du domaine V ;
- Définir sur chaque élément $U^c(X)$ de façon à ce que :

* L'approximation nodale sur chaque sous - domaine V^c ne fait intervenir que les variables nodales attachées à des nœuds situés sur V^c et sur sa frontière.

* Les fonctions approchées $U^c(X)$ sur chaque sous - domaine V^c sont construites de manière à être continues sur V^c et elles satisfont les conditions de continuité entre les différents sous - domaines.

On admet que la théorie des milieux continus est applicable à chaque élément.

L'approximation par éléments finis présente deux aspects distincts :

- . Définition analytique de la géométrie des éléments.
- . Construction des fonctions d'interpolation pour chaque élément .

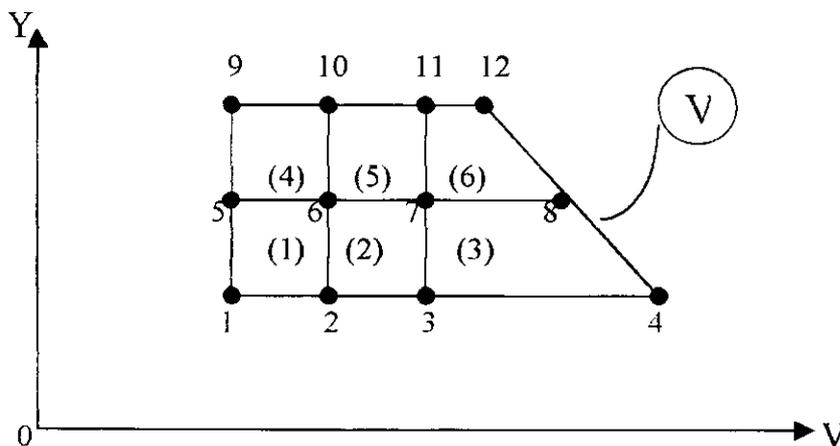


Fig. IV Discrétisation du domaine V
(6 éléments et 12 nœuds).

IV.2.3 Définition de la géométrie des éléments :

Les éléments sont déterminés par un certain nombre de points (nœuds) \bar{n} , ces nœuds sont appelés **nœuds géométriques**. si $n = \bar{n}$ l'élément est dit **isoparamétrique**.

IV.2.3.1 Quelques formes classiques des éléments:

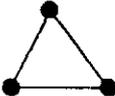
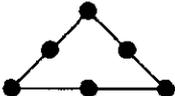
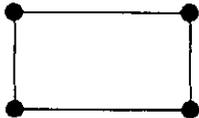
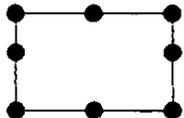
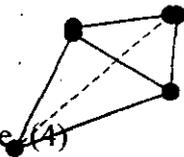
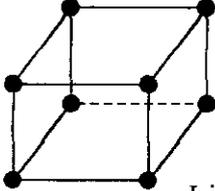
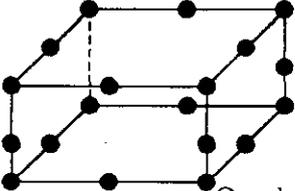
Élément à une dimension			
Linéaire (2) 	Quadratique (3) 		
Élément à deux dimensions			
Éléments triangulaires		Éléments quadrilatéraux	
 Linéaire : (3)	 Quadratique : (6)	 Linéaire : (4)	 Quadratique
Élément à Trois dimensions			
Éléments Triadriques		Éléments hexaédriques	
 Linéaire : (4)	 Linéaire : (8)	 Quadratique (20)	

Fig IV.2 Forme de quelques éléments classiques .

IV 2.3.2 Élément de référence :

L'élément de référence V^r est un élément de forme très simple, repéré dans un repère de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel V^e par une transformation géométrique T^c .

Par exemple dans le cas d'un triangle :

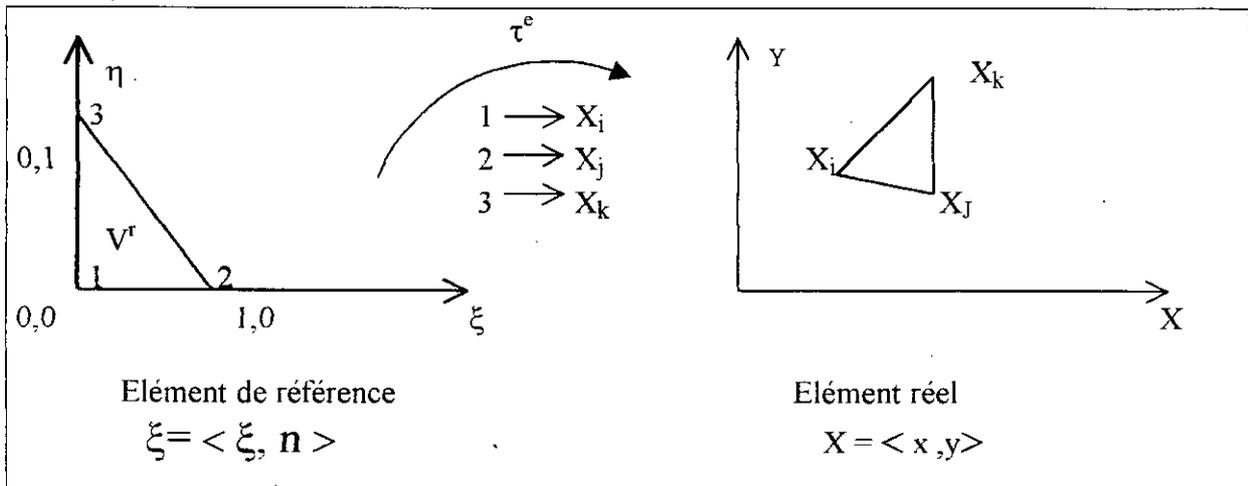


Fig IV.3 Transformation de l'élément réel .

La transformation τ^e définit les coordonnées X^e de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées ξ du point correspondant de l'élément de référence .

$$\tau^e : \xi \longrightarrow X^e = X^e(\xi)$$

La transformation τ^e dépend de la forme et de la position de l'élément réel, donc des coordonnées des nœuds géométriques qui le définissent .Il y a donc une transformation τ^e différente pour chaque élément réel :

$$\tau^e : \xi \longrightarrow X^e = X^e(\xi, X_i, X_j, X_k, \dots, X_n)$$

où $(X_i, X_j, X_k, \dots, X_n)$ sont les coordonnées des nœuds géométriques qui appartiennent à l'élément e.

Chaque transformation τ^e est choisie de manière à présenter les propriétés suivantes :

- τ^e : est bijective en tout point ξ situe sur l'élément de référence ou sur sa frontiere ,
- Les nœuds géométriques de l'élément de référence correspondent aux nœuds géométriques de l'élément réel.

Nous utiliserons une transformation τ linéaire par rapport aux coordonnées $\{X_n\}$ des nœuds géométriques de l'élément réel V^e :

$$\tau : \xi \rightarrow X(\xi) = [N(\xi)]\{X_n\} \quad (\text{IV.4})$$

Exemple : la forme de référence à deux dimensions d'un élément carré quadratique à 8 nœuds :

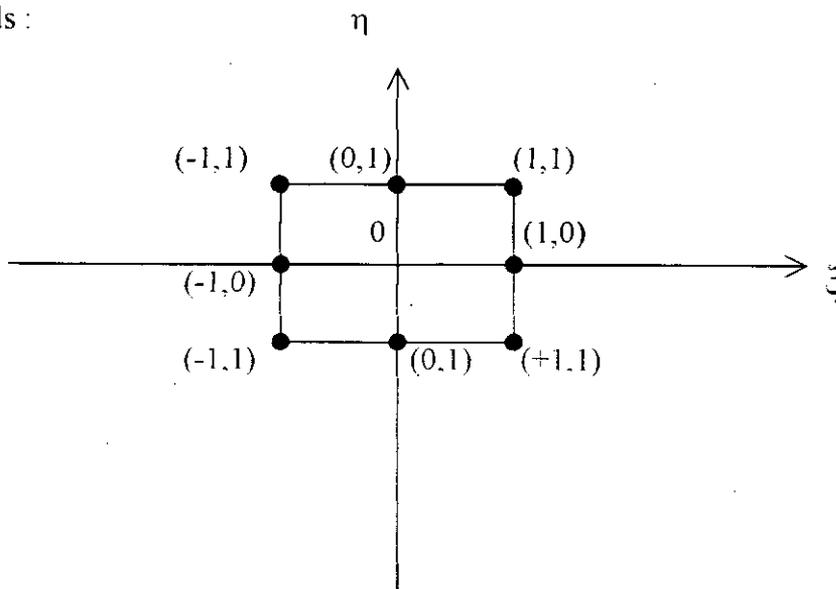


Fig IV.4 Élément de référence .

Cet élément de référence est défini comme suit :

$$\begin{aligned} -1 &\leq \xi \leq 1 \\ -1 &\leq \eta \leq 1 \end{aligned}$$

IV.2.4 Approximation sur un élément de référence :

Nous choisissons sur le domaine V un ensemble de n nœuds d'interpolation de coordonnées x_i ; $i=1,n$, confondus ou non avec les nœuds géométriques.

Sur chaque élément V^e , utilisons une approximation de type (IV.3) :

$$U_{ex}(X) \approx U(X) = \langle N(X) \rangle \{U_n\}$$

et sur un élément de référence on obtient :

$$U_{ex}(\xi) \approx U(\xi) = [N(\xi)]\{U_n\} \quad (\text{IV.5})$$

avec :

$$\begin{aligned} X(\xi) &= [N(\xi)]\{X_n\} \\ U(\xi_i) &= N[(\xi_i)]\{U_n\} \\ N(\xi_i) &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

où:

$$U_i = U_{ex}(\xi_i)$$

Alors :

$$\{U_n\} = \begin{bmatrix} \langle P(\xi_1) \rangle \\ \bullet \\ \bullet \\ \langle P(\xi_n) \rangle \end{bmatrix} \cdot \{a\}$$

$$= \{U_n\} = [P_n] \cdot \{a\} \quad (\text{IV.7})$$

$$\{a\} = [P_n]^{-1} \cdot \{U_n\} \quad (\text{IV.8})$$

$$U(\xi) = \langle P(\xi) \rangle \cdot \{a\} \quad (\text{IV.9})$$

on substituant l'équation (IV.8) dans l'équation (IV.9) on trouve :

$$U(\xi) = \langle P(\xi) \rangle \cdot [P_n]^{-1} \cdot \{U_n\} \quad (\text{IV.10})$$

comportant (IV.5) avec (IV.10), on obtient :

$$\langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1} \quad (\text{IV.11})$$

Donc, on conclut, pour construire les fonctions d'interpolation il faut poursuivre les étapes suivantes :

- 1- Choisir la base polynomiale : $\langle P(\xi) \rangle$.
- 2- Évaluer la matrice $[P_n] = [P_j(\xi_j)]$ $i=1, n, j=1, n$.
- 3- Calculer $[P_n]^{-1}$.
- 4- Calculer $\langle N(\xi) \rangle$ suivant la relation.

IV .3 Formulation intégrale :

Le but de la méthode des éléments finis est sur la base de la discretisation du milieu en éléments finis et sur la base de certaines approximations ou formulations pour le champ des déplacements, de transformer un système d'équations integro-differentielles en un système d'équations algébriques.

L'utilisation de la méthode des résidus pondérés appliqués aux systèmes d'équations aux dérivées partielles permet la construction de formes intégrales ,ou d'une fonction dont la première variation est la forme intégrale elle-même.Leur Discrétisation par éléments finis aboutit à la définition des termes de la matrice de rigidité [K] et permet ainsi de créer un système d'équations algébriques.

Une autre approche souvent utilisée en mécanique des solides s'appuie sur les principes variationnels de la mécanique et permet d'aboutir à une formulation identique. Généralement, on utilise le plus souvent le principe des travaux virtuels ou l'utilisation du principe du travail complémentaire. L'utilisation du principe des travaux virtuels nous ramène à une forme intégrale directement.

IV .3.1 Formulation matricielle et Discrétisation :

En mécanique des sols, d'après l'hypothèse de la continuité, la discretisation de la forme matricielle obtenue est atteinte à l'aide du schéma suivant : (fig IV 5)

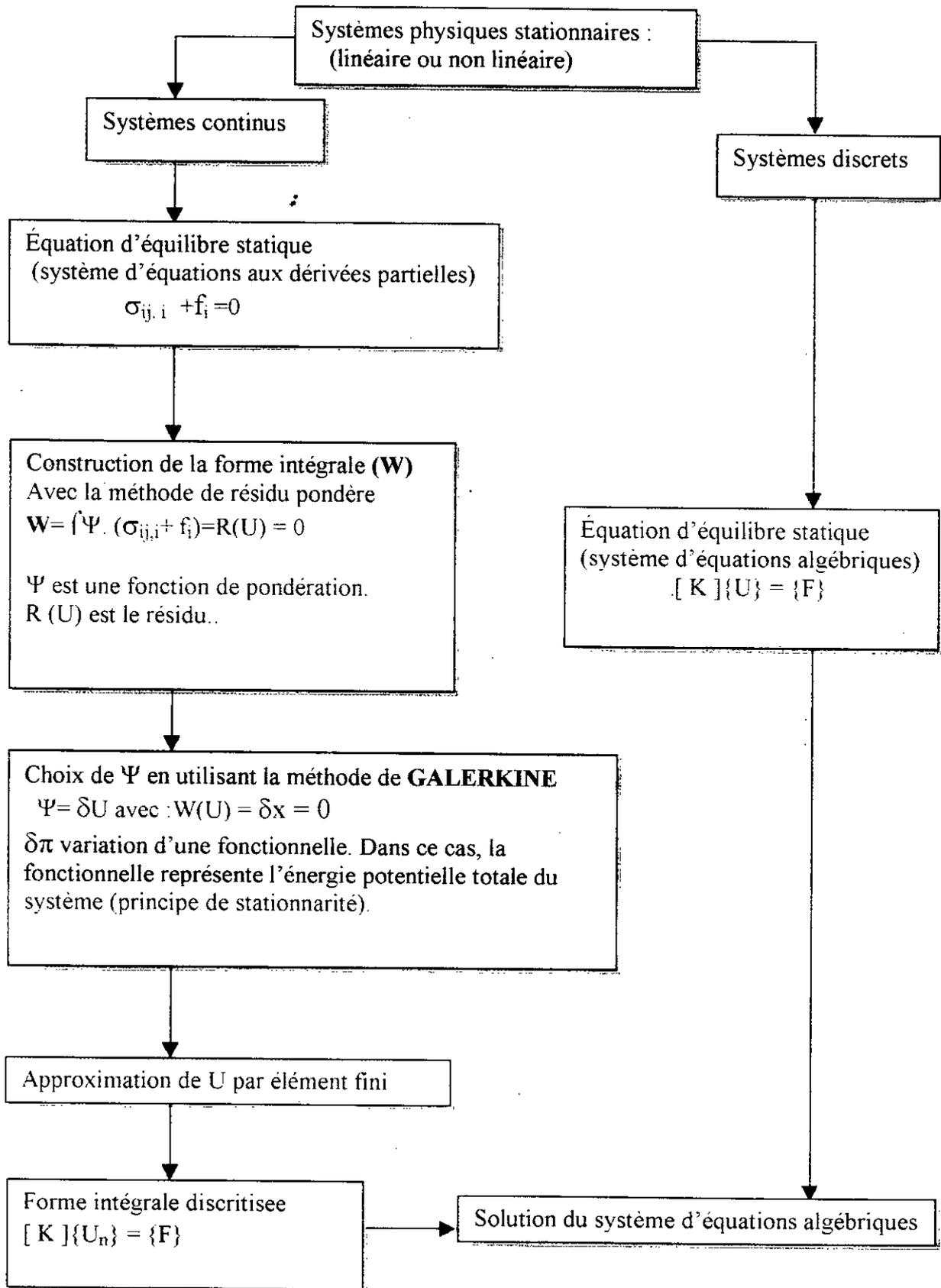


Fig IV.5 Démarche de discrétisation d'un système continu.

IV.3.2 Analyse locale et calcul de la matrice de rigidité

élémentaire :

Le déplacement en un point M quelconque de l'élément est déterminé de façon unique en fonction des déplacements des nœuds :

$$\{U(M)\}_e = [N]\{\delta U\}_e$$

avec : $[N]$ la matrice des fonctions d'interpolation.

Si nous nous plaçons dans l'hypothèse élastique, $\{\varepsilon\}_e$ s'exprime en fonction du déplacement $\{U\}_e$ par l'intermédiaire d'un opérateur différentiel linéaire $[L]$:

$$\{\varepsilon\}_e = [L]\{\delta U\}_e$$

avec :

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{\delta U\}$$

Posons :

$$[B] = [L][N]$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta U\}$$

(IV.12)

comme les contraintes sont reliées linéairement aux déformations :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

(IV.13)

avec : $[D]$ la matrice d'élasticité.

En utilisant le principe des travaux virtuels sous la forme de théorème de l'énergie potentielle, c'est à dire : $W_i - W_e = 0$, quel que soit le déplacement admissible autour de l'équilibre,

$$W_i = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}_e^T \cdot \{\sigma\}_e dv$$

ou en tenant compte des relations (IV. 12) et (IV.13) précédentes ,

$$W_i = \frac{1}{2} \int_V \{\delta U\}_e^T \cdot [B]^T \cdot [D][B]\{\delta U\}_e \cdot dv$$

La matrice $[k]_e$ définie par :

$$[K]_e = \int_V [B]^T \cdot [D][B] dv$$

est appelée la matrice de rigidité de l'élément .

il vient alors :

$$W_i = \frac{1}{2} \{\delta U\}_e^T \cdot [K]_e \cdot \{\delta U\}_e$$

Energie des forces extérieures d'un élément :

L'énergie d'origine extérieure d'un élément provient soit des forces de volume soit des forces de surface. En élasticité, à partir d'un état naturel sans contrainte ni déformation initiale. elle s'écrit :

$$W_e = \int_V \{F_v\}^T \cdot \{U\} dv + \int_S \{F_s\}^T \cdot \{U\} ds$$

$$W_e = \left[\int_V \{F_v\}^T \cdot [N] dv + \int_S \{F_s\}^T \cdot [N] ds \right] \{\delta U\}_e$$

$$W_e = \{F\}_e^T \cdot \{\delta U\}_e, \text{ avec :}$$

$$\{F\}_e^T = \left[\int_V \{F_v\}^T \cdot [N] dv + \int_S \{F_s\}^T \cdot ds \right]$$

IV 3.3 Analyse globale et assemblage :

Les n éléments finis étudiés en analyse locale sont assemblés de façon à reconstituer la structure. L'énergie de déformation et l'énergie des forces extérieures de la structure sont :

$$W_i = \sum_{e=1}^n \left(\frac{1}{2} \{\delta U\}_e^T [K]_e \{\delta U\}_e \right)$$

$$W_e = \sum_{e=1}^n \left(\{F\}_e^T \{\delta U\}_e \right)$$

Si $\{\delta U\}$ désigne le vecteur représentant le déplacement global aux nœuds de la structure, on peut passer de $\{\delta U\}_e$, vecteur déplacement local, à $\{\delta U\}$ par l'intermédiaire d'une matrice booléenne :

$$\{\delta U\}_e = [T]_e \{\delta U\}$$

L'énergie potentielle peut alors s'exprimer :

$$\theta = \frac{1}{2} \{\delta U\}^T \left[[K] \{\delta U\} - \{F\} \right]$$

Ou l'on a posé :

$$[K] = \sum_{e=1}^n [T]_e^T [K]_e [T]_e$$

matrice de rigidité globale de la structure.

$$\{F\} = \sum_{e=1}^n [T]_e^T \{F\}_e$$

vecteur chargement aux nœuds de la structure la position de la structure ainsi discretisée est donnée par résolution du système obtenu en rendant l'énergie potentielle totale extrême par rapport aux composantes de $[K] \{\delta U\} = \{F\}$.

CHAPITRE V

Méthodes Numériques

METHODES NUMERIQUES

La mise en œuvre effective de la méthode des éléments finis décrite dans le chapitre précédent nécessite l'utilisation de méthodes numériques variées pour construire les matrices élémentaires et résoudre les systèmes d'équations algébriques qui en résultent.

