

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

# Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Civil



## Projet de Fin d'Etude

*Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Génie civil*

**Thème :**

ETUDE DE LA NON LINEARITE GEOMETRIQUE  
 DES PROBLEMES DE CONTACT  
 SOL - FONDATION SUPERFICIELLE

**Proposé et dirigé par :**

M<sup>r</sup> B.ZEGLACHE  
M<sup>me</sup> MOHABEDDINE

**Etudié par :**

KARABACH Choukri  
BENKACEMI Meziane

**Promotion : Juillet 1999**

*ENP- 10, AVENUE HASSAN BADI - EL HARRACH - 16200 ALGER*

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

## Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Civil

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

### Projet de Fin d'Etude

*Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Génie civil*

**Thème :**

ETUDE DE LA NON LINEARITE GEOMETRIQUE  
DES PROBLEMES DE CONTACT  
SOL - FONDATION SUPERFICIELLE

**Proposé et dirigé par :**

M<sup>r</sup> B. ZEGHLACHE  
M<sup>me</sup> MOHABEDDINE

**Etudié par :**

KARABACH Choukri  
BENKACEMI Meziane

**Promotion : Juillet 1999**

ENP- 10, AVENUE HASSAN BADI - EL HARRACH - 16200 ALGER

A  
Mes chers parents  
Mes frères et sœurs

Je dédie ce modeste travail.

Meziane

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents  
Mon frère Fouad  
Ainsi que ma petite sœur  
Fadia

Choukri

# REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

*Nous tenons par le biais de ce modeste travail à remercier vivement notre promoteur M. BRAHIM ZEGHLACHE pour ses conseils éclairés et les entretus qu'il a daigné nous accorder.*

*Toute notre gratitude va aussi à notre co-promotrice M<sup>me</sup> MOHABEDDINE pour l'intérêt qu'elle a témoigné à l'égard de notre travail.*

*Nous remercions également l'ensemble des enseignants qui ont eu l'amabilité de nous accorder leur aide précieuse dans les moments difficiles, ainsi que leurs valeureux conseils, et spécialement : M. TILIOUINE et M<sup>me</sup>. CHERID.*

*Sans oublier l'ensemble du personnel du centre de calcul de l'école, et de la bibliothèque, qui n'ont guère tardé à nous soutenir.*

*Et tous ceux qui ont participé de loin ou de près pour aboutir à ce résultat.*

## Abstract

The subject of this work is to study the geometric non-linearity of soil-foundation contact problems. The finite elements method was used in order to simulate the structure-interface-soil system. The applications refer only to superficial foundations on sec soil. A specific program was done. A analysis of the different parameters influence conclude our work.

## Résumé

L'objet de ce travail est l'étude de la non linéarité géométrique des problèmes de contact sol-fondation. La méthode des éléments finis a été utilisée pour simuler le système structure-interface-sol. Les applications concernent seulement les fondations superficielles reposants sur un sol sec avec ou sans cohésion. Un logiciel à été élaboré à cet effet. Une analyse de l'influence des différents paramètres conclu ce travail.

## ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة اللاخطية الهندسية لمسائل التماس بين التربة و الأساس .  
طريقة العناصر المنتهية قد استخدمت لتمثيل النظام هيكل-بينية-تربة . التطبيقات تخص  
فقط الاساسات السطحية المستندة على تربة جافة بدون إحتكاك. قد تم تصميم برنامج  
من هذه الغاية. يختتم هذا العمل تحليل لتأثير مختلف الوسائط.

**KEY WORDS :**

Contact – Elasticity – Finite elements  
Foundation – Rubbing – Non-linearity – Soil

**MOTS CLES :**

Contact – Elasticité – Eléments finis  
Fondation – Frottement – Non-linéarité – Sol

**كلمات مفاتيح:**

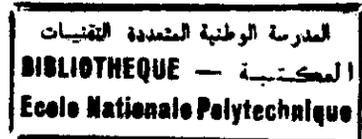
تماس - مرونة - عناصر منتهية - أساس  
إحتكاك - لاخطية - تربة

# ERRATUM

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
**BIBLIOTHEQUE** — المكتبة  
 Ecole Nationale Polytechnique

Page	Erreur	Correction
1	Connus	connues
2	Tels	telles
2	Dans le sol	Dans le sol sec
6	Contraintes normale	Contraintes normales
7	$\sigma_{yy} \dots \sigma_{xz}$	$\sigma_{xx} \dots \sigma_{xz}$
9	$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz}$	$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz}$
9	Déformation	Déformations
9	$\varepsilon_{zz} = 1/E (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}))$	$\varepsilon_{zz} = 1/E (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}))$
13	systèmes	Système
13	Qui et	Qui est
13	De variable	De variables
15	U phénomène	Un phénomène
17	Tout les éléments	Tous les éléments
18	4.	Blanc
19	Réé	Réel
32	N'est pas possible	N'est possible
32	Avons utiliser	Avons utilisé
34	(Voir ll.	(Voir Annexe II.
34	... exacte.	... exacte[28].
34	Minimum de 232	Minimum de 3x2
34	ZIENKIEWICZ	ZIENKIEWICZ[16]
51	Le connectivités	Les connectivités
57	$N_y \quad N_c$	$\overline{N}_y \quad \overline{N}_c$
58	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Avant déformation</li> <li>▪ Après déformation</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Avant déformation </li> <li>▪ Après déformation </li> </ul>
64	$B' = B - 2 \epsilon$	$B' = B - 2 e$
67	10	10%

# SOMMAIRE



---

<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	1
<b>CHAPITRE I: EQUATIONS DE BASE DE LA MECANIQUE DES SOLIDES</b>	
Introduction	5
I.1 Tenseur contraintes	5
I.2 Tenseur déformation	7
I.3 Loi de Hooke	7
I.4 Problèmes de l'élasticité plane	8
I.4.1 Contraintes planes	8
I.4.2 Déformations planes	9
I.5 Equations d'équilibre en élasticité isotrope	10
<b>CHAPITRE II: PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS</b>	
Introduction	11
II.1 Présentation générale de la méthode des éléments finis (MEF)	13
II.2 Les différentes formulations de la MEF	15
II.3 Codes généraux dans une résolution par la MEF	15
II.4 Approximation par éléments finis	15
II.4.1 Approximation nodale	15
II.4.2 Approximation par éléments finis	17
II.4.3 Définition de la géométrie des éléments	17
II.4.4 Quelques formes classiques des éléments	18
II.4.5 Elément de référence	19
II.4.6 Approximation sur l'élément de référence	21
II.5 Matrice d'interpolation des déformations	22
II.6 Détermination de la matrice "B" pour l'élément isoparamétrique	23
II.7 Matrice d'interpolation des contraintes	26
II.8 Détermination de la matrice de rigidité en équilibre statique	27
<b>CHAPITRE III: METHODES NUMERIQUES</b>	
Introduction	30
III.1 Intégration numérique	30
III.1.1 Intégration numérique à une dimension	32
III.1.2 Intégration numérique à deux dimensions	33
III.1.2.1 Elément de référence carré	33
III.1.2.2 Elément de référence triangulaire	33
III.1.3 Précision de l'intégration	34
III.1.4 Choix du nombre de points d'intégration	34

### III.2 Résolution de systèmes d'équations linéaires

## CHAPITRE IV: APPROCHE PAR ELEMENTS FINIS DES PROBLEMES DE CONTACT ENTRE SOLIDES ELASTIQUES

Introduction	
IV.1.1 Modélisation des solides en contact	37
IV.1.2 Modélisation de la zone de contact	38
IV.1.3 Présentation sommaire de l'algorithme	38
IV.2.1 Présentation de éléments finis de contact	39
IV.2.1.1 Eléments de contact plans ou axisymétriques	39
IV.2.1.2 Eléments de contact tridimensionnels	39
IV.2.1.3 Définition de la géométrie des éléments d'un élément tridimensionnel	39
IV.2.1.4 Définition du champ de déplacement	40
IV.2.1.5 Définition de l'épaisseur des éléments de contact	40
IV.3 Résolution numérique des problèmes de contact	41
IV.3.1 Elément de contact « actif-inactif »	41
IV.3.2 Critère de contact	42

## CHAPITRE V : ELABORATION DU LOGICIEL

Introduction	43
V.1 Présentation générale du logiciel « CONTACT » et ses sous-routines	44
V.1.1 Lecture interactive des données initiales	45
V.1.2 BLCOMT	46
V.1.3 BLDATA	46
V.1.4 RDSOLC	47
V.1.5 BLLINR	47
V.1.6 BLSTOP	47
V.2 Particularité du calcul effectué sur les éléments de contact	49
V.3 Complément visuel "VISUEL"	51

## CHAPITRE VI : APPLICATIONS

Introduction	52
VI.1 Validation du logiciel	53
VI.2 Description du maillage	55
VI.3 Cas de la charge inclinée excentrée	56
VI.4 Comparaison avec l'approche théorique $B'=B-2e$	60
VI.5 Influence du rapport $E_{sol}/E_{fondation}$	65
VI.6 Influence des paramètres C et $\varphi$	70
VI.7 Influence de la rigidité de la fondation	72
VI.8 Influence de l'épaisseur de l'élément de contact e	74

CONCLUSION 76

ANNEXES

LEXIQUE

BIBLIOGRAPHIE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# INTRODUCTION

## INTRODUCTION GENERALE

---

**P**armi tous les actes suscités par l'imagination créatrice de l'esprit humain, l'un des plus important est certainement l'acte de construire, car c'est lui qui procure à l'homme l'abri et le confort et qui permet les communications et les échanges, sources de tous progrès et de toute culture. C'est bien en effet par les vestiges souvent grandioses et imposants de leur constructions et de leur grands travaux que nous sont connus les civilisations du passé.

Mais si l'homme demeure maître des matériaux qu'il utilise pour élever une superstructure, il doit par contre appuyer sa contribution sur un élément naturel auquel il ne peut rien, le sol, et s'accommoder de ce que lui offre une nature souvent agressive et trompeuse.

C'est ainsi qu'a pris naissance et que s'est développée une nouvelle science « **La mécanique des sols** » dont le but est d'essayer de prévoir de façon rationnelle le comportement du sol. Cette science qui est en fait une adaptation d'un ensemble de théories de lois de mécanique rationnelle, rhéologie... etc.

La **Rhéologie** est la science qui s'intéresse aux propriétés mécaniques des corps ; c'est à dire les liens entre l'histoire des contraintes et des déformations à l'aide des lois Rhéologiques dont leur connaissance n'est pas encore satisfaisante pour ce matériau polyphasique qui est le sol.

La philosophie de la sécurité implique la nécessité d'une étude de la stabilité du sol, soumis à différents types de chargements ou sollicitations.

Suivant le mode d'application des sollicitations, celles ci peuvent être dynamiques ou statiques, dans notre cas, on ne va s'intéresser qu'au cas de chargement **statique**.

Le chargement statique sous entend que la variation des sollicitations en fonction du temps se fait avec des vitesses suffisamment faibles pour ne pas engendrer des forces inertielles non négligeables.

La transmission des sollicitations de l'ouvrage au sol, ou bien du sol à l'ouvrage se fait soit par un contact direct entre eux (le cas d'un mur de soutènement), soit par l'intermédiaire des fondations.

La modélisation des phénomènes de **contact** est un problème très important. En effet de nombreuses structures présentent des surfaces de discontinuité qui peuvent jouer un rôle prépondérant dans leur comportement mécanique. On peut citer par exemple les interfaces entre sol et structure (sol - pieu, sol - tirant, ...) , les interfaces entre deux couches de sol (remblais - sol de fondations, ...) , les failles dans les massifs rocheux ou encore les interfaces entre massifs et béton, béton et armatures, dalle et connecteurs,... etc.

Vu la complexité du sol, son étude ne peut se faire qu'en introduisant un ensemble d'hypothèses simplificatrices tels **l'homogénéité, la continuité et l'isotropie**. Une autre hypothèse très simplificatrice est celle du comportement élastique linéaire.

Ce travail consiste en l'étude des problèmes de contact qui peuvent avoir lieu dans le sol. Nous allons considérer que le sol ainsi que la structure ont un comportement élastique linéaire. Ces deux derniers sont reliés par des éléments de contact. Pour des charges excentrées la zone de contact entre le sol et la fondation est une inconnue du problème et varie d'un problème à un autre. Cette zone de contact dépend aussi de la flexibilité des matériaux de part et d'autre de cette zone ainsi que du chargement (grandeur, nature, position, etc.) d'où la **non linéarité géométrique** du problème. C'est cet aspect que nous nous proposons d'étudier.

Les premières publications sur la mécanique des contacts sont dues en 1882 à HERTZ [27], et 1885 à BOUSSINESQ [8]. HERTZ proposa une solution analytique pour les problèmes de contact sans frottement entre deux sphères élastiques ou entre un poinçon

sphérique (ou cylindrique) et un massif semi - infini élastique. BOUSSINESQ utilisa la théorie des potentiels pour résoudre le problème de contact sans frottement entre un poinçon à base plane et un massif semi - infini élastique.

Par la suite, de nombreux auteurs s'intéresseront à la résolution analytique des problèmes de contact. parmi les principaux, il faut citer HUBER (1904) [30], LOVE (1929) [24], THOMAS & HOERSCH (1930) [23], SNEDDON (1946) [9], TIMOSHENKO & GOODIER (1948) [25].

Plus récemment, et grâce au développement des moyens de calcul automatique, de nombreux chercheurs ont mis au point des méthodes de résolution numériques à ce type de problèmes.

Les premiers travaux sur le **traitement numérique** des problèmes de contact ont été réalisés en 1968 par GOODMAN [3] qui a proposé la formulation d'un élément de joint à quatre nœuds d'épaisseur nulle pour la modélisation des failles dans les massifs rocheux suivi par d'autres travaux en 1972 puis en 1977.

Plus tard en 1979, PANDE [20] a développé un élément isoparamétrique quadratique à 8 nœuds d'épaisseur non nulle ayant pour degrés de liberté les déplacements relatifs de nœud de l'élément. D'autres auteurs comme FRANK [13] ou HERMANN [14] ont proposés des éléments de contact à deux nœuds de type ressort.

KANG [29] a quand à lui introduit la notion de matériau fictif de contact et développé un élément de contact plan quadrilatère à 6 nœuds. NSANGOU [22] a étendu ces travaux au traitement des problèmes axisymétriques et tridimensionnels.

Depuis 1983, toujours dans le domaine de la modélisation numérique des problèmes de contact, il faut citer les publications de KATONA [4], DESAI [26], RAHMAN [6], BELYTSCHKE [1], YAGAWA [2], ou encore BATHE [5].

Afin de réaliser le traitement numériques des problèmes de contact, **la méthodes des éléments finis** est la plus largement répondue, et c'est celle-ci que nous allons utiliser dans notre travail. L'un de ses principaux avantages est sa capacité de prendre en compte les hétérogénéités résultantes : soit des variations des caractéristiques du sol, soit d'une non linéarité plus prononcée pour certaines zones.

Dans le cadre de ce travail, nous nous intéresserons particulièrement à l'interface et à ses conséquences entre une fondation superficielle et le sol. Nous étudierons tout d'abord l'étendue de cette zone de contact suivant d'une part les caractéristiques mécaniques des matériaux et géométriques de la structure, et d'autre part le chargement. Ensuite nous nous intéresserons suivant les cas aux problèmes de la diffusion des contraintes dans le sol, ainsi que les déplacements qui en résultent.

Pour cela nous avons consacré un premier chapitre pour un rappel sur les principes fondamentaux de la mécanique des solides élastiques. Une présentation détaillée de la méthode des éléments finis fait l'objet du deuxième chapitre. Puis nous présentons les différentes méthodes numériques utilisées dans le chapitre suivant. Le quatrième chapitre est consacré à l'approche par éléments finis des problèmes de contact pour passer à la méthodologie et l'élaboration du logiciel de calcul. Enfin les applications font l'objet du sixième chapitre.

GRAVITY

# EQUATIONS DE BASE DE LA MECANIQUE DES SOLIDES

---

## Introduction:

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'analyse des problèmes statiques linéaires et non linéaires nécessite la connaissance des équations de base de la théorie de l'élasticité linéaire.

L'analyse de ces équations présente des relations entre contraintes et déformations dans le cas général tridimensionnel. A partir de ce cas dérive le cas particulier de l'élasticité plane.

### I.1 Tenseur contrainte :

A l'intérieur d'un solide soumis à des forces extérieures (volumiques et surfaciques), se créent des forces intérieures de tel façon que chaque point matériel soit soumis à neuf composantes de contraintes.

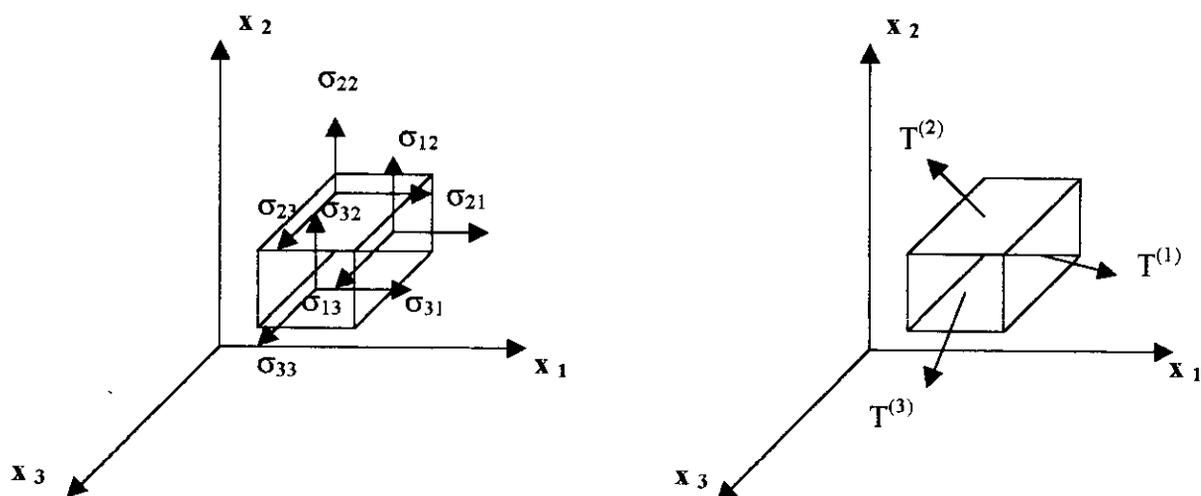


Fig. (I.1)

Soit un parallélépipède infinitésimal découpé dans un milieu continu (*fig. 1.1*). Les forces extérieures sont représentées sur trois faces rectangulaires de l'élément, l'exposant indique la face sur laquelle s'exerce la force.

En général :

$$T^{(1)} = [\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}]$$

$$T^{(2)} = [\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}]$$

$$T^{(3)} = [\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}]$$

Soit en notation indicielle:

$$T_j^{(i)} = \sigma_{ij} \quad (1.1)$$

D'où les 9 quantités  $\sigma_{ij}$  appelées contraintes, se sont de forces par unité de surface, le premier indice indique la direction de la normale à la face, tandis que le second indique la direction de la contrainte elle même.

Quand les trois vecteurs contraintes  $T^{(1)}, T^{(2)}$  et  $T^{(3)}$  agissant en un point selon trois plans perpendiculaires sont connus, il est possible de déterminer le vecteur contraintes s'exerçant en ce point selon un plan de normale extérieure  $\underline{n}$  arbitraire orientée en utilisant la formule de CAUCHY :

$$T_j^{(n)} = T \cdot \underline{n} \quad (1.2)$$

Où T est le tenseur contraintes relatif au point considéré :

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Les termes diagonaux sont appelés contraintes normale tandis que les termes extradiagonaux sont appelés contraintes de cisaillement.

L'équilibre d'un élément de volume  $dv = dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$  du solide exige :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.4)$$

## **I.2 Tenseur déformation :**

En élasticité, la définition de la déformation est basée sur la comparaison d'une configuration donnée à une configuration d'origine ( initiale ).

Le tenseur déformation se présente comme suit :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

$$\text{Où :} \quad \varepsilon_{ij} = 1/2 ( U_{i,j} + U_{j,i} ) \quad (1.6)$$

Et  $U_i$  : déplacement suivant la direction  $i$ .

## **I.3 Loi de Hooke :**

Le tenseur contrainte et le tenseur déformation sont liés entre eux par des relations appelées constitutives. La relation la plus simple qui puisse exister entre eux est une relation linéaire de la forme

$$[\sigma] = [E].[\varepsilon]$$

### **Cas particulier de l'isotropie :**

Pour un matériau isotrope, les constantes élastiques sont indépendantes des axes de coordonnées, ce qui impliquera l'existence des deux constantes indépendantes .

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

Où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé avec :

$$\lambda = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{E}{1-2\nu} \quad \text{et} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

E : Module de Young

$\nu$  : Coefficient de Poisson

G : Coefficient de cisaillement

#### **I.4 Problèmes de l'élasticité plane :**

Quand les équations écrites précédemment (dans le cas tridimensionnel), ne dépendent pas de l'une des trois dimensions, le problème se réduit donc à deux dimensions, ce cas est appelé « **élasticité plane** »

Les problèmes d'élasticité plane sont classés en 2 grandes catégories :

- Contraintes planes
- Déformations planes

##### **I.4.1 contraintes planes :**

Les problèmes de contraintes planes reposent sur les suppositions suivantes :

- Le solide est mince, c'est à dire : sa dimension suivant ( $z$ ) est petite par rapport aux deux autres ( $x, y$ ).
- Le solide n'est pas chargé sur les faces dont la normale est chargée suivant  $z$ .

En tenant compte des hypothèses en contraintes planes, on a :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

on a alors pour un matériau isotrope les relations :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-2\nu} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E/G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}$$

### **I.4.2 déformations planes :**

On arrive à la même simplification du problème lorsque l'on considère la situation inverse à celle d'un cas de contraintes planes, celle dans laquelle la dimension du corps dans la direction de l'axe  $z$  est très étendue.

Un cas de déformations planes est caractérisé par :

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0$$

Les relations contraintes - déformations pour un matériau isotrope en déformation planes sont :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Notons dans ce cas que la contrainte  $\sigma_{zz}$  peut être déterminée en fonction des autres composantes :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{zz} = 0 \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{yy})) \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

### **I.4 Equations d'équilibre en élasticité isotrope :**

En statique , les équations d'équilibre pour un matériau élastique isotrope, en coordonnées cartésiennes s'écrivent :

#### **Dans le cas tridimensionnel :**

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + f_x = 0 \quad \text{suivant X}$$

$$\sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{zy,z} + f_y = 0 \quad \text{suivant Y}$$

$$\sigma_{xz,x} + \sigma_{yz,y} + \sigma_{zz,z} + f_z = 0 \quad \text{suivant Z}$$

#### **Dans le cas bidimensionnel :**

$$\sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0$$

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + f_x = 0 \quad \text{suivant X}$$

$$\sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + f_y = 0 \quad \text{suivant Y}$$

CHAPTER 4

# PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

---

## Introduction :

Depuis une soixantaine d'années, la mécanique des structures permet l'analyse des assemblages de barres et de poutres.

Le comportement de chaque élément est représenté par une matrice de rigidité élémentaire grâce aux hypothèses de la R.D.M.

L'apparition des ordinateurs entraîne un développement rapide de la mécanique des structures entre 1950 et 1960.

Le concept de l'élément fini est introduit par: TURNER ,CLOUGH,MARTIN et TOPP en 1956.

Les bases théoriques de la méthode des éléments finis repose d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximation.

Dés 1960, la méthode des éléments finis subit un essor rapide dans plusieurs directions :

1. Reformulation, à partir de considérations énergétiques et variationnelles sous la forme des résidus pondérés.
2. Création d'éléments de haute précision (élément à cotés curvilignes ou isoparamétriques.)
3. Utilisation de la méthode des éléments finis dans la résolution de problèmes non linéaires et non stationnaires dans le domaine des structures ainsi que dans d'autres domaines : mécanique des fluides thermique .
4. Construction d'une base mathématique de la méthode des éléments finis a partir de l'analyse fonctionnelle.

La méthode des éléments finis, contrairement aux méthodes analytiques ou simplifiées a l'avantage de pouvoir considérer un nombre plus important de paramètres constants ou variables. Elle semble plus apte à pouvoir représenter d'une façon plus spécifique le comportement à la fois du sol et de la structure, ainsi que du phénomène d'interaction sol – structure.

L'acuité de cette méthode peut être poussée très loin compte tenu du développement important ces dernières décennies des techniques numériques sans lesquelles cette méthode n'aurait point pu s'imposer.

Ces techniques numériques permettent de traiter des problèmes linéaires ou non linéaires avec des paramètres variables dans l'espace comme dans le temps.

Si à première vue cette méthode paraît très efficace et très pratique, on s'aperçoit vite lors de l'élaboration d'un code de calcul, que celui-ci est très laborieux, très méticuleux que de nombreux problèmes numériques surgissent dont la résolution prend beaucoup de temps et alourdit le code de calcul tendant à rendre celui-ci quasiment incompréhensible pour une personne non initiée. Hormis cet inconvénient à priori majeur qui ralentit l'expansion et le développement de cet outil, cette méthode est l'un des meilleurs outils dont on dispose actuellement pour l'exploration des directions nouvelles. Elle est bien adaptée pour la résolution de problèmes statiques ou dynamiques non linéaires.

