

16/97

République Algériennes démocratique et populaire

Ecole Nationale Polytechnique d'Alger

Département Génie Civil

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDE

Pour l'obtention d'un diplôme
d'ingénieur d'état en Génie Civil

THEME

**REPONSE STOCHASTIQUE
DES STRUCTURES SOUS EXCITATION
DYNAMIQUE ALEATOIRE**

Proposé par :

Mr. B. TILIOUINE

Professeur à l'ENP

Etudié par :

BENMOUHOUB Khelifa

ZIDELMAL nacer

1997

République Algériennes démocratique et populaire

Ecole Nationale Polytechnique d'Alger

Département Génie Civil

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDE

Pour l'obtention d'un diplôme
d'ingénieur d'état en Génie Civil

THEME

**REPONSE STOCHASTIQUE
DES STRUCTURES SOUS EXCITATION
DYNAMIQUE ALEATOIRE**

Proposé par :

Mr. B. TILIOUINE

Professeur à l'ENP

Etudié par :

BENMOUHOUB Khelifa

1997

DEDICACES

A mes chers parents.

A mes frères et soeurs.

A tous mes amis.

A mon ami Nacer.

Alilou

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, nous tenons à remercier particulièrement notre promoteur Monsieur le Pr B. Tiliouine, pour son suivi, ses conseils et son apport pour l'aboutissement de ce projet.

Nos remerciements vont également au président du jury ainsi qu'aux membres du Jury pour avoir accepté d'évaluer notre travail.

Un remerciement particulier est adressé à Mr .S. ZERMOUT ainsi qu'à Melle N. Abdessemed pour leur apport à ce travail.

Sans oublier Mr S. MEDJHOUDA, ainsi que Mr K. TOUNSI pour leur aide.

SOMMAIRE

Chap.1. INTRODUCTION GENERALE.....	5
Chap.2. CARACTERES SPECIFIQUES DE L'ACTION SISMIQUE.....	7
2.1. INTRODUCTION.....	7
2.2. IMPORTANCE DE L'ACTION SISMIQUE.....	7
2.3. NATURE DE L'ACTION SISMIQUE.....	7
2.4. MOUVEMENT FORT.....	8
2.5. ONDES SISMQUES.....	8
2.6. CARACTERISATION D'UN MOUVEMENT SISMIQUE.....	10
2.6.1. Définitions.....	10
2.7. EVALUATION DES SEISMES.....	11
2.8. REPRESENTATION ANALYTIQUE DE L'ACTION SISMIQUE.....	12
2.8.1. Spectre de réponse.....	12
2.8.2. Spectre de calcul.....	13
2.9. ASPECTS STOCHASTIQUES DES ACCELEROGRAMMES DES SEISMES A FORTS MOUVEMENTS.....	13
Chap.3. NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THEORIE DES VIBRATIONS ALEATOIRES.....	16
3.1. INTRODUCTION.....	16
3.2. VARIABLES ALEATOIRES : NOTIONS DE BASE.....	16
3.2.1. Caractérisation d'une variable aléatoire.....	16
3.2.2. Distribution conjointe de plusieurs variables aléatoires continues.....	17
3.2.3. Espérance mathématique.....	18
3.2.4. Moments.....	18
3.3. PROCESSUS ALEATOIRE.....	19
3.3.1. Caractérisation d'un processus aléatoire.....	19
3.3.2. Processus stationnaire.....	21
3.3.3. Décomposition spectrale d'un processus aléatoire.....	24
3.3.4. Fonction d'autocorrélation et densité spectrale des processus aléatoires dérivés.....	27
Chap.4. REPRESENTATION DE L'ACTION SISMIQUE PAR SA DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE.....	30
4.1. INTRODUCTION.....	30
4.2. BRUIT BLANC PUR.....	30
4.3. BRUIT BLANC FILTRE.....	30
4.3.1. Modèle de KANAI-TAJIMI.....	31
4.3.2. Modèle de Kanai-Tajimi modifiée.....	31
Chap.5. REPONSE ALEATOIRE D'UN SYSTEME A UN DEGRE DE LIBERTE.....	34
5.1. INTRODUCTION.....	34
5.2. EQUATION DE MOUVEMENT.....	34
5.3. REPONSE DANS LE DOMAINE TEMPOREL.....	35
5.4. REPONSE DANS LE DOMAINE FREQUENTIEL.....	36
5.5. RELATION ENTREE/SORTIE - INPUT/OUTPUT RELATIONSHIP.....	37

5.6. CONCLUSION.....	41
Chap.6. REPONSE ALEATOIRE DES SYSTEMES A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE.....	43
6.1. INTRODUCTION.....	43
6.2. GENERALITES.....	43
6.2.1. <i>Degré de liberté d'un système.....</i>	43
6.2.2. <i>Modélisation de la structure à masse concentrée :.....</i>	43
6.3. FORMULATION DE L'EQUATION DE MOUVEMENT.....	44
6.4. ANALYSE MODALE.....	44
6.4.1. <i>Les problèmes aux valeurs propres.....</i>	45
6.4.2. <i>Cas d'excitations sismiques uniformes.....</i>	47
6.5. REPONSE D'UN SYSTEME A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE A UNE EXCITATION ALEATOIRE STATIONNAIRE.....	51
6.5.1. <i>Rôle des cross-corrélations.....</i>	51
6.5.2. <i>Approximation de la réponse pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté... 53</i>	53
Chap.7. RUINE ENTRAINEE PAR DES VIBRATIONS ALEATOIRES.....	55
7.1. INTRODUCTION.....	55
7.2. PROBLEME DU PREMIER PASSAGE.....	55
7.2.1. <i>Position du problème.....</i>	55
7.3. HYPOTHESE DE FRANCHISSEMENT INDEPENDANT.....	56
Chap.8. ETUDE NUMERIQUE.....	58
8.1. INTRODUCTION.....	59
8.2. PRESENTATION DE LA STRUCTURE.....	59
8.3. HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES.....	61
8.4. APPLICATION NUMERIQUE.....	61
8.5. INTERPRETATION DES RESULTATS.....	67
Chap.9. CONCLUSION
ANNEXE.....
BIBLIOGRAPHIE

1.INTRODUCTION GENERALE.

9.1. INTRODUCTION

Le séisme se présente en un chargement dynamique qui reste l'une des plus importantes et dangereuses actions à considérer dans le cadre de la conception et du calcul moderne des structures.

Suite aux dommages que peut engendrer un séisme et avec l'accélération du développement industriel et à la réalisation de constructions audacieuses telles que les centrales nucléaires les tours de grandes hauteurs, ..., etc,

Le besoin d'une garantie antisismique des constructions s'impose comme une absolue nécessité du point de vue socio-économique.

En fait, ce qui intéresse l'ingénieur en structures est sans doute les actions dynamiques induites par les séismes dans le but de quantifier la réponse à une telle excitation.

Ainsi, dans le souci d'analyser de façon rigoureuse les structures sous l'effet d'un chargement sismique, une méthode purement probabiliste permet de décrire l'action sismique à travers ses propriétés statistiques. La connaissance de ces propriétés statistiques permet de déterminer la réponse en terme probabiliste.

C'est d'ailleurs la visée principale de la présente thèse qui se propose à la détermination de la réponse en terme probabiliste, à une excitation aléatoire qui est le séisme dont les propriétés statistiques sont supposées connues.

Ce chapitre introductif offre donc, une vue d'ensemble sur le contenu de la thèse. Le chapitre II a été consacré aux caractéristiques spécifiques de l'action sismique, à savoir, sa nature, le mouvement fort qu'elle engendre ainsi que sa représentation analytique.

Les excitations auxquelles sont soumis les systèmes structuraux sont non déterministes. Il est donc impératif de consacrer un chapitre sur les notions fondamentales des vibrations aléatoires.

Le chapitre IV traite la représentation de l'action sismique par sa fonction de densité spectrale.

La réponse stochastique des systèmes à un seul degré de liberté est exposée dans le chapitre V. Les constructions réelles ne peuvent pas être envisagées comme des systèmes à un seul degré de liberté.

Le chapitre VI est consacré à la réponse stochastique des systèmes à plusieurs degrés de liberté.

Supposant connaître les caractéristiques statistiques de la réponse stochastique d'une structure, afin de les convertir en une information sur sa fiabilité, il est importe de définir le mode de ruines.

Le mode de ruine considéré au chapitre VII est la ruine par dépassement de seuil.

Le chapitre VIII, est consacré à l'investigation numérique.

Enfin, le chapitre IX fournit des conclusions.

2.CARACTERES SPECIFIQUES DE L'ACTION SISMIQUE.

2.1. INTRODUCTION.

En terme scientifique, on désigne le tremblement de terre par secousse tellurique ou le plus souvent par " séisme ".

Les séismes apparaissent comme une manifestation susceptible de phénomènes qui se poursuivent à l'échelle des géologiques. Ils sont dus a des causes tectoniques. En effet la confrontation des plaques continentales et océaniques, se fait l'un par rapport à l'autre par glissement, par compression, par écartement ou par prolongement.

Ces divers mouvements provoquent aux frontières des plaques de glissement, fracturations et fissurations, donnant naissance à des divers types de failles géologiques; qui sous l'effet de fortes contraintes se bloquent jusqu'au seuil de rupture, et c'est le séisme.

2.2. IMPORTANCE DE L'ACTION SISMIQUE.

L'importance du problème sismique résulte en grande partie, des conséquences catastrophiques que peut avoir un séisme fort sur une région à dense population et au désastre économique.

Ainsi l'établissement d'un projet de construction parasismique rationnel exige de la part de l'ingénieur l'acquisition préalable d'un minimum de connaissance concernant les caractéristiques spécifiques de l'action sismique.

2.3. NATURE DE L'ACTION SISMIQUE.

L'action sismique consiste en un mouvement vibratoire du sol de forte amplitude caractère aléatoire correspondant à une libération brutale d'une partie de l'énergie se propageant sous forme d'ondes élastiques ayant pris naissance à l'intérieur de l'écorce terrestre de durée variable mais toujours brève. Ces ondes se diffusent dans toutes les directions à partir de la source et se manifestent sous forme de déplacement du sol qui sera enregistré par des stations dotées d'instruments adéquats.

A l'origine de tels phénomènes se trouvent les déformations lentes de la croûte terrestre ou du milieu sous-jacent, qui entraînent l'accumulation de tensions internes. Ces dernières finissent par dépasser, en un point donné, la résistance des roches au cisaillement, produisant à l'endroit en question une rupture qui se propage ensuite. La faille résultante constitue désormais une zone de faiblesse dans la croûte.

Les propriétés de l'action sismique dépendent de nombreux facteurs, dont notamment : la magnitude, le mécanisme au foyer et la profondeur du foyer, la distance du site à la source, la direction de propagation, les propriétés

mécaniques et la configuration des milieux traversés, ainsi que les caractéristiques géologiques, géotechniques et topographiques du site.

Il est bien entendu qu'à partir de certaines distances de la source allant de quelques dizaines de kilomètres pour les séismes modérés à quelques centaines de kilomètres pour les grands séismes, les mouvements sismiques n'affectent plus les constructions.

En génie sismique, l'ingénieur alloue un intérêt aux effets locaux des mouvements sismiques importants (de forte intensité) pour lesquels le mouvement est suffisamment intense pour engendrer des endommagements structuraux. Ces mouvements sismiques sont dits *mouvements forts*.

2.4. MOUVEMENT FORT.

L'étude analytique et expérimentale du mouvement fort a pu se développer ces dernières années grâce aux réseaux de sismographes et d'accélérographes installés dans certaines régions sismiques du monde.

L'intérêt pour une telle étude s'est accentué en raison des problèmes de sécurité se posant avec une acuité de plus en plus grandes en ce qui concerne certaines installations stratégiques particulièrement sensibles telles que les ponts, les centrales nucléaires etc.

L'étude du mouvement fort en zone proche se définit comme étant la mesure et l'interprétation physique du mouvement du sol au voisinage d'une faille, dans une zone où ces mouvements mettent en danger les constructions et la vie humaine.

Les enregistrements obtenus par les systèmes de mesure des mouvements forts sont requis par l'ingénieur aussi bien pour étudier les propriétés des mouvements sismiques proches de la source que pour l'étude de la variation spatiale des ondes sismiques.

2.5. ONDES SISMIQUES.

Après rupture, l'énergie est libérée sous forme d'ondes sismiques de divers types. Ces dernières se propagent rapidement à partir du foyer, provoquant une secousse sismique et engendrant en surface un mouvement complexe difficile à prédire en un site donné.

On distingue les types d'ondes suivantes :

- Ondes de volume.
- Ondes de surface.

a) Ondes de volumes.

Elles prennent naissance dans le foyer et se propagent à l'intérieur de la terre (dans un volume), sous deux formes :

- *Ondes longitudinales ou ondes P (ondes primaires)* : Ce sont des ondes de dilatation ou de compression qui se propagent à une vitesse moyenne de 7 à 8 Km/h et induisent une déformation parallèle à la direction de propagation. Elles s'accompagnent d'un changement de volume.
- *Ondes transversales ou ondes S (ondes secondaires)* : Ce sont des ondes de cisaillement, correspondant à un mouvement sans variation de volume. Elles se propagent à une vitesse de 4 à 5 Km/h et induisent une distorsion dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. Ces ondes sont les plus dangereuses pour les constructions, elles sont d'une importance primordiale en génie parasismique.

A la différence des ondes longitudinales, les ondes transversales ne peuvent se propager dans les milieux liquides ou gazeux, en raison de l'inaptitude de ces milieux à transmettre les efforts de cisaillement.

b) Ondes de surface.

Les ondes de volume rencontrent des discontinuités et des hétérogénéités ou la surface libre. En heurtant ces surfaces, elles donnent naissance à des ondes de surface n'intéressant le sol que sur une profondeur extrêmement faible.

On distingue principalement :

- les ondes de Rayleigh
- les ondes de Love
- *Ondes de RAYLEIGH ou ondes R* : Ce sont les ondes pour lesquelles les points du sol décrivent des ellipses dans le plan vertical de la direction de propagation. Elles entraînent des compressions ou des tractions ainsi que des cisaillements dans le sol.
- *Ondes de LOVE ou ondes Q* : Ce sont les ondes pour lesquelles les points du sol se déplacent dans un plan tangent à la surface perpendiculairement à la direction de propagation. Elles n'entraînent que des contraintes de cisaillement. *sol meuble,*

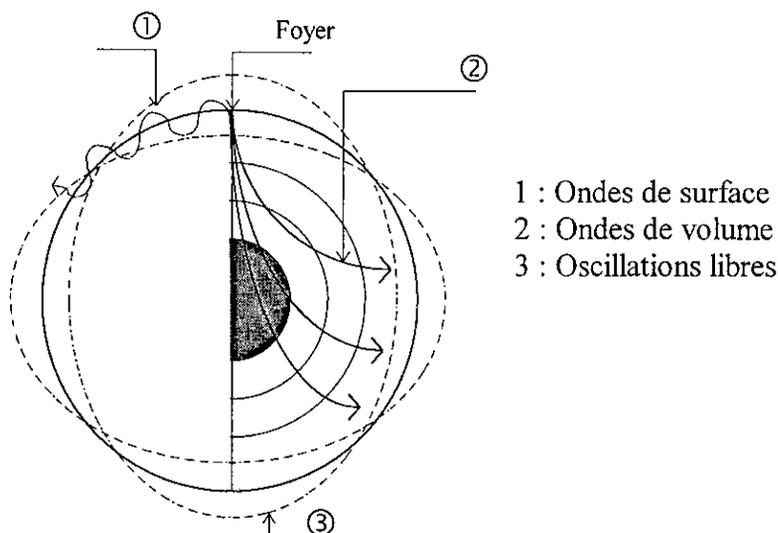


Fig. 2.1 - Types d'ondes

2.6. CARACTERISATION D'UN MOUVEMENT SISMIQUE.

2.6.1. Définitions.

a) L'épicentre géométrique.

L'épicentre géométrique est la projection verticale du foyer sismique sur la surface libre. *Fig. 2.2*

b) La distance focale.

La distance focale d'un bâtiment est la distance qui le sépare du foyer sismique. *Fig. 2.2*

c) La distance épacentrale.

La distance épacentrale d'un bâtiment est la distance qui le sépare de l'épicentre géométrique. *Fig. 2.2*

d) L'épicentre d'observation.

C'est le site où se produit le maximum de dégâts lors d'un séisme. Il n'est pas forcément confondu avec l'épicentre géométrique.

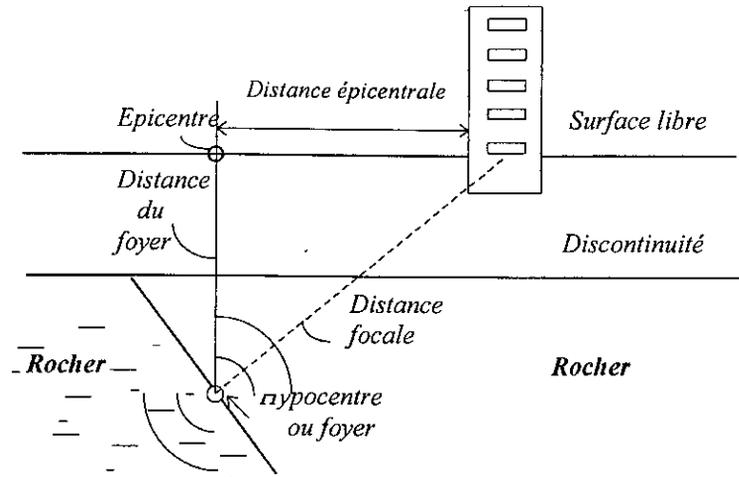


Fig. 2.2 - Caractéristiques du mouvement sismique

2.7. EVALUATION DES SEISMES.

Pour l'ingénieur en génie civil, la caractéristique essentielle est l'aptitude plus ou moins grande du séisme à provoquer en un point donné de la surface des actions mécaniques et des destructions.

Pour représenter cette grandeur, on utilise aujourd'hui des échelles macroscopiques désignées par :

- l'échelle des magnitudes
- l'échelle des intensités.

- Magnitude :

La magnitude représente une mesure de l'énergie libérée par la rupture de la faille dans la zone source. Elle est calculée comme étant le logarithme de l'amplitude maximale enregistré par un sismographe du type Wood-Anderson, ayant une période propre de 0.8s et un pourcentage d'amortissement critique de 80%, situé à 100 Km de l'épicentre.

D'une façon générale la magnitude est calculée par l'expression :

$$M = \log \frac{A}{T} + F(\Delta, h) + S \quad 2.1$$

où

- A : L'amplitude maximale de l'onde sismique enregistrée.
- T : Période de l'onde sismique enregistrée.

- F : Représente le facteur de correction de la distance épacentrale Δ et de la profondeur h .
- S : Représente un facteur de site.

La magnitude d'un séisme est un nombre réel exprimé en chiffres arabes.

Entre la magnitude M et l'énergie libérée E , a été établie la relation suivante :

$$E = 10^{1.8 + 1.5M} \quad \text{KJoules} \quad 2.2$$

- Intensité :

L'échelle d'intensité attribuée à un séisme caractérise son importance en un lieu donné, d'après les manifestations ressenties par les personnes et les dégâts subis par les constructions.

L'intensité d'un séisme dépend du lieu où elle est mesurée et décroît généralement quand la distance épacentrale du lieu d'observation augmente. Elle est exprimée en chiffres romains. Il existe deux grandes échelles de mesure :

- L'échelle macroscopique internationale - l'échelle MERCALLI.
- L'échelle macroscopique M.S.K :

2.8. REPRESENTATION ANALYTIQUE DE L'ACTION SISMIQUE.

L'une des visées du génie sismique est de quantifier la réponse sismique des structures. Dans ce sens plusieurs représentations de l'input sismique existent.

Parmi elles, celle qui utilise l'histoire temporelle de l'action sismique et celle qui représente la répartition énergétique du signal sismique (fonction de densité spectrale) et qui nécessite une analyse de nature probabiliste.

En pratique, une représentation de l'action sismique peut se faire à l'aide d'un spectre de réponse.

2.8.1. Spectre de réponse.

Le spectre de réponse en accélération, vitesse ou déplacement permet de faire intervenir la notion de contenu en fréquence du mouvement sismique, son but est de caractériser un séisme d'après une structure.

Par définition, un spectre de réponse exprime la réponse maximale des grandeurs d'un oscillateur simple à un degré de liberté de fréquence propre et de coefficient d'amortissement variable.

Par ailleurs, pour une même secousse sismique, les spectres de réponse établis en surface sont différents selon qu'ils correspondent à un affleurement rocheux ou à un dépôt sédimentaire. Les caractéristiques des sédiments vont influencer sur le mouvement du sol enregistré en surface. Par conséquent, la forme du spectre de réponse établi en surface est très sensible à la nature du sol.

2.8.2. Spectre de calcul.

Lorsqu'il s'agit de déterminer le spectre de réponse à prendre en compte pour le calcul des constructions en un site donné, il est exclu d'utiliser un seul accélérogramme, même s'il a été enregistré au voisinage du site. Ainsi, en se basant sur l'étude des spectres de réponses associés à plusieurs séismes et sur le calcul des réponses correspondant à différents enregistrements de mouvements, il est possible d'estimer la forme générale de spectres typiques, ou de déduire des règles qui permettent de construire, de façon approximative, des spectres de calcul utilisables pour la conception des structures.

Il existe une différence fondamentale entre un spectre de réponse (*response spectrum*) et un spectre de calcul (*design spectrum*). Le premier caractérise la réponse calculée associée à un mouvement sismique particulier (unique), alors que le second caractérise une classe de mouvements sismiques pouvant exciter un site bien défini.

2.9. ASPECTS STOCHASTIQUES DES ACCELEROGRAMMES DES SEISMES A FORTS MOUVEMENTS.

L'étude des accélérogrammes des tremblements de terre à fort mouvement montre une nature stochastique évidente du signal. Cette nature aléatoire est due à deux catégories de paramètres :

- la première catégorie concerne la profondeur du foyer, la distance du site considéré à l'épicentre, la quantité d'énergie libérée dans la zone du foyer, durée pendant laquelle l'énergie se libère, la vitesse de rupture qui est variable. Ces paramètres liés aux séismes lui-même et à sa localisation par rapport au site où se trouve la structure étudiée ont un caractère aléatoire évident.
- La seconde catégorie de paramètres à considérer est relative au fait que les ondes sismiques atteignent le site considéré après avoir subi de nombreuses diffractions, réflexions dans les couches du sous-sol. Ces phénomènes complexes font que les accélérogrammes ont une nature stochastique.

Ainsi, deux accélérogrammes relatifs au même séisme mesuré en deux points voisins d'un même site seront généralement différents. Donc, il est de considérer les accélérogrammes comme des réalisations d'un processus stochastique, non pas comme des fonctions déterministes du temps et de l'espace.

3. NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THEORIE DES VIBRATIONS ALEATOIRES.

3.1. INTRODUCTION.

L'étude des propriétés statistiques nécessaires à la caractérisation d'un phénomène aléatoire relève de la théorie des processus aléatoires. Ces dernières années la théorie des processus aléatoires s'est développée. Elle constitue le fondement pour l'analyse stochastique des structures. Parmi les applications importantes de la théorie des processus aléatoires, on citera l'analyse des vibrations aléatoires des systèmes mécaniques. Les vibrations aléatoires constituent une discipline qui combine la théorie des processus aléatoires et la dynamique des structures. Leur principal objectif est d'obtenir les caractéristiques probabilistes de la réponse d'un système pour des caractéristiques connues des sollicitations.

Les méthodes d'analyse des vibrations aléatoires, exposées dans cette section, donnent la possibilité d'étudier les processus dynamiques qui se manifestent dans les systèmes mécaniques (possibilité de déterminer les caractéristiques probabilistes des déplacements des points du système et de leur deux premières dérivées) et d'obtenir des informations relatives aux propriétés statistiques du système, indispensable à l'évaluation de son niveau de fiabilité.

3.2. VARIABLES ALEATOIRES : NOTIONS DE BASE.

3.2.1. Caractérisation d'une variable aléatoire.

Pour la plupart des phénomènes physiques intéressant l'ingénieur, le résultat d'une expérience aléatoire consiste en une valeur numérique. Par conséquent un phénomène aléatoire peut être représenté par un nombre aléatoire x , dont la valeur dépend du résultat de l'essai.

x est une fonction définie sur l'ensemble Ω des résultats possibles du phénomène. $x = x(r) \quad r \in \Omega$, la variable x est appelée variable aléatoire.

Une fonction aléatoire continue est décrite par sa fonction de distribution cumulative $F_x(x)$, qui représente la probabilité que les valeurs de la variable aléatoire (abréviation VA) soient inférieures ou égales à x .

$$F_x(x) = P(X \leq x) \quad 3.1$$

La fonction de distribution cumulative (FDC) est par définition monotone, non décroissante et satisfait les relations suivantes :

$$F_x(-\infty) = 0 \quad , \quad F_x(+\infty) = 1$$

Alternativement une VA continue peut être décrite par sa fonction de densité de probabilité (FDP).

$$P_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} \quad 3.2$$

La FDP étant non décroissante, il s'ensuit que la FDP est non négative et vérifie la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_x(x) dx = 1 \quad 3.3$$

La FDC est exprimée par :

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x P_x(y) dy \quad 3.4$$

3.2.2. Distribution conjointe de plusieurs variables aléatoires continues.

Le comportement conjoint de deux VA x_1 et x_2 est décrit par la FDC conjointe $F_{x_1, x_2}(x_1, x_2)$ qui représente la probabilité suivante :

$$F_{x_1, x_2}(x_1, x_2) = P[(X_1 \leq x_1 \cap X_2 \leq x_2)] = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} P_{x_1, x_2}(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \quad 3.5$$

La FDP conjointe s'en déduit par :

$$P_{x_1, x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F_{x_1, x_2}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad 3.6$$

La FDC marginale d'une seule variable s'obtient en remplaçant la limite supérieure d'intégration sur l'autre variable par l'infini, par exemple :

$$F_{x_2}(x_1) = P[X_1 \leq x_1] = \int_{-\infty}^{+\infty} dy_2 \int_{-\infty}^{x_2} P_{x_1, x_2}(y_1, y_2) dy_1 \quad 3.7$$

$$P_{x_2}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_2 \quad 3.8$$

Il est évident que la densité conjointe contient plus d'information que les densités marginales puisque ces dernières s'en déduisent par intégration partielle.

