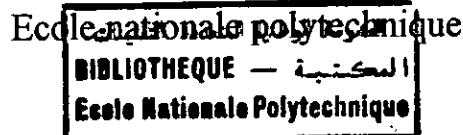


18/97

République Algérienne Démocratique Et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche  
Scientifiques



Département : génie civil  
Projet de fin d'étude  
pour l'obtention du diplôme d'ingénieur  
d'état en génie civil

Sujet

REPONSE DYNAMIQUE D'UNE FONDATION  
SUPERFICIELLE SOUS MACHINES VIBRANTES  
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS  
ET LES ELEMENTS D'INTERFACES

Proposé et dirigé par :  
M. ZEGHLACHE

étudié par :  
H. BAGHDADLI  
K. DJELLOUL

Promotion 1997

E.N.P. 10, Avenue Hacén Badi, El – Harrach, Alger

## DEDICACES

Je dédie ce travail :

A mes parents, autant à l'un qu'à l'autre

A Ryadh

A mes oncles Fadlallah et fethi

A Missoum (que le bon dieu ait pitié de son âme)

**H. BAGHDADLI**

En temps normal, je pense qu'elle dédirait ce travail  
aux personnes qu'elle connaissait et qu'elle aime ;  
mais là elle ne reconnaît plus personne de ceux qu'elle aimait.  
Néanmoins, il est dédié à ses parents et à son frère qui veillent sur elle,  
ainsi qu'à tout ses amis (et elle en a ! )  
Puisse dieu rétablir les choses.

**H. Baghdadli pour K. DJELLOUL**

## REMERCIEMENT



Avant toutes chose, louange à dieu qui a donné la force et le courage pour entreprendre ce travail et de l'achever.

Nos vives remerciements à Mr B. ZEGHLACHE pour son investissement, et sans lequel notre but ne serait jamais atteint.

Les parents pour lesquels on ne pourra jamais leur rendre leurs bienfaits.

Que tous les professeurs qui ont contribué à notre formation trouvent ici l'expression de notre gratitude.

On remercie Mabrouk pour sa minute de distraction, M'hamed pour son aide, Sofiane, Abdelhak, Allilou , Nawel pour sa contribution, Hamid de loin, Mr OUADJAOUT pour sa disponibilité, ainsi que tous ceux qui y on pris part.

Nous tenons à remercier les professeurs du département Genie Civil pour leur compréhension.

Sans oublier Salah, Krimou et ami Mahmoud pour tout.

**Merci à tous**

## RESUME

Le but de ce travail consiste à déterminer la réponse dynamique d'une fondation superficielle posée directement soumise à une sollicitation de machines vibrante et ce par la discrétisation en Eléments Finis et en modélisant la zone critique par des éléments d'Interfaces.

Le phénomène d'interaction sol - fondation sera pris en compte de manière globale.

De nombreux exemples sont à cet effet présentés pour illustrer l'application de ce programme, et pouvoir ainsi juger du rôle de l'interface.

## ABSTRACT

The objective of this work is to determine the dynamic response of shallow foundation subject to sollicitation of vibration machine by finite element method and thin layer interface element .

The phenomenon of soil-fondation is take into account by global manner .

Several examples are presented in way to illustrate the application of this programm and to show the role of interface element .

## SOMMAIRE



### I) : INTRODUCTION GENERALE

### II) : METHODE DES ELEMENTS FINIS

II-1) : Introduction	7
II-2) : Historique	7
II-3) : Principes de la MEF	8
II-4) : Convergence de le MEF	17

### III) : INTEGRATION NUMERIQUE

III-1) : Introduction	19
III-2) : Méthode de Gauss	19
III-3) : Détermination des valeurs propres et des vecteurs propres	22
III-4) : Détermination de la matrice d'Amortissement	24
III-5) : Intégration directe des systèmes du second ordre	26

### IV) : ELEMENTS D'INTERFACES

IV-1) : Introduction	33
IV-2) : Modes de déformation	34
IV-3) : Méthodes d'analyse des problèmes d'interfaces	36
IV-4) : Choix du modèle de l'interface	39
IV-5) : Conclusion	42

### V) : FONDATIONS SOUS MACHINES VIBRANTES

V-1) : Déformations dynamiques et interaction sol - structure	44
V-2) : Actions dynamiques dues aux machines	47
V-3) : Méthode d'analyse	48
V-4) : Modélisation du système sol - structure - équipement	58

## VI) : IMPLEMENTATION NUMERIQUE

VI-1) : Problème considéré	67
VI-2) : Résultats	71
VI-3) : Interprétation des résultats	99

## VII) : CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

VI-1) : Conclusion	106
--------------------	-----

BIBLIOGRAPHIE	108
---------------	-----

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# CHAPITRE I

## INTRODUCTION

La première éventualité correspond au cas des fondations de machines vibrante. la deuxième à celui des séismes.

Les états limites à prendre en considération en semblable occurrence - c'est à dire les états du complexe sol-construction au delà desquels les ouvrages et installations cessent de remplir les fonctions ou de satisfaire aux conditions pour lesquelles ils ont été conçus - sont en général identiques dans leur nature et leur définition à ceux qu'il convient d'envisager dans le cas d'action statique.

Cependant, ils peuvent être atteints au terme de processus différents liés aux aspects dynamiques des phénomènes. Dans certains cas, on peut être amené à introduire, en plus des états limites habituels, des états-limites spéciaux dits états limites de vibrations.

Les états limites qui mettent en cause une défaillance du sol consistent essentiellement en des ruptures d'équilibre de pentes ou massifs, ou encore en tassement (et plus généralement en déformation irréversibles) préjudiciables à la tenue des ouvrages et au fonctionnement des équipements.

Les considérations qui précèdent mettent en évidence l'importance de la prévision de la réponse du système à l'excitation considérée, ou du moins de la détermination de certains éléments de cette dernière (par exemple, les maximums de certains déplacements ou de certaines accélérations).

Le sol peut conditionner pour partie la réponse, à raison de la plus ou moins grande restriction qu'il apporte au libre déplacement des semelles ou massifs de fondation. Le calcul de la réponse constitue donc la première phase de l'approche de tout problème dynamisme.

Les fondations de machines et la construction antisismique sont les cas qui présentent la plus grande importance pratique pour l'ingénieur.

En première analyse, ces deux situations se différencient par l'intervention des rôles respectifs de la structure et du sol.



Dans le cas des machines, c'est la structure qui est motrice et communique au sol une énergie qu'il appartient à ce dernier de diffuser et de dissiper.

Dans le cas des séismes, c'est le sol qui est moteur et injecte dans la structure une partie de énergie dont il est porteur.

La différence est cependant beaucoup plus apparente que réelle en raison des phénomènes d'interaction, dans le cas d'un séisme par exemple, la structure en oscillation imprime au sol des sollicitations variables, perturbant ainsi le mouvement moteur et renvoyant au sol une partie de énergie qu'elle reçoit ; dans le cas des machines, les forces d'inertie développées dans le sol réagissent sur le mouvement du socle.

Les processus mécaniques mis en jeu sont les mêmes dans les deux cas.

La différence s'introduit surtout au niveau de la pratique courante qui, selon qu'elle néglige, simplifie, ou au contraire prend en compte de façon exhaustive les phénomènes d'interaction, accorde une prépondérance plus au moins exclusive à l'un ou l'autre des aspects ci-dessus.

D'une façon générale, les problèmes d'interaction sont négligés dans le cas des séismes pour les constructions courantes.

Ils font l'objet d'études approfondies dans le cas d'ouvrages exceptionnels, notamment celui des barrages ou des installations nucléaires, parfois aussi pour les bâtiments de très grande hauteur ou les ouvrages de très grande portée.

Ils sont aussi pris en compte, cette fois, par la force des choses, dans le cas des machines, mais ne font le plus souvent l'objet que d'une approche simplifiée.

Dans ce domaine qui nous intéresse, le complexe sol-structure peut être assimilé à un assemblage de solides déformables en contact (ou interface).

Le comportement d'ensemble de ces structures dépend sensiblement des comportements des surfaces de contacts sol-structure.

Dans le cas réel, le transfert des charges d'une partie de la structure à une autre, passe par l'interface.

Il apparaît donc qu'une description correcte du comportement globale passe par la prise en compte de l'interface entre les différentes parties constituant l'ouvrage.

Nous nous intéressons particulièrement donc aux fondations de machines vibrantes longues en plan en prenant en considération le phénomène d'interaction sol-structure .

Nous nous placerons dans l'hypothèse de petites déformations, et les structures seront considérés comme viscoélastiques .

Le phénomène d'interaction sol-structure sera traité de manière globale en utilisant la méthode des éléments finis.

Notre travail consistera à :

- L'étude de la méthode des éléments finis
- L'étude des éléments d'Interfaces
- Etude du comportement dynamique des systèmes sol-structure
- Elaboration d'un programme d'éléments finis pour le calcul dynamique des systèmes sol-interface-structure
- Etude de cas

## **CHAPITRE II**

# **METHODES DES ELEMENTS FINIS**

## I) INTRODUCTION :

L'évolution actuelle de la technologie ..l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères. Pour dominer ces projets, l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes .

Les sciences de l'ingénieur permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations dérivées partielles qui sont très complexes et très dur à résoudre.

C'est à ce stade qu'intervient la méthode des éléments finis en permettant le passage de résolution des équations différentielles partielles à la résolution des système algébriques.

C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique, problèmes stationnaires ou non, problèmes linéaires ou non.

## II) HISTORIQUE :

Les bases théoriques de la M.E.F repose d'une part sur la formulation énergétique. De la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximation.

En ce qui concerne les théorèmes énergétiques de l'élasticité, leur formulation a été effectuée au siècle dernier grâce aux travaux de **NAVIER (1819)** sur les structures hyperstatiques puis **MAXWELL (1864)** et **CASTIGLIANO (1878)** qui établissent de façon complète les théorèmes de l'énergie.

Cependant, les applications de cette formulation au calcul des structures complexes ont été inexistant à cause de l'indisponibilité des moyens de calcul. Il faut noter qu'en 1932 l'établissement par **H. CROSS** d'une méthode rendant possible l'analyse de système de poutre avec les moyens de calcul de l'époque (distribution des moments).

Cependant ces techniques ne permettent pas jusqu'à la résolution des problèmes des milieux continus à l'aide des méthodes d'approximation adéquates.

C'est au début du 20<sup>ème</sup> siècle qu'ont été acquis les résultats fondamentaux dans le domaine des méthodes d'approximation sous l'impulsion de **RITZ (1908)** et **GALERKIN (1915)**, puis en 1943 **COURANT** établit les bases de la M.E.F en montrant que la résolution de certain problèmes de milieux continus est possible en effectuant une discrétisation spatiale du domaine tout en utilisant les méthodes d'approximation variationnelle.

Avec le développement de l'ordinateur la résolution des équations ne posait plus de problème. Cela a provoqué un retour aux méthodes classiques d'analyse.

La méthode matricielle permettant de traiter des problèmes assez complexes. Parmi les contributions les plus importantes citons celle de **LEVY (1947)** et **GARVEY (1951)** par la méthode des forces et **LEVY (1953)** par la méthode des déplacements. En 1954, **DENKE** systématise la méthode. En 1955, **ARGYRIS** présente une approche unifiée des méthodes des déplacements et des forces, puis l'année suivante, **TURNET** et **CLOUGH** publient la présentation systématique de la méthode des déplacements.

Dès 1960, la MEF subie un développement rapide vers plusieurs directions :

- Création d'éléments de haute précision.
- Construction d'une base mathématique de la MEF.
- Utilisation de la MEF pour la résolution des problèmes non linéaires, non stationnaires.

### **III) PRINCIPES DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS :**

Cette méthode consiste en la discrétisation du milieu continu dont on recherche l'une des caractéristiques qui présente l'inconnue du problème (contrainte, déplacement, température, ...), en ce domaine appelé « élément », cette inconnue ne sera pas déterminé d'une manière exacte mais approché par une fonction dont les valeurs coïncident avec celle de la solution exacte en certain points particuliers appelés « noeuds d'interpolation ».

Une fois ces valeurs calculées par la résolution des systèmes algébriques vérifiant l'équilibre physique, on retrouvera les valeurs de la fonction à l'intérieur de l'élément par interpolation.

### **III-1) DIFFERENTES FORMULATIONS DE LA METHODE :**

Il existe plusieurs sorte de formulations d'éléments finis en mécanique des structures. parmi elles :

- **FORMULATION CONTRAINTE OU EQUILIBRE :**

Dans laquelle on se donne une approximation, soit sous forme d'un champs de contraintes en équilibre, soit sous forme d'une fonction de contraintes. Elle se base sur la théorie de l'énergie complémentaire.

- **FORMULATION DEPLACEMENT :**

Dans laquelle on se donne une approximation du champs de déplacement. Elle se base sur la stationnarité de l'énergie potentielle.

- **FORMULATION MIXTE :**

Celle-ci considère le champs de déplacement et de contrainte comme inconnues primaires du problème, d'où le nom mixte.

En MEF, la formulation la plus utilisée est celle du déplacement, que l'on expose ci-après.

- **FORMULATION DEPLACEMENT :**

Cette formulation fut mise au point dans le cadre du « principe des déplacements virtuels » qui atteste que l'équilibre du milieu nécessite que pour n'importe quel petit déplacement virtuel imposé au milieu, la somme des travaux virtuels internes est égale à la somme des travaux virtuels externes.

Considérons l'équilibre d'un milieu continu quelconque.

Les forces extérieures appliquées sont :

- Les forces volumiques ( $f^b$ )

- Les forces surfaciques (  $f^s$  ).
- Les forces concentrées (  $f^i$  )

### III-2) LE PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL

Le principe PDV est traduit par l'expression suivante :

$$\int_V \varepsilon^{-t} \tau dv = \int_V \bar{U}^t f^b dv + \int_S \bar{U}^{st} f^s dv + \sum_i \bar{U}^i f_i \quad (2.1)$$

$\tau$  : vecteur contrainte .

$\varepsilon^t$  : vecteur déformation .

$\bar{U}^t$  : vecteur déplacement virtuel.

$\bar{U}^{st}$  et  $\bar{U}^i$  : vecteur déplacement virtuel causes respectivement par les forces surfaciques et concentrées.

Nous savons que dans la MEF ,le milieu est approché par un assemblage d'éléments, où les déplacements à l'intérieur de chaque élément s'exprime seulement en fonction des déplacements des noeuds de l'élément , par conséquent pour l'élément « m » nous avons :

$$U^m(x,y,z) = H^m(x,y,z) \bar{U}$$

$U^m$  : déplacement à l'intérieur de l'élément.

$H^m$  : matrice d'interpolation.

$\bar{U}$  : vecteur des 03 composantes globales de déplacement des noeuds.

$$\begin{matrix} \tau & \varepsilon & \tau \\ & & \\ \varepsilon & & \end{matrix} \quad (2.2 \text{ et } 2.3 \text{ respectivement})$$

$\hat{U}$  : vecteur déplacement des noeuds.

Reformulons à présent l'équation (2.1) en assemblant tous les éléments :

$$\sum_{m=1}^k \int \varepsilon^{-mt} \tau^m dv^m = \sum_{m=1}^k \int \bar{U}^{mt} f^{mb} dv^m + \sum_{m=1}^k \int \bar{U}^{stm} f^{sm} dv + \sum_i \bar{U}^i f_i \quad (2.1)$$

L'équation ( 2.4 ) exprime l'équilibre statique, cependant lors d'un chargement dynamique il y a apparition de forces d'inertie en utilisant le principe de **D'ALEMBERT** :

« Nous pouvons inclure les forces d'inertie comme étant des forces de volumes et en supposant que l'accélération de l'élément est dans le même sens que le déplacement »

nous avons alors :

$$R_b = \sum_m \int_{V^m} H^{mt} [f^{bm} - \zeta^m H^m \ddot{U}] dV^m$$

l'équation devient:

$$M\ddot{U} + KU = R$$

$$M = \sum_m \int_{V^m} \zeta^m H^{mt} H^m dV^m$$

$\ddot{U}$  = accélération des points nodaux

S'il y a dissipation d'énergie lors de la réponse d'une structure à un mouvement vibratoire nous en tenons compte par l'introduction des forces d'amortissement l'équation d'équilibre devient :

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = R$$

$C$  : matrice d'amortissement .

$\dot{U}$  : vecteur vitesse des points nodaux

En pratique la détermination de  $C$  est difficile sinon impossible car les propriétés d'amortissement sont dépendant de la fréquences .Pour cette raison  $C$  n'est pas en général assemblée ,mais constituée en utilisant les matrices masse et rigidité de l'ensemble .

$k$  = nombre total d'éléments



En substituant les 02 équations (2.2 , 2.3 )dans l'équation (2.1) nous obtenons :

$$\bar{U}^T \left[ \sum_m \int_{V^m} B^{mt} C^m B^m dV^m \right] \hat{U} = \bar{U}^T \left[ \left\{ \sum_m \int_{V^m} H^{mt} f^{bm} dV^m \right\} + \left\{ \sum_m \int_{S^m} H^{smt} f^{sm} dS^m \right\} \right] - \left\{ \sum_m \int_{V^m} B^{mt} \tau^{im} dV^m \right\} + F$$

F : vecteur des forces extérieures appliquées aux noeuds

En imposant un déplacement virtuel égale à l'unité ( $\bar{U}^T = 1$ ) et en notant  $\hat{U}=U$  nous obtenons :

$$K U=R$$

$$K = \left[ \sum_m \int_{V^m} B^{mt} C^m B^m dV^m \right] : \text{Matrice de rigidité globale}$$

$$R=R_b+R_s-R_i+R_c$$

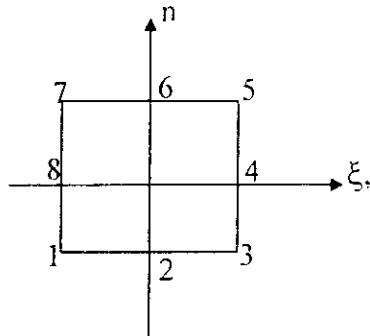
$$\left[ \begin{array}{l} R_b = \left\{ \sum_m \int_{V^m} H^{mt} f^{bm} dV^m \right\} \\ R_s = \left\{ \sum_m \int_{S^m} H^{smt} f^{sm} dS^m \right\} \\ R_i = \left\{ \sum_m \int_{V^m} B^{mt} \tau^{im} dV^m \right\} \\ R_c = F \end{array} \right]$$

Les  $R_b$ ,  $R_s$ ,  $R_i$  expriment respectivement l'effet des forces de volume ,surfaiques et concentrées.

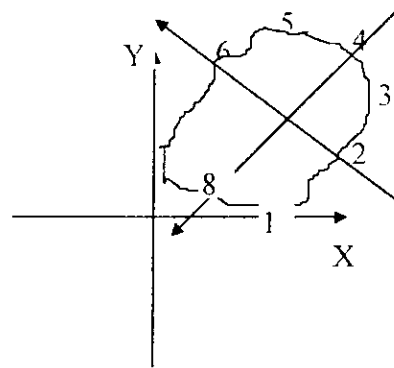
### III-3) DETERMINATION DE LA MATRICE RIGIDITE ET MASSE D'UN ELEMENT CARRE A 8 NOEUDS :

Dans ce paragraphe nous expliciterons les étapes de calcul de la matrice rigidité et masse pour un élément isoparamétrique carré à 8 noeuds et à 2 degrés de liberté par noeud.

L'élément est appelé isoparamétrique parce que la même fonction d'interpolation est utilisée pour définir la variation des déplacements dans l'élément est aussi utilisée pour définir la géométrie de l'élément .



**Plan naturel  
élément parent**



**Plan physique  
élément isoparamétrique**

La transformation définissant la forme géométrique de l'élément isoparamétrique lie tout point  $p(x,y)$  à un point  $p'(\xi,,n)$  de l'élément parent .

cette transformation doit répondre aux conditions suivantes :

- La transformation doit être bijective, les points  $p$  et  $p'$  forment des couples .Le déterminant jacobien de la transformation ne peut être nul ou infini (pour tout point  $p(\xi,,n)$  de l'élément parent ) .
- la transformation doit être définie uniquement par les coordonnées  $X_i, Y_i$  des huit noeuds de l'élément isoparamétrique .
- Si  $p'$  coïncide avec un noeud de l'élément parent le point  $p$  correspondant est le noeud de même numéro de l'élément isoparamétrique .

Donc :

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i(\zeta, n) x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^8 N_i(\zeta, n) y_i$$

Les fonctions de forme  $N_i(\xi, n)$  sont données par :

- Coins (1,3,5,7) :

$$N_i(\xi, \eta) = (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1)$$

- Milieux (2.4.6.8):

$$\begin{aligned} \xi_i = 0 & \quad n_i(\xi, \eta) = 1/2(1 - \xi^2) (1 - \eta \eta_i) \\ \eta_i = 0 & \quad n_i(\xi, \eta) = 1/2(1 - \eta^2) (1 + \xi \xi_i) \end{aligned}$$

Pour satisfaire à la troisième condition on doit avoir :

$$n_i(\xi_i, \eta_i) = \delta_{ij} \quad \text{pour } i=1,8 \\ \text{et } j=1,8$$

### III-3-1) INTERPOLATION DU CHAMPS DE DEPLACEMENT :

Le champs de déplacement  $\{U\}$  en tout point p de l'élément isoparamétrique est donné par :

$$\{U\} = [H] \{\hat{U}\}$$

$$H = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

2\*16

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \vdots \\ U_8 \\ V_8 \end{bmatrix}$$

$U_i, i=1,8$  déplacements horizontaux des noeuds  
 $V_i, i=1,8$  déplacements verticaux des noeuds

$$U = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) U_i$$

$$V = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) V_i$$

La définition de la transformation géométrique et la définition de l'interpolation du champs de déplacement se basent :

1. Sur les mêmes noeuds
2. Sur les mêmes fonctions de forme

Cela justifie l'appellation de l'élément isoparamétrique.

La matrice de rigidité est donné par :

$$[K] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^t [C] [B] |J| d\zeta dn$$

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \dots & N_{8,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \dots & 0 & N_{8,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \dots & N_{8,y} & N_{8,x} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C1 & C2 & 0 \\ C2 & C1 & 0 \\ 0 & 0 & C3 \end{bmatrix}$$

$$C1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C2 = \frac{\nu C1}{(1-\nu)}$$

$$C3 = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

E = **Module de Young**

\nu = **Coefficient de Poisson**

$$|J| = \begin{bmatrix} \sum_1^8 \frac{\partial N_i x_i}{\partial \xi} & \sum_1^8 \frac{\partial N_i y_i}{\partial \xi} \\ \sum_1^8 \frac{\partial N_i x_i}{\partial n} & \sum_1^8 \frac{\partial N_i y_i}{\partial n} \end{bmatrix}$$

La matrice de masse est donné par:

$$[M] = \int_A \rho [H]^t [H] dA$$

$$[M] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \rho [H]^t [H] |J| d\zeta dn$$

\rho = **masse volumique**

### III-3-2) PROPRIETES DE LA MATRICE DE RIGIDITE

la matrice de rigidité  $K^e$  a trois propriétés essentielles qui sont :

1. La symétrie en vertu du théorème **MAXWELL-BETTI**
2. Elle est singulière avant l'introduction des conditions aux limites .ce qui exprime le mode de déplacement rigide de l'élément .
3. Définir positive .ce qui donne à l'énergie de déformation sa propriété physique d'être positive ou nulle.

### III-3-3) GENERALISATION OU DOMAINE ENTIER -ASSEMBLAGE :

Dés que l'on a établi les matrice de rigidité  $K^e$  et  $M^e$  de tous les éléments ,il est nécessaire de les assembler dans la matrice de rigidité de toutes la structure  $K, E$  .en utilisant l'approche énergétique (exposant le principe pour la matrice rigidité on peut définir la méthode d'assemblage )

Soit  $\Pi$  l'énergie potentielle totale de l'élément :

$$\Pi^e = \frac{1}{2} (U^e)^t (K^e) (U^e) - (U^e)^t F^e$$

Puisqu'on a une comptabilité des élément on peut obtenir l'énergie potentielle totale de la structure par simple sommation des énergie potentielles totales élémentaire .

$$\Pi = \sum \Pi^e = \sum \left( \frac{1}{2} (U^e)^t (K^e) (U^e) - (U^e)^t (F^e) \right)$$

Les déplacement nodaux sont obtenus par une relation matricielle de type :

$$(U^e) = (B^e) (U)$$

avec :

$(B^e)$  :matrice de location ou de conductivité géométrique dont les éléments sont des 0 ou des 1, des 2 équations on déduit :

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum \left( \frac{1}{2} (U)^t (B^e)^t (K^e) (B^e) (U) - (U)^t (B^e)^t (F^e) \right) \\ &= \frac{1}{2} (U)^t (K) (U) - (U)^t (F) \end{aligned}$$

avec :

$$(K) = \sum (B^e)^t (K^e) (B^e) \quad \text{Matrice de rigidité globale}$$

## **IV) CONVERGENCE DE LA MEF :**

il y a des propriétés qui sont nécessaire ou tout au moins souhaitables au niveau de la structure complète .En particulier les conditions de convergences de la MEF sont :

### **IV-1) COMPLETEUDE :**

Un élément fini est dit complet quand il permet la définition d'un champs déplacement qui représente :

- **MODE RIGIDE :**

Quand on prescrit aux déplacements nodaux des valeurs correspondant aux déplacements d'ensemble ,on doit trouver un état de déformation nul dans l'élément et donc des forces nodales nulles.

- **ETAT DE DEFORMATION CONSTANTS :**

Quand on prescrit aux déplacements nodaux d'un élément des valeurs correspondant à un état de déformation constant, on doit effectivement trouver cet état de déformation à l'intérieur de l'élément .

### **IV-2) COMPATIBILITE :**

Un élément fini est dit compatible quand il permet la définition d'un champs de déplacement avec une continuité à l'intérieur de l'élément et aux interfaces inter-éléments .

Physiquement ,la compatibilité assure qu'il n'y aura apparition de vides ou de recouvrements entre les élément une fois que l'assemblage est fait.

## **CHAPITRE III**

# **INTEGRATION NUMERIQUE**



## I) INTRODUCTION

Dans la méthode des éléments finis les matrices élémentaires [K] et [M] s'exprime sous forme d'intégrales à une, deux ou trois dimensions, définies sur l'élément réel  $V^e$  : (nous exploiterons l'intégration numérique pour la matrice [K] et ce sera de même pour la matrice [M])

$$[K] = \int_{V^e} [B]^T [D] [B] dv$$

Sur l'élément de référence, ces intégrales deviennent :

$$[K] = \int_{V^r} [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] \det(j(\xi)) dV^r$$

$V^r$  : Volume de l'élément de référence de la transformation géométrique.

soit encore:

$$[K] = \int_{V^r} [K^*] dV^r$$

$$[K^*] = [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] \det(j(\xi))$$

Il est en général recommandé d'utiliser une intégration numérique de l'expression ( ) de la forme :

$$[K] = \sum_{i=1}^r W_i [K^*(\xi_i)]$$

$\xi_i$  : Les coordonnées des points d'intégration dans le repère local de l'élément de référence.

$W_i$  : Les coefficients de pondération

## II) METHODE DE GAUSS :

La méthode de Gauss est une méthode d'intégration numérique très utilisée dans laquelle les 'r' coefficients  $W_i$  et les 'e' abscisses  $\xi_i$  sont déterminés de manière à intégrer exactement des polynômes d'ordre  $m \leq e \cdot r - 1$

Ceci dit pour une intégration à une dimension exprimée par la relation précédente. quant à l'intégration numérique à deux dimensions elle consiste à utiliser dans chaque direction  $\xi$  et  $\eta$  une intégration numérique à une dimension, si nous utilisons  $r_1$  points dans le sens  $\xi$ , et  $r_2$  dans le sens  $\eta$ . la méthode de gauss intègre exactement le produit d'un polynôme en  $\xi$  d'ordre  $(r_1 - 1)$  et d'un polynôme en  $\eta$  d'ordre  $(r_2 - 1)$ .

Donc en utilisant  $2 \times 2$  points pour intégrer l'expression de  $[K]$ .

$$[K] = [B_r(\xi_1, \eta_1)]^T [[D]_1 W_1 \cdot W_2 \cdot \det(j(\xi_1, \eta_1))] [B(\xi_1, \eta_1)] + [B_r(\xi_1, \eta_2)]^T [[D]_1 W_1 \cdot W_2 \cdot \det(j(\xi_1, \eta_2))] [B(\xi_1, \eta_2)] + [B_r(\xi_2, \eta_1)]^T [[D]_2 W_2 \cdot W_1 \cdot \det(j(\xi_2, \eta_1))] [B(\xi_2, \eta_1)] + [B_r(\xi_2, \eta_2)]^T [[D]_2 W_2 \cdot W_2 \cdot \det(j(\xi_2, \eta_2))] [B(\xi_2, \eta_2)].$$

## II-1) Introduction des conditions aux limites:

Les conditions aux limites peuvent être introduites dans le système à résoudre de plusieurs manières.

### a) Méthode du terme diagonal dominant :

La matrice  $[K]$  est assemblée sans tenir compte des conditions aux limites, puis chaque relation  $U_i = U_i$  est introduite en remplaçant :

- $K_{ii}$  par  $K_{ii} + \alpha$  ( $\alpha$  étant un nombre très grand par rapport à tous les termes  $K_{ij}$ )
- $F_i$  par  $\alpha U_i$ .

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{1i} & K_{1n} \\ K_{j1} & K_{jj} + \alpha & K_{jn} \\ K_{n1} & K_{ni} & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_i \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \alpha U_i \\ U_n \end{bmatrix}$$

L'équation  $i$  s'écrit :

$$\alpha U_i + \left( \sum_{j=1}^n K_{ij} U_j \right) = \alpha U_i$$

Elle admet la solution approchée :

$$U_i \approx U_i \text{ si } \alpha U_i \gg \sum_{j=1}^n K_{ij} U_j.$$

En pratique nous pouvons choisir  $\alpha = 10^7 \cdot \text{Max}(K_{ij})$ , ou  $10^{15} \cdot \text{Max} |K_{ij}|$ , selon l'indicateur utilisé à une précision de 7 ou de 15 chiffres décimaux.

Ceci induit à une erreur sur  $U_i$  qui est du même ordre que la précision de l'ordinateur.

Cette méthode est très simple à mettre en oeuvre car il suffit de changer les deux termes  $K_{ij}$  et  $F_{ij}$ , mais elle pose des problèmes lorsque les termes de  $\{U_n\}$  sont grand.

