

13/96

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE ELECTRIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET:

**Présentation de la Méthode des Eléments
Frontières Appliquée aux
Problèmes Electrostatiques**

Proposé par:
A. BOUBAKEUR

Etudié par:
S. DILMI

Dirigé par:
A. BOUBAKEUR

PROMOTION: 1996

REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur A. BOUBAKEUR d'avoir eu l'amabilité de me consacrer son attention et de m'avoir soutenu tout au long de la période du projet.

Je remercie aussi mes parents et mes frères pour leur soutien continu ainsi que mon oncle pour la documentation qu'il m'a apporté.

Mes remerciements vont également à Messieurs A. MIKHALDI, Y. BELKACEMI, M.TEGUAR, A. BOUDIDA pour leur disponibilité.

Mes remerciements s'adressent également à tous les gens et amis qui m'ont aidé à bien mener ce travail et spécialement MAHMOUD, HALIM, TOUFIK, HASSEN et DJAOUAD.

Enfin, Je suis reconnaissant à tout le personnel de l'école: Service bibliographique, service informatique et à tous ce qui ont participé de près ou de loin à la réussite de ce travail.

ملخص

عدة طرق عددية لتحديد الجهد و الحقل الكهربائي حلت و درست لحل المسائل الكهروستاتيكية. يتمثل هذا المشروع في دراسة طريقة العناصر الحدودية. تم إنشاء برنامجين ذا بعدين على الحاسوب، الأول يتعلق بالأجسام الموحدة الخواص و الثاني بالأجسام الغير موحدة الخواص. تم كذلك تطبيق الطريقة المدروسة على عدة أمثلة (سطح-سطح و أسطوانة-أسطوانة) و النتائج المحصل عليها كانت جيدة.

RESUME

Plusieurs méthodes numériques ont été développées pour la détermination du potentiel et du champ électrique dans les problèmes électrostatiques. La présente étude est consacrée à la présentation de la méthode des éléments frontières. Deux codes de calcul ont été développés en deux dimensions, le premier pour les problèmes homogènes, le deuxième pour les problèmes non homogènes. Des tests de validation ont été faits pour les cas des systèmes plan-plan et cylindre-cylindre concentriques et excentriques. Les résultats obtenus sont très satisfaisants.

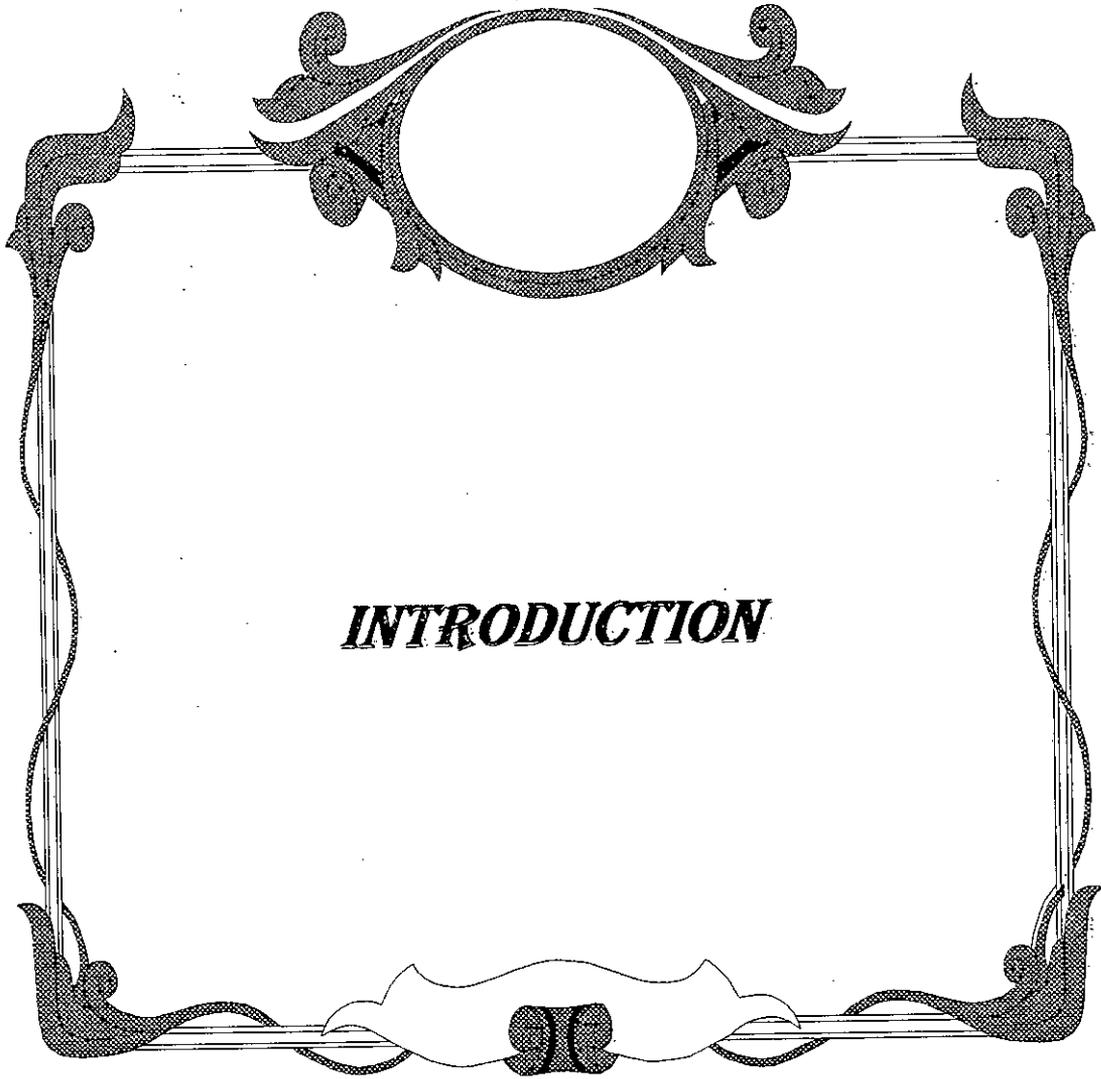
ABSTRACT

Many numerical methods for the determination of potentials and electric fields in electrostatic problems was developed. This work presents the boundary element method (BEM). Two codes were written for two dimensional problems, the first concern the homogeneous bodies and the later the inhomogeneous ones. The method was tested with several examples (plan-plan and cylinder-cylinder systems). The results were very fulfilling.