Le concept se généralise à plus de deux VA :

$$F_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P[(X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2) \cap \dots \cap (X_n \leq x_n)] \quad 3.9$$

$$P_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad 3.10$$

Si les VA sont mutuellement indépendantes :

$$F_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{x_1}(x_1) \cdot F_{x_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{x_n}(x_n) \quad 3.11$$

3.2.3. Espérance mathématique.

Espérance mathématique ou moyenne d'ensemble d'une VA est définie par :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x P_x(x) dx \quad 3.12$$

Pour autant que cette intégrale existe, si $y = f(x)$ est une fonction de la VA X , son espérance mathématique peut être calculée sans détermination préalable de sa densité de probabilité par :

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y P_y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) P_x(x) dx \quad 3.13$$

3.2.4. Moments.

Les moments d'une ou plusieurs VA sont définies comme les espérances mathématiques des différentes puissances de ces VA.

- Pour une seule variable, le moment initial d'ordre n est défini par : $E[X^n]$
- Pour deux VA, le moment conjoint d'ordre $(m+n)$ des VA X et Y est : $E[X^m Y^n]$

Si l'on pose, $m_x = E[X]$:

- le n^{eme} moment central de la V.A X est défini par :

$$E[(X - m_x)^n]$$

De même le $(m+n)^{\text{eme}}$ moment central conjoint de deux VA X et Y est défini par:

$$E[(X - m_x)^m (Y - m_y)^n]$$

Les moments centraux d'ordre 2 portent respectivement les noms de :

- variance (cas d'une seule VA) :

$$E[(x - m_x)^2] = E[X^2] - m_x^2 = \sigma_x^2 \quad 3.14$$

- covariance (cas de deux VA) :

$$E[(x - m_x)(y - m_y)] = E[XY] - m_x m_y = \sigma_{xy}^2 \quad 3.15$$

dont la valeur normalisée porte le nom de coefficient de corrélation :

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x \sigma_y} \quad 3.16$$

Pour des VA réelles, les coefficients de corrélation vérifient :
 $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$

Deux VA sont linéairement indépendantes ou non corrélées si leur variance est nulle.

3.3. PROCESSUS ALEATOIRE.

Si un phénomène physique est aléatoire, alors chaque échantillon $X(t)$ de ce phénomène (mesure ou enregistrement temporel) est le résultat de circonstances uniques qui ne se répéteront pas à l'occasion d'autres mesures indépendantes de ce même phénomène. Un ensemble complet d'échantillons $X(t)$ (fonction aléatoire) constitue un processus aléatoire. On appelle une fonction aléatoire une fonction pour laquelle à chaque valeur donnée de l'argument (par exemple le temps) il correspond une VA.

Lorsqu'un processus aléatoire est défini par plusieurs paramètres, on l'appelle en conséquence champ aléatoire. Les champs aléatoires sont essentiellement des fonctions aléatoires multidimensionnelles c.-à-d. dépendant de plus d'un paramètre.

$X(t)$ représente un champ aléatoire dans lequel t correspond à un vecteur qui peut dépendre de plusieurs paramètres (temps, position dans l'espace...etc.).

3.3.1. Caractérisation d'un processus aléatoire.

a) Fonction de densité de probabilité :

D'une manière générale, pour caractériser les processus aléatoires de façon complète dans le sens probabiliste, il est nécessaire de spécifier les densités de probabilité conjointe d'ordres croissants suivantes :

$P_x(x, t)$	d'ordre 1
$P_x(x_1, t_1; x_2, t_2)$	d'ordre 2
\vdots	
$P_x(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$	d'ordre n

Cependant dans le cas particulier des processus aléatoires Gaussiens une caractérisation basée uniquement sur les statistiques du premier et du second ordre, contient toute les informations nécessaires pour une description complète du processus.

b) Moments :

Un processus aléatoire peut être caractérisé par ses moments, comme suit :

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x P_x(x, t) dx$$

$$E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 P_x(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2$$

\vdots

$$E[X(t_1)X(t_2)\dots X(t_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 \dots x_n P_x(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Les premiers moments sont d'une importance pratique considérable et ont reçu les notations et appellations suivantes :

- L'espérance mathématique :

$$m_x(t) = E[X(t)] \tag{3.17}$$

- La fonction d'autocorrélation :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 P_x(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \tag{3.18}$$

- La fonction d'autocovariance :

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}(t_1, t_2) &= E[(X(t_1) - m_{x1})(X(t_2) - m_{x2})] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t_1) - m_{x1})(x(t_2) - m_{x2}) P_x(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2\end{aligned}$$

3 19

avec : $m_{x1} = m_x(t_1)$ et $m_{x2} = m_x(t_2)$.

D'autres fonctions utiles et qui sont d'ailleurs reliées aux deux premiers moments sont

- La variance :

$$\sigma_x(t) = \sqrt{E[X(t) - m_x(t)]^2} \quad 3.20$$

- Le coefficient de corrélation :

$$\rho_{xx}(t_1, t_2) = \frac{\Gamma_{xx}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1) \cdot \sigma_x(t_2)} \quad 3.21$$

Par ailleurs, lorsqu'il s'agit de deux processus aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$, la dépendance statistique qui les relie peut s'exprimer à travers :

- La fonction d'intercorrélation :

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] \quad 3.22$$

- La fonction d'intercovariance :

$$\Gamma_{xy}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - m_{x1})(Y(t_2) - m_{y2})] \quad 3.23$$

avec : $m_{x1} = m_x(t_1)$ et $m_{y2} = m_y(t_2)$.

- Le coefficient d'intercorrélation :

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = \frac{\Gamma_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1) \cdot \sigma_y(t_2)} \quad 3.24$$

3.3.2. Processus stationnaire.

Un processus aléatoire est dit stationnaire ou strictement stationnaire, si les distributions de probabilités obtenues pour l'ensemble ne dépendent que des temps relatifs et non absolus; ou encore, si sa structure de probabilité est invariante vis-à-vis d'un changement de l'origine des temps ou d'une

translation dans le temps. Cela veut dire que la densité de probabilité du premier ordre est indépendante du temps et que celles d'ordre supérieur ne dépendent que des différences relatives entre les instants considérés. Ceci implique :

$$\begin{aligned}
 P_x(x, t) &= P_x(x, t + \tau) && \text{indépendante de } t \\
 P_x(x_1, t_1; x_2, t_2) &= P_x(x_1, t_1; x_2, t_1 + \tau) && \text{indépendant de } t \\
 &&& \text{mais fonction de } \tau \\
 P_x(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) &= P_x(x_1, t_1; x_2, t_1 + \tau_1; \dots; x_n, t_1 + \tau_{n-1}) \\
 &&& \text{indépendant de } t \\
 &&& \text{mais fonction de } \tau_1, \dots, \tau_n
 \end{aligned}$$

Il découle de ce qui précède que les moments individuels sont constants et les moments conjoints sont fonction de la différence des arguments ($t_i - t_j$).

$$\begin{aligned}
 E[X^n(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^n P_x[X(t)] dx = \text{constante} \\
 E[X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} P_x(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\
 &= R_{xx}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

avec : $\tau_i = t_{i+1} - t_i$

Un processus est dit faiblement stationnaire ou stationnaire au sens large, si seulement sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation satisfont les conditions de stationnarité :

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x P_x(x) dx = m_x = \text{constante} \tag{3.26}$$

de même pour un tel processus, la variance est indépendante du temps, en effet :

$$\begin{aligned}
 E[(X(t) - m_x)^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 P_x[X(t)] dx \\
 &= \sigma_x^2 = \text{constante}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Les fonctions d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et d'autocovariance $\Gamma_x(\tau)$ sont aussi indépendantes du temps et ne dépendent que de la différence τ entre les instants considérés, en effet :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] = R_x(\tau) \tag{3.28}$$

$$\Gamma_{xx}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - m_x)(X(t_2) - m_x)] = \Gamma_x(\tau) \quad 3.29$$

Les processus aléatoires utilisés en engineering ont toujours un début et une fin et ne peuvent donc pas être vraiment stationnaires, mais pour des considérations pratiques, il est très souvent adéquat de supposer que le processus est stationnaire pour l'essentiel de la durée, ou bien il peut être divisée en plusieurs tranches qui sont approximativement stationnaires.

a) Propriétés des fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance.

- La fonction d'autocorrélation :

$$\begin{aligned} R_x(0) &= E[X^2] = S_x \\ R_x(-\tau) &= R_x(\tau) \\ |R_x(\tau)| &\leq R_x(0) = S_x \end{aligned} \quad 3.28$$

- La fonction d'autocovariance :

$$\begin{aligned} \Gamma_x(\tau) &= R_x(\tau) - m_x^2 \\ \Gamma_x(-\tau) &= \Gamma_x(\tau) \\ |\Gamma_x(\tau)| &\leq R_x(0) = \sigma_x^2 \end{aligned} \quad 3.29$$

La fonction d'autocorrélation tend vers la valeur du carré de la moyenne quand la différence des instants est infiniment large $\tau \rightarrow \infty$ et ceci dans le cas où le processus ne contient aucune composante périodique. En d'autres termes, la fonction de covariance diminue, en l'absence de composantes périodiques, quand l'écart entre les instants augmente. Ainsi, on pourra avoir :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Gamma_{xx}(\tau) = 0$$

et on aboutit finalement à :

$$R_{xx}(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow m_x^2 \quad 3.30$$

Il s'ensuit que la fonction d'autocorrélation d'un processus stationnaire $R_x(\tau)$ est réelle, paire et atteint son maximum à l'origine ($\tau = 0$). La fonction d'autocovariance possède les mêmes propriétés.

- Fonction d'intercorrélation :

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= R_{yx}(-\tau) \\ |R_{xy}(\tau)| &\leq [R_{xx}(0) \cdot R_{yy}(0)]^{1/2} \end{aligned} \quad 3.31$$

En général, les fonctions de cross-corrélation $R_{xy}(\tau)$ ne sont ni symétriques, ni paires. On constate que pour la plupart des processus aléatoires, la corrélation entre 2 processus devient très faible lorsque l'écart entre les instants est large et, par conséquent, la fonction d'intercorrélacion tend vers le produit des moyennes des 2 processus quand l'écart tend vers l'infini :

$$R(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow m_x m_y \quad 3.32$$

Nota :

Les fonctions d'autocovariance et d'intercovariance ont, respectivement, les mêmes propriétés que celles d'autocorrélation et de cross-corrélation.

b) Moyenne temporelle et processus ergodique.

Considérons un processus stationnaire $X(t)$, sa moyenne temporelle est définie par :

$$S = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt = \langle X(t) \rangle_T \quad 3.33$$

Un processus est dit ergodique, si en plus de la stationnarité, les moyennes temporelles, sur un échantillon, et d'ensemble sont identiques.

Pour des considérations pratiques, seulement les ergodicités de la moyenne et de fonction d'autocorrélation seront étudiées (processus faiblement stationnaire).

Un processus est dit ergodique dans la moyenne si :

$$E[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle X(t) \rangle_T \quad 3.34$$

Un processus est dit ergodique dans la corrélation si :

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle X(t)X(t+\tau) \rangle_T \quad 3.35$$

3.3.3. Décomposition spectrale d'un processus aléatoire.

a) Transformée de Fourier.

Il est très important de faire une analyse spectrale (décomposition fréquentielle) d'un processus aléatoire.

Soit une fonction réelle $h(t)$, sa transformée de Fourier est définie par :

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad 3.36$$

Où $H(\omega)$ constitue l'amplitude spectrale de la fonction considérée. L'existence de $H(\omega)$ est garantie si $h(t)$ est absolument intégrable, i.e. si l'intégrale suivante a une valeur finie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad 3.37$$

La transformée inverse est définie par :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad 3.38$$

La notion de transformée de Fourier sera utilisée afin de définir la décomposition spectrale d'un processus aléatoire stationnaire $X(t)$.

b) La fonction de densité spectrale de puissance.

Les processus aléatoires stationnaires $X(t)$ ne possèdent de transformées de Fourier puisqu'un échantillon d'un tel processus ne s'annule pas à l'infini, il n'est pas absolument intégrable. Un moyen de contourner cette difficulté consiste à considérer la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ du processus considéré. Celle-ci étant la transformée inverse de densité spectrale de puissance.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad (a) \\ R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega \quad (b) \end{array} \right. \quad 3.39$$

Les relations ci-dessus sont connues sous le nom de relations de *WIENER-KHINTCHINE*.

Pour $\tau = 0$, à partir de la relation (b), une relation importante s'établit :

$$R_x(0) = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad 3.40$$

La fonction de densité spectrale de puissance comme le montre la relation ci-dessus, est une mesure de la distribution, dans le domaine des fréquences, de la moyenne de la valeur au carré $E[X^2]$, ou encore, elle décrit la répartition de l'énergie moyenne du processus. La densité spectrale de puissance donne aussi une indication sur la décomposition spectrale du signal $X(t)$.

En effet, en considérant la transformée de Fourier tronquée d'un processus stationnaire $X(t)$:

$$\bar{X}(\omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) e^{-i\omega t} dt \quad 3.41$$

$S_x(\omega)$ est liée aussi, d'une façon directe, à $\bar{X}(\omega, T)$ qui est la décomposition fréquentielle du signal.

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} E \left[\left| \bar{X}(\omega, T) \right|^2 \right] \quad 3.42$$

Cette équation définit $S_x(\omega)$ comme la limite d'une fonction positive par conséquent :

$$S_x(\omega) \geq 0$$

Pour un signal réel, la fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ étant réelle et paire, il en est de même pour la fonction de densité spectrale $S_x(\omega)$.

Les signaux ayant une densité spectrale de puissance constante sont appelés Bruit Blanc.

$$S_x(\omega) = S_0 \quad 3.43$$

Sa fonction d'autocorrélation est définie comme suit :

$$R_x(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau) \quad 3.44$$

où $\delta(\tau)$ est la fonction de Dirac.

Un tel processus n'est pas pratiquement réalisable puisque sa variance n'est pas bornée. Il constitue cependant une idéalisation très importante dans l'étude la réponse des systèmes linéaires.

Un signal peut être caractérisée par une frange de fréquences large ou étroite. A ce titre, un processus ayant un contenu spectral large ou étalé est dit processus à Bande large (Wide Band), tandis que celui dont le contenu spectral est réduit ou étroit est dit processus à Bande étroite (Narrow Band).

c) *Fonction de densité de puissance unilatérale.*

Dans la littérature, il est fréquent de rencontrer une densité de puissance spectrale unilatérale $G_x(f)$ définie par :

$$\int_0^{\infty} G_x(f) df = E[X^2] \quad 3.45$$

avec : $f = \frac{\omega}{2\pi}$ fréquence (Hz)

La relation entre $S_x(\omega)$ et $G_x(f)$ est :

$$G_x(f) = 4\pi S_x(2\pi f) \quad 3.46$$

d) Fonction d'interdensité spectrale.

La fonction de densité spectrale de puissance croisée de deux processus aléatoire $X(t)$ et $Y(t)$ est définie par :

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad 3.47$$

Elle existe si $S_{xx}(\omega)$ et $S_{yy}(\omega)$ existent.

$S_{xy}(\omega)$ est généralement complexe et satisfait la relation :

$$S_{xy}(\omega) = S_{xy}^*(\omega) \quad \text{où : * signifie complexe conjugué.}$$

On établit que.

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} E \left[\left| \bar{X}(\omega, T) \cdot \bar{Y}^*(\omega, T) \right| \right] \quad 3.48$$

$S_{xy}(\omega)$ vérifie la relation :

$$|S_{xy}(\omega)|^2 \leq S_{xx}(\omega) \cdot S_{yy}(\omega) \quad 3.49$$

3.3.4. Fonction d'autocorrélation et densité spectrale des processus aléatoires dérivés.

a) Fonction d'autocorrélation.

Les deux premières fonctions d'autocorrélation de processus dérivés sont définies par :

$$R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau) = R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = -\frac{d^2}{dt^2} R_x(\tau) \quad \dots\dots\dots 3.50$$

$$R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau) = R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = \frac{d^4}{dt^4} R_x(\tau)$$

Un processus faiblement stationnaire est orthogonal à sa dérivée $\dot{X}(t)$:

$$E[X(t). \dot{X}(t)] = 0 \quad 3.51$$

b) Fonction de densité spectrale.

Les deux premières fonctions de densité spectrales de processus dérivés sont définies par :

$$\begin{aligned} S_{\dot{x}}(\omega) &= \omega^2 S_x(\omega) \\ S_{\ddot{x}}(\omega) &= \omega^4 S_x(\omega) \end{aligned} \quad 3.52$$

Dans ce chapitre, nous avons exposé les notions fondamentales de la théorie des vibrations aléatoires indispensable pour prédire les caractéristiques statistiques de la réponse d'une structure connue à une excitation aléatoires de caractéristiques statistiques connues.

**4. REPRESENTATION DE L'ACTION SISMIQUE PAR SA
DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE.**

4.1. INTRODUCTION.

Il est vrai que lors de l'analyse des vibrations aléatoires des structures linéaires soumises à des excitations stationnaires de nature uniformes, la description de l'entrée peut se faire en terme de la densité spectrale de puissance.

Cette fonction de densité spectrale, n'est qu'une représentation analytique de l'énergie que transportent les ondes sismiques lors de leurs propagation dans un site donné. Cette dernière décrit l'input sismique dans le domaine fréquentiel.

En effet, l'action sismique peut être représenté par le biais d'un bruit blanc pur (White noise), ce qui mathématiquement s'écrit $G_x(\omega) = \text{Cste}$, ou bien par un bruit blanc filtré (Filtered White Noise) avec : $G_x(\omega) = G_0 \cdot F(\omega)$ avec $F(\omega)$ fonction du filtre considéré.

4.2. BRUIT BLANC PUR.

Le bruit blanc est la représentation la plus directe de l'input sismique, vu qu'au niveau de la source du séisme toutes les fréquences sont supposées être présentes et participer avec la même amplitude spectrale.

La fonction d'auto-corrélation est :

$$R_x(\tau) = 2\pi \cdot G_0 \cdot \delta(\tau) \quad 4.1$$

où : $\delta(\tau)$: fonction de Dirac.

Il découle de l'équation (4.1) que l'accroissement de la fonction sur un intervalle de temps infiniment petit, doit être infiniment grand.

Un processus aléatoire stationnaire pour lequel la fonction de corrélation est proportionnelle à la fonction de Dirac est dit bruit blancs.

4.3. BRUIT BLANC FILTRE.

Les enregistrements effectués en surface ne s'accorde pas avec l'hypothèse justifiant la représentation de l'input sismique par un bruit blanc. Physiquement, ceci peut s'expliquer par le fait que le parcours effectué par les ondes sismiques de la source à la surface du sol joue le rôle de filtre, qui compte tenu de ses caractéristiques physiques peut, soit amplifier soit amortir ces fréquences qui le traversent.

Des modèles peuvent être construit par filtrage d'un bruit blanc par des filtres linéaires invariant tous le temps.

4.3.1. Modèle de KANAI-TAJIMI.

Une densité spectrale de type *Kanai-Tajimi* (filtre simple) dont l'expression est donnée par l'équation (4.2):

$$G_{\ddot{x}}(\omega) = G_0 \frac{1 + 4\beta_g^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2\right)^2 + 4\beta_g^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} \quad 4.2$$

constitue une représentation plus réaliste du signal sismique à la surface du sol.

G_0 est une constante dépendant de l'accélération du signal sismique.

β_g et ω_g traduisent les propriétés dynamique du sol.

4.3.2. Modèle de Kanai-Tajimi modifiée.

La fonction de densité spectrale de type *Kanai-Tajimi* (filtre simple) ne s'annule pas au voisinage de $\omega = 0$ par conséquent la vitesse et le déplacement associés au processus input ont des variances infinies.

Clough et *Penzien* évitent cette singularité en proposant un deuxième filtre.

Donc la fonction de densité spectrale de puissance prend la forme suivante :

$$G_{\ddot{x}}(\omega) = G_0 \frac{1 + 4\beta_g^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2\right)^2 + 4\beta_g^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)^2 + 4\beta_c^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

4.3

Cette fonction a un comportement en ω^4 au voisinage de $\omega = 0$ compatible avec les enregistrements de séismes. ω_g , β_g , ω_c et β_c sont des paramètres traduisant les propriétés dynamiques du sol.

Les différentes valeurs que peuvent prendre les paramètres précédents permettent de balayer différents types de sol, à titre d'exemple :

Pour un sol ferme :

$$\omega_g = 15 \text{ rad/s}, \quad \beta_g = 0.6, \quad \omega_c = 1.5 \text{ rad/s}, \quad \beta_c = 0.6$$

Pour un sol moyen :

$$\omega_g = 10 \text{ rad/s}, \quad \beta_g = 0.4, \quad \omega_c = 1 \text{ rad/s}, \quad \beta_c = 0.6$$

Pour un sol mou :

$$\omega_g = 5 \text{ rad/s}, \quad \beta_g = 0.2, \quad \omega_c = 0.5 \text{ rad/s}, \quad \beta_c = 0.6$$

La fonction de densité spectrale est représentée par la figure 4.1.

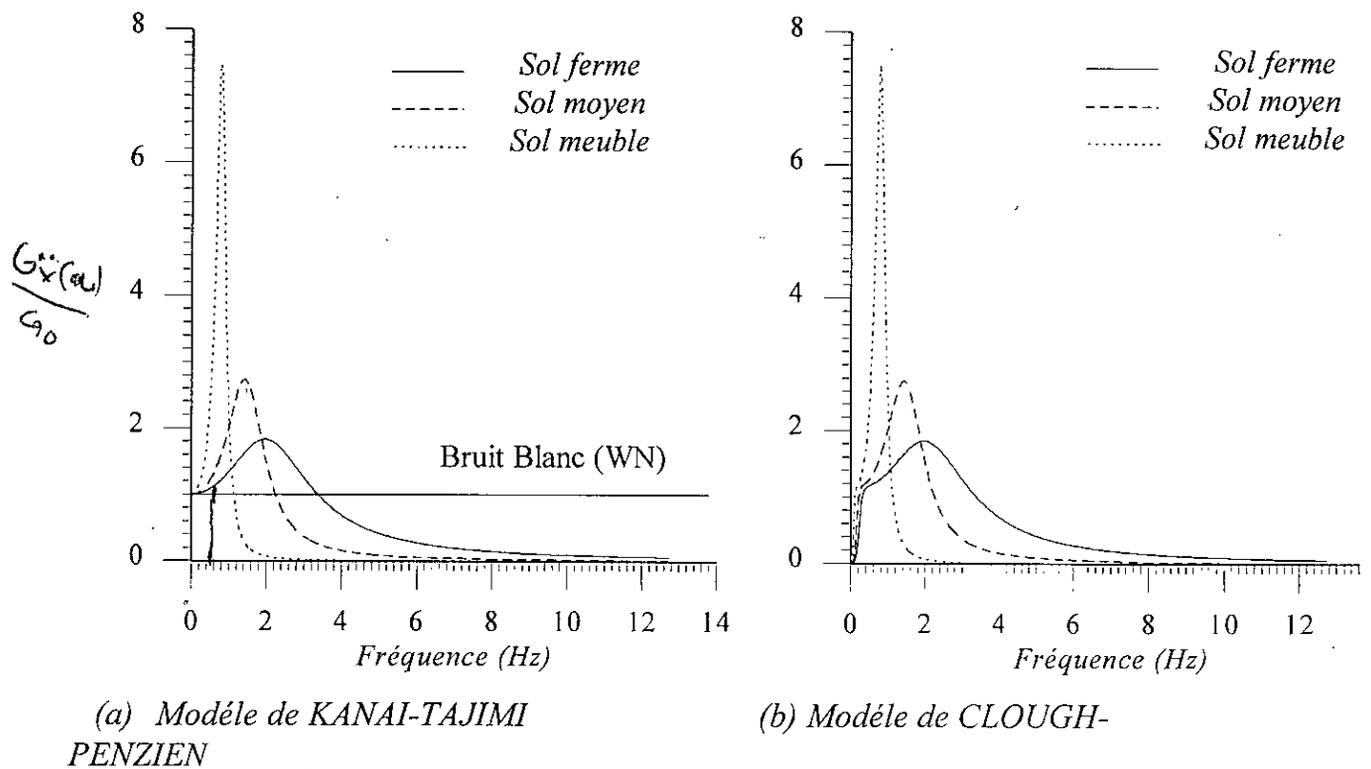


Fig. 4.1- Fonction de densité spectrale pour différents modèles.

**5.REPONSE ALEATOIRE D'UN SYSTEME A UN
DEGRE DE LIBERTE.**

5.1. INTRODUCTION.

Dans ce chapitre, on utilise la théorie des processus aléatoires pour étudier les vibrations de systèmes élémentaires : les systèmes à un degré de liberté.