### b) Méthode du terme unité sur la diagonale :

Elle consiste à modifier pour chaque relation  $U_i = U_i$ , le vecteur  $\{F\}$  puis la matrice  $[K]$ ;

$$F_j = F_j - K_{ji} U_i \quad j = 1, 2, \dots, n \quad j \neq i$$

$$F_i = U_i$$

$$K_{ij} = K_{ji} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad j \neq i$$

$$K_{ii} = 1$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{1,j-1} & 0 & K_{1,j+1} & K_{1,n} \\ K_{i-1,1} & K_{i-1,j-1} & 0 & K_{i-1,j+1} & K_{i-1,n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_{i+1,1} & K_{i+1,j-1} & 0 & K_{i+1,j+1} & K_{i+1,n} \\ K_{n1} & K_{n,j-1} & 0 & K_{n,j+1} & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - K_{1i} U_i \\ F_{i-1} - K_{i-1,i} U_i \\ U_i \\ F_{i+1} - K_{i+1,i} U_i \\ F_n - K_{ni} U_i \end{bmatrix}$$

Cette méthode ne pose pas les problèmes numériques de la précédente par contre elle est plus complexe à programmer.

### c) Méthode de suppression des équations :

Elle consiste à restructurer la matrice  $[K]$  de manière à supprimer les équations correspondant aux degrés de libertés imposés  $U_i$ . Elle a l'avantage de réduire le nombre d'inconnues du système. Comme la restructuration de  $[K]$  est une opération coûteuse, il est préférable de ne pas assembler les équations inutiles.

## III ) DETERMINATION DES VECTEURS ET DES VALEURS PROPRES:

### III-1) METHODE DE JACOBI

La méthode générale de JACOBI permet de calculer les  $n$  valeurs et vecteurs propres d'un système de dimensions limitées ( $n$  inférieur à 100) dont les matrices sont symétriques et définies positives.

Elle consiste à transformer les matrices  $[K]$  et  $[M]$  en des matrices diagonales en utilisant des transformations successives:

$$[K^1] = [K] \quad [M^1] = [M]$$

$$[K^2] = [Q^1]^T [K^1] [Q^1] \quad [M^2] = [Q^1]^T [M^1] [Q^1]$$

...

$$[K^{k+1}] = [Q^k]^T [K^k] [Q^k] \quad [M^{k+1}] = [Q^k]^T [M^k] [Q^k]$$

Les matrices  $[K^{k+1}]$  et  $[M^{k+1}]$  tendent vers des matrices diagonales  $[K^d]$  et  $[M^d]$  lorsque  $k$  tend vers l'infini. Les valeurs et les vecteurs propres sont alors :

$$[\lambda] = [K^d] [M^d]^{-1}$$

$$[X] = [Q_1][Q_2] \dots [Q_k][Q_{k-1}] \begin{bmatrix} \dots & & & 0 \\ & 1 & & \\ & \sqrt{M_{jj}^d} & & \\ & 0 & & \dots \end{bmatrix}$$

### III-2) METHODE DE RITZ

La méthode de RITZ permet de transformer un problème de valeurs propres de grandes dimension en un problème de dimension plus réduite.

Nous pouvons alors calculer toutes les valeurs propres et vecteurs propres du système réduit par la méthode de JACOBI.

Nous contraignons chaque vecteur propre du système à s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire de  $p$  vecteurs indépendants  $q_i$ , dits vecteurs de RITZ:

$$\{X\} = a_1 \{q_1\} + a_2 \{q_2\} + \dots + a_p \{q_p\}$$

$$\{X\} = [Q] \{a\}$$

$$(nx1) \quad (nxp) \quad (px1)$$

Cherchons les coefficients  $\{a\}$  tels que le vecteur  $\{X\}$  soit aussi proche possible d'un vecteur propre du système  $([K]-\lambda[M])\{X\} = 0$ .

Pour cela cherchons à rendre stationnaire le quotient de RAYLEIGH défini ainsi:

$$R(\{X\}) = \frac{\langle X \rangle [K] \{X\}}{\langle X \rangle [M] \{X\}} = \frac{\langle a \rangle [K'] \{a\}}{\langle a \rangle [M'] \{a\}}$$

$$[K'] = [Q]^T [K] [Q] \quad [M'] = [Q]^T [M] [Q]$$

La condition de stationnarité  $\delta R = 0$  pour tout  $\langle \delta a \rangle$  s'écrit :

$$([K'] - R [M']) \{a\} = 0$$

Cette expression définit un problème de valeurs propres de dimension  $p$ , dont les  $p$  vecteurs propres  $\{A_i\}$  et les valeurs propres  $\lambda_i$  vérifient:

$$[K'] [A] = [M'] [A] [\lambda']$$

où  $[A] = [\{A_1\} \{A_2\} \dots \{A_p\}]$ ;

$$[\lambda'] = \begin{bmatrix} \lambda_1' & & 0 \\ & \lambda_2' & \\ 0 & & \lambda_p' \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres  $\lambda_i'$  constituent ainsi des approximations des valeurs propres du système original. Ces approximations sont d'autant meilleures que les vecteurs de RITZ génèrent un sous espace qui contient les vecteurs propres cherchés.

De plus, les valeurs propres approchées  $\lambda_i'$  et les valeurs propres exactes  $\lambda_i$  vérifient une relation semblable à:

$$\lambda_1 \leq \lambda_1' \dots \lambda_p \leq \lambda_p' \leq \lambda_n$$

### III-3) METHODE DU SOUS ESPACE

Cette méthode est très largement utilisée pour calculer les  $p$  premières valeurs propres d'un système de grande dimension. Elle consiste à appliquer plusieurs fois la méthode de RITZ en améliorant les vecteurs de RITZ par itération inverse.

La méthode de RITZ force les vecteurs  $\{X\}$  à rester orthogonaux entre eux, alors que l'itération inverse ajuste la base vectorielle de RITZ, de manière à assurer la convergence vers les vecteurs propres correspondant aux plus petites valeurs propres.

La méthode du sous espace enchaîne les opérations suivantes:

- a) Choisir  $p$  vecteurs initiaux,
- b) Exécuter une itération inverse pour calculer simultanément les  $p$  vecteurs de RITZ  $\{q_i\}$ .
- c) Appliquer la méthode de Ritz pour rechercher les vecteurs propres dans le sous espace de RITZ,
- d) Tester la convergence de  $\lambda_i'$  et répéter si nécessaire les étapes b, c, d.

## IV) DETERMINATION DE LA MATRICE D'AMORTISSEMENT (C)

La matrice d'amortissement est une matrice délicate à élaborer. généralement on a affaire à deux types d'amortissement:

- amortissement interne ou amortissement du matériau
- amortissement géométrique ou bien radial

L'amortissement interne correspond à la perte d'énergie à l'intérieur du matériau dû à un comportement hystérésique ou visqueux.

L'amortissement géométrique correspond à la perte d'énergie dû à la propagation des modes à l'infini.

Généralement, dans les problèmes de dynamique, surtout en élasticité ou viscoélasticité, on prend une matrice d'amortissement qui satisfait les conditions d'orthogonalité afin de pouvoir découpler les équations du système sur la base des vecteurs propres.

CLOUGH et PENZIEN [6] présentent dans leur ouvrage une méthode pour déterminer la matrice d'amortissement en prenant comme point de départ une matrice d'amortissement diagonale sur la base des vecteurs propres normalisés de la forme:

$$C' = \phi^T C \phi = 2 \begin{bmatrix} \zeta_1 \omega_1 M_1 & 0 & \dots\dots\dots \\ 0 & \zeta_2 \omega_2 M_2 & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{bmatrix}$$

$\phi$  = Matrice des vecteurs propres

$$= [ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\dots\dots, \varphi_n ]$$

$\varphi_i$  = Vecteurs propres normalisés associés à la valeur propre  $w_i$

$\xi_i$  = Rapport d'amortissement modale

$w_i = i^{\text{ème}}$  mode propre.

Il s'en suit que l'on peut ensuite déterminer la matrice d'amortissement  $C$

$$C = m \left[ \sum_{i=1}^N \frac{2\zeta_i \omega_i}{M_i} \cdot \varphi_i \varphi_i^t \right] m$$

La détermination des vecteurs propres et des valeurs propres est traité dans le chapitre précédent.

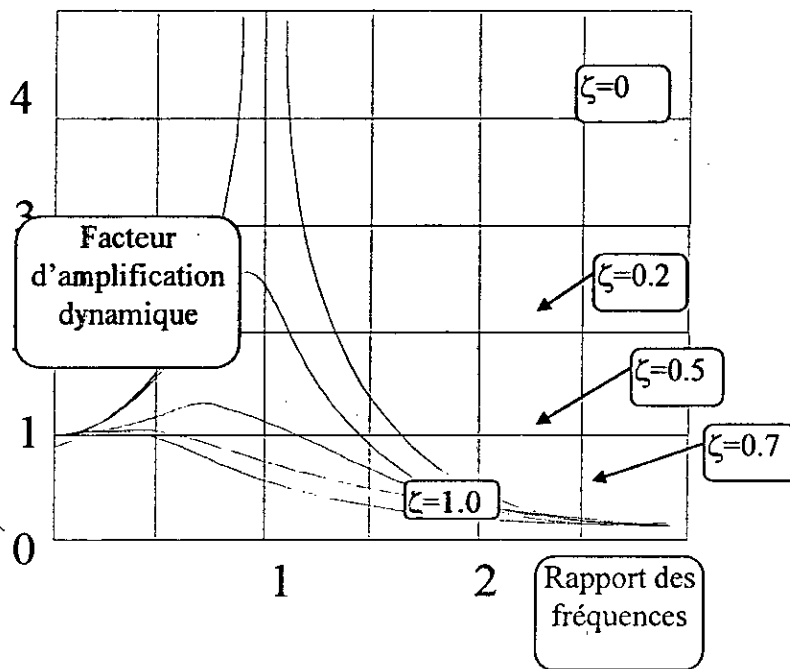


figure -3.1- Variation du facteur d'amplification dynamique en fonction de l'amortissement et de la fréquence



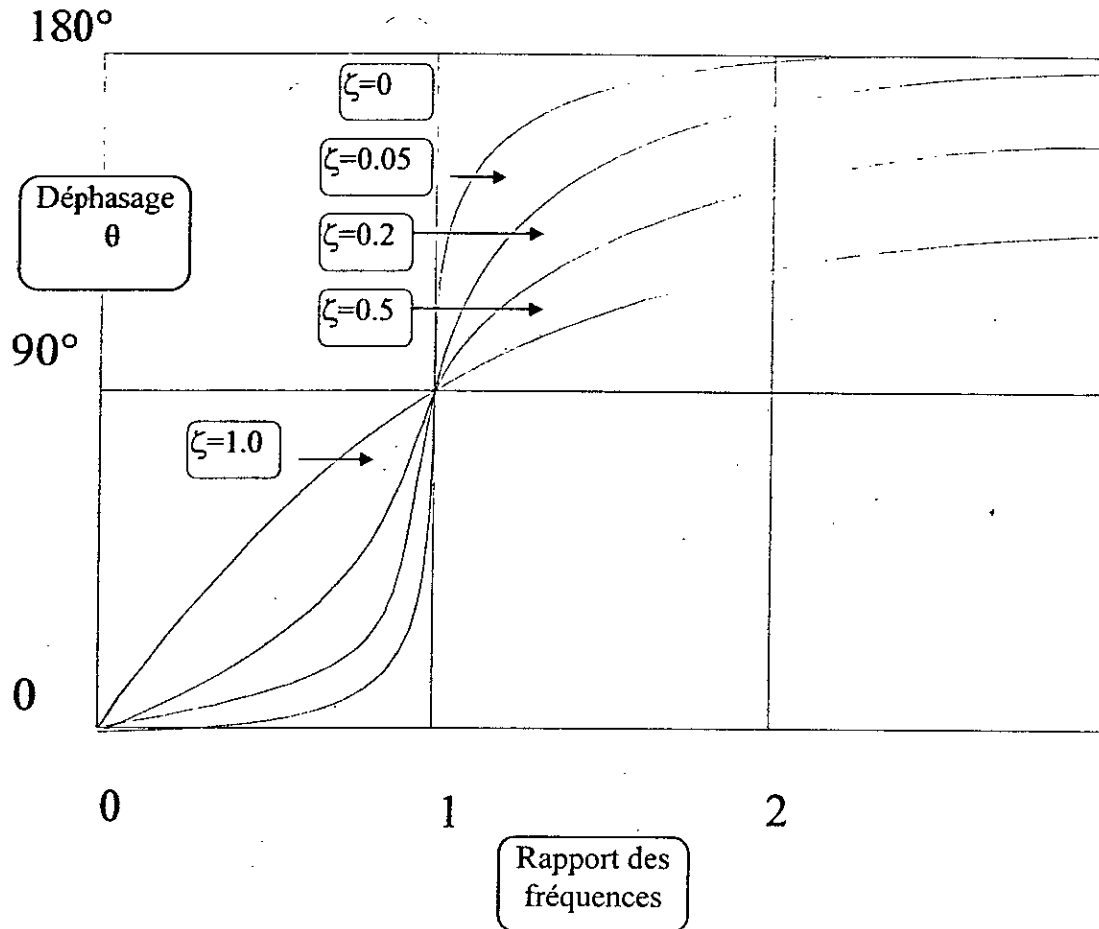


figure -3.2- Variation du déphasage avec l'amortissement et la fréquence

L'avantage majeur de cette méthode, en plus de permettre le découplage du système d'équations différentielles, est que seuls les modes spécifiquement considérés lors de la formation de la matrice d'amortissement seront amortis ; les modes restants ne le seront pas.

## V) METHODE D'INTEGRATION DIRECTE DES SYSTEMES DU SECOND ORDRE :

La mise en oeuvre effective de la méthode des éléments finis nécessite l'utilisation de méthodes numériques variées pour résoudre les systèmes d'équation algébriquement qui en résulte.

La discrétisation en espaces (x, y, z) d'un problème de propagation par la méthode des éléments finis, conduit à un système d'équation différentielles en temps t, en général du premier ou du second ordre.

**Premier ordre :**

$$[C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = [F] \quad \text{pour } t > t_0$$

$$\{U(t_0)\} = \{U_0\}$$

et ;

**Second ordre :**

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = [F] \quad \text{pour } t > t_0$$

### V-1) METHODE DES DIFFERENCES FINIES CENTRALE : (EXPLICITE)

Cette méthode utilise l'expression du système précédent à l'instant t, ainsi que les approximations des dérivées par différences finies centrées suivante :

$$\begin{cases} \{\bar{U}_t\} = \frac{1}{\Delta t^2} (\{U_{t+\Delta t}\} - 2\{U_t\} + \{U_{t-\Delta t}\}) \\ \{\dot{U}_t\} \approx \frac{n}{2\Delta t} (\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_{t-\Delta t}\}) \end{cases}$$

Donc

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{F(t)\} \quad t < t_0$$

devient,

$$[\bar{K}] \{U_{t+\Delta t}\} = \{R(t)\}$$

Avec,

$$\begin{cases} [\bar{K}] = [M] + \frac{\Delta t}{2}[C] \\ \{\bar{R}_i\} = \Delta t^2\{F(t)\} + [M](2\{U_i\} - \{U_{i-\Delta t}\}) + \frac{\Delta t}{2}[C]\{U_{i-\Delta t}\} - \Delta t^2[K]\{U_i\} \end{cases}$$

Ou sous forme incrémentale :

$$[\bar{K}]\{\Delta U\} = \{\bar{R}_i\}$$

$$\{\bar{R}_i\} = \Delta t^2\{F(t)\} + [M](\{U_i\} - \{U_{i-\Delta t}\}) + \frac{\Delta t}{2}[C](\{U_i\} + \{U_{i-\Delta t}\}) - \Delta t^2[K]\{U_i\}$$

$$\{U_{i+\Delta t}\} = \{U_i\} + \{\Delta U\}$$

A l'instant  $t = t_0$ ,  $\{U_0\}$  et  $\{\dot{U}_0\}$  sont connus et  $\{\ddot{U}_0\}$  peut être évalué en éliminant, de plus  $\{U_{10-\Delta t}\}$  est évalué en éliminant  $\{U_{1+\Delta t}\}$  entre les deux relations écrites à l'instant  $t = t_0$ .

$$\{U_{10-\Delta t}\} = \{U_0\} - \Delta t\{\dot{U}_0\} + \frac{\Delta t^2}{2}\{\ddot{U}_0\}.$$

La stabilité de la solution n'est assurée que pour  $\Delta t$  inférieur à une valeur  $\Delta t_c$  qui est liée à la plus petite période caractéristique de résonance  $T_{\min}$  du système physique étudié, de plus,  $\Delta t$  doit être assez petit pour que les erreurs des approximations soient acceptables.

Pour des problèmes non linéaires dans lesquels seul  $[K]$  dépend de  $\{U\}$ , il suffit d'utiliser  $K\{U_i\}$ .

## V-2) METHODE DE Houbolt : (IMPLICITE).

Cette méthode utilise l'approximation par différences finies décentrées à droite :

$$\{\ddot{U}_{i+\Delta t}\} = \frac{1}{\Delta t^2}(2\{U_{i+\Delta t}\} - 5\{U_i\} + 4\{U_{i-\Delta t}\} - \{U_{i-2\Delta t}\})$$

$$\{\dot{U}_{i+\Delta t}\} = \frac{1}{6\Delta t}(11\{U_{i+\Delta t}\} - 18\{U_i\} + 9\{U_{i-\Delta t}\} - 2\{U_{i-2\Delta t}\})$$

L'erreur de troncature de ces formules est en  $(\Delta t)^2$ .

$$[\bar{K}] \{U_{t+\Delta t}\} = \{R_{t+\Delta t}\}$$

$$[\bar{K}] = 2[M] + \frac{11}{6} \Delta t [C] + \Delta t^2 [K]$$

$$\{R_{t+\Delta t}\} = \Delta t^2 \{F_{t+\Delta t}\} + [M] (5\{U_t\} - 4\{U_{t-\Delta t}\} + \{U_{t-2\Delta t}\}) + \Delta t [C] (3\{U_t\} - \frac{3}{2}\{U_{t-\Delta t}\} + \frac{1}{3}\{U_{t-2\Delta t}\}).$$

En introduisant :

$$\{[\bar{K}]\{U_t\} = \{R_{t+\Delta t}\} - [\bar{K}]\{U_t\}$$

$$\{\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_t\} + \{\Delta U\}.$$

Cet algorithme est inconditionnellement stable pour calculer les valeurs  $t = t_0 + \Delta t$ ,  $t = t_0 + 2\Delta t$ , on doit avoir recours à d'autres méthodes d'intégration, par exemple la précédente. (méthode des différences finies centrales).

Pour les problèmes non-linéaires dans lesquels  $[M]$  et  $[C]$  sont constantes et  $[K]$  dépend de  $\{U\}$ .

La correction de  $\{U_{t+\Delta t}\}$  apportée par chaque itération dans un pas est définie par :

$$[K_{ne}] \{\Delta U^i\} = \{R_{t+\Delta t}\} - [\bar{K}(U_{t+\Delta t}^{i-1})] \{U_{t+\Delta t}^{i-1}\}$$

$$\{U_{t+\Delta t}^i\} = \{U_{t+\Delta t}^{i-1}\} + \{\Delta U^i\}$$

Dans la méthode de substitution :

$$[K_{ne}] = [\bar{K}]$$

Dans la méthode de NEWTON - RAPHSON :

$$[K_{ne}] = [K_i] = [\bar{K}] + \Delta t^2 \left[ \frac{\delta K}{\delta U} U \right]_{t+\Delta t}^{i-1}$$

### V-3) METHODE DE NEWMARK ET WILSON :

Ces méthodes implicite permettent de construire la solution à l'instant  $t + \Delta t$  à partir des vecteurs connus  $\{U_i\}$ ,  $\{\dot{U}_i\}$ ,  $\{\ddot{U}_i\}$ . Elles utilisent les développements limites suivants :

$$(3.1) \quad \{\dot{U}_{t+\tau}\} = \{\dot{U}_i\} + \tau \left( (1-a) \{\ddot{U}_i\} + a \{\ddot{U}_{t+\tau}\} \right)$$

$$(3.2) \quad \{U_{t+\tau}\} = \{U_i\} + \tau \{\dot{U}_i\} + \left( (1-b) \{\ddot{U}_i\} + b \{\ddot{U}_{t+\tau}\} \right)$$

Lorsque  $a=b=1/2$ , ces approximations consistent à supposer l'accélération constante dans l'intervalle  $t, t + \tau$  et égale à sa valeur.

Lorsque  $a = 1/2$  et  $b = 1/3$ , ces approximation consistent à supposer une accélération variant lineairement sur l'intervalle  $t, t + \tau$ :

$$[\bar{K}] \{U_{t+\tau}\} = \{R_{t+\tau}\} \quad (3.3)$$

où

$$[\bar{K}] = [M] + \tau a [C] + \frac{\tau^2}{2} b [K]$$

$$\begin{aligned} \{R_{t+\tau}\} = & \frac{\tau^2}{2} b \{F_{t+\tau}\} + [M] \left( \{U_i\} + \tau \{\dot{U}_i\} + \frac{\tau^2}{2} (1-b) \{\ddot{U}_i\} \right) + \\ & + [C] \left( \tau a \{U_i\} + \frac{\tau^2}{2} (2a-b) \{\dot{U}_i\} + \frac{\tau^3}{2} (a-b) \{\ddot{U}_i\} \right) \end{aligned}$$

#### V-3.1) METHODE DE NEWMARK :

Lorsque  $\tau = \Delta t$ , nous obtenons la méthode de NEWMARK qui est inconditionnellement stable si:

$$a \geq 1/2, b \geq 1/2(a+1/2)^2.$$

lorsque  $a = 1/2$  une condition de stabilité peut s'écrire ;

$$\Delta t \leq (l/c) \sqrt{\frac{1}{1-2b}}$$

Où ;

c : la vitesse de propagation des ondes dans le milieu, pour un solide élastique.

$$c^2 = \frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \begin{cases} E : \text{module élastique} \\ \nu : \text{coefficient de poisson} \end{cases}$$

Lorsque  $b = 0$ , la méthode est explicite, les valeurs les plus utilisées sont  $a = b = 1/2$ .

Après résolution de (3.3), il faut calculer  $\{U_{t+\Delta t}\}$  puis  $\{U_{t-\Delta t}\}$  en utilisant (3.2).

### V-3.2) METHODE DE WILSON - $\theta$ :

La méthode de WILSON correspond au cas où  $\tau = \theta \Delta t$  avec  $\theta > 1$ , elle consiste donc à appliquer la méthode de NEWMARK pour construire la solution  $\{U_{t+\theta\Delta t}\}$  à l'instant  $t+\theta \Delta t$  nécessaire pour le pas de temps suivant.

Pour cela nous construisons successivement :

$$\{\ddot{U}_{t+\theta\Delta t}\} = \frac{2}{b(\theta\Delta t)^2} (\{U_{t+\theta\Delta t}\} - \{U_t\}) - \frac{2}{b\theta\Delta t} \{\dot{U}_t\} - \left(\frac{1}{b} - 1\right) \{\ddot{U}_t\}$$

$$\{\ddot{U}_{t+\Delta t}\} = \{\ddot{U}_t\} + \frac{1}{\theta} (\{\ddot{U}_{t+\theta\Delta t}\} - \{\ddot{U}_t\})$$

$$\{\dot{U}_{t+\Delta t}\} = \{\dot{U}_t\} + \Delta t ((1-a)\{\dot{U}_t\} + a\{\dot{U}_{t+\Delta t}\})$$

$$\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_t\} + \Delta t \{\dot{U}_t\} + \frac{\Delta t^2}{2} ((1-b)\{\ddot{U}_t\} + b\{\ddot{U}_{t+\Delta t}\})$$

Augmenter la valeur de  $\theta$  permet d'accroître l'amortissement des modes de vibration de fréquences élevées, une méthode inconditionnellement stable souvent utilisés correspond à :

$$a = 1/2, b = 1/2, \theta = 1,4.$$

Pour les problèmes non linéaires, nous utilisons des relations semblables à :

$$[K_{nc}] \{\Delta U^i\} = \{R_{t+\Delta t}\} - [\bar{K}(U_{t+\Delta t}^{i-1})] \{U_{t+\Delta t}^{i-1}\}$$

$$\{U_{t+\Delta t}^i\} = \{U_{t+\Delta t}^{i-1}\} + \{\Delta u^i\}$$

$$[K_{nc}] = [K_t] = [\bar{K}] + \Delta t^2 \left[ \frac{\delta K}{\delta U} U \right]_{t+\Delta t}^{i-1}$$

Construite à partir de la matrice  $[K]$  et  $\lambda$  résidus définis par (3.3).

## **CHAPITRE III**

# **LES ELEMENTS D'INTERFACE**

## I) INTRODUCTION

Le comportement des systèmes sol-structure lors d'un chargement dynamique (séisme, explosion, machines vibrantes...) peut être influencé d'une manière significative par les caractéristiques des interfaces ou jonctions entre la structure et le sol.

Souvent l'analyse des systèmes sol-structure sous l'effet des charges extérieures est effectuée en supposant qu'il y a une liaison parfaite entre le sol et la structure pendant toutes les étapes de chargement.

Bien que cette supposition simplifie généralement la procédure d'analyse et met en évidence l'effet de l'interaction sol-structure, elle reste cependant limitée parce que les mouvements relatifs existant au niveau des interfaces ne sont pas tenus en compte dans l'analyse.

Sous un chargement dynamique, des mouvements relatifs tel que le glissement, le décollement peuvent apparaître au niveau de ces zones critiques lors des différentes étapes de chargement.

Ainsi pour une analyse plus correcte de ces problèmes, on doit tenir compte de ces mouvements relatifs.

Les éléments d'interface sont un outil très efficace dans la modélisation de ces discontinuités géométriques.

Dans ce chapitre, nous allons présenter la base de l'étude des interfaces et préciser les choix effectués parmi les différents types d'éléments d'interface pour la modélisation de ces zones de contact.



## II) MODES DE DEFORMATION

Comme il a été mentionné précédemment, les interfaces entre sol et structure subissent des mouvements relatifs.

Les modes de déformations possibles sont :

### II-1) - ETAT COLLE :

Dans ce cas, on a une continuité de déplacement dans les deux directions ( $\tau$ ,  $\sigma_n$ ) : Fig.(3.2.a).

Pour cet état, on a :

$$\begin{aligned} |\tau| < R_c \\ \sigma_n > 0 \end{aligned}$$

Avec :

$R_c$  : résistance au cisaillement de l'interface

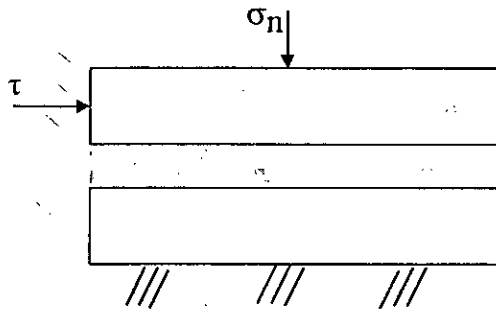


Fig.3.2.a : Etat collé

### II-2) GLISSEMENT :

Dans ce mode de déformation, on a une continuité de déplacement dans la direction tangentielle, avec un contact maintenu entre les deux solides (Fig.3.2.b).

Pour cet état, on a :

$$\begin{aligned} |\tau| &> R_c \\ \sigma_n &> 0 \end{aligned}$$

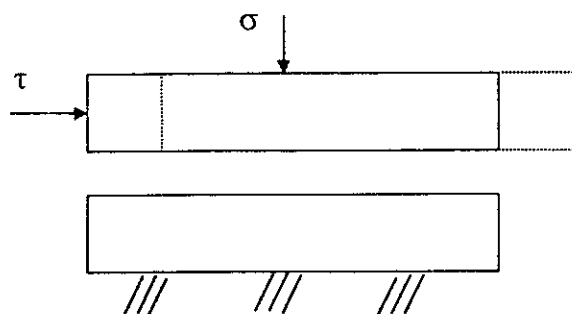


Fig.3.2.b : glissement

### II-3) DECOLLEMENT :

Ce mode de déformation est caractérisé par une discontinuité des déplacements dans les deux directions (Fig.3.2.d).

Pour un état de décollement, on a :

$$\begin{aligned} |\tau| &< R_c \\ \sigma_n &> 0 \end{aligned} \quad \text{Sur la surface } A_c$$

$$\begin{aligned} \tau &= 0 \\ \sigma_n &\leq 0 \end{aligned} \quad \text{Sur la surface } A-A_c$$

Avec :

A : surface totale.

$A_c$  : surface de contact.

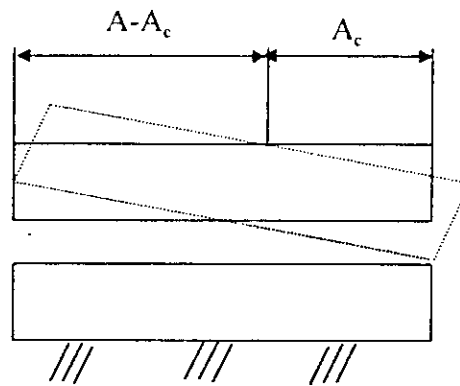


Fig.3.2.c : décollement

#### II-4) PASSAGE D'UN ETAT DECOLLE A UN ETAT COLLE :

Dans ce mode de déformation, on a :

$$\begin{aligned} \tau &= 0 \\ \sigma_n &> 0 \end{aligned}$$

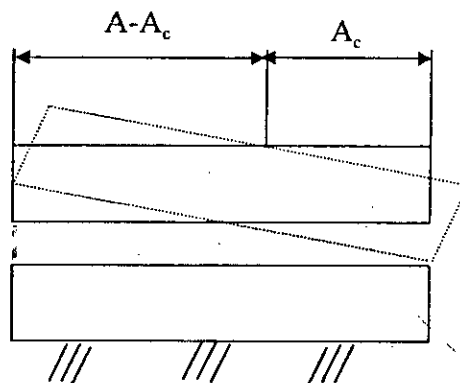


Fig.3.2.d : passage d'un état décollé à un état collé

### III) METHODES D'ANALYSE DES PROBLEMES D'INTERFACE :

Vue la grande efficacité des éléments d'interface dans la modélisation de ces discontinuités géométriques, nombreux sont les chercheurs qui ont proposé des éléments d'interface pour le traitement des problèmes de contact entre les milieux de même nature ou de nature différentes.

En effet, les premiers travaux étaient destinés au problème de discontinuité dans les massifs rocheux.

Depuis, de nombreux auteurs ont utilisé des éléments d'interface pour tenir compte des conditions de contact entre solides.

On notera que les travaux proposés par ces différents auteurs appartiennent à l'une des deux approches suivantes :

- Méthode utilisant une relation limite en contraintes.
- Méthode utilisant une loi de comportement de l'interface.