## **II.1 Présentation générale de la Méthode des Eléments Finis (M.E.F) :**

La méthode des éléments finis s'applique à un système physique continu, qui est caractérisé par un ensemble de variables qui peuvent dépendre des coordonnées d'espace et du temps. Cet ensemble de variables se divise en deux sous-ensembles :

**Le premier :** constitué de variables connues comme les propriétés physiques, les dimensions géométriques.

**Le deuxième :** constitué de variables inconnues comme les déplacements, les pressions.

Un modèle mathématique du système permet d'écrire des relations entre ces deux types de variables en utilisant les lois physiques. On obtient ainsi pour ces systèmes continus un système d'équations algébriques qui est le plus souvent représenté par un système d'équation aux dérivées partielles intégral – différentielles associées à des conditions aux limites en espace et en temps. Ces équations du système continu ne peuvent en général pas être résolues directement. Il est nécessaire de discrétiser ces équations, c'est à dire de les remplacer par des équations algébriques. La MEF est une des méthodes qui peuvent être utilisées pour faire cette discrétisation.

Dans la pratique divers types de problèmes peuvent se présenter, les plus courants sont :

- Problèmes d'équilibre ou de valeurs aux limites.
- Problèmes de valeurs propres ou de valeurs critiques.
- Problèmes de propagation ou de valeurs initiales.

Suivant le type de problème, le comportement d'un système continu peut être décrit par des équations aux dérivées partielles.

Dans le cadre de notre étude nous nous intéressons aux problèmes d'équilibres ou de valeurs aux limites qui peut être décrit par la relation :

$$[K] \{U\} = [F] \quad (\text{II.1})$$

Où :

[K] : est la matrice caractérisant le système (matrice de rigidité en mécanique des solides).

{U} : sont les variables inconnues.

[F] : sont les variables connues.

Ce système discret est dit linéaire si le terme [K] est une constante indépendante de {U}.

Le but de la MEF sur la base de la discrétisation du milieu en éléments finis et sur la base de certaines approximations ou interpolations pour le champ des déplacements, de transformer un système d'équations intégro – différentielles en un système d'équations algébriques de la forme (II. 1 ).

L'utilisation de la méthode des résidus pondérés, appliqués aux systèmes d'équations aux dérivées partielles permet la construction de formes intégrales ,ou d'une fonctionnelle dont la première variation est la forme intégrale elle-même. Leur discrétisation par éléments finis aboutit à la définition des termes de la matrice [K] ou autres, et permet ainsi de créer un système d'équations algébriques de la forme ( II.1 ), ou autre forme suivant la nature du problème étudié.

Une autre approche souvent utilisée en mécanique des solides s'appuie sur les principes variationnelles de la mécanique, elle permet d'aboutir à une formulation identique.

Généralement, On utilise le plus souvent le principe des travaux virtuels ou l'utilisation du principe du travail complémentaire ou encore l'extremisation d'une fonctionnelle (*fonction de fonction*) telle que l'énergie potentielle totale ou, l'énergie complémentaire totale. Dans le cas où on utilise une fonctionnelle, son extremisation nous ramène à une forme intégrale. L'utilisation du principe des travaux virtuels nous ramène à une forme intégrale directement.

## **II.2 Les différentes formulations de la MEF :**

Il existe trois formulations différentes de la MEF :

- Formulation « **contrainte** » : considère le champs des contraintes comme inconnu, et se base sur la théorie de l'énergie potentielle
- Formulation « **déplacement** » : considère le champs des déplacements comme inconnu primaire du problème, cette formulation est basée sur la stationnarité de l'énergie potentielle.
- Formulation « **mixte** » : considère les deux champs de déplacements et de contraintes comme inconnus.

Dans notre travail, on opté pour une formulation « déplacement » qui est pratiquement la plus utilisée dans la résolution par la MEF.

## **II.3 Codes généraux dans une résolution par la MEF :**

En général, cinq phases principales peuvent être mises en évidence lors du traitement d'un problème par la MEF :

1. La discrétisation du milieu en certain nombre d'éléments finis .
2. Calcul des caractéristiques élémentaires (matrice de rigidité )
3. Assemblage des caractéristiques élémentaires.
4. Résolution numérique du problème global (obtention de déplacements )
5. Calcul de restitution au niveau élémentaire (calcul des contraintes et déformations, dans les éléments)

## **II.4 Approximation par éléments finis :**

### **II.4.1 Approximation nodale :**

Il n'est pas toujours possible de trouver une fonction exacte pour décrire un phénomène physique, ce qui nous amène à trouver une fonction approchée grâce à laquelle nous pouvons remplacer le système discrétisé équivalent de telle sorte que la différence :

$$e(x) = U(x) - U_{ex}(x) \quad (\text{II.2})$$

soit assez petite pour l'objectif visé.

Pour cela on choisit un nombre fini de fonctions dépendantes de  $n$  paramètres  $a_i$

$$U(x, a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

Puis on détermine les  $a_i$  pour satisfaire l'équation (II.2), et si  $U$  est linéaire en  $a_i$ :

$$U(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x) a_i = \langle p \rangle \{a\} \quad (\text{II.3})$$

Avec :

$P_i(x)$  : sont des fonctions connues et linéairement indépendantes.

Posons :

$$U(x_i) = U_i$$

On peut choisir comme paramètres  $a_i$  les valeurs  $u_i$ , donc :

$$U(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) U_i = \langle N \rangle \{U\} \quad (\text{II.4})$$

$U_i$  : sont les paramètres nodaux .

$N_i(x)$  : est une fonction d'interpolation .

L'équation (II.4) est une approximation nodale

$$U(x_i) = U_i \Rightarrow N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

**Remarque :**

On peut étendre cette approximation nodale directement à une approximation d'une fonction à plusieurs variables :

$$U(x, y, z) = U(\mathbf{x}) \quad \text{avec : } \mathbf{x} = \mathbf{x}(x, y, z)$$

### II.4.2 Approximation par éléments finis :

La construction de  $U(x)$  est difficile lorsque  $n$  est très important, le problème se complique si le domaine  $V$  a une forme complexe, et si  $U(x)$  doit satisfaire des conditions aux limites sur les frontières de  $V$ .

La méthode d'approximation nodale par sous domaines simplifie la construction de  $U(x)$ , elle consiste à :

- Identifier du domaine  $V$  un ensemble de sous domaines  $V^e$  appelés éléments du domaine ( *fig II.1* ).
- Définir sur chaque élément la fonction  $U^e(x)$  tel que :
  - a) Sur chaque  $V^e$ , on ne fait intervenir que les variables nodales attachées à des nœuds situés sur  $V^e$  et sur sa frontière.
  - b)  $U^e(x)$  est continue sur  $V^e$  et satisfait les conditions de continuité sur les différents sous domaines .

Donc, pour réaliser cette approximation il faut :

- ✓ Définir analytiquement la géométrie de tout les éléments.
- ✓ Construire  $N_i(x)$  ;  $i=1,n$  pour chaque élément.

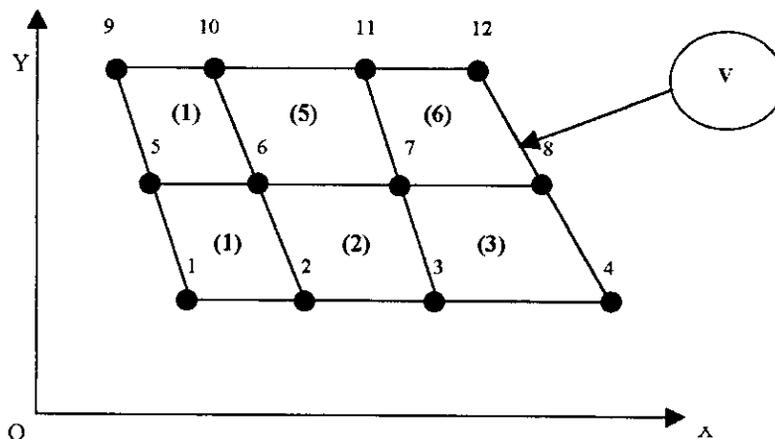
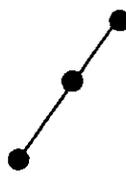
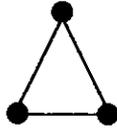
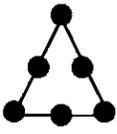
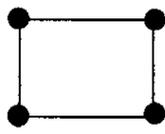
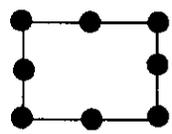
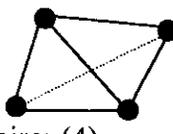
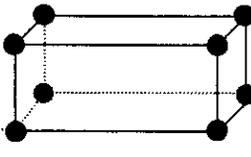
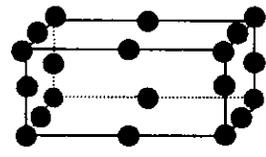


Fig. II.1 Discrétisation du domaine  $V$   
( 6 éléments et 12 nœuds)

### II.4.3 Définition de la géométrie des éléments :

La détermination géométrique de chaque élément se fait par un certain nombre de nœuds  $\bar{n}$ , ces nœuds sont appelés : **nœuds géométriques**. Et si :  $n = \bar{n}$ , l'élément est dit : **isoparamétrique**.

**II.4.4 Quelques formes classiques des éléments :**

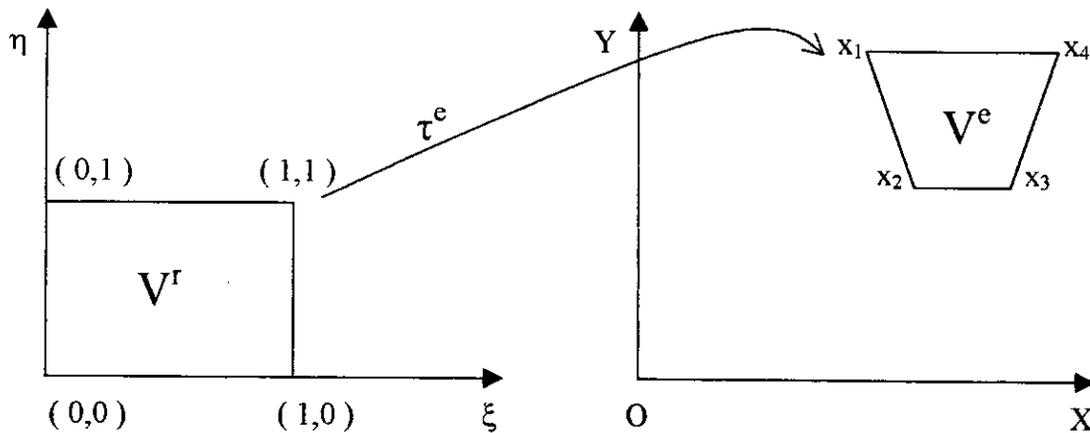
<b>Eléments à une dimension</b>			
Linéaire: (2)		Quadratique: (3)	
<b>Eléments à deux dimensions</b>			
<b>Eléments triangulaires</b>		<b>Eléments quadrilatéraux</b>	
			
Linéaire : (3)	Quadratique : (6)	Linéaire : (4)	Quadratique : (8)
<b>Eléments à trois dimensions</b>			
<b>Eléments triadriques</b>		<b>Eléments hexaédriques</b>	
			
Linéaire: (4)	Linéaire : (8)	Quadratique : (20)	

**Fig. II.2** Forme de quelques éléments classiques.

### II.4.5 Élément de référence :

Un élément de référence  $V^r$  est un élément de forme très simple dans un repère de référence qui peut être transformé en chaque élément réel  $V^e$  par une transformation géométrique :  $\tau^e$ .

Par exemple dans le cas d'un rectangle :



Élément de référence :  $\xi = \langle \xi, \eta \rangle$

Élément réel :  $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$

$$\tau^e: \xi \longrightarrow \mathbf{x}^e \quad \text{avec : } \mathbf{x}^e = \mathbf{x}^e(\xi)$$

Fig. II.3 Transformation de l'élément réel.

$\tau^e$  : Dépend de la forme et de la position de l'élément réel, donc des coordonnées des nœuds géométriques qui les définissent :

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{x}^e(\xi, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Avec :  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  sont des nœuds géométriques qui appartiennent à  $V^e$ .

$\tau^e$  est choisie de manière à présenter les propriétés suivantes :

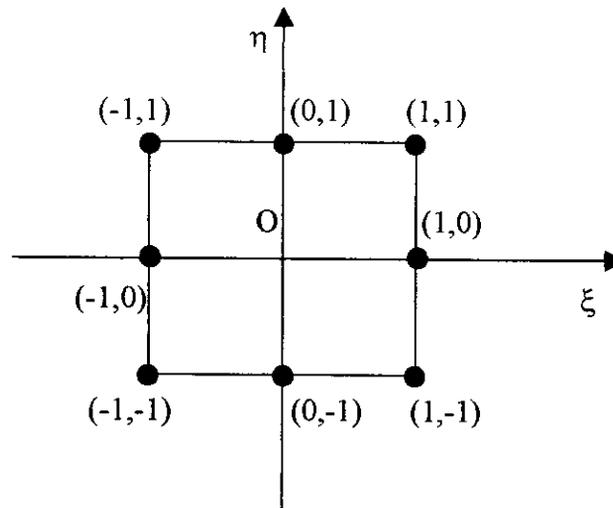
- $\tau^e$  : est bijective en tout point  $\xi$ .
- Les nœuds géométriques de l'élément de référence correspondent aux nœuds géométriques de l'élément réel.

Donc, pour chaque élément, on a :

$$\tau: \xi \longrightarrow \mathbf{x}(\xi) = [ \bar{N}(\mathbf{x}) ] \cdot \{\mathbf{x}_n\} \quad (\text{II.5})$$

$\{\mathbf{x}_n\}$  : Les nœuds géométriques de l'élément :  $V^e$ .

**Exemple :** La forme de l'élément de référence à deux dimensions d'un élément carré quadratique à 8 nœuds :



**Fig. II.4** Élément de référence

Cet élément de référence est défini comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq \xi \leq +1 \\ -1 \leq \eta \leq +1 \end{array} \right.$$

*La définition analytique de la géométrie des éléments utilisés dans notre modélisation, ainsi que les fonctions d'interpolations associées se trouvent dans l'annexe I.*

### ❖ Matrice Jacobienne :

L'existence de deux repères différents, l'un de référence, l'autre réel, nécessite une matrice dite « **jacobienne** » pour le passage d'un repère à un autre.

Toutes les expressions qui impliquent des dérivées en  $x, y, z$  sont transformées en  $\xi, \eta, \zeta$  grâce à la matrice jacobienne .

$$[\delta \xi] = [J] \{\delta X\}$$

La matrice jacobienne sera calculée par le produit de deux matrices, l'une contenant les dérivées en  $\xi$  des fonctions de transformation géométrique, et l'autre les coordonnées des  $n^e$  nœuds géométriques de l'élément.

$$[J] = \begin{bmatrix} \langle N, \xi \rangle \\ \langle N, \eta \rangle \\ \langle N, \zeta \rangle \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{ccc} \{X_n\} & \{Y_n\} & \{Z_n\} \end{array} \right] \quad (\text{II.6})$$

### II.4.6 Approximation sur l'élément de référence :

Nous choisissons sur  $V$  un ensemble de  $n$  nœuds d'interpolation de coordonnées  $x_i$  :  $i = 1, n$  confondus où non avec les nœuds géométriques.

Sur chaque élément on a :

$$u_{\text{ex}}(x) \approx u(x) = \langle N(x) \rangle \{u_n\} \quad (\text{II.7})$$

Et sur l'élément de référence on obtient :

$$u_{\text{ex}}(\xi) \approx u(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{u_n\} \quad (\text{II.8})$$

Avec :

$$\left. \begin{array}{l} x(\xi) = [ \bar{N}(x) ] \cdot \{x_n\} \\ u(\xi_i) = [ N(\xi_i) ] \cdot \{u_n\} \\ N_j(\xi_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad \text{où : } u_i = u_{\text{ex}}(\xi_i) \end{array} \right\} \quad (\text{II.9})$$

Alors :

$$\{u_n\} = \begin{bmatrix} \langle P(\xi_1) \rangle \\ \vdots \\ \langle P(\xi_n) \rangle \end{bmatrix} \{a\}$$

$$\Rightarrow \{u_n\} = [P_n] \cdot \{a\} \quad (\text{II.10})$$

$$\Rightarrow \{a\} = [P_n]^{-1} \cdot \{u_n\} \quad (\text{II.11})$$

Pur un élément de référence :

$$u(\xi) = \langle P(\xi) \rangle \cdot \{a\} \quad (\text{II.12})$$

En substituant l'équation (II.11) dans l'équation (II.12) on trouve :

$$u(\xi) = \langle P(\xi) \rangle \cdot [P_n]^{-1} \cdot \{u_n\} \quad (\text{II.13})$$

Et en comparant (II.8) avec (II.13) on obtient :

$$\langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle \cdot [P_n]^{-1} \quad (\text{II.14})$$

Donc, en conclusion, pour construire les fonctions d'interpolation il faut poursuivre les étapes suivantes :

1. Choisir la base polynomiale :  $\langle P(\xi) \rangle$ .
2. Evaluer la matrice :  $[P_n] = [P_i(\xi_j)] \quad i=1,n \quad j=1,n$ .
3. Calculer :  $[P_n]^{-1}$ .
4. Calculer :  $\langle N(\xi) \rangle$  suivant la relation (II.14).

## **II.5 Matrice d'interpolation des déformations :**

En prenant les équations donnant les relations entre les déplacements et les déformations en élasticité plane sous forme matricielle, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta/\delta x & 0 \\ 0 & \delta/\delta y \\ \delta/\delta y & \delta/\delta x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

On notera la matrice définie dans (II.15) par [L], donc autrement on peut écrire :

$$\{\varepsilon\} = [L].\{\delta\} \quad (\text{II.16})$$

$\{\delta\}$  est le vecteur déplacement en un point donné, les fonctions d'interpolations nous permettent d'avoir une relation entre les déplacements aux nœuds  $\delta^*$  avec les point se trouvant dans le champs ayant pour frontière ces nœuds. Autrement dit, les déplacements nodaux étant connus, on peut déterminer ceux des points à l'intérieur du milieu grâce aux fonctions ( $N_i$ ) qui y définissent le champ de déplacement  $\delta$  en tout point. La relation écrite sous forme matricielle est :

$$\{\delta\} = [N].\{\delta^*\}$$

Où [N] : est la matrice d'interpolation des déplacements .

$\delta^*$  : sont les déplacement nodaux.

En injectant l'expression de  $\{\delta\}$  dans l'équation (II.16) on aura :

$$\{\varepsilon\} = [L].[N].\{\delta^*\} \quad (\text{II.17})$$

on pose :  $[B] = [L].[N]$

ainsi on définit la matrice [B] qui représente la matrice d'interpolation des déformations.

$$\{\varepsilon\} = [B].\{\delta^*\} \quad (\text{II.18})$$

## **II.6 Détermination de la matrice [B] pour l'élément isoparamétrique :**

Les fonctions d'interpolation géométriques sont données par

$$\left. \begin{array}{l} X=[N]^T[X] \\ Y=[N]^T[Y] \end{array} \right\} \quad (\text{II.19})$$

Les fonctions d'interpolation des déplacements sont données par :

$$\left. \begin{array}{l} U=[N]^T[U] \\ V=[N]^T[V] \end{array} \right\} \quad (\text{II.20})$$

$$\text{Où : } [N]^T = [N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8] \quad (\text{II.21})$$

$$\text{Et } [X] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_8 \end{bmatrix} \quad [Y] = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_8 \end{bmatrix} \quad [U] = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_8 \end{bmatrix} \quad [V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_8 \end{bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

On peut écrire la formule de différenciation suivante :

$$\begin{bmatrix} \delta/\delta\xi \\ \delta/\delta\eta \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} \delta/\delta x \\ \delta/\delta y \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

Les fonctions d'interpolations nous permettent d'avoir une relation entre les déplacements aux nœuds  $\delta^*$  avec les points se trouvant dans le champs ayant pour frontières ces nœuds. Autrement dit, les déplacements nodaux étant connus, on peut déterminer ceux des points à l'intérieur du milieu grâce aux fonctions de forme ( $N_i$ ) qui y définissent le champs de déplacements  $\delta$  en tout point. La relation écrite sous forme matricielle est :

$$\{\delta\} = [N] \cdot \{\delta^*\}$$

Où  $[N]$  : est la matrice d'interpolation des déplacements.

$\delta^*$  : le déplacement nodal.

J : étant le Jacobien défini dans la relation (II.6)

On calcul le Jacobien en utilisant les relations d'interpolation géométrique données en (II.22) soit par exemple :

$$\frac{\delta x}{\delta \xi} = \sum \frac{\delta N_i X_i}{\delta \xi} \quad (\text{II.24})$$

On obtient donc l'expression matricielle de J en utilisant l'équation (II.24).

$$[J] = \begin{pmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & \dots & N_{8,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & \dots & N_{8,\eta} \end{pmatrix} \quad (\text{II.25})$$

$$\text{Où : } N_{i,\xi} = \delta N_i / \delta \xi \quad N_{i,\eta} = \delta N_i / \delta \eta \quad (\text{II.26})$$

L'expression (II.25) écrite sous forme condensée devient :

$$[J] = \begin{pmatrix} N_{T,\xi} \\ N_{T,\eta} \end{pmatrix} [X \quad Y] \quad (\text{II.27})$$

Si la transformation géométrique est unique (la transformation est bijective), le Jacobien est non singulier, donc l'inverse de J existe ( $\det J \neq 0$ ) ainsi on pourra écrire :

$$\begin{pmatrix} \delta / \delta \xi \\ \delta / \delta \eta \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \delta / \delta x \\ \delta / \delta y \end{pmatrix} \quad (\text{II.28})$$

A partir des relations précédentes, on peut obtenir l'expression des dérivées des déplacements :

$$\begin{bmatrix} \delta U / \delta x \\ \delta U / \delta y \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \delta U / \delta \xi \\ \delta U / \delta \eta \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} N^T, \xi \\ N^T, \eta \end{bmatrix} [U] \quad (\text{II.29})$$

$$\begin{bmatrix} \delta V / \delta x \\ \delta V / \delta y \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \delta V / \delta \xi \\ \delta V / \delta \eta \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} N^T, \xi \\ N^T, \eta \end{bmatrix} [V] \quad (\text{II.30})$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} \delta U / \delta x \\ \delta U / \delta y \\ \delta V / \delta x \\ \delta V / \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^T_{,\xi} & 0 \\ N^T_{,\eta} & 0 \\ 0 & N^T_{,\xi} \\ 0 & N^T_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

d'où l'expression des déformations :

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta U / \delta x \\ \delta U / \delta y \\ \delta V / \delta x \\ \delta V / \delta y \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

On peut obtenir à partir des deux expressions (II.31) et (II.32) la matrice [B] d'interpolation des déformations telle que l'on puisse écrire :

$$\langle \varepsilon \rangle = [B] \langle \delta^* \rangle \quad \langle \delta \rangle = \langle U \ V \rangle$$

Par identification, la matrice [B] a pour expression :

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^T_{,\xi} & 0 \\ N^T_{,\eta} & N^T_{,\xi} \\ 0 & N^T_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

## II.7 Matrice d'interpolation des contraintes :

Les relations entre contraintes et déformations pour « les contraintes planes » peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\langle \sigma \rangle = [D] \cdot \langle \varepsilon \rangle \quad (\text{II.34})$$

En injectant l'expression de  $\langle \varepsilon \rangle$  données par l'équation (II.18), on aboutit à :

$$\langle \sigma \rangle = [D] \cdot [B] \cdot \delta^* \quad (\text{II.35})$$

Ou,  $[D] \cdot [B]$  matrice d'interpolation des contraintes, et  $[D]$  matrice d'élasticité du milieu qui est fonction des caractéristiques du matériau le constituant :

Dans le cas de contraintes planes, la matrice  $[D]$  est donnée par :

$$[D] = \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 \end{pmatrix} \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \quad (\text{II.36})$$

Et en déformations planes, la matrice  $[D]$  est donnée par :

$$[D] = \begin{pmatrix} 1 & 1/1-\nu & 0 \\ \nu/1-\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu/2(1-\nu) \end{pmatrix} \cdot \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{II.37})$$

## **II.8 Détermination de la matrice de rigidité en équilibre statique :**

Le comportement d'un système physique continue est décrit par un système d'équations aux dérivées partielles. Dans notre étude, ce système est représenté par les équations d'équilibre statique d'un corps infinitésimal comme suit :

$$\{\sigma_{ij,j}\} + \{f_i\} = 0 \quad (\text{II.38})$$

Dans un problème stationnaire, pour un système discret, les équations du comportement peuvent en général s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\} \quad (II.39)$$

Où :

$[K]$  : est la matrice caractérisant le système.

$\{U\}$  : est le vecteur des variables inconnues (les déplacements).

$\{F\}$  : est le vecteur de sollicitations connues.