Tout système à un degré de liberté (fig. 5.1) est le résultat d'une idéalisation d'un système réel qui permet d'obtenir l'information indispensable sur le mouvement du système.

En considérant les systèmes linéaires invariants dans le temps, la réponse de ces derniers peut être déterminée dans le domaine temporel ou fréquentiel.

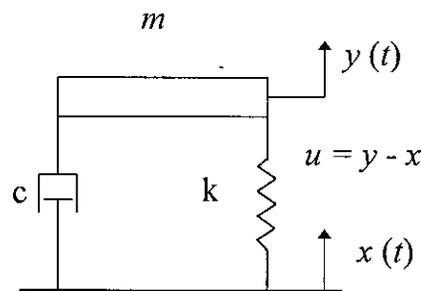


Fig. 5.1 - Oscillateur à un degré de liberté

5.2. EQUATION DE MOUVEMENT.

Les propriétés qui caractérisent le comportement dynamique d'une structure sont :

- la rigidité de la structure k
- la masse de la structure m
- l'amortissement c

L'équation de mouvement de l'oscillateur représenté à la figure (5.1) s'écrit :

$$m\ddot{y} + c(\dot{y} - \dot{x}) + k(y - x) = 0 \quad 5.1$$

La force de rappel élastique et d'amortissement dépendent toutes deux du mouvement relatif $u = y - x$.

En introduisant la fréquence naturelle ω_n et la fraction d'amortissement critique ξ

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad 2\xi\omega_n = \frac{c}{m}$$

l'équation (5.1) prend la forme :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = -\ddot{x} \quad 5.2$$

Cette relation montre que la réponse relative ne dépend que de ω et ξ .

5.3. REPONSE DANS LE DOMAINE TEMPOREL.

La réponse temporelle unitaire d'un système initialement au repos est la réponse impulsionnelle $h(\tau)$ causée notamment par une impulsion de Dirac.

En se basant sur le principe de superposition, la réponse temporelle ou encore relation entrée-sortie (input-output) pour un système à un seul degré de liberté, supposé initialement au repos, prend la forme de d'un produit de convolution (intégrale de DUHAMEL) :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{x}(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \ddot{x}(t - \tau) d\tau \quad 5.3$$

Tout système physiquement réalisable satisfait la condition $h(\tau) = 0$ pour $\tau < 0$ (la réponse ne peut précéder l'excitation) est dit système causal.

Compte tenu de cette condition, les bornes de l'intégrale de DUHAMEL peuvent être modifiées pour donner :

$$u(t) = \int_0^{+\infty} \ddot{x}(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) \ddot{x}(t - \tau) d\tau \quad 5.4$$

Si, en outre, l'excitation est à support positif ($\ddot{x}(t) = 0$, pour $t < 0$), alors :

$$u(t) = \int_0^t \ddot{x}(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) \ddot{x}(t - \tau) d\tau \quad 5.5$$

La réponse impulsionnelle est donnée par :

$$du(t) = h(t - \tau) = \frac{1}{m\omega_n} \cdot \sin\omega_n(t - \tau) \quad 5.6$$

Remarque :

Si le système n'est pas initialement au repos, la réponse due à l'effet des conditions initiales doit être ajoutée en raison du principe de superposition.

En présence de structure amorties, on a :

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^{t_u} \ddot{x}(t) e^{-\omega_n \xi(t-\tau)} \sin\omega_D(t - \tau) d\tau \quad 5.7$$

avec $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$

Soit, en définissant la réponse impulsionnelle pour $\ddot{x}(\tau) = 1$:

$$h(t - \tau) = \frac{e^{-\omega_n \xi (t - \tau)}}{m \omega_D} \sin \omega_D (t - \tau) \quad 5.8$$

Cette fonction est représentée à la figure (5.2) pour deux valeurs de l'amortissement. On constate que la mémoire du système est d'autant plus longue que l'amortissement est faible.

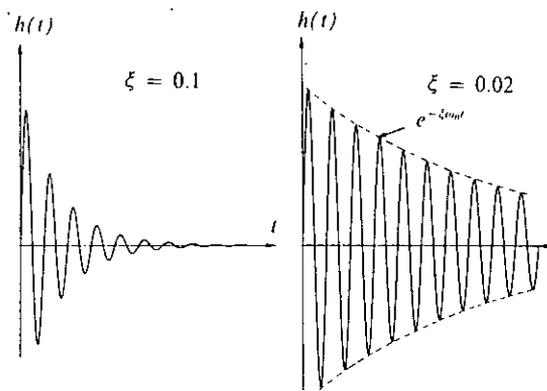


Fig.5.2 - Réponse impulsionnelle de l'oscillateur linéaire.

5.4. REPONSE DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL.

L'étude précédente dans le domaine des temps peut servir pour déterminer la réponse de tout système linéaire à un degré de liberté soumis à une excitation quelconque, mais il est parfois plus commode d'effectuer l'étude dans le domaine des fréquences.

La réponse fréquentielle unitaire d'un système à un seul degré de liberté est la fonction de transfert $H(\omega)$, causée par une excitation harmonique unitaire $\exp(i\omega t)$. Celle-ci est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle temporelle $h(t)$.

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \exp(-i\omega t) dt \quad 5.9$$

La relation entrée-sortie du système, en vertu du principe de superposition et de la transformée de Fourier, prend la forme d'une simple multiplication :

$$U(\omega) = H(\omega) \cdot \ddot{X}(\omega) \quad 5.10$$

$H(\omega)$: fonction de réponse en fréquence complexe.

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega_n^2 + 2i\xi\omega_n\omega - \omega^2} \quad 5.11$$

5.5. RELATION ENTREE/SORTIE - INPUT/OUTPUT RELATIONSHIP.

Il convient, à la suite de ce qui précède, de se pencher sur les relations mathématiques permettant de relier l'input (I) et l'output (O) de systèmes vibratoires linéaires. En somme, un problème d'entrée-sortie revient à rechercher la ou les sorties en fonction de ou des entrées.

Soit $\ddot{x}(t)$ et $u(t)$ deux processus aléatoire où le premier définit l'input stationnaire d'un système linéaire alors que le second représente l'output correspondant.

On peut relier $\ddot{x}(t)$ et $u(t)$ par le biais de l'intégrale de convolution suivante :

$$u(t) = \int_0^{t_d} \ddot{x}(t) h(t - \tau) d\tau \quad 5.12$$

Par ailleurs, les espérances mathématiques des deux processus sont reliées comme suit:

$$m_u = E[u(t)] = \int_0^{t_d} E[h(t - \tau) \cdot \ddot{x}(\tau)] d\tau \quad 5.13$$

or $h(t - \tau)$ est une caractéristique du système, il vient alors :

$$m_u = \int_0^{t_d} h(t - \tau) \cdot E[\ddot{x}(\tau)] d\tau = m_{\ddot{x}} \int_0^{t_d} h(t - \tau) d\tau \quad 5.14$$

Remarque :

Si le processus input est à moyenne nulle, le processus output est aussi à moyenne nulle.

De manière similaire, les fonctions d'autocorrélations respectives peuvent être reliées par le double produit de convolution suivante :

$$\begin{aligned}
 R_u &= \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_2) R_{\bar{x}}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_2) R_{\bar{x}}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

La fonction d'autocorrélation $R_u(\tau)$ est indépendante du temps. Par conséquent, l'input stationnaire d'un système linéaire induit un output également stationnaire.

Considérons l'oscillateur de la figure (5.1) excité par un bruit blanc d'intensité G_0 , la fonction d'autocorrélation du processus input s'écrit :

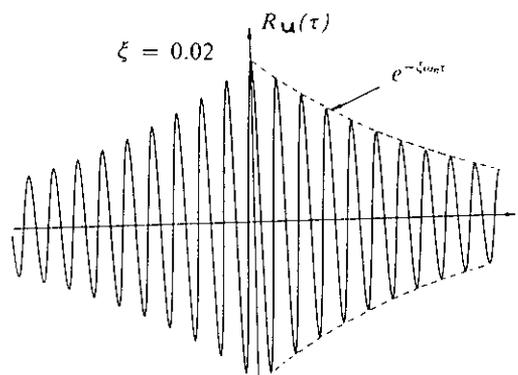
$$R_{\bar{x}}(\tau) = 2\pi G_0 \delta(\tau) \tag{5.16}$$

où : $\delta(\tau)$ fonction de DIRAC

Compte tenu de cette équation, la fonction d'autocorrélation de l'output est donnée par :

$$R_u(\tau) = \frac{\pi G_0}{2\xi\omega_n^3} e^{-\omega_n \xi \tau} \left[\cos \omega_D \tau + \frac{\xi \omega_n}{\omega_D} \sin \omega_D \tau \right] \tag{5.17}$$

Cette fonction est représentée sur la figure 5.3. La décroissance est gouvernée par l'amortissement qui contrôle la mémoire du processus. Notons que quoique la variance de l'excitation soit infinie, celle de la réponse est finie pour autant que le système soit amorti.



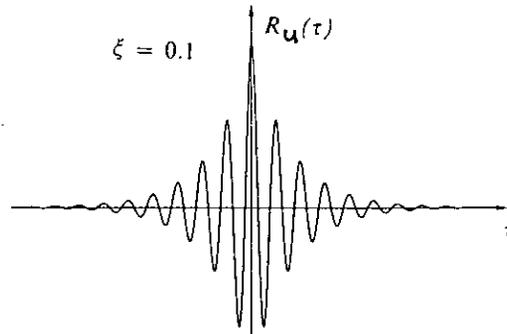


Fig. 5.3- Fonction d'autocorrélation de la réponse d'un oscillateur linéaire à un bruit blanc.

La variance du processus out-put prend la forme :

$$\sigma_u^2 = R_u(0) = \frac{\pi G_0}{2\xi\omega_n^3} e^{-\omega_n \xi \tau} \quad 5.18$$

La fonction d'autocorrélation sera donc :

$$R_u(\tau) = \sigma_u^2 e^{-\omega_n \xi \tau} \left[\cos \omega_D \tau + \frac{\xi}{\omega_D} \sin \omega_D \tau \right] \quad 5.19$$

$$\begin{aligned} R_u(0) &= \sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} G_u(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |H(i\omega)|^2 G_x(\omega) d\omega \end{aligned} \quad 5.20$$

En raison du caractère pointu de $|H(\omega)|^2$ alentour de ω_n et de sa décroissance rapide quand ω augmente (comme ω^{-4}), l'approximation suivante est souvent justifiable pour une excitation quelconque (fig. 5.4).

$$R_u(0) = G_x(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} |H(i\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi}{2\xi\omega_n^3} G_x(\omega_n) \quad 5.21$$

Ceci revient à remplacer l'excitation réelle par un bruit blanc équivalent d'intensité égale à la densité de puissance spectrale de l'excitation à la fréquence naturelle du système. Les conditions sous lesquelles l'approximation se justifie sont :

- les valeurs de $G_{\ddot{x}}(\omega)$ sont telles que la contributions de l'intégrale provient du voisinage de la fréquence naturelle ω_n .
- $G_{\ddot{x}}(\omega)$ varie lentement alentour de ω_n .

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega_n^2 \omega^2} \quad 5.22$$

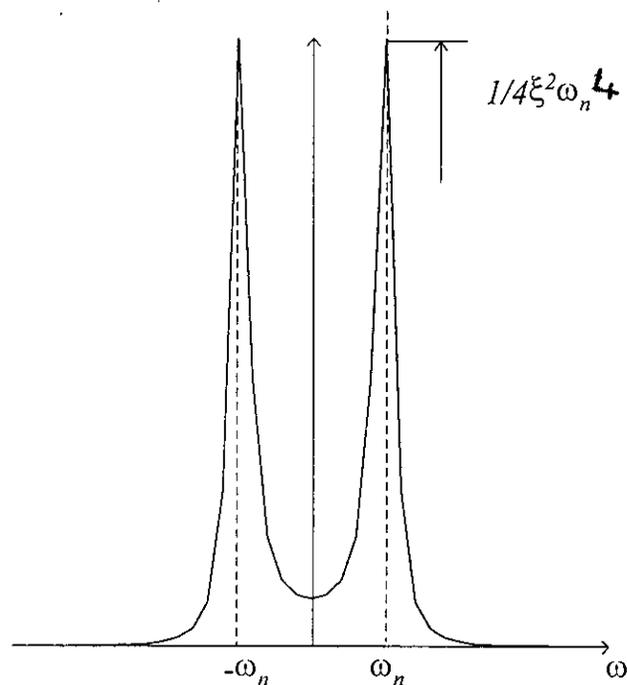


Fig. 5.4- Illustration de l'approximation Bruit Blanc.

Si l'excitation est faiblement stationnaire, la fonction d'autocorrélation est donnée par :

$$R_u(t, t) = \frac{\pi G_{\ddot{x}}(\omega_n)}{2\xi\omega_n^3} \left\{ 1 - \frac{e^{-2\xi\omega_n t}}{\omega_d^2} \left[\omega_d^2 + 2(\xi\omega_n \sin \omega_d t)^2 + \xi\omega_n \omega_d \sin 2\omega_d t \right] \right\}$$

5.23

L'équation (5.23) est représentée à la figure (5.5). Elle montre que l'état stationnaire sera atteint d'autant plus vite que l'amortissement est grand. Si le temps durant lequel le système est exposé à l'excitation stationnaire est grand vis-à-vis de la période naturelle du système.

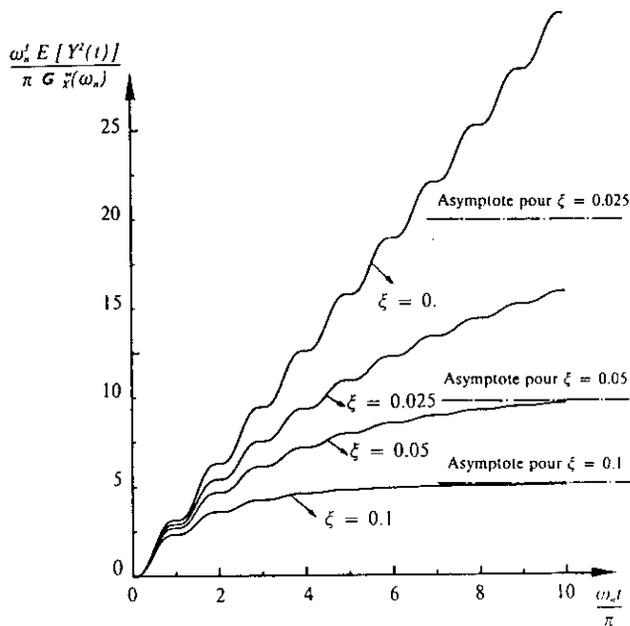


Fig. 5.5- Réponse transitoire d'un oscillateur partant du repos.

5.6. CONCLUSION.

A travers ce chapitre, nous avons vu que pour la classe des systèmes linéaires, la relation entrée-sortie s'exprime par des produits de convolution dans le domaine temporel et des multiplications dans le domaine fréquentiel. IL s'en suit que la plupart des traitements s'effectuent plus simplement dans le domaine fréquentiel. La facilité avec laquelle la relation entrée-sortie s'exprime dans le domaine fréquentiel est d'ailleurs une caractéristique attrayante des systèmes linéaires.

En effet, la réponse d'un système linéaire à une excitation Gaussienne est également Gaussienne. De tels processus sont entièrement caractérisés par leurs propriétés statistiques du deuxième ordre, i.e. la moyenne et la fonction d'autocorrélation ou de densité spectrale de puissance, ce qui est d'ailleurs l'ordre maximum pour lequel il est possible d'obtenir des informations sur la structure statistique d'un phénomène.

**6.REPONSE ALEATOIRE DES SYSTEMES A
PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE.**

6.1. INTRODUCTION.

Les systèmes à un degré de liberté considérés dans le chapitre précédant constituent des problèmes élémentaires de la théorie des vibrations. Or les constructions ne peuvent être envisagées comme des systèmes à un degré de liberté que dans des cas particuliers ou bien de manière approchée.

Les mouvements sismiques induisent dans les structures des actions dynamiques, dues essentiellement aux forces d'inertie qui apparaissent dans les masses lorsqu'on impose le mouvement au niveau des supports.

6.2. GENERALITES.

6.2.1. Degré de liberté d'un système.

Le problème fondamental du calcul des constructions parasismiques est celui de la détermination de la réponse d'une structure à un mouvement sismique donné.

La configuration de la structure en oscillations est connue au travers d'un certain nombre de paramètres qui sont les coordonnées du système. La structure étant supposée rapportée à un trièdre OXYZ invariablement lié au sol et les trois composantes de l'action sismique étant supposées agir parallèlement à ces axes, il y a un intérêt évident à choisir comme paramètres les composantes suivant ces axes des déplacements des divers éléments matériels à partir de leur position de repos.

Ces déplacements consistent en translations, mais ils peuvent aussi comporter des rotations. Si l'on désigne par n le nombre de paramètres indépendants strictement nécessaires à la définition de la configuration, le système est dit présenter n degrés de liberté et les paramètres retenus sont les degrés de liberté du système.

6.2.2. Modélisation de la structure à masse concentrée :

La modélisation consiste en l'établissement d'un modèle de calcul qui reproduit au mieux le comportement dynamique réel de la structure, la détermination de ce modèle est une phase essentielle pour l'étude de la réponse à une secousse sismique.

Le principe de la modélisation à masse concentrée est de représenter une structure complexe par un ensemble de poutres liées entre elles. Les masses correspondant aux volumes de béton de chaque niveau sont supposées concentrées en leur centre de gravité et liées aux noeuds reliant les éléments.

6.3. FORMULATION DE L'EQUATION DE MOUVEMENT.

L'équation de mouvement du système s'exprime en écrivant l'équilibre des forces associées à chaque degré de liberté.

Pour un système à un nombre fini de degrés de liberté, l'équation du mouvement s'écrit sous la forme suivante :

$$[F_I] + [F_c] + [F_e] = [P(t)] \quad 6.1$$

où : F_e : force élastique de rappel

F_c : force d'amortissement $P(t)$: force extérieure

F_I : force d'inertie

Pour une structure à comportement linéaire, l'expression des forces élastiques F_e s'écrit :

$$\{F_e\} = [k] \{u\} \quad 6.2$$

où $[k]$ s'appelle matrice de rigidité de la structure, et $\{u\}$ le vecteur déplacement représentant le déformée de la structure.

Si l'amortissement est de type visqueux, les forces d'amortissement peuvent s'écrire :

$$\{F_c\} = [c] \{\dot{u}\} \quad 6.3$$

où $[c]$ est la matrice d'amortissement et $\{\dot{u}\}$ vecteur vitesse.

Les forces d'inertie peuvent s'écrire :

$$\{F_I\} = [m] \{\ddot{u}\} \quad 6.4$$

où $[m]$ matrice masse et $\{\ddot{u}\}$ vecteur accélération.

Commentaire :

Les matrices $[m]$, $[c]$ et $[k]$ sont symétriques définies positives. $[m]$ et $[k]$ résultent de la discrétisation de la structure, le plus souvent par éléments finis. La matrice d'amortissement $[c]$ représente un mécanisme de dissipation complexe, elle est en général mal connue.

6.4. ANALYSE MODALE.

L'analyse dynamique des structures exige la résolution d'un grand nombre d'équations d'équilibre dynamique. s'agissant de chargement de courte durée et qui tendent à exciter de nombreux modes de vibrations, les procédures

d'intégration numérique pas à pas sont en général efficaces. Cependant, pour des chargements de durées relativement longues tels que les séismes et qui par contre ont tendance à exciter un nombre réduit de modes, la procédure de superposition modale est l'approche la plus appropriée. La différence essentielle entre ces deux approches est que contrairement à l'intégration directe, la superposition modale exige qu'un chargement de base soit opéré.

En effet, le passage de la base des coordonnées physiques vers la base des vecteurs propres, par exemple, permet de transformer les équations d'équilibre en une forme assurant une résolution plus efficace.

La première étape de la méthode de superposition modale consiste à modéliser la structure en un système ayant un nombre fini de degrés de liberté (DDL), les matrices de masse et de rigidité sont alors évaluées. Une fois les configurations modales de la vibration non amortie déterminées, les équations de mouvements sont découplées par une transformation en ces coordonnées modales.

Une supposition de base pour cette méthode est que l'amortissement ne cause aucun couplage entre les équations modales.

6.4.1. Les problèmes aux valeurs propres.

a) Calcul des fréquences propres et des modes propres de vibration d'un système.

L'équation de mouvement d'un système se déplaçant librement sans amortissement est donnée par :

$$[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = 0 \quad 6.5$$

Une solution particulière est donnée par l'expression :

$$\{u\} = \{\hat{u}\} \sin(\omega t + \theta) \quad 6.6$$

où $\{\hat{u}\}$ représente les modes de déformation possibles du système et θ est un angle de déphasage. Le vecteur des accélérations a pour valeur :

$$\{\ddot{u}\} = -\omega^2 \{\hat{u}\} \sin(\omega t + \theta) = -\omega^2 \{u\} \quad 6.7$$

l'équation (6.6) s'écrit donc :

$$-\omega^2 [m]\{\hat{u}\} \sin(\omega t + \theta) + [k]\{\hat{u}\} \sin(\omega t + \theta) = 0 \quad 6.8$$

Cette équation doit être vérifiée à tout instant t ; on en déduit donc:

$$[[k] - \omega^2 [m]] \{\hat{u}\} = 0 \quad 6.9$$

Cette relation représente un système de N équations à N inconnues qui sont les composantes du vecteur $\{\hat{u}\}$. Une solution non nulle n'est possible que si le déterminant de la matrice $[k] - \omega^2 [m]$ est nul :

$$|[k] - \omega^2 [m]| = 0 \quad 6.10$$

L'équation (6.10) est appelée l'équation aux fréquences du système. En développant ce déterminant, on obtient une équation de degré N en ω^2 pour un système à N degrés de liberté. La résolution de cette équation fournit les valeurs des pulsations $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_N$ relatives aux N modes de vibrations possibles.

Chaque pulsation ω_i du système caractérise un mode propre de vibration ou forme propre ϕ_i exprimé par l'équation (6.11) :

$$[[k] - \omega_i^2 [m]] \cdot \{\phi_i\} = \{0\} \Rightarrow \omega_i^2 = \frac{\{\phi_i\}^T \cdot [k] \cdot \{\phi_i\}}{\{\phi_i\}^T \cdot [m] \cdot \{\phi_i\}} \quad 6.11$$

Soit $[\Phi]$ la matrice construite par colonnes à partir des vecteurs propres, cette matrice est dite *matrice modale* associée à la structure.

b) Méthode d'approche pour la résolution des problèmes aux valeurs propres.

Les méthodes de résolution des problèmes aux valeurs propres se présentent sous forme de deux catégories: méthodes directes et méthodes itératives.

Parmi ces méthodes, on cite :

- la méthode itérative directe ,
- la méthode itérative inverse ,
- la méthode itérative des sous espaces .

c) Sélection des modes utiles.

Les modèles dynamiques possèdent, en général, un grand nombre de degrés de liberté tel que l'extraction de tous les modes de vibration ne peut être envisagée pour des raisons économiques.

On se contente donc de calculer les premiers modes de vibration dans un classement par périodes décroissantes.

Avant de poursuivre le calcul, il faut tout d'abord s'assurer que le nombre de modes évalués est suffisant et donc que des modes importants n'ont pas été négligés. Ensuite, il convient d'éliminer tous les modes ne correspondant pas à des efforts notables, afin de simplifier l'exploitation des résultats. La sélection s'effectue d'après la valeur maximale de l'énergie potentielle emmagasinée dans la structure lors du mouvement.

Pour le mode j , cette énergie a pour expression :

$$E_j = \frac{1}{2} U_j^T \cdot k \cdot U_j \quad 6.12$$

6.4.2. Cas d'excitations sismiques uniformes.

Lors de la conception et de l'analyse parasismique des structures linéaires, une hypothèse est fréquemment adoptée. Elle stipule que la structure étudiée subit un mouvement du sol de nature uniforme. En d'autres termes, la même excitation sismique est supposée agir simultanément au niveau de tous les points d'appuis de la structure au sol.

Cependant, cette hypothèse implique que les vibrations du sol résultent d'une propagation verticale d'ondes sismiques spatialement uniformes, ou alors que les dimensions de la base de la structure considérée sont petites relativement aux longueurs d'ondes sismiques (ce qui est vrai pour les structures peu étendues), d'où l'analyse dynamique s'en trouve amplement simplifiée puisque seule la variation temporelle du signal sismique est à considérer.

Dans le cadre d'un calcul des réponses physiques, l'un des moyens les plus efficaces est, sans doute, celui qui se base sur le principe de superposition modale. En effet, il est plus simple de quantifier les réponses modales (histoires temporelles ou quantités maximales) d'un système structural à N degrés de liberté, puis de combiner ces réponses selon un procédé adéquat qui permette d'approcher au mieux la réponse exacte.

Notons que, dans le cadre d'une approche probabiliste modale, le développement analytique qui conduit à la formulation d'une règle de combinaison des réponses modales maximales d'une structure se base sur la théorie des vibrations aléatoires.

Considérons une structure à N ddl soumise à une excitation sismique de nature uniforme.

Sous forme matricielle, les équations d'équilibre dynamique de cette structure peuvent être exprimées comme suit :

$$[m] \{\ddot{u}\} + [c] \{\dot{u}\} + [k] \{u\} = -[m] \{1\} \ddot{x}_g(t) \quad 6.13$$

où $\ddot{x}_g(t)$: accélération du sol

$[m]$, $[c]$, $[k]$: respectivement matrices de masse, d'amortissement et de rigidité de la structure.