INTRODUCTION	1
1. GÉNÉRALITÉS ET CLASSIFICATION DES MÉTHODES NUMÉRIQUES	5
1.1 Introduction	5
1.2 Equations de Maxwell	5
1.3 Problèmes électriques	7
1.3.1 Electrocinétique	7
1.3.1.1 Hypothèses et équations	7
1.3.1.2 Conditions aux interfaces	8
1.3.2 Electrostatique	8
1.3.2.1 Hypothèses et équations	8
1.3.2.2 Conditions aux interfaces	9
1.4 Classifications des méthodes numériques de calcul de champ	9
1.4.1 Introduction	9
1.4.2 Méthode des résidus pondérés	10
1.4.3 Classification	13
1.5 Conclusion	14
2. FORMULATION ET TRAITEMENT NUMÉRIQUE DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FRONTIÈRES	16
2.1 Introduction	16
2.2 Rappels de quelques notions	17
2.2.1 Formule de Green	17
2.2.2 Solutions fondamentales	17
2.3 Formulation directe de la méthode des éléments frontières	18
2.3.1 Formulation par le théorème de Green	18
2.3.2 Formulation par la méthode des résidus pondérés	19
2.3.3 Formule générale de l'équation intégrale aux frontières	20
2.4 Traitement Numérique de l'équation Intégrale	23
2.4.1 Introduction	23
2.4.2 Discrétisation de l'équation intégrale	24
2.4.3 Evaluations des intégrales	28
2.4.3.1 Calcul analytique des intégrales	29
2.4.3.2 Calcul Numérique des intégrales	31
2.5 Etude des problèmes tridimensionnels	32
2.5.1 Discrétisation	32

2.5.2 Calcul des intégrales	34
2.6 Conclusion	36.
3. ELÉMENTS D'ORDRE SUPÉRIEUR	39
3.1 Introduction	39
3.2 Eléments d'ordres supérieurs dans le cas bidimensionnel	39.
3.2.1 Eléments linéaires	39
3.2.1.1 Discrétisation de l'équation intégrale	39
3.2.1.2 Evaluation des intégrales h_{im}^k et g_{im}^k	44
3.2.2 Eléments quadratiques	48
3.2.3 Eléments cubiques	51
3.3 Eléments d'ordre supérieur dans le cas tridimensionnel	52.
3.3.1 Préliminaire	52
3.3.2 Classification des éléments tridimensionnels	55
3.4 Conclusion	58.
4. PROBLÈMES DIVERS	60
4.1 Introduction	60
4.2 Charges intérieures (Equation de Poisson)	60
4.3 Régions infinies	63
4.4 Milieux non homogènes	66
4.5 Formulation axisymétrique	71
4.6 Traitement des problèmes de coins	73
5. PROGRAMMATION ET APPLICATIONS	79
5.1 Programmation	79
5.1.1 Introduction	79
5.1.2 Description générale des programmes de calcul de champ	79
5.1.2.1 Fonctions du module d'entrée	80
5.1.2.2 Fonctions du module de calcul	80
5.1.2.3 Fonctions du module de sortie	80
5.1.2.4 Organigramme	81
5.1.3 Description du programme Bem2D	82
5.1.3.1 Description générale	82
5.1.3.2 Algorithmes	82
5.1.3.3 Description des parties essentielles du programme Bem2D	83
5.1.3.3.1 Introduction des données	83
5.1.3.3.2 Discrétisation de la frontière	85
5.1.3.3.3 Calcul sur la frontière	86
5.1.3.3.4 Calcul du potentiel et du champ	86
5.1.3.3.5 Dessin des lignes équipotentielles	87
5.1.3.4 Traitement des problèmes rencontrés dans le programme	87
5.1.3.4.1 Problème des coins	87
5.1.3.4.2 Calcul du potentiel et du champ près de la frontière	87

5.1.3.4.3 Traçage des équipotentiellles	89
5.1.4 Description du programme MRBem2D (Multi-RegionBem2D)	89
5.2 Applications	91
5.2.1 Introduction	91
5.2.2 Partie 1	91
5.2.2.1 Exemple 1: Système plan - plan idéal.	91
5.2.2.2 Exemple 2: Système Cylindre - Cylindre concentrique	99
5.2.2.3 Exemple 3: Système Cylindre - Cylindre excentrique.	102
5.2.3 Partie 2:	106
5.2.3.1 Exemple 4: Système plan - plan stratifié	106
5.2.3.2 Exemple 5: Système cylindre - cylindre	108
5.3 Conclusion	110
 CONCLUSION	 112
 ANNEXE A	 114
1. Intégration par partie	114
2. Formule des Résidus pondérés	114
 ANNEXE B	 119
1. Quadrature de Gauss standard	119
1.1 Quadrature unidimensionnelle	119
1.2 Quadrature bi- et tridimensionnelle pour les rectangles et les éléments hexaédriques	119
1.3 Intégration sur des triangles	120
2. Calcul des intégrales singulières	121
2.1 Quadrature de Gauss logarithmique unidimensionnelle	121
2.2 Intégration sur des triangles et des carrés présentant un singularité en $1/r$	122
 BIBLIOGRAPHIE	 126



INTRODUCTION

Introduction

Les machines électriques, les appareils de coupure, les appareillages à haute tension sont tous, durant leur fonctionnement, soumis à l'action de champs électromagnétiques. Dans toute machine électrique, l'enroulement, ou l'aimant d'excitation, produit un champ magnétique. Autour des isolateurs et des bornes à haute tension des transformateurs, règne un champ électrostatique important. Dans les conducteurs, le champ électrocinétique assure la circulation du courant électrique.

La connaissance du champ permet d'avoir accès au calcul des performances et du fonctionnement des appareils électriques. En effet, dans une machine électrique, l'évaluation du champ en chaque point de l'espace permet d'en déduire les flux, et donc les forces électromotrices ou les couples. Autour d'un isolateur, la valeur du champ permet d'apprécier la possibilité de tenue diélectrique dans diverses situations et d'estimer la durée de vie du matériau considéré.

Donc, dans de nombreuses étapes de conception d'un appareil électrique, l'évaluation des champs électriques et magnétiques apparaît comme un travail nécessaire.