En utilisant la méthode des résidus pondérés, on réécrit l'équation (II.38) sous la forme intégrale sur le volume  $s$  suivante :

$$W = \int_s \Psi (\sigma_{ij,j} + f_i) ds = 0$$

A l'aide de la méthode de GALERKINE, on a :

$$\psi = \delta U$$

Alors :

$$W = \int_{s''} \delta U (\sigma_{ij,j} + f_i) ds = 0$$

$$W = \int_s \delta u_i \sigma_{ij,j} ds + \int_s \delta u_i f_i ds = 0$$

$$W = W_1 + W_2 = 0$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \int_s (\delta u_i \sigma_{ij})_{,j} ds &= \int_s \delta u_{i,j} \sigma_{ij} ds + \int_s \delta u_i \sigma_{ij,j} ds \\ \Rightarrow \int_s \delta u_i \sigma_{ij,j} ds &= \int_s (\delta u_i \sigma_{ij})_{,j} ds - \int_s \delta u_{i,j} \sigma_{ij} ds \end{aligned}$$

Donc :

$$W_1 = \int_s (\delta u_i \sigma_{ij})_{,j} ds - \int_s \delta u_{i,j} \sigma_{ij} ds$$

En utilisant le théorème de GAUSS on peut écrire:

$$\int_s (\delta u_i \sigma_{ij})_{,j} ds = \int_l \delta u_i \sigma_{ij} n_j dl$$

dl : est un élément de frontière.

D'où :

$$W_1 = \int_l \delta u_i \sigma_{ij} n_j dl - \int_s \delta u_{i,j} \sigma_{ij} ds$$

Sous forme matricielle :

$$W = \int_l \underbrace{\langle \delta u \rangle [\sigma] \{n\}}_0 dl - \int_s \langle \delta \epsilon \rangle [\sigma] \{n\} ds + \int_\Omega \langle \delta U \rangle \{F\} ds = 0$$

$$\int_s \underbrace{[\delta \epsilon] [\sigma]}_* ds = \int_s \delta \left( [S][U][D] \right) \left( [S][U] \right) ds = \int_s \delta \left( [S][N_U][U_N] \right) [D][S][N_U][U_N] ds$$

\* \* \* \*

\* \* = [S] [U<sub>N</sub>]<sup>T</sup> [N]<sup>T</sup> [S]<sup>T</sup> = δ [U<sub>n</sub>]<sup>T</sup> [B]<sup>T</sup>

\* = δ [U<sub>N</sub>]<sup>T</sup> [B]<sup>T</sup> [D][B] ds [U<sub>n</sub>] = δ [U<sub>N</sub>]<sup>T</sup> [K][U<sub>N</sub>]

Alors :

$$[K] = \int_s [B]^T [D] [B] ds \tag{II.40}$$

# CHAPITRE III

# METHODES NUMERIQUES

---

## Introduction :

La mise en œuvre effective de la méthode des éléments finis décrite dans le chapitre précédent, nécessite l'utilisation de méthodes numériques variées pour construire les matrices élémentaires et résoudre les systèmes d'équations algébriques qui en résultent.

Ce chapitre contient les descriptions des méthodes numériques que nous avons utilisées dans notre travail.

Nous présentons tout d'abord, les méthodes d'intégration numérique, qui permettent de construire les matrices et vecteurs élémentaires par intégration sur l'élément de référence.

Des formules d'intégration numérique sont proposées pour des domaines variés à une, deux et trois dimensions.

Le second paragraphe est consacré à la résolution des systèmes linéaires. La méthode d'élimination de Gauss et les techniques de décomposition correspondantes sont ensuite décrites puis adaptées aux matrices stockées par la technique de la ligne de ciel.

## III.1 Intégration numérique :

Dans la méthode des éléments finis, la matrice élémentaire  $[K]$  et le vecteur des sollicitations élémentaires  $\{f\}$  s'expriment sous forme d'intégrales à une, deux ou trois dimensions, définies sur l'élément réel  $V^e$  :

$$\left. \begin{aligned} [K] &= \int_{V^e} [B_\delta] [D] [B] dV \\ \{f\} &= \int_{V^e} \{N\} f_v dV + \int_{S_f^e} \{N\} f_s dS \end{aligned} \right\} \quad (III.1)$$

Sur l'élément de référence, ces intégrales deviennent :

$$\left. \begin{aligned} [K] &= \int_{V_r} [B_s(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] \det (J(\xi)) dV^r \\ \{f\} &= \int_{V_r} \{N(\xi)\} f_v \det (J(\xi)) dV^r + \int_{S_{fr}} \{N(\xi_s)\} f_s dS \end{aligned} \right\} \quad (III.2)$$

où :  $V_r$  est le volume de l'élément de référence

$S_{fr}$  est la partie de la frontière de l'élément de référence sur laquelle est appliquée la sollicitation  $f_s$

$\xi_s$  représente les coordonnées  $\xi$  sur le contour  $S_{fr}$

$$dS = J_s dS_1 dS_2$$

$[J]$  est la matrice jacobienne de la transformation géométrique.

Soit encore :

$$\left. \begin{aligned} [K] &= \int_{V_r} [K^*] dV^r \\ \{f\} &= \int_{V_r} \{f_v^*\} dV^r + \int_{S_{fr}} \{f_s^*\} dS \end{aligned} \right\} \quad (III.3)$$

où :

$$[K^*] = [B_s(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] \det (J(\xi))$$

$$\{f_v^*\} = \{N(\xi)\} f_v \det (J(\xi))$$

$$\{f_s^*\} = \{N(\xi_s)\} f_s$$

Les termes de  $[K^*]$  ,  $\{f_v^*\}$  et  $\{f_s^*\}$  sont des polynômes ou des fractions rationnelles compliquées. Leur intégration explicite n'est facile que s'ils sont constitués de termes polynomiaux. Nous présentons ci - dessous les intégrales explicites des monômes sur quelques éléments de référence classiques :

**Une dimension :**

$$\int_{-1}^{+1} \xi^i d\xi = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ est impair} \\ \frac{2}{i+1} & \text{si } i \text{ est pair} \end{cases} \quad (III.4)$$

**Deux dimensions :**

- **Elément de référence carré :**

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \xi^i \eta^j d\xi d\eta = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ ou } j \text{ est impair} \\ \frac{4}{(i+1)(j+1)} & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont pairs} \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

- **Elément de référence triangulaire :**

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{1-\xi} \xi^i \eta^j d\eta d\xi = \frac{i!j!}{(i+j+2)!} \quad (\text{III.6})$$

D'une manière plus simple : le passage d'une intégrale qui est une en fait sommation continue, à une sommation discrète, n'est pas possible qu'en pondérant les valeurs de la fonction intégrée en tout point d'intégration par des coefficients  $W_i$  appropriés.

Exemple :

$$\int_{-1}^{+1} y(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^r w_i y(\xi_i) \quad (\text{III.7})$$

Dans notre travail nous avons utiliser l'intégration numérique à deux dimensions, sur des éléments de références carrés. Mais afin de pouvoir donner une idée sur l'intégration numérique à deux dimensions il va falloir passer par un léger aperçu sur l'intégration numérique à une dimension.

### **III.1.1 Intégration numérique à une dimension :**

Parmi les méthodes d'intégration les plus citées par la littérature, sont: la méthode de **GAUSS** et celle de **NEWTO – COTES**. Un calcul mathématique simple permet de tirer les coefficients  $W_i$  relatifs aux coordonnées  $\xi_i$ , pour un nombre de points d'intégration  $r$  donné, qui sont ensuite présentés sur des tableaux (Voir annexe II, Tableaux 1,2 ).

### III.1.2 Intégration numérique à deux dimensions :

Il existe deux types distincts de méthodes d'intégration numérique :

#### a) Les méthodes indirectes :

Elles consistent à utiliser dans chaque direction  $\xi$  et  $\eta$  une intégration numérique à une dimension. Si nous utilisons  $r_1$  points dans le sens  $\xi$  et  $r_2$  points dans le sens  $\eta$ , la méthode de Gauss intègre exactement le produit d'un polynôme en  $\xi$  d'ordre  $2r_1 - 1$  et d'un polynôme en  $\eta$  d'ordre  $2r_2 - 1$ .

La méthode « **produit** » utilise  $r = r_1 \cdot r_2$  points ; elle intègre tous les monômes

$$\xi^i \eta^j \text{ tels que } \begin{aligned} 0 \leq i \leq 2r_1 - 1 \\ 0 \leq j \leq 2r_2 - 1 \end{aligned}$$

et c'est cette méthode que nous avons adoptée pour les éléments de référence carrés.

#### b) Les méthodes directes :

De telles méthodes utilisent souvent moins de points que les méthodes « produit ». Pour les éléments de référence carrés, les méthodes « produit » sont les plus utilisées, alors que pour les éléments triangulaires les méthodes directes sont plus courantes.

#### III.1.2.1 Élément de référence carré :

La méthode « produit » s'exprime :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} Y(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} W_i W_j Y(\xi_i, \eta_j) \quad (\text{III.8})$$

où :

$W_i W_j$  : sont les coefficients donnés par la méthode de GAUSS ou de NEWTON-COTES

$\xi_i, \eta_j$  : sont les coordonnées des points d'intégration correspondants.

( Voir Annexe II, Tableau 1,2 )

#### III.1.2.2 Élément de référence triangulaire (Méthode de GAUSS-RADAU):

LA méthode « produit » s'exprime :

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} Y(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r WJ(j) \cdot WI(i) \cdot Y(\xi_i, \eta_{ij}) \quad (\text{III.9})$$

avec :

$$WJ(j) = AJ(j) (1-SJ(j))$$

$$\xi_i = SJ(j)$$

$$\eta_{ij} = RI(i) (1-SJ(j))$$

(Voir II, Tableau 3)

### **III.1.3 Précision de l'intégration :**

L'intégration exacte des matrices élémentaires et des vecteurs sollicitation nécessite l'intégration exacte de chacun de leurs termes. Ceci n'est possible, avec les méthodes d'intégration présentées ci-dessus, que si ces termes sont des polynômes, ce qui est en général le cas lorsque la matrice jacobienne est constante.

Dans le cas où l'élément est déformé (quadrilatère, cotés curvilignes), la transformation géométrique n'est pas linéaire et la matrice jacobienne est une fonction polynomiale de  $\xi$ . Les termes à intégrer pour obtenir  $[K]$  sont des fractions rationnelles. Il n'est plus possible d'intégrer exactement ces termes. Pour un nombre donné de points d'intégration, la précision d'intégration diminue lorsque la déformation de l'élément augmente. En effet nous pouvons développer l'inverse du dénominateur en une série infinie qu'il faut tronquer à un ordre d'autant plus élevé que la déformation est forte. Chaque terme à intégrer est alors le polynôme produit du numérateur par la série tronquée.

### **III.1.4 Choix du nombre de points d'intégration :**

Le choix du nombre de points d'intégration dépend du type d'élément utilisé et de la matrice que l'on construit ( $[K]$  par exemple).

En pratique, on choisit le plus souvent un nombre de points aussi faible que possible pour diminuer le volume de calcul. L'expérience a montré que **l'intégration réduite** peut donner de meilleurs résultats que l'intégration exacte. Par contre il existe, pour chaque type d'élément, un nombre **minimum** de points d'intégration en dessous duquel la matrice  $[K]$  reste singulière malgré l'introduction des conditions aux limites. Pour un élément quadrilatéral isoparamétrique à 8 nœuds, il faut un minimum de  $2 \times 3 \times 2$  points d'intégration pour calculer  $[K]$ . D'après ZIENKIEWICZ, pour les éléments isoparamétriques, le nombre de points d'intégration doit permettre l'intégration exacte de  $\det(J)$ , c'est à dire du volume de l'élément réel. Ce critère peut être insuffisant dans certains cas, par exemple il conduit à

utiliser un seul point pour le quadrilatère isoparamétrique à 4 nœuds, ce qui peut rendre  $[K]$  singulière lorsque le nombre d'éléments est faible.

En fait à chaque point d'intégration d'un élément sont associées une ou plusieurs relations entre les variables nodales de l'élément. Pour que la matrice globale  $[K]$  ne soit pas singulière, le nombre total de points d'intégration doit être tel que le nombre des relations correspondantes soit au moins égal au nombre d'inconnues du problème, compte tenu des conditions aux limites.

### **III.2 Résolution de systèmes d'équations linéaires :**

La résolution du système d'équations

$$[K] \{U_n\} = \{F\} \quad (\text{III.10})$$

est une étape importante de la méthode des éléments finis. Ce système est linéaire lorsque  $[K]$  ne dépend pas de  $\{U_n\}$ .

Les méthodes de résolution de systèmes linéaires peuvent être classées en deux catégories :

- Les méthodes directes qui conduisent à la solution en un nombre d'opérations connu a priori.
- Les méthodes itératives qui conduisent à la solution par une succession d'amélioration d'une solution approchée, le nombre d'itérations nécessaires étant difficile à prévoir et dépendant de la structure de la matrice  $[K]$ .

La grande majorité des programmes actuels utilisent des méthodes **directes** dérivées de la méthode de d'élimination de GAUSS car elles nécessitent en général beaucoup moins d'opérations que les méthodes itératives.

#### **❖ Méthode d'élimination de GAUSS :**

D'une façon générale et sans rentrer dans les détails de calcul, cette méthode est constituée de deux étapes :

##### a) **Triangularisation :**

Cette étape consiste à transformer le système d'équations (III.10) en un système triangulaire.

**b) Résolution du système triangulaire :**

Cette étape consiste à calculer les inconnues  $U_n$ , de la dernière à la première, par résolution du système triangulaire, cette opération est appelée en anglais «**BACK-SUBSTITUTION**»

**III.3 Résolution des systèmes d'équations non-linéaires :**

Concernant les systèmes d'équations non linéaires, plusieurs méthodes existent , nous pouvons citer :

- La méthode incrémentale.
- La méthode de substitution.
- La méthode de Newton – Raphson.
- La méthode de Quasi-Newton.

# CHAPITRE IV

# **APPROCHE PAR ELEMENTS FINIS DES PROBLEMES DE CONTACT ENTRE SOLIDES ELASTIQUES**

---

## **Introduction :**

Pour n'importe quel ouvrage, l'interaction sol-structure se traduit par un contact direct entre un solide de transmission (fondation, mur de soutènement...) et le sol.

Sous variation de sollicitations (moment de rotation, charge uniforme ou concentrée), ces deux systèmes évoquent des déplacements relatifs entre eux. A une certaine limite du chargement les deux corps peuvent se détacher, mais par plusieurs états intermédiaires de contact, où il y a une variation progressive de la quantité de matériau assurant la liaison.

Ce matériau de contact, souvent représenté par une partie du sol qui reste collée au solide, présente en lui-même un sous système continu dont l'étude nécessite une modélisation par éléments finis, qui possède des propriétés intermédiaires entre les deux systèmes en contact.

Les différents détails de cette approche sont présentés dans ce qui suit.

## **IV-1.1 Modélisation des solides en contact :**

La modélisation des solides en contact peut être réalisée à l'aide de l'ensemble des éléments de type déplacement existant :

- Eléments de massif plans.
- Eléments de massif tridimensionnels.
- Eléments de poutres plans.
- Eléments de poutres tridimensionnels.
- Eléments de coques.

### IV-1.2 Modélisation de la zone de contact :

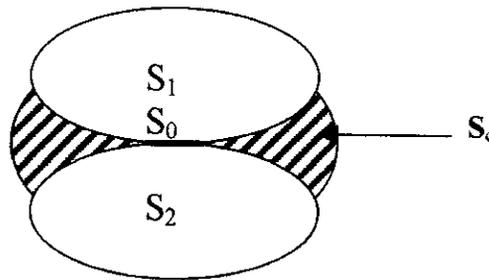


Fig. VI.1

Pour modéliser la zone de contact entre les solides  $S_1$  et  $S_2$ , nous serons amenés à définir trois surfaces distinctes :

$S_c$  : surface potentielle de contact, c'est la surface sur laquelle le contact peut se produire.

$S$  : surface effective de contact, c'est la surface de contact actuelle entre les solides.

$S_0$  : Surface initiale de contact.

La surface potentielle de contact est représentée par un matériau « **fictif** ». La modélisation de ce matériau fictif est réalisée à l'aide d'éléments finis particuliers que nous appellerons « **éléments finis de contact** ».

Ces éléments permettent d'assurer, dans la surface effective de contact la continuité des déplacements normaux et tangentiels des solides en contact.

### IV-1.3 Présentation sommaire de l'algorithme :

La surface potentielle de contact est modélisée à l'aide des éléments finis de contact, décrits dans les prochains paragraphes. Ces éléments seront dits « **actifs** » s'ils appartiennent à la surface effective de contact, « **inactifs** » dans le cas contraire. La rigidité d'un élément **inactif** est identiquement nulle.

A chaque modification de la surface effective de contact correspond une modification de l'état « **actif-inactif** » des éléments de contact et donc une modification de la matrice de rigidité globale du système étudié. D'où l'introduction d'une **non linéarité incrémentale**.

Le principe de la résolution consiste à procéder à un chargement progressif automatique de manière à suivre l'évolution de la surface effective de contact.

**IV-2.1 Présentation des éléments finis de contact :**

**IV-2.1.1 Éléments de contact plans ou axisymétriques :**

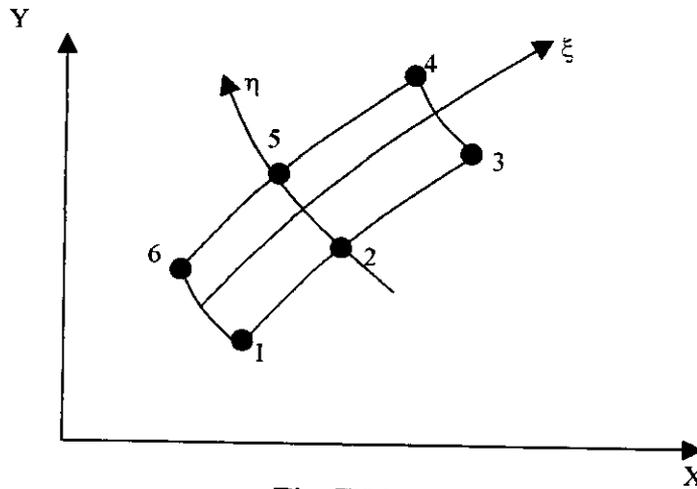


Fig. IV.2

La surface potentielle de contact est modélisée à l'aide d'éléments finis quadrilatères à 6 nœuds.

Ces éléments sont quadratiques suivant la direction tangente au contact et linéaires suivant la direction normale. Ils peuvent ainsi se raccorder à tous les éléments quadratiques type déplacement existant.

**IV-2.1.2 Éléments de contact tridimensionnels:**

Les éléments de contact peuvent aussi être modélisés par des éléments tridimensionnels, des hexaèdres à 16 nœuds ou des pentaèdres à 12 nœuds. Comme les éléments bidimensionnels, ils sont quadratiques parallèlement à la surface de contact et linéaires suivant la direction normale.

**IV-2.1.3 Définition de la géométrie d'un élément bidimensionnel :**

Dans le cas bidimensionnel, nous avons :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N H^k(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x^k \\ y^k \end{Bmatrix} \quad \text{(IV.1)}$$

avec :  $(x, y)$  : coordonnées cartésiennes dans le repère global d'un point de l'élément.

$(\xi, \eta)$  : coordonnées intrinsèques du point considéré  $-1 \leq \xi, \eta \leq +1$ .

$(X^K, Y^K)$  : coordonnées cartésiennes du nœud K.

$H^K$  : fonction d'interpolation du nœud K.

N : nombre de nœuds de l'élément .

Les fonctions d'interpolation  $H^K$  son linéaires suivant la direction normale au contact, quadratique suivant la direction tangente  $\xi$ .

#### IV-2.1.4 Définition du champ de déplacement :

Il s'agit d'exprimer le vecteur déplacement d'un point courant de l'élément en fonction des vecteurs déplacements aux nœuds. Pour cela, nous utiliserons les mêmes fonctions d'interpolation que pour la définition de la géométrie de l'élément.

Les éléments de contact sont donc isoparamétriques.

Dans le cas bidimensionnel, nous avons :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N H^K(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u^K \\ v^K \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

$(u, v)$  : composantes du déplacement d'un point de l'élément.

$(\xi, \eta)$  : coordonnées intrinsèques du point considéré.

$(u^K, v^K)$  : composantes du déplacement du nœud K.

$H^K$  : fonction d'interpolation du nœud K.

N : nombre de nœuds de l'élément.

#### IV-2.1.5 Définition de l'épaisseur des éléments de contact :

Lorsque les solides sont en contact l'épaisseur des éléments de contact est faible, pour certains matériaux elle est presque nulle. Une épaisseur nulle conduit à une singularité de comportement de l'élément. Pour lever numériquement cette singularité, nous remplacerons l'épaisseur nulle par une valeur  $e$  qui dépend du type de matériau étudié.

Nous choisirons de calculer cette valeur  $e$  comme le produit d'une grandeur caractéristique du maillage par un coefficient de pénalisation  $10^{-n}$ .

$$e = L \times 10^{-n}$$

L : Longueur de l'élément de contact.

Le coefficient de pénalisation a une influence sensible sur le conditionnement de la matrice de rigidité. Par conséquent la valeur doit être choisie par expérimentation numérique, en fonction des caractéristiques de précision de l'ordinateur utilisé.

Nous avons adopté dans notre simulation, une épaisseur de l'ordre de  $L \times 10^{-2}$ . Qui s'adapte bien à la nature du matériau étudié, qui est le sol.

### **IV-3 Résolution numérique des problèmes de contact :**

#### **Introduction :**

Les problèmes de contact présentent généralement deux types de non linéarité :

- une non linéarité du type **géométrique**.
- une non linéarité du type **comportement**.

La première non-linéarité dite géométrique provient de l'indétermination a priori de la surface de contact finale.

La seconde non-linéarité provient des phénomènes de glissement avec frottement qui peuvent se produire sur la surface de contact.

C'est principalement à la première que nous nous sommes intéressés.

Compte tenu du type de cette non-linéarité nous avons choisi de résoudre le problème par la méthode incrémentale.

#### **IV-3.1 Élément de contact «actif-inactif» :**

Nous rappelons ici les définitions données au paragraphe IV.1.2 :

$S_c$ : surface potentielle de contact, c'est la surface sur laquelle le contact peut se produire.

$S$  : surface effective de contact, c'est la surface de contact actuelle entre les solides.

$S_0$  : Surface initiale de contact.

La totalité de la surface  $S_c$  est modélisée à l'aide «d'éléments finis de contact» cependant les éléments de contact appartenant à  $S_c$ , mais n'appartenant pas à  $S$  ont une matrice de rigidité **identiquement nulle**.

Ces éléments n'ont aucune contribution dans la matrice de rigidité globale du système étudié. Ils sont déclarés **inactifs**.

Au contraire, les éléments de contact appartenant à la surface S sont déclarés **actifs**.

En effet nous avons vu que la matrice de rigidité d'un élément de contact s'obtenait par intégration numérique, comme la somme de matrices calculées aux différents points d'intégrations de l'élément.

Nous dirons qu'un point d'intégration d'un élément de contact est inactif, ou encore **décollé**, si **la contribution de ce point dans la matrice de rigidité de l'élément est identiquement nulle**. Dans le cas contraire, le point d'intégration sera déclaré **actif** ou encore **en contact**.

La distinction **actif-inactif** est donc réalisée **non pas au niveau des éléments mais au niveau des points d'intégration de la matrice de rigidité élémentaires**. Ainsi, un élément de contact pourra être **partiellement en contact et partiellement décollé**.

#### **IV-3.2 Critère de contact :**

On a choisi de représenter les phénomènes de frottement entre les solides en contact à l'aide de la loi de frottement de Coulomb. Ce choix n'est pas exclusif, une autre loi de frottement pourrait aisément être introduite dans le programme moyennant quelques aménagements.

Soit M un point appartenant à un élément de contact actif.

Soit  $\sigma_n$  et  $\tau$  les contraintes normale et de cisaillement au point M.

Soit  $c$  et  $\varphi$ , la cohésion et l'angle de frottement caractéristique de la nature du contact dans l'élément considéré.

La loi de Coulomb peut s'exprimer sous la forme :

$$|\tau| < c - \sigma_n \operatorname{tg} \varphi \quad (\text{IV.3})$$

Nous avons aussi introduit le critère de résistance à la traction, qui peut être exprimé comme suit :

$$\sigma_y < 0 \quad (\text{IV.4})$$

# CHAPTER V

## ELABORATION DU LOGICIEL

### Introduction:

Arrivant à ce stade, nous sommes sensés mettre en application toutes les bases théoriques déjà présentées, ceci se concrétise par l'élaboration d'un logiciel performant et cohérent, permettant de calculer les déplacements nodaux d'un système modéliser par éléments finis, et surtout l'utilisation d'éléments de contact.

Pour cela nous allons présenter le logiciel en deux parties :

- A- Présentation générale du logiciel et de ses différentes sous-routines.
- B- Présentation détaillée sur la partie concernant l'introduction d'éléments de contact.

La programmation du logiciel contact a été faite entièrement en langage FORTRAN, sous système d'exploitation UNIX sur une station de travail de type IBM RS/6000 modèle 43P.