### III-1) METHODE UTILISANT UNE RELATION LIMITE EN CONTRAINTES :

Ces méthodes sont basées sur le partitionnement de l'interface à partir d'une relation limite exprimée en terme de contraintes.

Leur hypothèse de base est que l'interface ne peut se trouver que dans un nombre fini d'états : collé, décollé ou frottant.

Si on considère que la relation qui traduit la rupture de l'interface est de type **Coulomb**, c'est à dire :

$$|\tau| = C + \sigma_n \operatorname{tg} \Phi$$

Avec :

C : cohésion.

$\Phi$  : angle de frottement

L'interface caractérisée par un certain nombre de points de contact est partitionnée en fonction de l'état de liaison en chacun de ses points.

$$|\tau| < C + \sigma_n \operatorname{tg} \Phi \quad \text{état collé}$$

$$\sigma_n = 0 \quad \text{décollement}$$

$$|\tau| = C + \sigma_n \operatorname{tg} \Phi \quad \text{glissement}$$

Dans ce type d'approche, on cite les travaux de **R. FRANK** et **AL** qui, en se basant sur les travaux de **HERMANN** (ce dernier a proposé des éléments de type ressort pour la modélisation du comportement de l'interface acier-béton), ont proposé le dédoublement des noeuds le long de la discontinuité et la sensation de chaque noeud du solide S1 avec son

double du solide S2, et on muni chaque doublet de nœud de deux ressort fictifs, un tangentiel, et un normal à la surface de contact.

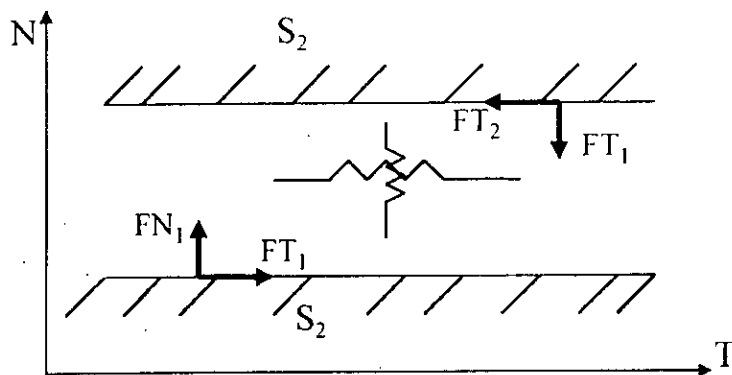


Fig 3.3 - Élément de contact -

Ces ressorts de rigidité appropriés contrôlent le glissement, le décollement entre les corps en contact.

Suivant l'état de contact de l'élément considéré, on impose deux, une ou aucune continuité de déplacement.

Ainsi, pour les éléments de contact qu'on considère comme liés, on impose la continuité des déplacements suivant les axes locaux T et N ; pour les éléments considérés en état de décollement, on n'impose aucune continuité de déplacement et enfin pour les éléments qui glissent, on impose seulement la continuité des déplacements suivant l'axe N.

Pour imposer la continuité de déplacement souhaité dans une direction, on introduit entre les deux points qui forment l'élément, un ressort de grande rigidité.

### III-2) METHODE UTILISANT UNE LOI DE COMPORTEMENT DE L'INTERFACE :

Dans ces méthodes, l'interface est assimilée à un matériau fictif, nous définissons donc sa loi de comportement comme la relation entre les contraintes et les déplacements relatifs associés en un point de l'interface.

Cette loi, non linéaire dans le cas général, peut s'exprimer sous une forme matricielle et incrémentale.

$$\begin{Bmatrix} d\tau \\ d\sigma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{nn} & C_{nt} \\ C_{nt} & C_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dU \\ dV \end{Bmatrix}$$

Soit

$$\{d\sigma\} = [C]\{dS\}$$

Avec :

[C] : matrice de comportement de l'interface  
{dσ} : vecteur contrainte de l'interface  
{dS} : vecteur déplacement relatif de l'interface

Les termes  $C_{nn}$  et  $C_{nt}$  de la matrice de comportement traduisent un couplage éventuel entre les cisaillements et la traction (ou compression) du plan de l'interface, quant aux termes  $C_{nn}$  et  $C_{tt}$ , ils expriment respectivement les composantes normales et tangentielles de la matrice.

#### IV) CHOIX DU MODELE DE L'INTERFACE :

Le traitement analytique des problèmes comportant des interfaces posent beaucoup de difficultés théoriques et mathématiques. Et si ce traitement est envisageable pour quelques configurations idéales, les solutions correspondent rarement aux exigences pratiques.

Parmi les méthodes numériques développés pour apporter des solutions approchées à ce type de problème, la méthode des éléments finis est l'outil le plus utilisé dans ce domaine.

Dans le cadre de cette méthode des éléments d'interface spéciaux dit « éléments d'interface des couches fines » (Fig.3.4) ont été développés. Ces derniers permettent de tenir compte de plusieurs modes de déformation, de plus leur implémentation dans un programme d'éléments finis est facile.

##### IV-1) ELEMENTS D'INTERFACE DES COUCHES FINES ( THIN LAYER INTERFACE ELEMENT) :

Cet élément est traité comme les autres éléments solides. Mais avec une matrice de comportement différente.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{nn} & C_{nt} \\ C_{tn} & C_{tt} \end{bmatrix}$$

Avec :

[ $C_{nn}$ ] : la composante normale.  
[ $C_{nt}$ ] : la composante tangentielle.  
[ $C_{tn}$ ], [ $C_{tt}$ ] : représente l'effet du couplage entre le comportement normal et tangentiell.

Dans la formulation de cet élément d'interface, l'hypothèse de base est la suivante :

Le comportement au voisinage de l'interface entraîne une zone fine d'épaisseur supérieur à zéro.

Comme l'interface est entourée par des matériaux différents (sol et structure), les propriétés normales de l'interface durant la déformation doivent dépendre :

- De la zone interfaciale.
- De l'état de contrainte.
- Des propriétés des éléments solides qui entourent l'interface.

En se basant sur ces considérations, la raideur normale peut s'exprimer sous la forme :

$$[C_n] = [C_n(\alpha_i, \beta_s, \gamma_{st})]$$

Avec :

$\alpha_i$  : les propriétés de l'interface.

$\beta_s$  : les propriétés du sol.

$\gamma_{st}$  : les propriétés de la structure.

Donc on peut mettre  $[C_n]_i$  sous la forme :

$$[C_n]_i = \lambda_1 [C_{ni}] + \lambda_2 [C_{ns}] + \lambda_3 [C_{nst}]$$

Avec :

$[C_n]_i$  : composantes normales de l'élément d'interface des couches fines.

Et :

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  : facteurs de participation ayant des valeurs variant entre 0 et 1.

Afin de simplifier, on peut supposer que

$$\lambda_1, \lambda_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_3 = 1$$

Ceci implique que la composante normale est influencée seulement par le comportement normal de l'interface.

La composante tangentielle ( le cisaillement) est obtenu à partir de l'essai du cisaillement directe (Fig.3.6).

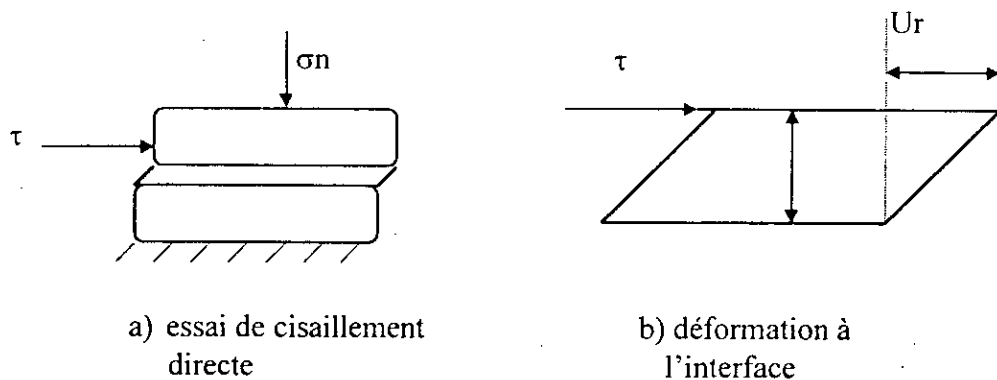


fig 3.6 - Comportement de l'interface -

Dans cette étude, la composante  $[C_{ii}]$  est de taille  $1 \times 1$ . Elle est composée du module de cisaillement  $G$  de l'interface.

On a :

$$\gamma = U_r / t$$

Le module de cisaillement est donné par :

$$G = \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} = \frac{\partial \tau}{\partial U_r} t$$

Où :

$$G_i = G(\sigma_n, \tau, U_r) = \left. \frac{\partial [\tau(\sigma_n, U_r)]}{\partial U_r} \right|_{\sigma_n} t$$

Avec :

$t$  = épaisseur de l'interface.

$U_r$  = déplacement relatif.

L'implémentation de cet élément dans une procédure d'éléments finis nécessite une expression explicite de l'équation

Dans la présente étude, une forme polynomiale de la fonction liant la contrainte de cisaillement  $\tau$  au déplacement relatif de l'interface  $U_r$  est utilisée.



$$\tau = \alpha_1 + \alpha_2 U_r + \alpha_3 U_r^2$$

Avec :

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  : sont des coefficients déterminés à partir des essais de laboratoire.

L'élément d'interface des couches fines peut être formulé en le supposant ayant un comportement :

- Soit linéaire élastique.
- Soit non linéaire élastique.
- Soit élastoplastique.

La matrice de rigidité élémentaire de l'élément d'interface est donnée par :

$$[K]_i = \int_V [B]^T [C^{ep}] [B] dV$$

Avec :

[B] : matrice de transformation de l'élément d'interface.

[C<sup>ep</sup>] : matrice de comportement.

Pour un comportement linéaire élastique, la matrice de comportement s'écrit sous la forme :

$$[C^e]_i = \begin{bmatrix} [C_{nn}] & 0 \\ 0 & [C_{tt}] \end{bmatrix}$$

Avec :

$$[C_{nn}] = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu^2}{E} & \frac{-\nu(1+\nu)}{E} \\ \frac{-\nu(1+\nu)}{E} & \frac{1-\nu^2}{E} \end{bmatrix}$$

Où :

E : module de YOUNG

$\nu$  : coefficient de poisson

## V) CONCLUSION :

Les méthodes retenues dans ce travail pour l'étude des interfaces est celle utilisant une loi de comportement de l'interface.

Au niveau de la modélisation, notre choix est orienté vers l'élément d'interface des couches finis pour les raisons suivantes :

- Possibilité de tenir compte des différents modes de déformation.
- Satisfaction des résultats obtenus en utilisant cet élément dans l'analyse de l'interaction sol-structure.
- Facilité d'implémentation de cet élément dans un programme d'éléments finis.
- La matrice masse élémentaire de l'interface ne sera pas prise en compte vu l'épaisseur faible

**CHAPITRE V**  
**FONDATEMENTS SOUS MACHINES**  
**VIBRANTES**

# I) DEFORMATION DYNAMIQUE ET INTERACTION SOL STRUCTURE

## I-1) DEFORMABILITE DES SOLS EN REGIME DYNAMIQUE

a/ les variables caractérisant la déformabilité dynamique des sols sont :

- le module de déformation par glissement  $G$
- le degré d'amortissement  $\zeta$
- le coefficient de poisson  $\nu$

Ces trois variables sont en effet avec la masse volumique  $\rho$ , celles qui interviennent de façon à peu près exclusive dans le problème de propagation d'ondes, d'interaction, ou de réponse.

Deux d'entre elles,  $G$  et  $\zeta$  sont fortement dépendantes de l'amplitude des déformations.

b/ Le coefficient  $\nu$  n'est susceptible de varier que dans des limites assez étroites entre sa valeur supérieure absolue de 0.5 (solide incompressible) et des valeurs inférieures qui se situent rarement en dessous de 0.25. Pour un type de sol donné, il est peu sensible aux variations des autres paramètres du sol ou du problème.

En particulier, il peut être tenu indépendant de l'amplitude des déformations. Par ailleurs, il n'intervient dans les calculs que par des expressions telles que  $1 + \nu$  et  $1 - \nu$ , ce qui réduit l'erreur relative introduite par une incertitude sur sa valeur.

c/ Les variables  $G$  et  $\zeta$  apparaissent quant à elles comme plus particulièrement représentatives des lois déformations/ contraintes. On sait que ces lois ne sont pas linéaires aux grandes déformations et que pour les faibles déformations, leur linéarité n'est qu'approchée.

Les facteurs influençant  $G$  sont essentiellement dans le cas des sols sans cohésion :

- La forme et la dimension des grains
- l'état de serrage initiale (indice des vides et densité relative)
- la pression effective moyenne,

à quoi il convient d'ajouter dans le cas des sols cohérent :

- Les effets et changements antérieurs
- La teneur en eau
- les propriétés thixotropiques du matériau

#### d/ Amortissement interne

Ainsi qu'il a été indiqué, l'amortissement est de part sa nature fonction de l'amplitude des déformations, même dans le domaine élastique conventionnel. En dehors de  $\gamma$ , il dépend aussi de, et en outre, dans les sols cohérent, de la fréquence et du nombre des cycles, ainsi que de l'indice des vides.

Il convient de préciser que les variations de  $\zeta$  se font en sens inverse de celles de  $G$ .

## I-2) EXPOSE DU PROBLEME

a/ Considérons une semelle ou un massif de fondation que nous supposons infiniment rigide et simplement posé à la surface du sol. Le déplacement de la semelle dans ce repère, comporte dans le cas général six composantes : les deux translations horizontales  $X$  et  $Y$ , la translation verticale  $Z$ , les deux rotations d'inclinaison et la rotation de torsion.

La réaction du sol est composée de trois forces et de trois couples qui dans le modèle linéaire sont proportionnels aux composantes correspondantes de la déformation.

Les coefficients de proportionnalité sont les constantes de rappel ; leur détermination fait l'objet du problème

Dans ce qui suit, ne nous parleront plus de couples rotation/ moment d'inertie mais seulement de force, translation et masses au sens large.

Le milieu est quand à lui considéré comme constituant un demi espace élastique homogène et isotrope.

b/ La solution du problème en régime dynamique dépend de la manière dans le sol réagit notamment par son inertie à la naissance et la propagation de la déformation.

C'est l'un des aspect du problème plus général de l'interaction sol / structure et il se présente de la même manière pour les support de machines et les ouvrages soumis au séisme : Dans l'un et l'autre cas, la structure envoie ou renvoie au sol, dans lequel elle se diffuse et se dissipe, une partie de l'énergie dont elle est porteuse. Il importe peu à ce

stade que ce soit la fondation qui déforme le sol, ou le sol qui vienne se déformer contre la fondation.

Les difficultés viennent de ce que la distribution de la contrainte sur la surface de contact n'est pas la distribution statique, et de ce qu'elle dépend de la fréquence de vibration. Pour les vibrations harmoniques verticales d'une semelle circulaire infiniment rigide, on dispose d'une solution donnant une excellente approximation due à LYSMER. Pour les plaques rectangulaires, on est obligé de recourir à des hypothèses simplificatrices.

### **I-3) MODELES PRATIQUES**

Les solutions théoriques des types ci dessus sont d'une portée pratique limitée puisqu'elles dépendent de la fréquence. On est donc conduit à rechercher au prix d'une certaine approximation des modèles couvrant des bandes de fréquences plus ou moins étendues.

La méthode consiste à considérer le système, dans chacun de ses degrés de liberté, comme un oscillateur simple et à rechercher les caractéristiques ( $M$ ,  $C$ ,  $K$ ) qu'il convient de lui attribuer pour que sa réponse coïncide en certains cas avec celle du système réel.

Pour les machines, Le modèle le plus couramment utilisé est le modèle de LYSMER (ou plus généralement, le modèle de LYSMER et HALL).

Il s'agit d'un modèle universelle couvrant toute la gamme des fréquences de zéro à l'infini.

En conséquence, la constante de rappel  $K$  y prend sa valeur statique et la masse  $m$  de l'oscillateur se réduit à la masse suspendue. La valeur du coefficient d'amortissement  $C$  est ajustée de façon que l'erreur introduite n'excède pas 20% environ dans les cas les plus courants.

WHITMAN et RICHART [14] ont utilisé un système masses, ressorts et amortisseurs qui est approximativement équivalent au système sol - fondation.

Ils ont justifiés le choix de paramètres ( $K$ ,  $C$ ,  $M$ ) déjà élaborés vis à vis de plusieurs cas (type de chargement, résonance, ...).

## **II) ACTIONS DYNAMIQUES DUES AUX MACHINES**

### **II-1) REGIME PERMANENT**

Les cas les plus répandus sont ceux des masses non équilibrées en rotation (balourd) et celui des masses en mouvement alternatif (système bielle-manivelle).

### **II-2) REGIME TRANSITOIRE**

Dans la pratique, on s'efforce d'écarter les fréquences propre du support, de la ou des fréquences de régime de l'excitation.

### **II-3) EXCITATION ALEATOIRES**

Certains engins, comme les broyeurs et concasseurs, engendrent des actions qui ne se reproduisent pas identiquement à elles-mêmes au cours du temps mais qui souvent présentent des fluctuations obéissant à des lois de distribution stationnaires. Le traitement de ces actions aléatoires relève des méthodes de la dynamique Stochastique. Dans la pratique les constructeurs de tels équipements substituent souvent une loi déterministe à la loi aléatoire.

### **II-4) IMPACTS**

Les machines telles que les marteaux-pilons provoquent des vibrations consécutives aux chocs de masse tombant d'une certaine hauteur.

### **II-5) CRITERES DYNAMIQUES :**

Eviter le phénomène de résonance, c'est à dire, la fréquence naturelle du système sol fondation ne doit pas coïncider avec les fréquences opérationnelles de la machine.

Les amplitudes du mouvement aux fréquences opérationnelles ne doivent pas dépasser une limite d'amplitude spécifiée généralement par le vendeur de la machine.

### **III) METHODES D'ANALYSE :**

Il y a deux méthodes principales d'analyse des fondations de machines:

1. Une méthode basée sur un ressort linéaire élastique à poids négligeable.
2. Une méthode basée sur la théorie linéaire de l'élasticité (semi-espace élastique).

Dans la première méthode, le sol est remplacé par un ressort. L'amortissement peut être introduit dans la solution comme une valeur prédéterminée, bien que l'amortissement n'affectera pas la fréquence de résonance du système.



L'approche de la théorie de l'élasticité paraît plus rationnelle bien que plus compliquée. Dans les cas simples, des techniques ont été perfectionnées pour un degré raisonnable de simplicité. Pour des cas plus compliqués, la solution est toujours aussi laborieuse pour un usage général.

Dans ce qui suit, l'analyse d'un type de fondation « Block » inclura la solution technique et plus de commentaires pour comparer les deux approches.

### **III-1) DEGRE DE LIBERTE D'UN « BLOCK » :**

Un block sera considéré comme rigide relativement au sol. Donc il engendrera un mouvement de corps rigide.

- Translation respectivement selon x, y, z,
- Rotation respectivement autour de x, y, z,

de là, le block rigide a six (06) degrés de liberté, et six fréquences propres.

### **III-2) RIGIDITE DU RESSORT :**

Pour les analyses de routine, le comportement du sol est considéré comme élastique linéaire.

La figure - 4.1- ci dessous montre le block en :

(a) Oscillation verticale, (b) Translation pure horizontale,

il y a aussi le block :

(c) Oscillant en rotation, (d) Oscillant en torsion.

Les contraintes respectives du block dues aux sollicitations dynamiques sont :

- a) Compression uniforme;
- b) Cisaillement uniforme;
- c) Compression non-uniforme;
- d) Cisaillement non-uniforme.

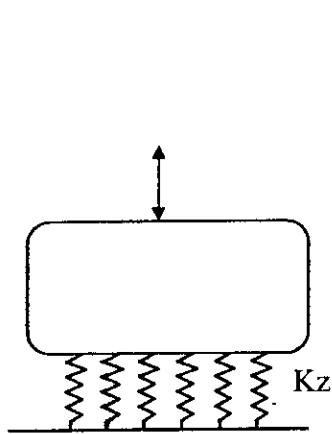


fig - 1.a -

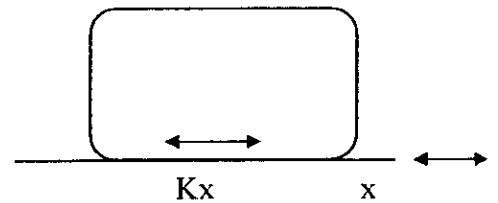


fig - 1.b -

Fig -4.1-

On s'intéressera au premier et au deuxième cas seulement.

Les coefficients correspondant au sol peuvent être définis comme suit :

- Coefficient de la compression élastique uniforme:  $C_u$ ,

$$C_u = \frac{P}{S_e}$$

tel que;

$P$  : Compression uniforme;

$S_e$  : Tassement élastique.

- la contrainte de raideur  $K_2$  :

$$K_2 = \frac{P A}{S_e}$$

Avec;

P : Sollicitation

$\frac{S_e}{A}$  : déformation élastique.

A : aire de la surface test.

- Coefficient du cisaillement élastique uniforme  $C_\tau$  :

$$C_\tau = \frac{\tau}{S_e'}$$

Sachant que;

$\tau$  : cisaillement uniforme.

$S_e'$  : déplacement du cisaillement élastique.

$$K_x = C_\tau \times A$$

Maintenant  $C_u$  et  $C_\tau$  sont considérés comme étant analogues à E et G respectivement module d'élasticité et module de cisaillement.

### III-3) VIBRATIONS VERTICALES DU « BLOCK » :

Considérons une fondation de surface A, placées à une profondeur Df (figure -4.2a-) soumise à une sollicitation telle que :

$$P_z = P_0 \sin \omega t$$

Pour l'intérêt de l'analyse on considérera que le block est situé au niveau du sol (Df = 0) car l'amplitude des vibrations se réduira par effet d'encastrement (figure -4.2b-).

Le sol est remplacé par un ressort équivalent de raideur  $K_2$  (figure -4.2-c).

Le système Sol-fondation est remplacé par un ressort-masse équivalent (figure -4.2d-). L'équation de mouvement du système, négligeant l'amortissement, est :

$$M \ddot{Z} + K_2 Z = P_0 \sin \omega t$$

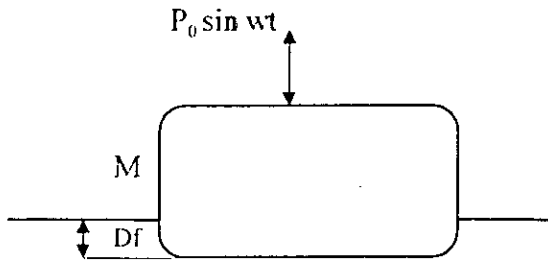


fig -2.a -

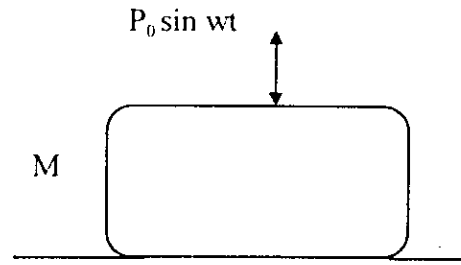


fig -2.b -

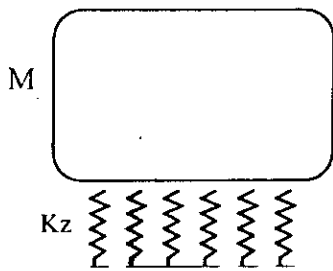


fig -2.c -

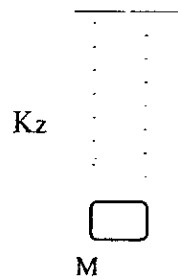


fig -2.d -

Figure -4. 2-

Avec,  $M$  : masse de la machine et de la fondation;  
 $K_z$  : raideur du ressort équivalent =  $C_u A$   
 $C_u$  : coefficient de la compression élastique uniforme.

La fréquence propre  $\omega_{nz}$  du système est :

$$\omega_{nz} = \sqrt{\frac{C_u A}{M}}$$

l'amplitude  $A_z$  du mouvement :

$$A_z = \frac{P_0 \sin \omega t}{M (\omega_{nz}^2 - \omega^2)}$$

l'amplitude maximale du mouvement est:

$$A_{z \max} = \frac{P_0}{M (\omega_{nz}^2 - \omega^2)}$$

### III-4) VIBRATIONS HORIZONTALES DU BLOCK :

Soit la fondation soumise à une force  $P_x \sin \omega t$ , comme l'indique la figure ci-dessous (figure -4.3-) la vibration de la fondation dans ce cas est analogue à une vibration verticale avec la constante,

$$K_x = C_\tau \times A$$

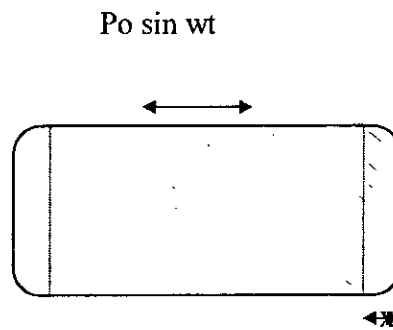


Figure -4 . 3-

L'équation de mouvement s'écrit:

$$M\ddot{X} + K_x X = P_0 \sin \omega t$$

Ce qui donnera :

$$\omega_{nz} = \sqrt{\frac{C_\tau A}{m}}$$

$$A_{x \max} = \frac{P_x}{m (\omega_{nz}^2 - \omega^2)}$$

### III-5) VIBRATIONS VERTICALES SELON LA THEORIE DU SEMI-ESPACE ELASTIQUE :

Le sol est considéré homogène, isotrope et élastique, caractérisé par le module de cisaillement  $G$  et le coefficient de poisson  $\nu$ .

Une théorie a été établie à ce sujet pour étudier la réponse d'une semelle supportée par un semi-espace élastique. La distribution de pression en dessous de la semelle circulaire est considérée comme uniforme pour une vibration verticale.

La semelle est généralement considérée comme étant circulaire de rayon  $r_0$  et de masse  $M$ .

Deux paramètres adimensionnels définissent le mouvement de la semelle, ceux sont :

**facteurs de fréquence adimensionnel :  $a_0$**

$$a_0 = \omega r_0 \sqrt{\frac{\rho}{G}} = \frac{2\pi f r_0}{V_s}$$

$\omega$  : fréquence circulaire de la vibration

$r_0$  : rayon de la semelle

$\rho = \tau/g$  : densité de masse élastique

$G$  : module de cisaillement

$f$  : fréquence de vibration

$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$  : Vitesse de la propagation de l'onde de cisaillement dans un milieu élastique.

**Coefficient de masse  $b$  et  $B_z$**

$$b = \frac{M}{\rho r_0^3} = \frac{\omega}{\rho r_0^3 g} \quad \text{et} \quad B_z = \frac{1-\nu}{4} \cdot \frac{M}{\rho r_0^3}$$

La figure -4.4- montre l'influence du coefficient de poisson sur la réponse de la semelle.

L'équation de mouvement du système représentant le mouvement vertical de la semelle circulaire rigide est :

$$M\ddot{z} + C\dot{z} + Kz = P_0(t)$$

avec  $z$  : déplacement vertical

$\dot{z}$  : vitesse

$\ddot{z}$  : accélération

$P_0(t)$  : force d'excitation dépendante du temps

et tel que

$$C = \frac{3.4}{1-\nu} r_0^2 \sqrt{G\rho}$$

$$K = \frac{4Gr_0}{1-\nu}$$

l'amortissement critique

$$C_c = 2\sqrt{KM} = 2\sqrt{\frac{4Gr_0}{1-\nu} M}$$

$$\zeta = \frac{C}{C_c} = \frac{0.85}{\sqrt{1-\nu}} \frac{1}{\sqrt{b}}$$

Il sera noté que l'amortissement entre automatiquement dans la solution du semi-espace, bien qu'il ait été négligé dans la théorie du ressort linéaire.

L'analyse précédente a été considérée pour une semelle circulaire, si la semelle est rectangulaire en plan, de dimensions  $a \times b$ , le rayon équivalent sera :

$$r_0 = \sqrt{\frac{a \cdot b}{\pi}}$$

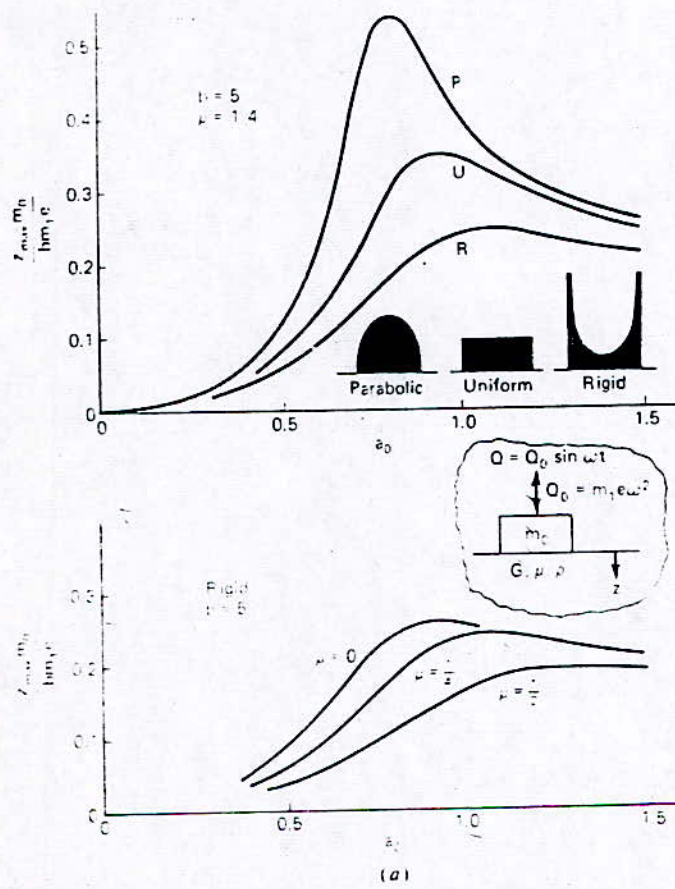


figure - 4.4 - Effet de la pression de distribution et du coefficient de poisson sur la réponse théorique d'une semelle sollicitée verticalement.



Des essais expérimentaux ont montré que l'utilisation du rayon équivalent est raisonnable pour la détermination de la fréquence de résonance, mais l'amplitude de la vibration est plus petite que pour une fondation circulaire équivalente.

### III-6) VIBRATION EN GLISSEMENT SELON LA THÉORIE DU SEMI-ESPACE ÉLASTIQUE :

D'abord une solution pour le mouvement d'une plaque circulaire rigide sur la surface d'un semi-espace élastique a été définie.

Puis une analogie a été développée entre cette dernière et celle basée sur l'impédance élastique linéaire.