Pour cela, plusieurs méthodes numériques ont été développées, vu que les solutions analytiques ne pouvaient être obtenues que pour des configurations simples. Ce développement a connu ces dernières années un essor remarquable. La méthode des éléments frontières BEM (Boundary Element Method), que nous présentons dans ce projet, est parmi les outils les plus puissants pour le calcul de champ.

L'avantage le plus important, que possède cette méthode sur les autres méthodes numériques telles que la méthode des différences finies MDF et la méthode des éléments finis MEF, est qu'elle nécessite seulement une discrétisation de la frontière plutôt que le domaine tout entier. De plus, la préparation des données est largement réduite pour la BEM. Le maillage des éléments frontières, et spécialement dans le cas tridimensionnel, peut

être facilement lié aux systèmes de CAO (Conception Assistée par Ordinateur) vu que ces derniers caractérisent les objets par leurs frontières. Cet avantage s'avère particulièrement important lors de la conception des appareils, étant donné que le processus engendre généralement des séries de modifications qui sont difficiles à réaliser par les autres méthodes. Le maillage peut être facilement généré et les modifications dans la conception ne nécessitent pas un maillage complet.

Pour ces raisons très convaincantes, ce document, divisé en 4 chapitres, contient une description détaillée de la méthode des éléments frontières.

Dans le premier chapitre, nous introduisons les équations générales de l'électromagnétisme et les modèles électrocinétiques et électrostatiques tirés de ces équations. On y trouve aussi une classification des différentes méthodes numériques.

Le deuxième chapitre contient les fondements de base de la méthode ainsi que son traitement numérique.

Le troisième chapitre présente les éléments d'ordre supérieur permettant de réduire considérablement les erreurs dues aux différentes approximations.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons d'autres aspects de la méthode qu'on peut rencontrer dans diverses situations (sources internes, milieux non homogènes, etc.).

Le cinquième chapitre comprend, dans sa première partie, une description des programmes de calcul de champ et en particulier ceux développés dans le cadre de ce projet. Dans la seconde, nous confirmons, par des exemples, l'efficacité ainsi que la précision des résultats obtenus par la méthode utilisée.

Enfin, nous terminons cette présentation par une conclusion générale résumant les différents avantages et inconvénients de la méthode.



Chapitre 1

***GÉNÉRALITÉS ET
CLASSIFICATION DES
MÉTHODES NUMÉRIQUES***

1. Généralités et classification des méthodes numériques

1.1 Introduction:

Dans la première partie de ce chapitre, nous allons présenter les équations différentielles générales utilisées pour décrire les problèmes électromagnétiques. Une simplification de ces équations sera faite pour les problèmes d'électrocinétique et d'électrostatique.

Dans la deuxième partie, nous allons effectuer une classification des méthodes numériques de calcul de champ, tout en indiquant une nouvelle méthode qui permet de les regrouper.

1.2 Equations de Maxwell :

Les équations générales qui décrivent les problèmes électromagnétiques sont celles de Maxwell. Elles constituent quatre équations aux dérivées partielles qui lient les phénomènes magnétiques, caractérisés par le champ magnétique \mathbf{H} et l'induction magnétique \mathbf{B} , aux phénomènes électriques caractérisés par le champ électrique \mathbf{E} et le déplacement électrique \mathbf{D} . Ces quatre équations sont :

$$\text{rot } \mathbf{E} = \frac{-\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (1.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1.4)$$

ρ représente la densité de charge électrique et \mathbf{J} le vecteur densité de courant électrique.

Outre ces quatre équations, nous avons les relations constitutives qui lient \mathbf{D} à \mathbf{E} , \mathbf{J} à \mathbf{E} et \mathbf{B} à \mathbf{H} :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (1.6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.7)$$

ε , μ et σ sont respectivement la permittivité, la perméabilité et la conductivité électrique du milieu, \mathbf{B}_r représente l'induction magnétique rémanente due aux aimants.

Dans le cas général, les caractéristiques ε , μ et σ doivent être considérées comme des tenseurs. Néanmoins, seuls les matériaux isotropes seront considérés dans notre travail, et ces caractéristiques seront représentées par des scalaires.

L'équation de la conservation de la charge électrique

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.8)$$

qui est une conséquence directe de l'équation (1.3) peut être avantageusement utilisée dans certains cas.

L'équation (1.4) permet de lier l'induction magnétique \mathbf{B} à un vecteur potentiel magnétique \mathbf{A} défini par :

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (1.9)$$

L'équation (1.1) donne alors :

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.10)$$

où V (V) est le potentiel électrique.

Il faut mentionner que V et \mathbf{A} ne sont pas uniquement définis par cette équation. Pour lever cette indétermination, il est nécessaire d'introduire des jauges tels que :

$$\begin{aligned} V(\infty) &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{A} &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Dans la plupart des problèmes physiques, les équations de Maxwell sont trop générales. Le premier pas pour les utiliser consiste à les simplifier en trouvant les contraintes adéquates pour chaque problème à étudier. Cette simplification donne différentes théories : l'électrocinétique, l'électrostatique, la magnétostatique et la magnétodynamique. Par la suite, on ne décrira que les problèmes d'électrocinétique et d'électrostatique.

Lorsque les grandeurs électriques sont sinusoïdales, leurs dérivations par rapport au temps revient à les multiplier par la quantité $j\omega$ où j est l'unité imaginaire et ω la pulsation de la source. L'équation (1.3) peut s'écrire en notation complexe :

$$\mathbf{rot H} = \sigma \mathbf{E} + j\omega \varepsilon \mathbf{E} = (\sigma + j\omega \varepsilon) \mathbf{E} \quad (1.12)$$

et on a donc :

$$\mathbf{div}(\sigma + j\omega \varepsilon) \mathbf{E} = 0 \quad (1.13)$$

1.3 Problèmes électriques :

1.3.1 Electrocinétique :

1.3.1.1 Hypothèses et équations :

Dans les problèmes d'électrocinétique, le but est de déterminer le potentiel électrique ou la densité de courant lorsque les phénomènes résistifs sont prédominants. Ceci implique que les courants induits dans les conducteurs peuvent être supposés négligeables. En d'autres termes, la dépendance du temps est si faible que les phénomènes capacitifs et inductifs ne perturbent pas la distribution due aux phénomènes résistifs.