$u(t)$: vecteur déplacement relatif de la structure.

$\{1\}$: vecteur d'influence du chargement sismique : ses composantes valent 1 pour les ddl de translation orientés dans directions de l'excitation et 0 pour les ddl de rotation ou translations orientées normalement à la direction de l'excitation.

La technique de superposition modale nécessite l'introduction de la transformation suivante :

$$\{u\} = [\phi] \cdot \{y\} \quad 6.14$$

où ϕ : matrice de transformation et y : vecteur de coordonnées généralisées.

Si la matrice de transformation utilisée est celle des modes propres, alors y est identique au vecteur des coordonnées normales. Dans ce cas la substitution de l'équation (6.14) dans l'équation (6.13) et la prémultiplication par $[\phi]^T$ permet d'écrire:

$$[\phi]^T [m] [\phi] \{\ddot{y}\} + [\phi]^T [c] [\phi] \{\dot{y}\} + [\phi]^T [k] [\phi] \{y\} = -[\phi]^T [m] \{1\} \ddot{x}_g(t) \quad 6.15$$

Supposons à présent que l'amortissement du système est classique. Par conséquent, la matrice d'amortissement $[c]$ est alors orthogonale par rapport à la matrice modale ϕ au même titre que $[k]$ et $[m]$

Il s'en suit que les équations de mouvements du système sont découplées en N équations indépendantes. L'application des propriétés d'orthogonalité permet alors d'écrire :

$$\ddot{y}_k + 2 \beta_k \omega_k \dot{y}_k + \omega_k^2 y_k = -\gamma_k \ddot{x}_g \quad 6.16$$

où y_k : $k^{\text{ème}}$ coordonnée modale

β_k : facteur d'amortissement modale donnée par :

$$2\beta_k \omega_k = \frac{\phi_k^T [c] \phi_k}{\phi_k^T [m] \phi_k} \quad 6.17$$

ω_k : fréquence angulaire propre donnée par :

$$\omega_k^2 = \frac{\{\phi\}_k^T [k] \{\phi\}_k}{\{\phi\}_k^T [m] \{\phi\}_k} \quad 6.18$$

γ_k : facteur de participation modal du mode k donné par :

$$\gamma_k = \frac{\{\phi\}_k^T [m] \{1\}}{\{\phi\}_k^T [m] \{\phi\}_k} \quad 6.19$$

L'équation (6.16) est analogue à l'équation d'équilibre gouvernante d'un oscillateur à un degré de liberté. Sa résolution peut se faire soit par intégration numérique, ce qui nécessite la connaissance exacte de l'évolution temporelle du chargement $\ddot{x}_g(t)$, soit par la méthode du spectre de réponse, ce qui implique la connaissance du spectre de réponse de l'excitation $\ddot{x}_g(t)$, mais qui fournit uniquement la réponse modale maximale, c'est-à-dire, $\max(y_k)$.

6.5. REPONSE D'UN SYSTEME A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE A UNE EXCITATION ALEATOIRE STATIONNAIRE.

En utilisant la méthode de superposition modale, toute quantité de réponse $R(t)$ d'un système linéaire peut s'exprimer en termes de ses réponses modales sous la forme suivante :

$$R(t) = \sum_k L_k y_k(t) \quad 6.20$$

où L_k : constantes dépendant du type de réponse considéré.

Supposons à présent une excitation sismique $\ddot{x}_g(t)$ à la base de la structure. Dans le domaine du temps, la réponse aléatoire d'un système discret à une excitation $\ddot{x}_g(t)$ satisfait :

$$u_j(t) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \phi_k(j) \int_0^t \ddot{x}(\tau) h_k(t-\tau) d\tau \quad 6.21$$

avec γ_k : facteur de participation du mode k
 $\psi_k(j)$: j^{ème} composante du k^{ème} mode

Prenons l'espérance mathématique :

$$E[u_j(t)] = \sum_{k=1}^n \gamma_k \phi_k(j) \int_0^t h_k(t-\tau) E[\ddot{x}(\tau)] d\tau \quad 6.22$$

Similairement, la fonction d'autocorrélation du processus output s'écrit :

$$R_{u_j}[t_1, t_2] = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \gamma_k \phi_k(j) \gamma_l \phi_l(j) \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R_{\ddot{x}}(t_1, t_2) h_k(t_1 - \tau_1) h_l(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad 6.23$$

Pour une excitation stationnaire, la fonction d'autocorrélation ne dépend que de $(t_1 - t_2)$, donc la fonction d'autocorrélation du processus output s'écrit :

$$R_{u_j}(\tau) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \gamma_k \phi_k(j) \gamma_l \phi_l(j) \int_{-\infty}^{+\infty} H_k(\omega) H_l^*(\omega) G_{\ddot{x}}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad 6.24$$

avec $H_k(\omega)$: fonction de réponse complexe du mode k où la fonction de transfert du mode k , elle est donnée, lorsque la réponse considéré est le déplacement, par :

$$H_k(\omega) = \frac{1}{\omega_k^2 + 2i\beta_k \omega_k \omega - \omega^2} \quad 6.25$$

$H_k^*(\omega)$: conjugué complexe de $H_k(\omega)$

ω_k : fréquence du $k^{\text{ème}}$ mode .

La variance du processus output est obtenue pour $\tau = 0$:

$$\sigma_{u_j}^2 = R_{u_j}(0) \quad 6.26$$

La fonction d'autocorrélation du processus dérivé output est donné par :

$$R_{\dot{u}_j}(\tau) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \gamma_k \phi_k(j) \gamma_l \phi_l(j) \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 H_k(\omega) H_l^*(\omega) G_{\ddot{x}}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad 6.27$$

et la variance correspondante :

$$\sigma_{\dot{u}_j}^2 = R_{\dot{u}_j}(0) \quad 6.28$$

Dans la double sommation précédente, les termes correspondant aux indices k, l et l, k sont des conjugués complexes. Par conséquent, toutes les quantités de réponse d'un système linéaire sont réelles puisque les parties imaginaires s'annulent.

On obtient alors :

$$\sigma_{u_j}^2(\Phi) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \gamma_k \phi_k(j) \gamma_l \phi_l(j) \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} H_k(\omega) H_l^*(\omega) G_{\bar{x}}(\omega) d\omega \quad 6.29$$

$$\sigma_{\dot{u}_j}^2(\Phi) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \gamma_k \phi_k(j) \gamma_l \phi_l(j) \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 H_k(\omega) H_l^*(\omega) G_{\bar{x}}(\omega) d\omega \quad 6.30$$

où Re définit la partie réelle d'un argument complexe.

6.5.1. Rôle des cross-corrélations.

Supposons maintenant que l'excitation sismique est représentée par le biais d'un bruit blanc (white noise) :

$$G_{\bar{x}}(\omega) = G_0 = \text{Cste} \quad 6.31$$

la variance du processus output s'écrira :

$$\begin{aligned} \sigma_{u_j}^2(\tau) = G_0 & \left[\sum_{k=1}^n \gamma_k^2 \phi_k^2(j) \int_{-\infty}^{+\infty} |H_k(\omega)|^2 d\omega \right] \\ & + G_0 \left[\sum_{k \neq l}^n \sum_{k \neq l}^n \gamma_k \phi_k(j) \gamma_l \phi_l(j) \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} H_k(\omega) H_l^*(\omega) d\omega \right] \end{aligned} \quad 6.32$$

Le terme en double sommation représente l'effet des cross-corrélations ou bien l'effet des modes couplés. Pour examiner l'importance des cross-corrélations, introduisons le rapport de la seconde intégrale à la première intégrale :

$$\alpha_{kl} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} H_k(\omega) H_l^*(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |H_k(\omega)|^2 d\omega} \quad 6.33$$

Ce coefficient représente l'intercorrélation entre les modes k et l .

Pour $\xi = \xi_k = \xi_l$:

$$\alpha_{kl} = \frac{8 \xi^2 \frac{\omega_k}{\omega_l}}{\left(1 + \frac{\omega_k}{\omega_l}\right) \left[\left(1 - \frac{\omega_k}{\omega_l}\right)^2 + 4 \xi^2 \left(\frac{\omega_k}{\omega_l}\right) \right]} \quad 6.34$$

La figure (6.1) Représente la variation du coefficient α_{kl} en fonction du rapport ω_k/ω_l , dans le cas d'un bruit blanc, pour deux valeurs de l'amortissement.

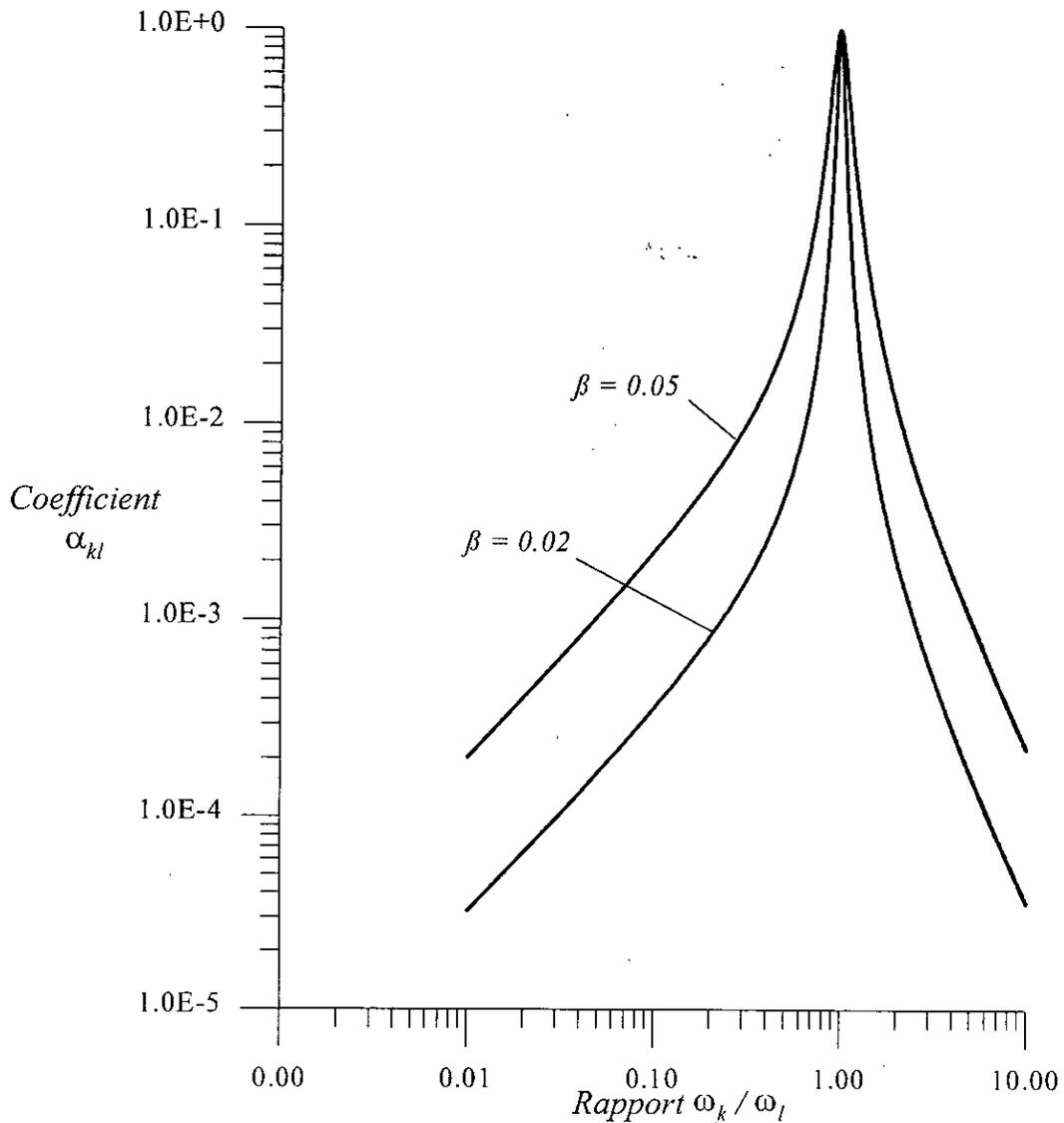


Fig. 6.1- Variation du coefficient d'intercorrélacion modale.

On constate que α_{kl} est petit si l'espace entre les fréquences est large.

Si la contribution des cross-corrélacion est négligée, la variance totale du processus output est la somme des variances des différentes réponses modales. Ceci revient à considérer les réponses modales comme statistiquement

indépendantes. Ceci est acceptable si $\alpha_{kl} \ll 1$, c'est-à-dire si les modes sont bien séparés. Cette hypothèse est à la base de la méthode SRSS (Square Root of the Sum of the Squares) qui est largement utilisée en analyse sismique.

6.5.2. Approximation de la réponse pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté.

Pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté avec des fréquences modales séparées, une approximation de la variance du processus output (dont le processus input est représenté par un bruit blanc WN) est donnée par :

$$\sigma_{u_j}^2(\tau) = G_0 \left[\sum_{k=1}^n \gamma_k^2 \phi_k^2(j) \int_{-\infty}^{+\infty} |H_k(\omega)|^2 d\omega \right] \quad 6.35$$

Pour une excitation représentée par un bruit blanc filtré (FWN), l'approximation est :

$$\sigma_{u_j}^2(\tau) = \left[\sum_{k=1}^n G_{\ddot{x}}(\omega_k) \gamma_k^2 \phi_k^2(j) \int_{-\infty}^{+\infty} |H_k(\omega)|^2 d\omega \right] \quad 6.36$$

où $G_{\ddot{x}}(\omega_k)$ est l'ordonnée de la fonction de densité spectrale du processus input à $\omega = \omega_k$.

De la même manière, la variance du processus output dérivé est donnée par :

$$\sigma_{\dot{u}_j}^2(\tau) = \left[\sum_{k=1}^n G_{\ddot{x}}(\omega_k) \gamma_k^2 \phi_k^2(j) \int_{-\infty}^{+\infty} |H_k(\omega)|^2 \omega^2 d\omega \right] \quad 6.37$$

Dans le cas où les fréquences naturelles des modes dominants sont rapprochées, l'effet du couplage doit être pris en considération, cela veut dire que les approximations données ci-dessus ne sont plus valables, ce qui nous conduit à inclure la double sommation pour la calcul de $\sigma_{u_j}^2$.

**7.RUINE ENTRAINEE PAR DES VIBRATIONS
ALEATOIRES.**

7.1. INTRODUCTION.

Du point de vue de l'ingénieur d'étude, il est souhaitable que la connaissance statistique de la réponse de la structure puisse être couverte en une information statistique au sujet de sa fiabilité. Ceci implique une connaissance détaillée des modes de ruines. Pour ce qui suit le mode de ruine considérée est: La ruine par dépassement d'un seuil.

Ce type de ruine survient quand la réponse du système dépasse une valeur critique, il est lié à un problème commun sous le nom de *problème du premier passage*.

7.2. PROBLEME DU PREMIER PASSAGE.

7.2.1. Position du problème.

Soit une structure dont la ruine se produit quand la réponse dépasse un certain déplacement.

L'ingénieur doit estimer la probabilité que sur une ^{durée} donnée d'observation t_d , le processus de réponse dépasse le seuil de ruine.

Soit $X(t)$, le processus de réponse aléatoire à un bruit blanc Gaussien.

On peut définir une probabilité $P_b(t_d)$ que le processus reste dans le domaine de sécurité, elle s'écrit :

$$P_b(t_d) = \text{Pr ob} \left[\left(\min_{0 < t < t_d} x(t) \leq -b \right) \cup \left(\max_{0 < t < t_d} x(t) \geq +b \right) \right] \quad 7.1$$

$P_b(t_d)$ représente la fraction d'échantillon qui n'ont pas franchi le seuil de ruine après une durée t_d . C'est une mesure de fiabilité par définition $P_b(t_d)$ est une fonction décroissante de t_d .

On définit la densité de probabilité de franchissement du seuil b par :

$$P_b(t_d) = - \frac{dP(t_d)}{dt_d} \quad 7.2$$

$P(t_d)$ est nulle à l'origine et augmente graduellement quand la réponse atteint son régime stationnaire, elle décroît ensuite de façon exponentielle.

7.3. HYPOTHESE DE FRANCHISSEMENT INDEPENDANT.

L'approximation la plus simple de la densité de probabilité du premier passage s'obtient en supposant que les franchissements du seuil $\pm b$ par la réponse stationnaire peuvent être considérés comme des événements indépendants. Dans ces conditions, le nombre de franchissements dans l'intervalle $[0, t_d[$ constitue un processus de Poisson, de taux d'arrivage γ_b^* .

La probabilité que n passages se produisent sur la durée d'observation t_d est donnée par la loi de Poisson :

$$P[n \text{ passages sur } [0, t_d[] = \frac{(\gamma_b \cdot t_d)^n}{n!} \cdot e^{-\gamma_b t_d} \quad 7.3$$

La fiabilité correspond à $n = 0$

$$P[\overset{\text{Zéro}}{0} \text{ passages sur } [0, t_d[] = e^{-\gamma_b t_d}$$

Le taux d'arrivage :

$$\gamma_b = \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{x}| p(b, \dot{x}, t) dx \quad 7.4$$

avec $p(\dot{x}, b, t)$ est la densité de probabilité conjointe du processus $x(t)$ et de sa dérivée $\dot{x}(t)$ à l'instant t .

Si $x(t)$ est stationnaire, Gaussien de moyenne nulle, $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ sont indépendantes et que leur distribution conjointe est donnée par :

$$P_{X\dot{X}}(x, t; \dot{x}, t) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2}\right)\right] \quad 7.5$$

Introduisant cette relation dans (7.4) on trouve :

$$\gamma_b = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad 7.6$$

La probabilité pour que la réponse maximale durant un temps d'observation t_d n'excède pas b est :

$$P_{x_{max}}(b, t_d) = P[n = 0] = \exp\left[-\frac{1}{\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \cdot t_d \cdot \exp\left(\frac{b^2}{2\sigma_x^2}\right)\right] \quad 7.7$$

Par contre la probabilité pour que la réponse maximale durant un temps d'observation t_d excède b est :

$$P_{X_{max}}(b, t_d) = 1 - \exp\left[-\frac{1}{\pi} \frac{\sigma_x}{\sigma_x} \cdot t_d \cdot \exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma_x^2}\right)\right] \quad 7.8$$

Si on inverse l'équation (7.8), on obtient la réponse maximale durant un temps t_d , correspondant à une probabilité d'excédent P .

de dépassement p .

$$b_p(t_d) = \sigma_x \sqrt{\frac{2 \log \left[\frac{\sigma_x \cdot t_d}{\pi \sigma_x \log\left(\frac{1}{1-p}\right)} \right]}{\ln}} \quad 7.9$$

8.ETUDE NUMERIQUE.

8.1. INTRODUCTION.

La réponse sismique ainsi que le comportement d'une structure durant un séisme, dépendent essentiellement de ses caractéristiques dynamiques : périodes naturelles, formes propres, amortissement et les caractéristiques dynamiques du sol de fondation.

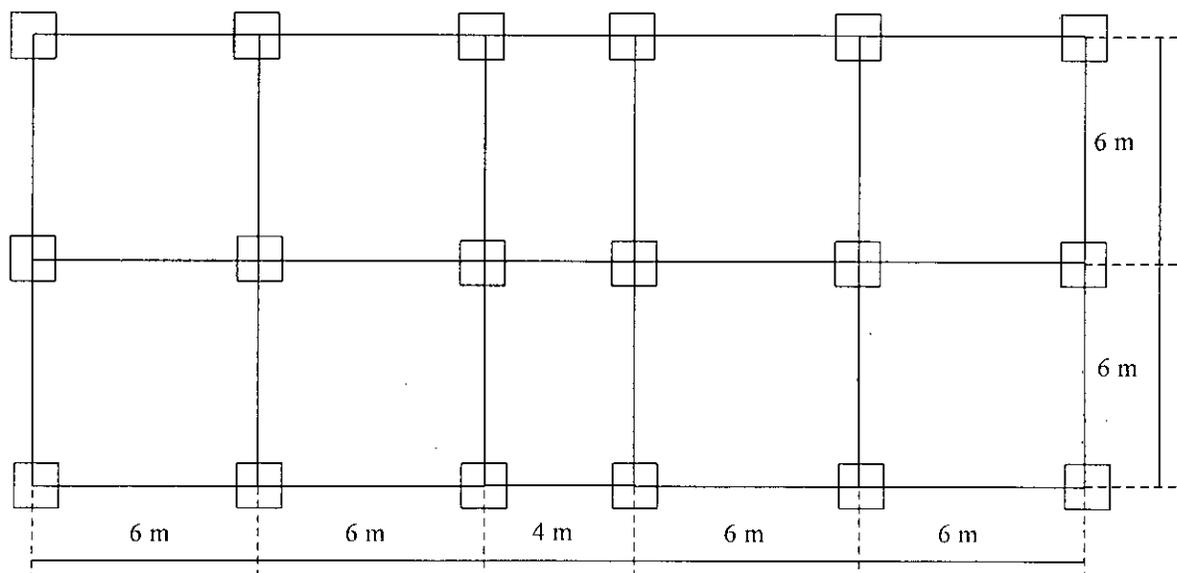
Ainsi, le présent chapitre, se penchera sur l'étude numérique de la réponse d'une structure excitée par un input sismique représenté par sa fonction de densité spectrale de puissance.

La structure proposée est décrite dans le paragraphe qui suit :

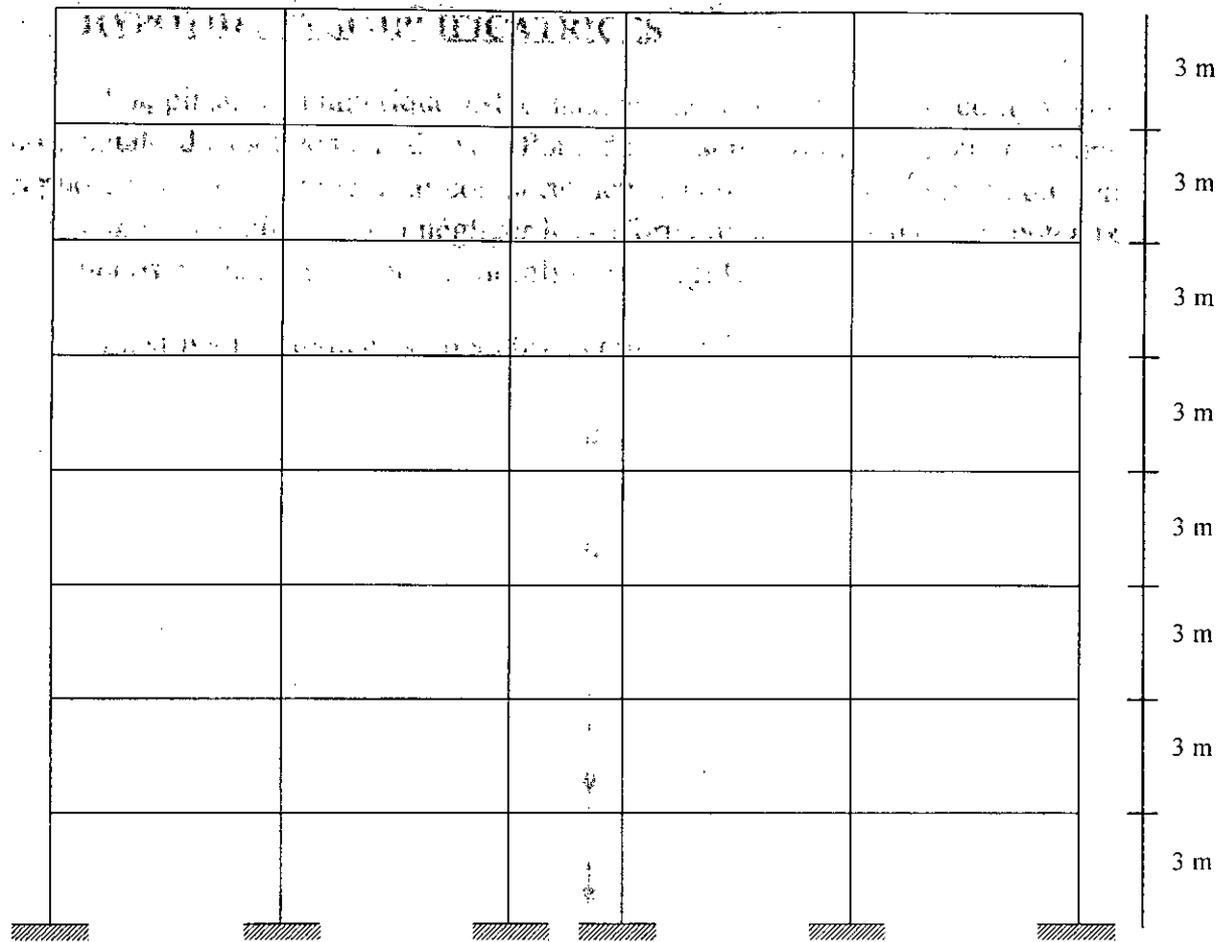
8.2. PRESENTATION DE LA STRUCTURE.

La structure proposée pour l'étude est un bâtiment en R + 7 à usage d'habitation présentant les caractéristiques suivantes :

- - longueur en plan du bâtiment : $l_y = 12$ m
- - largeur en plan du bâtiment : $l_x = 28$ m
- - la hauteur totale du bâtiment : $H = 24$ m
- - la charge d'exploitation : 175 Kg/m²
- - Charge permanente : 400 Kg/m²



Vue en plan du bâtiment.