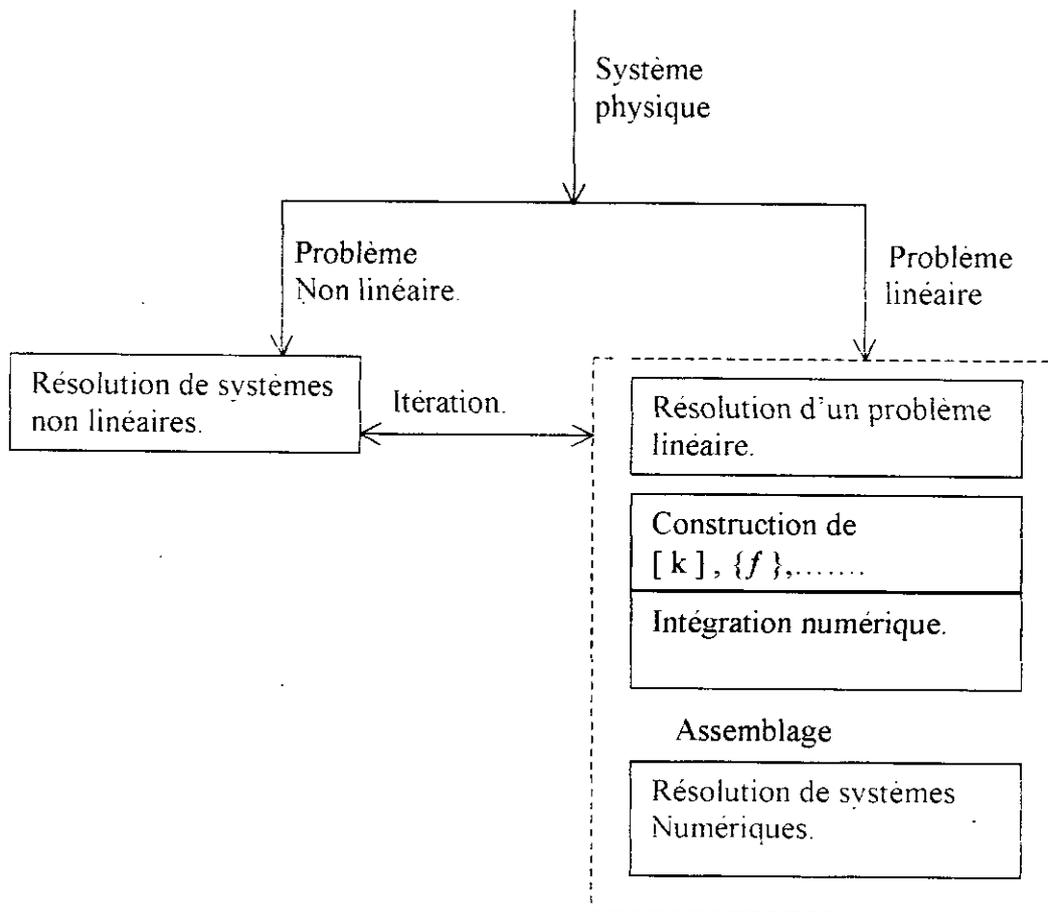


Fig.V.1 Méthodes numériques utilisées dans la méthode des éléments finis.

V.1 Intégration Numérique :

Dans la méthodes des éléments finis, la matrice élémentaire $[k]$ et le vecteur des sollicitations élémentaires $\{f\}$ s'expriment sous forme d'intégrales à une, deux, ou trois dimensions, définies sur l'élément réel V^e :

$$[k] = \int_e [B_\delta]^T [D][B]^T dv \quad (\text{V.1a})$$

$$\{f\} = \int_e \{N\} f_v dv + \int_{S_f} \{N\} f_s ds$$

Sur l'élément de référence, ces intégrales deviennent :

$$[k] = \int_r [B_\delta(\xi)]^T [D(\xi)][B(\xi)] \det(J(\xi)) dv^r$$

$$\{f\} = \int_r \{N(\xi)\} f_v \det(J(\xi)) dv^r + \int_{S_f^r} \{N(\xi)\} f_s ds \quad (\text{V.1b})$$

où : V^r est le volume de l'élément de référence.

S_f^r est la partie de la frontière de l'élément de surface sur laquelle est appliquée la sollicitation f_s .

ξ représente les coordonnées sur le contour S_f^r .

$$ds = J_s ds_1 ds_2.$$

$[J]$ est la matrice jacobienne de la transformation géométrique.

Soit encore :

$$[k] = \int_r [k^*] dv^r$$

$$\{f\} = \int_r \{f_v^*\} dv^r + \int_{S_f^r} \{f_s^*\} ds. \quad (\text{V.2})$$

où : $[k^*] = [B_\delta(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] \det(J(\xi)).$

$$\{f_v^*\} = \{N(\xi)\} f_v \det(J(\xi)).$$

$$\{f_s^*\} = \{N(\xi)\} f_s.$$

Les termes de $[k^*]$, $\{f_v^*\}$, et $\{f_s^*\}$ sont des polynômes ou des fractions rationnelles compliquées. Leur intégrations explicite n'est facile que s'ils sont constitués de termes polynomiaux.

Il est en général préférable d'utiliser une intégration numérique de (V.2) de la forme :

$$[k] = \sum_{i=1}^r W_i [k(\xi_i)]$$

$$\{f\} = \sum_{i=1}^r W_i \{f^*_v(\xi_i)\}.$$

où : ξ_i soit les coordonnées des r points d'intégration.

W_i Soit les coefficients de pondération (ou poids) correspondants.

V.1.1 Intégration numérique à une dimension :

V.1.1.1 Méthode de Gauss :

La méthode de Gauss est une méthode d'intégration numérique très utilisée dans laquelle les r coefficients W_i et les r abscisses sont déterminés de manière à intégrer exactement des polynômes d'ordre $m \leq 2r-1$.

Remplaçons l'intégrale d'une fonction polynomiale $Y(\xi)$ par une combinaison linéaire de ses valeurs aux points d'intégration :

$$\int_1^1 Y(\xi) d\xi = W_1 Y(\xi_1) + W_2 Y(\xi_2) + \dots + W_i Y(\xi_i) + \dots + W_r Y(\xi_r)$$

$$= \sum_{i=1}^r W_i Y(\xi_i) \quad (V.3)$$

Déterminons les $2r$ coefficients de manière à ce que (V-3) soit vérifiée exactement pour le polynôme suivant : $Y(\xi) = a_1 + a_2\xi + \dots + a_{2r}\xi^{2r-1}$

Portant cette expression dans (V-3) :

$$\int_1^1 Y(\xi) d\xi = a_1 \int_1^1 d\xi + \dots + a_{2r} \int_1^1 \xi^{2r-1} d\xi$$

$$= a_1 (W_1 + W_2 + \dots + W_r) + a_2 (W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + \dots + W_r \xi_r) + \dots$$

$$+ a_{2r} (W_1 \xi_1^{2r-1} + W_2 \xi_2^{2r-1} + \dots + W_r \xi_r^{2r-1}) \quad (V.4)$$

pour que (V-4) soit vérifiée pour tout a_1, a_2, \dots, a_r , il faut :

$$\int_{-1}^1 \xi^\alpha d\xi = \frac{2}{\alpha+1} = \sum_{i=1}^r W_i \xi_i^\alpha, \alpha = 0, 2, 4, \dots, 2r-2 \quad (\text{V.5})$$

$$\int_{-1}^1 \xi^\alpha d\xi = 0 = \sum_{i=1}^r W_i \xi_i^\alpha, \alpha = 1, 3, 5, \dots, 2r-1$$

Ce système de $2r$ équations est linéaire en W_i et non linéaire en ξ_i , il détermine les $2r$ paramètres de (V-3) sous la condition :

$$\left. \begin{array}{l} W_i > 0 \\ -1 < \xi_i < 1 \end{array} \right\} i = 1, 2, \dots, r.$$

le tableau (1) Annexe (II) donne les coefficients W_i et ξ_i pour des intégrations à 1, 2, ..., 7 points. Les abscisses ξ_i sont symétriques par rapport à $\xi = 0$; les poids W_i correspondant à 2 points symétriques sont égaux.

V.1.1.2 Méthode de newton –cotes :

Si les abscisses ξ_i des points d'intégration sont fixées à priori, il reste r coefficients W_1, W_2, \dots, W_r à déterminer de manière à ce que (V-3) intègre exactement un polynôme de degré $r-1$. Dans cette méthode, les points ξ_i sont régulièrement espacés et symétriques par rapport à $\xi=0$.

pour calculer les coefficients W_i , $Y(\xi)$ est représenté par un polynôme de Lagrange de degré $r-1$ qui prend les valeurs $Y(\xi_i)$ aux points d'intégration ξ_i :

$$Y(\xi) = \sum_{i=1}^r N_i(\xi) Y(\xi_i) \quad (\text{V.6a})$$

où :

$$N_i(\xi) = \prod_{j \neq i} \frac{(\xi_j - \xi)}{(\xi_j - \xi_i)} \quad \text{sont les fonctions}$$

d'interpolation de type lagrange.

Alors :

$$\int_{\Omega} Y(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^r \left(\int_{\Omega} N_i(\xi) d\xi y(\xi_i) \right) = \sum_{i=1}^r W_i Y(\xi_i) \quad (\text{V.6b})$$

les poids W_i sont donc les intégrales des fonctions N_i :

$$W_i = \int_{\Omega} N_i(\xi) d\xi \quad (\text{V.6c})$$

(tableau (2) .Anex(II)).

V.1.2. Intégration numérique à deux dimensions :

Il existe deux types de méthodes. les méthodes « produit » et les méthodes directes.

a) Méthodes « produit » :

Elles consistent à utiliser dans chaque direction ξ et η une intégration numérique à une dimension, Si nous utilisons r_1 points dans le sens ξ et r_2 points dans le sens η , la méthode de Gauss intègre exactement le produit d'un polynôme en ξ d'ordre $2r_1-1$ et d'un polynôme en η d'ordre $2r_2-1$.

la méthode produit utilise $r = r_1 \cdot r_2$ points, elle intègre tous les monômes $\xi^i \eta^j$ tels que $0 \leq i \leq 2r_1 - 1$

$$0 \leq j \leq 2r_2 - 1.$$

Dans notre cas, c'est cette méthode qu'on a choisi pour les éléments de référence carrés.

b) Les méthodes directes :

Il est possible d'étendre directement à deux dimensions les méthodes du paragraphe (V2.1) :

$$\iint_{\Omega} Y(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^r W_i Y(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{V.7})$$

Nous pouvons en particulier construire des méthodes de type Gauss qui intègrent exactement tous les monômes d'ordre m :

$$\xi^i \eta^j \text{ tels que } i+j \leq m.$$

De telles méthodes utilisent souvent moins de points que les méthodes « produit ».

Pour les éléments de référence carrée, les méthodes « produit » sont les plus utilisées, alors que pour les éléments triangulaires, les méthodes directes sont plus courantes.

V.1.2.1 Élément de référence carré :

La méthode produit s'exprime :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Y(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} W_i W_j Y(\xi_i, \eta_j) \quad (V.8)$$

où :

W_i, W_j sont les coefficients donnés par la méthode de Gauss ou de Newton-Cotes.

ξ_i, η_j sont les coordonnées des points d'intégration correspondants.

Par contre, la méthode directe utilise des formules de type :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Y(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^r W_i Y(\xi_i, \eta_i) \quad (V.9)$$

qui intègrent exactement des monômes $\xi^i \eta^j$ tels que $i+j \leq m$.

V.1.2.2 Élément de référence triangulaire :

a) Méthode de Gauss – Radau :

La méthode « produit » consiste à transformer tout d'abord l'intégrale sur le triangle en une intégrale sur un carré en utilisant une transformation géométrique qui transforme les points (ξ, η) de l'élément carré en les points $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ de l'élément triangulaire, et qui nous mène :

$$\int_0^{1-1} \int_0^1 Y(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r W_j W_i Y(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \quad (V.10a)$$

$$\text{où : } \quad WJ(j) = AJ(j)(1-SJ(j)) \quad (\text{V.10b})$$

$$\xi_i = SJ(j) \quad (\text{V.10c})$$

$$\eta_{ij} = RI(i)(1-SJ(j)) \quad (\text{V.10d})$$

RI et WI sont les coefficients de l'intégration numérique de Gauss sur l'intervalle (0,1) :

$$\int_0^1 Y(\xi) d\xi = \sum_{i=0}^r WI(i) Y(RI(i)) \quad (\text{V.10e})$$

(Voir tableau (3) Annexe(II))

b) Méthode directe :

Cette méthode consiste à utiliser des formules qui sont souvent dites formules de « Hammer » et qui intègrent exactement des monômes $\xi^i \eta^j$ pour lesquels $i+j \leq m$:

$$\iint_{0,0}^{1,1-\xi} Y(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^r W_i Y(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{V.11})$$

V.1.3 Précision de l'intégration :

L'intégration exacte des matrices élémentaires et des vecteurs sollicitation nécessite l'intégration exacte de chacun de leurs termes, Ceci n'est possible, avec les méthodes d'intégration présentée ci-dessus que si ces termes sont des polynômes, ce qui est en général le cas lorsque la matrice jacobienne est constante.

Dans le cas où l'élément est déformé (quadrilatère, cotés curvilignes), la transformation géométrique n'est pas linéaire et la matrice jacobienne est une fonction polynomiale de ξ , Les termes à intégrer pour obtenir [K] sont des fractions rationnelles. Il n'est plus possible d'intégrer exactement ces termes. Pour un nombre donné de points d'intégration, la précision d'intégration diminue lorsque la déformation de l'élément augmente. En effet nous pouvons développer l'inverse du dénominateur en une série infinie

qu'il faut tronquer à un ordre d'autant plus élevé que la déformation est forte. Chaque terme à intégrer est alors le polynôme produit du numérateur par la série tronquée.

V.1.4 Choix du nombre de points d'intégration :

Le choix du nombre de points d'intégration dépend du type d'éléments utilisés et de la matrice élémentaire à construire $[k]$ par exemple).

En pratique, on choisit le plus souvent un nombre de point aussi faible que possible pour diminuer le volume de calcul.

Pour chaque type d'élément, il existe un nombre minimum de points d'intégration en dessous duquel la matrice $[k]$ reste singulière malgré l'introduction des conditions aux limites.

Par exemple, pour un élément quadrilatéral isoparamétrique à 8 nœuds, il faut un minimum de 2×2 points d'intégration pour calculer $[k]$.

En fait, à chaque point d'intégration d'un élément, sont associées une ou plusieurs relations entre les variables nodales de l'élément. Pour que la matrice globale $[k]$ ne soit pas singulière, le nombre total de points d'intégration doit être tel que le nombre des relations correspondantes soit au moins égal au nombre d'inconnues du problème, compte tenu des conditions aux limites.

V.2 Résolution de système d'équations linéaires :

La résolution du système d'équations :

$$[k] \{U_n\} = \{F\} \quad (\text{V.12})$$

est une étape importante de la méthode des éléments finis. Ce système est linéaire lorsque $[k]$ ne dépend pas de $\{U_n\}$.

Le nombre n d'inconnues U_n est proportionnel au nombre total de nœuds d'interpolation et au nombre de degrés de liberté par nœud.

Parmi les méthodes les plus utilisées pour la résolution d'équations linéaires la méthode d'élimination de Gauss qui consiste à transformer le système d'équations (V. 12) en un système triangulaire :

$$[O \setminus S] \cdot \{U_n\} = \{F\} \quad (\text{V.13})$$

Puis calculer les inconnues U_n de la dernière à la première par résolution du système triangulaire (V.13).

V.3 Méthodes de résolution des systèmes d'équations non linéaires :

L'utilisation de l'analyse non linéaire dans les applications pratiques est de plus en plus importante, étant donné le coût considérablement élevé de celle-ci, la sélection d'un algorithme efficace devient fondamentale.

Les algorithmes de résolution utilisés classiquement en MEF sont des algorithmes incrementaux itératifs de type déplacement, qui présentent souvent des difficultés de convergence liées au chargement appliqué et à la recherche de charge limite.

L'objectif de ce qui suit est d'examiner les techniques numériques les plus utilisées, afin de déterminer la plus efficace dans une analyse non linéaire des structures discretisées par des éléments finis.

La recherche de la solution $\{U\}$ pour un problème statique consiste à rechercher un vecteur $\{U\}$ qui rend le résidu

$$\{r(\{U\})\} = \{R\} - [K(\{U\})] \cdot \{U\} \quad (\text{V.14})$$

aussi proche que possible de zéro, la solution exacte rendant le résidu nul.

Le choix d'un algorithme de résolution doit tenir compte de plusieurs facteurs :

- Le type de non-linéarité.
- L'existence de une ou plusieurs solutions.
- La précision ou la rapidité d'obtenir la convergence désirée.
- Le risque de divergence.

La stratégie de résolution doit s'adapter, par expérience au problème donné, en faisant appel à l'une des méthodes suivantes :

- La méthode de Newton-Raphson.
- La méthode de substitution.
- La méthode de Newton-Raphson modifiée.
- La méthode de Quasi-Newton.

Méthode de substitution :

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions $\{U\}_0, \{U\}_1, \dots, \{U\}_i$, où $\{U\}_i$ à étape i est calculé à partir de $\{U\}_{i-1}$ en résolvant :

$$[K(\{U\}_{i-1})] \{U\}_i = \{R\} \quad (\text{V.15})$$

ou bien sous la forme incrementale :

$$[K(\{U\}_{i-1})] \{\Delta U\}_i = \{r(\{U\}_i)\}$$

$$\{U\}_i = \{U\}_{i-1} + \{\Delta U\} \quad (\text{V.16})$$

$$\text{avec : } \{r(\{U\}_i)\} = \{R\} - [K(\{U\}_{i-1})] \{U\}_{i-1}$$

$\{U\}_{i-1}$ étant connu, on construit $[k(\{U\}_{i-1})]$ à partir des matrices élémentaires obtenues à partir des tenseurs relations contraintes-déformations considérées pour le matériau.

La résolution d'un des systèmes précédents donne $\{U\}_i$.

La figure (V.2) illustre cette procédure pour un système à un degré de liberté.

Méthode de Newton – Raphson :

$\{U\}_{i-1}$ étant connu, on cherche $\{U\}_i$. Pour cela, on décompose en série de Taylor au voisinage de $\{U\}_{i-1}$ le résidu en ne considérant que les deux premiers termes. Ce qui donne :

$$r(\{U\}_{i-1}) + \left. \frac{\partial r}{\partial \{U\}} \right|_{\{U\}_{i-1}} \cdot (\{U\}_i - \{U\}_{i-1}) = 0$$

Soit compte tenu de (V.14) :

$$[K(\{U\}_{i-1})] \{U\}_{i-1} - \{R\} + [K_t(\{U\}_{i-1})] \{\Delta U\}_i = 0 \quad (\text{V.17})$$

soit :

$$[K_t(\{U\}_{i-1})] \{\Delta U\}_i = \{R\} - [K(\{U\}_{i-1})] \{U\}_{i-1}$$

$$\{U\}_i = \{U\}_{i-1} + \{\Delta U\}_i \quad (\text{V.18})$$

$$\text{avec : } [K_t(\{U\})] = - \left[\frac{\partial r(\{U\})}{\partial \{U\}} \right] \quad (\text{V.19})$$

est la matrice tangente.

La méthode de Newton-Raphson converge de façon quadratique, donc rapidement comme l'illustre la fig.(V.3) pour un système à un degrés de liberté. Mais la matrice de rigidité doit être évaluée à chaque étape de l'itération. De plus, en statique, pour un matériau parfaitement plastique ou capable de ramollissement, la matrice tangente $[K_t(\{U\})]$ peut devenir singulière, ce qui peut engendrer des difficultés dans la procédure itérative. La méthode de Newton – Raphson modifiée permet de contrôler ce type de difficulté.

Méthode de Newton – Raphson modifiée :

Une des modifications de la méthode de Newton-Raphson est de remplacer la matrice de rigidité tangentielle $[K_t(\{U\})]$ par $[K]_m$ qui est une matrice constante évaluée généralement au niveau d'un certain pas. Si celle-ci est évaluée initialement (au début du premier pas), la méthode est dite «méthode aux contraintes initiales».

Le schéma itératif de cette méthode est alors :

$$[K]_m \{\Delta U\}_i = \{R\} - [K(\{U\}_{i-1})] \{U\}_{i-1} \quad (V.20)$$

$$\{U\}_i = \{U\}_{i-1} + \{\Delta U\}_i .$$

La fig.(V.4) présente le principe de cette méthode pour un système à un degré de liberté.

Comme on peut le constater, cette méthode converge linéairement, donc d'une façon nettement plus lente que la précédente, notamment pour un matériau capable de ramollissement.

Un problème associé à cette méthode est que, si on passe d'un état plastique à un état élastique (déchargement) cette méthode peut ne pas converger, à moins que la matrice de rigidité soit mise à jour pour cette situation. Ceci en fait compliquer la programmation.

Méthode de Quasi – Newton.

Un compromis entre la méthode de Newton – Raphson et la méthode de Newton – Raphson modifiée est la méthode de Quasi-Newton. Celle-ci est beaucoup moins chère et plus rapide (en terme d'espace mémoire et nombre d'itérations).

Ceci est dû à l'actualisation, non pas de la matrice de rigidité elle-même, mais de son inverse. Cette alternative permet d'éviter la factorisation de la matrice de rigidité à chaque itération.