Les expressions pour la raideur équivalente et l'amortissement sont données comme suit :

$$K_x = \frac{32(1-\nu)}{7-8\nu} G \cdot r_0$$

$$C = \frac{18.4(1-\nu)}{7-8\nu} r_0^2 \sqrt{\rho G}$$

Le coefficient de masse  $B_x$  et le facteur de fréquence adimensionnelle correspondants sont

$$B_x = \frac{7-8\nu}{32(1-\nu)} \frac{M}{\rho r_0^3}$$

$$a_0 = \omega r_0 \sqrt{\frac{\rho}{G}}$$

L'amortissement critique  $C_c$  :

$$C_c = 2 \sqrt{\frac{M 32(1-\nu)}{7-8\nu}} r_0$$

et

$$\zeta = \frac{0.2875}{\sqrt{B_x}}$$

Les figures -4.5- et -4.6- nous montrent l'influence du changement de  $v$  sur la réponse d'une semelle circulaire rigide.

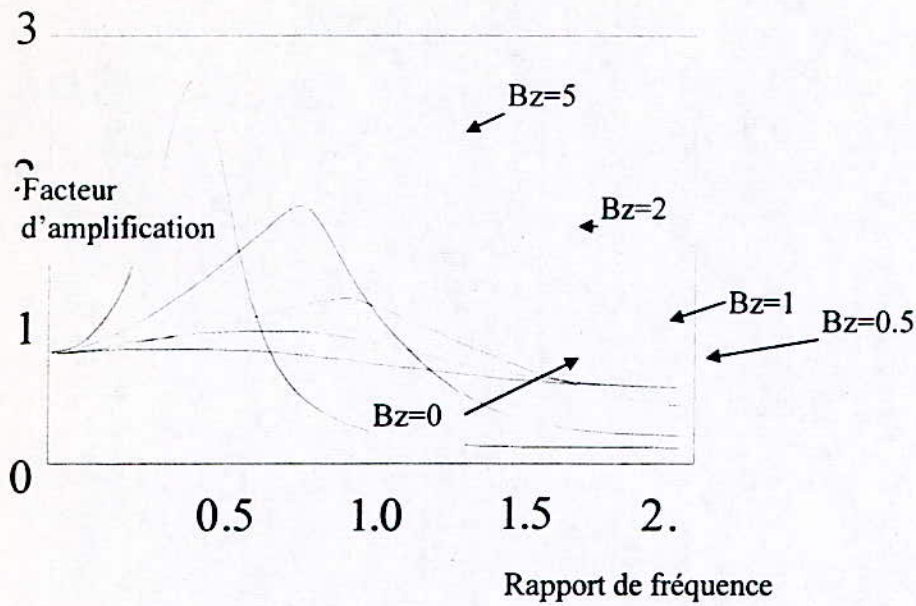


figure -4.5- Réponse d'une semelle circulaire rigide à une excitation verticale

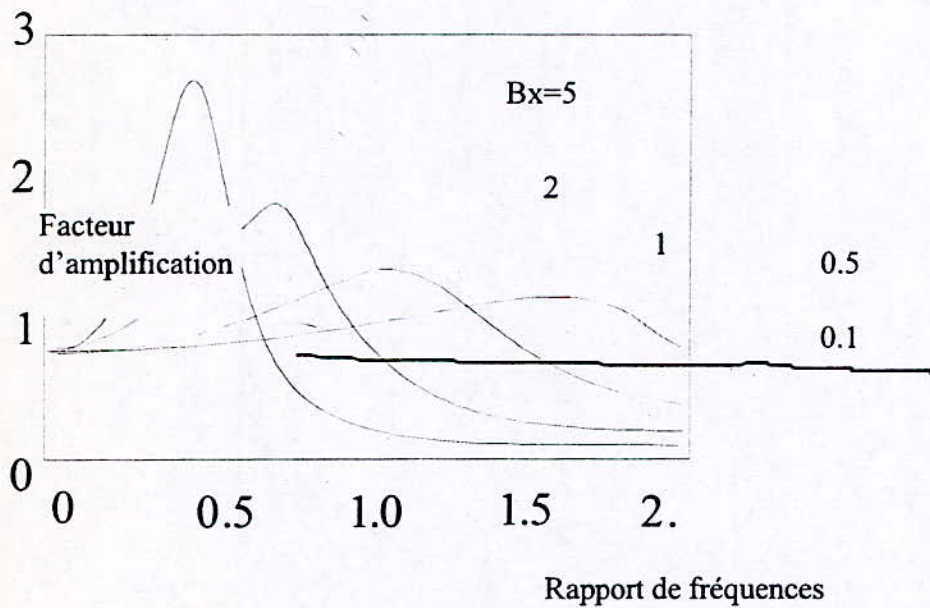


figure -4.6- Réponse d'une semelle circulaire à une sollicitation horizontale

## **IV) MODELISATION DU SYSTEME SOL-STRUCTURE-EQUIPEMENT**

### **IV-1) SYSTEME STRUCTURE-EQUIPEMENT**

Dans un grand nombre de cas, on peut considérer que l'ensemble formé d'une part par la machine (y compris les masses mobiles non équilibrées) et d'autre part par le plancher ou le massif sur lequel le bâti est scellé constitue un solide indéformable dont on caractérise le mouvement par celui de son centre de gravité.

Si le support est lui même un massif rigide, le système constitue un solide unique. Dans le cas où le support est déformable (portique par exemple), il devient nécessaire de considérer des degrés de liberté supplémentaires correspondants aux déplacements relatifs possible.

### **IV-2) INTERACTION SOL-STRUCTURE**

#### **a) Principe**

La réponse d'un massif soumis à une excitation dynamique dépend de la réaction du sol à la naissance et à la propagation de la déformation qui lui est imposée par le massif. Dans le cas de la semelle circulaire rigide simplement posée sur le sol et soumise à des vibrations verticales, nous avons indiqué une solution approchée sous la forme du modèle de LYSMER.

#### **b) Modèle de LYSMER pour les oscillations verticales**

Il se résume (figure -4.7-) à un oscillateur simple caractérisé par :

- sa masse équivalente  $M$ , égale dans ce modèle à la masse suspendue (machine+massif),
- sa constante de rappel  $K_z$ , égale à la constante statique,
- son rapport d'amortissement  $C_z$ .

$C_z$  et  $K_z$  sont données comme suit :

$$K_z = \frac{4Gr_0}{1-\nu} \quad \text{et} \quad C_z = \frac{0.85K_zr_0}{V_s}$$

Si on applique à un massif circulaire de rayon  $r_0$  simplement posé à la surface d'un milieu semi-infini et soumis à la force excitatrice verticale  $P_z(t)$  (le système est supposé centré), l'équation des vibrations est pour un mode de translation, par exemple le mode vertical :

$$M\ddot{z} + C_z\dot{z} + K_z z = P_z(t)$$

ou, sous une forme canonique, en posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{M}{K_z}}$

et  $\zeta_z = c_z / 2\sqrt{K_z M}$

$$\ddot{z} + 2\zeta_z\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = P_z(t) / M$$

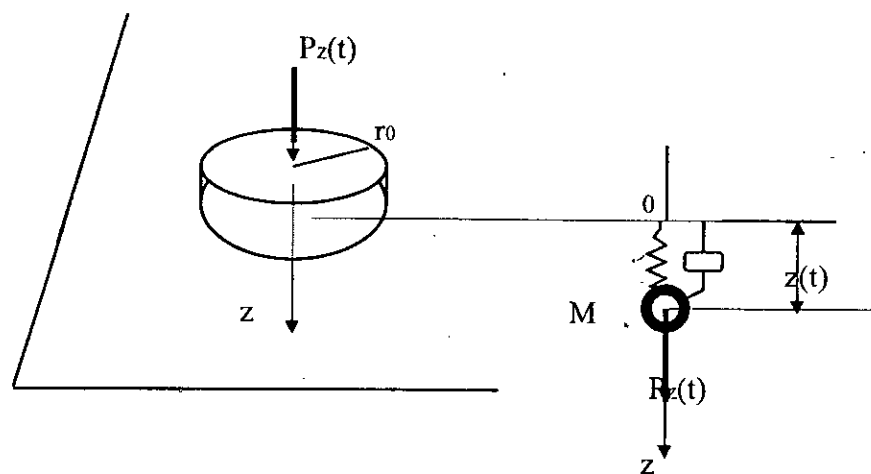


fig -4.7- Modèle de LYSMER pour les oscillations verticales

### C) MODELE GENERALE DE LYSMER - HALL

Ce modèle a été généralisé par HALL pour les autres degrés de liberté et d'autres formes de semelles .

Dans le modèle original de LYSMER, l'amortissement est introduit non par Cz mais par son rapport à l'amortissement critique  $\zeta$ , et  $\zeta$  est exprimé en fonction d'une masse réduite (masse sans dimension)  $M^*_z$ , égale à :

$$M^*_z = \frac{[(1 - \nu) / 4]M}{\rho r_0^3} = \left( \frac{M}{K_z} \right) \left( \frac{V_s}{r_0} \right)^2$$

$V_s$  : vitesse des ondes de cisaillement

$r_0 = \sqrt{ab/\pi}$  : rayon équivalent

$\rho$  : masse volumique du sol

Cette disposition est conservée dans le modèle LYSMER - HALL pour les autres degrés de liberté

	type de déplacement	constante de rappel K	masse réduite $M^*$	rapport d'amortissement $\zeta$
semelle rectangulaire	vertical	$\frac{G}{1 - \nu} \beta_z \sqrt{ab}$	$\frac{1 - \nu}{4} \frac{M}{\rho r_0^3}$	$\frac{0.425}{\sqrt{M^*_z}}$
	horizontal	$2(1 + \nu)G\beta_x \sqrt{ab}$	$\frac{7 - 8\nu}{32(1 - \nu)} \frac{M}{\rho r_0^3}$	$\frac{0.288}{\sqrt{M^*_x}}$

tableau -V.1-

## D) CHOIX DES DIFFERENTS PARAMETRES

Dans l'équation mentionnée ci-dessus, à savoir pour le mode de translation verticale :

$$M\ddot{z} + C\dot{z} + Kz = P(t),$$

Le choix des valeurs à attribuer aux paramètres de ces équations est essentielle, la réponse  $z(t)$  étant entièrement conditionnée par ces valeurs.

Les valeurs de la masse équivalente  $M$ , de l'amortissement effectif  $C$  et de la rigidité  $K$  sont généralement différents pour chaque mode de mouvement (voir figure 4.8).

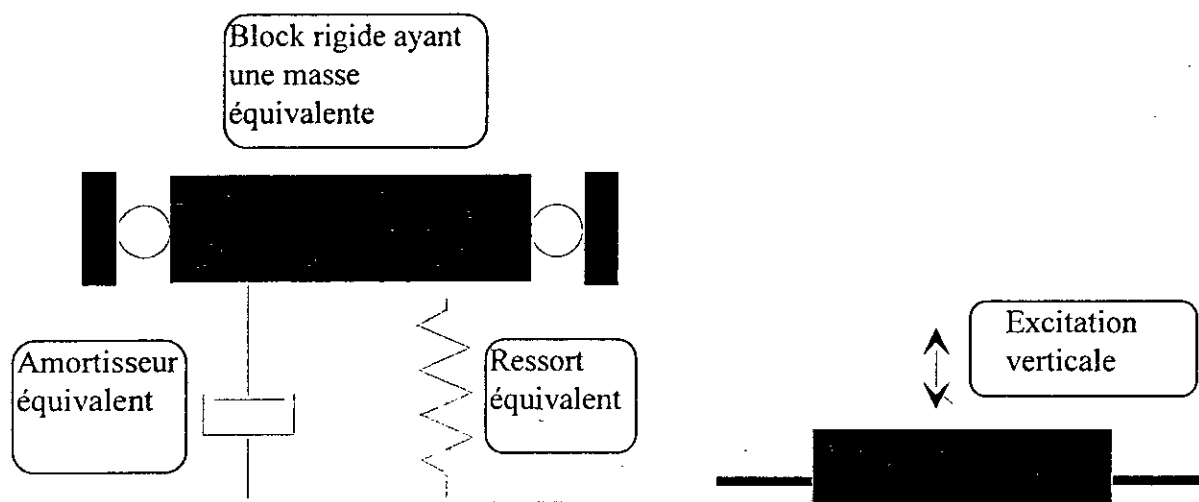


figure -4.8a- Mode de vibration verticale,

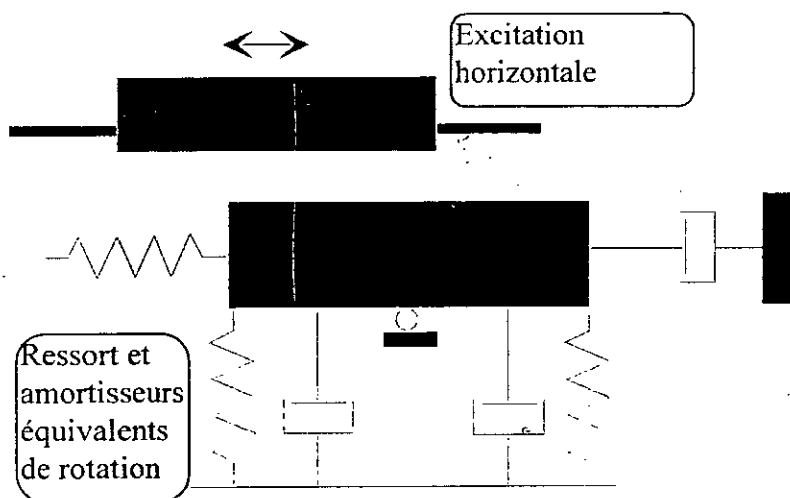


figure -4.8b- Mode de vibration horizontal

figure -4.8- Types de paramètres fonction du mode de vibration

La pulsation propre du système est :

$$\omega_0 = \sqrt{K/M}$$

Si l'excitation P est de la forme sinusoïdale

$$P = P_0 \sin(\omega t)$$

L'amplitude de la réponse sera conditionnée par le rapport :  $\omega / \omega_0$

Si le rapport est voisin de 1, alors la réponse sera conditionnée par le choix des paramètres M, C et K.

Si le rapport est petit devant 1, la réponse sera conditionnée par le choix de K.

Si le rapport est grand devant 1, la réponse sera conditionnée par le choix de M.

#### D-1) Choix de l'amortissement pour le système équivalent masse concentrée

Désignons par  $\zeta_z$  le rapport de l'amortissement à l'amortissement critique

$$\zeta_z = C/C_c$$

où,  $C_c = 2\sqrt{K/M}$

a) Amortissement radial :

La théorie du semi-espace élastique peut être utilisée pour estimer la grandeur de l'amortissement radial à introduire dans le système équivalent à masse concentrée.

La figure -4.9-, donne une série de courbes donnant le rapport d'amortissement critique en fonction du paramètre

$$B = m_0 / \rho r_0^3$$

où  $\rho$  : masse volumique du sol

$m_0$  : masse fondation + machine

$r_0$  : rayon équivalent pour une fondation de forme quelconque et dépend du mode de vibration considéré

Pour une fondation rectangulaire et un mode de translation, on a

$$r_0 = \sqrt{\frac{ab}{\pi}}$$

avec a et b : longueur et largeur de la fondation.

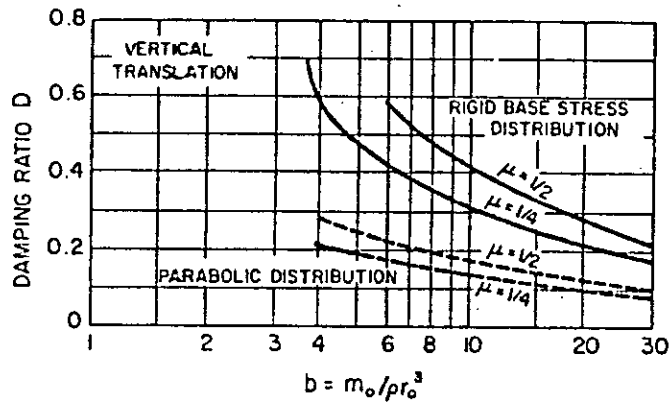
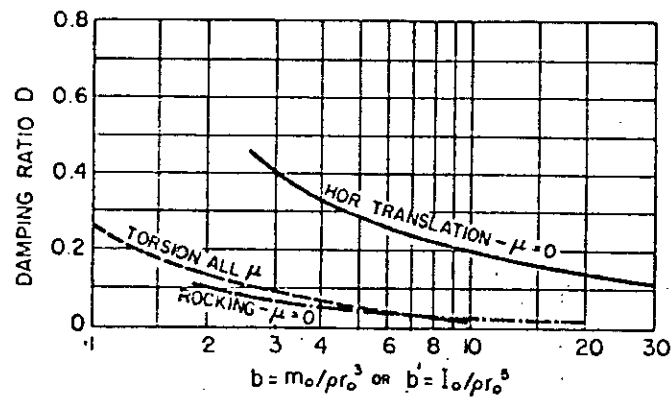


Figure -4.9- valeur du coefficient d'amortissement équivalent obtenu théorie de l'élasticité pour une semelle circulaire

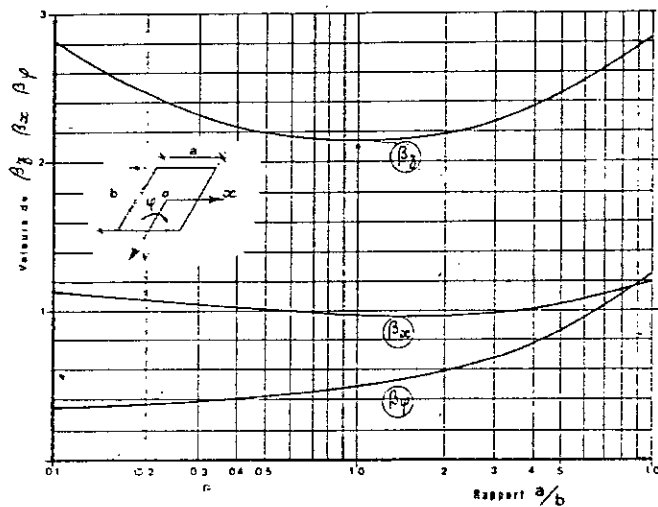


figure -4.10- Constantes de rappel des semelles rectangulaire

Valeurs de coefficients  $B_x$ ,  $B_z$  et  $B_\phi$



On remarque que grossièrement  $\zeta_z$  varie de 0.1 pour les grande valeurs de B ( $B > 30$ ), vers 0.08 pour les petites valeurs de B ( $B < 3$ ).

b) Amortissement interne :

Pour les sols secs et principalement sans cohésion, la pertes d'énergie engendrée par le frottement inter - particule dépend essentiellement de l'amplitude de déformation atteint et de l'état de contrainte initiale.

L'ordre de grandeur de cet amortissement équivalent pour un modèle visqueux est généralement faible, vu la petitesse des déformations

Type de sol	Equivalent $\zeta$	Références
Sables secs et graves	0.03 à 0.07	Weissman , Hart (1961)
Sables secs et saturés	0.01 à 0.03	Hall , Richart (1963)
Sables secs	0.03	Whitman (1963)
Sables et graves. secs et sat.	0.05 à 0.06	Barkan (1962)
Argile	0.02 à 0.05	Barkan (1962)
Sable limoneux	0.03 à 0.1	Stevens (1966)
Sable secs	0.01 à 0.03	Hardin (1965)

tableau -V.2-

On remarque que cet amortissement reste faible devant l'amortissement radial.

**D-2) Choix de K, la rigidité à considérer**

La rigidité a introduire dans le modèle est des trois paramètres le plus important, puisqu'il affecte directement la fréquence de résonance.

Bien que le terme de masse et d'amortissement interviennent dans l'évaluation du terme de résonance, leurs plages de variation ont généralement des limites connues.

Plusieurs méthodes ont été établies pour l'évaluation de cette rigidité constante ;

Celles-ci sont :

- Recherche de rigidité constante à partir de la théorie de l'élasticité
- Détermination à partir des essais de plaques en petits déplacements sous charges dynamiques répétées.
- Déduction à partir des résultats de tests de vibrations de petites amplitudes
- A partir du module d'élasticité E, estimé à partir d'essais de prospection sismique

Le tableau -V.2- donne les valeurs de K à prendre en considération d'après Barkan (1962) Le coefficient de poisson  $\nu$  varie entre 0.3 et 0.5 pour la gamme des contraintes généralement rencontrées en chargement dynamique.

Le problème majeur consiste en une bonne évaluation du module de cisaillement transversal G.

Celle-ci peut être faite, par exemple, à partir des essais triaxiaux dynamiques, ou bien à partir de la connaissance de la vitesse de propagation de l'onde de cisaillement  $V_s$  obtenue à partir d'essais in-situ .

$$G = \rho V_s^2$$

### **D-3) choix de M, la masse équivalente à considérer**

L'hypothèse la plus simple consiste à prendre pour la masse, la masse minimale, c'est à dire, la masse de la fondation plus la machine.

Richart et Whitman (1967) ont montrés que pour le mode de translation vertical cette hypothèse donne des résultats en accord avec l'expérimentation.

Une comparaison pour ce mode des résultats obtenus avec, d'une part, le système à masse équivalente, et d'autre part, la théorie du semi-espace, pour des fréquences variants de zéro à bien au dessus de la fréquence de résonance, ont montré une bonne correspondance entre les résultats.

De nombreux auteurs ont étudiés l'influence d'une masse de sol additionnelle, dite masse de sol effective, à prendre en compte en plus de la masse de la fondation avec la machine pour les différents modes de vibration .

Le tableau (V.3) suivant donne les valeurs de la masse effective d'après Hsieh (1962)

Mode de vibration	Masse effective		
	$v=0$	$v=0.25$	$v=0.5$
translation verticale	$0.5\rho r_0^3$	$1.0\rho r_0^3$	$2.0\rho r_0^3$
translation horizontale	$0.2\rho r_0^3$	$0.2\rho r_0^3$	$0.1\rho r_0^3$

tableau -V.3-

## **CHAPITRE VI**

# **IMPLEMENTATION NUMERIQUE**

## I) PROBLEME CONSIDERE:

Pour nos applications , nous considérons une fondation superficielle longue en plan posée directement sur le sol (de dimensions finies), de (10x1x1,5) sous une machine vibrante ( $P_z = P_0 \sin(\omega t)$ ) (fig.1) et (fig.2).

### I-1) HYPOTHESES:

- Le sol sera considéré linéaire, élastique et isotrope avec possibilité d'amortissement visqueux ;
- Une fondation longue en plan (déformation plane);
- Une machine vibrante dont l'action peut être assimilée à une sollicitation verticale sinusoïdale de la forme  $P(t)=P_0 \sin(\omega t)$ .

### I-2) TYPES :

- |                |                           |               |                |                  |
|----------------|---------------------------|---------------|----------------|------------------|
| • Argile :     | $E_a = 7 \text{ MPa}$     | $\nu_s = 0,3$ | $\rho_s = 1,8$ |                  |
| • Sable 1 :    | $E_{s1} = 10 \text{ MPa}$ | $\nu_s = 0,3$ | $\rho_s = 1,8$ |                  |
| • Sable 2 :    | $E_{s2} = 50 \text{ MPa}$ | $\nu_s = 0,3$ | $\rho_s = 1,8$ |                  |
| • Fondation :  | $E_f = 36000 \text{ MPa}$ | $\nu_f = 0,2$ | $\rho_f = 2,5$ | épaisseur = 1m   |
| • Interfaces : | $E_1 = 10 \text{ MPa}$    | $\nu_i = 0,3$ | $G_i = 10$     | épaisseur = 5 cm |
|                | $E_2 = 10 \text{ MPa}$    | $\nu_i = 0,3$ | $G_i = 10$     | épaisseur = 1cm  |
|                | $E_3 = 10 \text{ MPa}$    | $\nu_i = 0,3$ | $G_i = 10$     | épaisseur = 5 mm |

### I-3) RESOLUTION:

- Résolution dans le domaine des temps;
- La résolution de l'équation de mouvement se fera pour un cas amorti ou pas du sol, pour des  $\xi$  dans le cas amorti : 0,1 ; 0,3 ; 0,6 .
- Le choix entre différentes méthodes ( WILSON  $\theta$  , Différences Centrales, NEWMARK), nous adopterons pour celle de NEWMARK.

- Le calcul des valeurs et vecteurs propres se fera par la méthode des sous espaces.
- Nous mentionnerons le nombre de valeurs propres requises, l'erreur admise et la dimension du sous-espace.
- $\lambda_c$  sera calculé par la méthode citée précédemment (CLOUGH et PENZIEN).

#### I-4) CHARGEMENT:

Horizontal ou vertical d'amplitude maximale 10 KN/ml et de période 0,1 sec.

On fera une étude sur un temps de 10 ou 20 périodes (modes de vibration).

#### I-5) LES DONNEES DU PROBLEME:

##### A) MAILLAGE :

- Dimension : 2D
- Nombre d'éléments : 64 , 62 (avec ou sans interfaces)
- Degrés de liberté par Noeud : 2
- Nombre de noeuds par élément : 8
- Propriétés nodales : aucune
- Nombre de types d'éléments : 1
- Nombre de groupes de propriétés élémentaires :
  - sol-fondation : 2
  - sol-interface-fondation : 3

##### B) PROPRIETES ELEMENTAIRES :

- Approche déformation ou contrainte plane : contrainte plane pour notre cas
- $E : E_a, E_{s1}, E_{s2}$
- $\nu : \nu_s, \nu_f$
- $G_i$
- L'épaisseur
- $\rho : \rho_s, \rho_f$

### C) - CONDITIONS AUX LIMITES :

1 ou 2 degrés de libertés imposés pour chaque noeud considéré, donc on aura pour notre des zéro à la frontière suivant ces 2 ddl.

### D) CHARGEMENT :

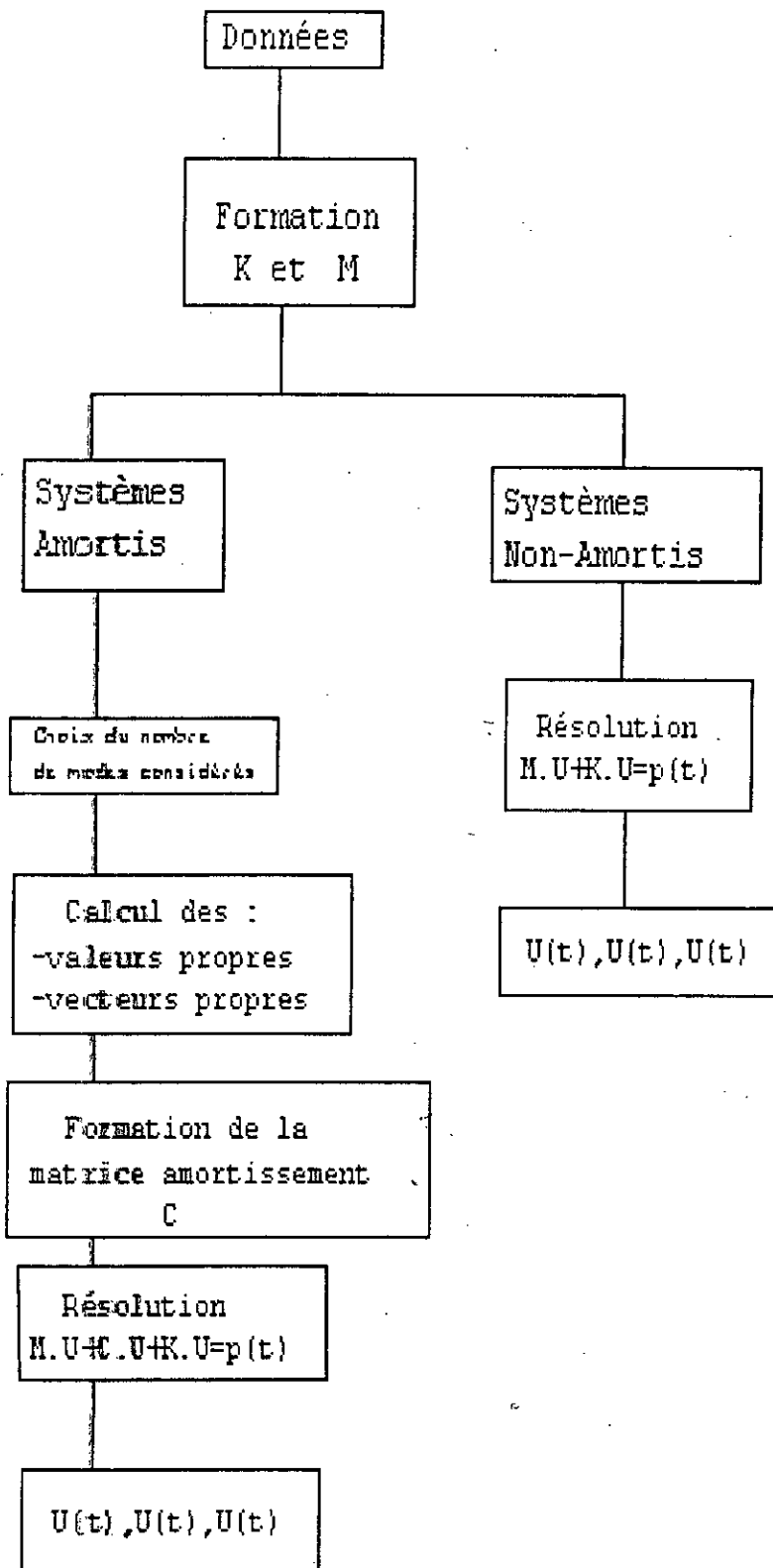
- Pulsation de la machine : 62,8
- Amplitude maximale du chargement : 100 KN