Vue de face du bâtiment

Le prédimensionnement des poutres et des poteaux a été fait selon les prescriptions des règles parasismiques algériennes (RPA 88).

- Prédimensionnement des poutres :

$$b = 30 \text{ cm}, h = 50 \text{ cm}$$

- Prédimensionnement des poteaux :

$$\text{niveau 1, 2, 3 : } b = h = 50 \text{ cm.}$$

$$\text{niveau 4, 5, 6 : } b = h = 45 \text{ cm.}$$

$$\text{niveau 7, 8 : } b = h = 40 \text{ cm.}$$

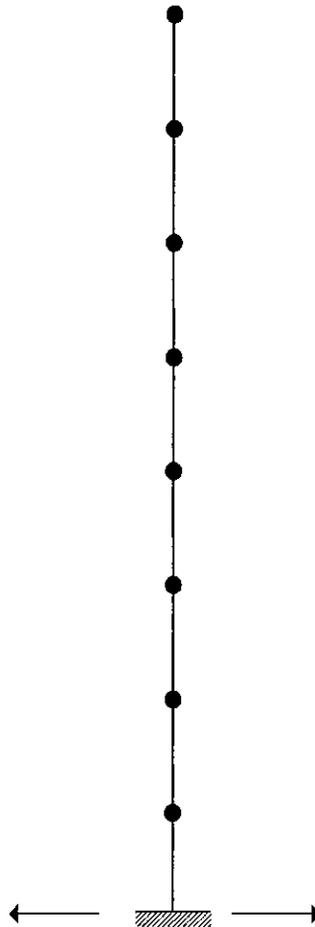
- module de Young = $2,1 \times 10^6 \text{ t/m}^2$

Le pourcentage d'amortissement critique modale $\zeta = 0.05$ est adoptée, ce qui reflète le cas très souvent rencontré en pratique.

8.3. HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES.

L'application numérique est consacrée au cas d'une seule composante horizontale du mouvement du sol. Pour des raisons pratiques, nous pouvons supposer que le portique a un comportement analogue à celui d'une poutre en cisaillement, ce qui revient à négliger les déformations axiales dans les poteaux et à supposer que les planchers sont infiniment rigides.

La structure étudiée est modélisée comme suit :



8.4. APPLICATION NUMERIQUE.

Le premier volet de l'étude numérique se penchera sur le calcul des vecteurs propres de la structure représentée ci-dessus, ainsi que les facteurs de participations modales.

Les résultats de l'analyse modale obtenus sont représentés dans le tableau suivant.

Mode k	Fréquence naturelle (rad/s)	Facteur de participation, γ_k
1	9.33	40.66
2	25.58	-14.50
3	40.43	10.68
4	54.42	7.02
5	64.30	3.56
6	75.45	2.69
7	88.29	1.66
8	97.16	3.93

Les vecteurs modaux obtenus sont les suivants :

Etages	Mode							
	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8
1	0.0040	-0.0108	0.0199	0.0237	0.0168	0.0175	0.0147	0.0424
2	0.0079	-0.0195	0.0298	0.0258	0.0122	0.0042	-0.0061	-0.0387
3	0.0145	-0.0277	0.0207	-0.0119	0.0232	-0.0321	-0.0171	0.0168
4	0.0196	-0.0264	-0.0030	-0.0281	0.0088	0.0222	0.0360	-0.0096
5	0.0239	-0.0172	-0.0246	-0.0065	0.0220	0.0192	-0.0379	0.0051
6	0.0272	-0.0029	-0.0279	0.0238	0.0116	-0.0334	0.0221	-0.002
7	0.0309	0.0213	-0.0001	0.0213	-0.0399	0.0202	-0.0067	0.0004
8	0.0327	0.0357	0.02789	0.0260	0.0259	-0.0081	0.0017	-0.00009

Ensuite, le calcul de σ_{ij} et σ_{ij} seront fait pour le cas d'un input sismique décrit par les trois modèles de densité spectrale de puissance (c'est à dire : Bruit

blanc pur, Bruit blanc filtré (modèle de Kanai-Tajimi) et bruit blanc filtré (modèle Kanai-Tajimi modifié) et pour trois types de sol (sol ferme, sol moyen, sol mou).

La constante G_0 ont été choisis pour un pic d'accélération du sol $PGA = 0.3 g$.

Pour un sol ferme : $G_0 = 0,00478 \text{ m}^2/\text{s}^3$, $\omega_g = 15 \text{ rad/s}$, $\beta_g = 0.6$

$$\omega_g = 1.5 \text{ rad/c}, \beta_c = 0.6$$

Pour un sol moyen : $G_0 = 0,00822 \text{ m}^2/\text{s}^3$, $\omega_g = 10 \text{ rad/s}$, $\beta_g = 0.4$

$$\omega_g = 1 \text{ rad/c}, \beta_c = 0.6$$

Pour un sol meuble : $G_0 = 0,0158 \text{ m}^2/\text{s}^3$, $\omega_g = 5 \text{ rad/s}$, $\beta_g = 0.2$

$$\omega_g = 0.5 \text{ rad/c}, \beta_c = 0.6$$

Nous rappelons que σ_{ij} et σ_{ji} sont donnés par les équations (6.35), (6.37) dans le cas où l'effet de l'intercorrélation modale est négligée, et par les équations (6.29,6.30) dans le cas contraire. Les résultats obtenus sont données dans les tableaux suivant pour un bruit blanc et un bruit blanc modifié (KT et CP). ainsi que pour chaque type de sol (sol ferme, sol moyen, sol meuble).

1- Cas d'un bruit Blanc pur :

Sol ferme				
Variance (cm)		Variance dérivé (cm/s)		Niveau
Couplage modale négligé	Couplage modale non négligé	Couplage modale négligé	Couplage modale non négligé	
0,231607	0,235108	2,97108	3,10701	1
0,452401	0,456591	5,16972	5,26424	2
0,811970	0,815468	8,24261	8,27485	3
1,08913	1,09141	10,5839	10,5910	4
1,32378	1,32465	12,5926	12,5837	5
1,50808	1,50761	14,2256	14,2023	6
1,71261	1,71038	16,1718	16,1345	7
1,81341	1,81016	17,4438	17,3791	8

Sol moyen				
Variance (cm)		Variance dérivé (cm/s)		Niveau
Couplage modale négligé	Couplage modale non négligé	Couplage modale négligé	Couplage modale non négligé	
0,30372	0,308312	3,89615	4,07441	1
0,593261	0,598756	6,77936	6,90332	2
1,06479	1,06937	10,8090	10,8513	3
1,42824	1,43123	13,8794	13,8886	4
1,73595	1,73709	16,5148	16,5018	5
1,97763	1,97702	18,6545	18,6243	6
2,24585	2,24293	21,2071	21,2581	7
2,37803	2,37377	22,8751	22,7903	8

Sol meuble				
Variance (cm)		Variance dérivé (cm/s)		Niveau
Couplage modale négligé	Couplage modale non négligé	Couplage modale négligé	Couplage modale non négligé	
0,421081	0,427447	5,40167	5,64882	1
0,822504	0,830123	9,39899	9,57085	2
1,47623	1,48259	14,9858	15,0444	3
1,98012	1,98428	19,2425	19,2553	4
2,40674	2,40833	22,8963	22,8783	5
2,74181	2,74097	25,8628	25,8210	6
3,11368	2,24293	29,4018	29,3338	7
3,29893	3,10962	31,7143	31,5967	8

2- Cas d'un bruit Blanc filtré (modèle de Kanai Tajini) :

Sol ferme				
Variance (cm)		Variance dérivé (cm/s)		Niveau
Couplage modale négligé	Couplage modale non négligé	Couplage modale négligé	Couplage modale non négligé	
0,292092	0,288641	2,95710	2,81878	1
0,574986	0,566831	5,69449	5,45801	2
1,04125	1,02490	10,0170	9,69963	3
1,40226	1,38011	13,2808	12,9555	4
1,70801	1,68156	16,0268	15,7269	5
1,94755	1,91823	18,2035	17,7269	6
2,21067	2,17872	20,7156	20,5046	7
2,33708	2,30400	22,0390	21,8489	8

Sol moyen				
Variance (cm)		Variance dérivé (cm/s)		Niveau
Couplage modale négligé	Couplage modale non négligé	Couplage modale négligé	Couplage modale non négligé	
0,483983	0,469829	4,57120	4,28486	1
0,954537	0,923414	8,98598	8,43119	2
1,73382	1,67103	16,2535	15,2830	3
2,33967	2,25079	21,8837	20,6139	4
2,85355	2,74186	26,6551	25,1487	5
3,25547	3,12565	30,3929	28,7138	6
3,69369	3,54393	34,4968	32,6424	7
3,90184	3,74261	36,4727	34,5387	8

Sol meuble				
Variance (cm)		Variance dérivé (cm/s)		Niveau
Couplage modale négligé	Couplage modale non négligé	Couplage modale négligé	Couplage modale non négligé	
0,195841	0,319161	1,84242	2,18101	1
0,386288	0,613060	3,62594	4,23914	2
0,701770	1,07726	6,56872	7,56465	3
0,947096	1,42584	8,85213	10,1072	4
1,15520	1,71381	10,7881	12,2390	5
1,31795	1,93432	12,3037	13,8931	6
1,49532	2,17012	13,9628	15,6882	7
1,57952	2,28079	14,7573	16,5425	8

3- Cas d'un bruit Blanc filtré (modal de Clough - Penzien) :

Sol ferme				
Variance (cm)		Variance dérivé (cm/s)		Niveau
Couplage modale négligé	Couplage modale non négligé	Couplage modale négligé	Couplage modale non négligé	
0,294092	0,289749	2,97464	2,83621	1
0,578937	0,569187	5,72977	5,49281	2
1,04845	1,02954	10,0828	9,76385	3
1,41200	1,38664	13,3707	13,0428	4
1,719900	1,68976	16,1374	15,8338	5
1,96112	1,92777	18,3301	18,0630	6
2,22606	2,18973	20,8589	20,06426	7
2,35333	2,31572	22,1895	21,9938	8

Sol moyen				
Variance (cm)		Variance dérivé (cm/s)		Niveau
Couplage modale négligé	Couplage modale non négligé	Couplage modale négligé	Couplage modale non négligé	
0,485510	0,470817	4,58532	4,29886	1
0,957550	0,925461	9,01393	8,45871	2
1,73930	1,67496	16,3044	15,3328	3
2,34706	2,25624	21,9527	20,6809	4
2,86258	2,74864	26,7392	25,2303	5
3,26577	3,13348	30,4890	28,8066	6
3,70537	3,55294	34,6058	32,7475	7
3,91417	3,75218	36,5877	34,6495	8

Sol meuble				
Variance (cm)		Variance dérivé (cm/s)		Niveau
Couplage modale négligé	Couplage modale non négligé	Couplage modale négligé	Couplage modale non négligé	
0,195998	0,318947	1,84387	2,18417	1
0,386596	0,612715	3,6288	4,24514	2
0,702331	1,07681	6,57395	7,57505	3
0,947854	1,42535	8,85920	10,1208	4
1,15613	1,71332	10,7967	12,2553	5
1,31901	1,93386	12,3135	13,9114	6
1,49652	2,16970	13,9739	15,7087	7
1,58078	2,28039	14,7691	16,5639	8

8. 6. Application n° 02 :

La deuxième application de cette étude numérique traitera le cas où la structure qui sera représentée ci-dessous est : à plancher rigide ou à plancher flexible.

L'accélération du sol est caractérisé par une densité spectrale de type Clough-Penzien.

Les applications seront consacrées au cas où le sol est ferme et meuble, avec une accélération du sol égal à (0,3 g).

8.7. Présentation de la structure :

La structure considérée pour cette dernière application est métallique en R + 2, présentant les caractéristiques suivantes :

Longueur en plan = 9,144 m

La hauteur total = 10,7 m

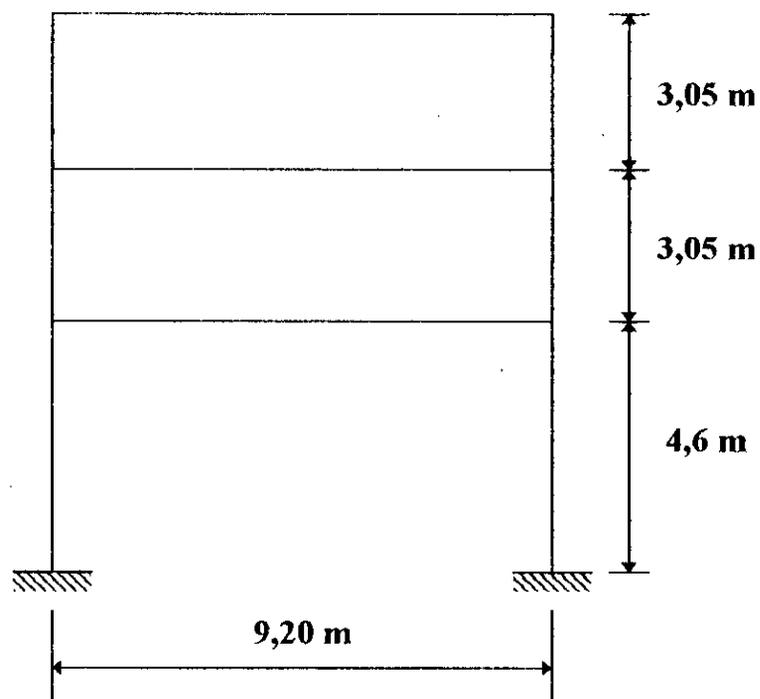
Les poteaux du R.D.C. sont en (10 WF 45) et les poteaux du 1^{er} et 2^{ème} étage sont en (10 WF 21).

La masse des planchers sont :

$M_1 = 24,7$ tonnes

$M_2 = 23,2$ tonnes

$M_3 = 11,6$ tonnes



Vue de face

8.8. Résultats numériques :

a. Structure à plancher rigide :

Les résultats de l'analyse modale obtenus sont représentés dans le tableau suivant :

Mode K	Fréquence naturelle rad/s	Facteur de participation γ_k
1	8,39	7,54
2	24,26	- 1,51
3	35,38	- 0,29

Les vecteurs modaux sont :

Etage	Mode		
	K = 1	K = 2	K = 3
1	0,0971	- 0,1628	- 0,0673
2	0,14307	0,2367	- 0,14912
3	0,15947	0,1694	- 0,17989

Pour le calcul de σ_{u_j} et $\sigma_{\dot{u}_j}$, l'intercorrélation modale est prise en compte et elles sont données par les équations (6 - 29) et (6 - 30).

b. Structure à plancher flexible :

L'analyse modale a donné des résultats suivants :

Mode K	Fréquence naturelle rad/s	Facteur de participation γ_k
1	7,74	7,50
2	22,65	1,67
3	33,64	0,43

Les vecteurs modaux sont :

Etage	Mode		
	K = 1	K = 2	K = 3
1	0,09313	0,15946	0,08018
2	0,14351	- 0,00821	- 0,15018
3	0,16372	- 0,17907	0,16637

Pour le calcul de σ_{u_j} et $\sigma_{\ddot{u}_j}$, l'intercorrélacion modale est prise en compte et elles sont données par les équations (6 - 29) et (6 - 30).

8. 9. INTERPRETATION DES RESULTATS

L'allure décroissante de la réponse en fonction de la probabilité nous mène à constater que plus la probabilité de dépassement diminue plus le déplacement ou la réponse en générale maximale augmente.

Donc, la réponse maximale est obtenue pour une valeur de la probabilité minimale.

a. Cas d'un bruit blanc :

Les figures (8 - 1), (8 - 2), (8 - 3) représentent la réponse maximale, en fonction de la probabilité d'être dépassée, à une excitation sismique représentée par un bruit blanc (W - N) pour trois types de sol.

Nous pouvons nettement voir que la réponse sismique, pour le cas où l'intercorrélation modale est négligée et pour le cas contraire, ne peuvent être distinguées l'une de l'autre, ce qui permet de noter que pour un input sismique représenté par un bruit blanc, l'intercorrélation modale n'a pas d'effet sur la réponse. Il convient de noter aussi que la flexibilité du sol affecte la réponse sismique, pour un sol meuble, la réponse obtenue est importante par rapport à celle obtenue pour un sol moyen ou ferme.

b. Cas d'un bruit blanc filtré :

Les figures (8 - 4), (8 - 5), (8 - 6), (8 - 7), (8 - 8), (8 - 9) représentent la réponse maximale en fonction de la probabilité P à une excitation sismique représentée pour un bruit blanc filtré (Kanaï Tajimi, Clough Penzien) pour trois types de sol.

A partir de ces figures, on peut globalement constaté que l'intercorrélation modale a un effet sur la réponse maximale de la structure proposée. Cet effet ne peut être négligée dans le cas d'un sol meuble.

c. Comparaison des modèles stochastiques :

Les figures (8 - 10), (8 - 11), (8 - 12) ont pour but principal la comparaison entre les modèles stochastiques de la densité spectrale de puissance adoptés dans

l'étude et en prenant en considération l'intercorrélacion modale dans la réponse de la structure. On observe que le modèle de Kanai-Tajimi et Clough Penzien donnent le même résultat.

Pour les figures (8 - 10), (8 - 11) et pour le déplacement d'un étage donné le modèle de Kanai-Tajimi et Clough-Penzien fournissent des résultats plus sécuritaire comparativement aux résultats fournis par un modèle de Bruit Blanc pur, donc les modèles de Kanai Tajimi et Clough-Penzien sont plus sécurisants. Toutefois cette tendance est inversée lorsqu'il s'agit d'un sol meuble (fig. (8 - 12)), cela peut s'expliquer par le fait que pour les fréquences de la structure, le contenu fréquentiel pour le cas d'un bruit blanc filtré est faible devant celui obtenu dans le cas d'un bruit blanc.

d. Comparaison des types de sol :

La comparaison des déplacements pour différents type de sol et pour différents modèles d'input sismique est donnée en figures (8 - 13), (8 - 14), (8 - 15) et en prenant en considération l'effet de l'intercorrélacion modale.

Pour le cas d'un bruit blanc pur (fig. 8 - 13), on constate que lorsque la flexibilité du sol augmente, les déplacements maxima augmentent, donc ce résultat montre clairement que la flexibilité du sol peut affecter la réponse de la structure.

Les résultats des figures (8 - 14), (8 - 15) montre que les effets du sol peuvent être complexes et que la prédiction de la réponse représente la conjugaison de plusieurs effets dont notamment le contenu fréquentiel des mouvements, de sol, des fréquences propres de vibration de la structure, ainsi on observe clairement que si le déplacement maxima pour un sol ferme est plus faible que celui obtenu pour un sol moyen et un sol meuble, on ne peut conclure que les déplacements dans le cas d'un sol moyen soient systématiquement plus faibles que ceux obtenus dans le cas d'un sol meuble.

Pour la 2^{ème} application :

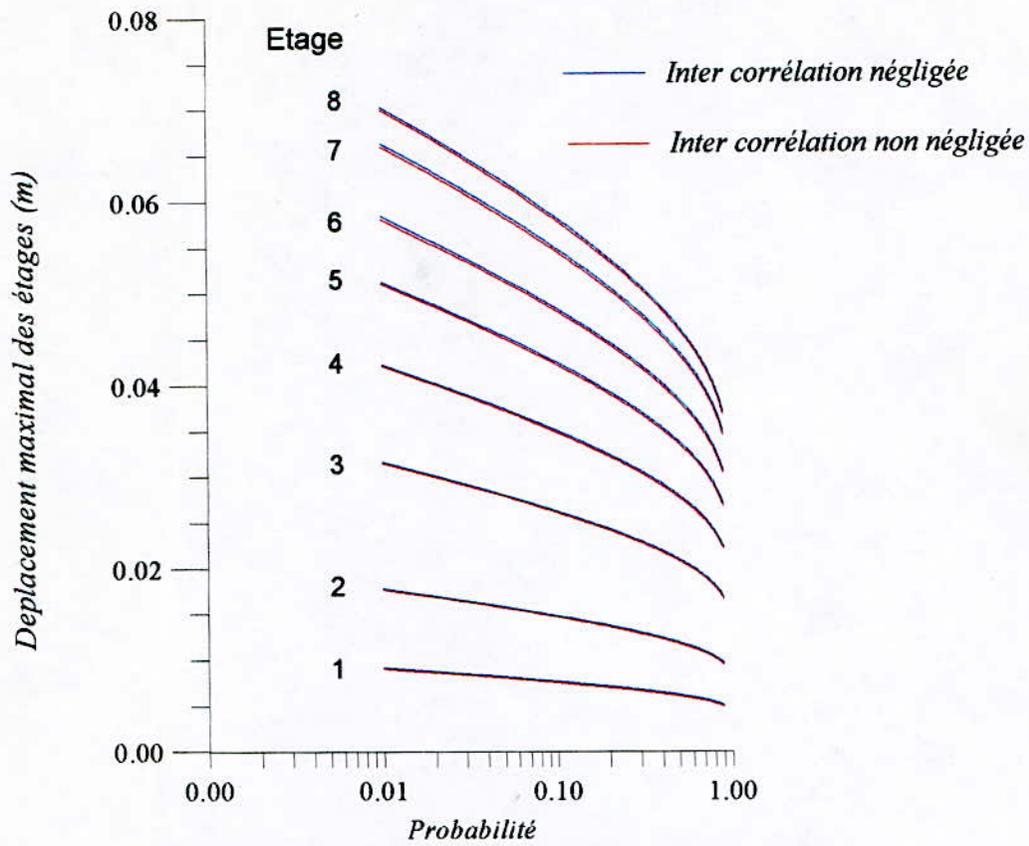
A partir des figures (8 - 16), (8 - 21) on peut clairement constaté que la réponse maximale, dans le cas où la structure est considérée rigide, est inférieure à la réponse dans le cas où la structure est considérée flexible, donc la flexibilité de la structure

affecte la réponse de celle-ci. Il convient de noter que les résultats obtenus pour une structure flexible sont plus sécurisants. Les mêmes constatations peuvent être déduites de la figure (8 - 17).

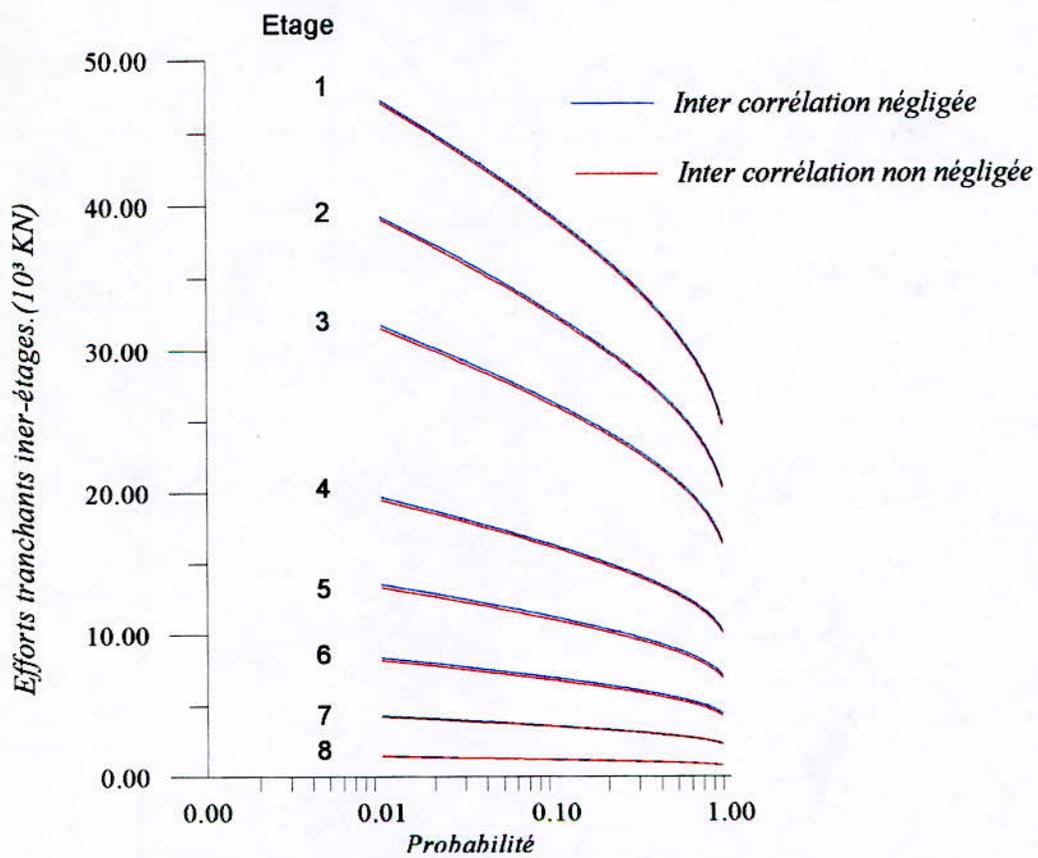
La figure (8 - 18) représente la comparaison de l'effet du sol sur la réponse d'une structure rigide. On observe que plus la flexibilité du sol augmente, les déplacements maxima augmentent. Ce même résultat a été observé de la figure (8 -13).

Le figure (8 - 19) a pour but la comparaison de l'effet du sol dans le cas où la structure est flexible. Il est évident que plus le sol est flexible, plus la réponse augmente.

Il ressort des observations précédentes, l'importance que joue la flexibilité de la structure.