Définissons le déplacement :

$$\{\delta\}_i = \{U\}_i - \{U\}_{i-1} \quad (\text{V. 21})$$

Et le résidu :

$$\{r(\{U\}_i)\} = \{r\{U\}_i\} - \{r(\{U\}_{i-1})\} \quad \text{soit} \quad (\text{V. 22})$$

$$\{\Delta r\}_i = [K(\{U\}_i)] \{U\}_i - ([K(\{U\}_{i-1})] \{U\}_{i-1}) \quad (\text{V. 23})$$

On définit la nouvelle matrice $[k_q]$; qui est une matrice sécante entre $\{F\}_{i-1}$ et $\{F\}_i$ avec :

$$\{F\}_j = [K(\{U\}_j)] \{U\}_j \quad (\text{V. 24})$$

Par suite celle-ci vérifie :

$$[K_q]_i \{\delta\}_i = \{\Delta r\}_i \quad (\text{V.25})$$

Cette matrice est déterminée à la $(i-1)^{\text{ème}}$ et elle est utilisée à la $(i)^{\text{ème}}$ étape. Pour une matrice définie positive, la formule de récurrence pour obtenir l'inverse d'une matrice s'écrit :

$$[K_q]_i^{-1} = [A]_{i-1}^T [K_q]_{i-1}^{-1} [A]_{i-1} \quad \text{avec} \quad (\text{V.26})$$

$$[A]_{i-1} = [I] + \{V\}_{i-1} \{W\}_{i-1}^T \quad (\text{V.27})$$

où $[I]$ est la matrice unité, $\{V\}_{i-1}$ et $\{W\}_{i-1}$ sont des vecteurs qui s'expriment en fonction de $\{\delta\}$, $\{r\}$, $\{\rho\}$ sont détaillés par la suite.

Il en découle la procédure suivante (illustrée par un système à un degré de liberté par la fig.(V.4)) :

1) *Évaluation du déplacement $\{\Delta U\}_i$:*

$$\{\Delta U\}_i = [K_q]_{i-1}^{-1} \{r(\{U\}_{i-1})\}$$

$$\{\delta\}_i = \{\Delta U\}_i \quad (\text{V.28})$$

$$\{U\}_i = \{U\}_{i-1} + \{\Delta U\}_i$$

2) Calculer $\{A\}_i$; à partir des calculs de $\{V\}_i$ et $\{W\}_i$.

$$\{V\}_i = -C_i [K_q]_{i-1} \{\delta\}_i - \{\Delta r\}_i \quad (\text{V. 29})$$

Soit :

$$\{V\}_i = \{r(\{U\}_i)\} - (1+C_i) \{r(\{U\}_{i-1})\} \quad (\text{V.30})$$

$$\text{où : } C_i = \sqrt{\frac{\{\delta\}_i^T \{\Delta r\}_i}{\{\delta\}_i^T [K_q]_{i-1} \{\Delta r\}_i}} \quad (\text{V.31})$$

$$\{W\}_i = \frac{\{\delta\}_i}{\{\delta\}_i^T \{\Delta r\}_i} = \frac{\{\delta\}_i}{G(0) - G(1)} \quad , \quad \text{avec :} \quad (\text{V.32})$$

$$G(x) = [\{\Delta u\}_i^T [r(\{u\}_{i-1}) + x\{\Delta u\}_i] \quad (\text{V.33})$$

on remarque alors que :

$$C_i = \frac{G(0) - G(1)}{G(0)}. \quad (\text{V.34})$$

Une condition nécessaire pour éviter certains problèmes liés aux produits matriciels effectués en (V.18) pour la mise à jour de $[K_q]^{-1}$ est que $C_i < 10^5$. Au cas où cette condition ne serait pas respectée, la mise à jour n'est pas performante.

Dans cette méthode, la matrice de rigidité joue un rôle moins important que dans les deux méthodes précédentes, puisqu'on utilise une mise à jour progressive.

Pour les problèmes statiques, cette méthode est très performante même pour des matériaux parfaitement plastiques ou capables de ramollissement et ne se pose aucun des problèmes posés par les autres méthodes.

Méthode incrémentale :

Cette méthode consiste à résoudre l'équation $[K(\{U\})] \{U\} = \{R\}$ en plusieurs étapes. Chaque étape correspondant à un pas, constitue un problème non linéaire qui est résolu par plusieurs itérations d'une des méthodes précédentes.

Dans le cas d'un problème statique, la sollicitation $\{R\}$ est décomposée en n sollicitations ($\{\Delta R\}^k$, $k \equiv 1, n$). Dans ce cas on doit résoudre n problèmes non linéaires successivement de la forme :

$$[K(\{u\}^K)]\{u\}^K = \{\Delta R\}^K, K = 1, n. \quad (\text{V. 35})$$

Il est évident que plus n est grand, plus le risque de divergence est petit, et cette méthode est la seule façon actuellement d'éviter les risques de divergence.

Cette méthode associée à la méthode de Newton-Raphson et illustrée pour un système à un degré de liberté sur la figure (V.5).

V.4 Critère de convergence :

La définition d'un critère propre de convergence pour contrôler les itérations d'équilibre est une partie essentielle de l'efficacité de la stratégie incrémentale de résolution employée. A la fin de chaque itération, la solution obtenue est comparée avec la tolérance est atteinte.

A ce propos, on distingue trois critères de base :

1) Critère en déplacement :

$$\|\{\Delta u\}_i^K\| \leq \varepsilon_d \|\{u\}_i^K - \{u\}_{i-1}^K\|. \quad (\text{V.36})$$

2) Critère en force :

$$\|\{R\}^K - [K(\{u\}_i^K)]\{u\}_i^K\| \leq \varepsilon_f \|\{R\}^K - [K(\{u\}_{i-1}^{K-1})]\{u\}_{i-1}^K\| \quad (\text{V.37})$$

3) Critère en énergie interne :

$$\{\Delta u\}_i^K (\{R\}^K - [K(\{u\}_i^K)]\{u\}_i^K) \leq \varepsilon_e \{\Delta u\}_i^K (\{R\}^K - [K(\{u\})]\{u\}) \quad (\text{V.38})$$

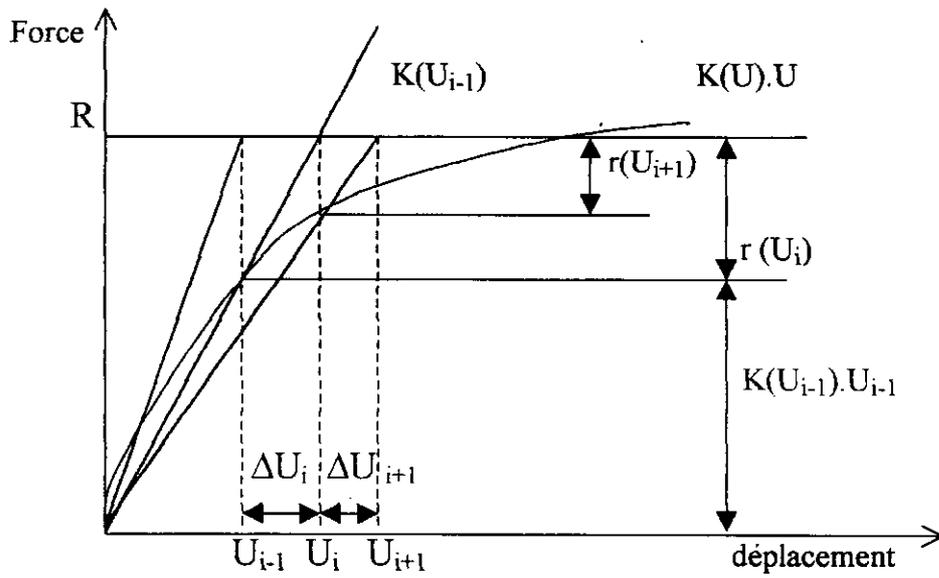


Fig.V.2 Méthode de substitution (système à un degré de liberté)

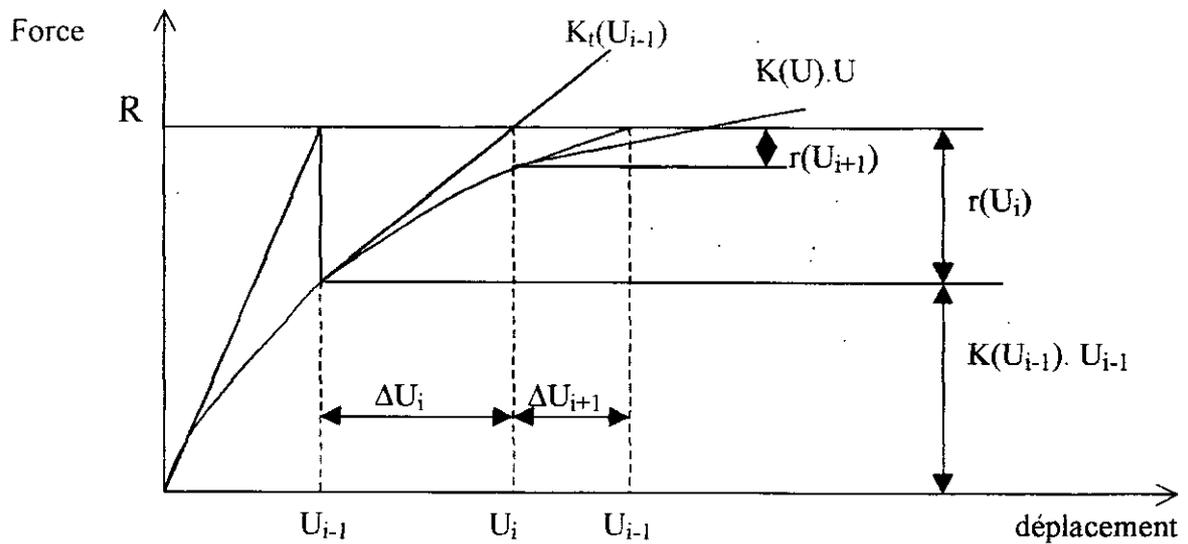


Fig.V.3 Méthode Newton- Raphson (système à un degré de liberté).

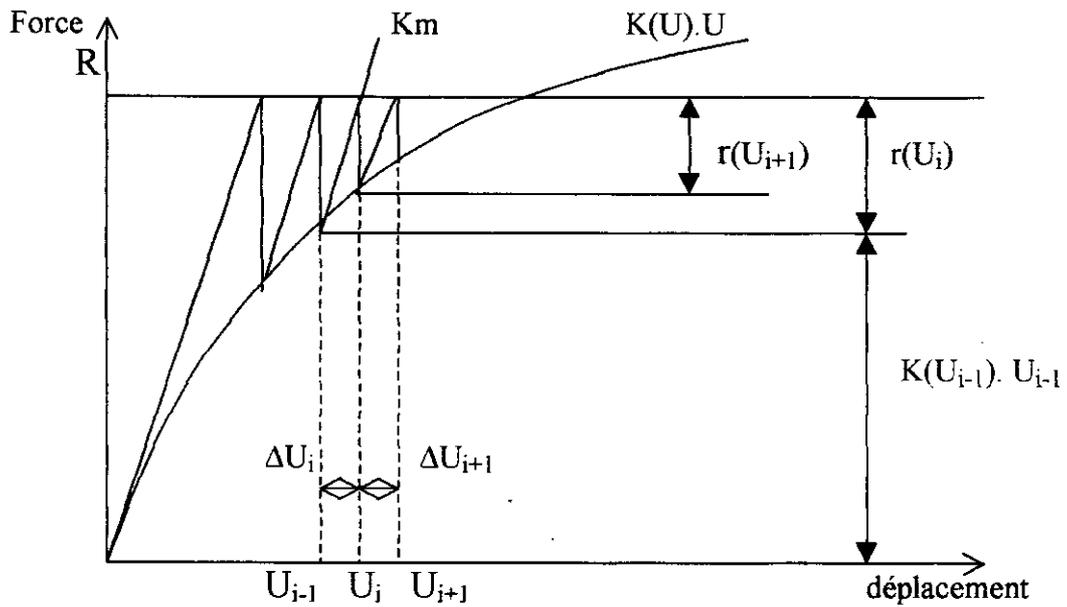


Fig.V.4 Méthode de Newton- Raphson modifiée (système à un degré de liberté)

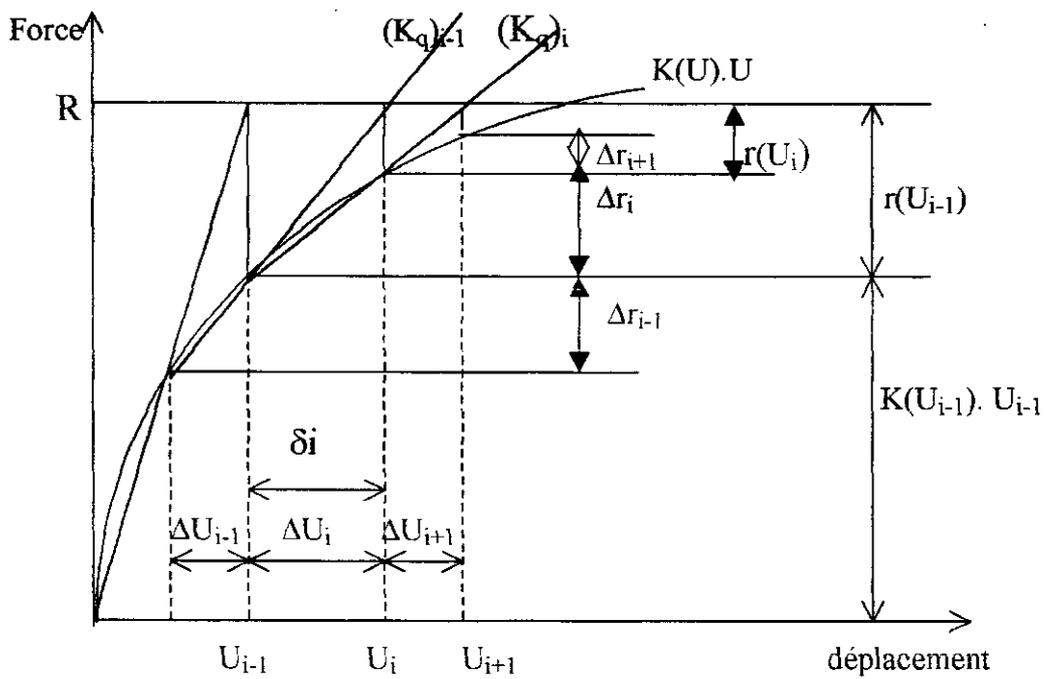


Fig.V.5 Méthode de Quasi-Newton (système à un degré de liberté)

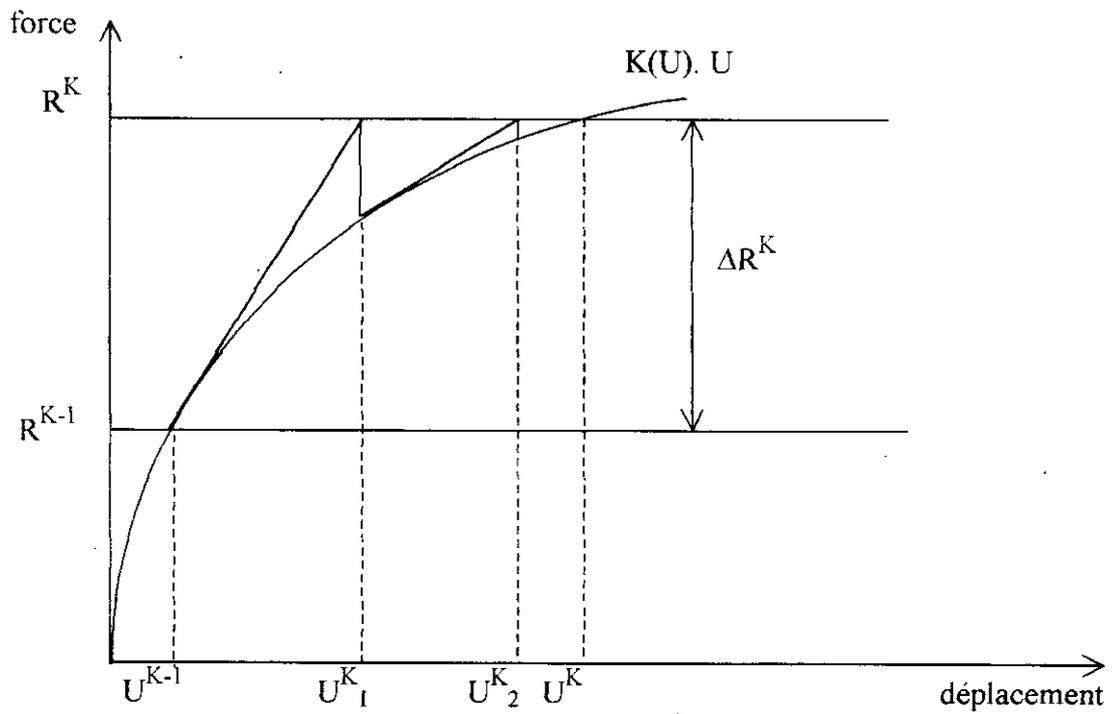


Fig. V.6 Méthode incrémentale associée à la méthode de Newton-Raphson (système à un degré de liberté, convergence en 3 itérations sur l'incrément K).

CHAPITRE VI

Implémentation
numérique des relations
incrémentales
de l'élastoplasticité

IMPLEMENTATION NUMERIQUE DES RELATIONS INCREMENTALES DE L'ELASTOPLASTICITE

A chaque itération " i " du pas (m+1) considérée, correspond en chaque point de Gauss un état de contrainte. Ce dernier peut être calculer en utilisant une relation contrainte – déformation elastoplastique incrémentale à partir de l'état de déformation. Les relations contraintes– déformations pour un matériau elastoplastique sont relatives à des incréments infinitésimaux de contraintes et de déformations, correspondant à une histoire donnée de l'état de contrainte ou de déformation plastique.

Nous présentons dans ce qui suit la procédure générale pour le calcul des contraintes et les techniques d'intégration utile pour cette opération.

VI .1 Description générale :

Sous forme matricielle, l'incrément de contrainte $\{d\sigma\}$, peut être exprimé par l'intermédiaire de l'incrément de déformation élastique $\{d\varepsilon^e\}$, ou par l'intermédiaire de l'incrément de déformation total $\{d\varepsilon\}$.

$$\{d\sigma\} = [C]\{d\varepsilon^e\} = [C](\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^p\}) \quad \text{(VI.1)}$$

$$\{d\sigma\} = [C^{ep}]\{d\varepsilon\} \quad \text{(VI.2)}$$

L'incrément de déformation plastique $\{d\varepsilon^p\}$ est calculé en utilisant la règle d'écoulement :

$$\{d\varepsilon^p\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial \{\sigma\}} \right\} \quad \text{(VI.3)}$$

où $\left\{ \frac{\partial g}{\partial \{\sigma\}} \right\}$ est le vecteur gradient de la fonction du potentiel plastique $g(\sigma_{ij}, k)$.

La fonction scalaire $d\lambda$ est définie par :

$$d\lambda = \frac{L}{h} \quad \text{(VI.4)}$$

où L est la fonction du critère de chargement définie par :

$$L = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [C] \{d\varepsilon\} \quad (\text{VI.5})$$

où $\left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\}$ est le gradient de la fonction de charge $f(\sigma_{ij}, k)$.

La fonction scalaire positive h est définie comme suit :

$$h = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [C] \left\{ \frac{\partial g}{\partial \{\sigma\}} \right\} - n \frac{\partial f}{\partial k} \quad (\text{VI.6})$$

et

$$n = \frac{dk}{d\varepsilon} \cdot c \sqrt{\left\{ \frac{\partial g}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T \left\{ \frac{\partial g}{\partial \{\sigma\}} \right\}} \quad (\text{VI.7})$$

Finalement, la matrice de rigidité élastoplastique $[C^{ep}]$ aura l'expression :

$$[C^{ep}] = [C] - \frac{1}{h} [C] \left\{ \frac{\partial g}{\partial \{\sigma\}} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [C] \quad (\text{VI.8})$$

Cette matrice en général n'est pas symétrique.

Le calcul de contraintes se fera pour tous les points de Gauss. Dans ce qui suit, afin de faciliter la compréhension, on adoptera un raisonnement pour un seul point seulement.

Etant connues les contraintes et déformations ${}^m \{\sigma\}$ et ${}^m \{\varepsilon\}$ ainsi que les paramètres d'érouissage ${}^m k$ et ${}^m \varepsilon_p$, à la fin de la m^{eme} étape de chargement, on peut calculer, à la i^{ieme} itération de la $(m+1)^{\text{eme}}$ étape de chargement, à partir du déplacement ${}^{m+1} \{U\}^i$, la déformation et l'incrément de déformation au point de Gauss.

$${}^{m+1}\{\varepsilon\}^i = [B]^{m+1} \{\varepsilon\}^i \quad (\text{VI.10})$$

$$\{\Delta\varepsilon\} = {}^{m+1}\{\varepsilon\} - {}^m\{\varepsilon\} \quad (\text{VI.11})$$

L'incrément de contrainte (élastique) sera égal à :

$$\{\Delta\sigma^e\} = [C]\{\Delta\varepsilon\} \quad (\text{VI.12})$$

Supposons qu'à la fin de la m^{eme} étape de chargement, l'état de contrainte au point de Gauss est élastique, satisfait : $f({}^{m+1}\{\sigma\}, {}^m k) < 0$ et entre en élastoplasticité à la $(m+1)^{\text{eme}}$ étape c'est à dire : $f({}^{m+1}\{\sigma\}, {}^{m+1}k) > 0$.