### E) RESULTATS :

$U(t)$ ,  $\dot{U}(t)$  et  $\ddot{U}(t)$

## I-6) ORGANIGRAMME

L'organigramme suivant donne d'une manière générale la structure du programme

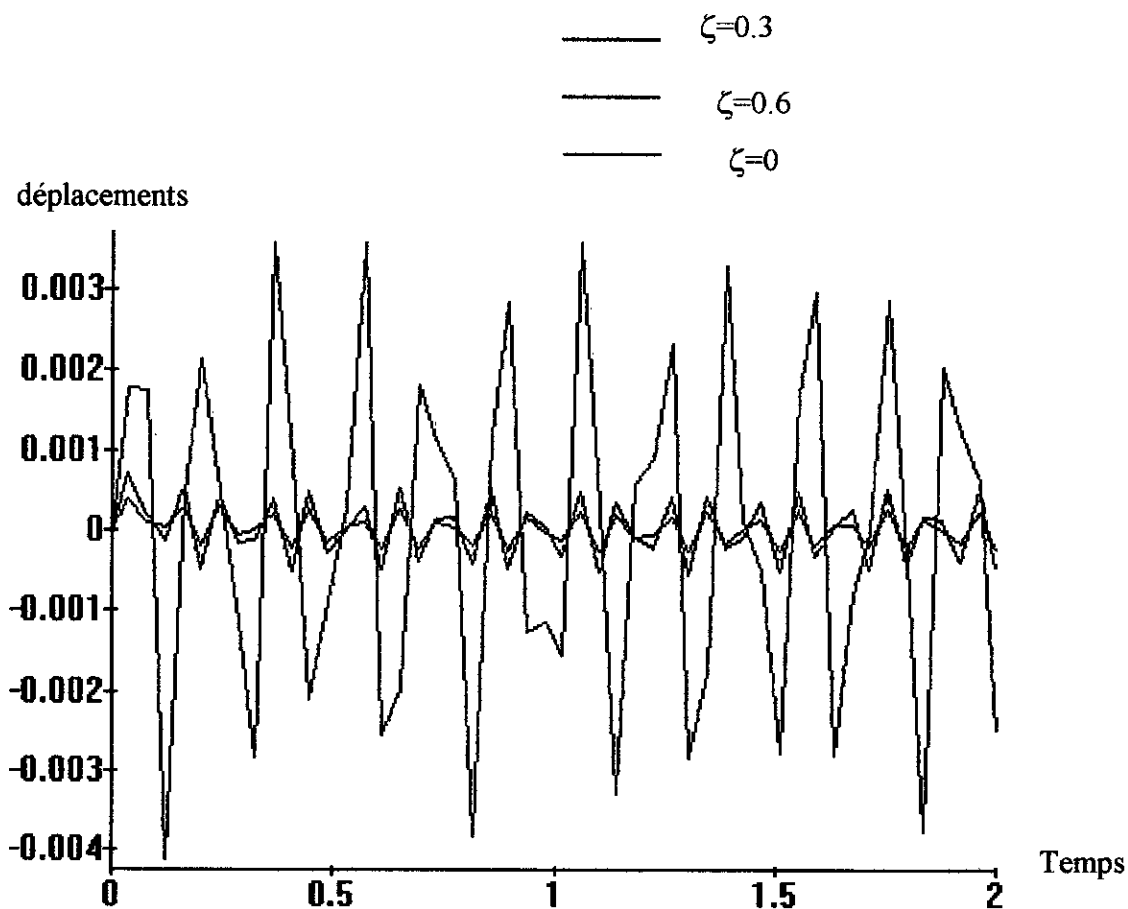




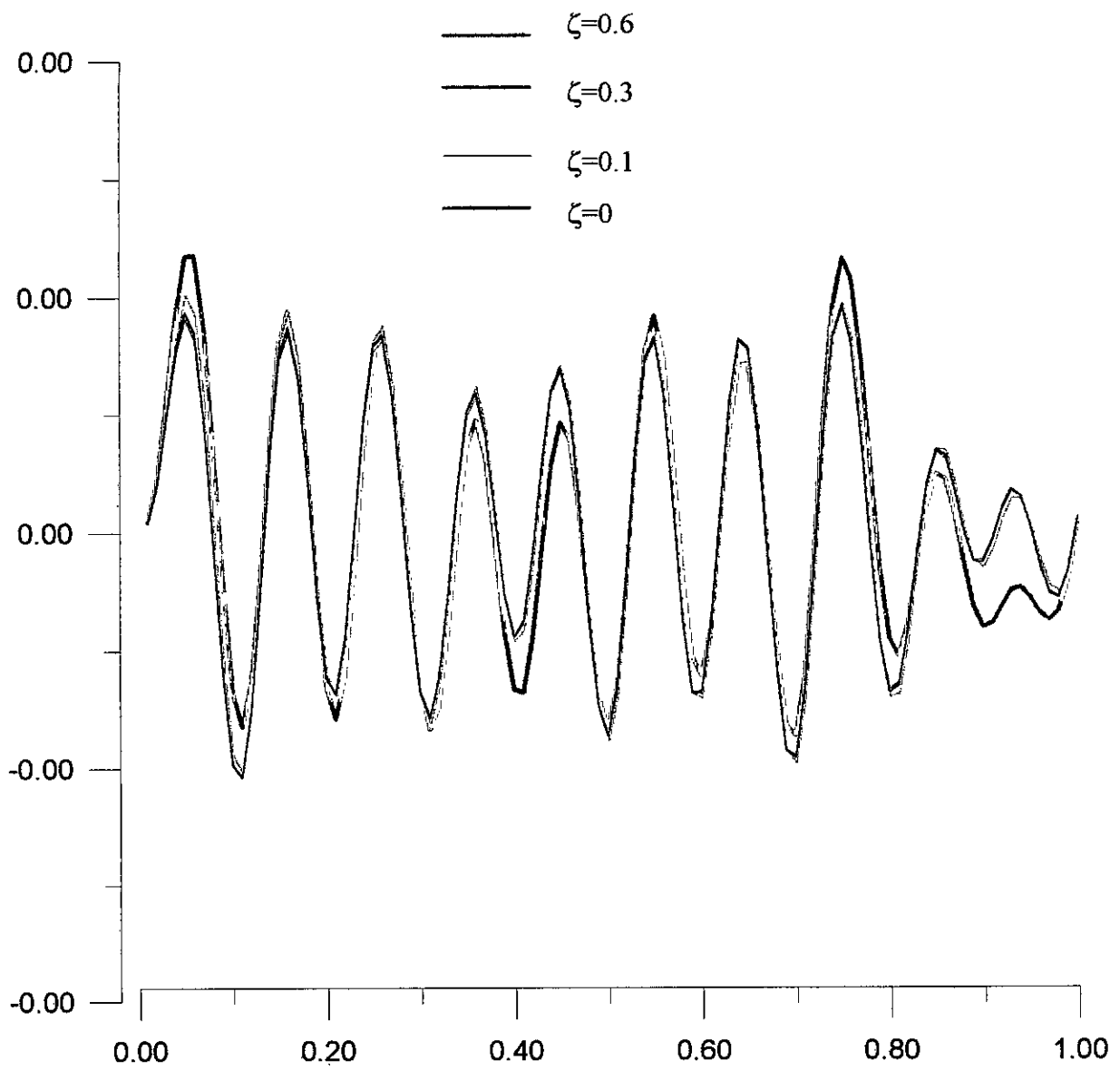
## II) RESULTATS

Les graphes ci-joints sont le résultat d'une :

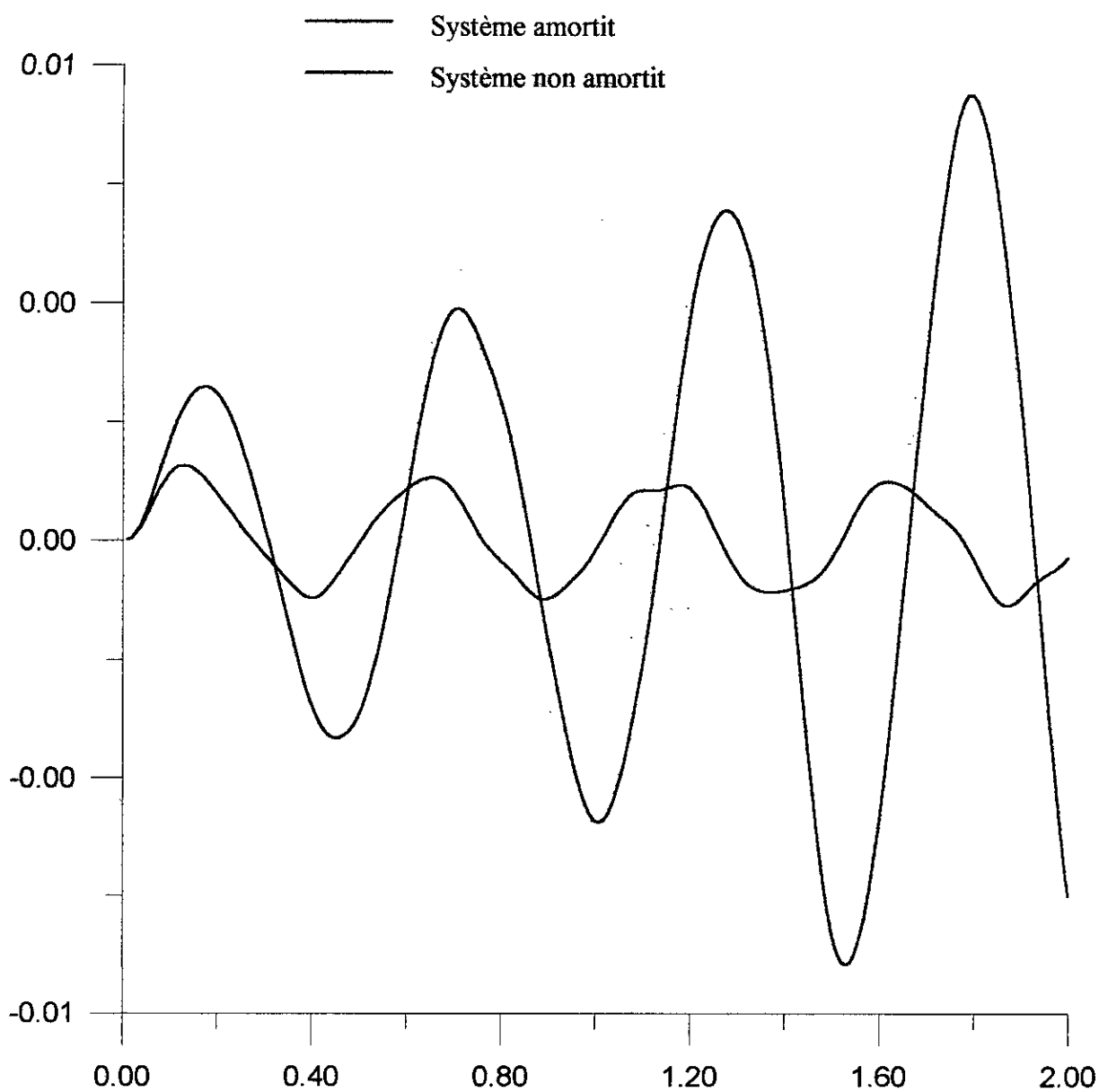
- Comparaison du modèle LYSMER-HALL avec le modèle éléments finis dans le cas amortit ou non amortit.
- Etude de l'influence des éléments d'interfaces sol - fondation sur la réponse de la fondation considérée
- Effet de la prise en compte ou pas de l'amortissement, et l'influence de ce taux d'amortissement sur la réponse de la fondation



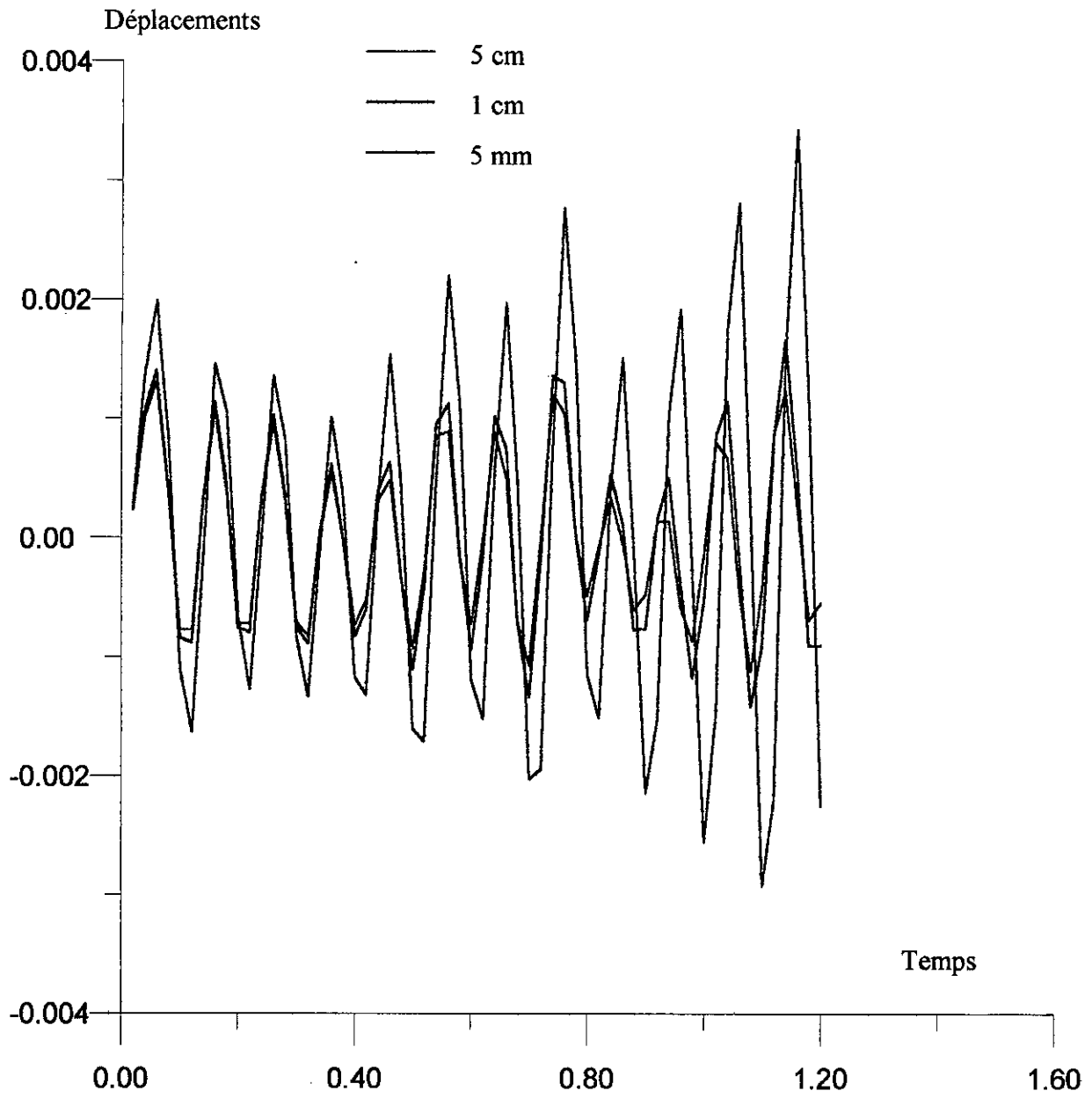
-- Modèle de LYSMER-HALL pour différents cas de rapport d'amortissement  $\zeta$  --



Modèle Eléments finis  
 Réponse du centre de gravité de la fondation  
 sol : Argile  
 Pulsation d'excitation=62.832 rad / sec

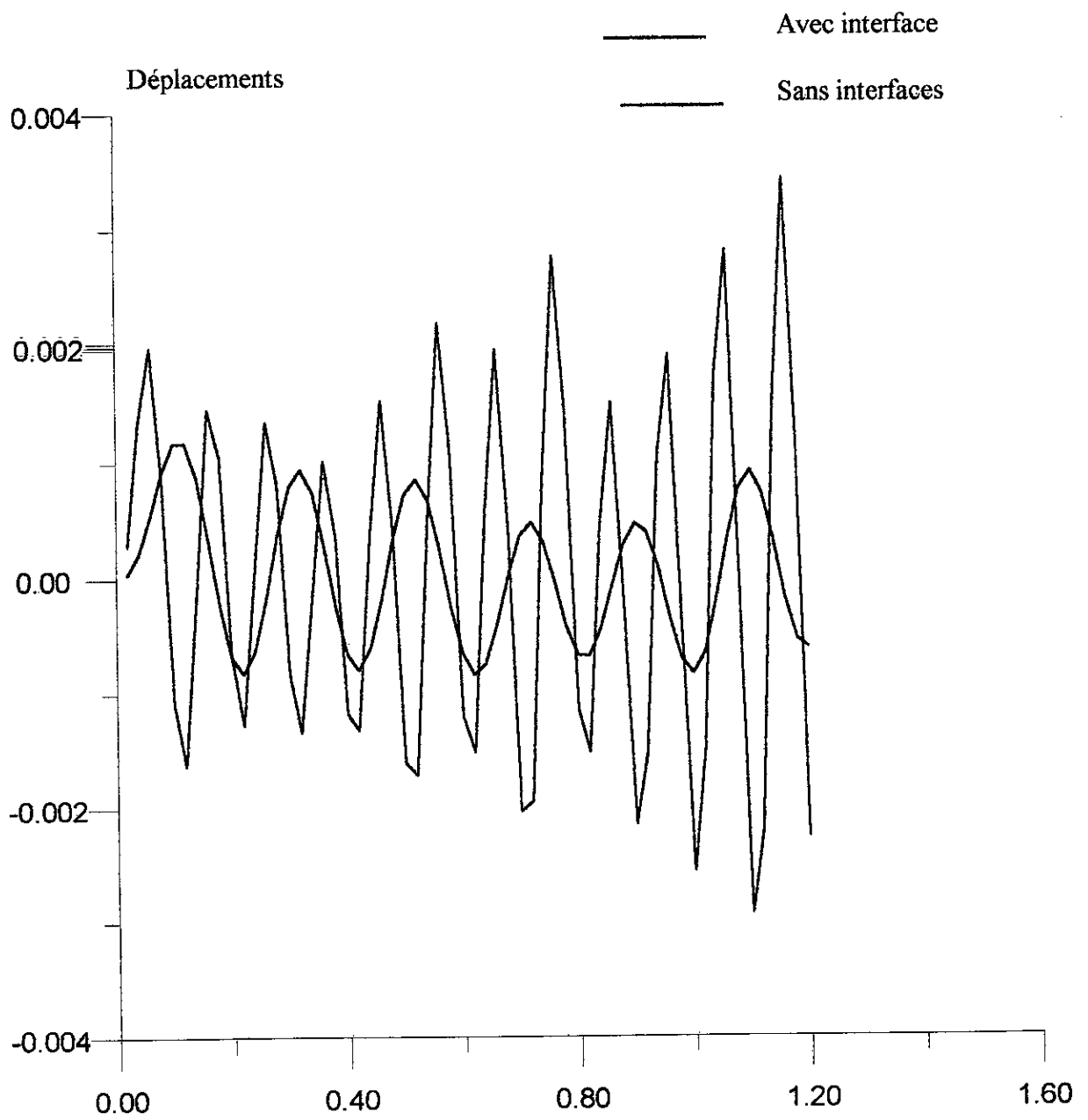


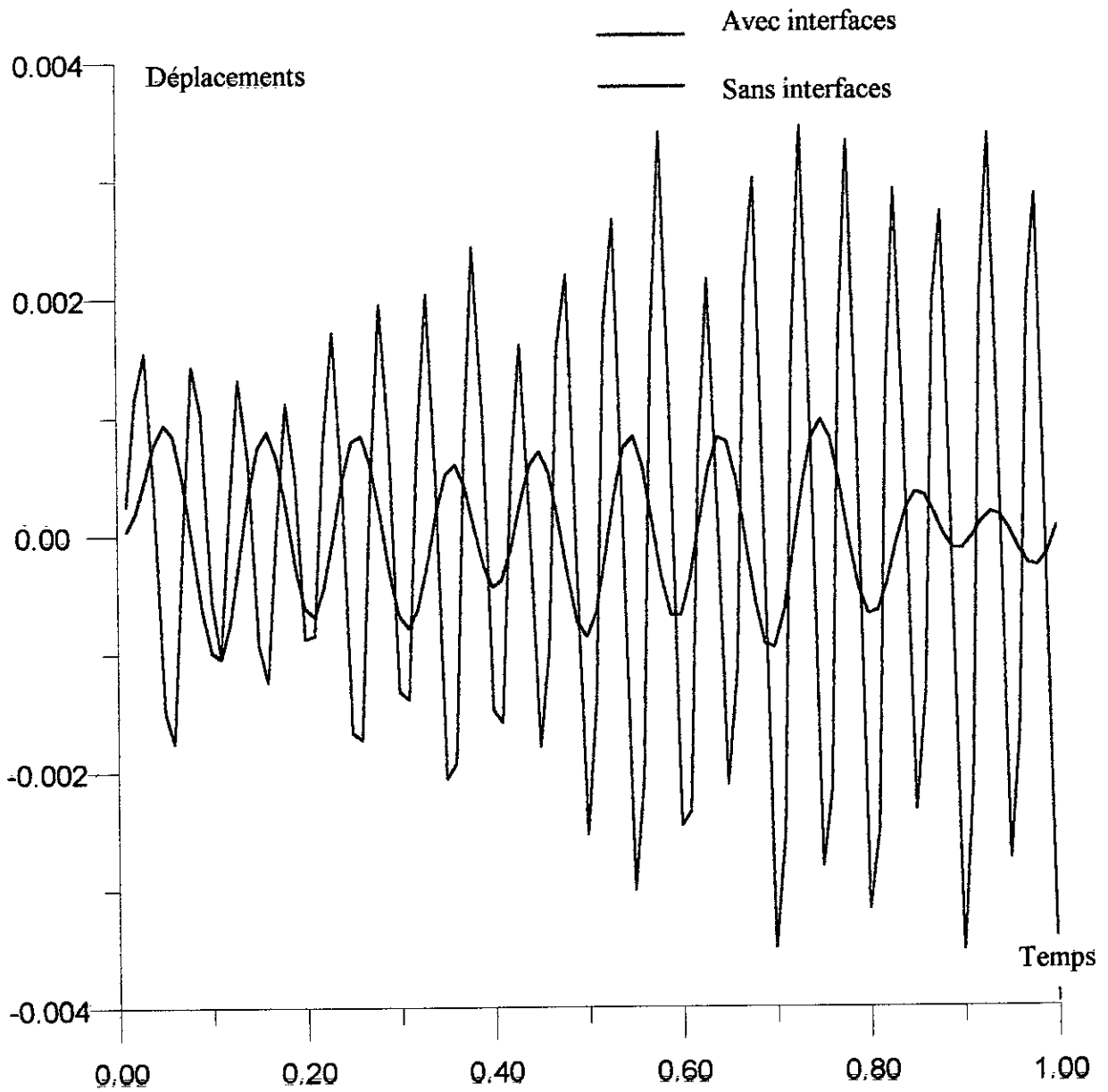
Modèle éléments finis  
 Réponse du centre de gravité de la fondation  
 sol : Argile  
 Pulsation d'excitation : 12.556 rad / sec



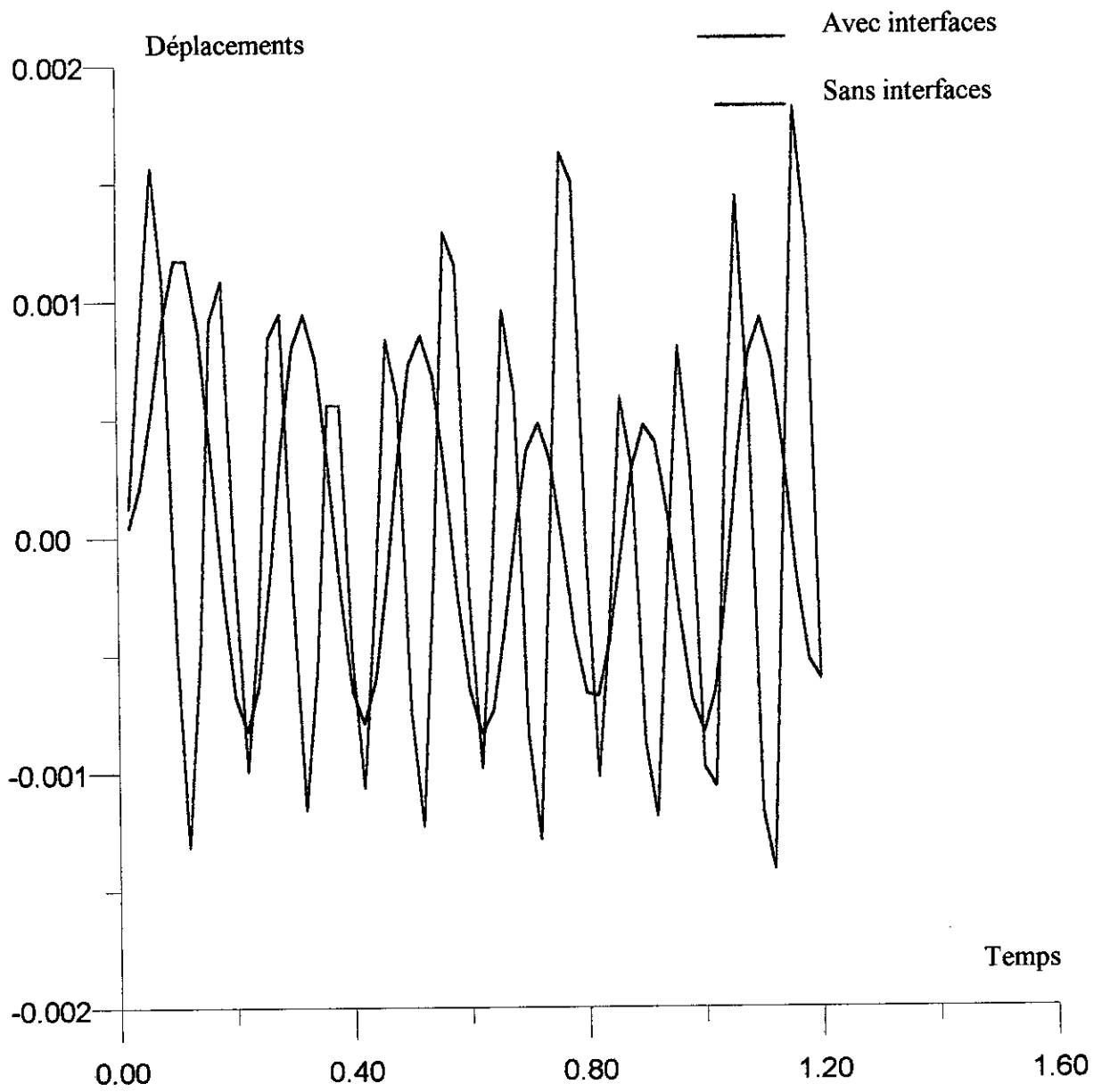
Modèle éléments finis  
Avec Interfaces  
Sol : Argile  
Système non amorti  
Sollicitation Verticale

Modèle Eléments Finis  
Déplacement du centre de gravité de la fondation  
sol : Argile  
Système non amortit  
Sollicitation verticale



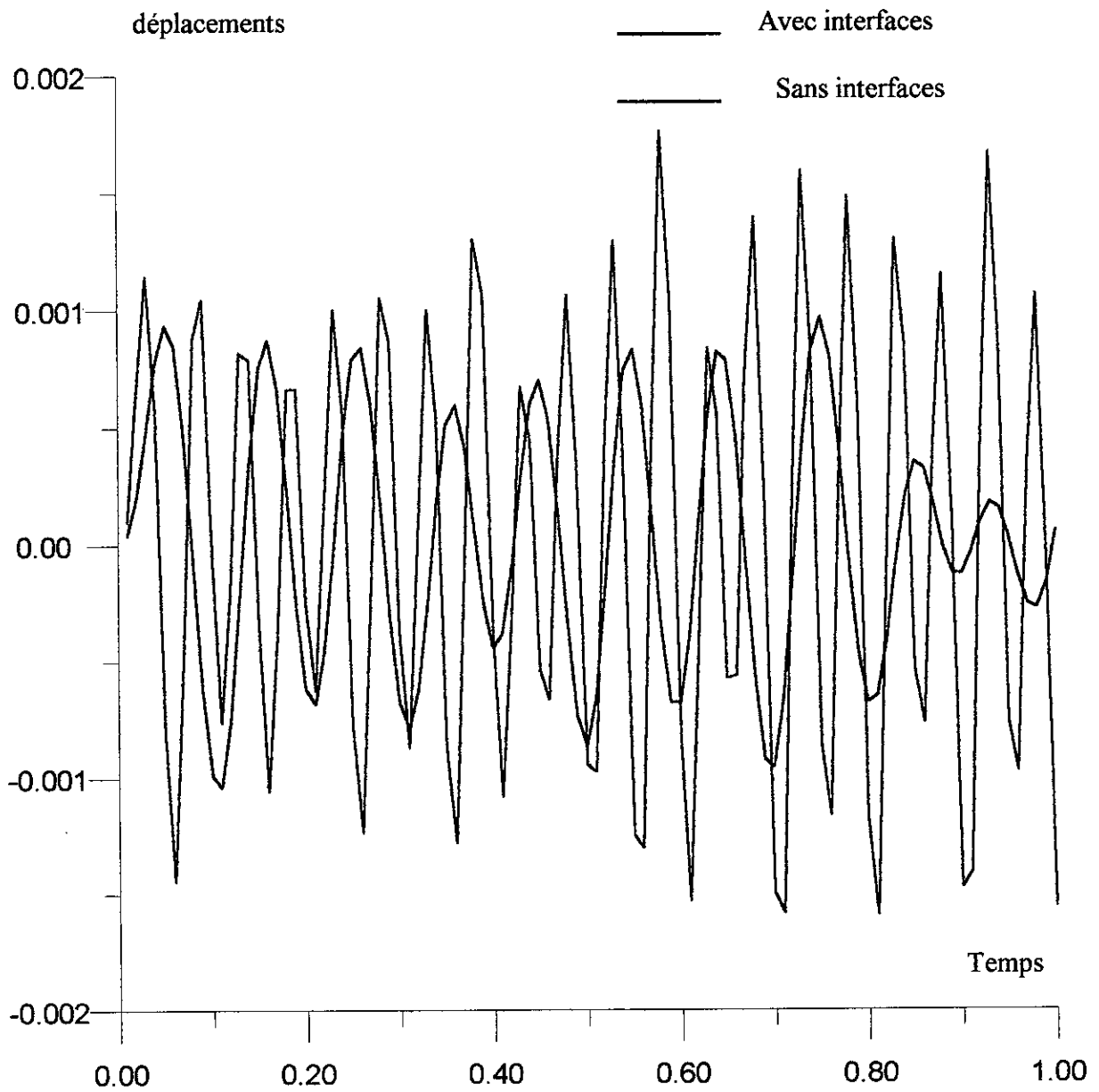


Modèle Eléments Finis  
Déplacement du centre de gravité de la fondation  
sol : Argile  
Système amorti  
Sollicitation verticale