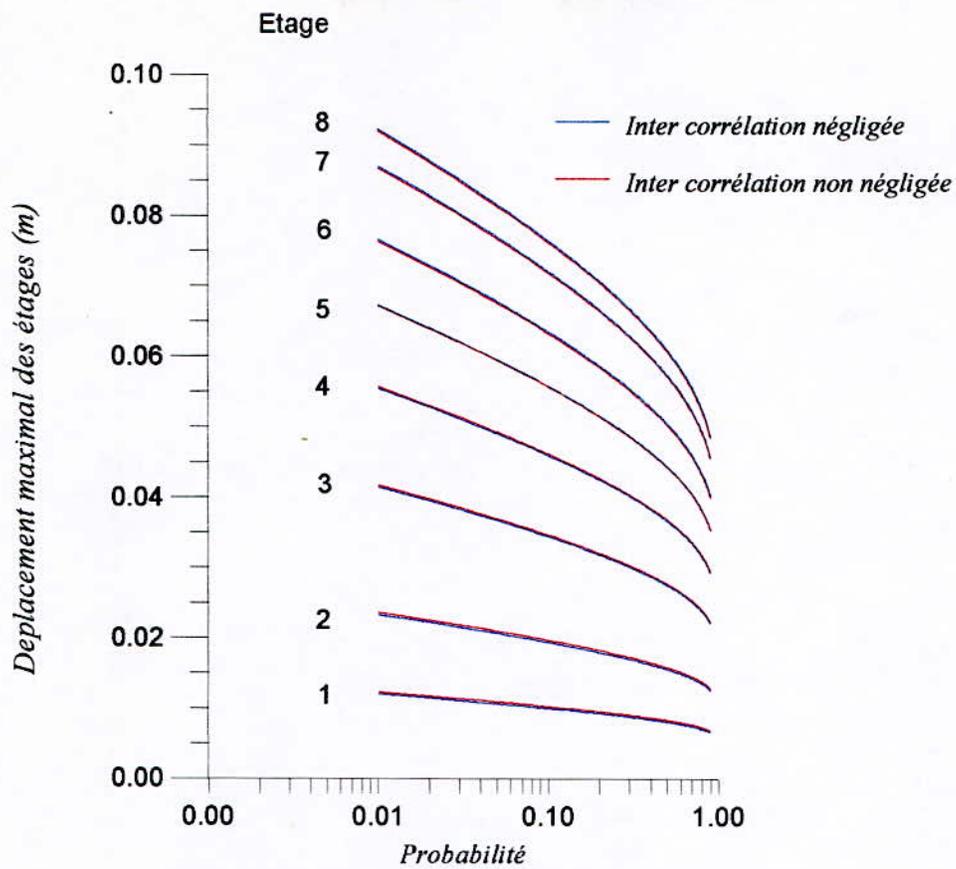


a)- Distribution des déplacements maximums des étages

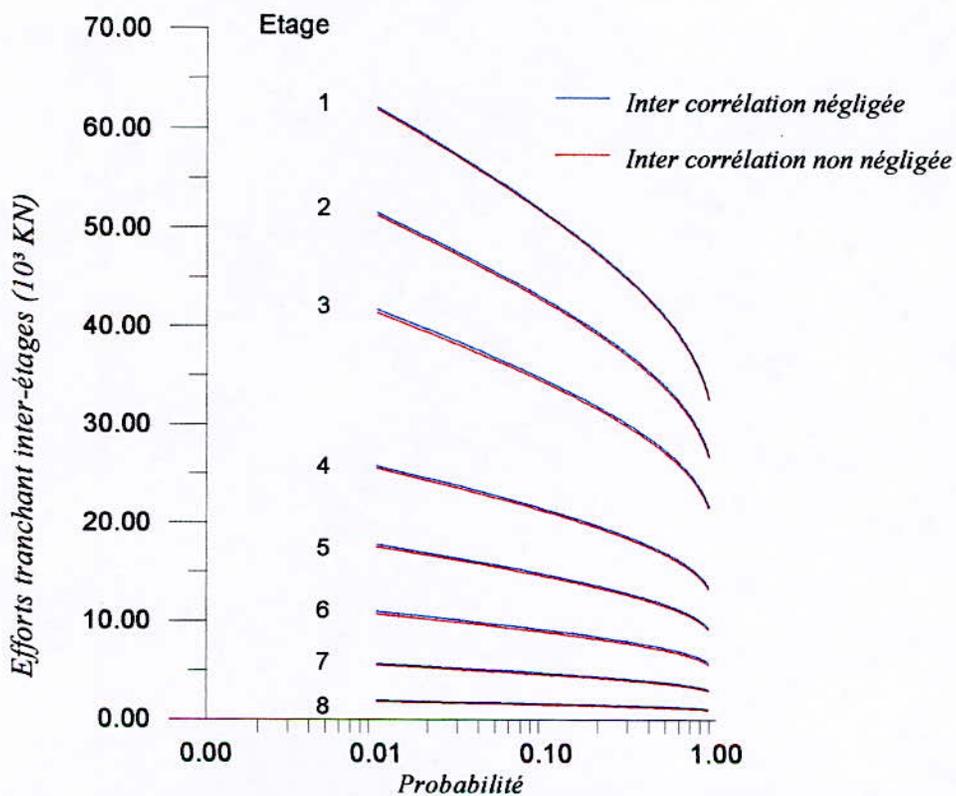


b)- Distribution du maximum de l'effort tranchant inter-étage

Fig. 8.1- Cas d'un bruit blanc : sol ferme

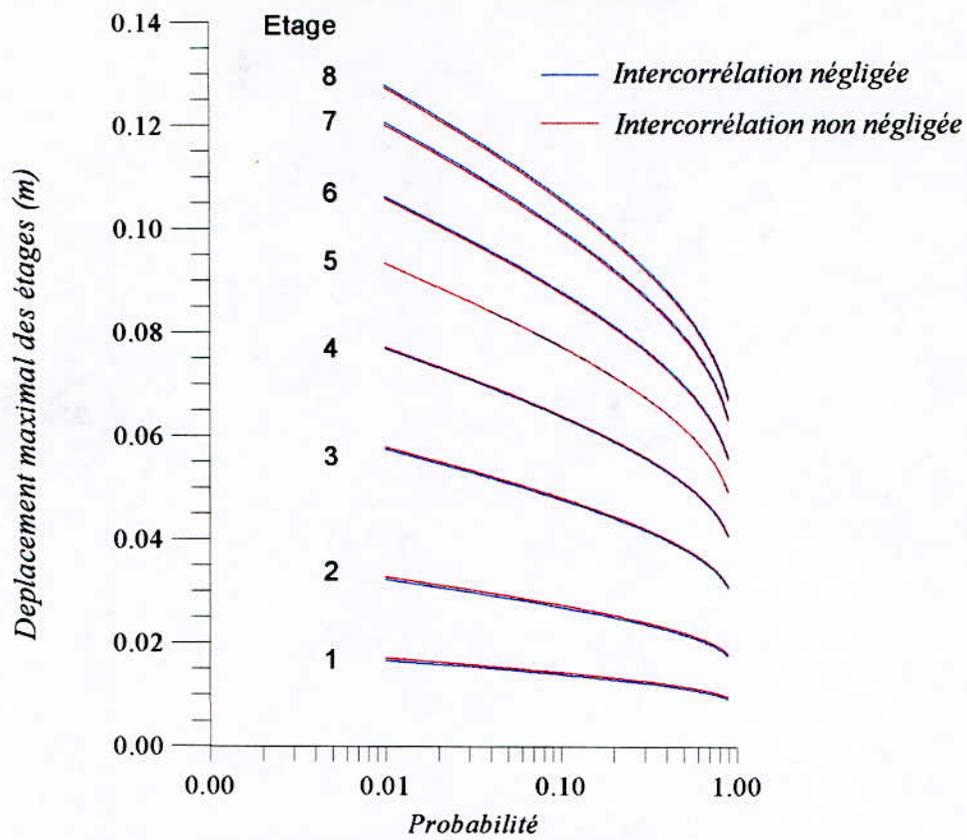


a)- Distribution des déplacements maximums des étages

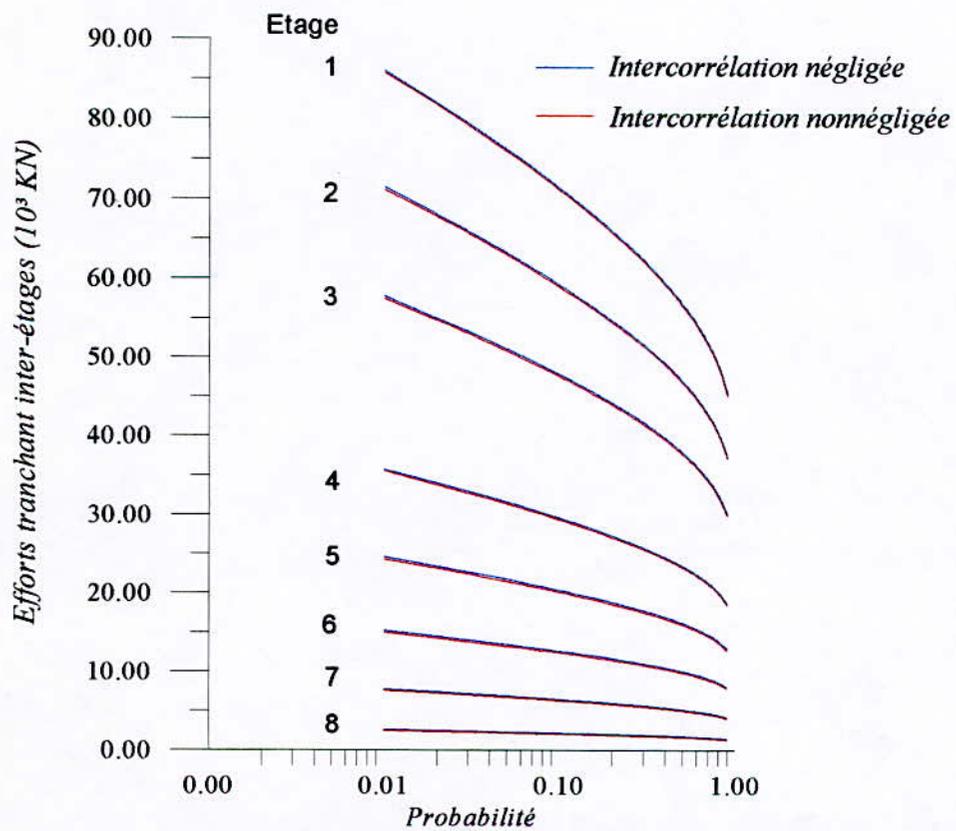


b)- Distribution du maximum de l'effort tranchant inter-étage

Fig. 8.2- Cas d'un bruit blanc : sol moyen

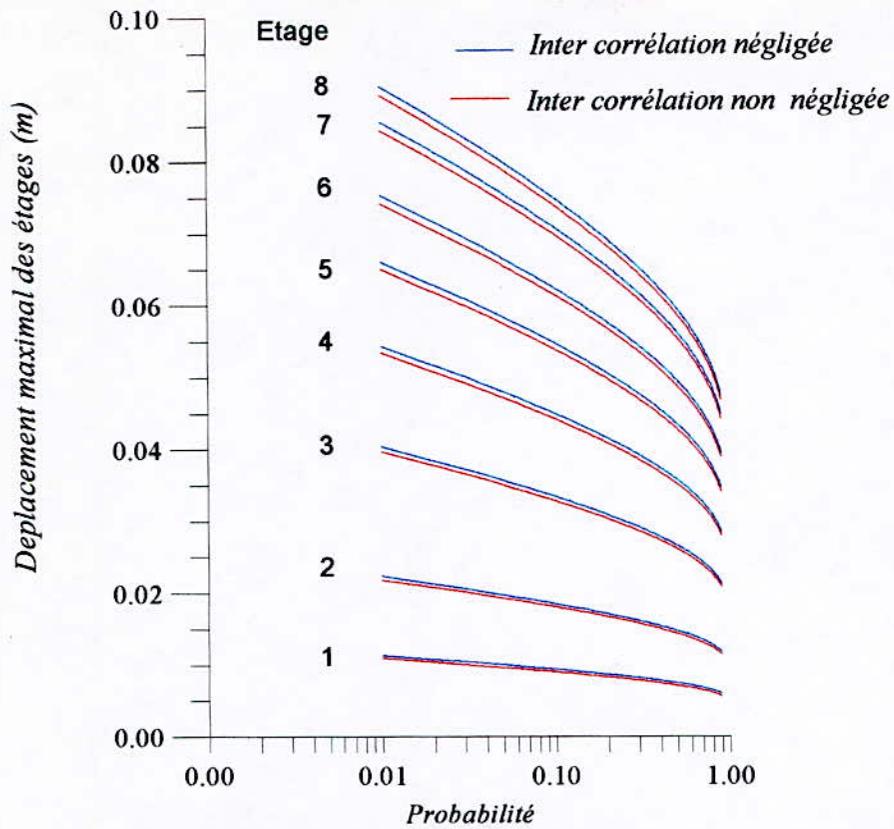


a)- Distribution des déplacements maximums des étages

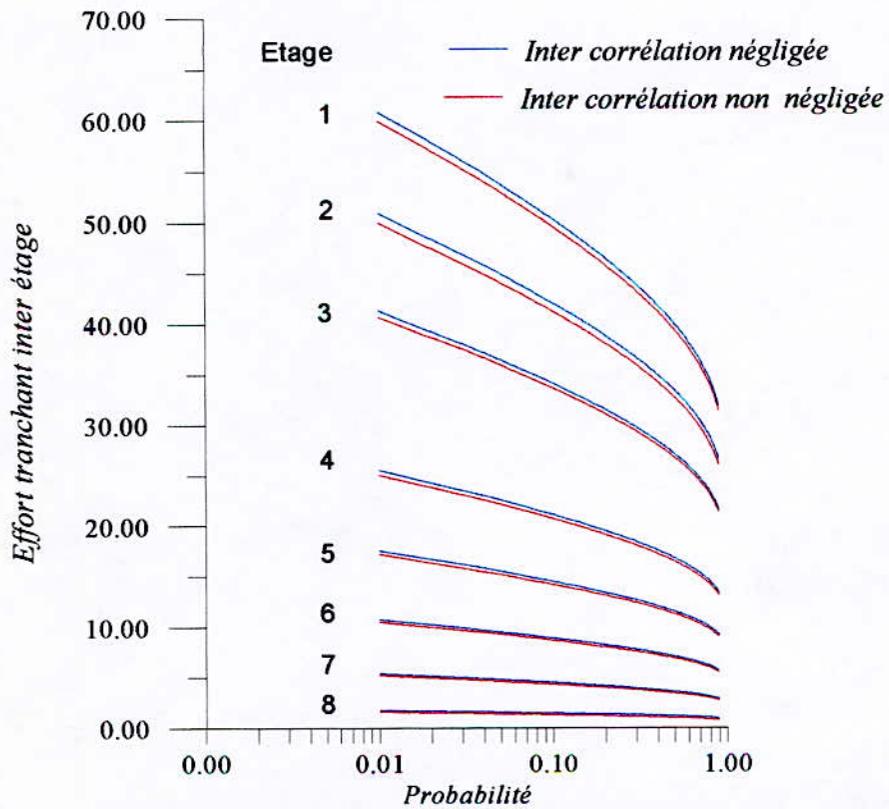


b)- Distribution du maximum de l'effort tranchant inter-étage

Fig. 8.3- Cas d'un bruit blanc : sol meuble

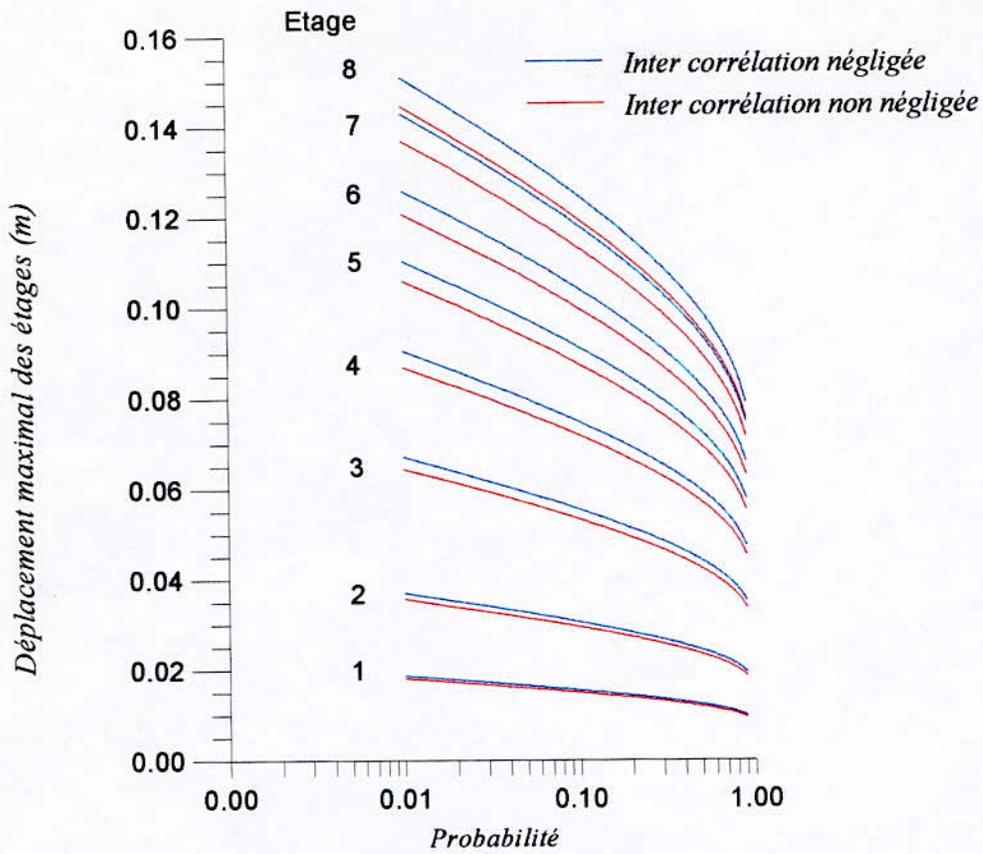


a)- Distribution des déplacements maximums des étages

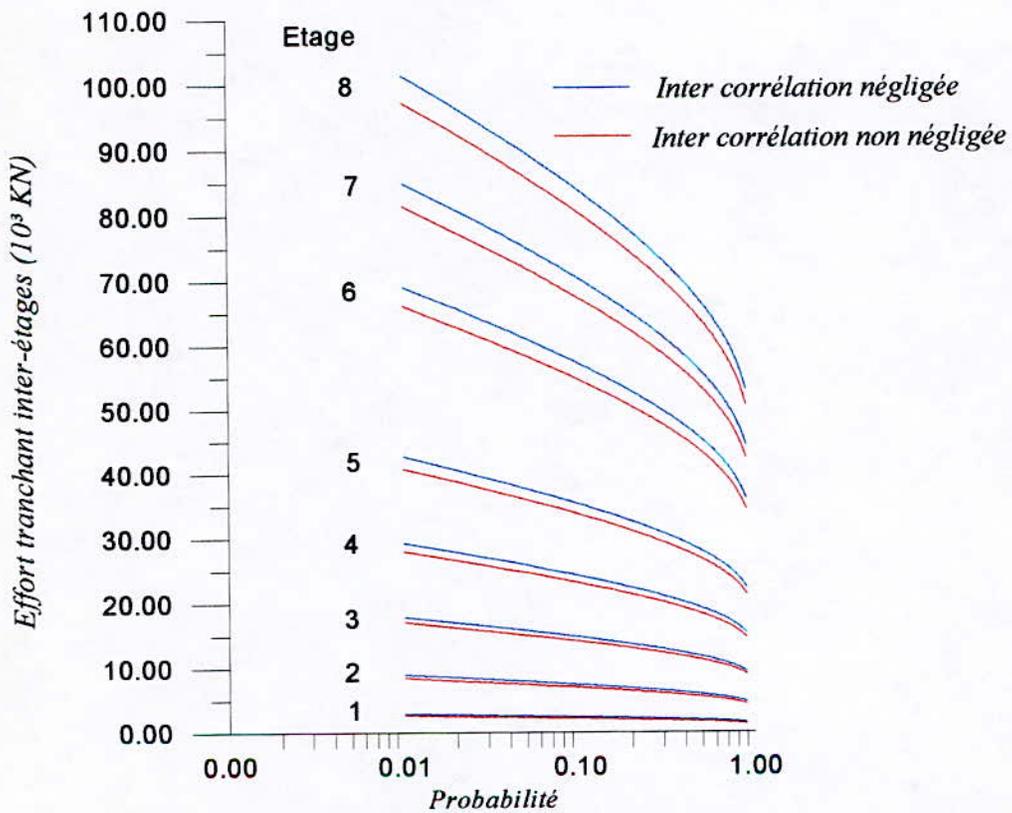


b)- Distribution du maximum de l'effort tranchant inter-étage

Fig. 8.4- Cas d'un bruit blanc filtré type KT : Sol ferme

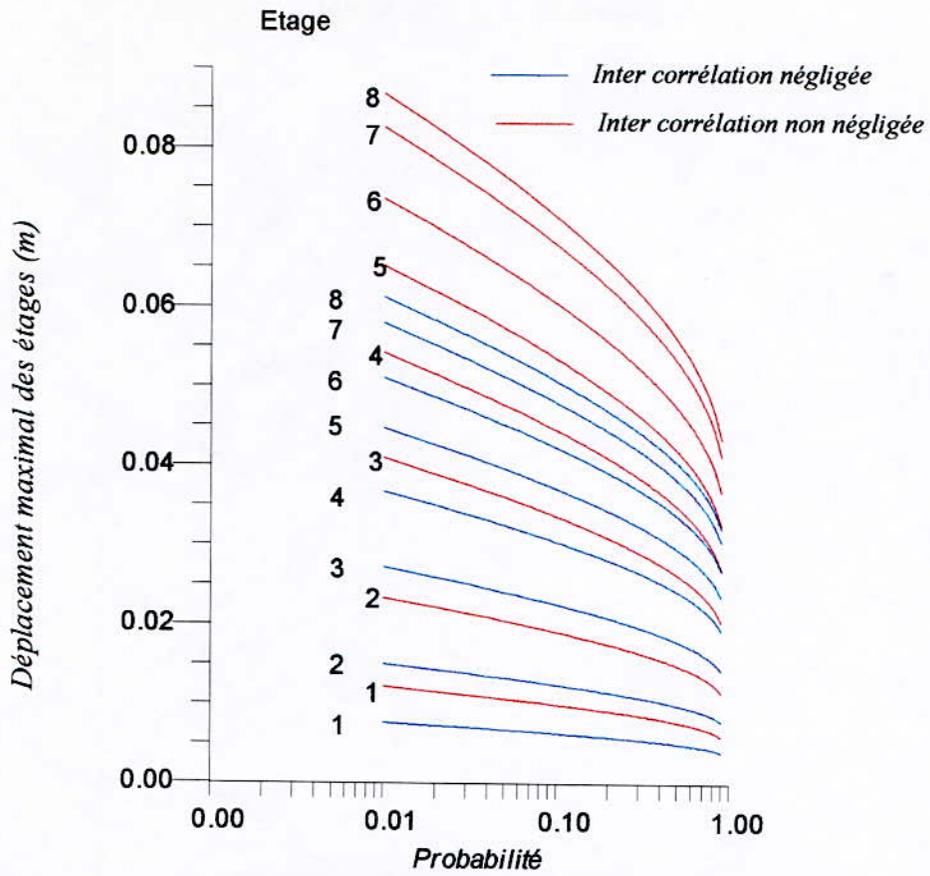


a)- Distribution des déplacements maximums des étages

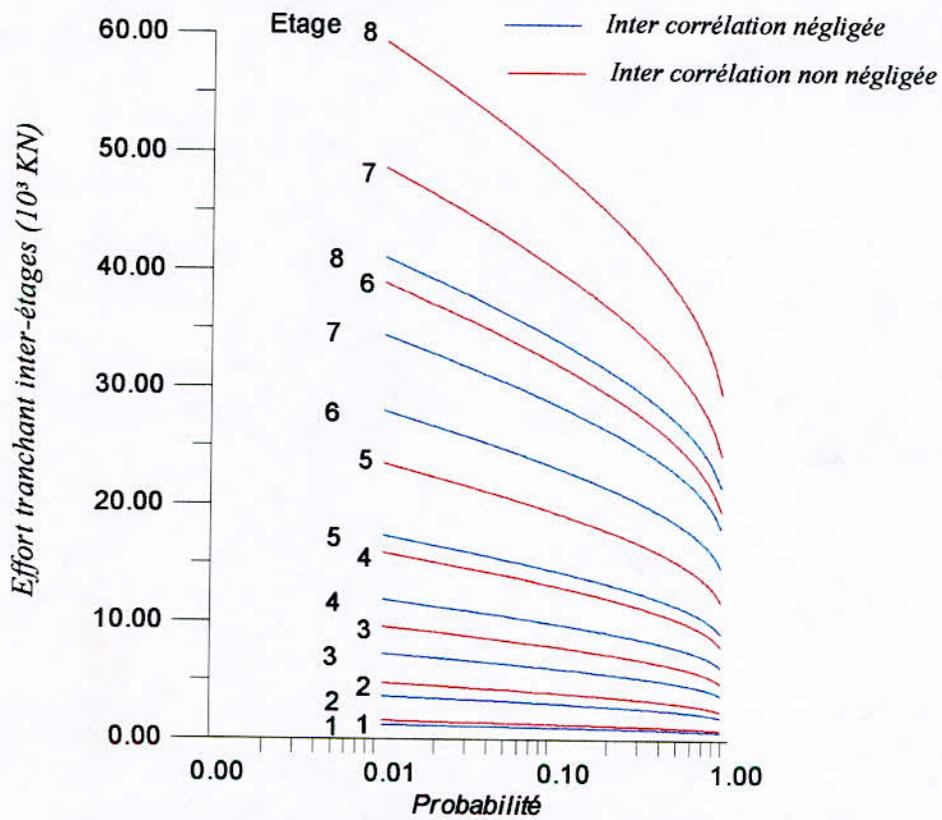


b)- Distribution du maximum de l'effort tranchant inter-étage