Cette théorie peut être utilisée, par exemple, pour calculer les courants de fuites dans un câble à courant continu. En fait, elle est employée quand $\sigma + j\omega \varepsilon \cong \sigma$ où $\omega = 2\pi f$ reflète l'image de la dépendance du temps.

Les équations nécessaires pour résoudre de tels problèmes sont :

$$\mathbf{rot E} = 0 \quad (1.14)$$

$$\mathbf{div J} = 0 \quad (1.15)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.16)$$

L'équation (1.14) implique que \mathbf{E} dérive d'un potentiel V :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V \quad (1.17)$$

et avec l'équation (1.15) ceci entraîne :

$$\mathbf{div}(\sigma \mathbf{grad} V) = 0 \quad (1.18)$$

Pour des matériaux homogènes, on obtient finalement :

$$\nabla^2 V = 0 \quad (1.19)$$

où ∇^2 désigne l'opérateur Laplacien.

Il faut noter que beaucoup de problèmes concernant l'électrocinétique doivent être analysés par l'équation (1.18) du fait que la conductivité σ dépend de la température qui augmente avec les pertes par effet Joule.

1.3.1.2 Conditions aux interfaces :

Le passage d'un matériau à un autre entraîne une discontinuité de certaines variables électriques. Les conditions à l'interface de deux milieux de conductivités respectives σ_1 et σ_2 sont :

$$\begin{aligned} E_{n1} &= E_{n2} \\ \sigma_1 E_{n1} &= \sigma_2 E_{n2} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Ces équations expriment la continuité de la composante tangentielle du champ et la composante normale du vecteur densité de courant électrique.

1.3.2 Electrostatique :

1.3.2.1 Hypothèses et équations :

Dans un problème électrostatique, la distribution du potentiel électrique est totalement gouvernée par l'effet capacitif. Ceci veut dire que les phénomènes de conductivité sont négligeables. Les propriétés du matériau sont tels que : $\sigma + j\omega\epsilon \cong j\omega\epsilon$. En plus, on suppose que les effets magnétiques peuvent être négligés. Cette théorie s'applique à la plupart des problèmes de calcul du champ électrique (câble de haute tension, isolateur non pollué,...).

Avec ces hypothèses, les équations électrostatiques s'écrivent :

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (1.21)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (1.22)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.23)$$

L'équation (1.21) implique que \mathbf{E} dérive d'un potentiel scalaire V :

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V \quad (1.24)$$

et l'équation (1.22) donne :

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} V) = -\rho \quad (1.25)$$

Pour des matériaux homogènes, on obtient finalement :

$$\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\varepsilon} \quad (\text{Equation de Poisson}) \quad (1.26)$$

Etant donné que la plupart des diélectriques ont une permittivité constante, les problèmes d'électrostatique sont généralement linéaires. On utilisera donc, dans la plupart des cas, l'équation simplifiée (1.26) au lieu de l'équation (1.25).

1.3.2.2 Conditions aux interfaces :

Les conditions à l'interface de deux matériaux de permittivités ε_1 et ε_2 sont :

$$\begin{aligned} E_{t1} &= E_{t2} \\ \varepsilon_1 E_{n1} - \varepsilon_2 E_{n2} &= \rho \end{aligned} \quad (1.27)$$

ou en introduisant le potentiel électrique V et les permittivités relatives ε_{r1} et ε_{r2} :

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 \\ \varepsilon_{r1} \frac{\partial V_1}{\partial n_1} + \varepsilon_{r2} \frac{\partial V_2}{\partial n_2} &= \rho \end{aligned} \quad (1.28)$$

Ces équations expriment la continuité de la composante tangentielle du champ électrique \mathbf{E} ou du potentiel électrique V et la discontinuité de la composante normale de \mathbf{E} .

1.4 Classifications des méthodes numériques de calcul de champ :

1.4.1 Introduction :

La plupart des problèmes que rencontre l'ingénieur et qui sont décrits par des équations différentielles, telles que les équations de Maxwell en électromagnétisme, peuvent être résolus uniquement de manière approximative. Les techniques les plus connues sont celles des différences finies et éléments finis. Les deux techniques bien qu'elles paraissent différentes, ont le même objectif : réduction du degré de liberté infini d'un système en un degré fini. Le problème peut être alors résolu numériquement à l'aide de l'utilisation des ordinateurs ou des calculateurs numériques..

La méthode des différences finies définit une série de noeuds sur lesquels les opérateurs différentiels sont remplacés par leurs formes discrètes. Par contre, dans la méthode des éléments finis, l'équation différentielle est satisfaite dans un sens moyen à travers tout le

domaine d'étude. Ces deux techniques discrétisent le domaine aussi bien que les frontières. La méthode des éléments frontières, qui est présentée dans ce projet, est basée sur la discrétisation uniquement sur la frontière. Les trois techniques sont fortement liées, surtout si on les regarde du point de vue approximation. Quelques travaux récemment effectués (surtout ceux de Brebbia) ont montré que ces trois méthodes peuvent être toutes tirées de ce qu'on appelle la méthode des résidus pondérés. Pour cette raison, nous allons décrire cette dernière dans ce chapitre tout en montrant à quelle étape nous pouvons dériver les différentes méthodes mentionnées plus haut. Il faut insister sur le fait que la connaissance de la méthode des résidus pondérés permet le couplage entre les différentes méthodes qui existent.

1.4.2 Méthode des résidus pondérés :

Soit l'équation différentielle sous sa forme générale :

$$\mathcal{L}(u_0) = b \quad \text{dans } \Omega \quad (1.29)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} S(u_0) &= s & \text{sur } \Gamma_1 \\ G(u_0) &= g & \text{sur } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (1.30)$$

où \mathcal{L} , S et G désignent des opérateurs différentiels tel que le Laplacien par exemple et Γ_1 , Γ_2 représentent les deux frontières entourant la région Ω (Fig. 1.1). u_0 est la solution exacte de l'équation différentielle (souvent impossible à déterminer)

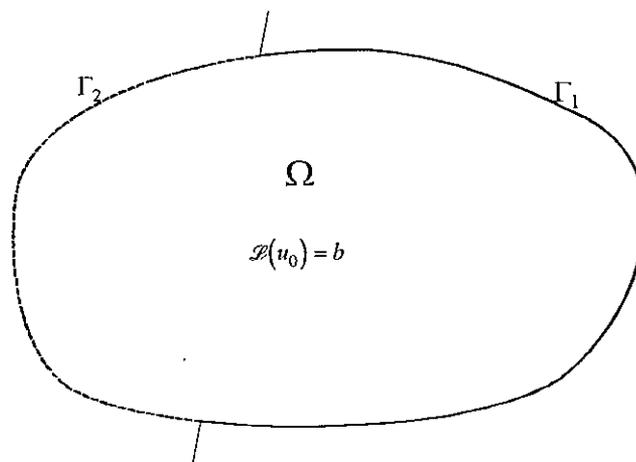


Fig. 1.1 Définition du domaine Ω et des frontières Γ_1 et Γ_2 .