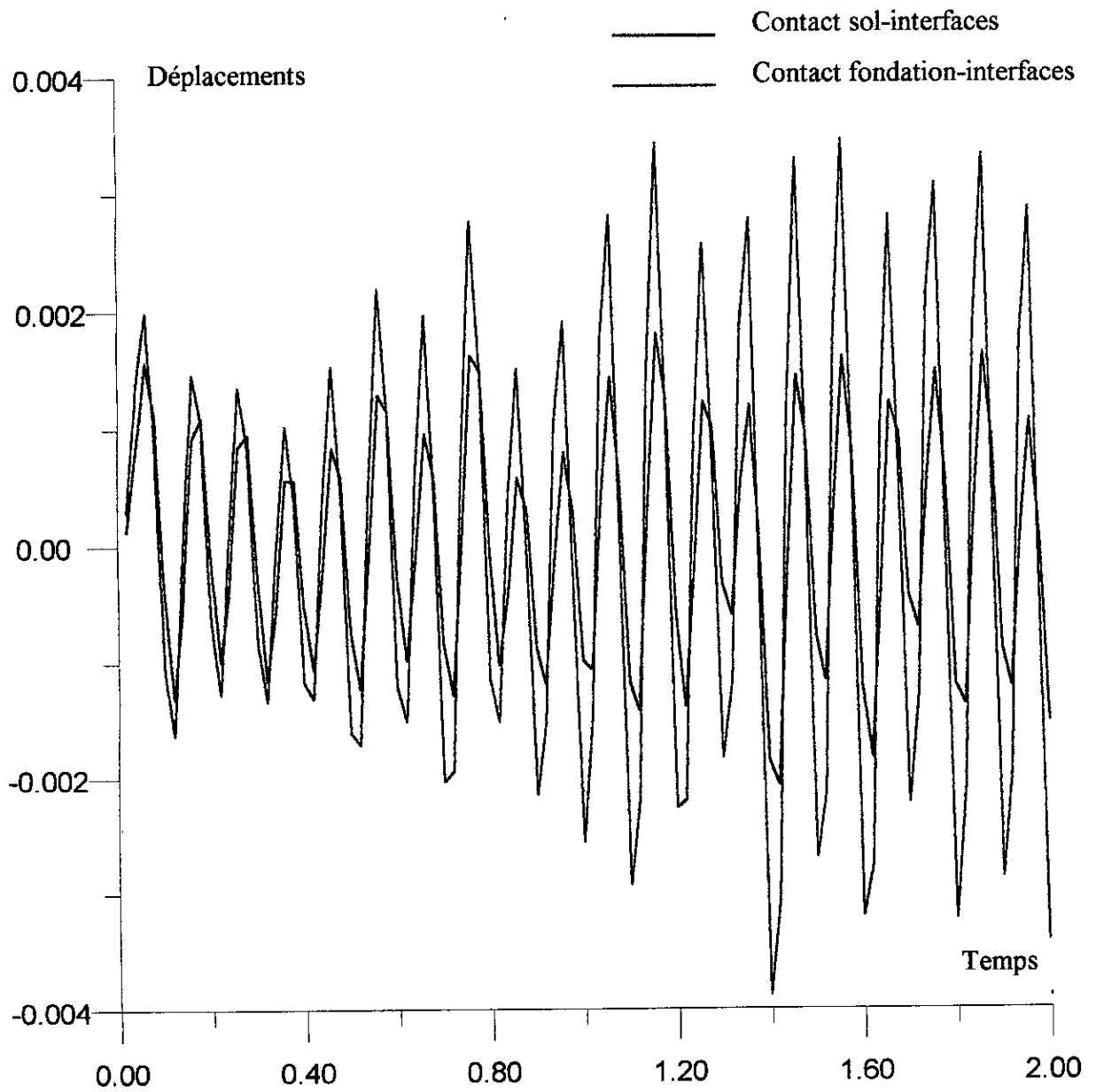
Modèle Eléments Finis  
Déplacement du point du sol  
sol : Argile  
Système non amortit  
Sollicitation verticale

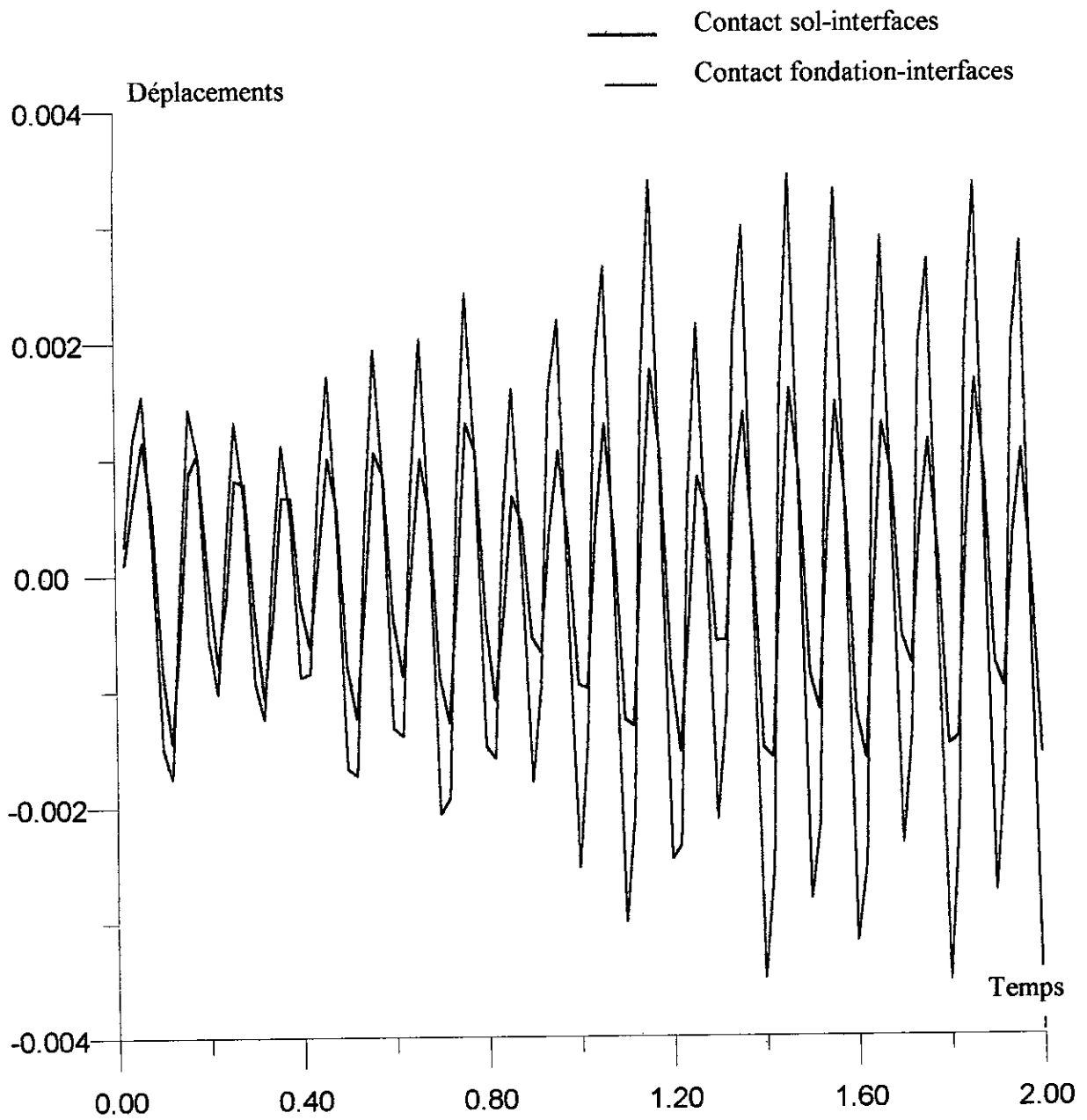
Modèle Eléments Finis  
Déplacement du point du sol  
sol : Argile  
Système amortit  
Sollicitation verticale



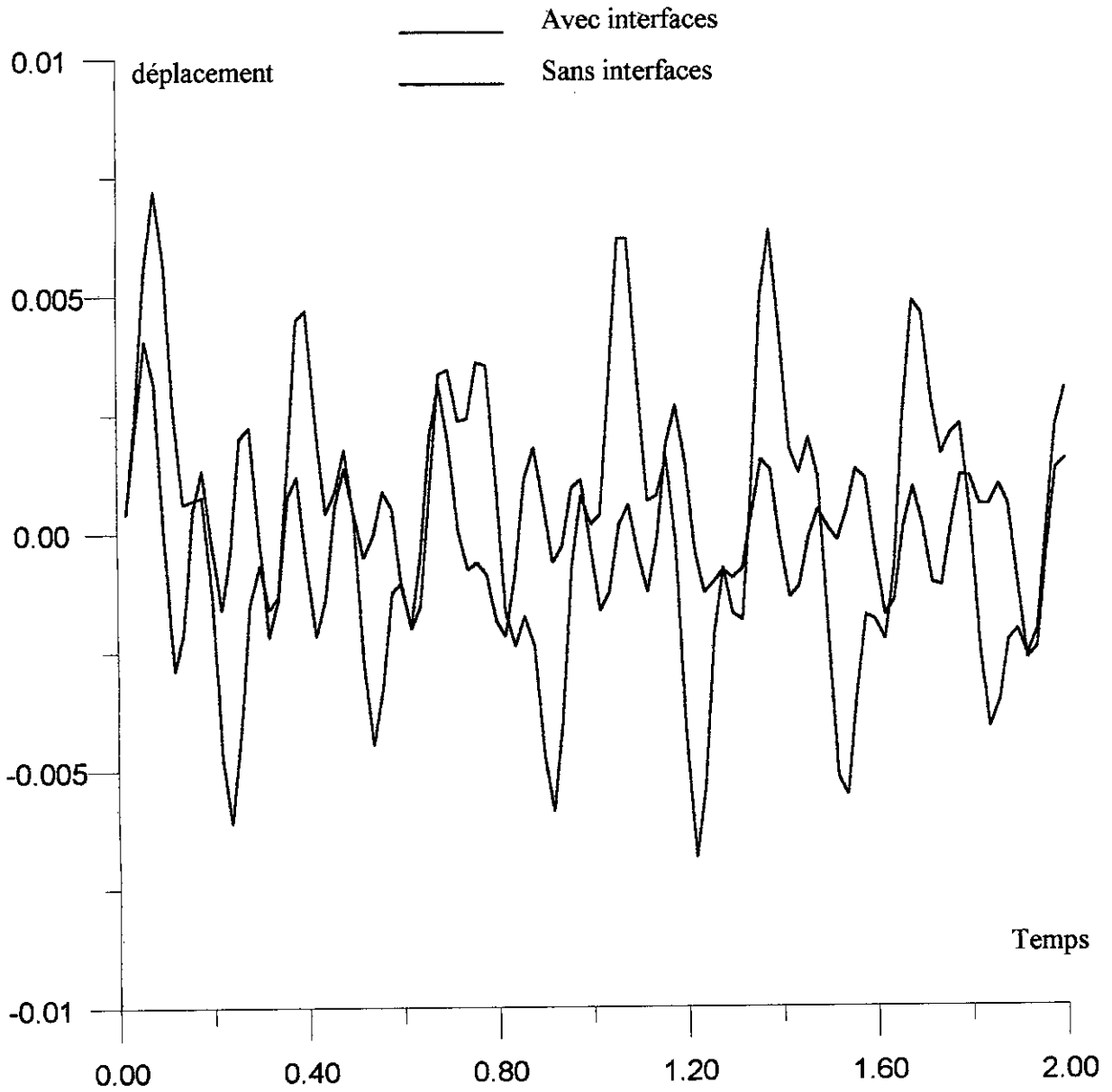


Modèle Eléments Finis  
Déplacement des point de contact de part et d'autre de l'interface  
sol : Argile  
Système non amortit  
Sollicitation verticale



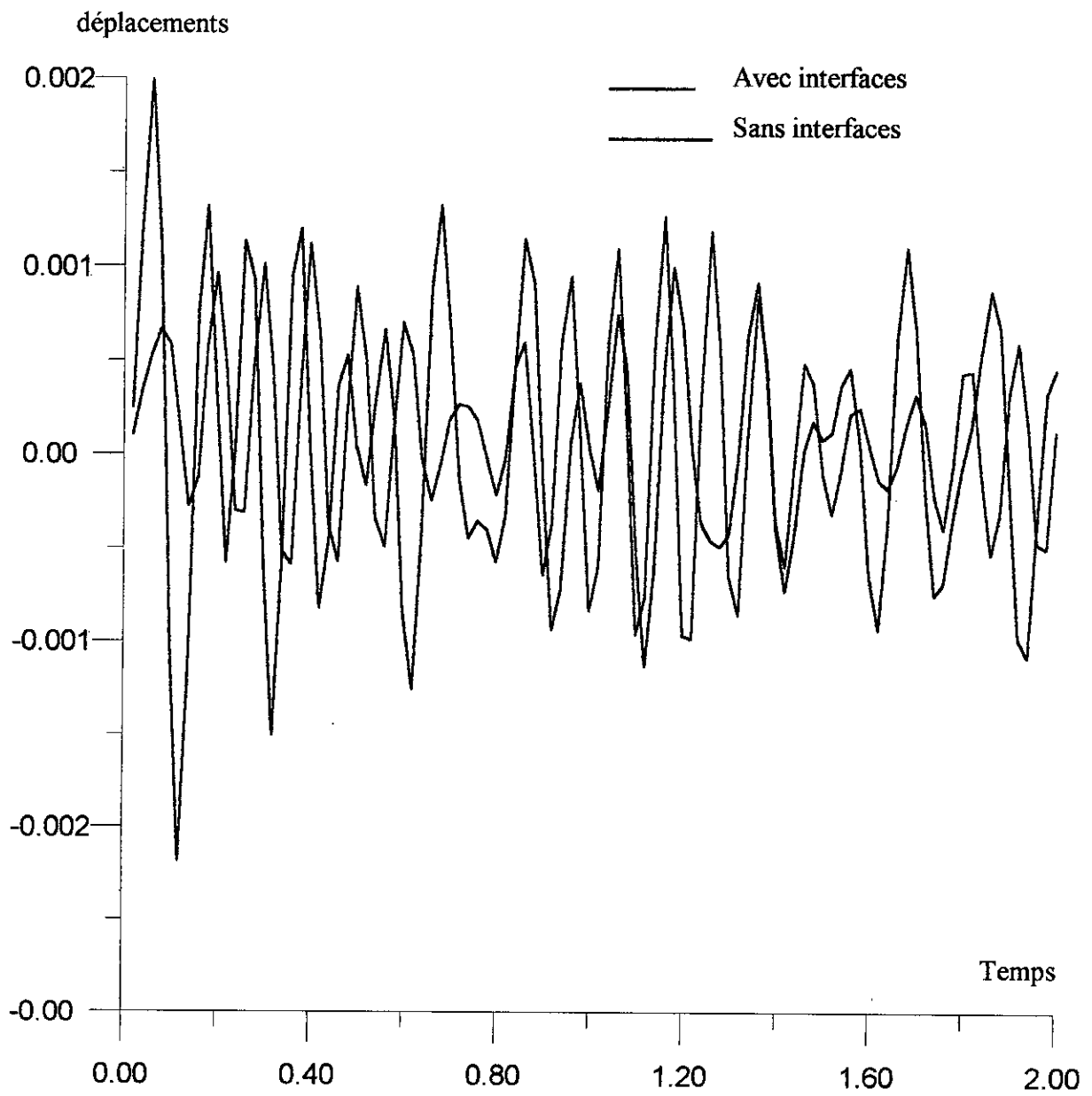


Modèle Eléments Finis  
 Déplacement des point de contact de part et d'autre de l'interface  
 sol : Argile  
 Système amortit  
 Sollicitation verticale

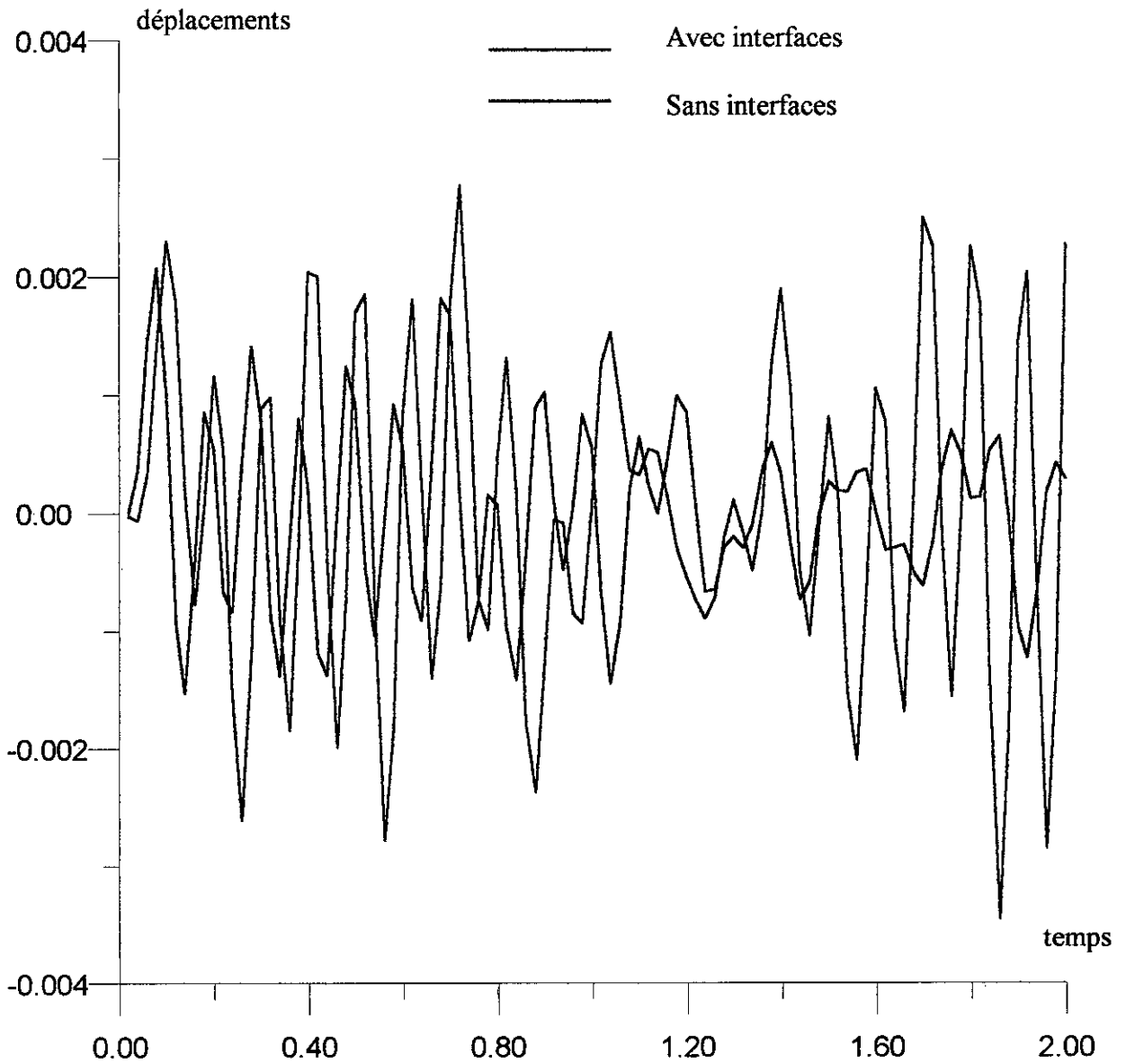


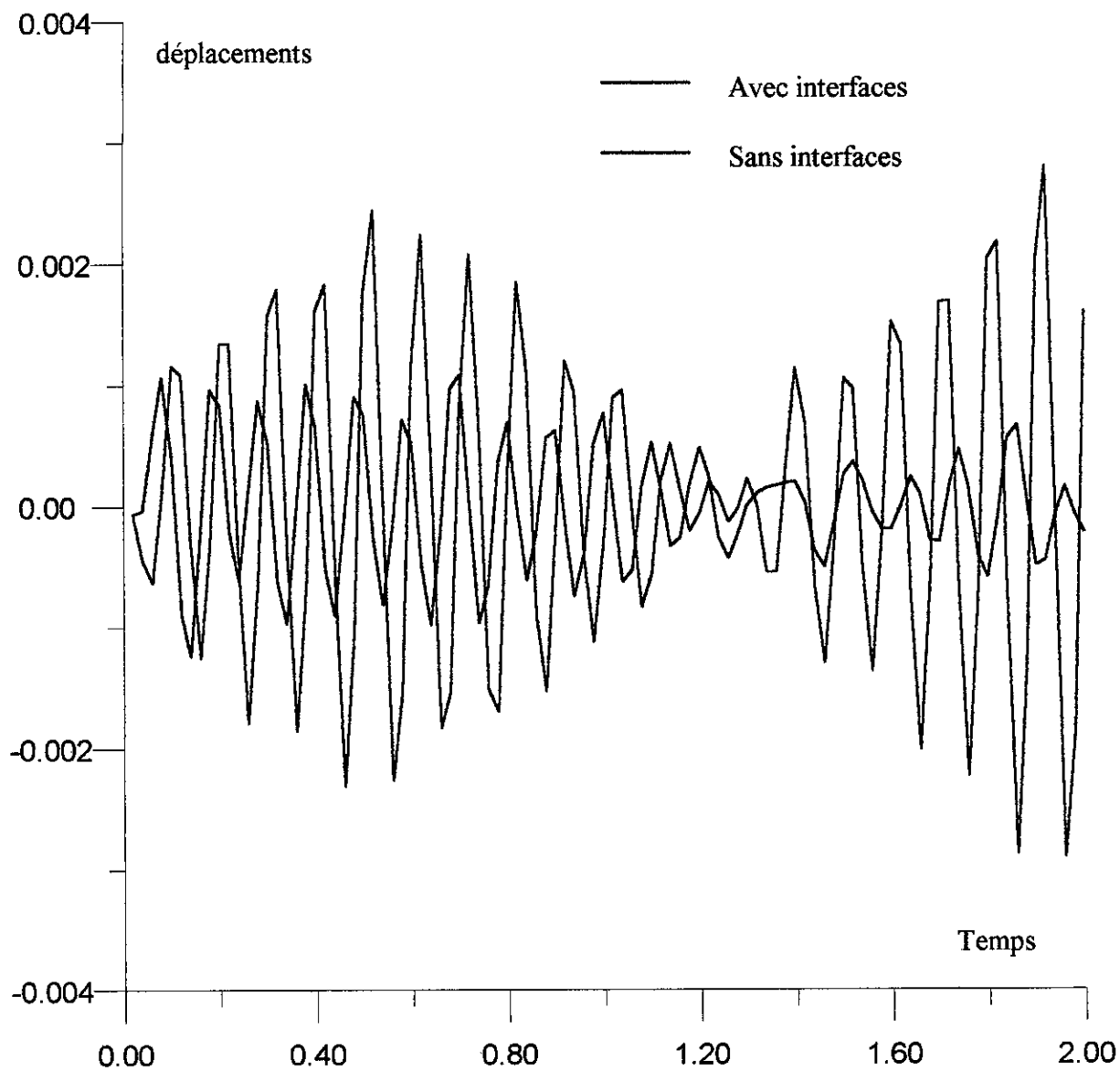
Modèle Eléments Finis  
Déplacement du centre de gravité de la fondation  
sol : Argile  
Système non amortit  
Sollicitation horizontale

Modèle Eléments Finis  
Déplacement du centre de gravité de la fondation  
sol : Argile  
Système amortit  
Sollicitation horizontale

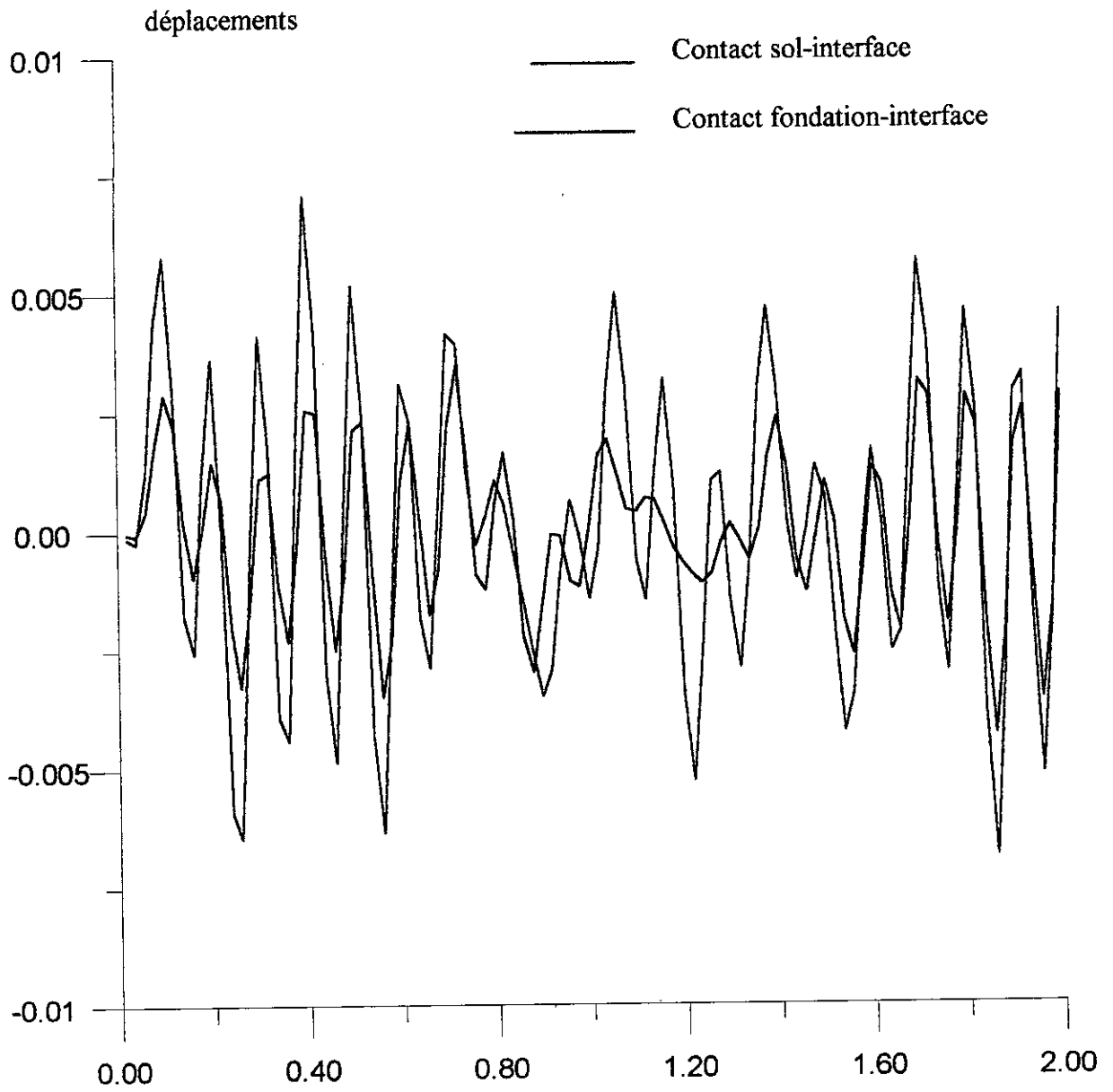


Modèle Eléments Finis  
Déplacement du point de sol  
sol : Argile  
Système non amortit  
Sollicitation horizontale

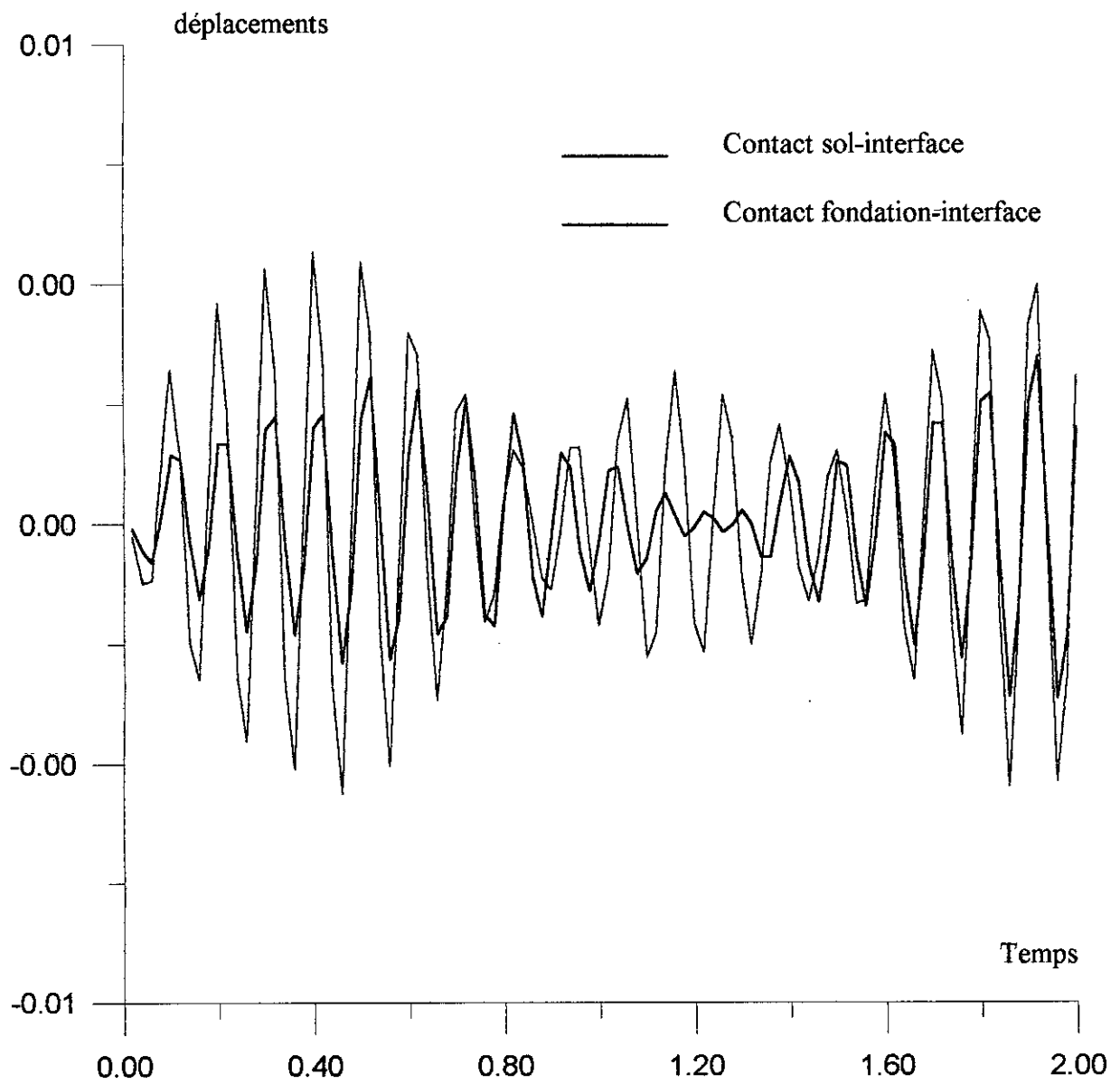




Modèle Eléments Finis  
Déplacement du point de sol  
sol : Argile  
Système amortit  
Sollicitation horizontale