D'une façon générale, le programme fonctionne comme suit :

- 1- Un fichier de données contient toutes les données du modèle étudié avec un ordre et un format bien soignés, pour répondre aux différentes lectures exercées par le logiciel.
- 2- Le programme, lit dans un ordre planifié et organisé toutes les données nécessaires dans le fichier de données, et effectue les calculs demandés.
- 3- Tous les résultats ressortent imprimés dans un fichier de sortie. ( FIG. V.1)

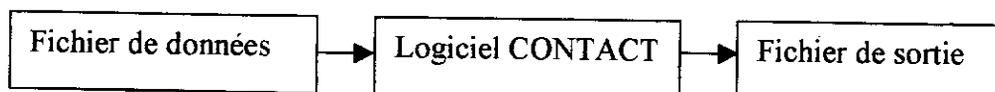
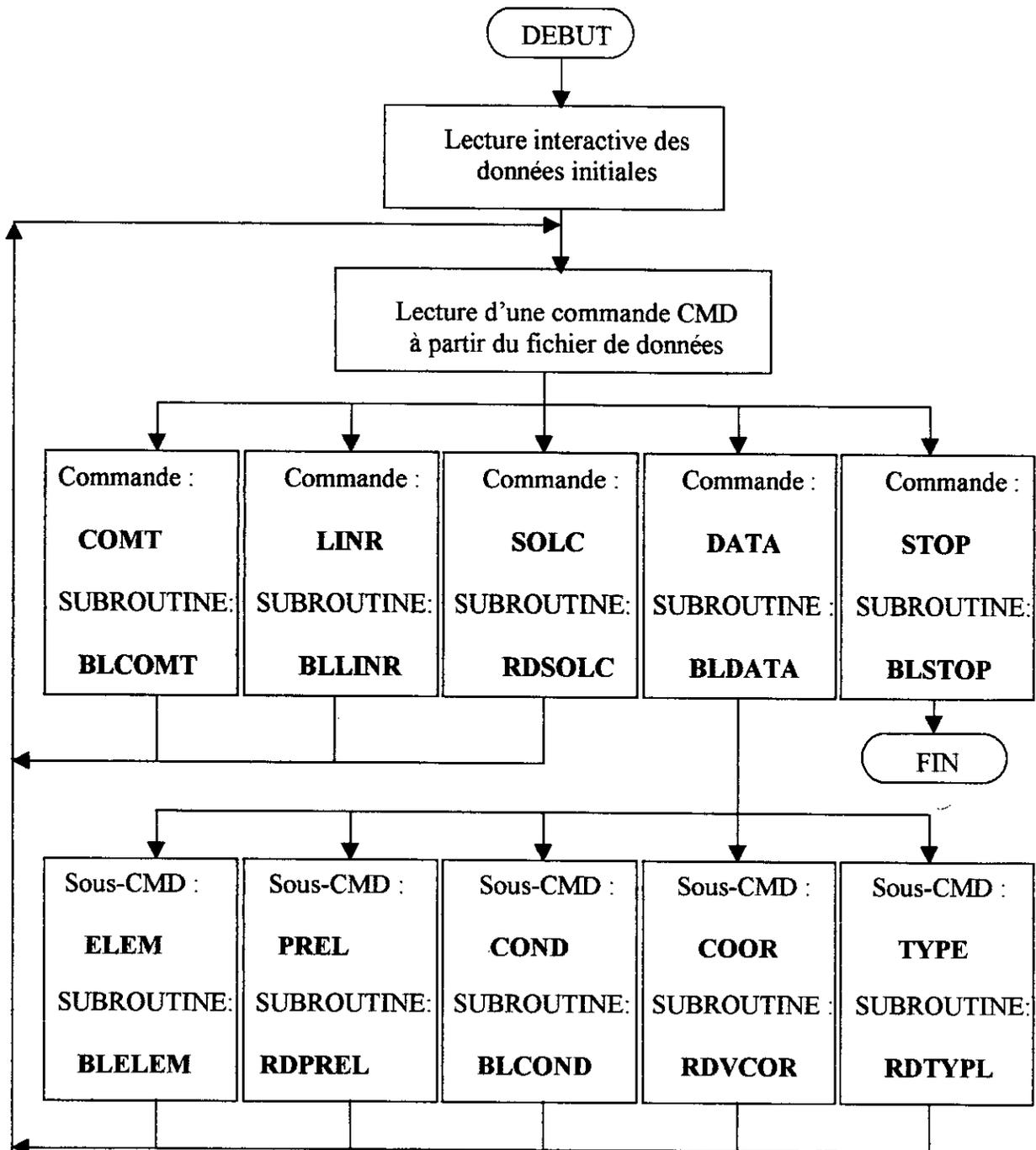


Fig. V.1

**V.1 Présentation générale du logiciel CONTACT et ses sous-routines :**



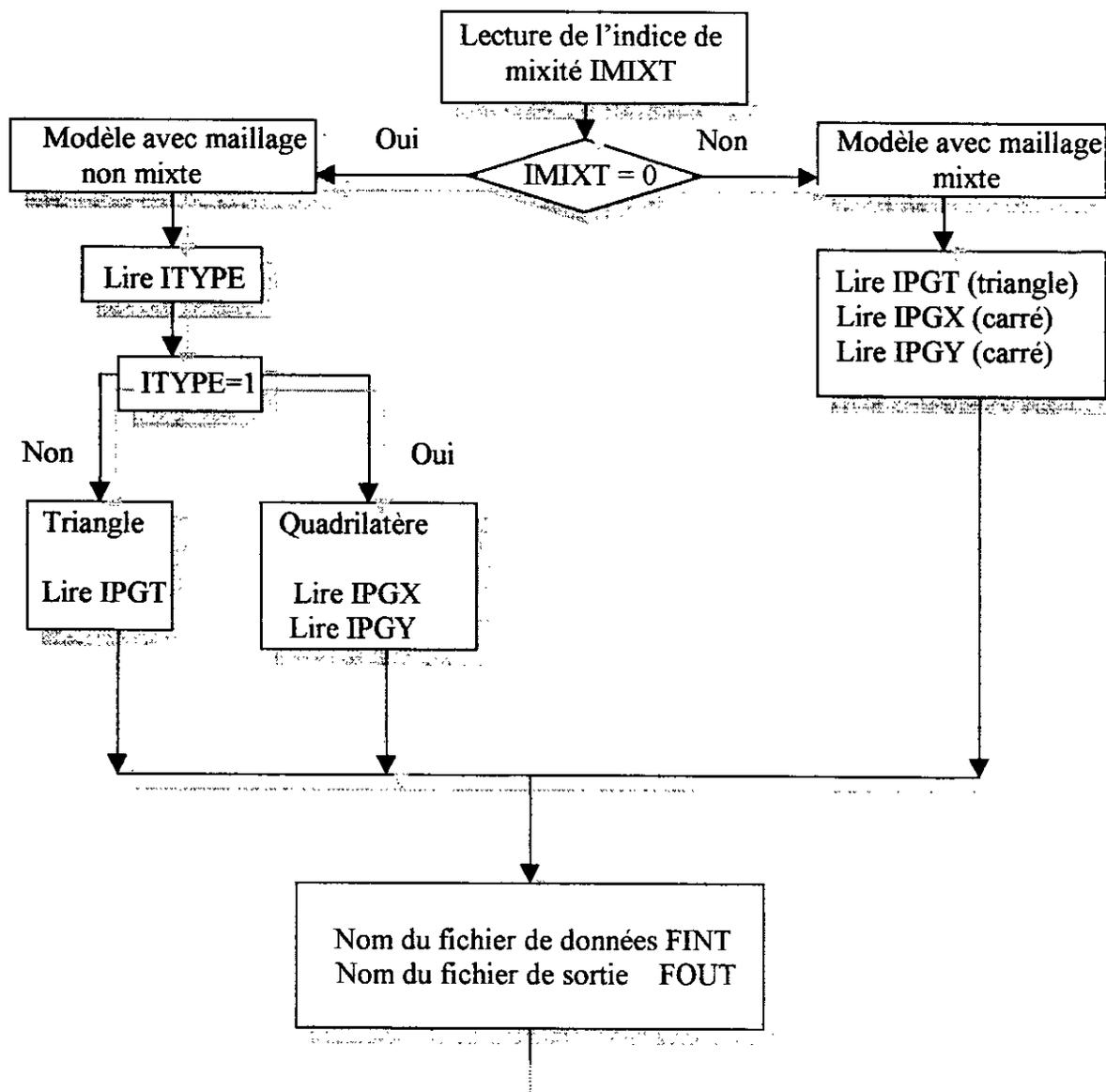
**Organigramme 1 : Logiciel CONTACT**

**V.1.1 Lecture interactive des données initiales :**

Pour que le programme soit plus souple, nous avons choisi de permettre à l'utilisateur de faire rentrer d'une manière interactive (directement à partir du clavier), les données qui peuvent faire objet de beaucoup de changements pour le même type de problèmes et les mêmes données générales qui y sont :

- Nombre de points d'intégration numérique.
- Nom du fichier de données.
- Nom du fichier de sortie.

Cette lecture peut être représentée par l'organigramme suivant :



**Organigramme 2 : Lectures interactives**

### V.1.2 BLCOMT :

Cette subroutine permet de lire sur le fichier d'entrée les commentaires qui seront imprimés sur le fichier de sortie.

### V.1.3 BLDATA :

Cette subroutine permet de lire sur le fichier de données, toutes les caractéristiques du maillage, et ceci à partir des **sous commandes** suivantes :

**COOR** : Introduction du :

- Nombre de degrés de libertés par nœud.
- Nombre total de nœuds.
- Coordonnées de tous les nœuds du maillage.
- Indice de variabilité des degrés de liberté par nœuds.

*Nous n'avons utilisé que des maillages avec des nœuds ayant tous le même nombre de degrés de libertés.*

**ELEM** : Introduction du :

- Nombre d'éléments.
- Nombre de nœuds par élément.
- Nombre de groupes de propriétés élémentaires.
- Nombre de propriétés par groupe.
- Indice choisi dans le cas d'un maillage avec un seul type d'éléments.

*Si le modèle comporte différents types d'éléments, une sous commande TYPE se charge de l'introduction des types relatifs à chaque élément.*

**PREL** : Introduction des propriétés physiques pour le groupe de propriétés spécifié, ces propriétés physiques sont :

- 1- Type de problème : 1 = isotropie en contraintes planes.  
2 = isotropie en déformations planes.
- 2- Module d'élasticité E.
- 3- Module de poisson  $\nu$ .
- 4- Angle de frottement interne  $\phi$ .
- 5- Cohésion c.
- 6- Epaisseur e.
- 7- Masse volumique du matériau  $\rho$ .

**COND** : Introduction des types de liaison adoptés, ainsi que les nœuds concernés par chaque type de liaison.

### V.1.4 RDSOLC :

Cette subroutine permet d'introduire :

- Le pourcentage d'incrémentation du chargement.
- Les valeurs de sollicitations maximales ainsi que les nœuds concernés.

Une procédure d'incrémentation automatique du chargement est introduite dans cette subroutine, où le chargement progresse d'une valeur initiale  $P_0$  jusqu'à la valeur maximale  $P_{\max}$  en respectant le pourcentage incrémental lu au début :

$$P_{i+1} = P_i + \Delta P \quad i = 0, (1 / \text{pourcentage})$$

Avec :

$$\begin{cases} P_0 = 0 \\ \Delta P = \text{pourcentage} \times P_{\max} \end{cases}$$

### V.1.5 BLLINR :

Dans cette subroutine toutes les données sont utilisées et combinées pour aboutir aux valeurs des déplacements nodaux.

Une librairie d'éléments contient une directive, pour trois types d'éléments que nous avons introduit et qui sont :

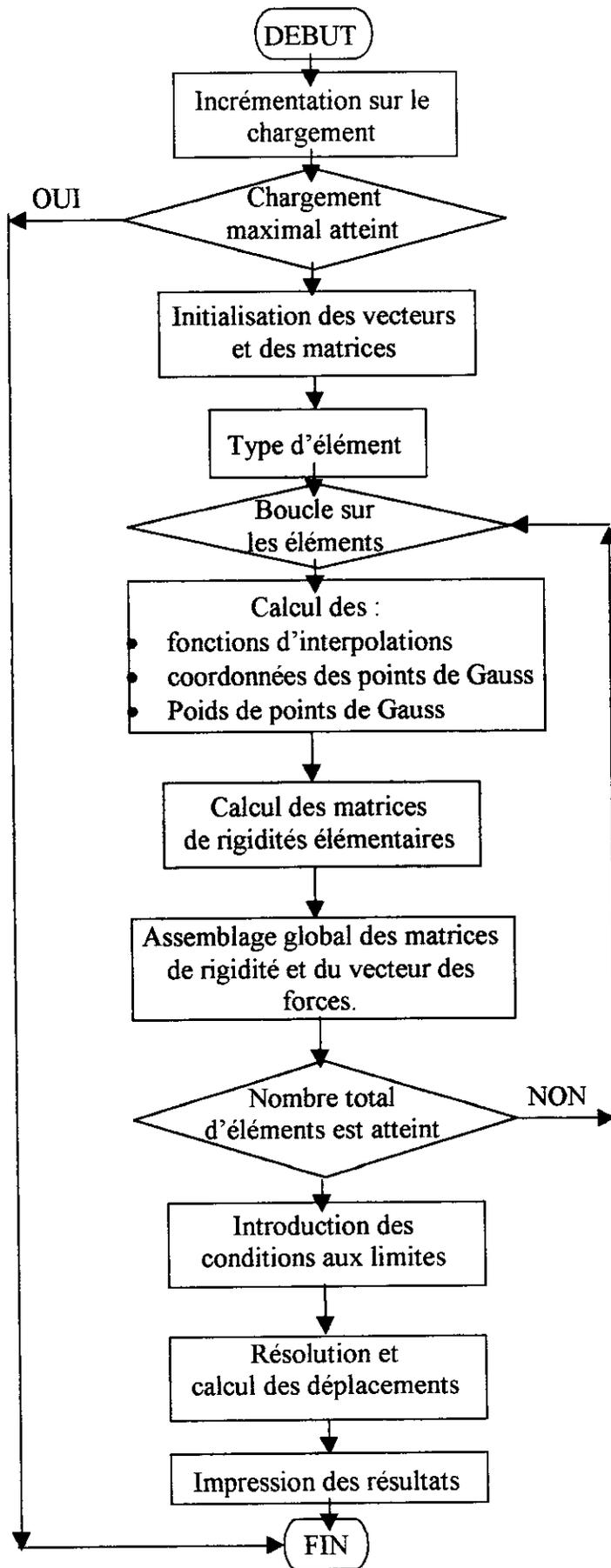
- Élément quadrilatéraux isoparamétriques à 8 nœuds ———▶ indice: 8
- Éléments triangulaires isoparamétriques à 6 nœuds ———▶ indice: 6
- Élément quadrilatéraux isoparamétriques à 6 nœuds ———▶ indice: 5 (de contact)

L'organigramme général de calcul, qui explique le fonctionnement de BLLINR est représenté dans **Organigramme 3**.

### V.1.6 BLSTOP :

Cette subroutine ordonne au programme l'arrêt du processus de calcul.

*Nous n'avons présenté que les subroutines les plus importantes, d'autres subroutines ont été utilisées dans le logiciel CONTACT mais qui ne font objet d'aucune particularité, et qui relèvent des nécessités de programmation des éléments finis.*



Organigramme 3 : Fonctionnement de BLLINR

## **V.2 Particularité du calcul effectué sur les éléments de contact :**

La particularité des éléments de contact, se résume au fait que ces éléments ne sont pas pris en considération dans leur totalité du début jusqu'à la fin du calcul.

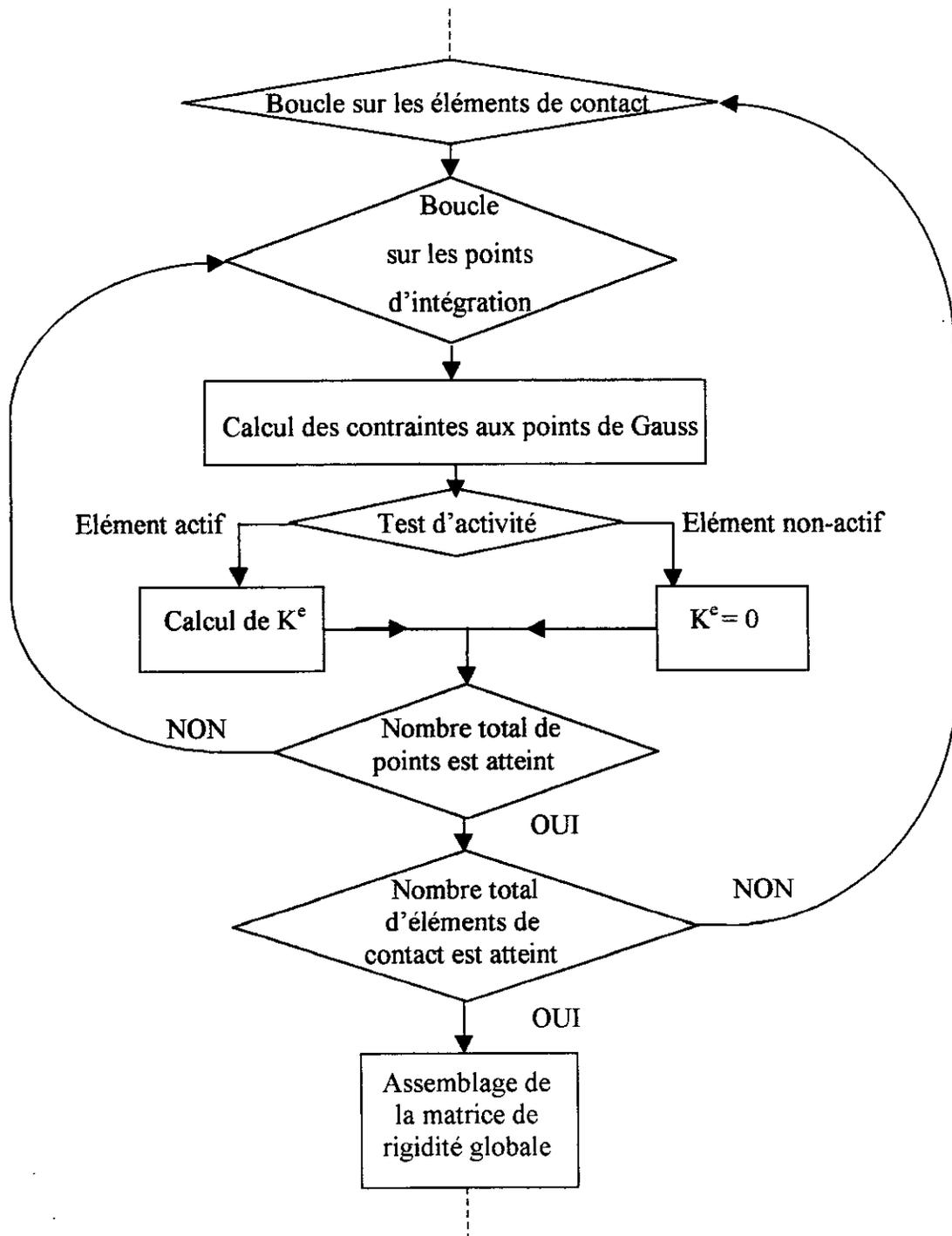
Cette prise en compte est **conditionnée** par un **critère d'activité** testé à chaque itération de chargement. En d'autres termes, le programme commence dans sa première itération par un nombre initial d'éléments de contact, qui suppose que tous les éléments sont actifs, mais pour être plus précis, cette distinction se fait au niveau **des points d'intégration**. L'élément devient inactif dans le cas où tous les points d'intégration se révéleraient inactifs. Par ailleurs l'élément peut être **partiellement actif** ce qui est un cas intermédiaire assez fréquent.

Ensuite, le critère d'activité va conditionner d'une manière directe le calcul de la matrice de rigidité élémentaire au point d'intégration considéré. *Un point d'intégration inactif → contribution nulle en ce point dans la formation de la matrice de rigidité élémentaire et donc globale.*

Les critères d'activité qu'on a adoptés sont basés sur le test de la résistance au glissement, élaboré selon la loi de **frottement de Coulomb** et celui de la résistance à la traction (*Voir paragraphe IV.3.2*)

Ce test ne peut se faire que dans le cas où les contraintes seraient préalablement connues. Les contraintes à leur tour ne peuvent être calculées qu'à partir d'un état de déformation particulier. Donc nous nous trouvons contraints à calculer dès que possible les contraintes aux points de gauss, d'où, le critère d'activité ne peut fonctionner qu'à partir de la **deuxième itération**. Mais avant cela tous les éléments sont supposés actifs et le test est **ignoré**.

L'algorithme suivant explique la particularité de calcul pour l'élément de contact.



**Organigramme 4 :** Introduction du test d'activité Pour les éléments de contact.

### **V.3 Complément visuel «VISUEL» :**

Les résultats obtenus dans les fichiers de résultats sont d'une taille très grande, surtout lorsqu'on demande au programme d'imprimer les valeurs des contraintes nodales et aux points de Gauss. Le dépouillement manuel de ces résultats est fort laborieux, et nous rend contraint à suivre l'évolution de quelques points du maillage seulement.

Afin de résoudre ce problème, et pour tenir compte des recommandations citées dans les anciennes thèses, nous avons ajouté un complément logistique graphique qu'on a appelé **VISUEL** écrit en BASIC.

Le programme **VISUEL** lit d'une manière automatique la description de l'état initial du maillage à partir du fichier de données, avant déformation. En copiant les déplacements et les connectivités désirées dans un fichier de visualisation moyennant certains arrangements. Le programme dessine en différentes couleurs le maillage avant et après déformation.

Quelques affichages générés par le programme **VISUEL** sont inclus dans la partie **APPLICATIONS**.

# CHAPTER IV

# APPLICATIONS

---

## Introduction :

Nous arrivons sans doute, au stade final de ce travail. Dans cette étape nous allons exploiter le logiciel CONTACT pour simuler le comportement du sol.

Afin que notre étude soit bénéfique, nous lancerons une étude **paramétrique**, où nous ferons changer les paramètres les plus influençants pour un tel type de problème dans le but de suivre le comportement complexe du sol.

Nous avons choisi comme application, l'étude d'une semelle filante posée sur le sol.

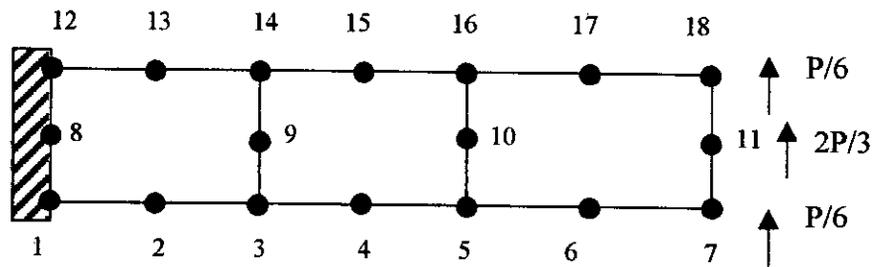
Nous avons traité :

- Cas de la charge excentrée inclinée
- Cas de la charge verticale excentrée.
- Cas de la charge verticale centrée.
- Comparaison avec l'approche classique  $B' = B - 2e$
- Comparaison des bulbes de Boussinesq.
- Etude de l'influence du rapport des modules d'élasticité sol-fondation
- Etude de l'influence de la cohésion du sol.
- Etude de l'influence de l'angle de frottement interne.
- Etude de l'influence de l'épaisseur de la semelle.
- Etude de l'influence de l'épaisseur de l'élément de contact.

**VI.1 VALIDATION DU LOGICIEL:**

Avant de passer aux applications, il est nécessaire de valider notre programme dans le domaine linéaire pour pouvoir l'exploiter dans le domaine non linéaire. Ceci, en comparant les résultats expérimentaux avec ceux de la théorie.

L'application que nous avons considéré, est celle d'une poutre cantilever d'élancement  $L / B = 100$ , encastree à une extrémité et soumise à une charge distribuée uniformément suivant y à l'autre extrémité ( de résultante P ).



**Fig. VI.1 poutre cantilever**

$E = 10^7 \quad \nu = 0,3 \quad P = 10^4$

Le déplacement V à l'extrémité est, selon la théorie des poutres :

$$V = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{6PL}{5GA} = 4 + 0,03 = 4,03$$

**Résultats obtenus :**

Le programme à donné les déplacements suivants :

	X	Y	Déplacement / X	Déplacement / Y
Nœud 1	0,00	0,00	0,00	0,00
Nœud 2	16,67	0,00	0,078	0,1641
Nœud 3	33,33	0,00	0,149	0,563
Nœud 4	50,00	0,00	0,1923	1,147
Nœud 5	66,67	0,00	0,228	1,866
Nœud 6	83,33	0,00	0,247	2,676
Nœud 7	<b>100</b>	<b>0,00</b>	<b>0,257</b>	<b>3,534</b>
Nœud 8	0,00	5,00	0,00	0,00
Nœud 9	33,33	5,00	-0,0047	0,5509
Nœud 10	66,67	5,00	-0,003434	1,864
Nœud 11	<b>100,00</b>	<b>5,00</b>	<b>-0,0038</b>	<b>3,534</b>
Nœud 12	0,00	10,00	-0,017	0,01356
Nœud 13	16,67	10,00	-0,08999	0,1641
Nœud 14	33,33	10,00	-0,1542	0,563
Nœud 15	50,00	10,00	-0,1988	1,147
Nœud 16	66,67	10,00	-0,236	1,866
Nœud 17	83,33	10,00	-0,254	2,676
Nœud 18	<b>100</b>	<b>10,00</b>	<b>-0.264</b>	<b>3,534</b>

Nous remarquons que les déplacements obtenus à l'extrémité de la poutres ne sont pas très loin du déplacement calculé d'une manière théorique.