La fonction u_0 peut être approximée par un ensemble de fonctions $\varphi_k(x)$ tel que :

$$u = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k + \alpha_0 \quad (1.31)$$

α_k sont des paramètres indéterminés et φ_k sont des fonctions linéairement indépendantes prises d'un ensemble complet de fonctions : $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, où x représente un point spatial du domaine Ω .

La fonction approchée u de u_0 substituée dans (1.29) produit une fonction "résidu" ou "erreur" R définie par :

$$R = \mathcal{L}(u) - b \neq 0 \quad (1.32)$$

Si la fonction approchée u ne satisfait pas toutes les conditions aux limites, on peut alors définir deux autres types d'erreurs:

$$\begin{aligned} R_1 &= S(u) - s \neq 0 && \text{sur } \Gamma_1 \\ R_2 &= G(u) - g \neq 0 && \text{sur } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (1.33)$$

Notre but est de rendre ces erreurs aussi petites que possible dans le domaine Ω et sur les frontières Γ_1 et Γ_2 . Pour faire ainsi, nous allons distribuer ces erreurs sur le domaine Ω et sur les deux frontières Γ_1 et Γ_2 . La façon avec laquelle cette distribution est réalisée produit différents types de méthodes d'approximations.

Soit par exemple l'équation de Laplace:

$$\nabla^2 u_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.34)$$

avec les conditions aux limites:

$$\begin{aligned} u_0 &= \bar{u} && \text{sur } \Gamma_1 \\ q_0 &= \frac{\partial u_0}{\partial n} = \bar{q} && \text{sur } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (1.35)$$

\bar{u} (resp. \bar{q}) sont des fonctions connues sur Γ_1 (resp. Γ_2).

On peut dire que pour que l'équation (1.34) soit vérifiée, il faut que l'intégrale $\int_{\Omega} (\nabla^2 u_0) w d\Omega$ soit nulle pour toute fonction w .

En d'autres termes ceci s'écrit:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u_0) w d\Omega = 0 \quad \forall \text{ la fonction } w \quad (1.36)$$

Si on remplace u_0 et q_0 par leur fonctions approchées u et $q (q = \frac{\partial u}{\partial n})$, il est correct d'écrire [1,2]:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) w d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (1.37)$$

Cette formule, qui représente la formule de base pour la méthode des résidus pondérés, peut être obtenue à partir de $\int_{\Omega} (\nabla^2 u_0) w d\Omega = 0$ en effectuant deux intégrations par parties dans un sens puis deux autres dans le sens inverse (voir Annexe A).

L'équation (1.37) peut s'écrire en utilisant les résidus R , R_1 et R_2 :

$$\int_{\Omega} R w d\Omega = \int_{\Gamma_2} R_2 w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} R_1 \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (1.38)$$

Cette formule des résidus pondérés permet de minimiser les erreurs R , R_1 et R_2 tout en les distribuant sur Ω et Γ .

Plusieurs méthodes peuvent dériver de cette formule, suivant le choix des fonctions de pondération w . On cite par exemple la méthode de collocation par points qui utilise comme fonctions de pondération les fonctions de Dirac distribuées en différents points du domaine. Une autre technique est la méthode originale de Galerkinge qui prend comme fonctions poids les mêmes fonctions d'approximation choisies pour u . Il est intéressant de remarquer que la méthode des différences finis peut être tirée de celle de collocation par points et ceci après quelques modifications dans cette dernière [1].

Si on intègre la formule (1.37) par partie, on obtient pour le cas bidimensionnel l'équation:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (1.39)$$

Si la fonction d'approximation u satisfait les conditions aux limites sur Γ_1 (c-à-d $u = \bar{u}$ sur Γ_1), alors l'équation (1.39) s'écrit:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q w d\Gamma \quad (1.40)$$

Le dernier terme de l'équation précédente est généralement forcé à zéro, en considérant que w doit satisfaire la condition $w=0$ sur Γ_1 . Ceci donne la relation suivante très connue dans la méthode des éléments finis:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma \quad (1.41)$$

Si on intègre par partie une deuxième fois l'équation (1.39) on obtient:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w) u d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q w d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (1.42)$$

Cette formule représente le point de départ pour les méthodes intégrales aux frontières.

1.4.3 Classification:

La formulation de la méthode des résidus pondérés écrite maintenant pour l'équation de Poisson peut être classée en:

1) Formulation originale:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u - b) w d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (1.43)$$

2) Formulation faible:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} b w d\Omega = \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (1.44)$$

3) Formulation inverse:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w) u d\Omega - \int_{\Omega} b w d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q w d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (1.45)$$

Le diagramme présenté à la figure (1.2) permet de bien visualiser cette classification:

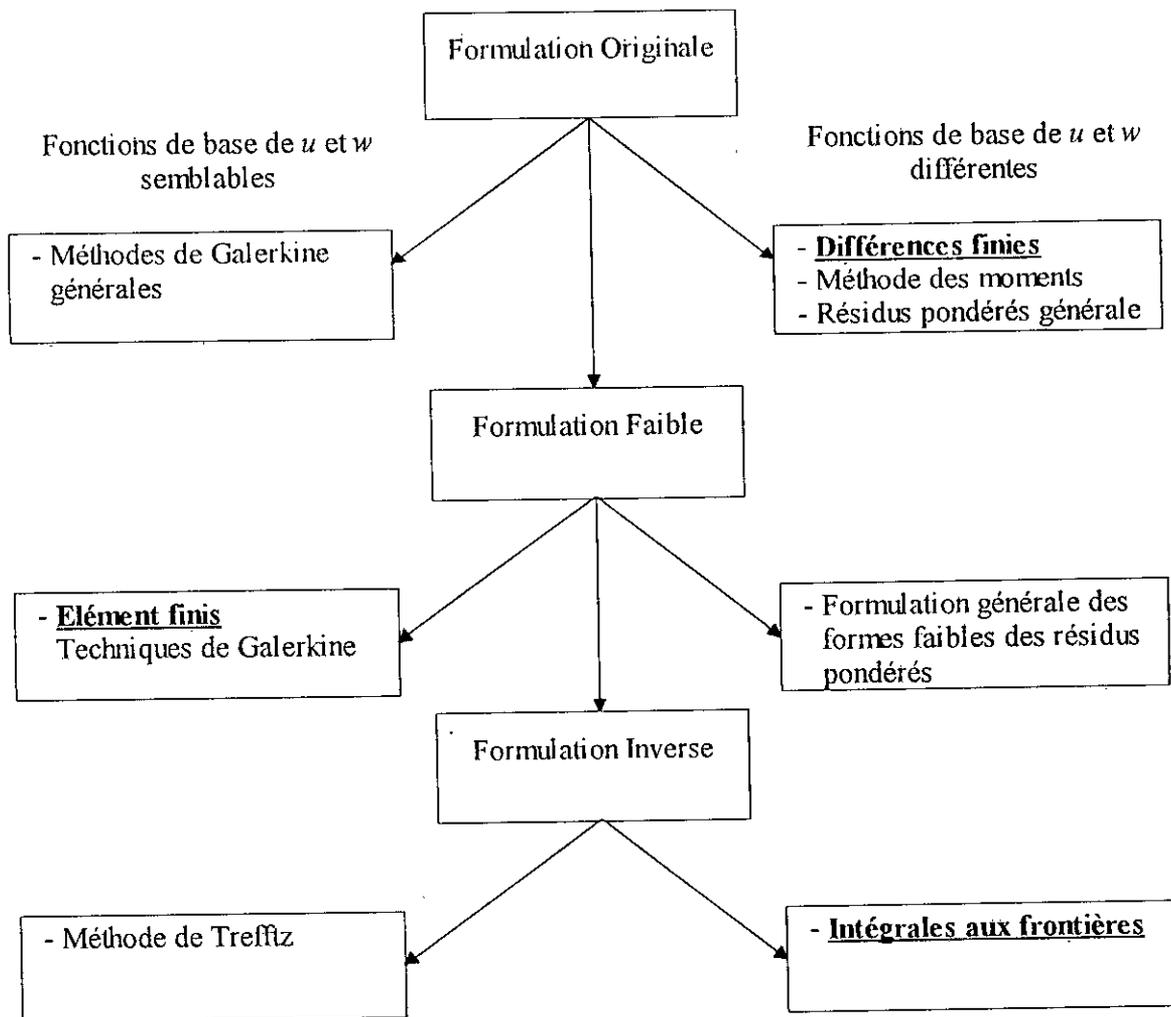


Fig. 1.2 Classification des méthodes numériques

1.5 Conclusion:

Les modèles électrocinétiques et électrostatiques, obtenus à partir des équations générales de Maxwell sous des hypothèses simplificatrices, conduisent à l'équation de Laplace.

Une classification des méthodes numériques de calcul de champ, telles que la MDF et la MEF, peut être obtenue en utilisant la méthode générale des résidus pondérés.



Chapitre 2

***FORMULATION ET
TRAITEMENT NUMÉRIQUE
DE LA MÉTHODE DES
ÉLÉMENTS FRONTIÈRES***

2. Formulation et traitement numérique de la méthode des éléments frontières

2.1 Introduction:

Dans ce chapitre, nous allons présenter les fondements de la méthode des éléments frontières appliquée aux problèmes de potentiels tels que ceux d'électrocinétique et d'électrostatique discutés au chapitre 1.

Les problèmes de potentiel sont régis par l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 u = b \quad (2.1)$$

avec les conditions aux limites du type (Fig 2.1):

1) Dirichlet: $u = \bar{u}$ sur Γ_1 .

2) Neuman: $q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}$ sur Γ_2 .

n étant la normale par rapport à la frontière (Fig 2.1).

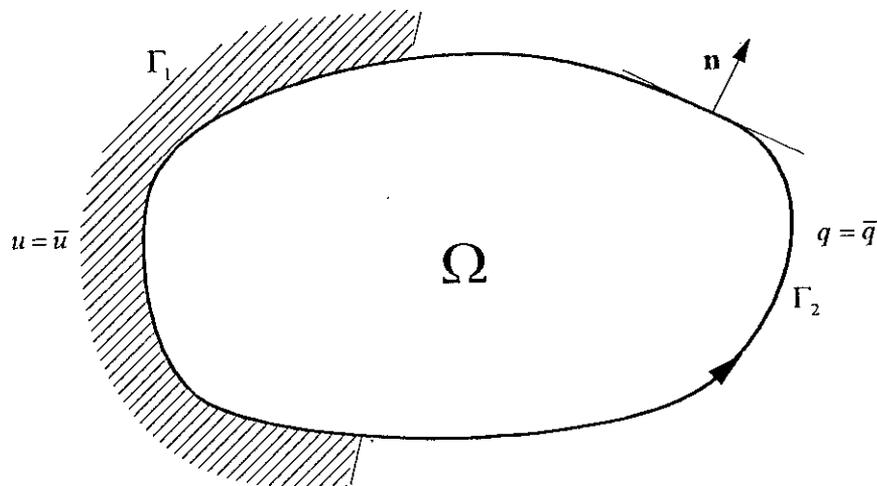


Fig. 2.1 Définitions géométriques pour l'équation de Laplace

Notons que la variable $q^{(1)}$ définie dans la deuxième condition, représente la densité de flux du potentiel traversant la frontière. C'est aussi la composante normale du champ électrique au niveau de la frontière. Par la suite, les termes "flux" et "composante normale du champ" seront parfois utilisés pour désigner la variable q .

La première partie de ce chapitre concerne la formulation de l'équation intégrale utilisée dans les problèmes de potentiel, alors que la deuxième introduit le traitement numérique de cette équation.

2.2 Rappels de quelques notions:

Avant d'aborder la formulation directe de la méthode des éléments frontières, il serait intéressant de faire un petit rappel sur la formule de Green et sur les solutions fondamentales associées à l'équation de Laplace.