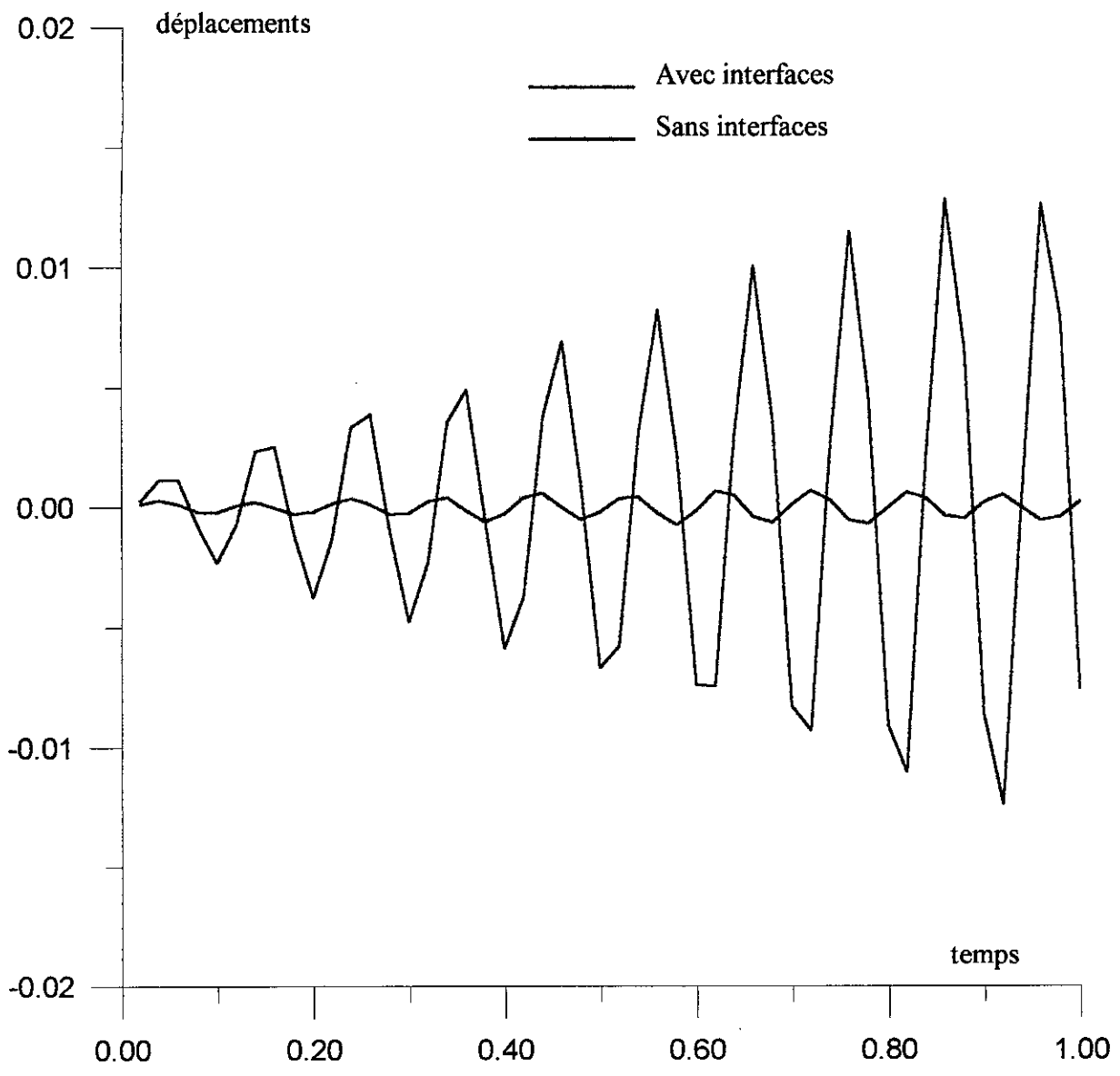


Modèle Eléments Finis  
Déplacement des point de contact de part et d'autre de l'interface  
sol : Argile  
Système non amortit  
Sollicitation horizontale

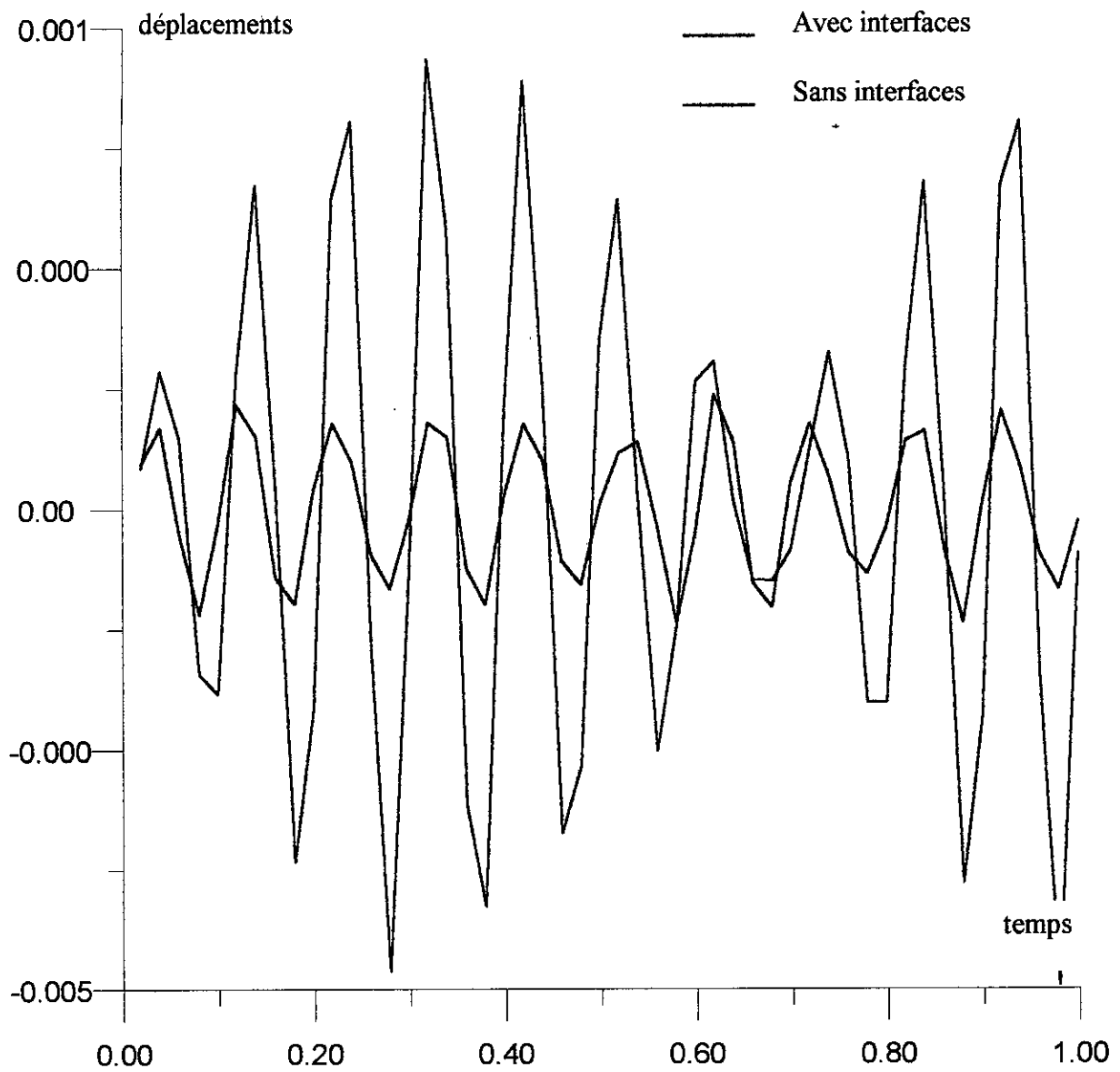


Modèle Eléments Finis  
Déplacement du point de contact de part et d'autre de l'interface  
sol : Argile  
Système amortit  
Sollicitation horizontale

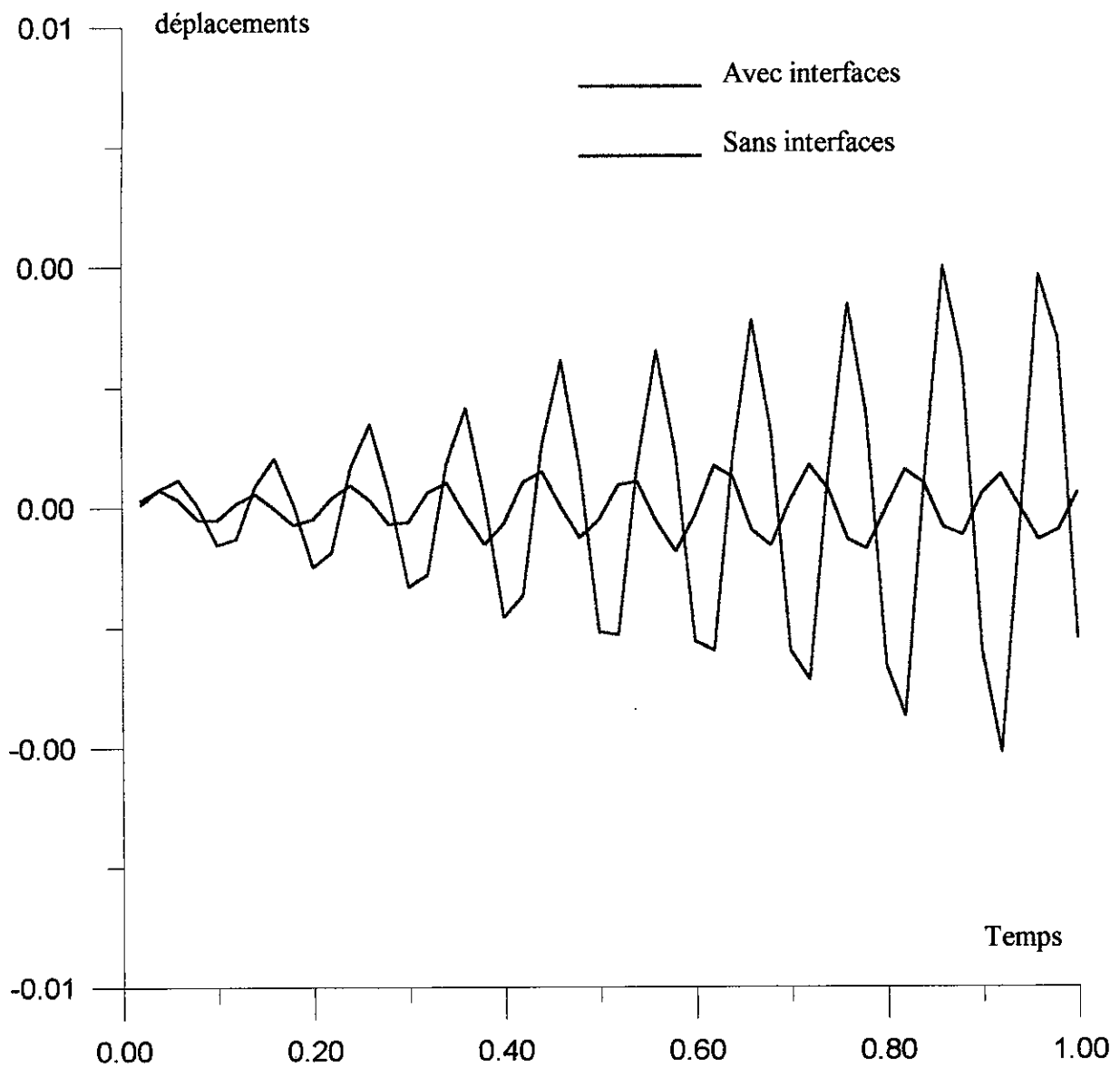




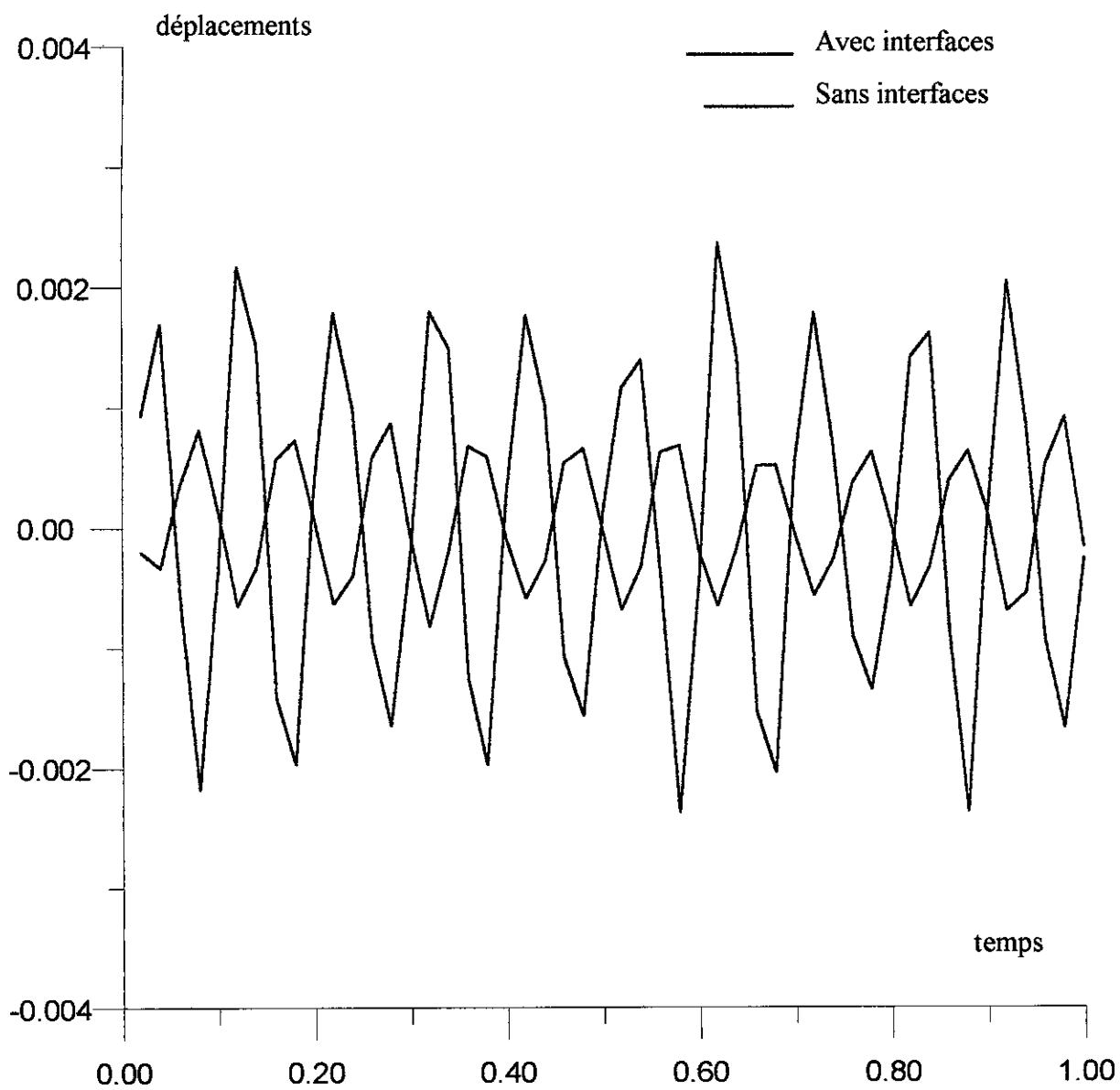
Modèle Eléments Finis  
Déplacement du centre de gravité de la fondation  
sol : sable -2-  
Système non amortit  
Sollicitation verticale



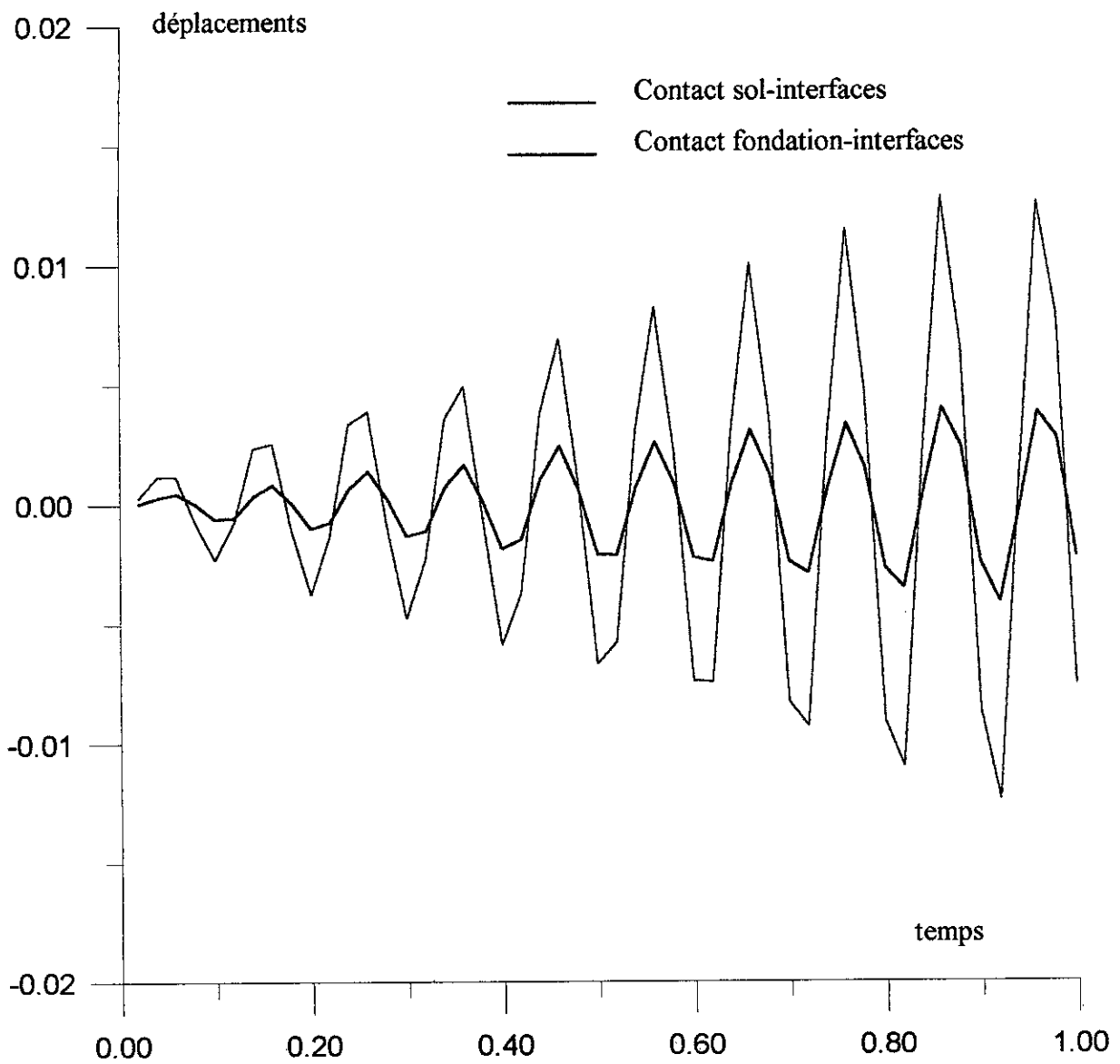
Modèle Eléments Finis  
Déplacement du centre de gravité de la fondation  
sol : sable -2-  
Système amortit  
Sollicitation verticale



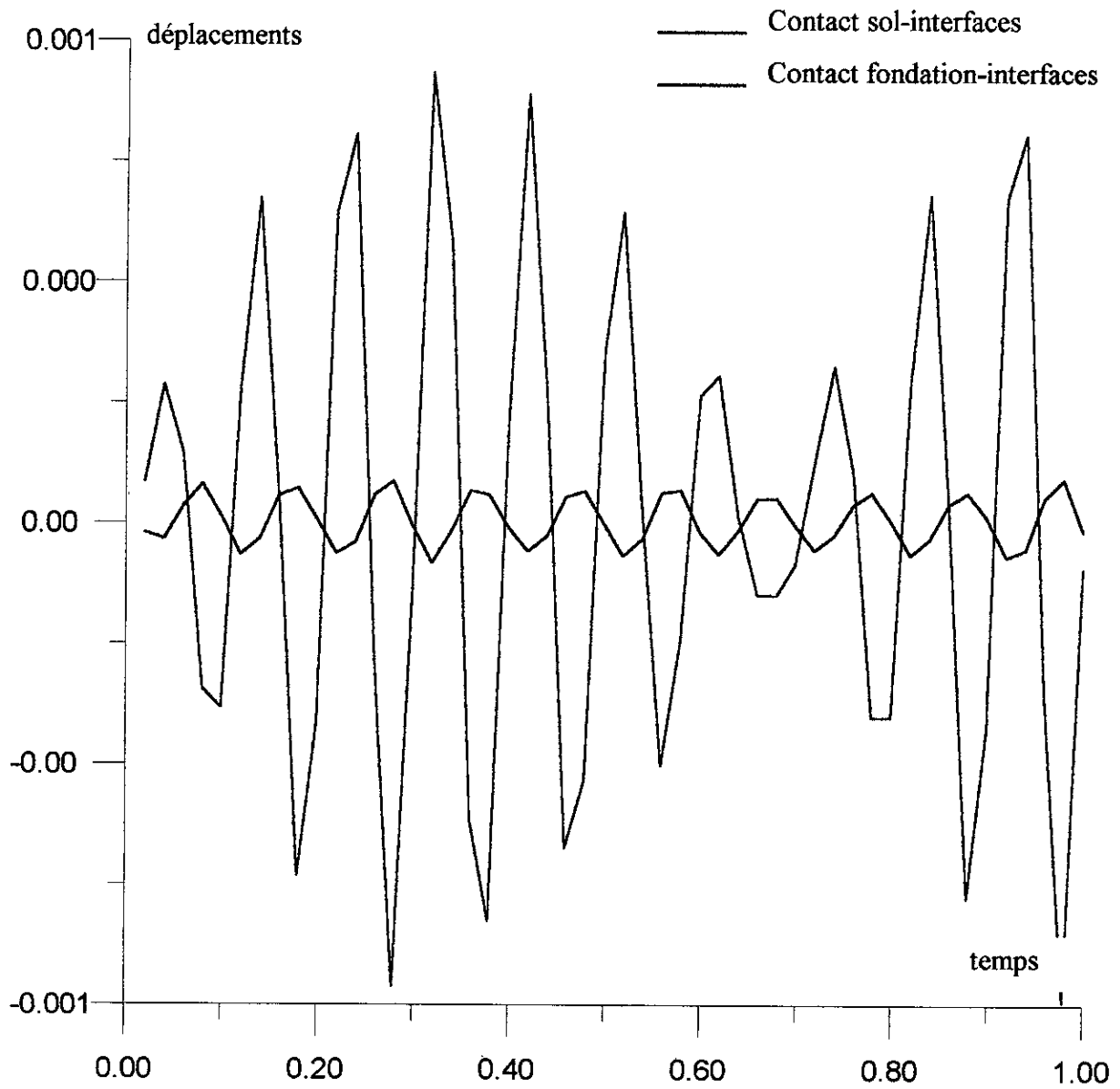
**Modèle Eléments Finis**  
**Déplacement du point de sol**  
sol : sable -2-  
Système non amortit  
Sollicitation verticale



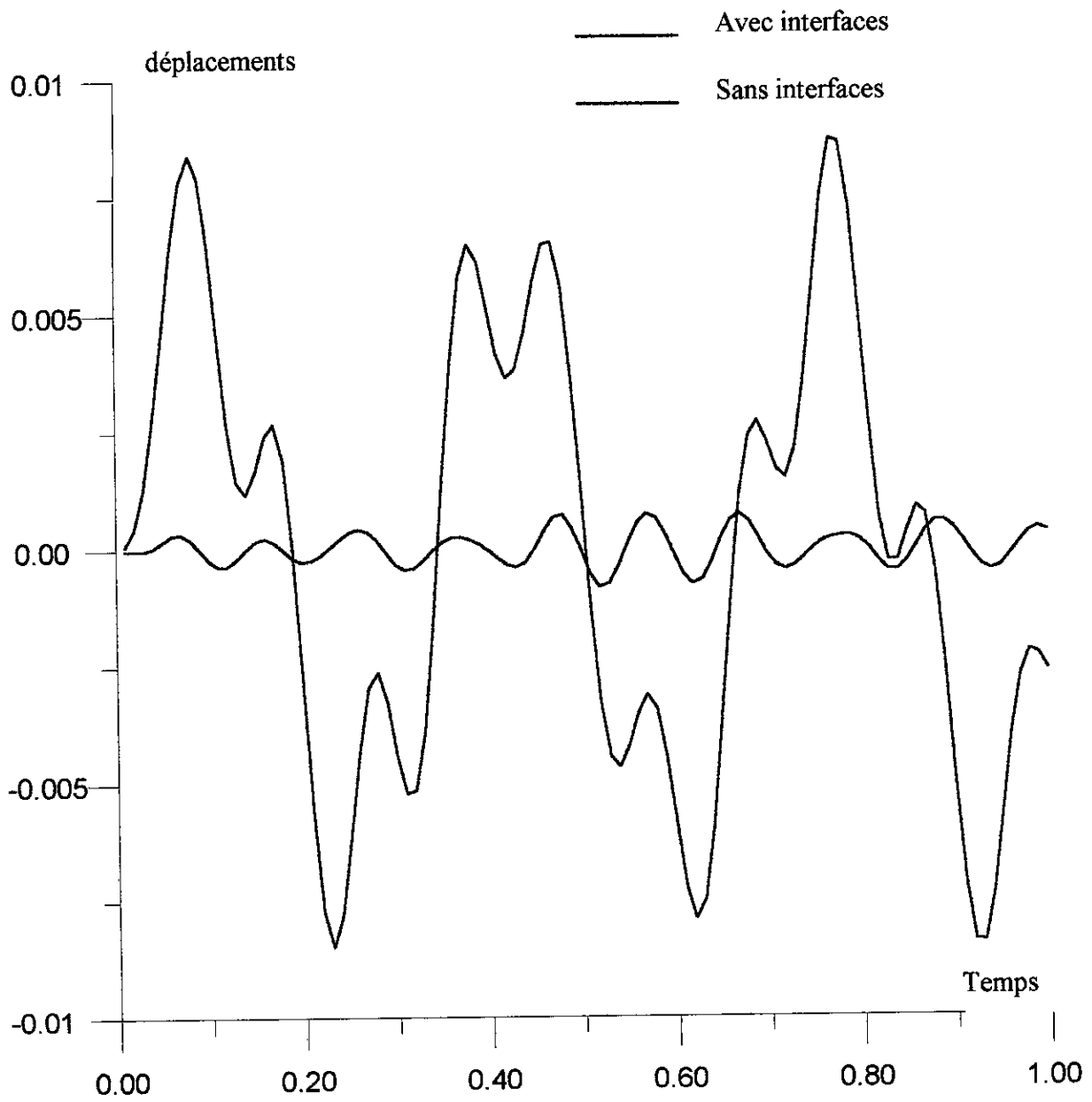
Modèle Eléments Finis  
Déplacement du point de sol  
sol : sable -2-  
Système amortit  
Sollicitation verticale



**Modèle Eléments Finis**  
 Déplacement des points de contacts de part et d'autre de l'interfaces  
 sol : sable-2-  
 Système non amortit  
 Sollicitation verticale

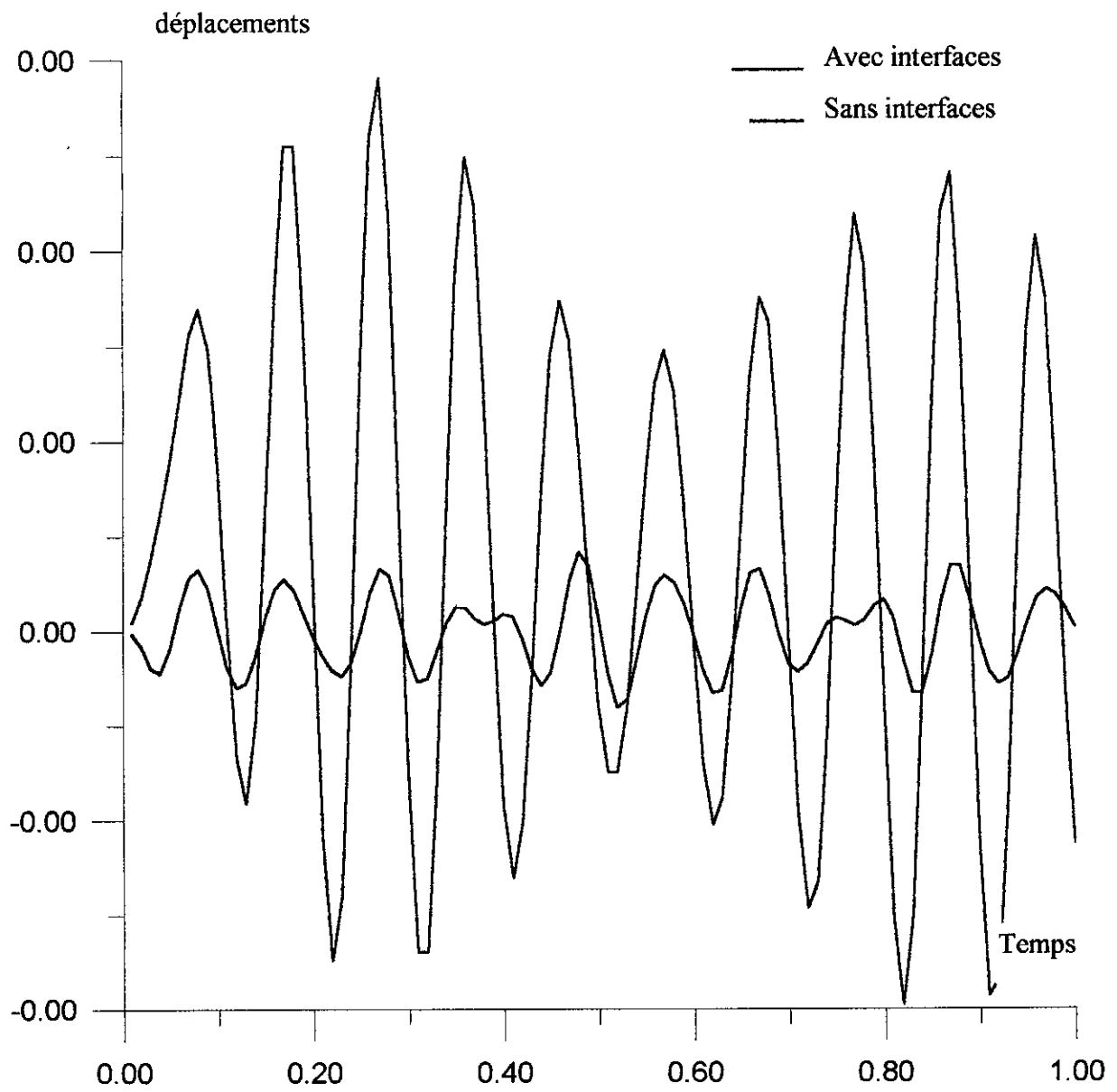


**Modèle Eléments Finis**  
 Déplacement des point de contact de part et d'autre de l'interface  
 sol : sable-2-  
 Système amortit  
 Sollicitation verticale