Donc nous pouvons considérer que le programme donne de bonnes valeurs pour le déplacement.

## VI.2 Description du maillage:

Le maillage utilisé comporte: 162 nœuds et 44 éléments dont 2 éléments pour la fondation et deux éléments de contact

Les conditions imposées aux limites sont :

- Déplacement nul suivant x pour toute la frontière du sol sauf la surface libre .
- Déplacement nul suivant y pour la base de l'échantillon de sol .

*Voir Fig. VI.2*

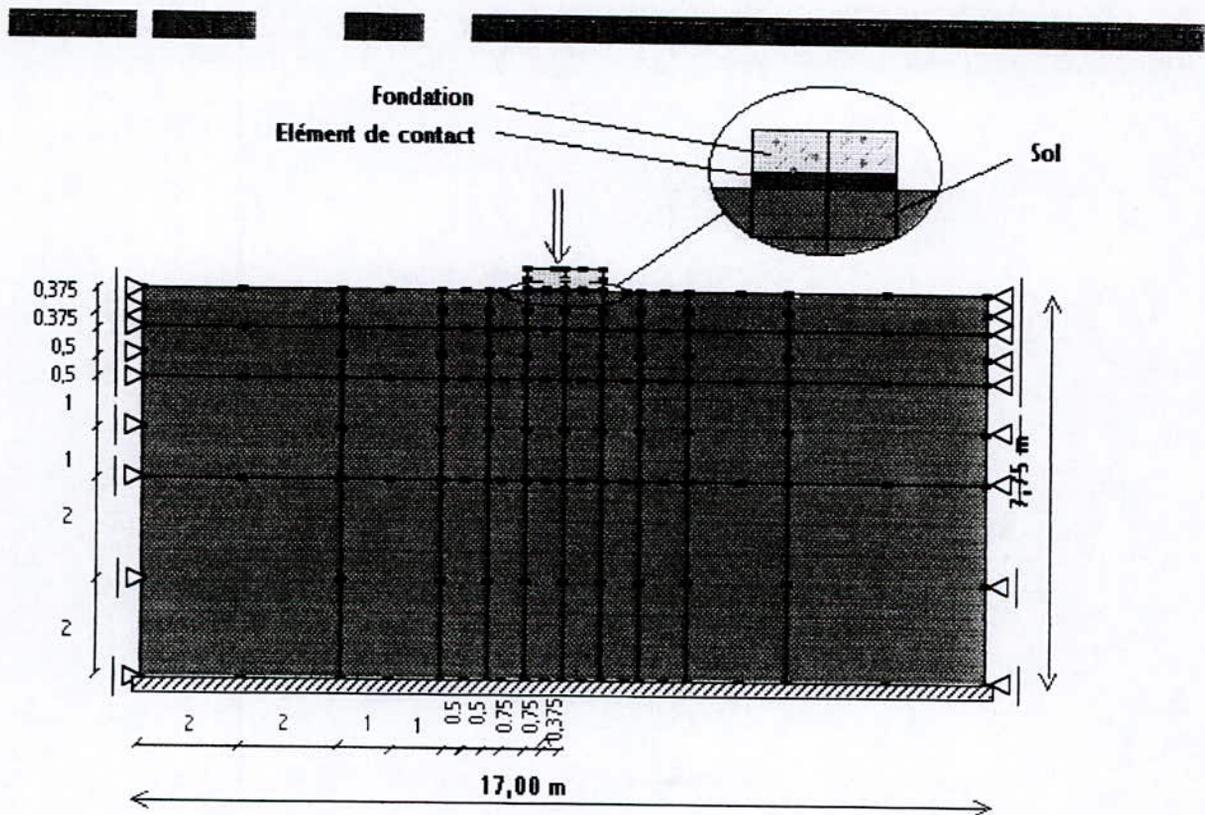


Fig. VI.2 Maillage adopté

### VI.3 Cas de la charge inclinée excentrée :

Pour déterminer la capacité portante d'une fondation soumise à une charge concentrée, on peut appliquer la formule théorique suivante :

$$P_{\text{lim}} = \frac{F_{\text{lim}}}{B} = \frac{1}{2} \gamma B \overline{N}_\gamma + q \overline{N}_q + c \overline{N}_c$$

Avec :

B : largeur de la fondation.

$P_{\text{lim}}$  : Charge maximale de calcul.

$F_{\text{lim}}$  : Charge maximale d'application.

$\gamma$  : Poids spécifique .

q : Charge due au sol dans le cas d'une fondation enterrée.

C : Cohésion.

$\overline{N}_\gamma$  : Coefficient du terme de surface corrigé.

$\overline{N}_q$  : Coefficient du terme de profondeur corrigé.

$\overline{N}_c$  : Coefficient du terme de cohésion corrigé.

Pour une semelle posée sur le sol, cette formule se réduit à :

$$P_{\text{lim}} = \frac{1}{2} \gamma B \overline{N}_\gamma + C \overline{N}_c$$

Les valeurs des coefficients  $\overline{N}_\gamma$ ,  $\overline{N}_q$  et  $\overline{N}_c$  dépendent de la valeur de l'angle de frottement interne  $\phi$ , et de l'angle  $\delta$  de l'inclinaison de la charge par rapport à la verticale ( Dans le cas d'une charge inclinée ) Voir figure VI.3

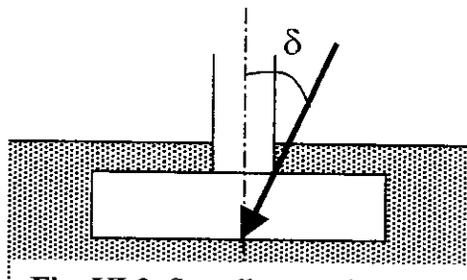


Fig. VI.3 Semelle soumise à une charge inclinée

**Application:**

Pour voir le comportement d'une semelle posée sur le sol, soumise à une charge inclinée, nous avons traité l'exemple suivant:

**Fondation :** Largeur  $B=150$  cm

Hauteur  $H=40$  cm

**Sol :**  $\phi = 25^\circ$   $C=10$  KN/m<sup>2</sup>  $\delta = 20^\circ$   $\gamma = 17$  KN/m<sup>3</sup>

Selon la théorie:  $N_\gamma = 0,41$  ,  $N_c = 8,4$

$$F_{lim} = B \cdot P_{lim} = B \cdot \left( \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma + C N_c \right)$$

**Application numérique:**

$$F_{lim} = 1,5 \left( \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 1,5 \cdot 0,41 + 10 \cdot 8,4 \right) = 13,4 \text{ t}$$

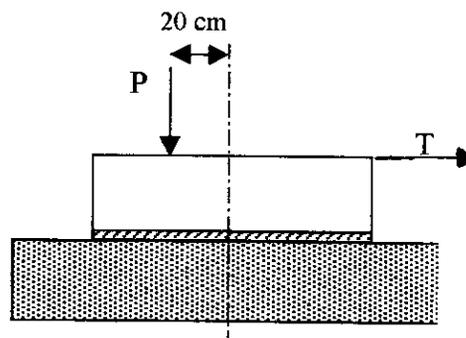
$$\vec{F}_{lim} = \left( \vec{T} + \vec{P} \right)_{lim}$$

**Application numérique :**

$$\begin{cases} T = 4,58 \text{ t} \\ P = 12,59 \text{ t} \end{cases}$$

Nous avons pris un incrément de charge égal à: 0,67t

Les critères de contact utilisés sont ceux de la résistance au frottement et de la résistance à la traction.



**Fig. VI.4** Disposition des charges

Le nombre de points inactifs obtenu pour l'élément situé du coté chargé, ainsi que l'élément situé du coté non chargé est donné dans le tableau suivant:

		Elément de contact	5%	10%	20%	30%	40%
Nombre de points inactifs	Du coté chargé	Traction	0	0	0	0	2
		Traction + Frottement	0	0	0	0	9
	Du coté non chargé	Traction	0	0	0	0	3
		Traction + Frottement	0	0	0	0	3

Les déplacements constatés pour 40% du chargement maximal sont représentés dans la figure VI.5

■

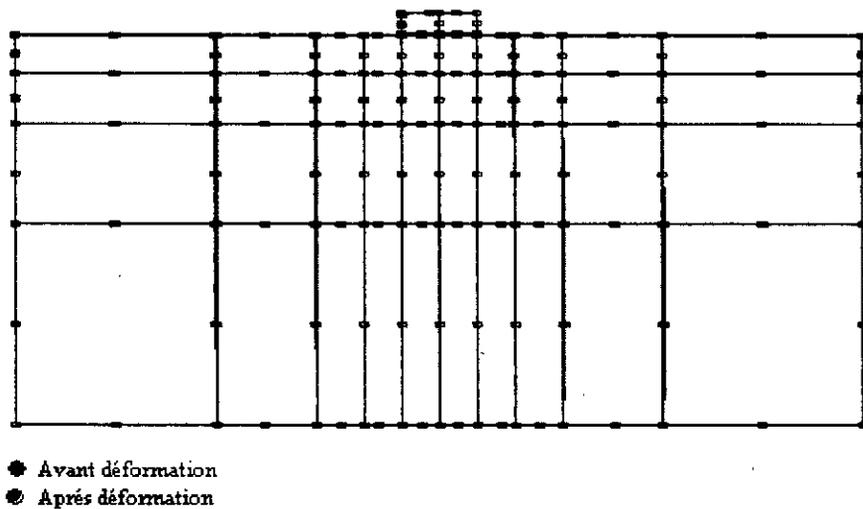


Fig. VI.5 Déplacements constatés à 40% du  $F_{lim}$

L'allure des bulbes de Boussineq pour le dernier état pour lequel le maillage est arrivé est aussi représenté ci-dessous. (Voir Fig. VI.6)

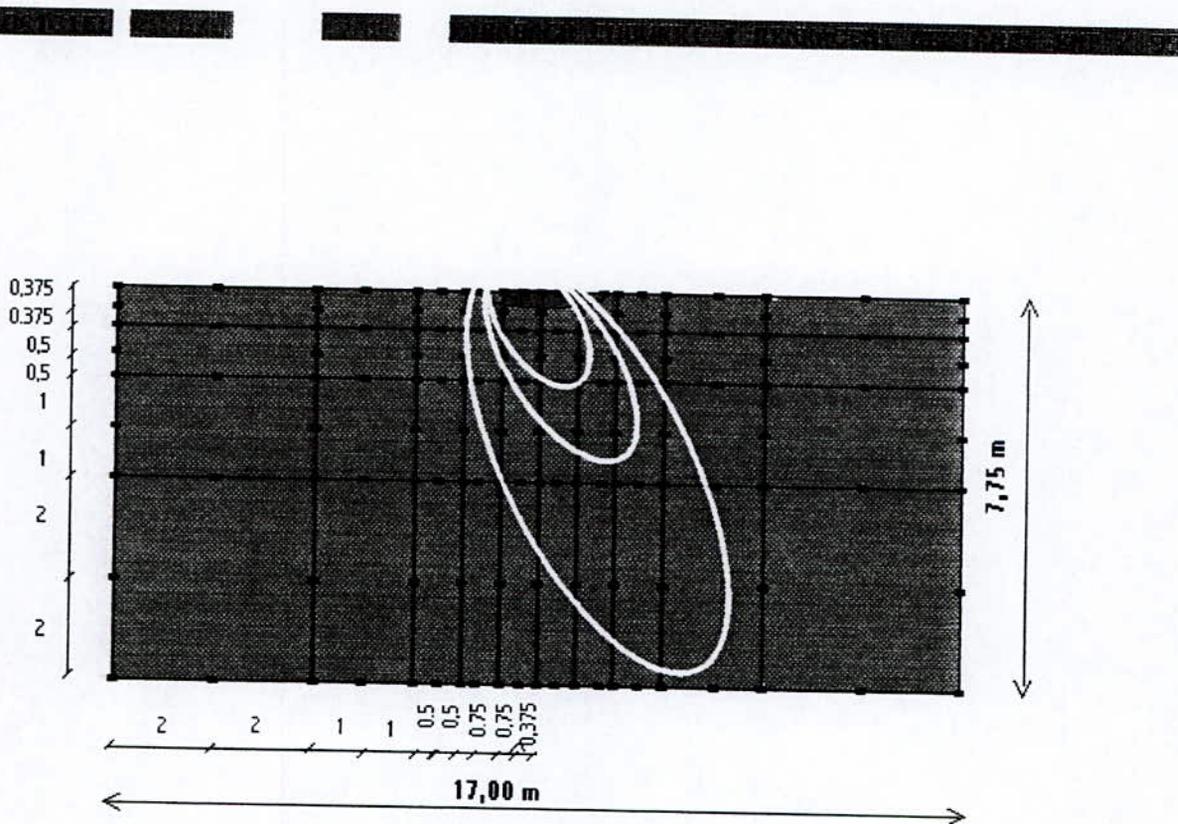


Fig. VI.6 Allure des bulbes isocontraintes

### **Résultats:**

Le début du décollement correspond à 40% de la charge limite soit : 5,36 tonnes

A 50% de la charge limite la rupture est complète pour ces éléments de contacts.

Pour un coefficient de sécurité usuel de 3 (pour un pourcentage de 33 %) on constate qu'il n'y a pas de décollement. Mais qu'on est proche du décollement.

On remarque que les bulbes isocontraintes se décalent par rapport au point d'application de la charge et s'inclinent en suivant le chargement exercé.

## VI.4 Comparaison avec l'approche théorique $B' = B - 2e$

### Introduction :

Selon la théorie, lors de l'étude de la charge limite d'une semelle horizontale de largeur  $B$  supportant une charge verticale excentrée avec une excentricité égale à  $e$ , nous pouvons considérer qu'une semelle de largeur fictive  $B' = B - 2e$ , soumise à la même charge centrée est analogue à la première. Figure VI.7

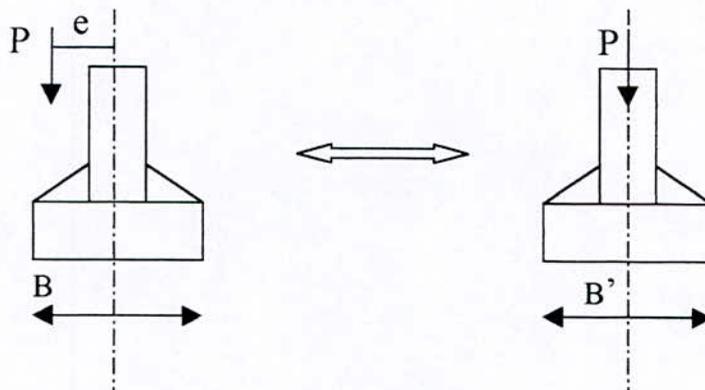


Fig. VI.7

Afin de vérifier l'applicabilité de cette approche avec une simulation numérique, dans le cas d'une charge excentrée hors noyau central et à l'intérieur de celui-ci, nous avons préparé 3 fichiers de données :

- 1- Une fondation ( $F_1$ ) soumise à une charge centrée

$$B' = 75 \text{ cm}$$

- 2- La fondation ( $F_2$ ) soumise à une charge excentrée qui se trouve hors noyau central.

$$B = 150 \text{ cm} \quad e = 37,5 \text{ cm}$$

**Hauteur de la fondation :**  $H = 40 \text{ cm}$

**Sol :**  $C = 10 \text{ KN/m}^2$      $\phi = 25^\circ$      $E = 30 \text{ MPa}$      $\gamma = 17 \text{ KN/m}^3$

### Calcul de la capacité portante de la semelle :

$$F_{\text{lim}} = P_{\text{lim}} \cdot B = B \cdot (1/2 \gamma B N_\gamma + C N_c)$$

AN :

$$F_{\text{lim}} = 0,75 \cdot (1/2 \cdot 17 \cdot 0,75 \cdot 10,4 + 10 \cdot 20,7) = 204,975 \text{ KN} = 20,4975 \text{ t}$$

L'incrément de charge utilisé est égal à : 1,025 t avec impression des résultats chaque 5,12 t

Nous avons prélevé les valeurs des contraintes suivant X et suivant Y pour 5 points repères.

Voir fig. VI.8

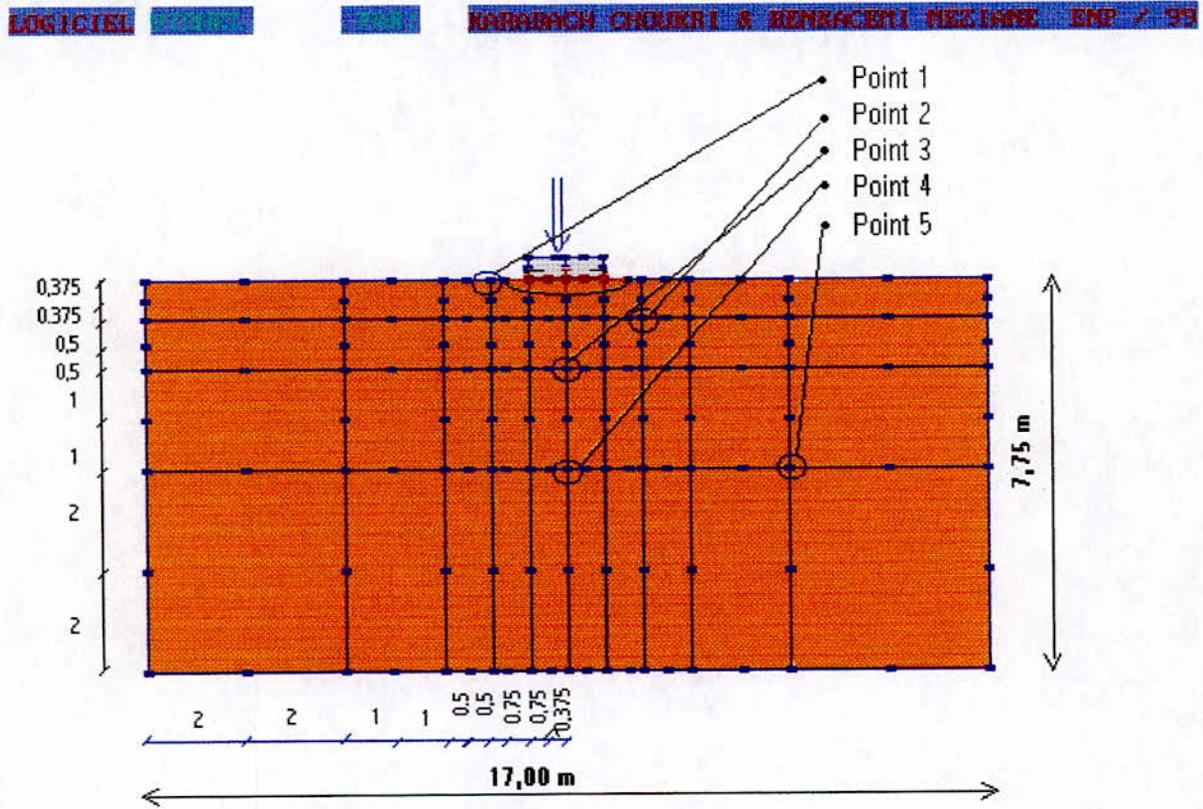


Fig. VI.8

**Résultats obtenus :**

	Fondation 2		Fondation 1		Comparaison	
	$\sigma_{x2}$ KN/cm <sup>2</sup>	$\sigma_{y2}$ KN/cm <sup>2</sup>	$\sigma_{x1}$ KN/cm <sup>2</sup>	$\sigma_{y1}$ KN/cm <sup>2</sup>	$\sigma_{x1} - \sigma_{x2}$	$\sigma_{y1} - \sigma_{y2}$
Point1	0,056778	-0,088879	0,01928	0,038255	-0,037498	0,127134
Point2	-0,0289	0,48	-0,0473	-0,0004635	-0,018396	-0,4804635
Point3	0,091889	-0,43039	0,012669	-0,20121	-0,07922	0,22918
Point4	0,0386	-0,23	0,0075	-0,093445	-0,0311	0,136555
Point5	-0,0698	-0,03793	-0,02775	-0,017623	0,042046	0,020307

L'allure des bulbes d'isocontraintes pour les fondations F1 et F2 sont représentées dans les figures Fig.VI.9 et VI.10 respectivement.

LOGICIEL KARABACH CHOUKRI & BENKACENT HESLANE ENP / 99

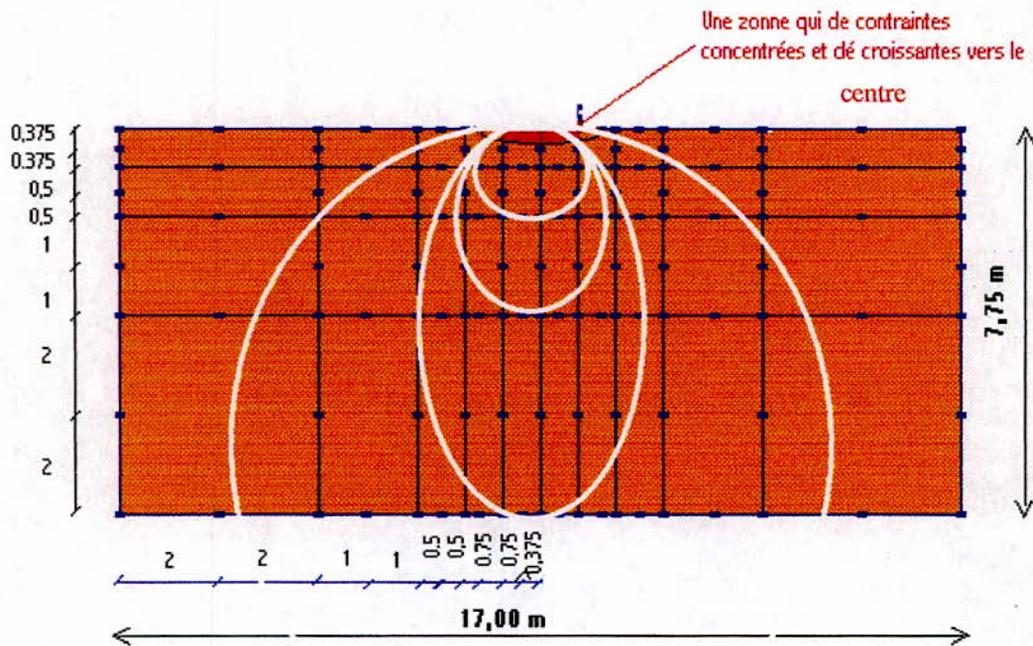


Fig.VI.9 Courbes d'isocontraintes

LOGICIEL KARABACH CHEUKRI & BENRACENT MEZIANE SMP / 99

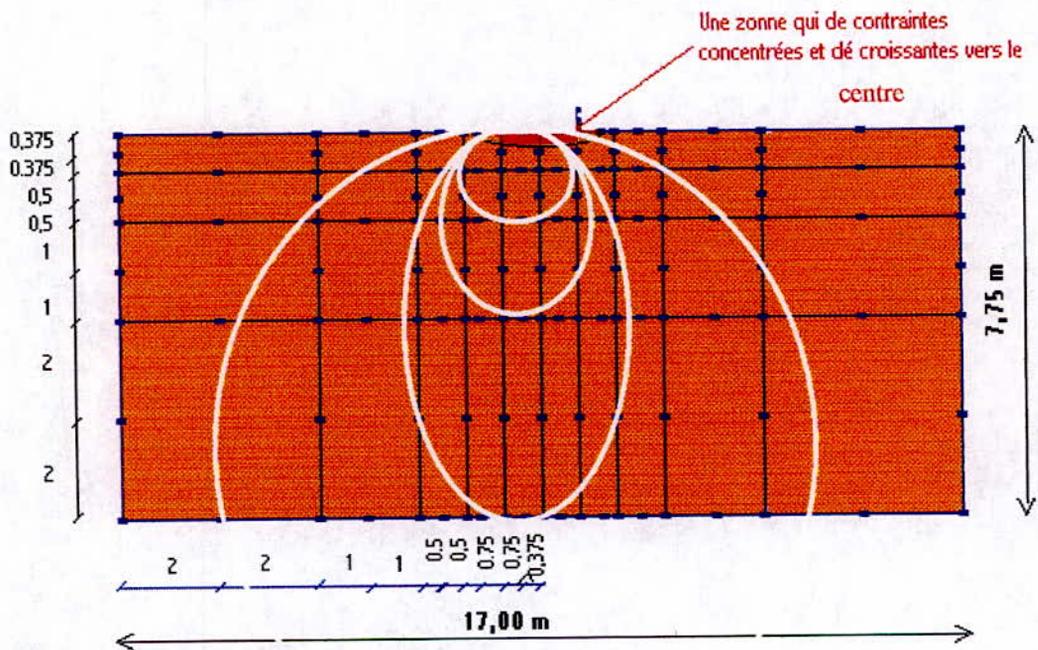


Fig.VI.10 Courbes d'isocontraintes

Pour ce qui est des états d'activités pour la charge excentrée, ils sont représentés dans le tableau suivant:

Elément de contact		5%	10%	20%	30%	40%	
Nombre de points inactifs	Du coté chargé	Traction	0	0	0	0	0
		Traction + Frottement	0	0	3	9	9
	Du coté non chargé	Traction	0	0	0	3	0
		Traction + Frottement	0	0	0	6	9

### Résultats:

- **Charge verticale excentrée:**

Dans ce cas la capacité portante est supérieure à celle de la charge inclinée excentrée soit 50,94 t

Les début du décollement correspond à 20% de la capacité portante soit 10,20t , environ le double du cas de la charge excentrée inclinée .