2.2.1 Formule de Green:

Le second théorème de Green s'énonce par:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 uw - \nabla^2 wu) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(-u \frac{\partial w}{\partial n} + w \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (2.2)$$

où Γ est la surface entourant le volume Ω et u et w sont des fonctions continues et deux fois dérivables sur Ω .

Le théorème précédent permet de lier une intégrale sur un domaine Ω à une intégrale sur la frontière entourant ce domaine. L'équation (2.2), comme on va le voir, va nous permettre d'écrire l'équation de base utilisée dans la méthode des éléments frontières.

2.2.2 Solutions fondamentales:

La solution fondamentale $u_{\xi}^*(x)$ de l'équation de Laplace est définie comme étant la fonction qui satisfait à l'équation:

$$\nabla^2 u_{\xi}^*(x) = -\delta_{\xi}(x) \quad (2.3)$$

⁽¹⁾ Pour ne pas alourdir l'écriture des équations, on désignera toujours par la lettre q la dérivée de u par rapport à la normale d'une surface ou d'une courbe.

où $\delta_\xi(x)$ est la fonction de Dirac concentrée au point ξ ⁽²⁾ définie par:

$$\begin{cases} \delta_\xi(x) = 0 \text{ si } x \neq \xi \\ \int_{\Omega} f(x)\delta_\xi(x)d\Omega(x) = f(\xi) \end{cases} \quad (2.4)$$

La solution de l'équation précédente est [1,2,4]:

$$u^* = \frac{1}{4\pi r_\xi(x)} \text{ en milieu tridimensionnel (3D)} \quad (2.5)$$

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r_\xi(x)}\right) \text{ en milieu bidimensionnel (2D)} \quad (2.6)$$

$r_\xi(x)$ étant la distance entre les deux points ξ et x .

Il faut noter que les deux solutions fondamentales (3D et 2D) présentent un comportement singulier lorsque le point x s'approche du point ξ ($r \rightarrow 0$), et qu'ils sont respectivement de l'ordre $O(1/r)$ et $O(\ln r)$.

2.3 Formulation directe de la méthode des éléments frontières:

La formulation directe de la méthode des éléments frontières consiste à trouver une relation qui ne fait entrer en jeu que des intégrales sur les frontières. Cette formulation peut être élaborée soit en utilisant le théorème de Green (2.2), soit en utilisant la méthode générale des résidus pondérés étudiée au chapitre 1. Les deux approches seront présentées.

2.3.1 Formulation par le théorème de Green:

En prenant:

u : potentiel électrique

$w=u^*$: solution fondamentale de l'équation de Laplace

dans la formule de Green (2.2), celle ci devient:

$$\int_{\Omega} (u^*\nabla^2 u - u\nabla^2 u^*)d\Omega = \int_{\Gamma} \left(-u \frac{\partial u^*}{\partial n} + u^* \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\Gamma \quad (2.7)$$

⁽²⁾ x et ξ dénotent des points et non des nombres réels.

Si u vérifie l'équation de Laplace sur tout le domaine Ω , l'équation précédente devient, en tenant compte des équations (2.4) et (2.3):

$$u_\xi + \int_{\Gamma} q_\xi^*(x)u(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_\xi^*(x)q(x) d\Gamma(x) \quad (2.8)$$

ou sous forme plus simple:

$$u_\xi + \int_{\Gamma} q_\xi^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u_\xi^* q d\Gamma \quad (2.9)$$

Les grandeurs r_ξ , $d\Gamma$ sont illustrées à la figure (2.2). q_ξ et q sont respectivement les dérivées de u_ξ et u par rapport à la normale \mathbf{n} de la frontière. L'indice ξ indique que les fonction u_ξ^* et q_ξ^* dépendent du point ξ .

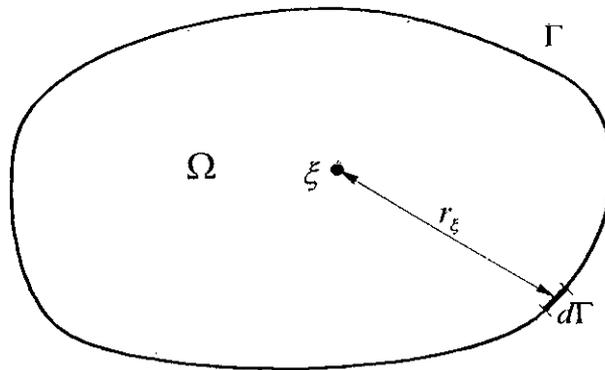


Fig. 2.2 Grandeurs géométriques de l'équation (2.9)

2.3.2 Formulation par la méthode des résidus pondérés:

Une façon plus générale - introduite pour la première fois par Brebbia [3] - pour tirer la formule de base de la méthode des éléments frontières, consiste à utiliser la méthode des résidus pondérés.

En se basant sur les notions introduites au chapitre 1, et si on considère que les fonctions inconnues du potentiel u et du flux normal q sont remplacées par leurs approximations, l'erreur introduite peut être minimisée en écrivant la formule des résidus pondérés suivante:

$$\int_{\Omega} R u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} R_2 u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} R_1 q^* d\Gamma \quad (2.10)$$

où R , R_1 , R_2 sont les résidus dus à l'approximation:

$$\begin{aligned}
 R &= \nabla^2 u \neq 0 \\
 R_1 &= u - \bar{u} \neq 0 \\
 R_2 &= q - \bar{q} \neq 0
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

u et q sont les fonctions approchées du potentiel et du flux.

\bar{u} et \bar{q} sont les potentiels et les flux connues sur les frontières Γ_1 et Γ_2 .

L'équation intégrale précédente s'écrit encore:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma
 \tag{2.12}$$

et en intégrant deux fois par partie, celle ci devient:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u d\Omega = \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma
 \tag{2.13}$$

ou sous forme plus compacte:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u d\Omega = \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma
 \tag{2.14}$$

Comme on a: $\nabla^2 u^* = -\delta_{\xi}$, l'équation précédente devient:

$$u_{\xi} + \int_{\Gamma} q_{\xi}^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{\xi}^* q d\Gamma
 \tag{2.15}$$

On obtient ainsi le même résultat que celui de l'équation (2.9).

L'équation (2.9) ou (2.15) représente l'équation de base de la méthode des éléments frontières utilisée pour résoudre les problèmes de potentiel.