Cependant, il existe un scalaire r , tel que $f({}^m\{\sigma\} + r\{\Delta\sigma^e\}, {}^m k) = 0$.

La déformation totale sera alors, la somme des déformations élastique et élastoplastique : $r\{\Delta\varepsilon\}$ et $(1-r)\{\Delta\varepsilon\}$. L'incrément de contrainte peut s'intégrer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \{\Delta\sigma\} &= \int_{{}^m\{\varepsilon\}}^{{}^{m+1}\{\varepsilon\}^i} [C] (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^p\}) \\ &= \int_{{}^m\{\varepsilon\}}^{{}^m\{\varepsilon\} + r\{\Delta\varepsilon\}} [C] (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^p\}) \\ &= r\{\Delta\sigma^e\} + \int_{{}^m\{\varepsilon\} + r\{\Delta\varepsilon\}}^{{}^m\{\varepsilon\} + \{\Delta\varepsilon\}} [C] (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^p\}) \end{aligned} \quad (\text{VI.13})$$

où :

$$\{\Delta\sigma\} = r\{\Delta\sigma^e\} + \int_{{}^m\{\varepsilon\} + r\{\Delta\varepsilon\}}^{{}^m\{\varepsilon\} + \{\Delta\varepsilon\}} [C^{ep}] \{d\varepsilon\} \quad (\text{VI.14})$$

Finalement, la contrainte qui correspond au déplacement ${}^{m+1}\{U\}$ sera égale à :

$${}^{m+1}\{\sigma\}^i = {}^m\{\sigma\} + \{\Delta\sigma\} \tag{VI.15}$$

VI.2 Détermination de l'état de chargement :

La première étape dans le calcul des contraintes, est la détermination de l'état de chargement du point de Gauss, c'est à dire s'il est en chargement plastique, chargement élastique ou en chargement correspondant à l'incrément de déformation $\{\Delta\varepsilon\}$.

Dans le cas des lois élastoplastiques, le nouvel état ${}^m\{\sigma\} + \{\Delta\sigma^e\}$ peut se trouver dans quatre configurations selon le signe des valeurs des surfaces de charge $f({}^m\{\sigma\}, {}^mk)$ et $f({}^m\{\sigma\} + \{\Delta\sigma^e\}, {}^mk)$:

- a) Le point était élastique, il reste élastique (fig VI.1a).
- b) Le point était plastique, il reste plastique (fig VI.1b).
- c) Le point était plastique, il redevient élastique.
- d) Le point était élastique, il devient plastique (fig VI.1d).

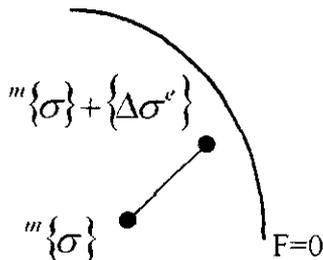


Fig VI.1a Le point reste élastique.

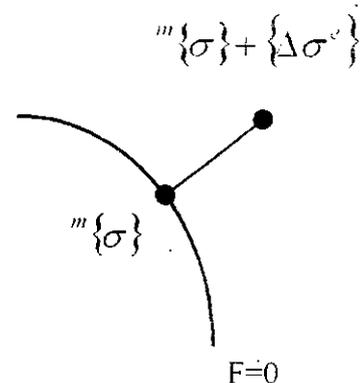
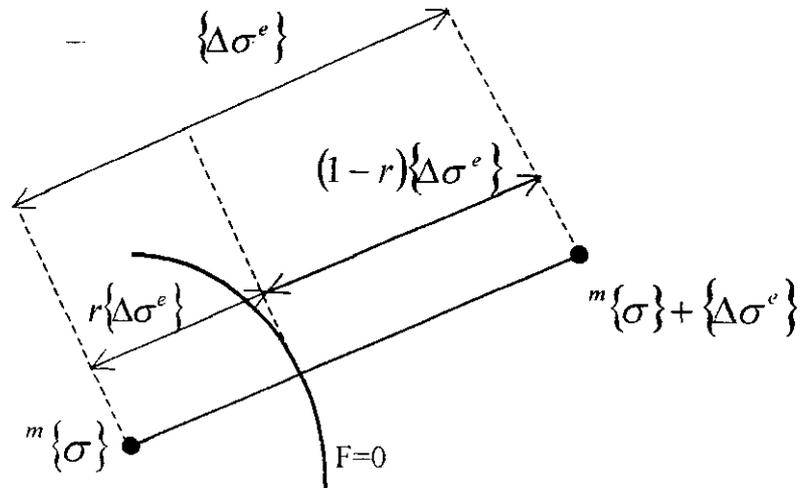


Fig VI.1b Le point reste plastique.



FigVI.1d Le point était élastique , il devient plastique .

Les configurations a) , b) et c) ne posent aucun problème particulier , la loi de comportement « incrementale » purement élastique ou plastique doit être intégrée pour trouver l'état de contrainte vérifiant cette loi et actualiser toutes les quantités non linéaires .

La configuration d) mérite un traitement particulier avant de procéder à l'intégration ; en effet , il convient de distinguer les parties d'origines élastique et plastique des contraintes . Pour cela , on cherche un scalaire r , (fig VI.1d) , tel que :

$$f\left(m\{\sigma\} + r\{\Delta\sigma^e\}, m_k\right) = 0 \quad (\text{VI.16})$$

En effectuant un développement en série de Taylor de l'équation (VI.16) , on trouve :

$$\begin{aligned} f\left(m\{\sigma\} + r\{\Delta\sigma^e\}, m_k\right) &= f\left(m\{\sigma\}, m_k\right) + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\} \Big|_{m\{\sigma\}}^T r\{\Delta\sigma^e\} \\ &+ r^2\{\Delta\sigma^e\}^T \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial \{\sigma\}^2} \right\} \Big|_{m\{\sigma\}}^T \{\Delta\sigma^e\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.17})$$

à partir de l'équation précédente et en négligeant les termes d'ordre supérieurs à 1 , on aura :

$$r = \frac{-f(\{^m\sigma\}, {}^m k)}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T \Big|_{\{^m\sigma\}} \{\Delta\sigma^e\}} \quad (\text{VI.18})$$

Pour le cas où le point de Gauss est en plasticité à la fin de la $m^{\text{ème}}$ étape de chargement, c'est à dire, $f(\{^m\sigma\}, {}^m k) = 0$, on peut utiliser la fonction du critère de chargement L défini en (VI.5) pour déterminer l'état de chargement.

Dans le cas des petits incréments de chargement.

$$L = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [C] \{\Delta\varepsilon\} \quad (\text{VI.19})$$

Deux cas sont envisagés :

- $L \leq 0$, le point de Gauss est en état de déchargement ou chargement neutre.

Dans ce cas, on utilise les relations constitutives élastiques.

- $L > 0$, le point de Gauss est en état de chargement plastique. Dans ce cas l'intégration de l'équation (VI.13) se fera numériquement avec $r = 0$.

VI.3 Techniques d'intégration :

Les algorithmes employés pour réaliser l'intégration de l'équation (VI.13) ou (VI.14) peuvent être classés en deux catégories, ceux qui utilisent des techniques d'intégration explicites et ceux qui utilisent des techniques implicites. Pour les deux catégories, et dans le but d'obtenir la précision dont on a besoin du processus d'intégration, l'incrément de déformation, qui constitue la réponse élastoplastique, est divisé en nombre suffisant m de subincréments $\{\Delta\tilde{\varepsilon}\}$.

$$\{d\varepsilon\} = \{\Delta\tilde{\varepsilon}\} = \frac{(1-r)}{m} \{\Delta\varepsilon\} \quad (\text{VI.20})$$

Pour les méthodes explicites, l'équation (VI.15) peut s'écrire sous forme :

$$\{d\sigma\} = [C] (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^p\}) \quad (\text{VI.21})$$

avec :

$$\{d\varepsilon^p\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial \{\sigma\}} \right\} = \frac{L}{h} \left\{ \frac{\partial g}{\partial \{\sigma\}} \right\} \quad (\text{VI.22})$$

et :

$$L = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [C] \{\Delta \tilde{\varepsilon}\} \quad (\text{VI.23})$$

ou :

$$\{d\varepsilon^p\} = [P] \{d\varepsilon\} \quad (\text{VI.24})$$

avec :

$$[P] = P(\{\varepsilon\}, \{\varepsilon^p\}, \varepsilon^p) = \frac{1}{h} \left\{ \frac{\partial g}{\partial \{\sigma\}} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [C] \quad (\text{VI.25})$$

avec les conditions initiales :

$$\{\varepsilon\} = {}^m \{\varepsilon\} + r \{\Delta \varepsilon\} \quad (\text{VI.26})$$

$$\{\sigma\} = {}^m \{\sigma\} + r \{\Delta \sigma^e\} \quad (\text{VI.27})$$

$$\{\varepsilon^p\} = {}^m \{\varepsilon^p\}, \quad \varepsilon_p = {}^m \varepsilon_p \quad (\text{VI.28})$$

où r est le scalaire qui satisfait l'équation (VI.18).

Pour chaque subincrément, $\{\Delta \tilde{\varepsilon}\}$, la technique explicite doit passer par les étapes suivantes :

Etape1 : Détermination du subincrément de déformation plastique $\{\Delta \tilde{\varepsilon}^p\}$, en utilisant l'équation (VI.22).

Etape2 : Calcul du subincrément de contrainte $\{\Delta \tilde{\sigma}\}$, utilisant l'équation (VI-21).

$$\{\Delta \tilde{\sigma}\} = [c] (\{\Delta \tilde{\varepsilon}\} - \{\Delta \tilde{\varepsilon}^p\})$$

Etape 3 : Actualisation des déformations, contraintes et les paramètres d'érouissage.

$$\{\sigma\} \leftarrow \{\sigma\} = \{\Delta\tilde{\sigma}\}$$

$$\{\varepsilon\} \leftarrow \{\varepsilon\} = \{\Delta\tilde{\varepsilon}\}$$

$$\{\varepsilon^p\} \leftarrow \{\varepsilon^p\} = \{\Delta\tilde{\varepsilon}^p\}$$

$$\varepsilon_p \leftarrow \varepsilon_p + \Delta\tilde{\varepsilon}_p \quad , \quad k \leftarrow k(\varepsilon_p)$$

Dans cette procédure, la précision de la contrainte obtenue dépend principalement de la précision du subincrément de déformation plastique calculé.

Notons :

$$[P_i] = P(\{\varepsilon\} + r_i \{\Delta\tilde{\varepsilon}\}, \{\varepsilon^p\} + r_i \{\Delta\tilde{\varepsilon}^p\}_{i-1}, \varepsilon_p + r_i (\Delta\tilde{\varepsilon}_p)_{i-1})$$

où $[P]$ est la matrice définie en (VI.24), trois algorithmes sont proposés pour le calcul de $\{\Delta\tilde{\varepsilon}^p\}$:

1) l'algorithme d'Euler :

$$\begin{cases} \{\Delta\tilde{\varepsilon}^p\} = [P_1] \{\Delta\tilde{\varepsilon}\} \\ r_1 = 0 \end{cases}$$

2) l'algorithme de Runge-Kutta du second ordre :

$$\begin{cases} \{\Delta\tilde{\varepsilon}^p\} = W_1 \{\Delta\tilde{\varepsilon}_1^p\} + W_2 \{\Delta\tilde{\varepsilon}_2^p\} \\ \{\Delta\tilde{\varepsilon}_i^p\} = [P_i] \cdot \{\Delta\tilde{\varepsilon}\} \\ r_1 = 0. \quad r_2 = 1. \quad W_1 = W_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3) l'algorithme de Runge-Kutta du 4^{ème} ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\Delta \tilde{\varepsilon}^P\} = W_1 \{\Delta \bar{\varepsilon}_1^P\} + W_2 \{\Delta \bar{\varepsilon}_2^P\} + W_3 \{\Delta \bar{\varepsilon}_3^P\} + W_4 \{\Delta \bar{\varepsilon}_4^P\} \\ \{\Delta \bar{\varepsilon}_i^P\} = [P_i] \cdot \{\Delta \bar{\varepsilon}\} \\ r_1 = 0, r_2 = r_3 = \frac{1}{2}, r_4 = 1 \\ W_1 = W_4 = \frac{1}{6}, W_2 = W_3 = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

VI.4 Contrôle et correction :

Dès que certaines approximations sont faites dans l'implémentation numérique des relations constitutives incrementales, la condition de consistance ($df = 0$) devient invalide, c'est-à-dire, ajouter un subincrément de déformation à l'état subséquent conduit à :

$$f(\{\sigma\}, \varepsilon_p) \neq 0.$$

Pour rectifier cela des corrections sont faites sur le vecteur de contrainte. Le vecteur correction de contrainte sera :

$$\{\delta\sigma\} = a \left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\}$$

où a est la solution de l'équation :

$$f(\{\sigma\} + \{\delta\sigma\}, \varepsilon_p) = f\left(\{\sigma\} + a \left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\}, \varepsilon_p\right) = 0$$

La résolution de cette équation donne :

$$a = \frac{-f(\{\sigma\}, \varepsilon_p)}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\}}$$

finalement, le vecteur contrainte après correction sera :

$$\{\sigma\} \leftarrow \{\sigma\} + a \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\}$$

VI.5- La procédure générale pour le calcul des contraintes :

Dans cette procédure le symbole IPEL est employé pour indiquer l'état de chargement du point de Gauss .

IPEL = 0 \Rightarrow Le point de Gauss est en état de chargement élastique.

IPEL = 1 \Rightarrow Le point de Gauss est en état de chargement élastoplastique.

La procédure de calcul suit les étapes suivantes :

Etape 1 : Calcul de l'incrément de déformation $\{\Delta\varepsilon\}$ et l'incrément de contrainte $\{\Delta\sigma^e\}$, en supposant que le comportement est élastique.

$$\begin{aligned} \{\Delta\varepsilon\} &= {}^{m+1}\{\varepsilon\} - {}^m\{\varepsilon\} \\ \{\Delta\sigma^e\} &= [C]\{\Delta\varepsilon\} \end{aligned}$$

Etape 2 : Détermination de l'état de chargement.

Si IPEL=1, le point de Gauss est en élastoplasticité .

Calcul de la fonction du critère de chargement L :

Si L > 0, r \leftarrow 0 chargement plastique.

Si L \leq 0, r \leftarrow 1 IPEL \leftarrow 0, déchargement ou chargement neutre.

Si $IPEL = 0$, le point de Gauss est en élasticité.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Calcul de la fonction de charge } f : \\ f \leftarrow f\left(\left\{^m\sigma\right\} + \left\{\Delta\sigma^e\right\}, \varepsilon_p\right) \\ \text{Si } f \leq 0, r \leftarrow 1, \text{ reste en élasticité go to étape 5.} \\ \text{Si } f > 0, IPEL \leftarrow 1, \text{ entre en élastoplasticité.} \\ \text{Détermination de } r \text{ qui satisfait } f\left(\left\{^m\sigma\right\} + r\left\{\Delta\sigma^e\right\}, \varepsilon_p\right) = 0 \\ \left\{\sigma\right\} \leftarrow \left\{^m\sigma\right\} + r\left\{\Delta\sigma^e\right\} \end{array} \right.$$

Etape 3 : Calcul du subincrément de déformation .

$$\left\{\Delta\tilde{\varepsilon}\right\} = \frac{(1-r)}{m} \left\{\Delta\varepsilon\right\}$$

Etape 4 : Intégration numérique, boucle de 1 à m .

Détermination du subincrément de déformation plastique $\left\{\Delta\tilde{\varepsilon}^p\right\}$ et $\Delta\tilde{\varepsilon}_p$:

$$\left| \begin{array}{l} \left\{\Delta\tilde{\sigma}\right\} = [C] \left(\left\{\Delta\tilde{\varepsilon}\right\} - \left\{\Delta\tilde{\varepsilon}^p\right\} \right) \\ \left\{\sigma\right\} = \left\{\sigma\right\} + \left\{\Delta\tilde{\sigma}\right\}, \quad \varepsilon_p \leftarrow \varepsilon_p + \Delta\tilde{\varepsilon}_p \end{array} \right.$$

Contrôle de la condition limite subséquente :

Si $\left| f\left(\left\{\sigma\right\}, \varepsilon_p\right) \right| > \varepsilon_f$, où ε_f est la tolérance sur la fonction de charge .

$$\left| \begin{array}{l} \text{Détermination des corrections sur le vecteur contrainte } \left\{\delta\sigma\right\} . \\ \left\{\sigma\right\} \leftarrow \left\{\sigma\right\} + \left\{\delta\sigma\right\} \end{array} \right.$$

Etape 5 : Calcul de la matrice contrainte elastoplastique :

$$\left\{\sigma\right\}^{m+1} \leftarrow \left\{\sigma\right\} + \left\{\delta\sigma\right\}$$

Etape 6 : Calcul de la matrice de rigidité elastoplastique $[C^{ep}]$.

CHAPITRE

Présentation du programme "PLAS"

PRESENTATION DU PROGRAMME « PLAS »

VII.1 Présentation générale du programme :

Le programme réalisé est écrit en langage FORTRAN. On a utilisé un élément de référence isoparamétrique carré à 8 nœuds et 16 degrés de liberté.

Le programme comporte deux grands blocs :

1. Bloc d'entrer des données :

Il sert à lire à partir d'un fichier de données, vérifier et à organiser les données décrivant le maillage de la structure ainsi que les propriétés des éléments, les sollicitations, le type de problème et les conditions aux limites.

2. Bloc de résolution et d'impression des résultats :

Il permet la construction des matrices $[k]$ et des vecteurs $\{f\}$, la résolution des systèmes d'équations algébriques et l'affectation des résultats vers un fichier de sortie créé auparavant.

Le bloc de résolution traite deux cas de comportement :

a) Comportement linéaire :

Dans ce cas, le milieu est supposé élastique, linéaire, homogène et isotrope. Alors, d'après les raisonnements faits au chapitre V, la résolution de

$$[K]\{U\}=\{F\}$$

se fait en calculant la matrice de rigidité inverse $[K]^{-1}$, on aura en suite :

$$\{U\}=[K]^{-1}\{F\}$$

b) Comportement non linéaire :

Dans la résolution des problèmes non linéaires , on a utilise la méthode incrementale (ou pas à pas) avec l'une des méthodes itératives suivantes :

- La méthode Quasi -Newton , où la matrice de rigidité est estimée a chaque itération i .
- La méthode Newton-Raphson modifiée où l'on garde la même matrice tout au long du pas.

Pour chaque itération i , on calcul aussi les incréments de :

Déformations $\{\Delta\varepsilon\}$ à laide des relations deformations-deplacements .

Contraintes $\{\Delta\sigma\}$ à l'aide des relations contraintes-deformations ,associées au modèle de Drucker-Prager développées dans les chapitres III et VI .

Pour l'exécution du programme il suffit de faire rentrer dans l'ordre :

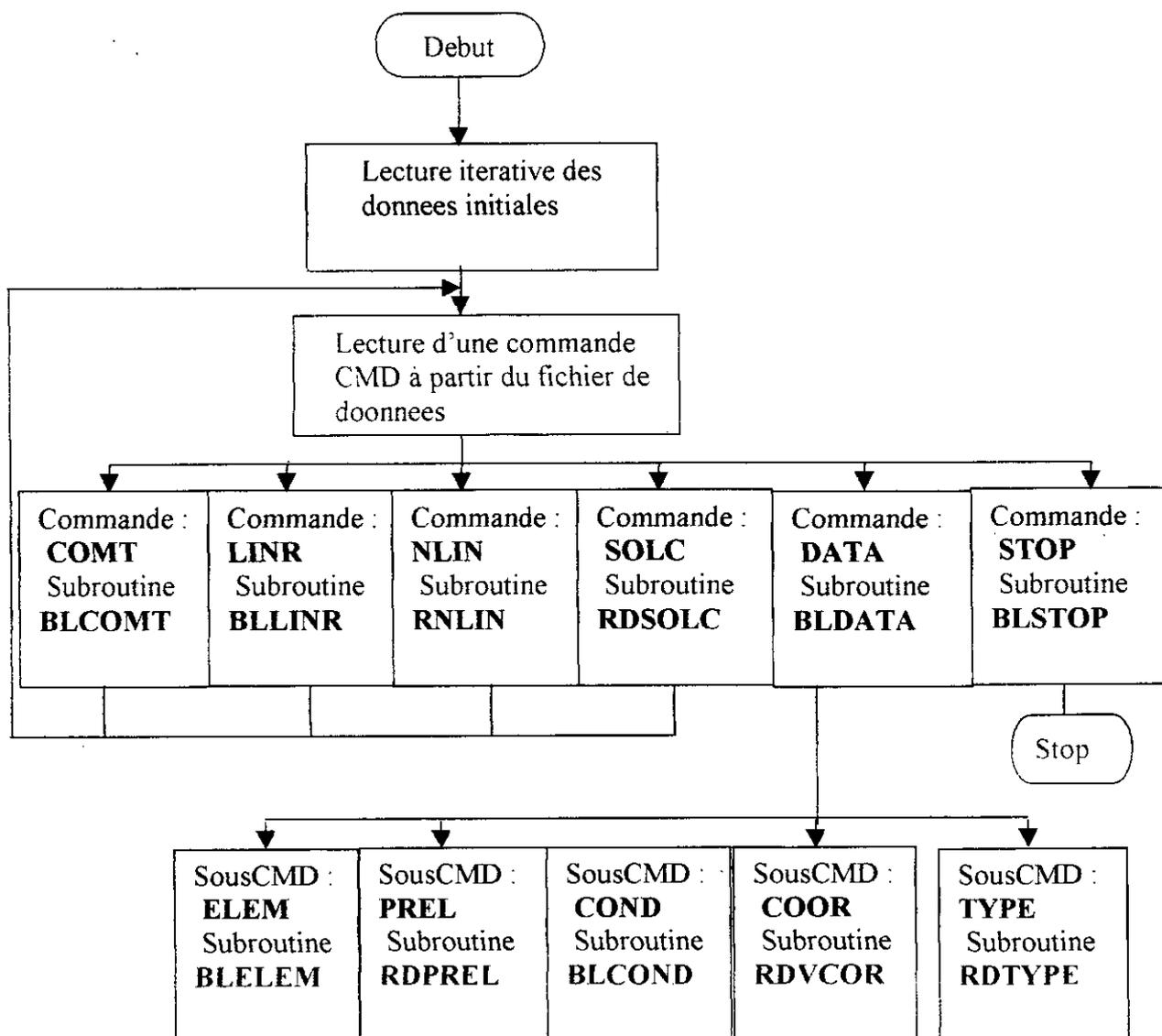
- Nom du fichier de donnes .
- Nom du fichier de sortie .