Pour un coefficient de sécurité usuel, on constate qu'on est proches du décollement, contrairement au cas de la charge excentrée inclinée.

Ceci provient sans doute du fait que dans ce cas la capacité portante est beaucoup plus élevée.

Les bulbes d'isocontraintes se décallent légèrement vers le coté de la charge.

La rupture complète des éléments de contacts se produit à 45% de la charge limite soit = 23 t

- **Approche théorique  $B'=B-2^e$ :**

La rupture des éléments de contact se produit à 45 % de la capacité portante soit : 9,22 t . Ce qui correspond à peu près à 10 % près à la valeur obtenue pour la charge excentrée.

On constate qu'il y a généralement une différence est que cette différence est d'autant plus petite que l'on s'éloigne de la fondation.

### VI.5 Influence du rapport $E_{\text{sol}} / E_{\text{fondation}}$ :

Parmi les avantages les plus intéressants qu'apportent les éléments de contact au problème étudié, est sans doute, le fait de diminuer le **rapport d'impédances** entre les deux sous-systèmes en contact. La différence entre la rigidité de la fondation et celle du sol est importante lorsqu'il s'agit d'une étude qui repose sur l'évaluation des déplacements.

Dans ce but, nous avons varié le rapport  $E_{\text{sol}} / E_{\text{fondation}}$  pour pouvoir suivre le développement du comportement du système étudié.

Toujours pour le même maillage, et la même fondation ( $B=150$  cm,  $H=40$  cm), et avec une charge excentrée hors du noyau central, nous avons préparé le fichiers de données dont les caractéristiques sont :

Sol rigide	Sol non rigide
$E_{\text{sol}}=30$ Mpa	$E_{\text{sol}}=5$ Mpa
$C=10$ KN /m <sup>2</sup>	$C=10$ KN /m <sup>2</sup>
$\varphi=25^\circ$	$\varphi=25^\circ$
$\gamma =17$ KN /m <sup>3</sup>	$\gamma =17$ KN /m <sup>3</sup>
$E_{\text{sol}}/E_{\text{fondation}}=10^{-3}$	$E_{\text{sol}}/E_{\text{fondation}}=1,66.10^{-4}$

La fondation a pour module d'élasticité :  $E_{\text{fondation}} = 3 \times 10^7$  KN /m<sup>2</sup>

Pour le chargement maximal qui a atteint 50,94 tonnes. Les déplacements sont visualisés sur : la figure VI.5.1 pour le sol rigide & la figure VI.5.2 pour le sol non rigide.

Tandis que pour les états d'activités, les nombres de points inactifs apparus pour chaque chargement sont donnés par le tableau suivant:

Elément de contact		10%	20%	30%	40%
Sol rigide	Du coté chargé	0	3	9	9
	Du coté non chargé	0	0	6	9
Sol non rigide	Du coté chargé	0	0	9	9
	Du coté non chargé	0	0	1	9

Les déplacements constatés pour le cas du sol moins rigide sont représentés dans la figure VI.11

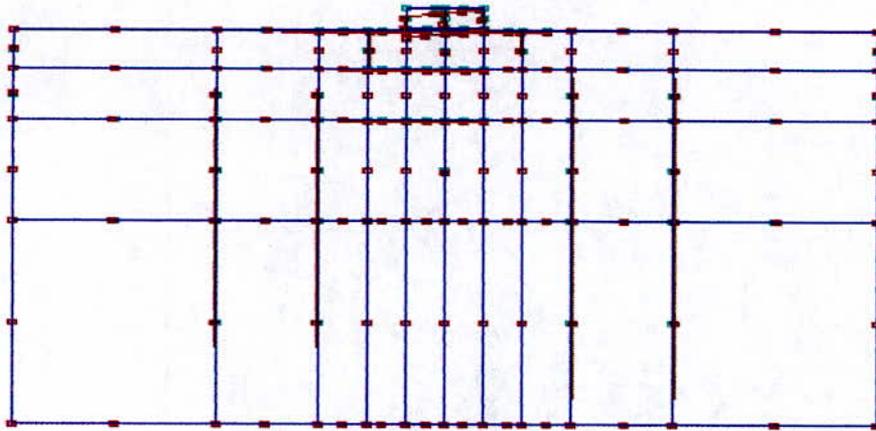


Fig.VI.11 Allure des déplacements

### Résultats:

La rupture, comme pour le cas précédent provient lorsque l'on atteint 40 % de la capacité portante soit avant la valeur obtenue (45 %) pour un sol plus rigide

De plus le début du décollement se produit lorsque la charge atteint 30% soit 15,3 t de la capacité portante soit plus tard que le cas où le sol est rigide (20%)

Ce qui prouve que pour des éléments de contact identiques, ceux-ci se sont plus fragiles lorsque ce sol est plus déformable (moins rigide)

Ceci provient sans doute du fait que la déformabilité plus grande du sol tend à maintenir le contact le sol est la fondation.

### VI.6 Influence de paramètres C et $\phi$ :

La cohésion  $c$  et l'angle de frottement interne sont deux paramètres très importants, puisque la loi de frottement de Coulomb que nous avons adopté s'écrit en fonction d'eux.

Pour cela il faut étudier le comportement du sol sous la variation de ces deux paramètres.

Trois applications ont été faites, sur un maillage semblable à celui utilisé précédemment, pour des valeurs de  $\phi$  et de  $c$  différentes :

**Fondation :**  $H=40$  cm       $B=1,5$  m

Les données ainsi que les résultats obtenus pour le nombre de points inactifs dans les éléments de contact situés du côté de la charge et de l'autre côté sont présentés dans le tableau ci-dessous. Les valeurs obtenues de la capacité portante de la semelle dans chaque cas de figure sont données aussi dans le même tableau :

SOL :	Capacité portante(t)	Elément de CONTACT	5%	10	20%	30%	40%
$C = 0$ KN/m <sup>2</sup> $\phi = 25^\circ$	19,89	Coté chargé	0	9	-	-	-
		Coté non chargé	0	9	-	-	-
$C = 0$ KN/m <sup>2</sup> $\phi = 35^\circ$	91,8	Coté chargé	0	9	-	-	-
		Coté non chargé	0	9	-	-	-
$C = 10$ KN/m <sup>2</sup> $\phi = 25^\circ$	50,94	Coté chargé	0	0	3	9	9
		Coté non chargé	0	0	0	6	9

**Résultats:**

La rupture , comme pour le cas précédent provient lorsque l'on atteint 40 % de la capacité portante soit avant la valeur obtenue (45 %) pour un sol plus rigide

De plus le début du décollement se produit lorsque la charge atteint 30% soit 15,3 t de la capacité portante soit plus tard que le cas où le sol est rigide (20%)

Ce qui prouve que pour des éléments de contact identiques, ceux-ci se sont plus fragiles lorsque ce sol est plus déformable (moins rigide)

Ceci provient sans doute du fait que la déformabilité plus grande du sol tend à maintenir le contact le sol est la fondation.

**Influence de la cohésion  $c$ :**

Pour un sol purement cohérent la capacité portante à chute de 20 t.

De plus la rupture pour l'élément de contact se produit pour une charge de 10 % de la capacité portante .

Pour un coefficient de sécurité usuel de 3 on n'a plus de contact sol-fondation.

Le décollement a lieu à environ 7 % de la charge limite.

Ceci montre que la cohésion joue un rôle prépondérant quand à l'activité des éléments de contact.

Son absence engendre une perte importante de contact sol – fondation même pour des charges inférieure à la charge admissible usuelle.

Charge admissible = capacité portante / coefficient de sécurité

Ceci est principalement du au fait que plus la cohésion diminue plus le critère de traction l'emporte sur le critère de Mohr-Coulomb

**Influence de  $\varphi$  :**

Pour un sol pulvérulent, les résultats obtenus montre que  $\varphi$  ne joue pas un rôle déterminant quand au comportement de l'élément de contact.

Par cotre pour un sol présentant une certaine cohésion,  $\varphi$  joue un rôle non négligeable et la surface de contact sol fondation augment légèrement lorsque  $\varphi$  augmente.

Comme précédemment, ceci est du au fait que pour un sol présentant une cohésion , le critère de Mohr Coulomb l'emporte su le critère de traction contrairement au sol pulvérulent.

### VI.7 Influence de la rigidité de la fondation:

Le cas que nous avons traité est celui d'une semelle flexible soumise à une charge excentrée hors du noyau central, dans le comparer avec celui de la semelle à épaisseur 40cm.

#### Données:

Epaisseur de la fondation: 10 cm

Epaisseur de l'élément de contact: 4 cm

$\varphi = 25^\circ$

$C = 10 \text{ KN/m}^2$

$E_{\text{fondation}} = 3 \cdot 10^7 \text{ KN/m}^2$

Charge maximale = 50,94 t

Nous avons obtenu les résultats suivants:

		Elément de contact		5%	10%	20%	30%	40%
<b>Fondation avec h=40cm</b>	Du coté chargé	Traction		0	0	0	0	0
		Total		0	0	3	9	9
	Du coté non chargé	Traction		0	0	0	3	0
		Total		0	0	0	6	9
<b>Fondation avec h=10cm</b>	Du coté chargé	Traction		0	0	0	3	0
		Total		0	0	1	9	9
	Du coté non chargé	Traction		0	0	0	0	3
		Total		0	0	0	2	9

**Résultats :**

Le début du décollement a lieu pour une charge de 25 % soit pour une charge supérieure au cas de la fondation rigide.

De plus la rupture des éléments de contacts est obtenue pour 40 % de la capacité portante soit inférieure au cas de la fondation rigide.

Ce qui prouve que lorsque la flexibilité de la fondation augmente :

- Le contact sol – fondation se maintient plus longtemps
- L'élément de contact est plus fragile.

**VI.8 Influence de l'épaisseur de l'élément de contact "e":**

Pour cette application, nous avons pour but d'étudier l'influence de l'épaisseur de l'élément de contact sur le comportement de la zone de contact.

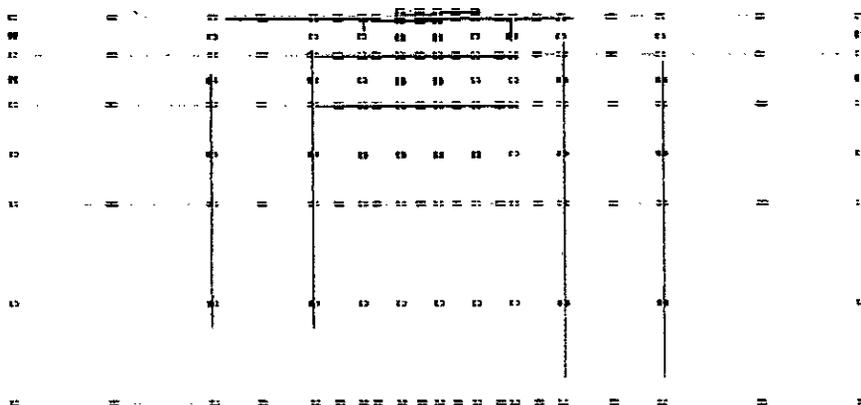
Pour cela nous avons choisi pour l'épaisseur de l'élément de contact deux valeurs distinctes: e=4 cm et e=1cm.

**Données:**  $\phi = 25^\circ$        $c = 10 \text{ KN/m}^2$        $E_{\text{sol}} = 30 \text{ MPa}$

Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau suivant:

Épaisseur e	Elément de contact		10 %	20 %	30 %	40 %	50%
4 cm	Du coté chargé	Traction	0	0	0	0	0
		Total	0	0	3	9	9
	Du coté non chargé	Traction	0	0	0	3	0
		Total	0	0	0	6	9
1 cm	Du coté chargé	Traction	0	0	0	0	3
		Total	0	0	0	0	9
	Du coté non chargé	Traction	0	0	0	0	3
		Total	0	0	0	0	6

La figure VI.12 montre l'état de déformations:



**Fig.12** Allure des déformations

**Résultats:**

Pour une épaisseur de l'élément de contact plus petite nous avons un début de décollement pour une charge de 50 % de la capacité portante soit pour une valeur supérieure à celle de l'élément de contact plus grand ( $e=4\text{cm}$ )

La capacité portante soit pour une valeur plus grande que pour un élément de contact plus grand.

Ces deux constatations sont sûrement dues au fait que la rigidité de l'élément de contact diminue avec son épaisseur.

CONCLUSION

## CONCLUSION

---

Le travail que nous avons effectué, à travers ces applications, nous a permis de mettre en évidence le comportement fortement non linéaire des éléments de contacts.

Le fait d'introduire simultanément deux types de critères de contact, a permis de mettre en évidence leurs rôles. Il a été constaté que le critère de traction l'emportait pour les sols pulvérulents (sans cohésion), la présence d'une certaine cohésion dans le sol diminuait sa prépondérance par rapport au critère de Mohr-Coulomb et ce d'autant plus que la cohésion est grande.

Tous les paramètres considérés ont montré une forte influence sur la non linéarité du comportement des éléments de contact sauf l'angle de frottement interne pour les sols cohérents, seul pour lequel le critère de traction est prédominant.

Dans tous les cas considérés, le décollement de la fondation a été constaté pour une valeur généralement inférieure à la charge admissible de la fondation ( pour un coefficient de sécurité de 3 ).

L'inclinaison de la charge augmente l'activité des éléments de contact dans la zone sécuritaire (en terme de pourcentage par rapport à la capacité portante) .

La déformabilité du sol influe fortement sur la zone de contact entre le sol et la fondation. Pour une charge donnée où on constate des décollements, cette zone est d'autant plus grande que le sol est rigide. Il en est de même lorsque la rigidité de la semelle diminue, le contact sol-fondation se maintient plus longtemps. Dans ces deux cas, l'élément de contact montre une fragilité d'autant plus grande que la déformabilité d'un des matériaux est d'autant plus grande.

La présence d'une certaine cohésion dans les sols montre que cette surface de contact est d'autant plus importante que cette cohésion est grande (pour une charge pour laquelle il y

a décollement). De même pour ces mêmes sols seulement, plus l'angle de frottement est grand plus cette surface est grande.

Il apparaît au vue de toute ces constatations que les paramètres attribuées au système sol-structure jouent un rôle déterminant sur le comportement de l'interface sol structure modélisée ici par des éléments de contact. Le choix même des caractéristiques de l'élément de contact est un choix judicieux dépendant fortement de l'état de surface de la fondation et du sol sous la fondation, l'épaisseur à donner à cet élément est généralement arbitraire, le plus souvent basée sur le bon sens. Mais il n'en demeure pas moins, comme nous l'avons montré, que sa valeur influe sur les résultats.

Nous avons travaillé sur des sols secs. La présence d'eau dans le sol influençant fortement ces paramètres, il serait intéressant de voir comment se comporte ces éléments en présence d'eau. Ceci peut faire l'objet d'une suite à donner à ce travail.

L'hypothèse de comportement élastique linéaire, bien que couramment utilisée peut être remplacée par une hypothèse plus générale de comportement non élastique non linéaire, ceci peut faire l'objet d'une autre suite à donner à ce travail.

L'ancrage de la fondation augmente généralement la capacité portante de celle-ci, et il serait aussi intéressant de voir comment se comportent alors les éléments de contact.

Il serait aussi intéressant de voir comment se comportent ces éléments sous une sollicitation non plus statique mais dynamique.

# BIBLIOGRAPHIE

- |      |  |                            |                 |
|------|--|----------------------------|-----------------|
| [1]  | A computer method for stability analysis of caverns in jointed rock                                  | BELYTSCHKO .T              | 1984            |
| [2]  | A finite element method for contact problems related to fracture mechanics                           | YAGAWA .G                  | 1984            |
| [3]  | A model for the mechanics of jointed rock.   | GOODMAN .R.E               | 1968            |
| [4]  | A simple contact-friction interface element with applications to buried culverts .                   | KATONA .G                  | 1983            |
| [5]  | A solution for planar and axisymmetric contact problems.   | BATHE .K.J                 | 1985            |
| [6]  | An iterative procedure for finite element stress analysis of frictional contact problems             | RAHMAN .M.U                | 1984            |
| [7]  | Analyse dynamique des structures par la méthode des éléments finis (Application aux barrages poids). | SENNOUN.T<br>TADJADIT.A    | PFE ENP<br>1994 |
| [8]  | Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques.          | BOUSSINESQ .J              | 1885            |
| [9]  | Boussinesq's problem for a flat – ended cylinder.  | SNEDDON .I.N               | 1946            |
| [10] | Cours pratique de mécanique des sols<br>Tome 1 & Tome 2 :  | SANGLERAT.G<br>COSTET.J    | DUNOD<br>1981   |
| [11] | Développement d'éléments et d'algorithmes dans la méthode des éléments finis.                        | BERRAH.M.K<br>BOUBENIDER.R | PFE ENP<br>1985 |
| [12] | Etude du comportement statique linéaire et non linéaire des sols par la méthode des éléments finis.  | BOUAM.<br>KHELLOU          | PFE ENP<br>1997 |
| [13] | Etude par éléments finis de quelques critères de plasticité orientée                                 | FRANK .R                   | 1980            |

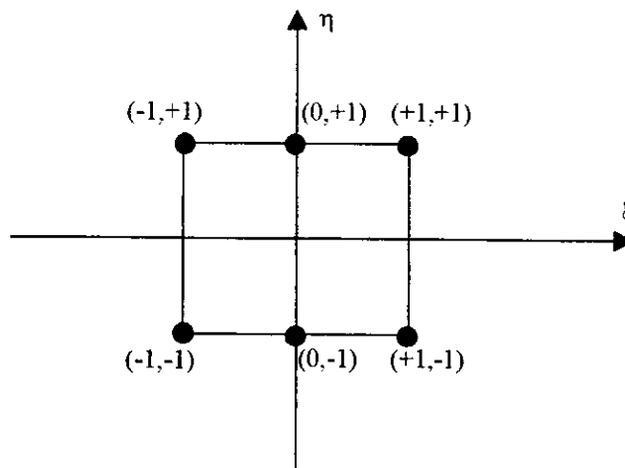
## BIBLIOGRAPHIE

- 
- |      |   |                               |                        |
|------|---|-------------------------------|------------------------|
| [14] | Finit element analysis of contact problems  | HERRMANN .L.R                 | 1978                   |
| [15] | Fondations et ouvrages en terre.  | PHILIPPONNAT.G                | EYROLLES<br>1979       |
| [16] | La méthode des éléments finis.  | ZIENKIEWICZ.O.C               | AFNOR<br>PARIS         |
| [17] | Les essais in-situ en mécanique des sols  | CASSAN.M                      | EYROLLES               |
| [18] | Manuel théorique CESAR – Fascicule TACT –<br>Résolution des problèmes de contact entre solides<br>élastiques linéaires. | RICHER.S                      | LCPC PARIS<br>1988     |
| [19] | Modélisation des structures par éléments finis<br>Volume 1 : Solides élastiques   | BATOZ. J. L<br>DHATT.G        | HERMES<br>1990         |
| [20] | On joint – interface elements and associated<br>problems of numerical ill – conditioning.                               | PANDE .G.N                    | 1979                   |
| [21] | Remblais et fondations sur sols compressibles.  | MAGNAN.G.P                    | Presse de<br>ENPC 1984 |
| [22] | Résolution par éléments finis de problèmes de<br>contact tridimensionnels avec frottement                               | NSANGOU .T                    | 1981                   |
| [23] | Stresses due to the pressure of one elastic body<br>upon another.   | THOMAS .H<br>HOERSCH .V       | 1930                   |
| [24] | The stress produced in a semi-infinite solid by<br>pressure on part of the bundary.                                     | LOVE .E.E.H                   | 1929                   |
| [25] | Theory of elasticity.   | TIMOSCHENKO.S<br>GOODIER .J.N | 1970                   |
| [26] | Thin-layer element for interfaces and joints.   | DESAI .C.S                    | 1984                   |
| [27] | Über die berührung fester elastischer körper  | HERTZ. H                      | 1882                   |
| [28] | Une présentation de la méthode des éléments<br>finis.   | DHATT.G<br>TOUZOT.G           | MALOINE<br>1984        |
| [29] | Utilisation d'éléments de contact pour le<br>traitement par éléments finis du contact avec ou<br>sans frottement        | KANG .S                       | 1979                   |
| [30] | Zur theorie der berührung fester elastischer körper   | HUBER. M. T                   | 1904                   |

# ANNALS

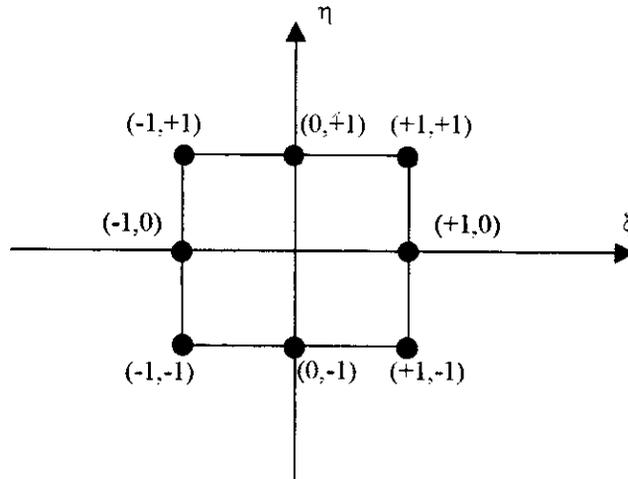
## FONCTIONS D'INTERPOLATION

### A. Élément quadrilatéral à 6 nœuds (élément de contact) :



Élément de référence

Fonctions d'interpolations	Dérivées par rapport à $\xi$	Dérivées par rapport à $\eta$
$N_1 = -\frac{1}{4} \xi (1 - \xi) (1 - \eta)$	$N_{1,\xi} = \frac{1}{4} (-1 + 2\xi) (1 - \eta)$	$N_{1,\eta} = \frac{1}{4} \xi (1 - \xi)$
$N_2 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta)$	$N_{2,\xi} = -\xi (1 - \eta)$	$N_{2,\eta} = -\frac{1}{2} (1 - \xi^2)$
$N_3 = \frac{1}{4} \xi (1 + \xi) (1 - \eta)$	$N_{3,\xi} = \frac{1}{4} (1 + 2\xi) (1 - \eta)$	$N_{3,\eta} = -\frac{1}{4} \xi (1 + \xi)$
$N_4 = \frac{1}{4} \xi (1 + \xi) (1 + \eta)$	$N_{4,\xi} = \frac{1}{4} (1 + 2\xi) (1 + \eta)$	$N_{4,\eta} = \frac{1}{4} \xi (1 + \xi)$
$N_5 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta)$	$N_{5,\xi} = -\xi (1 + \eta)$	$N_{5,\eta} = \frac{1}{2} (1 - \xi^2)$
$N_6 = -\frac{1}{4} \xi (1 - \xi) (1 + \eta)$	$N_{6,\xi} = \frac{1}{4} (-1 + 2\xi) (1 + \eta)$	$N_{6,\eta} = -\frac{1}{4} \xi (1 - \xi)$

**B. Élément quadrilatéral à 8 nœuds :**

Élément de référence

Fonctions d'interpolations	Dérivées par rapport à $\xi$	Dérivées par rapport à $\eta$
$N_1 = -1/4 (1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1)$	$N_{1,\xi} = 1/4 ((2\xi)+\eta)(1-\eta)$	$N_{1,\eta} = 1/4 (1-\xi)(\xi+(2\eta))$
$N_2 = 1/2(1-(\xi^2))(1-\eta)$	$N_{2,\xi} = -\xi(1-\eta)$	$N_{2,\eta} = -1/2(1-(\xi^2))$
$N_3 = -1/4 (1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)$	$N_{3,\xi} = 1/4 ((2\xi)-\eta)(1-\eta)$	$N_{3,\eta} = -1/4 (1+\xi)(\xi-(2\eta))$
$N_4 = 1/2(1+\xi)(1-(\eta^2))$	$N_{4,\xi} = 1/2(1-(\eta^2))$	$N_{4,\eta} = -\eta(1+\xi)$
$N_5 = -1/4 (1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)$	$N_{5,\xi} = 1/4 ((2\xi)+\eta)(1+\eta)$	$N_{5,\eta} = 1/4 (1+\xi)(\xi+(2\eta))$
$N_6 = 1/2(1-(\xi^2))(1+\eta)$	$N_{6,\xi} = -\xi(1+\eta)$	$N_{6,\eta} = 1/2(1-(\xi^2))$
$N_7 = -1/4 (1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)$	$N_{7,\xi} = 1/4 ((2\xi)-\eta)(1+\eta)$	$N_{7,\eta} = -1/4 (1-\xi)(\xi-(2\eta))$
$N_8 = 1/2(1-\xi)(1-(\eta^2))$	$N_{8,\xi} = -1/2(1-(\eta^2))$	$N_{8,\eta} = -\eta(1-\xi)$