Fig. 8.5- Cas d'un bruit blanc filtré type KT : Sol moyen

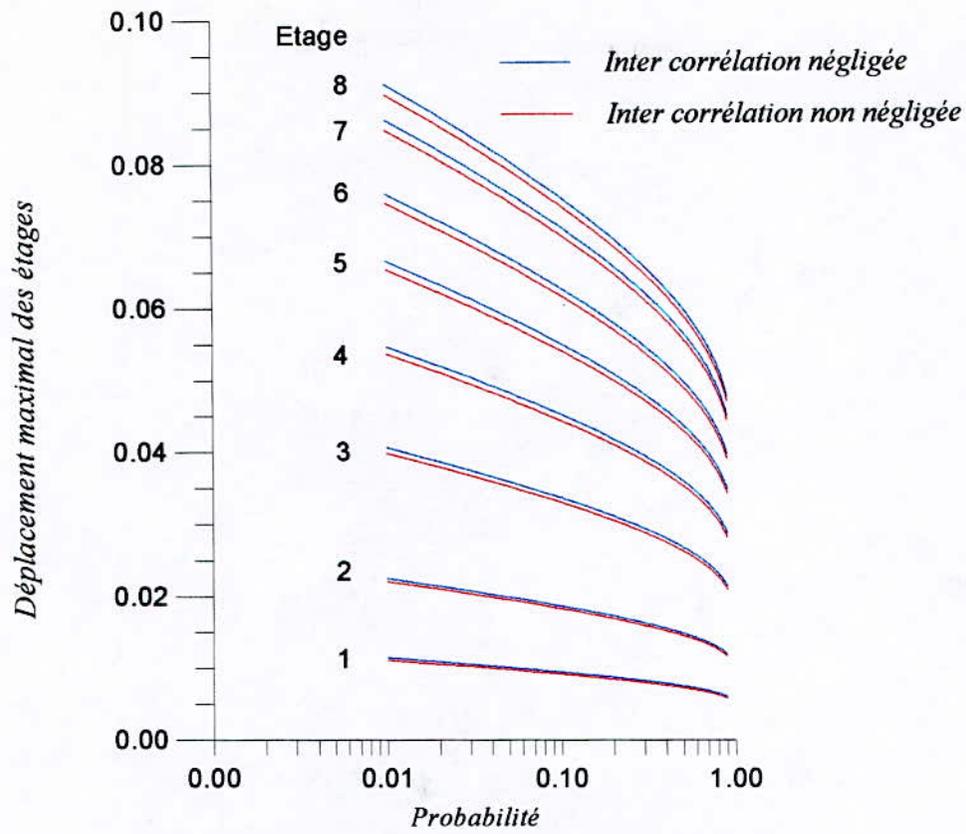


a)- Distribution des déplacements maximums des étages

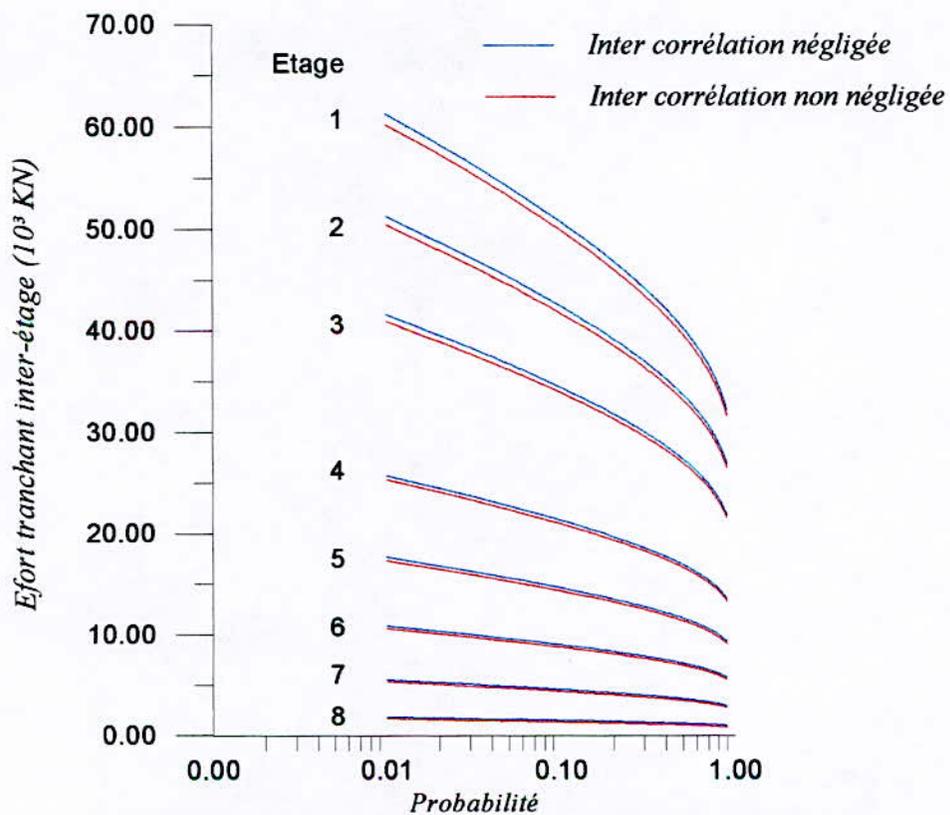


b)- Distribution du maximum de l'effort tranchant inter-étage

Fig. 8.6- Cas d'un bruit blanc filtré type KT : Sol meuble

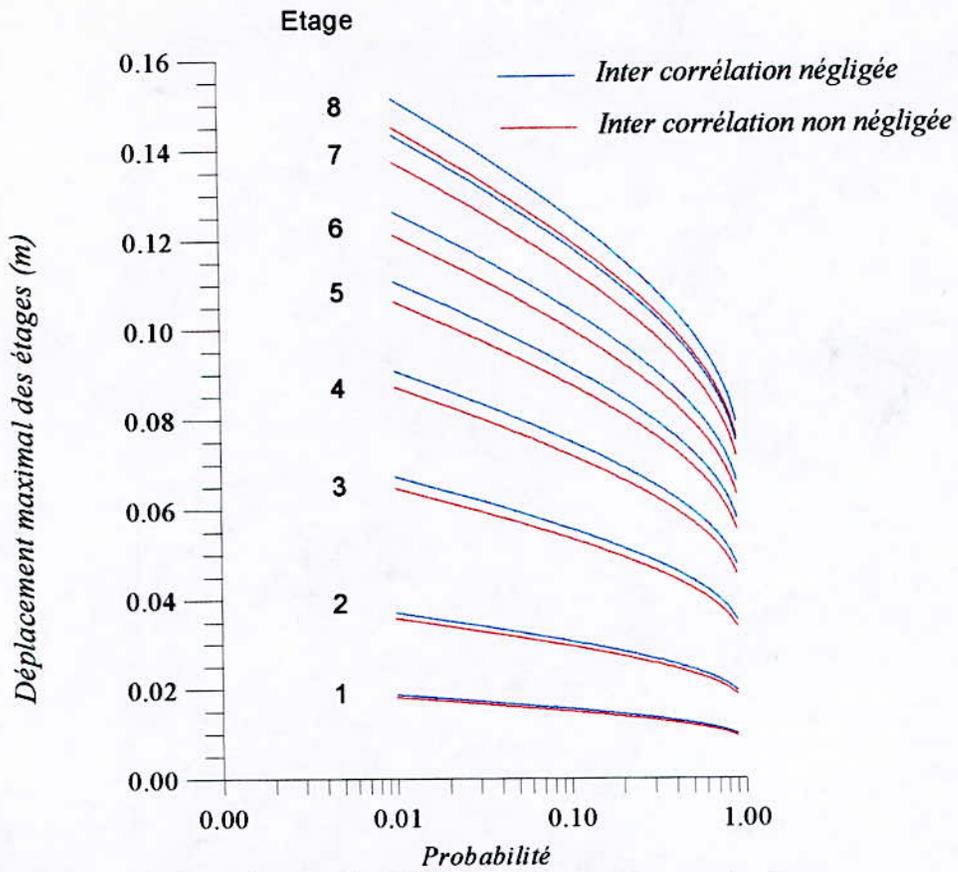


a)- Distribution des déplacements maximums des étages

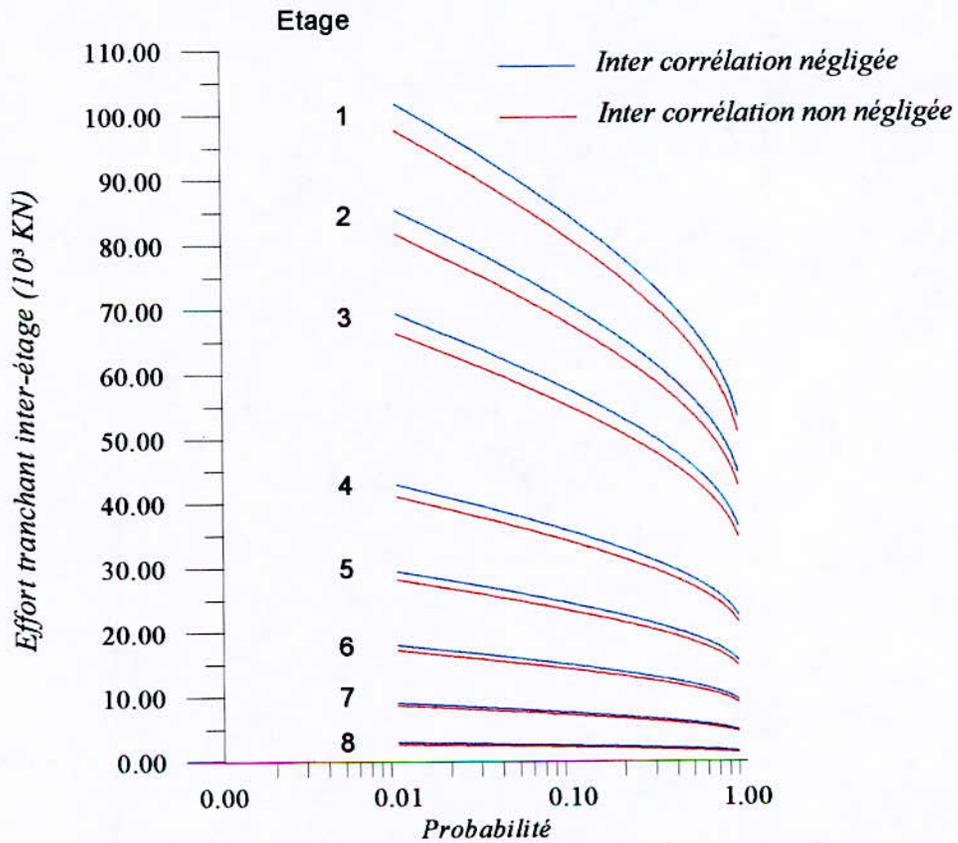


b)- Distribution du maximum de l'effort tranchant inter-étage

Fig. 8.7- Cas d'un bruit blanc filtré type CP : Sol ferme

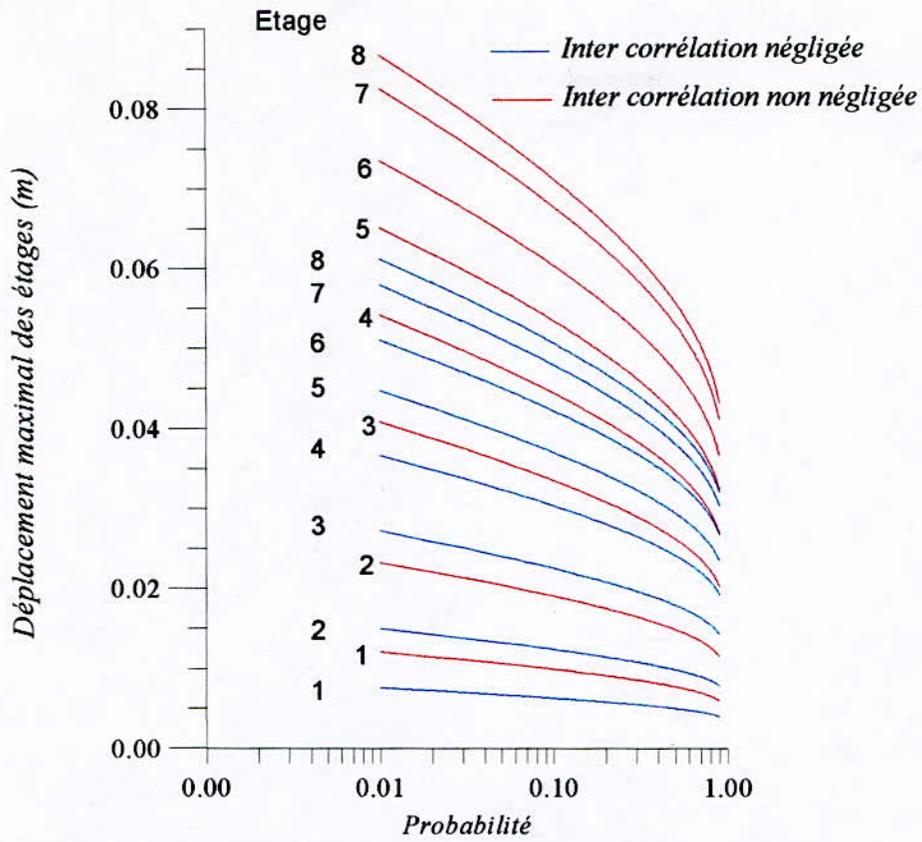


a)- Distribution des déplacements maximums des étages

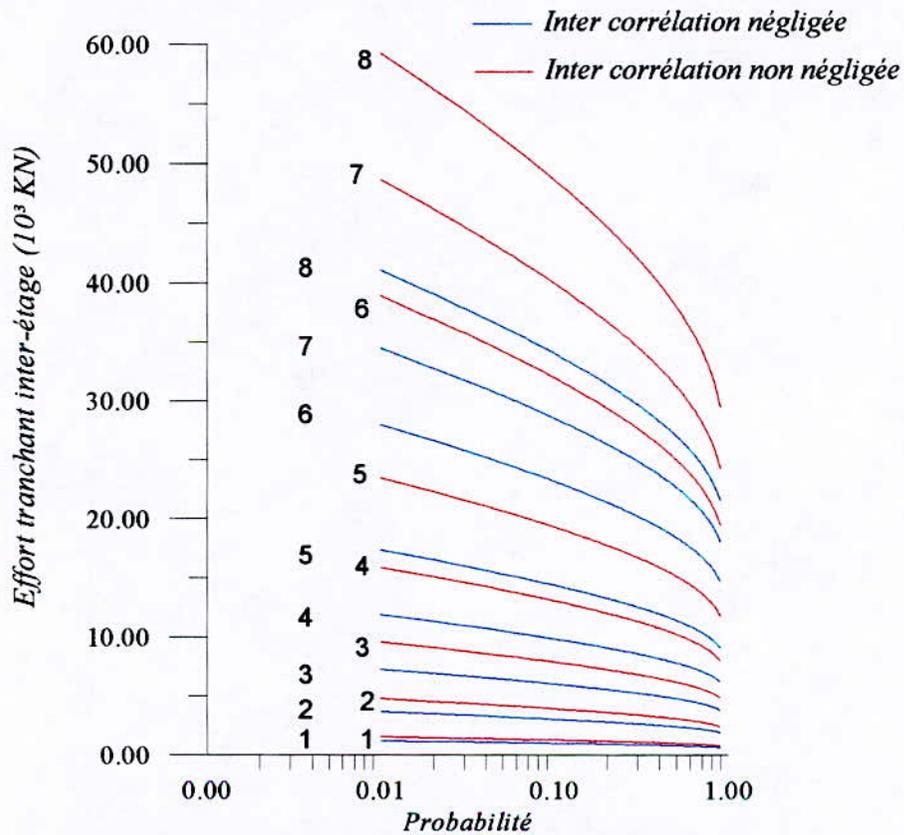


b)- Distribution du maximum de l'effort tranchant inter-étage

Fig. 8.8- Cas d'un bruit blanc filtré type CP : Sol moyen

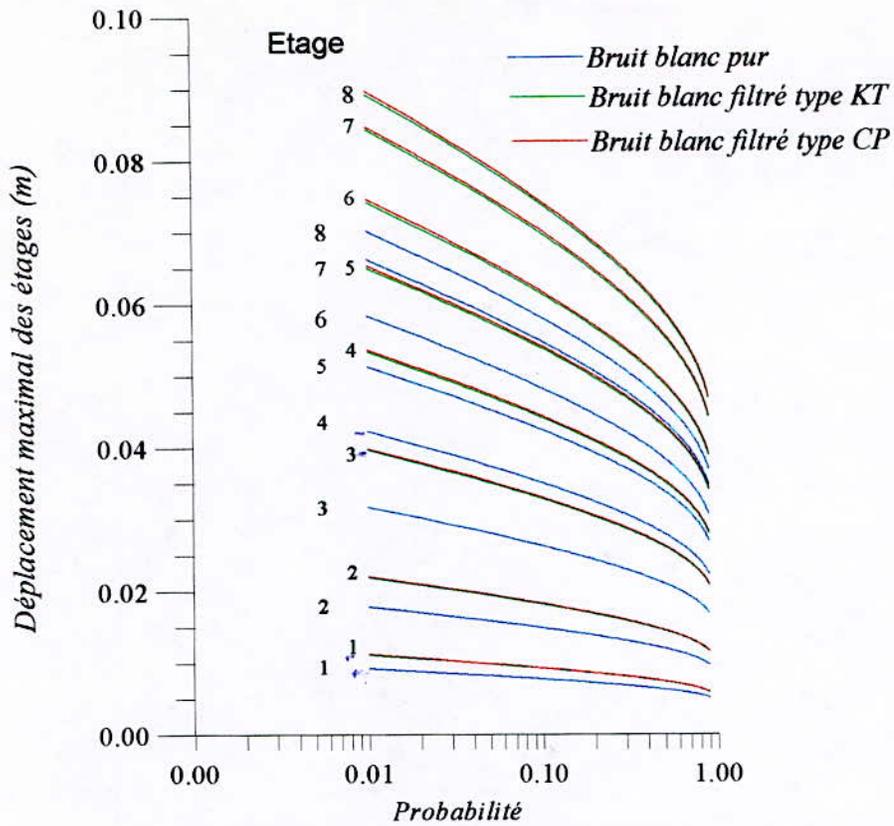


a)- Distribution des déplacements maximums des étages

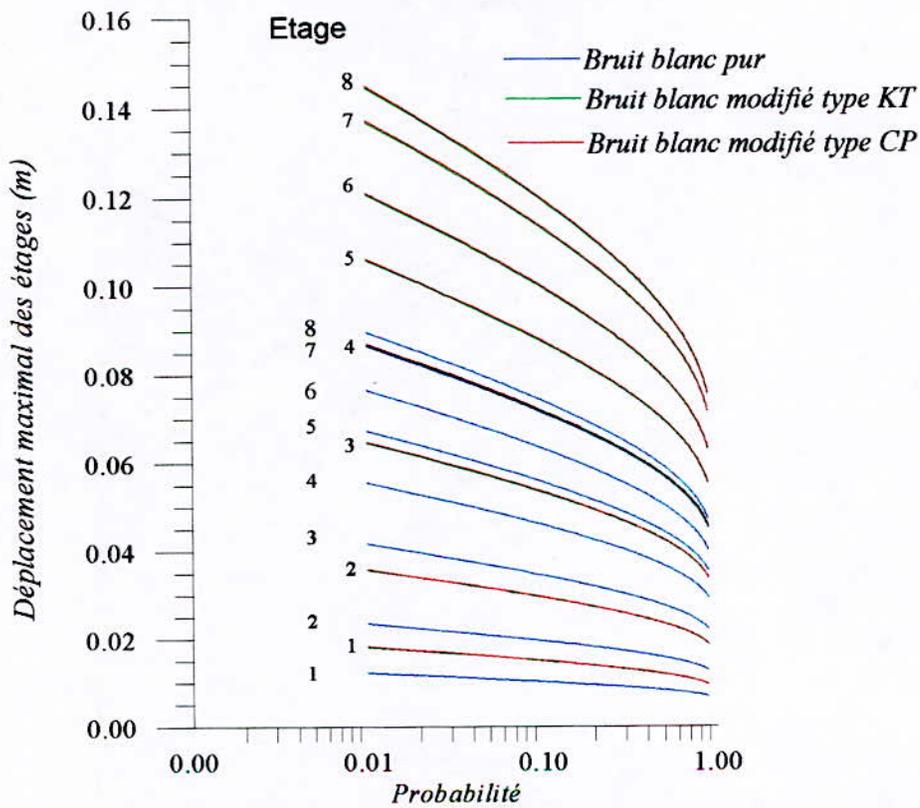


b)- Distribution du maximum de l'effort tranchant inter-étage

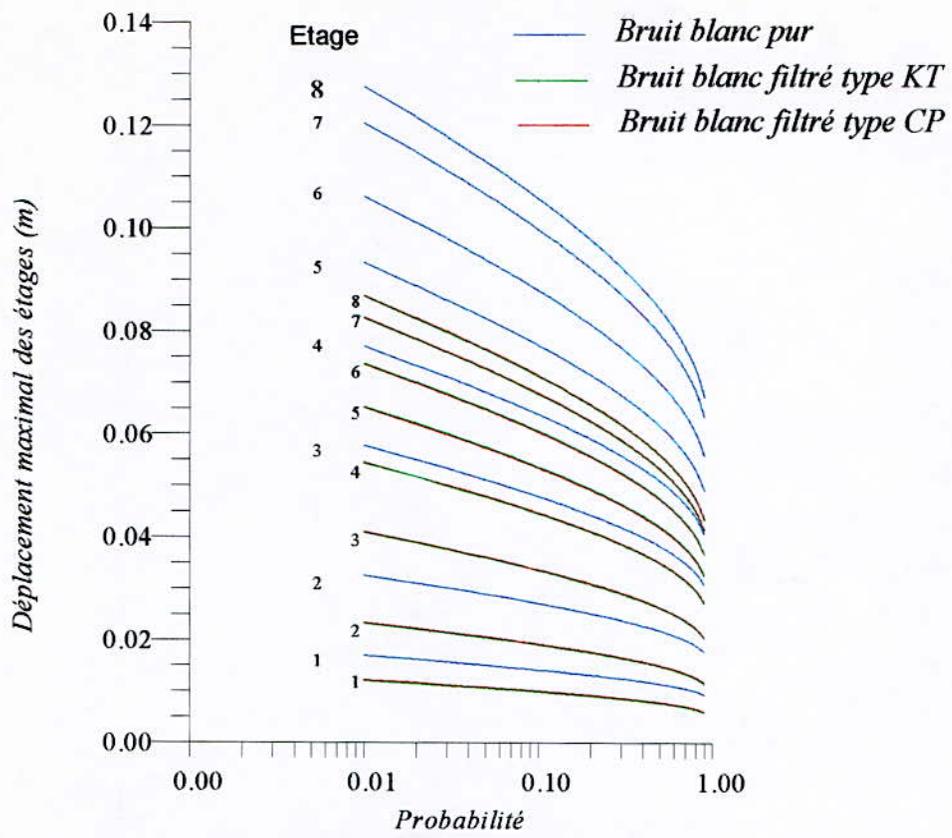
Fig. 8.9- Cas d'un bruit blanc filtré type CP : Sol meuble



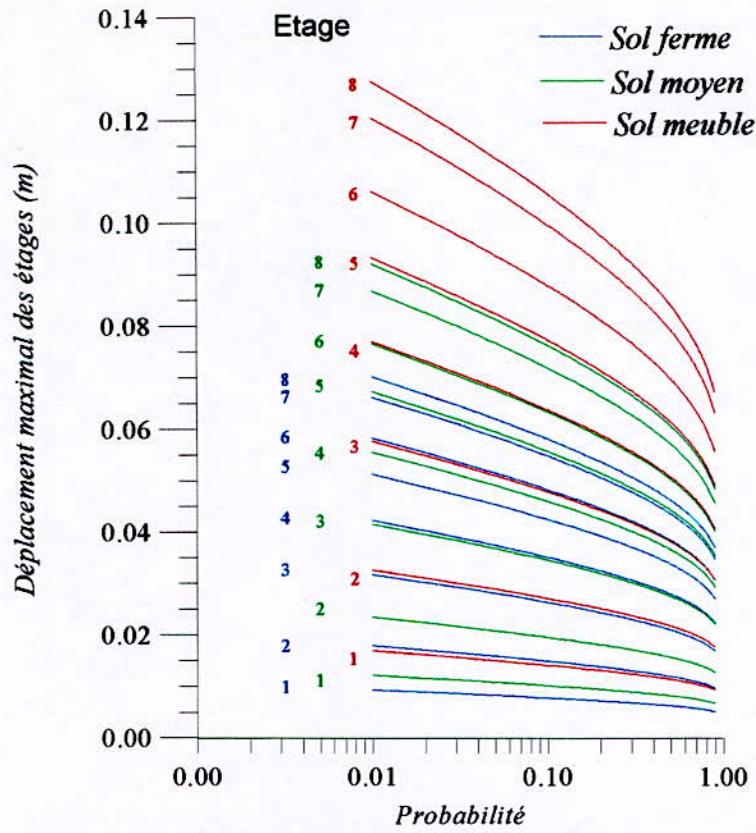
**Fig. 8.10- Comparaisons des 3 modèles de DSP
Cas d'un sol ferme**