VII.2 Les organigrammes généraux :

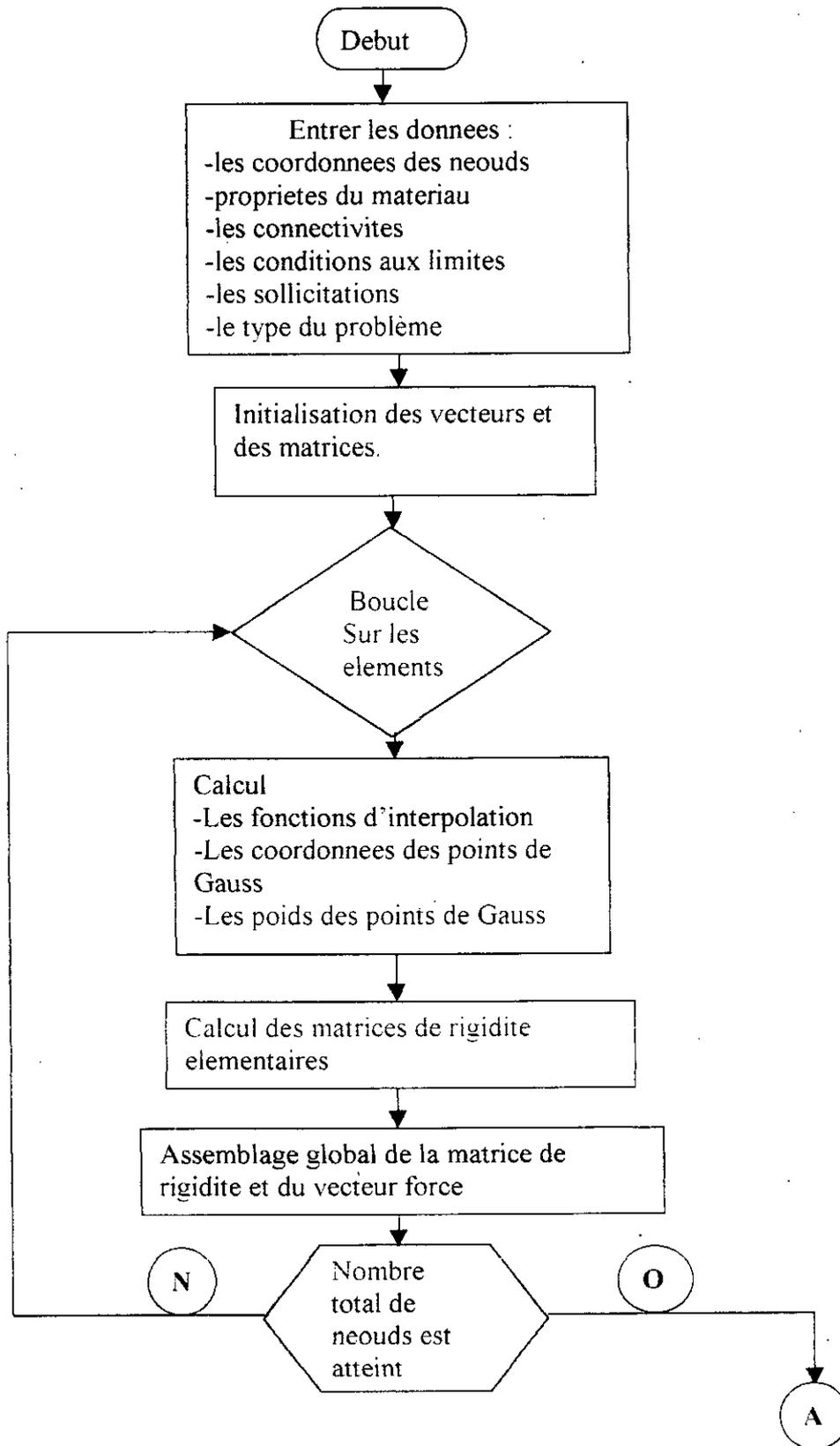
Le programme principal (Organigramme 1) se compose des blocs :

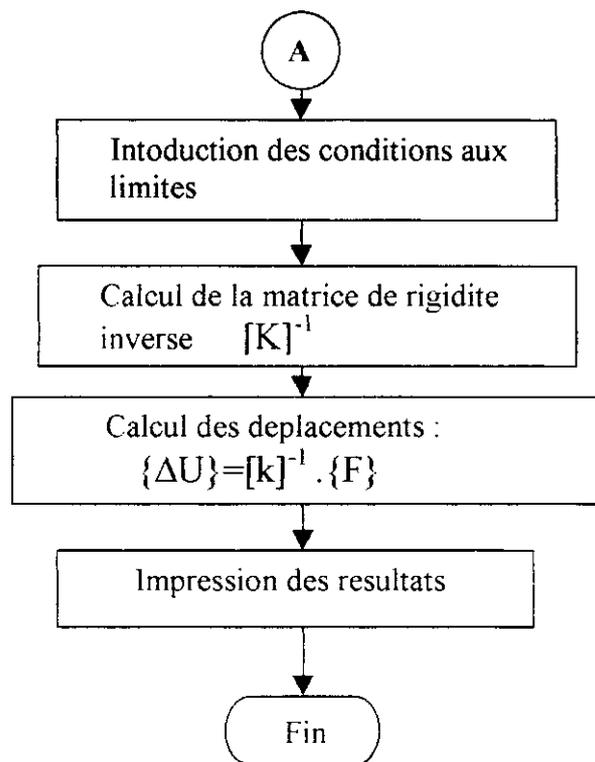
- Bloc « **COOR** » : Lecture des coordonnées des nœuds et le nombre de degrés de liberté de chaque nœud.
- Bloc « **COND** » : Lecture des conditions aux limites.
- Bloc « **PREL** » : Lecture des propriétés élémentaires :
 - 1 - Type du problème : 1 = isotropie en contraintes planes,
2 = isotropie en déformations planes .
 - 2 - Module d'élasticité E .
 - 3 - Module de Poisson ν .
 - 4 – Angle de frottement interne φ .
 - 5 – Cohésion C .
 - 6 – Epaisseur e .
 - 7 – Masse volumique du matériau ρ .

- ❑ Bloc « **ELEM** » : lecture des éléments et leurs connectivites.
- ❑ Bloc « **SOLC** » : Lecture des sollicitations.
- ❑ Bloc « **LINR** » : Assemblage et résolution des problèmes linéaires.
- ❑ Bloc « **LINR** » : Assemblage et résolution des problèmes non linéaires.
- ❑ Bloc « **STOP** » : Fin du programme.

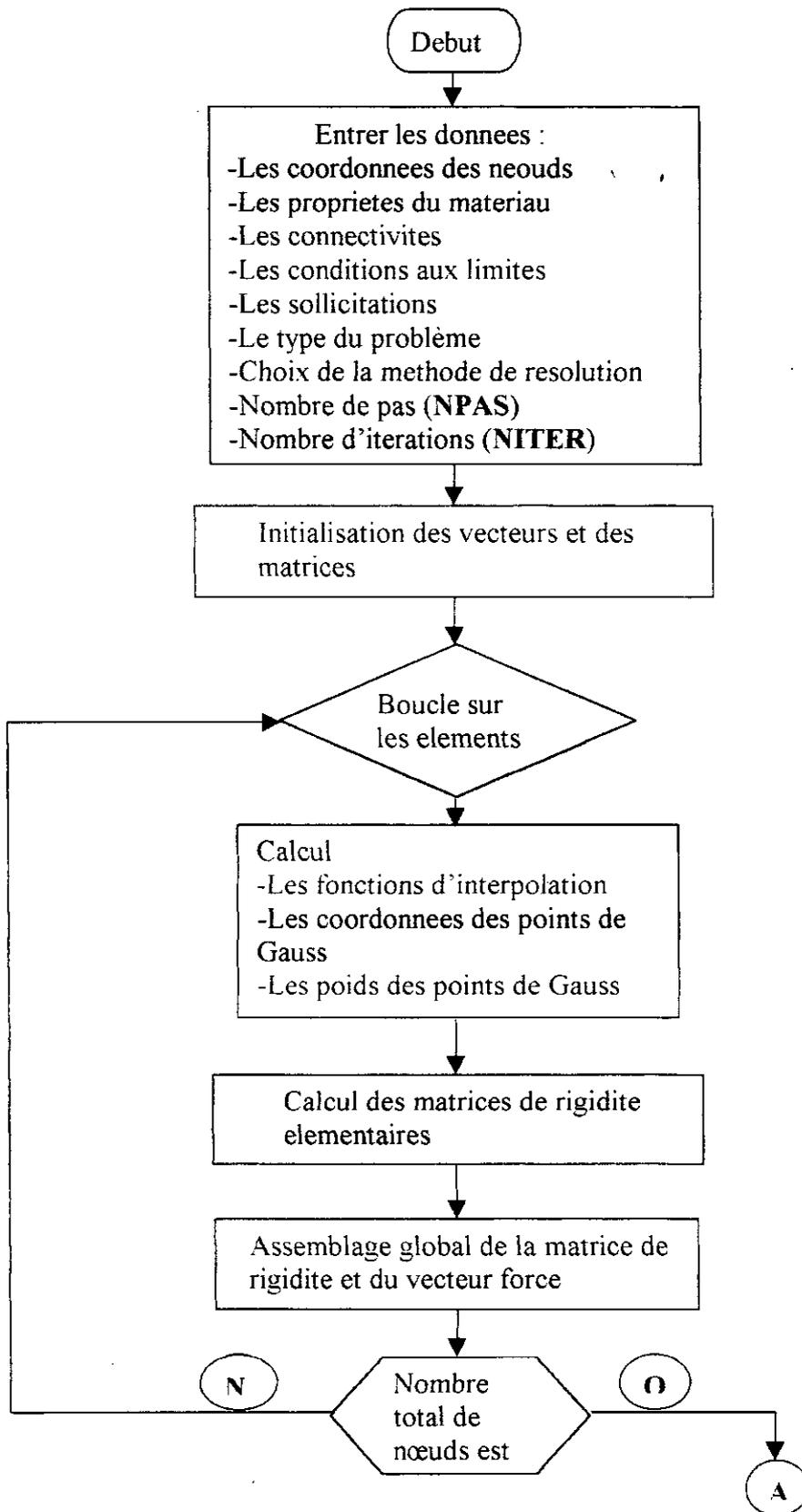


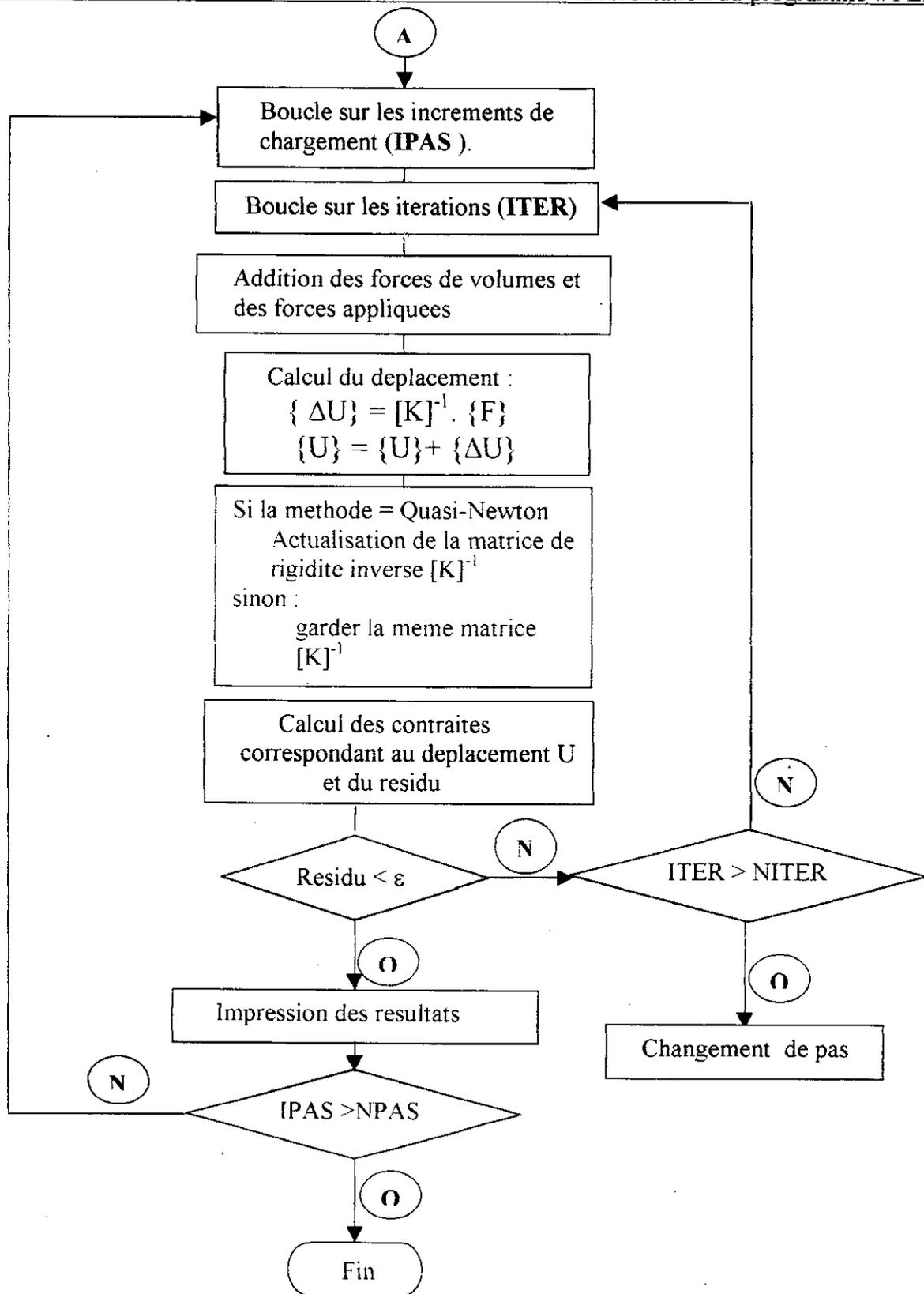
Organigramme 1 : Programme principal





Organigramme 2 : Résolution d'un problème linéaire (bloc : **BLLINR**).





Organigramme 3 : Résolution d'un problème non linéaire (bloc : RNLIN).

VIII CHAPITRE

Applications du code
de calcul élaboré

APPLICATIONS DU CODE DE CALCUL ELABORE

VIII.1 Introduction :

Nous avons élaboré un code de calcul par éléments finis pouvant intégrer des éléments rectangulaires ou triangulaires isoparamétriques respectivement à 8 nœuds et 6 nœuds.

Pour ces deux types d'éléments, la résolution des systèmes d'équations non linéaires se fait par la méthode incrémentale, associée à une techniques numériques relatives au type de non linéarité considéré.

Le logiciel permet un choix de la méthode parmi une des méthodes classiques, à savoir

- la méthode de Newton-Raphson modifiée
- la méthode de Newton-Raphson
- la méthode de Quasi-Newton

Ayant constaté que la première et la troisième méthode sus citée bien qu'étant plus stable que la deuxième nécessitaient un nombre d'itération important, et une durée de temps de calcul trop longue, nous avons opté par conséquent pour la méthode de Newton-Raphson tant que la non-linéarité n'était pas excessive.

Pour le modèle élastoplastique parfait, à chaque incrément la résolution des équations se fait donc par la méthode itérative de Newton-Raphson. La deuxième technique itérative utilisée lors d'une itération de la méthode de Newton-Raphson, en chaque point de Gauss se trouvant dans un état de chargement plastique, afin de déterminer respectivement les incréments de déformations plastiques ainsi que l'incrément de contrainte au point de Gauss considérés est la méthode explicite d'Euler

VIII.2 Stratégie de calcul :

Nous ne nous attarderons pas sur l'algorithme générale présentée précédemment, ainsi que sur l'implémentation numérique du modèle élasto-plastique présentés au chapitre III et VI . Nous présenterons surtout la stratégie utilisée pour surmonter les problèmes de convergences rencontrés lors de l'exécution du code de calcul élaboré pour assurer une convergence de ce code.

a) Tests de convergence :

Critère en déplacement :

$$\| \{\Delta U\}_i^k \| \leq \varepsilon_d \| \{U\}_i^k - \{U\}_i^{k-1} \|.$$

Critère en force :

$$\| \{\bar{R}\}^k - [\bar{K}(\{U\}_i^k) \{U\}_i^k] \| \leq \varepsilon_f \| \{\bar{R}\}^k - [\bar{K}(\{U\}_i^{k-1}) \{U\}_i^{k-1}] \|$$

Où $\{U\}$ est le vecteur déplacement nodal et $\{\Delta U\}$ son incrément. $\{\bar{R}\}$ et $[\bar{K}]$, sont respectivement le vecteur force corrigé et la matrice de rigidité corrigée. Les ε représentent les tolérances admissibles.

Généralement le test en déplacement est insuffisant dans le cas d'un problème non linéaire, comme nous l'avons par nous même constaté. En effet bien que la condition de convergence soit vérifiée en déplacement, la condition de convergence n'est pas forcément vérifiée en force. Le terme $\left\| \{\bar{R}\}^k - [\bar{K}(\{U\}^k_i) \{U\}^k_i] \right\|$ mesure le déséquilibre résiduel au pas considéré entre les efforts extérieurs et les efforts intérieurs obtenus à partir de la solution $\{U_i^k\}$. Ce déséquilibre résiduel doit être le plus petit possible. Ce test en force est indispensable pour éviter l'accumulation et la propagation de ces déséquilibres au cours des pas.

Pour éviter de faire un trop grand nombre d'itération à chaque pas, nous avons été obligés d'adopter un processus simple d'accélération de la convergence.

A l'itération k de l'étape i nous avons $\{U\}^k_i = \{U\}^k_{i-1} + \{\Delta U\}^k_i$

Nous cherchons un facteur multiplicatif ρ tel que le déséquilibre résiduel correspondant au déplacement $\{U\}^k_i = \{U\}^k_{i-1} + \rho \cdot \{\Delta U\}^k_i$ soit minimal.

Pour un facteur multiplicatif égal à 1, nous avons le déplacement résiduel obtenu à la fin de la résolution du système d'équation linéaire $[\bar{K}(\{U\}^k_{i-1})] \{\Delta U\}^k_i = \{\bar{R}\}^k$.

Pour un facteur multiplicatif égal à 0, nous avons le déplacement résiduel obtenu à la fin de l'itération précédente.

Nous testons entre l'itération en cours et l'itération précédente si nous avons une diminution du déséquilibre résiduel ou une augmentation. Dans le cas d'une diminution on pratique de la sur-relaxation et on détermine le déséquilibre résiduel pour une valeur du facteur multiplicatif pris arbitrairement à 1.8. Dans le cas d'une augmentation on pratique de la sous-relaxation et on détermine le déséquilibre résiduel pour un facteur pris à 0.1.

Finalement on dispose d'une suite de trois termes donnant le déséquilibre résiduel en fonction du facteur multiplicatif égal à 1, égal à 0, et égal à 1.8 ou bien 0.1. Pour déterminer le facteur multiplicatif on suppose que la courbe donnant le déséquilibre résiduel en fonction de ce facteur est une parabole, et on détermine alors la valeur du facteur multiplicatif correspondant au minimum de cette courbe.