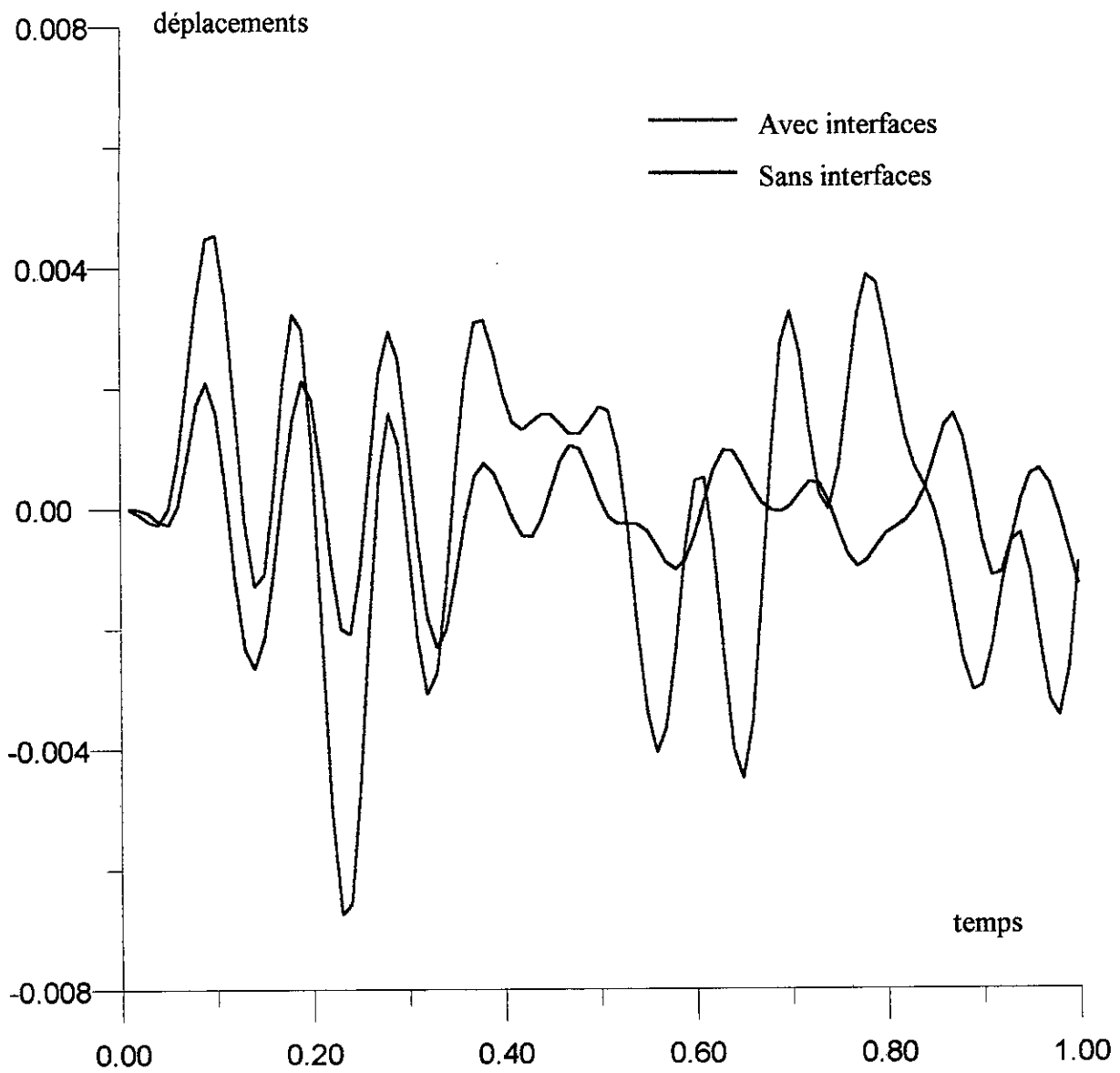


Modèle Eléments Finis  
Déplacement du centre de gravité de la fondation  
sol : sable -2-  
Système non amorti  
Sollicitation horizontale

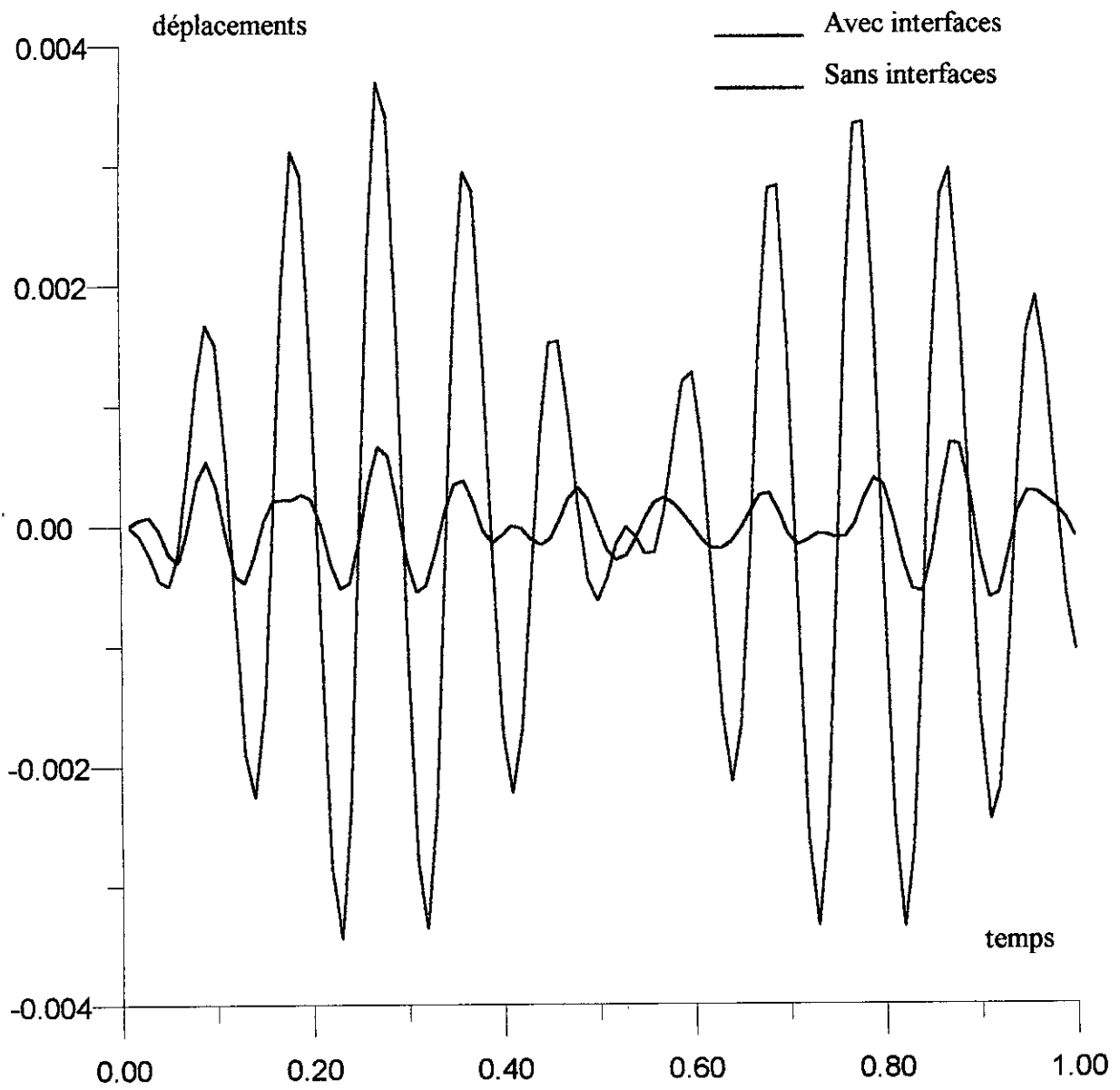
Modèle Eléments Finis  
Déplacement du centre de gravité de la fondation  
sol : sable -2-  
Système amortit  
Sollicitation horizontale



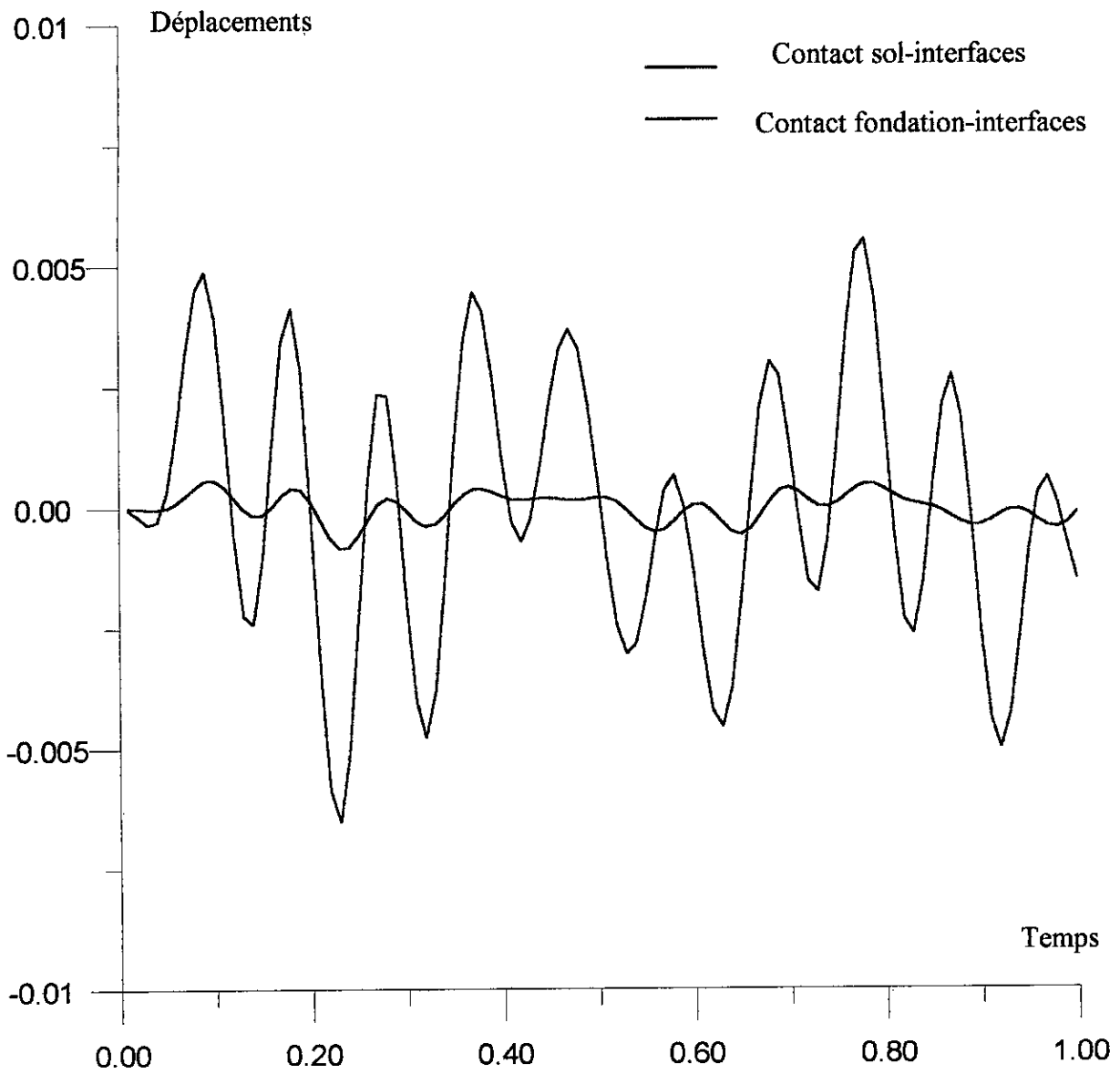




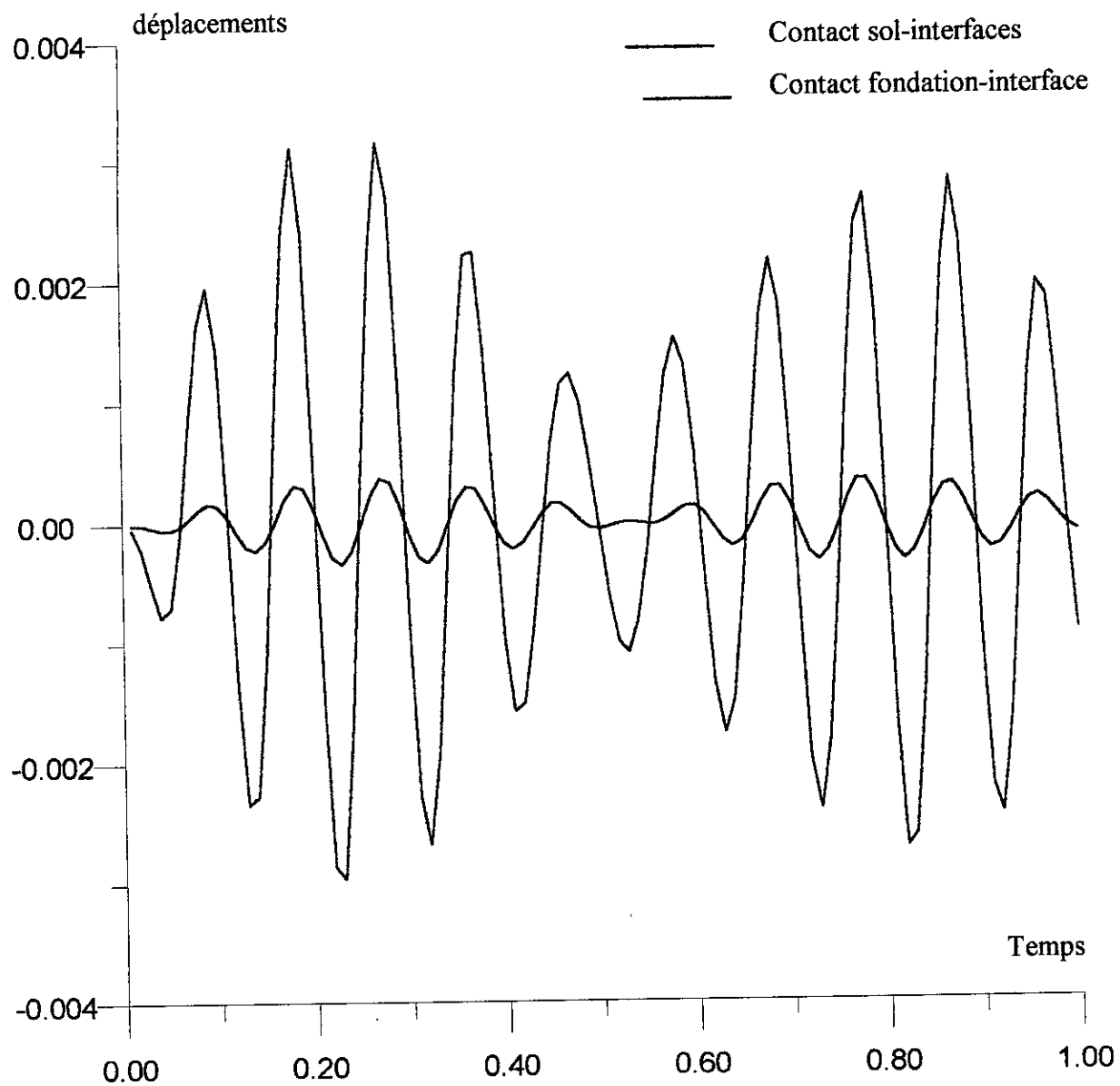
Modèle Eléments Finis  
Déplacement du point de sol  
sol : sable -2-  
Système non amortit  
Sollicitation horizontale



Modèle Eléments Finis  
Déplacement du point de sol  
sol : sable -2-  
Système amorti  
Sollicitation horizontale



Modèle Eléments Finis  
 Déplacement des point de contact de part et d'autre de l'interface  
 sol : sable-2-  
 Système non amortit  
 Sollicitation horizontale



Modèle Eléments Finis  
 Déplacement des point de contact de part et d'autre de l'interface  
 sol : sable -2-  
 Système amortit  
 Sollicitation horizontale

### III) INTERPRETATION DES RESULTATS

#### III.1) COMPARAISON DU MODELE DE LYSMER - HALL AVEC MODELE EN ELEMENTS FINIS.

Dans ce cas, nous avons considéré une fondation très rigide de 1m de hauteur, 1m de large et de 10m de long pour justifier l'hypothèse de déformation plane.

Pour rester dans le domaine des petites déformations, nous avons considéré notre fondation soumise à une pulsation de  $P_0 \sin \omega t$ , avec  $P_0 = 10 \text{ KN/ml}$

Le sol considéré est une argile médiocre, de module d'élasticité  $E=7000 \text{ KN/m}^2$

a) Le modèle de LYSMER - HALL, dans le cas où l'on néglige l'amortissement radial nous donne généralement dans la phase initiale un :

$$U_{\max} \text{ de : } 4 \text{ mm}$$

La même étude nous donne en éléments finis :

$$U_{\max} \text{ de : } 1.17 \text{ mm}$$

On voit que les ordres de grandeur correspondent, que les déplacements restent petits. Dans le modèle de LYSMER - HALL la pulsation propre est de 36.91 rad / sec, et donc inférieure de moitié à celle de la sollicitation, d'où une réponse inférieure au cas statique du modèle de Lysmer.

De même, pour notre système éléments finis nous avons trouvé les valeurs fondamentales pour les premiers modes supérieur à la fréquence d'excitation, la période fondamentale pour le premier mode étant de 133.9, donc deux fois plus grande que la fréquence d'excitation. Pour ce cas on obtient une réponse supérieure à la fréquence statique pour le modèle élément finis.

Les modèles étant différents il est difficile de conclure sur la base de la considération des pulsations propres.

Pour le modèle de LYSMER-HALL, le fait de ne pas prendre en considération la masse de sol fait que l'on obtient forcément des modes propres supérieurs aux modes propres obtenus en incluant au modèle une masse de sol effective (masse de sol additionnelle).

Le fait de prendre une masse de sol va diminuer la valeur propre du système, donc par conséquent, le mode fondamental sera beaucoup plus petit devant la période excitatrice, d'où automatiquement des valeurs plus petites, et donc plus proches du modèle éléments finis. Si on prend en considération la masse effective préconisée par HSIEH, on trouve alors comme déplacement maximum pour le modèle de Lysmer :

$$U_{\max}=2.53 \text{ mm}$$

De plus, la différence peut aussi s'expliquer par le fait que nous sommes dans un cas limite du modèle de LYSMER-HALL car nous avons une fondation longue en plan, vu que le modèle de LYSMER-HALL correspond à une généralisation des résultats obtenus pour une semelle circulaire aux semelles rectangulaires.

Le fait de ne pas considérer l'amortissement, lui-même imposé par le modèle de Lysmer-Hall ne permet pas de valider les modèles.

b) Le modèle de LYSMER-HALL, dans le cas amorti nous donne un rapport d'amortissement  $\zeta=0.65$  ; nous voyons qu'avec un tel rapport d'amortissement nous avons des déplacements encore beaucoup plus petits que ceux obtenus précédemment.

Nous avons considéré par la MEF pour le même exemple précédent divers cas possibles de rapport d'amortissement modal  $\zeta$  :

$$\zeta=0.1, \zeta=0.3, \zeta=0.6$$

Pour chacun des cas nous avons trouvés respectivement :

$$U_{\max c}=1.02 \text{ mm}, U_{\max}=0.937 \text{ mm}, U_{\max}=0.908 \text{ mm}$$

Nous constatons que le modèle éléments finis est moins sensible à la variation du rapport d'amortissement  $\zeta$  que le modèle de Lysmer-Hall car dans le modèle élément finis le rapport des pulsations (pulsation d'excitation / pulsation propre du modèle) est beaucoup plus éloigné de 1 que dans le modèle de Lysmer-Hall.

Nous remarquons que nous avons une bonne concordance pour une valeur de  $\zeta$  voisine de 30%, valeur elle-même recommandée dans la littérature.

Pour chaque cas, nous avons appliqué  $\zeta$  aux premiers mode de vibration (les dix premiers), conformément à notre attente nous avons obtenus des déplacements dont l'amplitude maximale diminue lorsque  $\zeta$  augmente légèrement dans le modèle éléments finis.

Le  $\zeta$  donné par le modèle de LYSMER-HALL de 0.65 semble très important ; il se pourrait que ce modèle ne soit pas du tout adapter aux cas de fondations longues en plan. Une étude plus détaillée devrait être faite à ce sujet, on remarquera que la prise en compte d'une masse additive de sol diminue ce rapport d'amortissement.

### III-2) EFFET DE L'INTERFACE SOL-FONDATION SUR LA REPONSE

Pour cette étude nous avons considéré deux types de sols qui correspondent à des rigidités croissantes.

- 1<sup>er</sup> type de sol : Argile  $E= 7000 \text{ KN/m}^2$
- 2<sup>em</sup> type de sol : Sable  $E= 50000 \text{ KN/m}^2$ ,

et deux modes de vibration pour la fondation :

- Vertical
- Horizontal

Nous remarquerons conformément aux résultats attendus, qu'avec ou sans interfaces, l'amplitude maximale des déplacements obtenus varient dans la sens inverse de la rigidité. De plus ce maximum est obtenus dans la phase initiale (ou transitoire) lorsque le  $\zeta$  est faible (égale à 0.1) , pour un sol avec amortissement.

On remarque que les cas non amortit donnent toujours des résultats supérieures à ceux des cas amortit.

Nous avons considéré des interfaces d'épaisseurs variable :

- $e= l/ 100 \text{ (m)}$
- $e= l/ 50 \text{ (m)}$
- $e= l/ 10 \text{ (m)}$ ,

ou  $l$  représente la longueur de l'élément.

Les caractéristiques mécaniques sont pour les trois types identiques :

- $E=10000 \text{ KN/m}^2$
- $G=10000 \text{ KN/m}^2$

Nous constatons que dans l'intervalle de temps considéré, l'interface donne des résultats plus grand quelque soit le type de sol considéré et quelque soit le mode de sollicitation.

On remarquera que bien que le module d'élasticité de l'interface soit plus grand que celui de l'argile, on obtient quand même des résultats plus grands, ceci s'explique par le fait, que lorsque l'on introduit un élément d'interface, on désolidarise la fondation des autres points du sol et qu'alors la fondation ne se retrouve liée au sol que par cette interface.

On remarque aussi que le mode de translation horizontal est nettement plus sensible à la présence d'éléments d'interfaces que le mode de translation vertical.

Dans tous les cas, l'amplitude de la réponse est d'autant plus grande que l'épaisseur de l'interface est grande. Ceci est du au fait que lorsque l'épaisseur de l'élément de l'interface augmente, sa flexibilité augmente aussi.

Nous constatons de plus que pour les interfaces  $e=1/50$  et  $e=1/100$  on a pratiquement les mêmes déplacements, ce qui sous entend que pour  $e$  compris entre  $1/100$  et  $1/50$  on a les mêmes résultats.

Ses remarques s'appliquent aussi aux points de contact fondation - interface. On constate que les points de l'interface cote fondation ont généralement un déplacement plus grand que les points de l'interface cote sol.

On constate aussi que pour un sol souple, l'utilisation d'un élément d'interface souple ne change pratiquement pas la période propre du mode fondamental, mais, par contre, que l'introduction d'un élément d'interface nettement plus souple que le sol (cas du sable) influe fortement sur la période du mode fondamental, en particulier pour  $e=1/10$  pour lequel on a trouvé:  $T_{01}=3T_0$ ,

tel que

$T_{01}$  : période fondamentale avec interfaces

$T_0$  : période fondamentale sans interfaces



### III-3) EFFET DE LA PERIODE D'EXCITATION

Nous avons considéré le même cas que (VII .3.1) avec une pulsation d'excitation de 12.566 rad/sec.

Les résultats obtenus donnent :

- cas non amortit,  $U_{max} = 7.715$  mm
- cas amortit ,  $U_{max} = 1.268$  mm

Dans ce cas, la période d'excitation devient légèrement inférieure à la période propre des systèmes sol - structure éléments finis.

On voit que dans ce cas on obtient des amplitudes de déplacement nettement supérieures au cas précédent (avec une pulsation de 62.8 rad / sec).

- Cas non amortit,  $U_{max} = 3.446$  mm
- Cas amortit,  $U_{max} = 0.968$  mm

### III-4) CRITIQUE GENERALE DE NOTRE MODELE ELEMENTS FINIS

Notre modèle présente de nombreuses limitations, à savoir,

Problème de frontière

le choix adéquat d'un pas de temps

Le fait de considérer une frontière bloquée, engendre un effet de réflexion d'onde sur les frontières, ce qui perturbe considérablement nos résultats.

C'est pour cela que nous avons considéré un petit intervalle de temps.

L'étude sur un intervalle de temps plus grand nécessiterait un choix plus conforme de frontières qui éviterait le problème de réflexion sur les frontières.

Le choix du pas de temps considéré influe seulement sur la précision des résultats, la stabilité de la convergence étant assurée par la méthode elle même considérée qui est ici celle de NEWMARK donc les paramètres  $a=1/2$  et  $b=1/2$  assurent une stabilité inconditionnelle.

Pour avoir une précision suffisante, de nombreux auteurs recommandent de prendre  $\Delta t < \Delta t_c$

avec :  $\Delta t_c = \Delta t \text{ critique} = \frac{l}{\sqrt{G \rho}}$

$l$  : la plus petite dimension du maillage

D'autres auteurs recommandent de choisir  $\Delta t$  de tel sorte que l'amortissement numérique causé par la méthode utilisée n'affecte pas les modes considérés.

Cet amortissement numérique est proportionnel à  $\omega \cdot \Delta t$  ; ces même auteurs recommandent de prendre  $\Delta t / T < 0.1$

où  $T = 2\pi / \omega$

$\omega$  correspond à la plus grande pulsation du mode pris en compte.

C'est ce que nous avons essayé d'appliquer dans nos études de cas.

**CHAPITRE VII**

**CONCLUSIONS**  
**&**  
**RECOMENDATIONS**

## CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

Le travail effectué a permis de mettre en évidence le rôle de l'interface dans la réponse des massifs de fondation soumise à des sollicitations dynamiques.

Il a été constaté que ce rôle est généralement pour les sols (sable et argile) sensible, et nettement plus sensible pour les mode de vibration horizontale que pour le mode de vibration vertical.

On a constaté aussi que cet effet est d'autant plus important que l'épaisseur de l'élément de l'interface est grande.

Il serait intéressant de voir ce qui se passe lorsque la forme de la fondation n'est pas longue en plan (rectangulaire, carré, ronde, ...etc. ).

Nous avons considéré l'élément d'interface comme élastique linéaire. Il serait bénéfique de constater ce qui se passe lorsque cet élément est élastoplastique ou autre.

De même le sol et la structure ont été considérés comme élastique linéaire d'une part viscoélastique linéaire d'autre part.

Il serait intéressant de voir ce qui se passe sur la réponse, en prenant pour le sol une loi non linéaire, ou d'autres facteurs tels que l'influence du nombre de cycle (ou la fatigue).

Notre travail s'est porté uniquement sur les mouvements de translation, mais pour avoir un complément de résultats, il faudrait considérer les rotations, et intéressant aussi, les interactions translation - rotation.

La frontière du modèle qui a été considéré ici ne correspond pas à la réalité . Pour pouvoir prendre en considération la réponse sur un intervalle de temps suffisamment grand, il serait intéressant de voir ce qui se passe avec d'autres types de frontières (consistantes, absorbantes , transmettantes, éléments infinis,...etc.).

Il serait aussi bénéfique d'étudier l'effet de l'ancrage de la fondation sur sa réponse avec les éléments d'interfaces en plus verticaux.

Il serait intéressant de voir ce qui se passe avec des multicouches où les éléments d'interfaces pourrait modéliser les surfaces de contacts entre les couches.

# **BIBLIOGRAPHIE**

## BIBLIOGRAPHIE

- [1]. Bathe K.J : " Finit element method in engineering analysis"  
Prentice-Hall ,Civil Engineering (1982).
- [2]. Batoz J.L et Dhatt G. : " Modélisation des structures par éléments finis" , Collection université de Campiègne (1984).
- [3]. Belkheir K. et Abchiche H. : " Investigation numérique du phénomène d'interaction sol-structure " Projet de fin d'étude, ENP (1994).
- [4]. Bencheikh B. " Interaction sol-structure: Modélisation et résolution numérique ", Thèse de Doctorat UST (1991).
- [5]. Bouziane S. : "
- [6]. Clough R.W et Penzien J. : " Dynamique des structures "  
Collection scientifique de l'IPSI (1980).
- [7]. Dhatt G. et Touzot G. : " Une présentation de la méthode des éléments finis " , Collection université de campiegne (1984).
- [8]. Filliat G. : " pratique des sols et fondations" Edition du Moniteur (1981).
- [9]. Leonards G.A.: " Les fondations" Dunod (1968).
- [10]. Phillipponat G. : " Fondations et ouvrages en terre"  
Eyrolles (1979).
- [11]. Pecker A. : " Dynamique des sols" Thèse de l'ENPC (1984).
- [12]. Prakash S. : " Soil dynamics" McGraw-Hill Book  
Company (1981).

- [13]. Schellekens J.C.J et De Borst R. : " On the numerical investigation of interface element" International Journal for Numerical Methods in Engineering , vol 36, pp 43-66 (1993).
- [14]. Whitman R.V. et Richart F.E. : " Design procedures for dynamically loaded foundations" Journal of the soil mechanics of the American Society of civil Engineering (1967).
- [15]. Zaman M.M., Desai C.S et Drumm E.C. : " Interface model for dynamic soil-structure interaction" Journal of Geotechnical Engineering, vol 110, n° 09, pp 1257-1273 (1984).
- [16]. Zaman M.M., Desai C.S, Lighthner J.G. et Siriwardane H.J. : " Thin layer element for interfaces and joints" International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geotechnics, vol 8, pp 19-43 (1984).