## INTEGRATION NUMERIQUE

**Tableau 1 : Intégration numérique de Gauss à une dimension**

r	$\xi_i$	$W_i$
1	0	2
2	$\pm 0,577350269189626$	1
3	0	0,888888888888889
	$\pm 0,774596669241483$	0,555555555555556
4	$\pm 0,339981043584856$	0,652145154862546
	$\pm 0,861136311594053$	0,347854845137454

**Tableau 2 : Intégration numérique de Newton-Cotes à une dimension**

r	$\xi_i$	$W_i$
2	$\pm 1$	1
3	0	4/3
	$\pm 1$	1/3
4	$\pm 1/3$	3/4
	$\pm 1$	1/4

**Tableau 3 : Intégration numérique de Gauss-Radau**

Ordre d'intégration en $\xi_i$ ou $\eta_i$	Nombre de points $r \times r$	RI	WI	SJ	AJ
1	1×1	0,5	1,0	0,3333333333	0,75
3	2×2	0,2113248654	0,5	0,1550510257	0,3764030627
		0,7886751346	0,5	0,6449489743	0,5124858262
5	3×3	0,11270116654	0,2777777778	0,0885879595	0,2204622112
		0,5	0,4444444444	0,4094668644	0,3881934688
		0,8872983346	0,2777777778	0,7867594618	0,3288443200
7	4×4	0,0694318442	0,1739274226	0,0571041961	0,1437135608
		0,3300094782	0,3260725774	0,2768430136	0,2813560151
		0,6699905218	0,3260725774	0,5835904324	0,3118265230
		0,9305681558	0,1739274226	0,8602401357	0,2231039011
9	5×5	0,0469100770	0,1184634425	0,0398098571	0,1007941926
		0,2307653449	0,2393143353	0,1980134179	0,2084506672
		0,5	0,2844444444	0,4379748102	0,2604633916
		0,6792346551	0,2393143353	0,6954642734	0,2426935942
		0,9530899230	0,1184634425	0,9014649142	0,1598203766

Les valeurs des contraintes pour le cas de la charge centrée en KN/cm<sup>2</sup> sont données

ci-dessous :

-----					
CONTRAINTES AUX NOEUDS					
-----					
ELEM	X	Y	SIG-X	SIG-Y	SIG-XY
	SIG1	SIG3			
1	-.85000E+03	.00000E+00	-.53452E-02	-.12472E-01	.00000E+00
	-.53452E-02	-.12472E-01			
1	-.65000E+03	.00000E+00	-.75009E-02	-.17502E-01	-.68140E-02
	-.40495E-02	-.20954E-01			
1	-.45000E+03	.00000E+00	-.15474E-01	-.36106E-01	-.12923E-01
	-.92548E-02	-.42325E-01			
1	-.45000E+03	.20000E+03	-.24769E-01	-.30988E-01	-.13274E-01
	-.14245E-01	-.41512E-01			
1	-.45000E+03	.40000E+03	-.21919E-01	-.20665E-01	-.13698E-01
	-.75794E-02	-.35005E-01			
1	-.65000E+03	.40000E+03	-.18666E-01	-.36667E-02	-.67731E-02
	-.10609E-02	-.21271E-01			
1	-.85000E+03	.40000E+03	-.21229E-01	-.24176E-03	.85772E-03
	-.20676E-03	-.21264E-01			
1	-.85000E+03	.20000E+03	-.19359E-01	-.89593E-02	.46540E-03
	-.89385E-02	-.19380E-01			
2	-.45000E+03	.00000E+00	-.15474E-01	-.36106E-01	-.12923E-01
	-.92548E-02	-.42325E-01			
2	-.35000E+03	.00000E+00	-.19138E-01	-.44655E-01	-.12600E-01
	-.13965E-01	-.49828E-01			
2	-.25000E+03	.00000E+00	-.24000E-01	-.56001E-01	-.10909E-01
	-.20635E-01	-.59366E-01			
2	-.25000E+03	.20000E+03	-.14600E-01	-.56730E-01	-.16375E-01
	-.89839E-02	-.62346E-01			
2	-.25000E+03	.40000E+03	-.14639E-01	-.61505E-01	-.26691E-01
	-.25539E-02	-.73590E-01			
2	-.35000E+03	.40000E+03	-.21644E-01	-.41385E-01	-.22488E-01
	-.69559E-02	-.56073E-01			
2	-.45000E+03	.40000E+03	-.29847E-01	-.24063E-01	-.16917E-01
	-.97931E-02	-.44118E-01			
2	-.45000E+03	.20000E+03	-.17941E-01	-.28062E-01	-.12494E-01
	-.95210E-02	-.36481E-01			
3	-.25000E+03	.00000E+00	-.24000E-01	-.56001E-01	-.10909E-01
	-.20635E-01	-.59366E-01			
3	-.20000E+03	.00000E+00	-.25130E-01	-.58636E-01	-.90787E-02
	-.22828E-01	-.60938E-01			
3	-.15000E+03	.00000E+00	-.25645E-01	-.59839E-01	-.67484E-02
	-.24361E-01	-.61122E-01			
3	-.15000E+03	.20000E+03	-.72105E-02	-.70161E-01	-.10095E-01
	-.56313E-02	-.71740E-01			
3	-.15000E+03	.40000E+03	-.50195E-02	-.87444E-01	-.22867E-01
	.89920E-03	-.93363E-01			
3	-.20000E+03	.40000E+03	-.11431E-01	-.75746E-01	-.26151E-01
	-.21398E-02	-.85037E-01			
3	-.25000E+03	.40000E+03	-.17228E-01	-.62614E-01	-.28935E-01
	-.31485E-02	-.76694E-01			
3	-.25000E+03	.20000E+03	-.12492E-01	-.55827E-01	-.15210E-01
	-.76870E-02	-.60632E-01			
4	-.15000E+03	.00000E+00	-.25645E-01	-.59839E-01	-.67484E-02
	-.24361E-01	-.61122E-01			
4	-.93750E+02	.00000E+00	-.26542E-01	-.61932E-01	-.39479E-02
	-.26107E-01	-.62367E-01			
4	-.37500E+02	.00000E+00	-.26041E-01	-.60761E-01	-.80311E-03
	-.26022E-01	-.60780E-01			
4	-.37500E+02	.20000E+03	-.46976E-01	-.79197E-01	-.69873E-03
	-.46910E-02	-.79204E-01			
4	-.37500E+02	.40000E+03	.57401E-01	-.10231E+00	-.64184E-02
	.61201E-02	-.10269E+00			
4	-.93750E+02	.40000E+03	.15842E-01	-.95683E-01	-.14442E-01
	.36834E-02	-.97782E-01			
4	-.15000E+03	.40000E+03	-.11727E-01	-.85796E-01	-.22122E-01
	.42614E-02	-.91230E-01			
4	-.15000E+03	.20000E+03	-.79562E-01	-.70480E-01	-.11523E-01
	-.59001E-02	-.72536E-01			
5	-.37500E+02	.00000E+00	-.26041E-01	-.60761E-01	-.80311E-03

- .26022E-01	- .60780E-01				
5	- .18750E+02	.00000E+00	- .26156E-01	- .61030E-01	.26679E-03
- .26153E-01	- .61032E-01				
5	.00000E+00	.00000E+00	- .26150E-01	- .61016E-01	.13089E-02
- .26100E-01	- .61065E-01				
5	.00000E+00	.20000E+03	- .66676E-02	- .79865E-01	.18137E-02
- .66227E-02	- .79910E-01				
5	.00000E+00	.40000E+03	.35639E-02	- .10268E+00	.30349E-02
.36506E-02	- .10277E+00				
5	- .18750E+02	.40000E+03	.54315E-02	- .10227E+00	.76842E-03
.54370E-02	- .10228E+00				
5	- .37500E+02	.40000E+03	.74199E-02	- .10159E+00	- .15258E-02
.74413E-02	- .10161E+00				
5	- .37500E+02	.20000E+03	- .46851E-02	- .79192E-01	- .15227E-02
- .46540E-02	- .79223E-01				
6	.00000E+00	.00000E+00	- .26150E-01	- .61016E-01	.13089E-02
- .26100E-01	- .61065E-01				
6	.18750E+02	.00000E+00	- .26264E-01	- .61282E-01	.23583E-02
- .26106E-01	- .61440E-01				
6	.37500E+02	.00000E+00	- .26231E-01	- .61205E-01	.33880E-02
- .25905E-01	- .61530E-01				
6	.37500E+02	.20000E+03	- .61245E-02	- .77514E-01	.54198E-02
- .57153E-02	- .77923E-01				
6	.37500E+02	.40000E+03	.42087E-02	- .98011E-01	.11694E-01
.55295E-02	- .99332E-01				
6	.18750E+02	.40000E+03	.44459E-02	- .10025E+00	.90912E-02
.52295E-02	- .10103E+00				
6	.00000E+00	.40000E+03	.48304E-02	- .10214E+00	.64686E-02
.52202E-02	- .10253E+00				
6	.00000E+00	.20000E+03	- .57731E-02	- .79482E-01	.17674E-02
- .57307E-02	- .79524E-01				
7	.37500E+02	.00000E+00	- .26231E-01	- .61205E-01	.33880E-02
- .25905E-01	- .61530E-01				
7	.93750E+02	.00000E+00	- .26297E-01	- .61361E-01	.64181E-02
- .25160E-01	- .62499E-01				
7	.15000E+03	.00000E+00	- .25099E-01	- .58565E-01	.90212E-02
- .22822E-01	- .60842E-01				
7	.15000E+03	.20000E+03	- .89042E-02	- .64614E-01	.14063E-01
- .55556E-02	- .67963E-01				
7	.15000E+03	.40000E+03	- .61571E-02	- .76427E-01	.26531E-01
.27350E-02	- .85319E-01				
7	.93750E+02	.40000E+03	- .29975E-02	- .89291E-01	.20092E-01
.14514E-02	- .93740E-01				
7	.37500E+02	.40000E+03	.14271E-02	- .99204E-01	.13227E-01
.31365E-02	- .10091E+00				
7	.37500E+02	.20000E+03	- .56777E-02	- .77322E-01	.45939E-02
- .53844E-02	- .77616E-01				
8	.15000E+03	.00000E+00	- .25099E-01	- .58565E-01	.90212E-02
- .22822E-01	- .60842E-01				
8	.20000E+03	.00000E+00	- .23937E-01	- .55853E-01	.10961E-01
- .20535E-01	- .59255E-01				
8	.25000E+03	.00000E+00	- .22565E-01	- .52651E-01	.12414E-01
- .18104E-01	- .57112E-01				
8	.25000E+03	.20000E+03	- .13861E-01	- .49633E-01	.15398E-01
- .81463E-02	- .55348E-01				
8	.25000E+03	.40000E+03	- .20847E-01	- .53339E-01	.26977E-01
- .56022E-02	- .68584E-01				
8	.20000E+03	.40000E+03	- .15015E-01	- .65731E-01	.26645E-01
- .35900E-02	- .77156E-01				
8	.15000E+03	.40000E+03	- .89723E-02	- .77633E-01	.25826E-01
- .34292E-03	- .86263E-01				
8	.15000E+03	.20000E+03	- .91910E-02	- .64737E-01	.13126E-01
- .62453E-02	- .67683E-01				
9	.25000E+03	.00000E+00	- .22565E-01	- .52651E-01	.12414E-01
- .18104E-01	- .57112E-01				
9	.35000E+03	.00000E+00	- .17244E-01	- .40236E-01	.13254E-01
- .11196E-01	- .46285E-01				
9	.45000E+03	.00000E+00	- .13442E-01	- .31365E-01	.13027E-01
- .65916E-02	- .38215E-01				
9	.45000E+03	.20000E+03	- .17338E-01	- .23731E-01	.11605E-01
- .84972E-02	- .32571E-01				
9	.45000E+03	.40000E+03	- .28152E-01	- .19066E-01	.13688E-01
- .91906E-02	- .38037E-01				
9	.35000E+03	.40000E+03	- .22296E-01	- .33810E-01	.19943E-01
- .72951E-02	- .48811E-01				
9	.25000E+03	.40000E+03	- .17949E-01	- .52097E-01	.25133E-01
- .46387E-02	- .65407E-01				

9	.25000E+03	.20000E+03	-.16793E-01	-.50890E-01	.17021E-01
9	-.97505E-02	-.57932E-01			
10	.45000E+03	.00000E+00	-.13442E-01	-.31365E-01	.13027E-01
10	-.65916E-02	-.38215E-01			
10	.65000E+03	.00000E+00	-.62487E-02	-.14580E-01	.67335E-02
10	-.24966E-02	-.18332E-01			
10	.85000E+03	.00000E+00	-.41309E-02	-.96387E-02	.00000E+00
10	-.41309E-02	-.96387E-02			
10	.85000E+03	.20000E+03	-.17756E-01	-.71295E-02	-.36351E-03
10	-.71171E-02	-.17769E-01			
10	.85000E+03	.40000E+03	-.18725E-01	.80367E-03	-.89412E-03
10	.84452E-03	-.18766E-01			
10	.65000E+03	.40000E+03	-.17265E-01	-.16494E-02	.53746E-02
10	.21705E-04	-.18936E-01			
10	.45000E+03	.40000E+03	-.20879E-01	-.15945E-01	.11204E-01
10	-.69402E-02	-.29884E-01			
10	.45000E+03	.20000E+03	-.23489E-01	-.26367E-01	.12199E-01
10	-.12644E-01	-.37212E-01			
11	-.85000E+03	.40000E+03	-.20719E-01	.94989E-03	.85772E-03
11	.98379E-03	-.20753E-01			
11	-.65000E+03	.40000E+03	-.19301E-01	-.51491E-02	-.55077E-02
11	-.32582E-02	-.21192E-01			
11	-.45000E+03	.40000E+03	-.21337E-01	-.19308E-01	-.14794E-01
11	-.54935E-02	-.35151E-01			
11	-.45000E+03	.50000E+03	-.20772E-01	-.13325E-01	-.10895E-01
11	-.55352E-02	-.28562E-01			
11	-.45000E+03	.60000E+03	-.14634E-01	-.49553E-02	-.61299E-02
11	-.19848E-02	-.17605E-01			
11	-.65000E+03	.60000E+03	-.75663E-02	.14705E-02	-.90824E-03
11	.15609E-02	-.76566E-02			
11	-.85000E+03	.60000E+03	-.39524E-02	-.16326E-03	.13924E-02
11	.29337E-03	-.44090E-02			
11	-.85000E+03	.50000E+03	-.15121E-01	-.80060E-03	.69240E-03
11	-.76720E-03	-.15155E-01			
12	-.45000E+03	.40000E+03	-.29266E-01	-.22705E-01	-.18013E-01
12	-.76768E-02	-.44294E-01			
12	-.35000E+03	.40000E+03	-.19285E-01	-.35881E-01	-.22858E-01
12	-.32658E-02	-.51900E-01			
12	-.25000E+03	.40000E+03	-.17353E-01	-.67838E-01	-.31238E-01
12	-.24334E-02	-.82758E-01			
12	-.25000E+03	.50000E+03	-.29972E-01	-.52896E-01	-.36575E-01
12	-.31053E-02	-.79763E-01			
12	-.25000E+03	.60000E+03	-.40535E-01	-.37073E-01	-.39355E-01
12	.58896E-03	-.78197E-01			
12	-.35000E+03	.60000E+03	-.25388E-01	-.12407E-01	-.21417E-01
12	.34818E-02	-.41276E-01			
12	-.45000E+03	.60000E+03	-.18289E-01	-.65217E-02	-.70150E-02
12	-.32497E-02	-.21561E-01			
12	-.45000E+03	.50000E+03	-.24806E-01	-.15054E-01	-.13792E-01
12	-.53013E-02	-.34558E-01			
13	-.25000E+03	.40000E+03	-.19942E-01	-.68948E-01	-.33482E-01
13	-.29547E-02	-.85935E-01			
13	-.20000E+03	.40000E+03	-.11161E-01	-.75116E-01	-.30659E-01
13	.11624E-02	-.87439E-01			
13	-.15000E+03	.40000E+03	-.68778E-02	-.91780E-01	-.27183E-01
13	.10795E-02	-.99738E-01			
13	-.15000E+03	.50000E+03	-.13206E-01	-.96831E-01	-.44589E-01
13	.61082E-02	-.11614E+00			
13	-.15000E+03	.60000E+03	-.37134E-01	-.10942E+00	-.69935E-01
13	.54444E-02	-.15200E+00			
13	-.20000E+03	.60000E+03	-.38655E-01	-.68887E-01	-.56388E-01
13	.46076E-02	-.11215E+00			
13	-.25000E+03	.60000E+03	-.44673E-01	-.38846E-01	-.42186E-01
13	.52695E-03	-.84047E-01			
13	-.25000E+03	.50000E+03	-.23507E-01	-.50125E-01	-.33864E-01
13	-.43129E-03	-.73202E-01			
14	-.15000E+03	.40000E+03	-.30310E-01	-.90132E-01	-.26439E-01
14	.43659E-02	-.97529E-01			
14	-.93750E+02	.40000E+03	-.10924E-02	-.10193E+00	-.17779E-01
14	.19505E-02	-.10497E+00			
14	-.37500E+02	.40000E+03	.91538E-02	-.94341E-01	-.66706E-02
14	.95820E-02	-.94770E-01			
14	-.37500E+02	.50000E+03	.13132E-01	-.14178E+00	-.81851E-02
14	.13563E-01	-.14222E+00			
14	-.37500E+02	.60000E+03	.57293E-02	-.19411E+00	-.24263E-01
14	.86329E-02	-.19701E+00			
14	-.93750E+02	.60000E+03	-.10415E-01	-.15741E+00	-.51405E-01

.57777E-02	-.17360E+00				
14	-.15000E+03	.60000E+03	-.18251E-01	-.10133E+00	-.76098E-01
.26906E-01	-.14649E+00				
14	-.15000E+03	.50000E+03	-.49505E-02	-.93293E-01	-.43987E-01
.13215E-01	-.11146E+00				
15	-.37500E+02	.40000E+03	.10834E-01	-.93622E-01	-.17780E-02
.10864E-01	-.93652E-01				
15	-.18750E+02	.40000E+03	.80676E-02	-.96123E-01	.74933E-03
.80729E-02	-.96129E-01				
15	.00000E+00	.40000E+03	.75214E-02	-.93445E-01	.36562E-01
.76536E-02	-.93577E-01				
15	.00000E+00	.50000E+03	.13014E-01	-.14285E+00	.12170E-01
.13958E-01	-.14379E+00				
15	.00000E+00	.60000E+03	.32441E-01	-.18628E+00	.18249E-01
.33953E-01	-.18779E+00				
15	-.18750E+02	.60000E+03	.20189E-01	-.19183E+00	-.19367E-02
.20207E-01	-.19185E+00				
15	-.37500E+02	.60000E+03	.10158E-01	-.19221E+00	-.21743E-01
.12467E-01	-.19452E+00				
15	-.37500E+02	.50000E+03	.35286E-02	-.14590E+00	-.10543E-01
.42688E-02	-.14664E+00				
16	.00000E+00	.40000E+03	.87879E-02	-.92902E-01	.70899E-02
.92798E-02	-.93394E-01				
16	.18750E+02	.40000E+03	.57121E-02	-.97291E-01	.10409E-01
.67535E-02	-.98333E-01				
16	.37500E+02	.40000E+03	.42401E-02	-.97938E-01	.13484E-01
.59895E-02	-.99688E-01				
16	.37500E+02	.50000E+03	.42266E-02	-.13237E+00	.25192E-01
.87248E-02	-.13686E+00				
16	.37500E+02	.60000E+03	.84028E-02	-.16500E+00	.53081E-01
.23361E-01	-.17996E+00				
16	.18750E+02	.60000E+03	.99197E-02	-.18167E+00	.38153E-01
.17238E-01	-.18898E+00				
16	.00000E+00	.60000E+03	.13040E-01	-.19459E+00	.22980E-01
.15553E-01	-.19711E+00				
16	.00000E+00	.50000E+03	.88193E-02	-.14465E+00	.69450E-02
.91330E-02	-.14496E+00				
17	.37500E+02	.40000E+03	.14584E-02	-.99130E-01	.15016E-01
.36522E-02	-.10132E+00				
17	.93750E+02	.40000E+03	-.45286E-02	-.92864E-01	.24830E-01
.19725E-02	-.99365E-01				
17	.15000E+03	.40000E+03	-.93798E-02	-.83947E-01	.31262E-01
.19925E-02	-.95319E-01				
17	.15000E+03	.50000E+03	-.19090E-01	-.74044E-01	.41152E-01
.29148E-02	-.96049E-01				
17	.15000E+03	.60000E+03	-.47358E-01	-.72095E-01	.66126E-01
.75465E-02	-.12700E+00				
17	.93750E+02	.60000E+03	-.25874E-01	-.12237E+00	.62967E-01
.52048E-02	-.15345E+00				
17	.37500E+02	.60000E+03	-.32539E-02	-.16999E+00	.56425E-01
.14046E-01	-.18729E+00				
17	.37500E+02	.50000E+03	.83808E-02	-.13058E+00	.28179E-01
.13877E-01	-.13608E+00				
18	.15000E+03	.40000E+03	-.12195E-01	-.85153E-01	.30557E-01
-.10881E-02	-.96260E-01				
18	.20000E+03	.40000E+03	-.15065E-01	-.65849E-01	.30341E-01
-.89295E-03	-.80021E-01				
18	.25000E+03	.40000E+03	-.21329E-01	-.54462E-01	.30266E-01
-.33922E-02	-.72399E-01				
18	.25000E+03	.50000E+03	-.25131E-01	-.38601E-01	.30366E-01
-.76163E-03	-.62970E-01				
18	.25000E+03	.60000E+03	-.39148E-01	-.27118E-01	.31666E-01
-.90059E-03	-.65366E-01				
18	.20000E+03	.60000E+03	-.36656E-01	-.43547E-01	.43709E-01
.37437E-02	-.83946E-01				
18	.15000E+03	.60000E+03	-.37557E-01	-.67894E-01	.55893E-01
.51896E-02	-.11064E+00				
18	.15000E+03	.50000E+03	-.19768E-01	-.74335E-01	.42625E-01
.35578E-02	-.97661E-01				
19	.25000E+03	.40000E+03	-.18430E-01	-.53220E-01	.28422E-01
-.25026E-02	-.69148E-01				
19	.35000E+03	.40000E+03	-.20005E-01	-.28465E-01	.19733E-01
-.40539E-02	-.44416E-01				
19	.45000E+03	.40000E+03	-.27543E-01	-.17623E-01	.14242E-01
-.75018E-02	-.37664E-01				
19	.45000E+03	.50000E+03	-.22730E-01	-.11845E-01	.10525E-01
-.54392E-02	-.29136E-01				

19	.45000E+03	.60000E+03	-.13304E-01	-.40902E-02	.43964E-02
19	-.23291E-02	-.15065E-01			
19	.35000E+03	.60000E+03	-.20925E-01	-.76532E-02	.15201E-01
19	.22975E-02	-.30876E-01			
19	.25000E+03	.60000E+03	-.34509E-01	-.25130E-01	.29205E-01
19	-.24035E-03	-.59399E-01			
19	.25000E+03	.50000E+03	-.28776E-01	-.40164E-01	.30019E-01
19	-.39160E-02	-.65024E-01			
20	.45000E+03	.40000E+03	-.20261E-01	-.14502E-01	.11758E-01
20	-.52757E-02	-.29487E-01			
20	.65000E+03	.40000E+03	-.18068E-01	-.35252E-02	.43851E-02
20	-.23053E-02	-.19288E-01			
20	.85000E+03	.40000E+03	-.18467E-01	.14064E-02	-.89412E-03
20	.14466E-02	-.18507E-01			
20	.85000E+03	.50000E+03	-.13536E-01	-.80168E-04	-.75303E-03
20	-.38157E-04	-.13578E-01			
20	.85000E+03	.60000E+03	-.38366E-02	.47692E-03	-.12520E-02
20	.81398E-03	-.41736E-02			
20	.65000E+03	.60000E+03	-.69262E-02	.13654E-02	.30455E-03
20	.13766E-02	-.69374E-02			
20	.45000E+03	.60000E+03	-.12607E-01	-.37912E-02	.39550E-02
20	-.22769E-02	-.14121E-01			
20	.45000E+03	.50000E+03	-.18818E-01	-.10168E-01	.81766E-02
20	-.52433E-02	-.23743E-01			
21	-.85000E+03	.60000E+03	-.32478E-02	.14807E-02	.13924E-02
21	.18602E-02	-.36274E-02			
21	-.65000E+03	.60000E+03	-.85216E-02	-.75861E-03	-.23779E-02
21	-.88161E-04	-.91920E-02			
21	-.45000E+03	.60000E+03	-.13960E-01	-.33826E-02	-.44712E-02
21	-.17459E-02	-.15597E-01			
21	-.45000E+03	.65000E+03	-.65479E-02	-.18369E-02	-.19083E-02
21	-.11609E-02	-.72239E-02			
21	-.45000E+03	.70000E+03	.19941E-02	.19305E-03	.69489E-03
21	.22310E-02	-.43891E-04			
21	-.65000E+03	.70000E+03	.40156E-02	.43343E-03	.26097E-03
21	.40345E-02	.41451E-03			
21	-.85000E+03	.70000E+03	.58722E-02	.28908E-03	.15040E-02
21	.62516E-02	-.90274E-04			
21	-.85000E+03	.65000E+03	.74734E-03	.64278E-03	.14281E-02
21	.21241E-02	-.73396E-03			
22	-.45000E+03	.60000E+03	-.17615E-01	-.49490E-02	-.53563E-02
22	-.29877E-02	-.19577E-01			
22	-.35000E+03	.60000E+03	-.24038E-01	-.92575E-02	-.18081E-01
22	.28855E-02	-.36181E-01			
22	-.25000E+03	.60000E+03	-.34855E-01	-.23820E-01	-.33886E-01
22	.49945E-02	-.63670E-01			
22	-.25000E+03	.65000E+03	-.35174E-01	-.20198E-01	-.25113E-01
22	-.14809E-02	-.53892E-01			
22	-.25000E+03	.70000E+03	-.28121E-01	-.13417E-01	-.15868E-01
22	-.32808E-02	-.38258E-01			
22	-.35000E+03	.70000E+03	-.93539E-02	-.83695E-03	-.55584E-02
22	.19067E-02	-.12098E-01			
22	-.45000E+03	.70000E+03	.50187E-02	.14893E-02	.16716E-02
22	.56848E-02	.82330E-03			
22	-.45000E+03	.65000E+03	-.99841E-02	-.33095E-02	-.20781E-02
22	-.27153E-02	-.10578E-01			
23	-.25000E+03	.60000E+03	-.38994E-01	-.25594E-01	-.36717E-01
23	.50301E-02	-.69617E-01			
23	-.20000E+03	.60000E+03	-.37777E-01	-.66841E-01	-.53494E-01
23	.31237E-02	-.10774E+00			
23	-.15000E+03	.60000E+03	-.42029E-01	-.12085E+00	-.75950E-01
23	.41279E-02	-.16700E+00			
23	-.15000E+03	.65000E+03	-.55052E-01	-.62408E-01	-.66754E-01
23	.81257E-02	-.12559E+00			
23	-.15000E+03	.70000E+03	-.45322E-01	.57814E-02	-.47014E-01
23	.33738E-01	-.73279E-01			
23	-.20000E+03	.70000E+03	-.32954E-01	.30041E-02	-.30270E-01
23	.20232E-01	-.50181E-01			
23	-.25000E+03	.70000E+03	-.26054E-01	-.12531E-01	-.19205E-01
23	.10677E-02	-.39652E-01			
23	-.25000E+03	.65000E+03	-.43900E-01	-.23938E-01	-.33234E-01
23	.78100E-03	-.68620E-01			
24	-.15000E+03	.60000E+03	-.23146E-01	-.11275E+00	-.82112E-01
24	.25591E-01	-.16149E+00			
24	-.93750E+02	.60000E+03	-.10488E-01	-.15758E+00	-.65365E-01
24	.14361E-01	-.18243E+00			
24	-.37500E+02	.60000E+03	.91448E-03	-.20534E+00	-.21321E-01