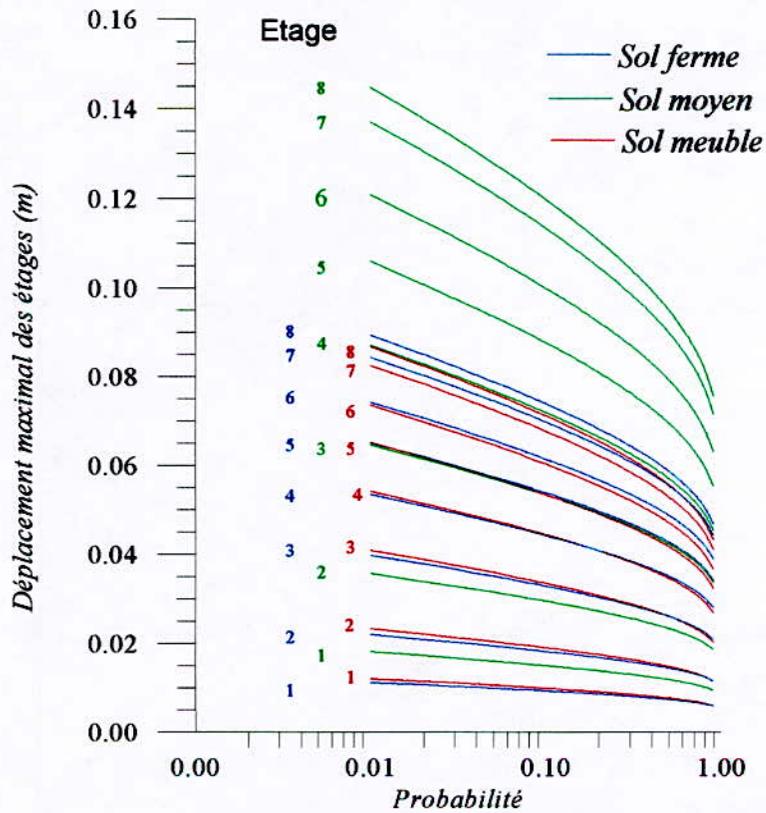
**Fig. 8.11- Comparaisons des 3 modèles de DSP
Cas d'un sol moyen**



**Fig. 8.12- Comparaison des 3 modèles de DSP
Cas d'un sol meuble**



**Fig. 8.13- Comparaisons de l'effet du sol
Cas d'un Bruit Blanc pur**



**Fig. 8.14- Comparaisons de l'effet du sol
Cas d'un Bruit Blanc filtré type KT**

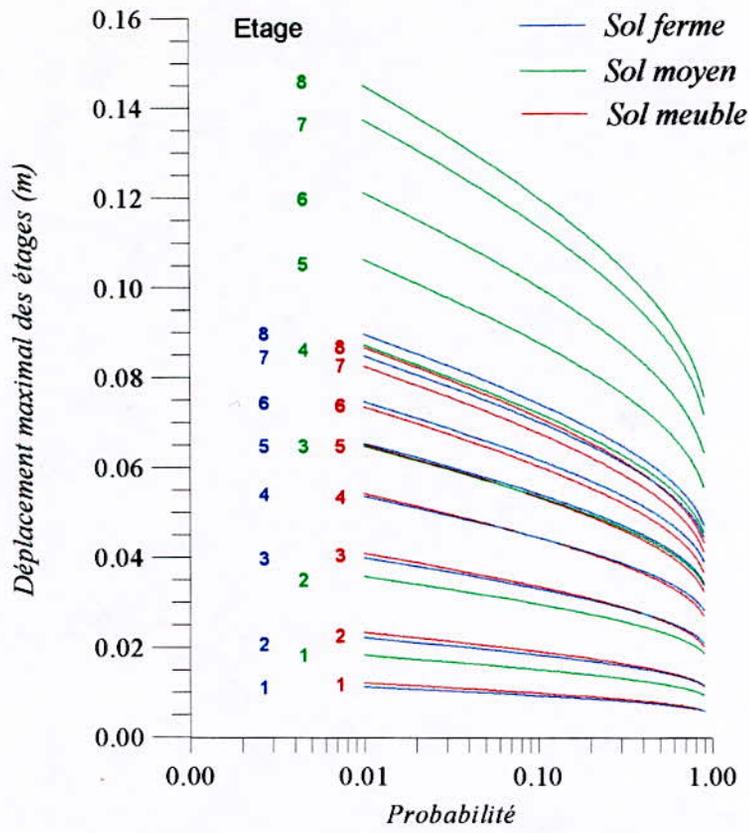


Fig. 8.15- Comparaison de l'effet du sol cas d'un bruit blanc filtré type CP

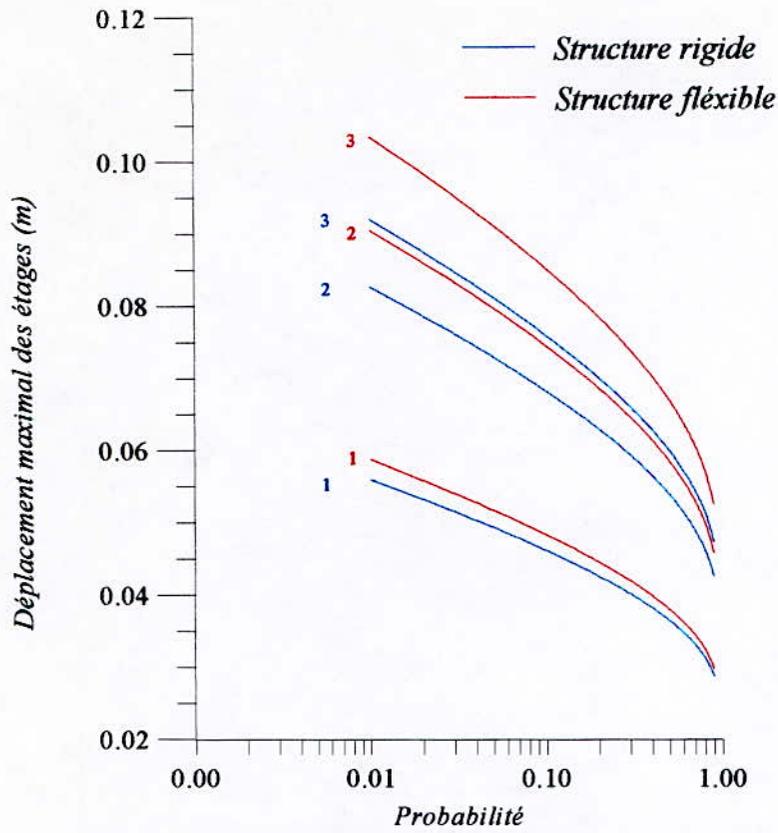


Fig. 8.16- Comparaison entre le réponse d'une structure rigide et d'une structure flexible : Cas d'un sol ferme

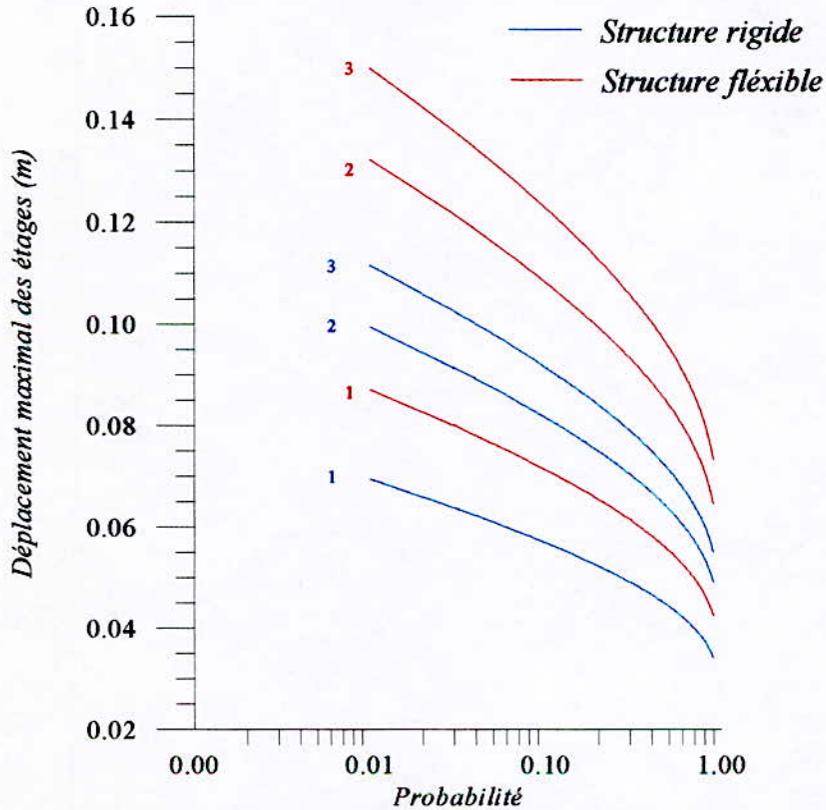
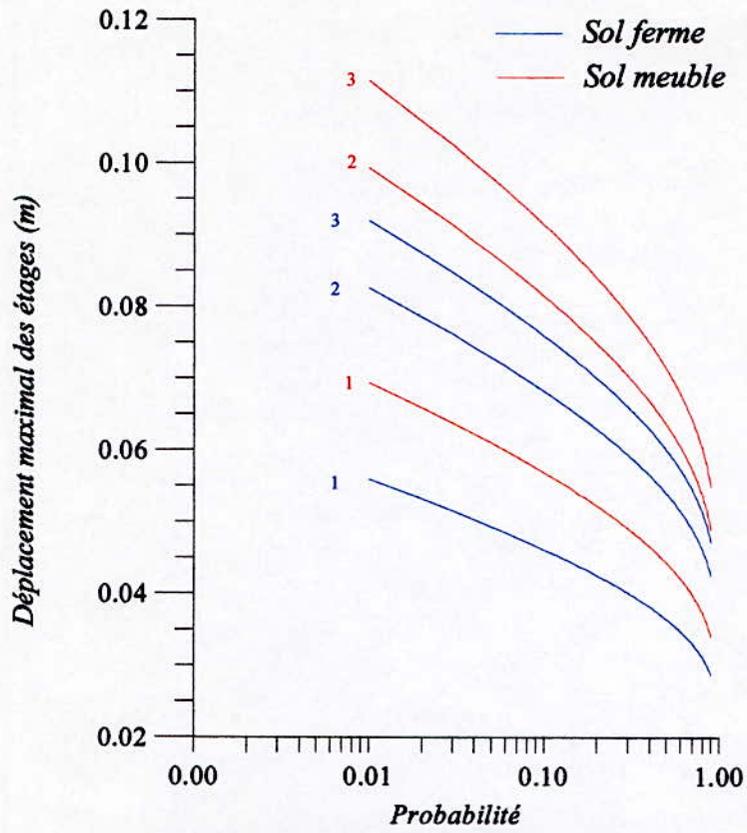
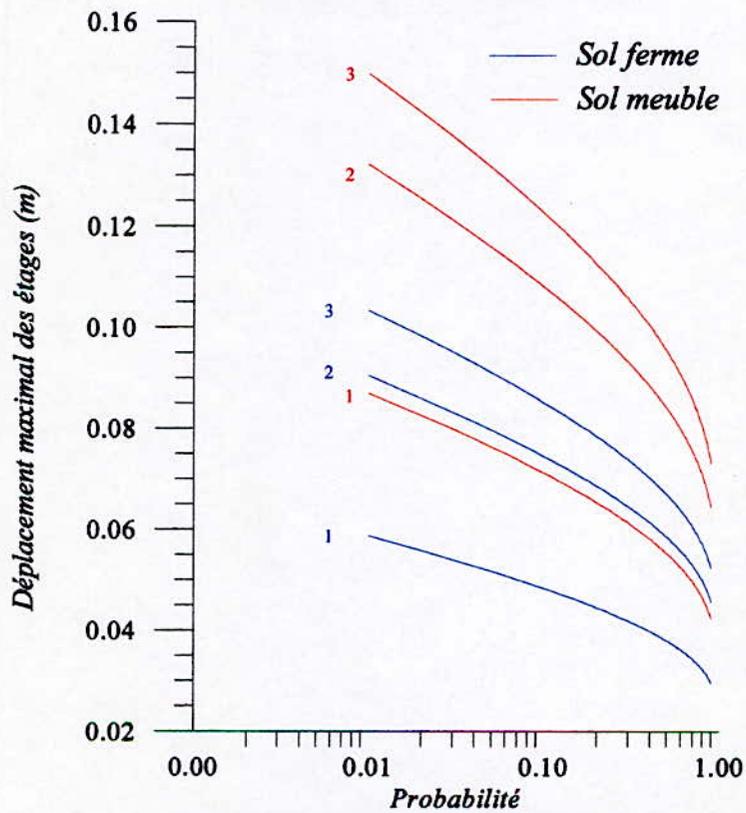


Fig. 8.17- Comparaison entre la réponse d'une structure rigide et d'une structure flexible : Cas d'un sol meuble



**Fig. 8.18- Comparaison de l'effet du sol
Cas d'une structure rigide**



**Fig. 8.19- Comparaison de l'effet du sol
cas d'une structure flexible**

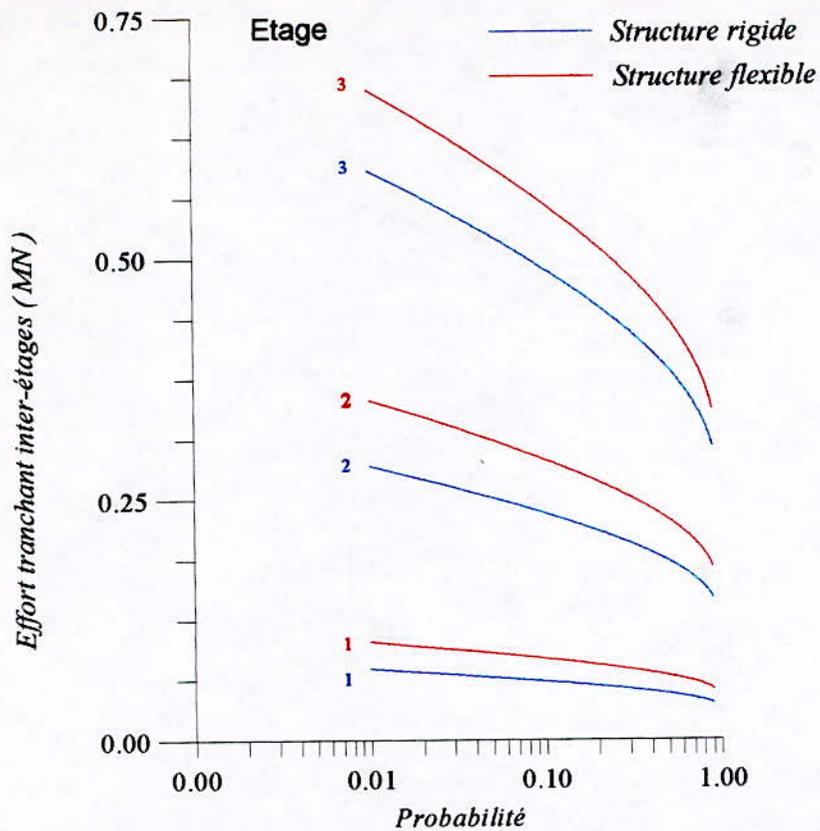


Fig. 8.20- Effort tranchant inter-étages pour une structure rigide et une structure flexible : Cas d'un sol ferme

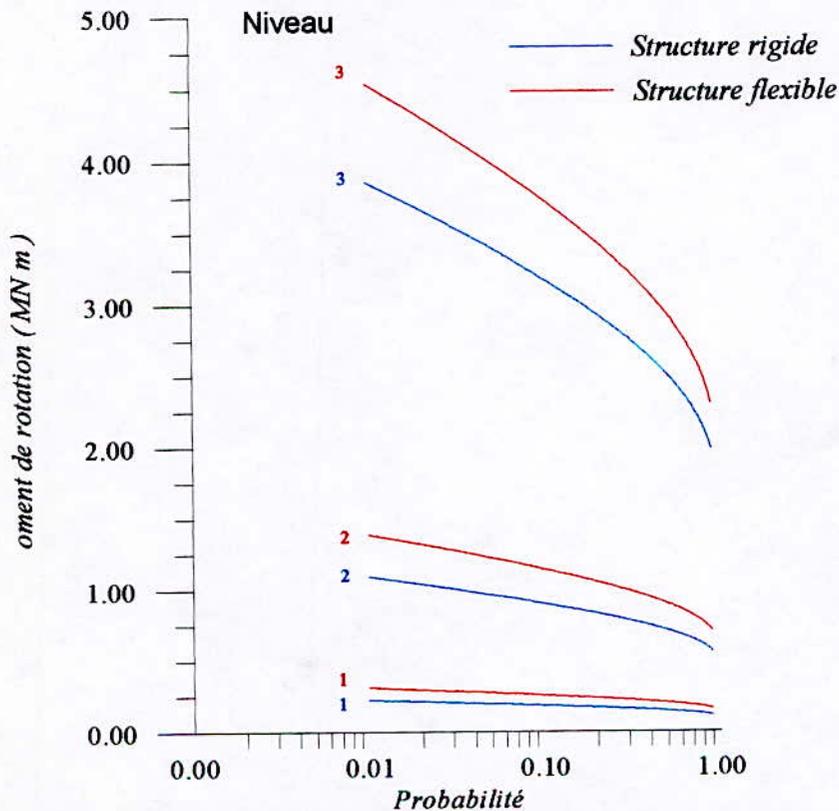


Fig. 8.21- Moment de rotation d'une structure rigide et d'une structure flexible : Cas d'un sol meuble

9.CONCLUSION

9.1. Conclusion.

Présentant le séisme en tant que chargement dynamique, reste l'une des dangereuses actions à considérer dans le cadre de la conception et du calcul moderne des structures.

A l'instar de tout phénomène naturel, le mouvement sismique est un phénomène aléatoire.

L'étude numérique présentée dans cette thèse a permis de déterminer la distribution des déplacements maximales en fonction de leurs probabilités.

Ainsi, les résultats obtenus, ont révélé l'importance du site considéré, du modèle de la fonction de densité spectrale de l'action sismique et sans doute l'effet de l'intercorrélation modale sur la réponse.

Notons que l'intercorrélation modale dépend aussi du site et du modèle de la fonction de densité spectrale de l'input sismique. En effet, pour un sol meuble et un sol moyen, la densité spectrale de puissance induit une forte corrélation modale, ce résultat n'est pas observé dans le cas d'un bruit blanc.

Dans notre étude, on a considéré que l'excitation sismique est uniforme, par contre pour les structures étendu la non uniformité de l'excitation sismique doit être prise en compte dans l'étude.

L'application de la dynamique des structures aux problèmes sismiques est relativement récente et continue d'évoluer rapidement en fonction des capacités de calcul et du progrès des connaissances sur la nature de l'action sismique et des techniques de résolution numérique.

ANNEXE

1. PROCESSUS DE GAUSS.

1.1. variable aléatoire Gaussienne.

Une variable aléatoire est *Gaussienne* ou *Normale* si sa densité de probabilité peut se mettre sous la forme :

$$P_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \quad -\infty < x < +\infty$$

m et σ sont respectivement la moyenne et l'écart type de la distribution.

$$m = E(x) = \int x P_x(x) dx$$

$$\sigma^2 = E[(x-m)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 P_x(x) dx$$

ces deux constantes caractérisent complètement la distribution Gaussienne.

1.2. Variables aléatoires conjointement Gaussiennes :

Deux variables aléatoires X et Y ont une distribution Gaussienne conjointe si leur densité peut s'écrire

$$P_x(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y(1-\rho_{xy}^2)} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho_{xy} \frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\}$$

$$m_x = E(X)$$

$$m_y = E(Y)$$

$$\sigma_x^2 = E[(X-m_x)^2]$$

$$\sigma_y^2 = E[(Y-m_y)^2]$$

$$E[(X-m_x)(Y-m_y)] = \sigma_x\sigma_y\rho_{xy}$$

Ces cinq grandeurs sont les seules impliquées dans la densité de probabilité, elles la déterminent par conséquent complètement.

2. PROCESSUS ALEATOIRE GAUSSIEN :

Un processus stochastique $X(t)$ est dit Gaussien si les variables aléatoires $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ sont conjointement Gaussiennes pour toutes les valeurs t_1, t_2, \dots, t_n .

3. THEOREME DE LA LIMITE CENTRALE :

Ce théorème établit que la distribution statistique de la somme de variables aléatoires, possédant la même loi de probabilité, tend asymptotiquement vers une distribution Gaussienne.

Le théorème de la limite centrale joue un rôle capital en théorie des fonctions aléatoires. Ceci est dû au fait que de nombreux phénomènes aléatoires résultent de la somme d'un très grand nombre de contributions individuelles de distribution parfois inconnue. Il est alors possible d'assimiler la distribution résultante à une loi normale si les contributions peuvent être considérées comme indépendantes.

De plus les processus Gaussiens jouissent de propriétés particulières permettant de résoudre certains problèmes insolubles ou difficilement solubles.

4. PROCESSUS DE POISSON :

Soit un système de points aléatoires représentant sur l'axe des temps l'occurrence d'un phénomène aléatoire (appel téléphonique, arrivée d'un client à une station service, accès d'un utilisateur à un ordinateur,...). Si le système de points est dépourvu de corrélation, c'est-à-dire si les apparitions des événements du phénomène aléatoires ne possèdent aucune relation statistique, le système est dit Poissonien.

On est avant tout intéressé par le nombre $N(t)$ de points dans l'intervalle $[0, t]$. Un tel processus est appelé processus de comptage et est en général caractérisé par ses fonctions de probabilités :

$$\begin{aligned} P_N(n, t) &= P[N(t) = n] \\ P_N(n_1, t_1, n_2, t_2) &= P[N(t_1) = n_1 \text{ et } N(t_2) = n_2] \\ &\vdots \end{aligned}$$

La fonction de probabilité $P_n(t)$ est donnée par :

$$P_N(n, t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$$

Organigramme de calcul

Lecture des données
- Nombre de noeuds, de degré de liberté par noeud, d'éléments, de noeuds par éléments.
- Nombre d'étages, nombre de poteaux par étages.
- Dimensions des éléments.
- Coordonnées des noeuds.
- Les connectivités des éléments.
- Masses de chaque étage.



Calcul des matrices [k] et [m]
- Choix des degrés de liberté.
- Calcul de la matrice de rigidité selon les degrés de liberté choisis.
- Etablissement de la matrice masse.



Calcul des valeurs propre ω_i et des vecteurs propre $\{\phi\}_i$
- Transformation de la matrice dynamique en matrice symétrique $[H] = [m]^{-1/2} [k][m]^{-1/2}$.
- Calcul des valeurs propres ω_i^2 et des vecteurs propre $\{y\}_i$ par la méthode de JACOBI.
- Transformation des vecteurs propre par $\{\phi\}_i = [m]^{-1/2} \{y\}_i$.



Calcul des facteurs de participations modales
- Normalisation des vecteurs propres par rapport à la masse.
- Calcul de $L_n = \phi_n^t [m] \cdot \{1\} = \gamma_n$



Calcul des variances du processus et du processus dérivé.
- Calcul des variances du processus out put pour chaque modèle de la DSP et pour trois types de sol pour le cas ou la couplage modale est négligé et pour le cas contraire.
- Calcul des variances du processus out put dérivé pour chaque modèle de DSP et pour trois types de sol pour le cas contraire.



A

A



Calcul des variances du processus et du processus dérivé.

- Calcul des variances du processus out put pour chaque modèle de la DSP et pour trois types de sol pour le cas ou la couplage modale est négligé et pour le cas contraire.
- Calcul des variances du processus out put dérivé pour chaque modèle de DSP et pour trois types de sol pour le cas contraire.



Calcul de la réponse.

- Calcul des déplacements maximal de chaque étage en fonction de la probabilité de dépassement.
- Calcul des effort tranchant inter-étage en fonction de la probabilité P.



Ecriture des résultats

- Envoi des résultats dans un fichier résultat..
- Envoi les résultats pour la représentation graphique dans un fichier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. TILIOUINE

"Cours de dynamique des structures"

Ecole Nationale Polytechnique. Dept. Génie Civil 1996.

[2] BERRAH M.K.

"Cours de vibration aléatoire"

Ecole Nationale Polytechnique. Dept. Génie Civil 1996.

[3] DEMIDEM M.

"Cours de dynamique des structures"

Ecole Nationale Polytechnique. Dept. Génie Civil 1996.

[4] DE COULOMB

"Théorie et traitement des signaux"

[5] DAVIDOVICI

"Génie parasismique"

[6] PREUMONT E

"Vibration aléatoire et analyse spectrale"

[7] SVETLIKIJ

"Vibration aléatoire des systèmes mécaniques"

[8] CHERFA - C

Thèse Magister. ENP 1995.