On peut remarquer que ce procédé d'accélération de la convergence ne demande que très peu de calculs supplémentaires et nécessite aucune résolution de système d'équation linéaire.

b) Changement du pas de chargement :

Les suites $\left\| \{\Delta U\}^k_i \right\|$ et $\left\| \{\bar{R}\}^k - [\bar{K}(\{U\}^k_i) \{U\}^k_i] \right\|$ ne sont pas toujours parfaitement monotones et peuvent présenter parfois des instabilités révélatrices de la divergence du schéma itératif. Ce phénomène est plus sensible avec la suite des déséquilibres résiduels en force qui peut devenir croissante. Dans ces cas là, la discrétisation n'est plus assez fine et on a intérêt à faire des sous étapes en diminuant l'incrément de charge.

Dans tous les cas nous privilégions le critère en déplacement. Celui-ci étant satisfait nous essayons de vérifier le critère en force. Ces deux critères doivent être vérifiés par la solution réelle.

Il nous faut définir un critère de changement du nombre de pas de chargement. Pour cela nous définissons pour un pas de chargement donné pour une première valeur maximale d'itération 'niter'. Nous commençons à itérer en prenant soin de stocker la solution donnant le plus petit déséquilibre résiduel. Plusieurs cas peuvent se présenter.

- La suite converge normalement
 - La suite diverge.
 - La suite commence à converger puis diverge.
 - La suite commence à diverger puis converge.
 - La suite oscille autour d'une certaine valeur.
 - La suite converge et se met ensuite à osciller autour d'une certaine valeur.
- ... Etc.

Lors de nos premiers essais nous avons remarquer que généralement, on obtient plus rapidement une convergence en déplacement qu'en force. Les principaux cas de non-convergence rencontrés correspondaient au cas 6 et généralement pour la suite des déséquilibres résiduels.

Pour surmonter ce type de problème on a finalement après plusieurs tentatives adoptées la procédure suivante :

- Fixer un nombre maximum d'itérations niter1.
- Procéder aux itérations en prenant soin de conserver d'une part le déséquilibre résiduel initial et d'autre part la solution si celle-ci donne un déséquilibre résiduel minimal.
- Au bout d'un certain nombre d'itérations niter2 inférieur à niter1, vérifier si le déséquilibre résiduel en cours est supérieur à 10% du déséquilibre initial.
- . Si oui on fait des sous étapes.
- . Sinon on continue à itérer tant que le nombre d'itération n'est pas égal à niter1. On vérifie alors la convergence avec une **tolérance** plus faible en force. Si celle-ci n'est pas vérifiée, on fait des sous étapes.
- Au cas où le nombre de sous étapes dépasserait une valeur limite fixée à priori, l'algorithme s'arrête.

VIII.3 Applications :

Nous nous sommes intéressés au comportement du sol sous une fondation superficielle continue sous mur rigide de 1.5m. La charge transmise par la fondation au sol est presque dans toutes les applications la capacité portante du sol pour la fondation sus citée. La présence éventuelle d'une nappe n'a pas été considérée. La couche de sol supposé reposé sur un substratum rocheux a une hauteur de 5m.

La capacité portante pour chaque type de sol considéré a été estimé à partir de la formulation proposée par Caquot-Kerisel (ref.). Celle-ci s'écrit pour une fondation superficielle :

$$C_p = B \left(\frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma + c \cdot N_c \right)$$

où , B : largeur de la fondation

c : cohésion

γ : poids volumique du sol

N_γ et N_c sont les termes relatif respectivement à la portance du sol et à la cohésion du sol. Ils sont fonction de l'angle de frottement interne du sol ϕ . Nous avons pris les valeurs donnés par les abaques de Caquot et Kerisel.

VIII.4 Modélisation du problème :

Discrétisation par éléments finis :

La structure et le sol ont été modélisé par des éléments quadrilatéraux à 8 nœuds. Les dimensions en longueur du sol ont été choisis de telle sorte que l'influence de la charge au frontière du sol devient négligeable. En ce qui concerne la hauteur de la couche de sol celle-ci a été choisie de telle sorte que la partie inférieure de la couche n'entre pas en plasticité.

Un premier maillage a été choisit de façon à être suffisamment précis dans le cas élastique par rapport aux formules classiques de la mécanique des milieux continus. Ensuite celui-ci a été raffiné dans la zone la plus susceptible de rentrer en plasticité, soit autour de la fondation.

Le maillage qui en résulte est présenté en fig 8.1

Caractéristique mécanique de la fondation :

Celle-ci est considérée filante ,très rigide et non pesante. Le module d'élasticité considéré pour le massif de fondation est $E = 300\,000$ MPa et le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$

Caractéristique mécanique du sol :

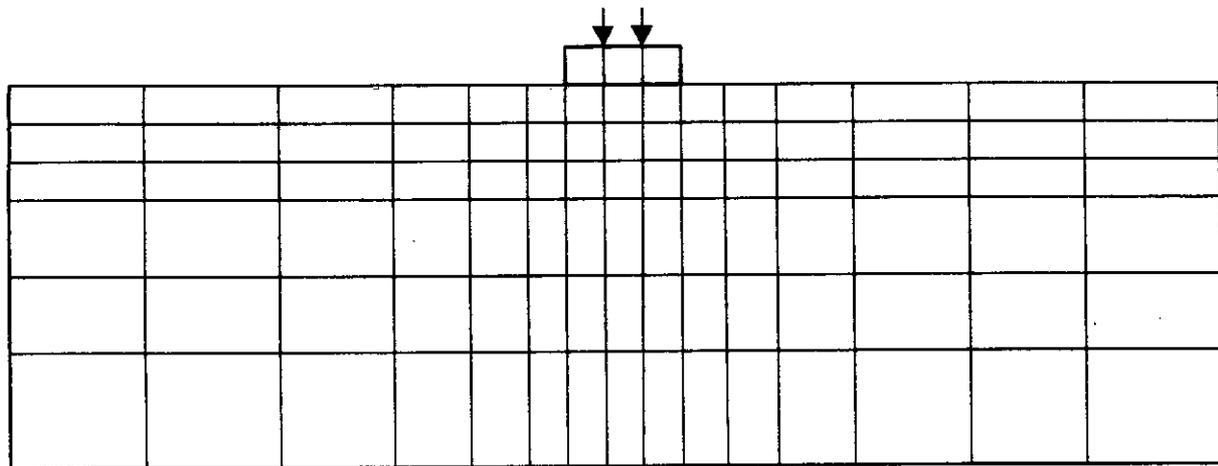
En élasticité les caractéristique mécaniques choisis pour le sol sont $E = 30$ MPa et $\nu = 0.3$

Les paramètres α et K du critère de Drucker Prager pour le sol ont été déterminé à partir des correspondances établies entre ce critère et celui de Mohr Coulomb à partir des valeurs de l'angle de frottement interne ϕ et de la cohésion c .

Nous avons considérés successivement en 1 la correspondance établie à partir du cercle de Drucker Prager circonscrit au polygone de Mohr-Coulomb et en 2 la correspondance établie à partir du cercle interne à ce polygone.

Applications

Les applications effectués sont résumé dans le tableau 8.1. Elles ont été choisies de façon à rendre compte simplement de l'effet de la prise en compte d'une loi de comportement élastoplastique (modèle de Drucker Prager) dont les paramètres sont déterminés a partir des caractéristiques mécaniques des sols. Pour cela nous avons choisis des valeurs usuelles pour ces paramètres. Les essais effectués avec des caractéristiques très médiocres pour le sol n'ayant pas convergé. Pour de tels sols ils nous faudrait affiné encore plus la stratégie de calcul en introduisant une possibilité de sous pas multiple par exemple, et aussi en affinant le maillage, ...ect.



FigureVIII.1: Maillage considéré : système sol-structure

Tableau1 : Résumé des Applications

APPLICATION	C KN /m ²	φ (°)	N _γ	N	Cp (KN)	K (N/m ²)	ALFA	Critère de Drucker Prager
1	10	30	21.8	30.1	870	12.00	0.230	Extérieur
						8.57	0.164	Intérieur
2	10	10	1	8.45	150	12.07	0.070	Extérieur
						10.74	0.063	Intérieur
3	30	10	1	8.45	400	36.21	0.070	Extérieur
						32.24	0.063	Intérieur
4	30	20	4.97	14.8	760	36.74	0.150	Extérieur
						29.22	0.120	Intérieur

Les effets considérés sont :

1) Effets de la charge appliquée

Applications 4 avec une charge égale à 100% de C_p et 50 % de C_p

2) Effets de la cohésion:

Applications 2 et 3

3) Effets du frottement interne:

Application 1 et 2

En plus nous avons étudié l'effet du type de correspondance choisie entre le critère de Ducker Prager et celui de Mohr Coulomb.

1 : cercle de Drucker Prager circonscrit ou extérieur au polygone de Coulomb.

2 : cercle de Drucker Prager intérieur au polygone de Coulomb.

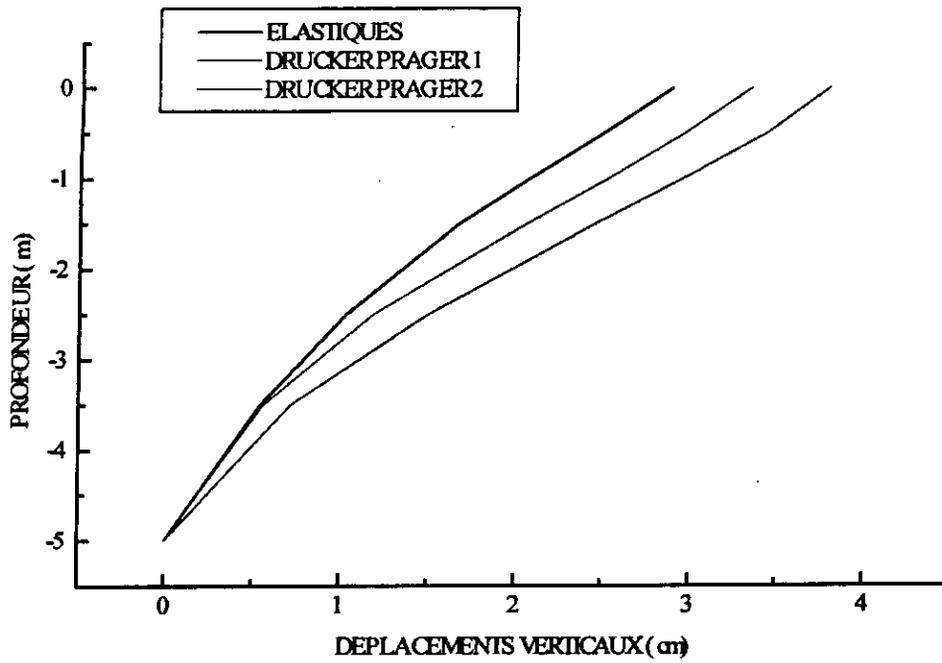


Figure 8.2 : Déplacement verticaux sous la fondation
Application 4 , 100% de Cp

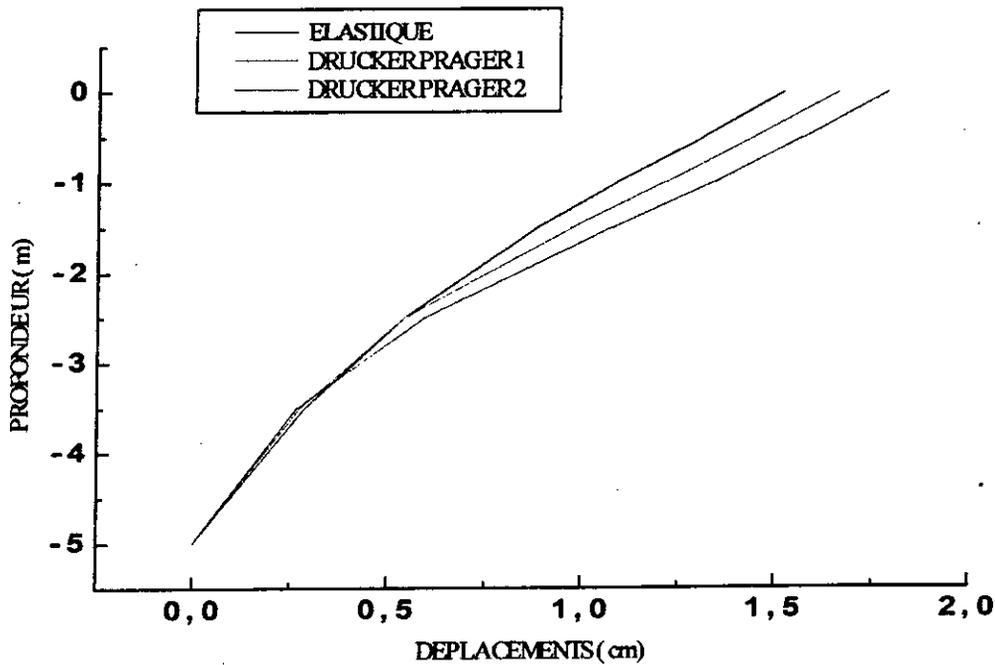


Figure 8.3 : Déplacement verticaux sous la fondation
Application 4 , 50% de Cp

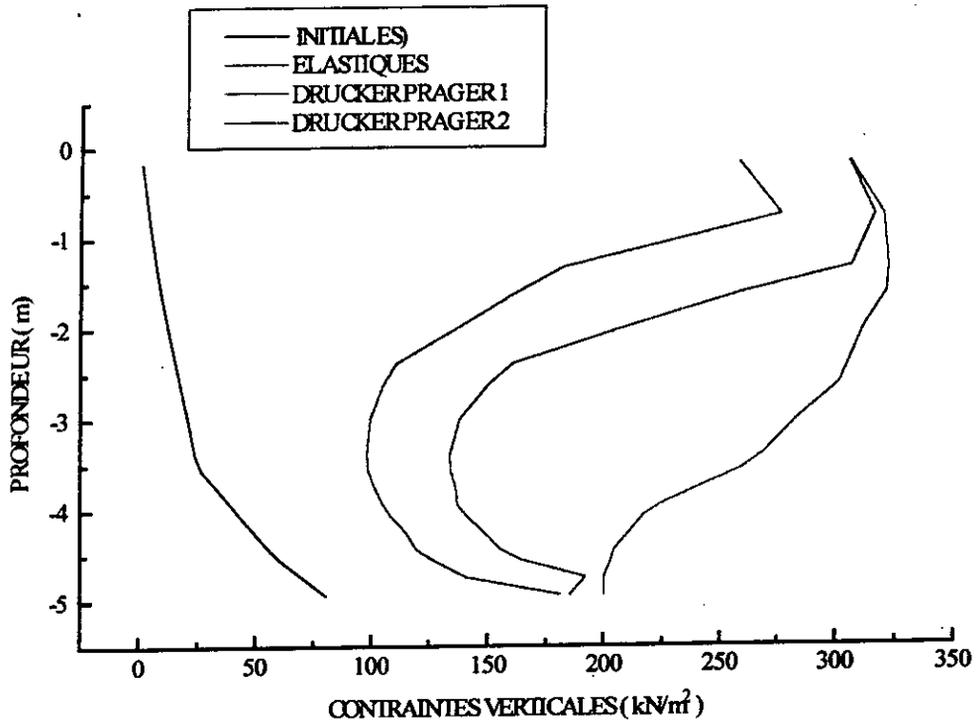


Figure 8.4 : Contraintes verticales totales sous le centre de la fondation, Application 4 , 100% de Cp

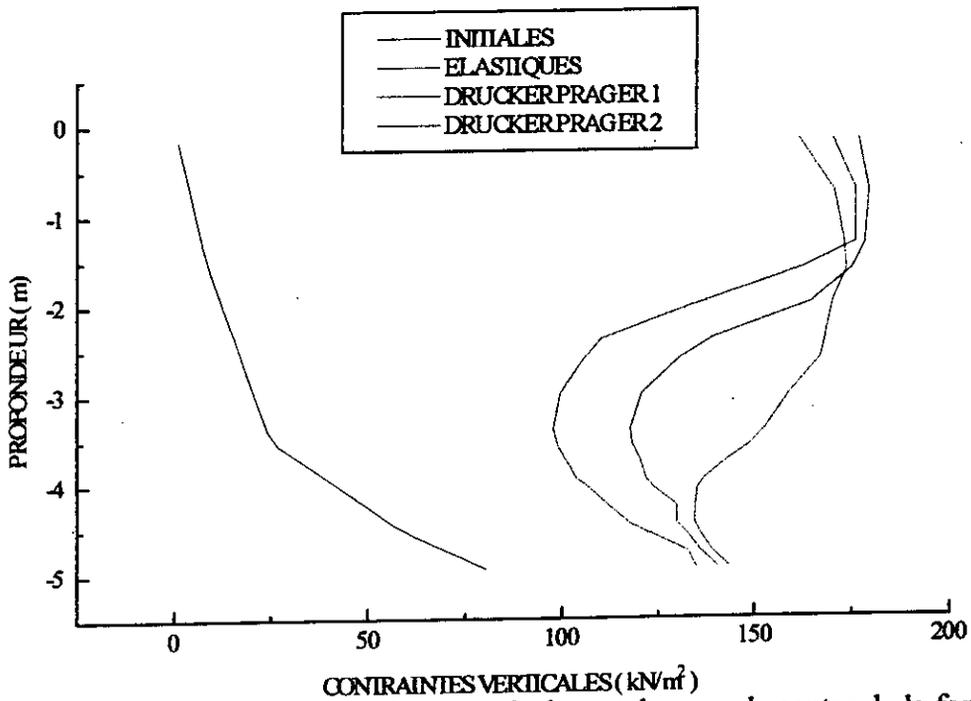


Figure 8.5 : Contraintes verticales totales sous le centre de la fondation Application 4 , 50% de Cp

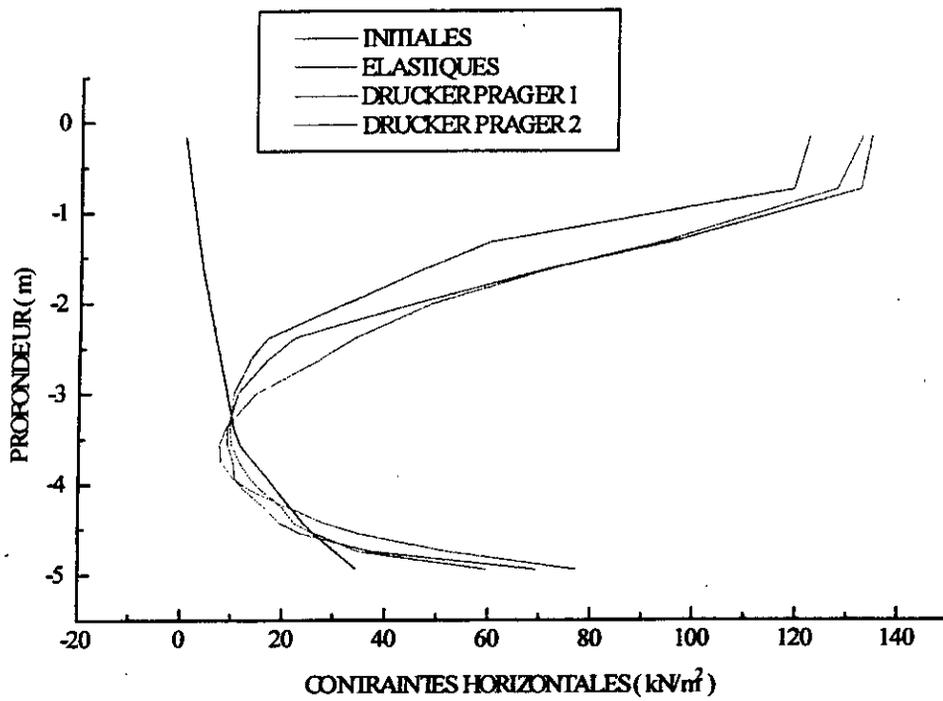


Figure 8.6 Contraintes horizontales totales sous le centre de la fondation
Application 4 , 100% de Cp

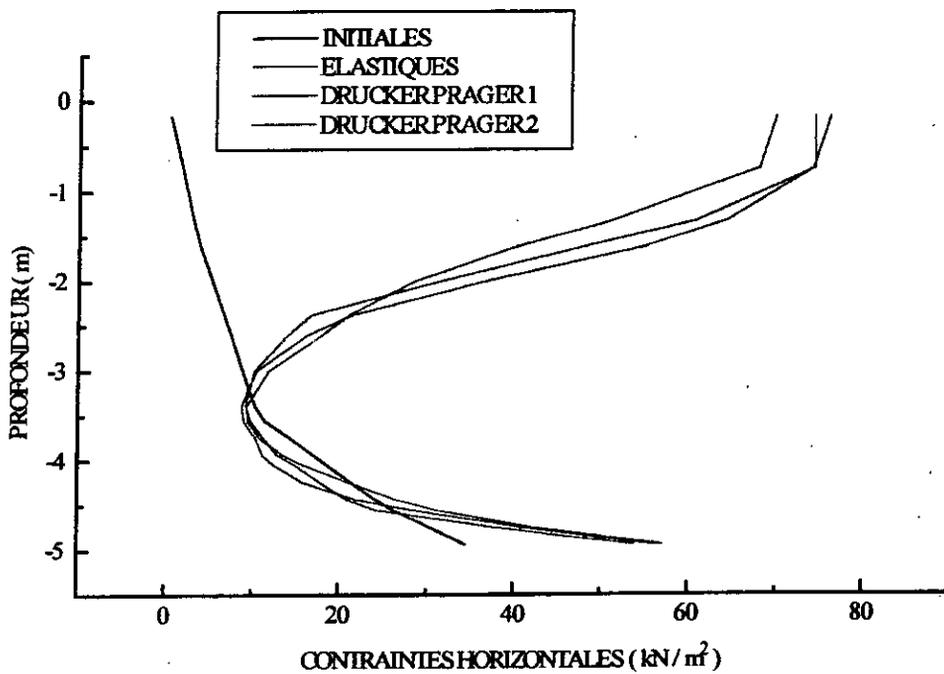


Figure 8.7 Contraintes horizontales totales sous le centre de la fondation
Application 4 , 50% de Cp