.30954E-02	-.20752E+00				
24	-.37500E+02	.65000E+03	.29607E-01	-.28526E+00	-.52552E-01
.38146E-01	-.29380E+00				
24	-.37500E+02	.70000E+03	.17329E-01	-.38274E+00	-.10809E+00
.44663E-01	-.41007E+00				
24	-.93750E+02	.70000E+03	-.81894E-01	-.21638E+00	-.12430E+00
-.78111E-02	-.29046E+00				
24	-.15000E+03	.70000E+03	-.18237E+00	-.52955E-01	-.11322E+00
.12747E-01	-.24808E+00				
24	-.15000E+03	.65000E+03	-.82275E-01	-.74075E-01	-.85517E-01
.74404E-02	-.16379E+00				
25	-.37500E+02	.60000E+03	.53429E-02	-.20344E+00	-.18801E-01
.70224E-02	-.20512E+00				
25	-.18750E+02	.60000E+03	.16802E-01	-.19974E+00	.49344E-02
.16914E-01	-.19985E+00				
25	.00000E+00	.60000E+03	.32070E-01	-.18714E+00	.23578E-01
.34577E-01	-.18965E+00				
25	.00000E+00	.65000E+03	-.23077E-01	-.29290E+00	.33110E-01
-.19073E-01	-.29690E+00				
25	.00000E+00	.70000E+03	-.76016E-01	-.39770E+00	.47356E-01
-.69189E-01	-.40453E+00				
25	-.18750E+02	.70000E+03	-.15408E-02	-.38193E+00	.14697E-01
-.97373E-03	-.38250E+00				
25	-.37500E+02	.70000E+03	.76743E-01	-.35728E+00	-.23053E-01
.77963E-01	-.35850E+00				
25	-.37500E+02	.65000E+03	.39939E-01	-.28083E+00	-.23283E-01
.41620E-01	-.28251E+00				
26	.00000E+00	.60000E+03	.12669E-01	-.19546E+00	.28310E-01
.16451E-01	-.19924E+00				
26	.18750E+02	.60000E+03	.15433E-02	-.20121E+00	.46603E-01
.11742E-01	-.21141E+00				
26	.37500E+02	.60000E+03	-.71641E-02	-.20132E+00	.61707E-01
.10788E-01	-.21927E+00				
26	.37500E+02	.65000E+03	-.21302E-01	-.20136E+00	.78502E-01
.81171E-02	-.23078E+00				
26	.37500E+02	.70000E+03	-.70193E-01	-.21629E+00	.13643E+00
.11513E-01	-.29800E+00				
26	.18750E+02	.70000E+03	-.48226E-01	-.29864E+00	.12017E+00
.11264E-03	-.34698E+00				
26	.00000E+00	.70000E+03	-.23841E-01	-.37534E+00	.10073E+00
.29768E-02	-.40216E+00				
26	.00000E+00	.65000E+03	.11791E-01	-.27795E+00	.43952E-01
.18311E-01	-.28447E+00				
27	.37500E+02	.60000E+03	-.18821E-01	-.20631E+00	.65051E-01
.15383E-02	-.22667E+00				
27	.93750E+02	.60000E+03	-.18782E-01	-.10582E+00	.65871E-01
.16648E-01	-.14125E+00				
27	.15000E+03	.60000E+03	-.51635E-01	-.82074E-01	.67380E-01
.22233E-02	-.13593E+00				
27	.15000E+03	.65000E+03	-.61351E-01	-.49854E-01	.52754E-01
-.25365E-02	-.10867E+00				
27	.15000E+03	.70000E+03	-.86169E-01	-.24106E-01	.42851E-01
-.22307E-02	-.10804E+00				
27	.93750E+02	.70000E+03	-.73542E-01	-.86884E-01	.90033E-01
.10067E-01	-.17049E+00				
27	.37500E+02	.70000E+03	-.93807E-01	-.22641E+00	.13790E+00
-.70941E-02	-.31312E+00				
27	.37500E+02	.65000E+03	-.48763E-01	-.21313E+00	.99116E-01
-.21901E-02	-.25970E+00				
28	.15000E+03	.60000E+03	-.41833E-01	-.77873E-01	.57147E-01
.67756E-04	-.11977E+00				
28	.20000E+03	.60000E+03	-.35214E-01	-.40184E-01	.40269E-01
.26472E-02	-.78045E-01				
29	.25000E+03	.60000E+03	-.35224E-01	-.17962E-01	.28162E-01
.28622E-02	-.56049E-01				
28	.25000E+03	.65000E+03	-.32374E-01	-.14604E-01	.20871E-01
-.80551E-03	-.46172E-01				
28	.25000E+03	.70000E+03	-.13519E-01	-.43857E-02	.75859E-02
-.98046E-04	-.17807E-01				
28	.20000E+03	.70000E+03	-.28926E-01	.10326E-02	.19386E-01
.10552E-01	-.38446E-01				
28	.15000E+03	.70000E+03	-.50962E-01	-.90177E-02	.35957E-01
.11636E-01	-.71617E-01				
29	.15000E+03	.65000E+03	-.54401E-01	-.46875E-01	.49549E-01
-.94626E-03	-.10033E+00				
29	.25000E+03	.60000E+03	-.30585E-01	-.15974E-01	.25701E-01
.34398E-02	-.49999E-01				

29	.35000E+03	.60000E+03	-.20685E-01	-.70930E-02	.13841E-01
.15306E-02	-.29309E-01				
29	.45000E+03	.60000E+03	-.12588E-01	-.24197E-02	.27622E-02
-.17179E-02	-.13290E-01				
29	.45000E+03	.65000E+03	-.76964E-02	-.22417E-02	.86653E-03
-.21074E-02	-.78307E-02				
29	.45000E+03	.70000E+03	.44023E-02	.10248E-02	-.13840E-02
.48969E-02	.53016E-03				
29	.35000E+03	.70000E+03	-.42985E-02	.14838E-03	.26612E-02
.13927E-02	-.55428E-02				
29	.25000E+03	.70000E+03	-.14803E-01	-.49358E-02	.74873E-02
-.90272E-03	-.18836E-01				
29	.25000E+03	.65000E+03	-.26297E-01	-.11999E-01	.16772E-01
-.91640E-03	-.37380E-01				
30	.45000E+03	.60000E+03	-.11891E-01	-.21207E-02	.23208E-02
-.15975E-02	-.12414E-01				
30	.65000E+03	.60000E+03	-.76509E-02	-.32550E-03	.13563E-02
-.82432E-04	-.78940E-02				
30	.85000E+03	.60000E+03	-.35083E-02	.12429E-02	-.12520E-02
.15527E-02	-.38180E-02				
30	.85000E+03	.65000E+03	.14192E-03	.64111E-03	-.12836E-02
.16992E-02	-.91617E-03				
30	.85000E+03	.70000E+03	.45045E-02	.34458E-03	-.13261E-02
.48912E-02	-.42200E-04				
30	.65000E+03	.70000E+03	.33686E-02	.31238E-03	-.31357E-03
.34004E-02	.28054E-03				
30	.45000E+03	.70000E+03	.21356E-02	.53398E-04	-.94493E-03
.25005E-02	-.31149E-03				
30	.45000E+03	.65000E+03	-.52338E-02	-.11863E-02	.69336E-03
-.10708E-02	-.53493E-02				
31	-.85000E+03	.70000E+03	.63734E-02	.14586E-02	.15040E-02
.67971E-02	.10349E-02				
31	-.65000E+03	.70000E+03	.35871E-02	-.56651E-03	-.17503E-03
.35944E-02	-.57387E-03				
31	-.45000E+03	.70000E+03	.60598E-03	-.30459E-02	.13263E-02
.10369E-02	-.34768E-02				
31	-.45000E+03	.73750E+03	.87447E-02	-.54835E-03	.12174E-02
.89016E-02	-.70518E-03				
31	-.45000E+03	.77500E+03	.16869E-01	.19428E-02	.11630E-02
.16959E-01	.18527E-02				
31	-.65000E+03	.77500E+03	.14803E-01	.59639E-03	-.24449E-03
.14807E-01	.59219E-03				
31	-.85000E+03	.77500E+03	.12542E-01	-.12043E-02	.15283E-02
.12710E-01	-.13722E-02				
31	-.85000E+03	.73750E+03	.94651E-02	.13030E-03	.14889E+02
.96968E-02	-.10142E-03				
32	-.45000E+03	.70000E+03	.36306E-02	-.17496E-02	.23030E-02
.44818E-02	-.26008E-02				
32	-.35000E+03	.70000E+03	-.73594E-02	.38167E-02	-.56577E-02
.61807E-02	-.97234E-02				
32	-.25000E+03	.70000E+03	-.17780E-01	.10712E-01	-.72962E-02
.12472E-01	-.19540E-01				
32	-.25000E+03	.73750E+03	-.21218E-02	-.14788E-02	-.19290E-02
.15529E-03	-.37559E-02				
32	-.25000E+03	.77500E+03	.16449E-01	-.12421E-01	.22628E-02
.16625E-01	-.12598E-01				
32	-.35000E+03	.77500E+03	.19677E-01	-.44883E-02	-.82118E-03
.19705E-01	-.45162E-02				
32	-.45000E+03	.77500E+03	.23474E-01	.47738E-02	.24170E-02
.23782E-01	.44664E-02				
32	-.45000E+03	.73750E+03	.12096E-01	.88804E-03	.29477E-02
.12824E-01	.16007E-03				
33	-.25000E+03	.70000E+03	-.15712E-01	.11598E-01	-.10633E-01
.15249E-01	-.19364E-01				
33	-.20000E+03	.70000E+03	-.48057E-01	-.32238E-01	-.36196E-01
-.30975E-02	-.77198E-01				
33	-.15000E+03	.70000E+03	-.10315E+00	-.12914E+00	-.62697E-01
-.52116E-01	-.18018E+00				
33	-.15000E+03	.73750E+03	-.70541E-01	-.57356E-01	-.30929E-01
-.32325E-01	-.95572E-01				
33	-.15000E+03	.77500E+03	.24104E-01	.41022E-01	.10909E-01
.46367E-01	.18759E-01				
33	-.20000E+03	.77500E+03	.43841E-01	.46061E-01	.12887E-01
.57886E-01	.32017E-01				
33	-.25000E+03	.77500E+03	.40834E-01	-.19708E-02	.13927E-01
.44966E-01	-.61030E-02				
33	-.25000E+03	.73750E+03	-.18459E-01	-.84805E-02	-.33875E-02

-.74392E-02	-.19500E-01				
34	-.15000E+03	.70000E+03	-.24020E+00	-.18788E+00	-.12891E+00
-.82504E-01	-.34558E+00				
34	-.93750E+02	.70000E+03	.19829E-02	-.20669E-01	-.11092E+00
.10215E+00	-.12084E+00				
34	-.37500E+02	.70000E+03	-.72581E-01	-.59253E+00	-.16361E+00
-.25381E-01	-.63973E+00				
34	-.37500E+02	.73750E+03	-.34707E+00	-.76264E+00	-.28657E+00
-.20088E+00	-.90883E+00				
34	-.37500E+02	.77500E+03	-.58867E+00	-.91867E+00	-.42239E+00
-.30020E+00	-.12071E+01				
34	-.93750E+02	.77500E+03	-.12632E+00	-.70318E-01	-.11632E+00
.21327E-01	-.21796E+00				
34	-.15000E+03	.77500E+03	.19282E-01	.38955E-01	.11905E+00
.14857E+00	-.90337E-01				
34	-.15000E+03	.73750E+03	-.12690E+00	-.81510E-01	.15046E-02
-.81460E-01	-.12695E+00				
35	-.37500E+02	.70000E+03	-.13168E-01	-.56707E+00	-.78579E-01
-.22358E-02	-.57800E+00				
35	-.18750E+02	.70000E+03	-.10710E+00	-.62824E+00	.51672E-02
-.10705E+00	-.62829E+00				
35	.00000E+00	.70000E+03	-.71316E-01	-.38674E+00	.10142E+00
-.41518E-01	-.41653E+00				
35	.00000E+00	.73750E+03	.88654E-01	-.36092E+00	.24615E+00
.19721E+00	-.46948E+00				
35	.00000E+00	.77500E+03	-.38704E+00	-.60754E+00	.39428E+00
-.87880E-01	-.90670E+00				
35	-.18750E+02	.77500E+03	-.60305E+00	-.93601E+00	.13373E+00
-.55599E+00	-.98308E+00				
35	-.37500E+02	.77500E+03	-.68936E+00	-.96182E+00	-.11431E+00
-.64775E+00	-.10034E+01				
35	-.37500E+02	.73750E+03	-.33432E-01	-.62823E+00	-.98147E-01
-.17656E-01	-.64401E+00				
36	.00000E+00	.70000E+03	-.19141E-01	-.36437E+00	.15479E+00
.40098E-01	-.42361E+00				
36	.18750E+02	.70000E+03	-.43937E-01	-.28863E+00	.15801E+00
.33556E-01	-.36612E+00				
36	.37500E+02	.70000E+03	-.73526E-01	-.22407E+00	.15812E+00
.26330E-01	-.32392E+00				
36	.37500E+02	.73750E+03	-.15320E+00	-.16540E+00	.15173E+00
-.74421E-02	-.31115E+00				
36	.37500E+02	.77500E+03	-.16013E+00	-.75564E-01	.19279E+00
.79521E-01	-.31522E+00				
36	.18750E+02	.77500E+03	-.15828E+00	-.28757E+00	.18467E+00
-.27268E-01	-.41859E+00				
36	.00000E+00	.77500E+03	-.16123E+00	-.51076E+00	.17346E+00
-.89762E-01	-.58223E+00				
36	.00000E+00	.73750E+03	-.12655E+00	-.45315E+00	.14040E+00
-.74492E-01	-.50521E+00				
37	.37500E+02	.70000E+03	-.97140E-01	-.23419E+00	.15960E+00
.80245E-02	-.33935E+00				
37	.93750E+02	.70000E+03	-.60551E-01	-.56572E-01	.80256E-01
.21719E-01	-.13884E+00				
37	.15000E+03	.70000E+03	-.82503E-01	-.15552E-01	.35882E-01
.44819E-04	-.98100E-01				
37	.15000E+03	.73750E+03	-.47353E-01	-.20437E-01	.11666E-01
-.16084E-01	-.51706E-01				
37	.15000E+03	.77500E+03	.63155E-01	.69756E-02	-.25705E-01
.73141E-01	-.30108E-02				
37	.93750E+02	.77500E+03	-.18886E-01	.34146E-01	.61121E-02
.34841E-01	-.19581E-01				
37	.37500E+02	.77500E+03	-.15947E+00	-.75279E-01	.72899E-01
-.33194E-01	-.20155E+00				
37	.37500E+02	.73750E+03	-.16598E+00	-.17088E+00	.12283E+00
-.45581E-01	-.29129E+00				
38	.15000E+03	.70000E+03	-.47296E-01	-.46350E-03	.28988E-01
.13384E-01	-.61144E-01				
38	.20000E+03	.70000E+03	-.28898E-01	.10972E-02	.19265E-01
.10514E-01	-.38315E-01				
38	.25000E+03	.70000E+03	-.12699E-01	-.24729E-02	.61126E-01
.38319E-03	-.15555E-01				
38	.25000E+03	.73750E+03	-.13271E-02	-.15602E-02	.35300E-03
-.10719E-02	-.18154E-02				
38	.25000E+03	.77500E+03	.26971E-01	.66065E-02	-.33093E-01
.27495E-01	.60826E-01				
38	.20000E+03	.77500E+03	.20385E-01	-.16910E-02	-.85292E-03
.20418E-01	-.17239E-02				

38	.15000E+03	.77500E+03	.11600E-01	-.15119E-01	-.10273E-02
.11724E-01	-.15244E-01				
38	.15000E+03	.73750E+03	-.26311E-01	-.11418E-01	.12531E-01
-.42883E-02	-.33442E-01				
39	.25000E+03	.70000E+03	-.13983E-01	-.30230E-02	.60141E-02
-.36663E-03	-.16639E-01				
39	.35000E+03	.70000E+03	-.52657E-02	-.21084E-02	.34946E-02
.14754E-03	-.75216E-02				
39	.45000E+03	.70000E+03	.44526E-02	.11422E-02	-.23841E-02
.56998E-02	-.10496E-03				
39	.45000E+03	.73750E+03	.11416E-01	.90203E-03	-.20501E-02
.11802E-01	.51642E-03				
39	.45000E+03	.77500E+03	.20877E-01	.17317E-02	-.16678E-02
.21021E-01	.15875E-02				
39	.35000E+03	.77500E+03	.19589E-01	.13580E-02	-.93882E-04
.19590E-01	.13575E-02				
39	.25000E+03	.77500E+03	.19303E-01	.33203E-02	-.18791E-02
.19521E-01	.31023E-02				
39	.25000E+03	.73750E+03	.14121E-02	-.38634E-03	.20434E-02
.27453E-02	-.17196E-02				
40	.45000E+03	.70000E+03	.21859E-02	.17080E-03	-.19451E-02
.33689E-02	-.10122E-02				
40	.65000E+03	.70000E+03	.33437E-02	.25433E-03	-.27489E-04
.33440E-02	.25409E-03				
40	.85000E+03	.70000E+03	.43017E-02	-.12843E-03	-.13261E-02
.46683E-02	-.49504E-03				
40	.85000E+03	.73750E+03	.73610E-02	.79645E-04	-.13558E-02
.76052E-02	-.16463E-03				
40	.85000E+03	.77500E+03	.10320E-01	.24487E-03	-.13160E-02
.10489E-01	.75828E-04				
40	.65000E+03	.77500E+03	.12470E-01	-.16225E-03	.33729E-03
.12479E-01	-.17125E-03				
40	.45000E+03	.77500E+03	.14419E-01	-.10357E-02	-.12257E-02
.14516E-01	-.11323E-02				
40	.45000E+03	.73750E+03	.83525E-02	-.41101E-03	-.16202E-02
.86425E-02	-.70095E-03				
43	-.37500E+02	.77900E+03	.60094E+00	-.20151E+01	-.53729E+00
.70698E+00	-.21212E+01				
43	-.18750E+02	.77900E+03	-.10807E+00	-.20208E+01	-.32929E+00
-.52967E-01	-.20759E+01				
43	.00000E+00	.77900E+03	.85746E-01	.80162E-01	-.41357E-01
.12440E+00	.41503E-01				
43	.00000E+00	.79900E+03	.18580E+00	-.14047E+00	.53527E+00
.58224E+00	-.53691E+00				
43	.00000E+00	.81900E+03	-.58536E+00	-.73449E+00	.86060E+00
.20390E+00	-.15237E+01				
43	-.20000E+02	.81900E+03	-.10635E+01	-.20419E+01	.22259E-01
-.10630E+01	-.20424E+01				
43	-.37500E+02	.81900E+03	-.65846E+00	-.13478E+01	-.10844E+01
.13477E+00	-.21410E+01				
43	-.37500E+02	.79900E+03	.55077E+00	-.14331E+01	-.69273E+00
.76872E+00	-.16510E+01				
44	.00000E+00	.77900E+03	-.11689E+00	-.66817E-02	.57518E+00
.51603E+00	-.63960E+00				
44	.18750E+02	.77900E+03	-.11315E+00	-.79585E-01	.28555E+00
.18968E+00	-.38241E+00				
44	.37500E+02	.77900E+03	-.58634E-01	-.34013E-01	-.22653E-01
-.20542E-01	-.72105E-01				
44	.37500E+02	.79900E+03	-.66152E-01	.11917E+00	-.85589E-01
.15265E+00	-.99633E-01				
44	.37500E+02	.81900E+03	.33145E+00	.44596E+00	-.70141E-01
.47925E+00	.29816E+00				
44	.18750E+02	.81900E+03	.19511E+00	-.54589E-01	-.51178E-01
.20520E+00	-.64671E-01				
44	.00000E+00	.81900E+03	.10956E+00	-.43667E+00	-.50783E-01
.11424E+00	-.44135E+00				
44	.00000E+00	.79900E+03	-.20622E+00	-.30848E+00	.22301E+00
-.28558E-01	-.48615E+00				

# LEXIQUE

A	Assemblage	تجميع	Collection
	Actif	نشط	Actif
	Approche	تقريب	Approach
B	Base	قاعدة	Base
C	Champ	حقل	Field
	Charge statique	شحنة ساكنة	Static load
	Conditions aux limites	شروط حدية	Boundary conditions
	Conditions initiales	شروط ابتدائية	Initial conditions
	Contact	تماس	Contact
	Contrainte	إجهاد	Stress
D	Déformation	تشوه	Strain
	Degré de liberté	درجة تحرر	Freedom degree
	Densité	كثافة	Density
	Déplacement	إزاحة	Displacement
	Déterminant	محدد	Determinant
	Diagonale	قطر	Diagonal
	Différentiel	تفاضلي	Differential
	Discretisation	تقطيع	Discretisation
	Données d'entrée	معطيات الإدخال	Input data

	Données de sortie	معطيات الإخراج	Output data
E	Elastique	مرن	Elastic
	Elément	عنصر	Element
	Elément fini	عنصر منته	Finit element
	Equation	معادلة	Equation
	Equilibre	توازن	Equilibrium
F	Fichier	ملف	File
	Fixe	ثابت	Fixed
	Flexion	إنعطاف	Flexion
	Fonction d'interpolation	دالة الإستقطاب	Interplation function
	Fondation	أساس	Fundation
	Force	قوة	Force
G	Glissement	انزلاى	Slide
	Globale	إجمالي	Global
H	Homogène	متناسق	Homogeneous
I	Inactif	غير نشيط	Inactif
	Incrémentation	التكرار	Incrementation
	Intégration numérique	تكامل عددي	Numerical intagration
	Interpolation	إستقطاب	Interpolation
	Isoparamétrique	متساوي الوسيط	Isoparametric
	Isotrope	متساوي الخصائص الفيزيائية	Isotropic
L	Linéaire	خطي	Linear
	Local	محلي	Local
M	Maille	شبكة	Mesh

	Masse	كتلة	Masse
	Matrice	مصنوفة	Matrix
N	Nœud	عقدة	Node
	Non-linéaire	لاخطي	Non-linear
P	Point nodal	نقطة عقدية	Nodal point
Q	Quadrilatéral	رباعي	Quadialateral
R	Rigidité	قساوة	Stiffness
S	Sol	ترربة	Soil
	Structure	هيكل	Structure
	Subroutine	برنامج فرعي	Subroutine
	Symétrique	متناظر	Symetrical
	Système	نظام	System
U	Uniforme	منتظم	Uniform
V	Valeur propre	قيمة ذاتية	Engen value
	Validation	تصديق	Validation