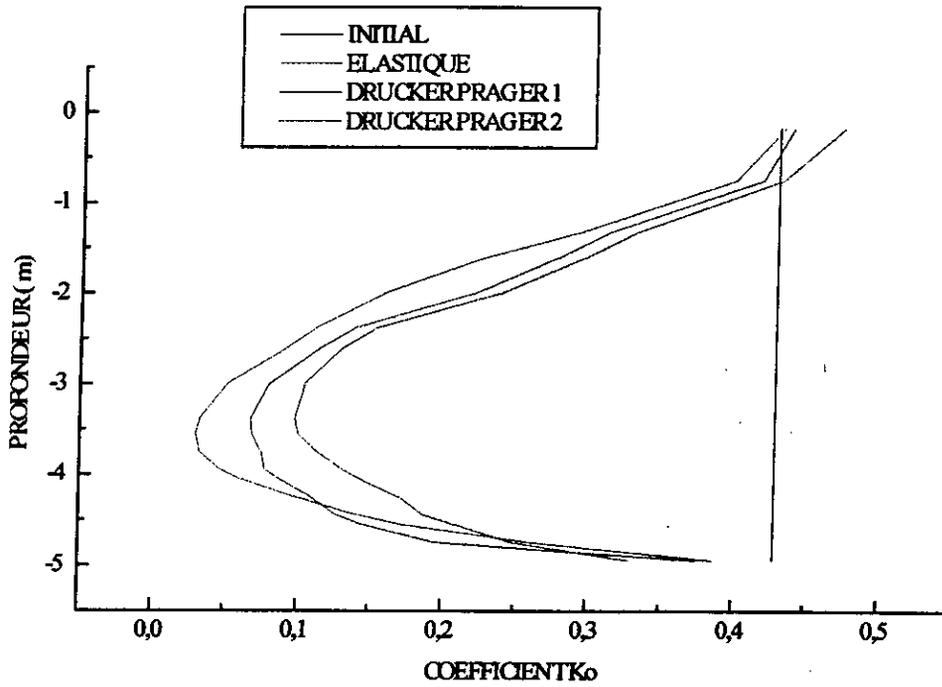


Figure 8.8 : Coefficient K_0 , application 4, 100% de C_p

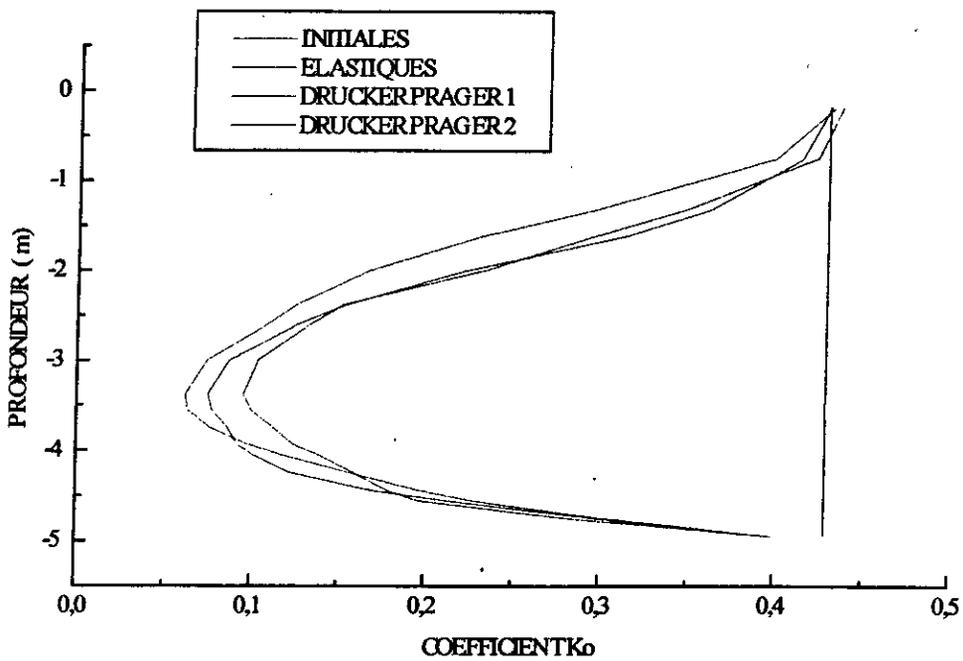


Figure 8.9 : Coefficient K_0 , application 4, 50% de C_p

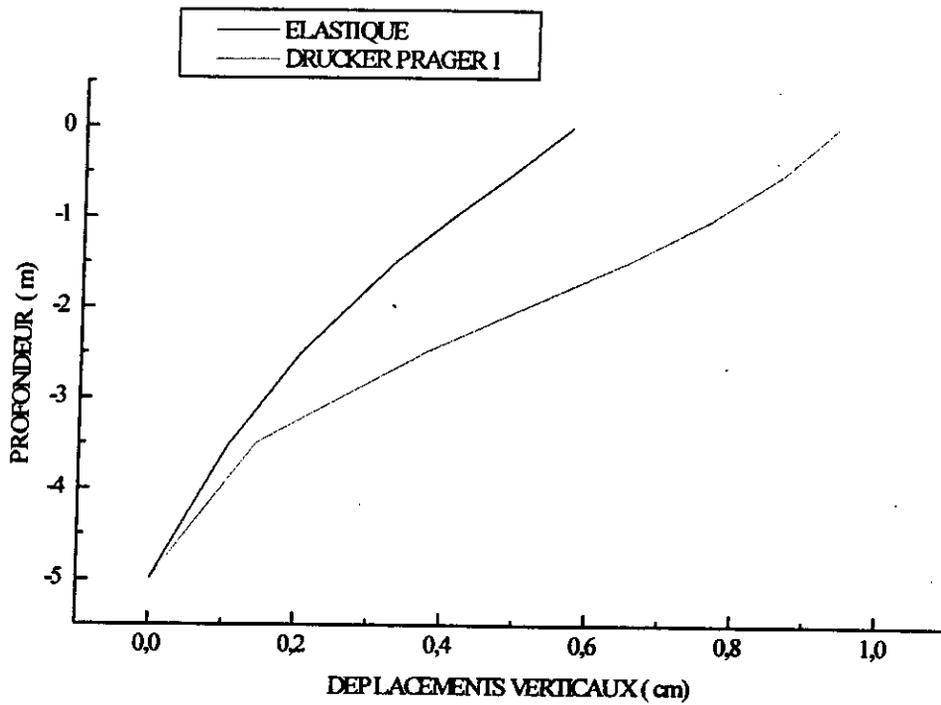


Figure 8.10 : Déplacements verticaux sous la fondations. Application 2

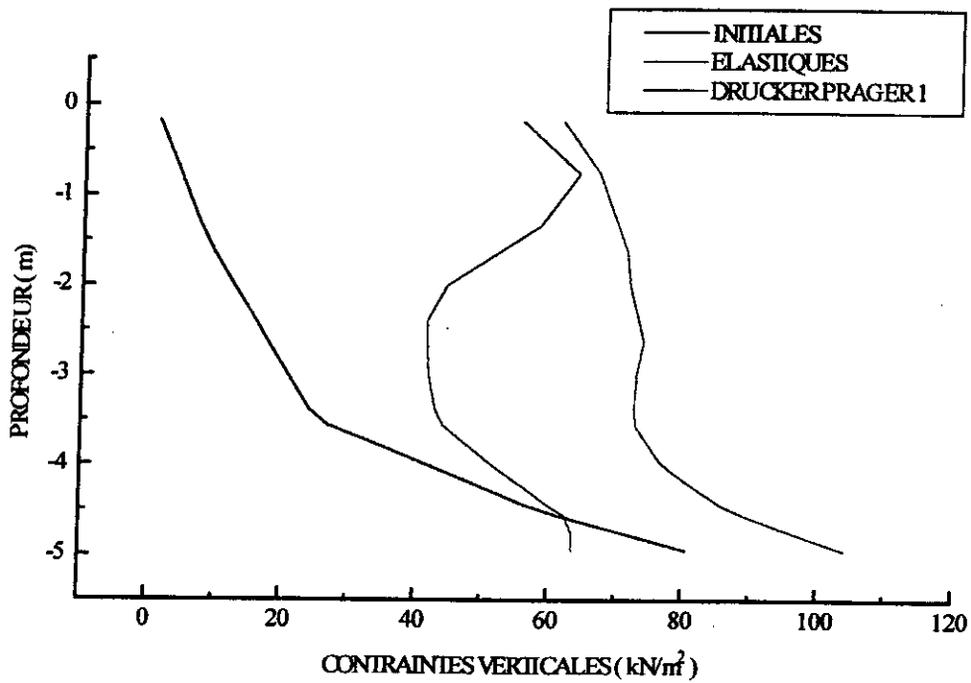


Figure 8.11 Contraintes verticales totales sous le centre de la fondation Applications 2

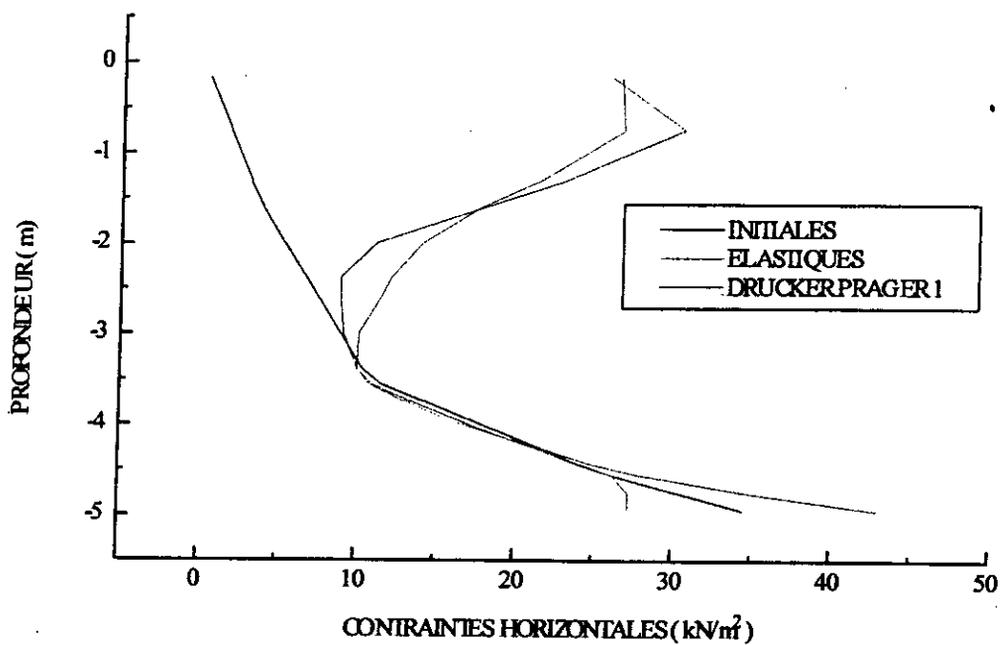


Figure 8.12 Contraintes horizontales sous le centre de la fondations Application 2

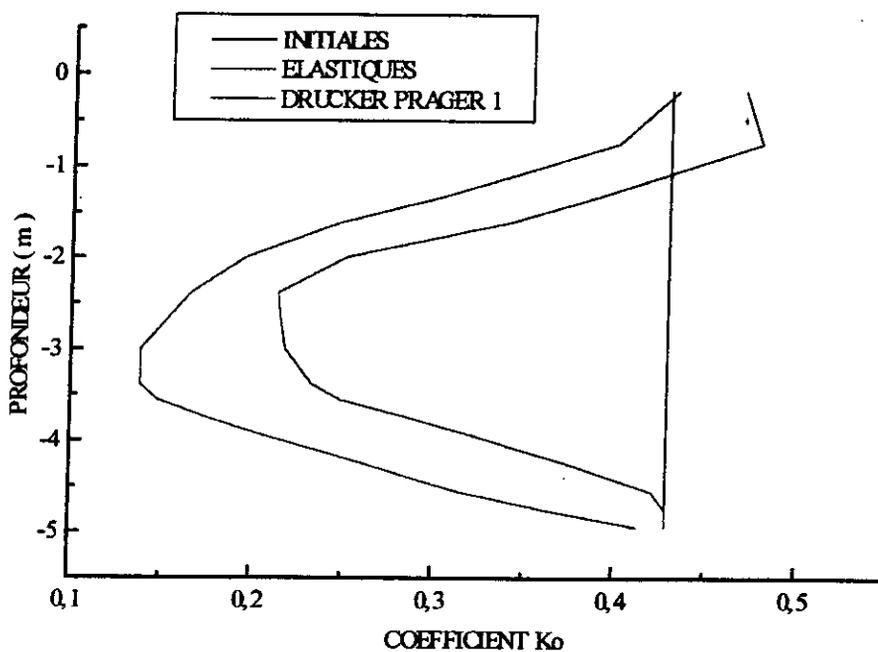


Figure 8.13 Coefficient K_0 , Application 2

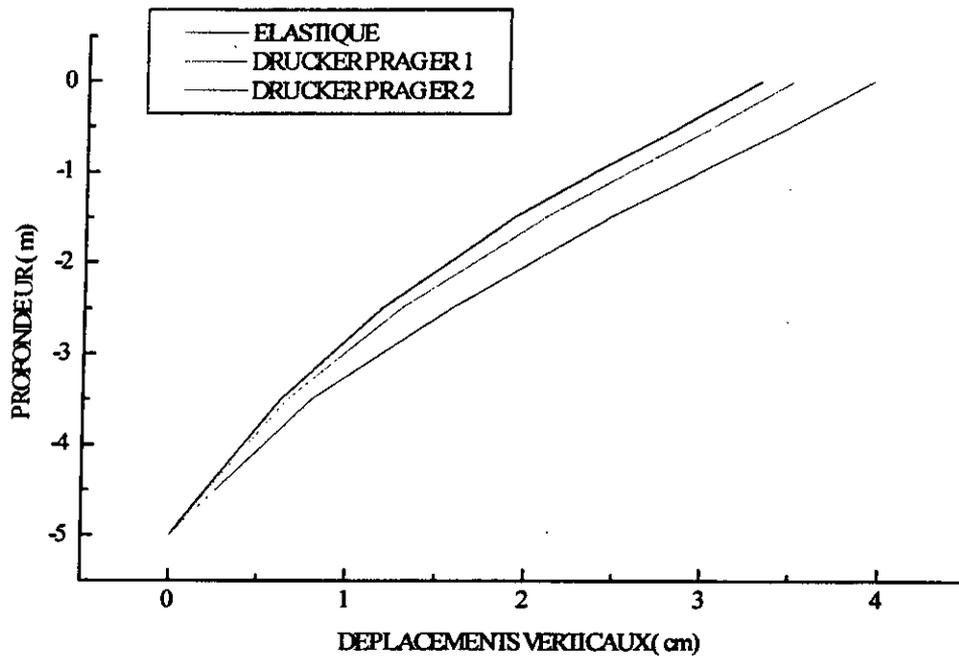


Figure 8.14 Déplacements verticaux sous la fondation
Application 1

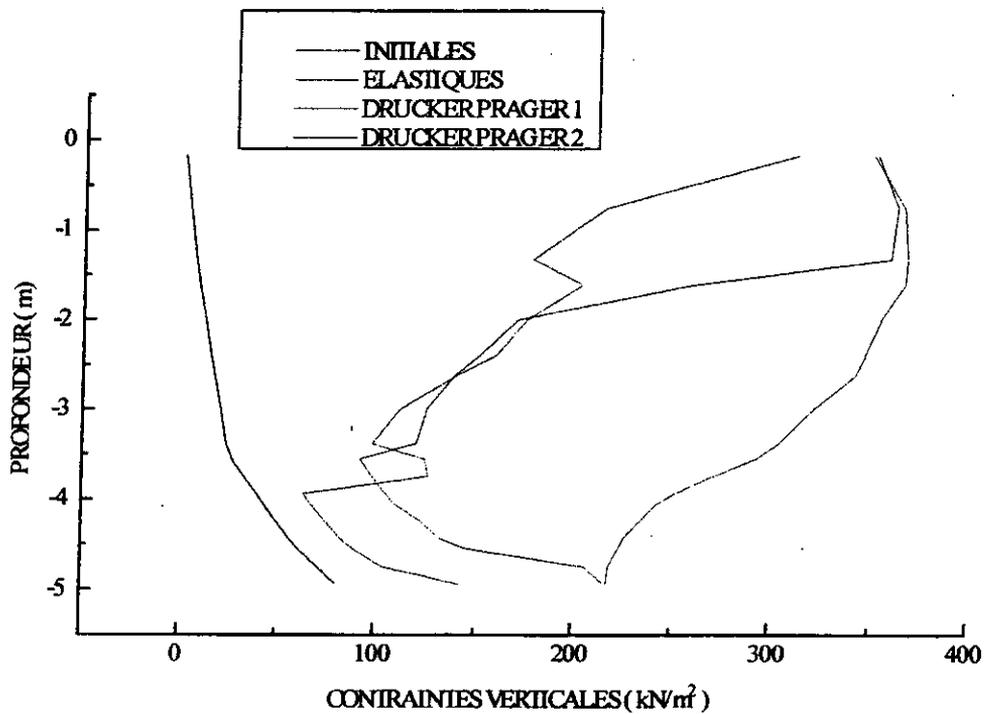


Figure 8.15 Contraintes verticales totales sous le centre de la fondation
Application 1

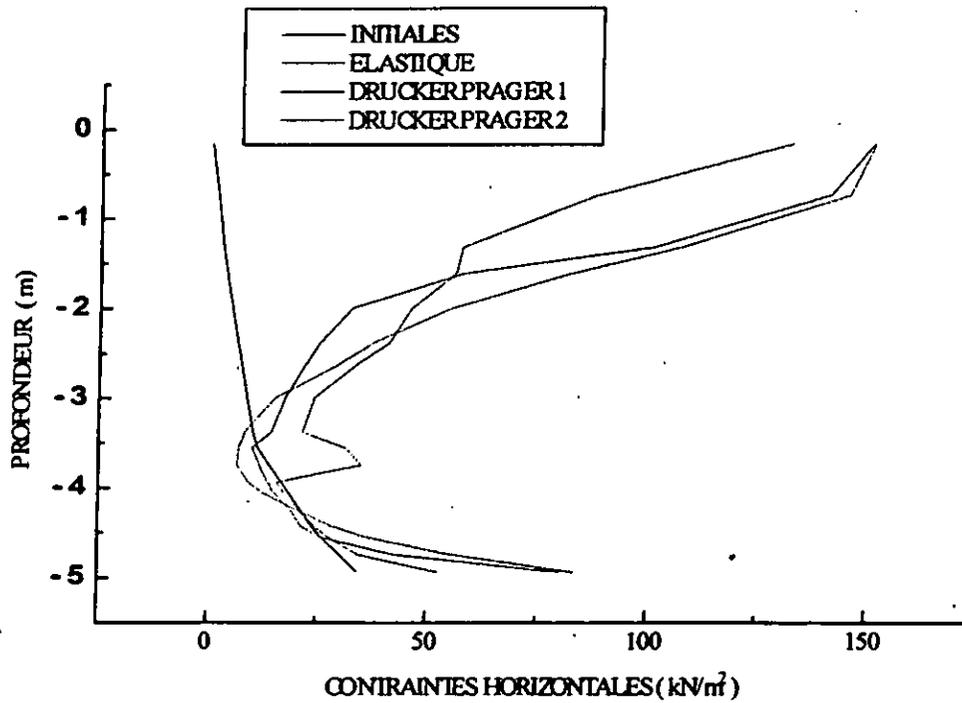


Figure 8.16 Contraintes horizontales totales sous le centre de la fondation
Application 1

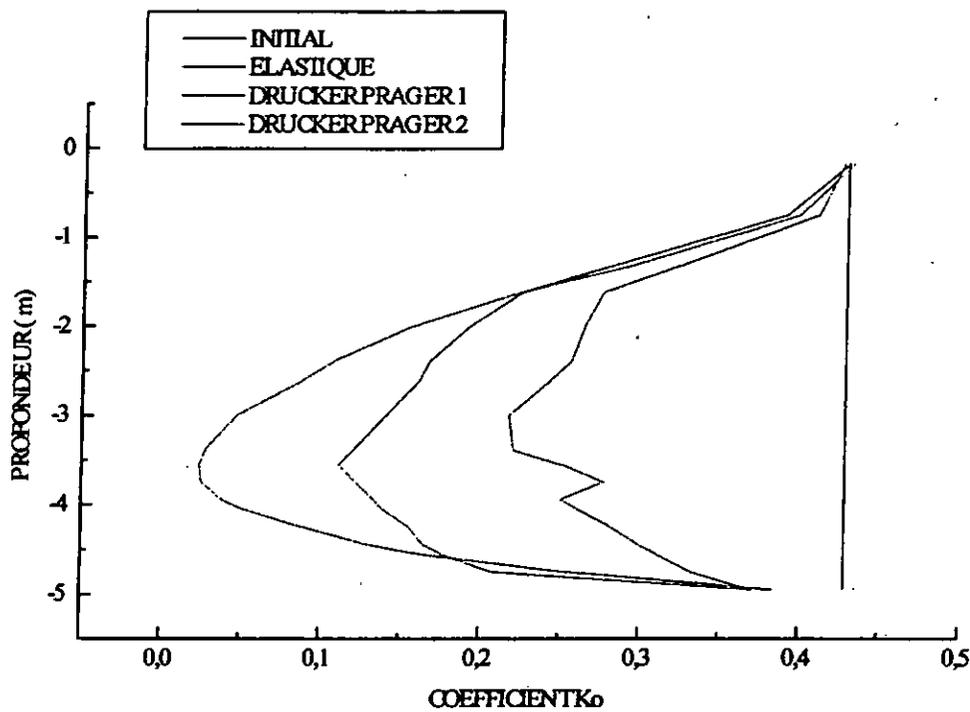


Figure 8.17 : Coefficient K_0 , Application 1

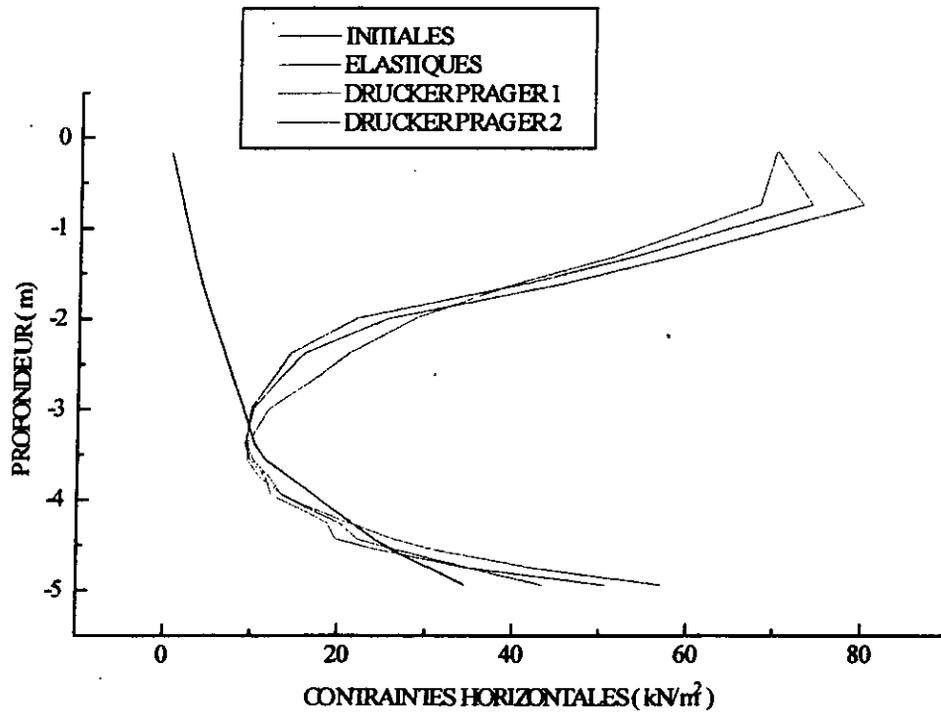


Figure 8.20 : Contraintes horizontales totales sous le centre de la fondation.
Application 3

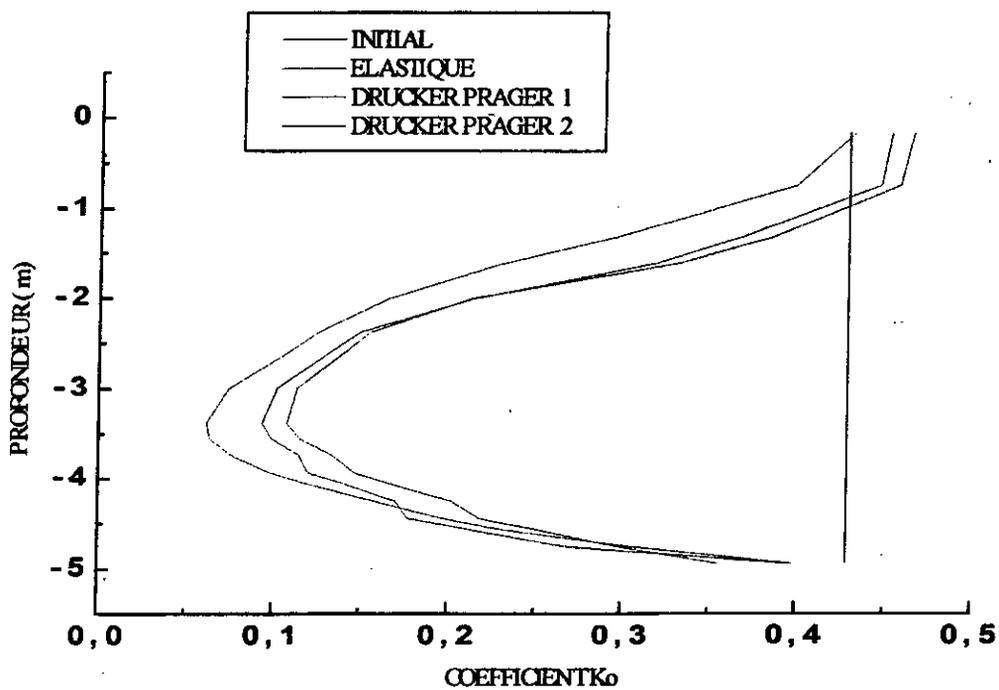


Figure 8.21 : Coefficient K_0 , Application 3

VIII.5 Remarques et conclusions:

Les capacités portantes étant d'autant plus élevées que les paramètres c et ϕ sont grands, il s'ensuit que les contraintes élastiques sont d'autant plus grandes que ces paramètres sont grands. C'est ce que nous constatons à vu de l'ensemble des figures.

Il en est de même pour les modèles élasto-plastiques, les contraintes verticales semblent variées dans le même sens qu'une augmentation des valeurs des paramètres des modèles. Par conséquent il semblerait que l'on puisse définir un fuseau limite dont les limites extérieures sont les contraintes données par le cas élastique, pour la limite supérieure, et par le modèle élasto-plastique de Drucker Prager 2 (cercle intérieur au polygone de Mohr Coulomb). Cette constatation est faite à partir de l'ensemble des résultats pour tous les points du sol sous le centre de la fondations sauf parfois les points très proche de la surface du sol.

Les correspondances utilisées pour les critères étant des correspondances extrémales, tous les autres critères intermédiaires à ces deux cas doivent à priori peut être se situer dans le faisceau délimité par ces deux correspondances

Par contre les contraintes horizontales pour les modèles élasto-plastiques comme le montre les figures 8.6, 8.7, 8.12, 8.16, 8.20, sont pratiquement très proches des contraintes horizontales obtenues dans le cas élastiques.

En ce qui concerne le coefficient de poussée des terres au repos K_0 , nous pouvons faire les remarques inverses que pour les contraintes verticales (les contraintes horizontales étant peut affectées par la loi de comportement du sol) . Les figures 8.8 , 8.9, 8.13, 8.17, 8.21 montrent que le cas élastique donnent les coefficients limites inférieures et le cas de Drucker Prager 2 les coefficients limites supérieures.

Les figures 8.8 et 8.9 montrent clairement que pour les points sous le centre de la fondation ce coefficient est :

- Pratiquement indépendant du % de Charge par rapport à la charge limite C_p .
- Sensiblement le même en élasticité et en plasticité tant que la cohésion ou l'angle de frottement sont relativement bon.

Les figures 8.13 et 8.17 montrent que lorsque une des valeurs de c ou ϕ , la différence pour ce coefficient entre le modèle élastique et élasto-plastique s'accroît fortement.

Toute chute de l'angle de frottement interne engendre, comme le montre la figure 8.10, une accentuation importante des déplacements verticaux jusqu'à 150% ainsi qu'une chute importante des contraintes verticales.

De plus un angle de frottement faible engendre une légère instabilité numérique comme l'illustre la figure 8.15 et 8.16. Pour le modèle de Drucker Prager 2, si on a en plus une cohésion faible, alors une augmentation de l'instabilité numérique se produit. Toute la stratégie de calcul doit alors être affinée. Pour l'application 2 le logiciel n'a pas convergé pour le modèle de Drucker Prager 2, d'où l'absence de résultats dans ce cas.

Les figures 8.18 et 8.10 montrent que même lorsque la cohésion chute sans que l'angle de frottement chute, le phénomène de plasticité, relativement aux capacités portantes correspondantes ne s'accroît pas autant que l'on pensait.

La comparaison supplémentaire des résultats obtenus pour l'application 1 et 3 montrent que le phénomène de plasticité est plus sensible à une variation de l'angle de frottement que de la cohésion, relativement aux capacités portantes correspondantes.

Les contraintes verticales semblent se rapprocher d'autant plus des contraintes initiales que la cohésion et l'angle de frottement interne chute.

Nous terminerons en rappelant que ces remarques concernent que les points sous le centre de la fondation.

CONCLUSION
GENERALE

CONCLUSION GENERALE

La présente étude nous a permis de nous initier aux différentes techniques, de calcul numérique, de programmation, de modélisations et de comportement des structures.

Le comportement post élastique ou nonlineaire des structures fait appel à l'ensemble de ces techniques. Pour résoudre un tel problème la mise en place d'une stratégie nous ne nous a jamais permis d'assurer une convergence à 100% et principalement pour les sols de qualité très médiocre. Ceci découle principalement des limites de la machine utilisées et d'autres contraintes telle que la durée de calcul. C'est pour cette dernière raison que nous avons dû renoncer à faire des applications en utilisant la méthode de Quasi-Newton ou celle de Newton modifiée. En effet ces deux dernières se sont avérées trop lentes sur des essais sur des poutres en contraintes planes.

~~L'élaboration du logiciel, base de tous calculs, a constitué la partie prédominante de ce travail.~~

L'application de ce logiciel au comportement des sols sous des fondations soumises à la capacité portante du sol a montré :

1- Sous le centre de la fondation, les contraintes verticales contrairement aux contraintes horizontales sont fortement influencées par les paramètres du critère de plasticité utilisé.

2- Que pour ces mêmes points du sol le phénomène plastique était plus sensible aux variations de l'angle de frottement interne qu'aux variations de la cohésion, relativement aux capacités portantes correspondantes.

3- Les contraintes élastiques constituent une borne supérieure et celle du modèle de Drucker Prager 2 une borne inférieure.

4 - Le coefficient de poussée des terres au repos K_0 est dans tous les cas nettement inférieur au coefficient initial et principalement dans la mi-couche où il peut chuter jusqu'à 0.1

5- Toute chute de l'angle de frottement interne engendre, une accentuation importante des déplacements verticaux jusqu'à 150% par rapport au cas élastique ainsi qu'une chute importante des contraintes verticales.

Ces constatations sont faites pour les points situés sous la fondation pour un sol sec.

Il serait intéressant pour une suite à donner à ce travail d'appliquer ce logiciel à d'autres problèmes classiques de la mécanique des sols tel que les problèmes relatifs au comportement des pieux, parois moules, ouvrages d'art, ouvrages enterrés.

Une autre suite à donner à ce travail consiste d'une part à enrichir ce logiciel avec d'autres modèles tel que le modèle de Mohr-Coulomb et des modèles avec écoulement.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- | | | |
|---|---------------------------|--------------------------|
| [1] Analyse du comportement géométrique
et matériel non linéaire des structures spatiales
en poutres | MEZAZIGH.B | PFE. ENP |
| [2] Cours pratique de mécanique des sols
Tome 1 & Tome 2 | COSTET J
SANGLERAT.G | DUNOD
1982 |
| [3] Développement d'éléments et d'algorithmes dans
la méthode des éléments finis | BERRAH.M.K
BOUBNIDER.R | PFE. ENP
1985 |
| [4] Elastoplasticite | HALPHEN.B
SALENCON.J | Presse de
l'ENPC 1987 |
| [5] Etude de loi de comportement
Elastoplasticite à simple potentiel | LORET.B | INPG
1984 |
| [6] Etude du comportement élastique et non-linéaire
des sols par la méthode des éléments finis | BOUNAM.
KHELLOU. | PFE ENP
1997 |
| [7] Etude par la méthode des éléments finis de
comportement élastoplastique des sols dilatants | TADJBAKHS.H.S | Rapport LPC
1985 |
| [8] La méthode des éléments finis | ZIENKIWICZ.O.C | AFNOR
PARIS |
| [9] La pratique des et fondations | FILLIAT.G | MONITEUR
1981 |
| [10] Manuel théorique CESAR
-Fascicule NONLIN DEP- | RICHER.S | LCPC PARIS
1988 |
| [11] Mécanique des sols | CORDARY.D | LAVOISIER
1994 |
| [12] Méthodes de calcul numériques | NOUGIER.J.P | MASSON
1983 |
| [13] Modélisation des structures par éléments finis
volume1.Solides élastiques. | BATOZ.G.L
DHATT.G | HERMES
1990 |

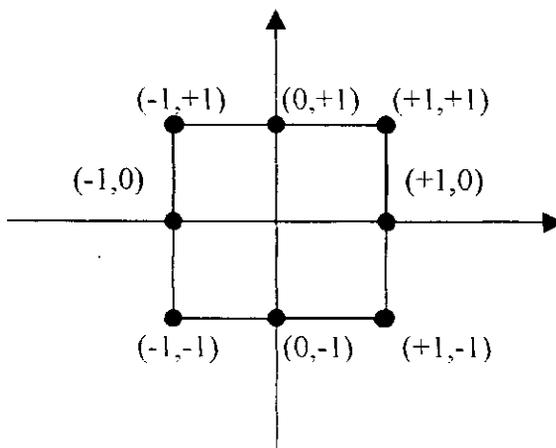
BIBLIOGRAPHIE

- | | | |
|---|-----------------------------|-----------------------------|
| [14] Plasticity for structural engineers | CHEN.W.F
HAN.D.J. | SPRINGER-
VERLAG 1988 |
| [15] Présentation de la méthode des éléments finis | DHATT.G
TOUZOT.G | MALOINE
1984 |
| [16] Theory of elasticity | TIMOCHENKO.S
GOODIER.J.N | 1970 |
| [17] Utilisation de la méthode des éléments finis en mécanique des sols dans le domaine de l'élastoplasticité | FRANK.R | Rapport LPC
1982 |
| [18] Formulation mathématique de lois de comportement. Modélisation numérique de problèmes aux limites en mécanique des solides déformables | ROYIS.P | Thèse doctorat
INPG 1986 |
| [19] Leçons sur la résistance des matériaux
Tome III . Livre 2 | DREFUSS.E | EYROLLES
1965 |
| [20] Etude statique et dynamique par éléments finis du comportement de fondations en tenant compte de l'interaction sol – structure | ROGAI.H
MASSAOUD.M | PFE ENP
1993 |

ANNEXES

FONCTION D'INTERPOLATION

Élément quadrilatéral à 8 nœuds :



Élément de référence

Fonctions d'interpolation	Dérivées par rapport à ξ	Dérivées par rapport à η
$N_1 = -1/4 (1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1)$	$N_{1,\xi} = 1/4 (2\xi+\eta)(1-\eta)$	$N_{1,\eta} = 1/4 (1-\xi)(\xi+2\eta)$
$N_2 = 1/2 (1-\xi^2)(1-\eta)$	$N_{2,\xi} = -\xi(1-\eta)$	$N_{2,\eta} = -1/2 (1-\xi^2)$
$N_3 = -1/4 (1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)$	$N_{3,\xi} = 1/4 (2\xi-\eta)(1-\eta)$	$N_{3,\eta} = -1/4 (1+\xi)(\xi-2\eta)$
$N_4 = 1/2 (1+\xi)(1-\eta^2)$	$N_{4,\xi} = 1/2 (1-\eta^2)$	$N_{4,\eta} = -\eta (1+\xi)$
$N_5 = -1/4 (1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)$	$N_{5,\xi} = 1/4 (2\xi+\eta)(1+\eta)$	$N_{5,\eta} = 1/4 (1+\xi)(\xi+2\eta)$
$N_6 = 1/2 (1-\xi^2)(1+\eta)$	$N_{6,\xi} = -\xi(1+\eta)$	$N_{6,\eta} = 1/2 (1-\xi^2)$
$N_7 = -1/4 (1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)$	$N_{7,\xi} = 1/4 (2\xi-\eta)(1+\eta)$	$N_{7,\eta} = -1/4 (1-\xi)(\xi-2\eta)$
$N_8 = 1/2 (1-\xi)(1-\eta^2)$	$N_{8,\xi} = -1/2 (1-\eta^2)$	$N_{8,\eta} = -\eta(1-\xi)$

INTEGRATION NUMERIQUE**Tableau 1 : Intégration numérique de Gauss à une dimension**

r	ξ_i	W_i
1	0	2
2	± 0.577350269189626	1
3	0 ± 0.774596669241483	0.88888888889 0.55555555556
4	± 0.339981043584856 ± 0.861136311594053	0.652145154862546 0.347854845137454

Tableau 2 : Intégration numérique de Newton-Cotes à une dimension

r	ξ_i	w_i
2	± 1	1
3	0 ± 1	4/3 1/3
4	$\pm 1/3$ ± 1	3/4 1/4

Tableau 3 : Intégration numérique de Gauss-Radau

Ordre d'intégration en ξ_i ou η_i	Nombre de points $r \times r$	RI	WI	SJ	AJ
1	1×1	0.5	1.0	0.3333333333	0.75
3	2×2	0.2113248654 0.7886751346	0.5 0.5	0.1550510257 0.6849489743	0.3764030627 0.5124858262
5	3×3	0.1127011665 0.5 0.8872983346	0.2777777778 0.4444444444 0.2777777778	0.0885879595 0.4094668644 0.7867594618	0.2204622112 0.3881934688 0.3288443200
7	4×4	0.0694318442 0.3300094782 0.6699905218 0.9305681558	0.1739274226 0.3260725774 0.3260725774 0.1739274226	0.0571041961 0.2768430136 0.5835904324 0.8602401357	0.1437135608 0.2813560151 0.3118265230 0.2231039011
9	5×5	0.0469100770 0.2307653449 0.5 0.6792346551 0.9530899230	0.1184634425 0.2393143353 0.2844444444 0.2393143353 0.1184634425	0.0398098571 0.1980134179 0.4379748102 0.6954642734 0.9014649142	0.1007941926 0.2084506672 0.2604633916 0.2426935942 0.1598203766

Termes de pondération pour fondation superficielles sous charge verticale centrée
en fonction de l'angle de frottement (DTU 13-1)

Angle de frottement ϕ	N_γ	N_q	N_c	Angle de frottement ϕ	N_γ	N_q	N_c
0		1.00	5.14	30	21.8	18.4	30.1
5		1.56	6.47	31	25.5	20.6	32.7
10	1.00	2.49	8.45	32	29.8	23.2	35.5
11	1.20	2.71	8.80	33	34.8	26.1	38.7
12	1.43	2.97	9.29	34	40.9	29.4	42.2
13	1.69	3.26	9.80	35	48.0	33.3	46.1
14	1.99	3.59	10.4	36	56.6	37.8	50.6
15	2.33	3.94	11.0	37	67.0	42.9	55.7
16	2.72	4.33	11.6	38	79.5	48.9	61.4
17	3.14	4.77	12.3	39	94.7	59.0	67.9
18	3.69	5.25	13.1	40	113.0	64.2	75.4
19	4.29	5.80	13.9	41	133.0	73.9	83.9
20	4.97	6.40	14.8	42	164.0	85.4	93.7
21	5.76	7.07	15.8	43	199.0	99.0	105
22	6.68	7.83	16.9	44	244.0	115.0	118
23	7.73	8.66	18.1	45	297.0	135.0	135
24	9.97	9.60	19.3	46	366.0	159.0	152
25	10.4	10.7	20.7	47	455.0	187.0	174
26	12.0	11.8	22.2	48	570.0	223.0	199
27	13.9	13.2	24.0	49	718.0	265.0	230
28	16.1	14.7	25.8	50	914.0	319.0	267
29	18.8	16.4	27.9				