2.3.3 Formule générale de l'équation intégrale aux frontières:

Il faut noter que dans l'équation intégrale (2.9) le point ξ représentait un point se trouvant à l'intérieur du domaine Ω . On peut se demander ce qui se passerait si le point ξ se retrouvait sur la frontière ou en dehors du domaine Ω . On verra dans ce paragraphe que l'équation (2.9) est en défaut lorsque le point ξ occupe les positions précédentes. On verra aussi comment il faut la modifier pour tenir compte de tous les cas possibles.

Si le point ξ est sur la frontière, un problème de singularité se pose au niveau des intégrales $\int_{\Gamma} q_{\xi}^* u d\Gamma$ et $\int_{\Gamma} u_{\xi}^* q d\Gamma$. En effet, lorsque l'élément d'intégration $d\Gamma(x)$ tend vers le point ξ (Fig. 2.3), la valeur de $r_{\xi}(x)$ tend vers 0 et les valeurs de u^* et q^* tendent alors vers

l'infini. Notons que ce problème ne se posait pas lorsque ξ était à l'intérieur du domaine, du fait que la distance $r_{\xi}(x)$ ne tendait jamais vers 0.

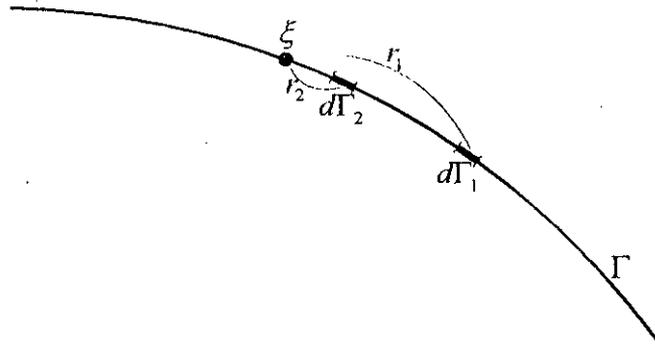


Fig. 2.3 Problème de singularité lorsque r tend vers 0

Pour transformer l'équation (2.9) lorsque le point ξ se retrouve sur la frontière, on suppose que la frontière est augmentée d'un demi-cercle autour du point ξ (Fig. 2.4) [1,2,33]. Pour les problèmes tridimensionnels, on doit utiliser une hémisphère au lieu d'un demi-cercle.

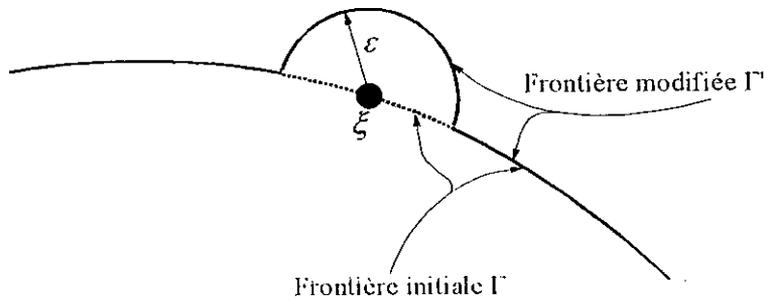


Fig. 2.4 Modification de la frontière pour le traitement de la singularité

Pour déterminer les intégrales singulières $\int_{\Gamma} q_{\xi}^* u d\Gamma$ et $\int_{\Gamma} u_{\xi}^* q d\Gamma$, il suffit donc de les calculer sur la frontière modifiée Γ' et tendre le rayon ε du demi-cercle ou de l'hémisphère vers 0. En d'autres termes:

$$\int_{\Gamma} q_{\xi}^* u d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma'} q_{\xi}^* u d\Gamma'$$

$$\int_{\Gamma} u_{\xi}^* q d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma'} u_{\xi}^* q d\Gamma'$$

En procédant ainsi, Brebbia [2] a montré que l'équation (2.9) se transforme en:

$$\frac{1}{2}u_\xi + \int_\Gamma q_\xi^* u d\Gamma = \int_\Gamma u_\xi^* q d\Gamma \quad (2.16)$$

La valeur $\frac{1}{2}$ a été obtenue en supposant que le point ξ se trouvait sur une frontière lisse. Lorsque ce n'est pas le cas, c'est à dire lorsque ξ se situe sur un coin géométrique, la valeur de $\frac{1}{2}$ doit être remplacée par un certain coefficient c_ξ . En suivant la même procédure pour déterminer le $\frac{1}{2}$, on peut montrer que c_ξ est proportionnel à l'angle solide sous lequel le point ξ voit le volume du domaine Ω . Dans les problèmes bidimensionnels, il s'agit de l'angle du coin (Fig. 2.5).

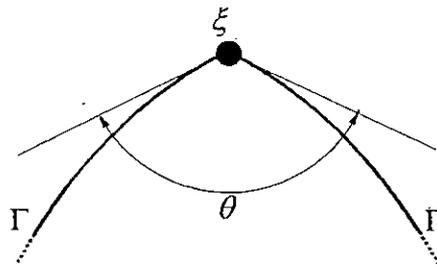


Fig. 2.5 Définition de l'angle θ d'un coin dans le cas bidimensionnel

Le coefficient c_ξ est défini par [2,4]:

$$\begin{aligned} c_\xi &= \frac{\theta}{2\pi} \text{ en 2 dimensions. } \theta \text{ angle du coin.} \\ c_\xi &= \frac{\theta}{4\pi} \text{ en 3 dimensions. } \theta \text{ angle solide.} \end{aligned} \quad (2.17)$$

L'équation intégrale (2.9) devient donc sous sa forme la plus générale:

$$c_\xi u_\xi + \int_\Gamma q_\xi^* u d\Gamma = \int_\Gamma u_\xi^* q d\Gamma \quad (2.18)$$

L'équation (2.18) prend maintenant en considération toutes les positions possible du point ξ :

- ξ est à l'intérieur: $c_\xi = 1$.
- ξ est sur la frontière: c_ξ est donné par les formules de (2.17). $c_\xi = \frac{1}{2}$ lorsque la frontière est lisse au point ξ .

■ ξ est à l'extérieur [33]: $c_\xi = 0$.

2.4 Traitement Numérique de l'équation Intégrale:

2.4.1 Introduction:

Les solutions analytiques des équations intégrales relatives aux problèmes de potentiel (Equation de Laplace) sont extrêmement rares, et n'existent que pour quelques géométries et conditions aux limites excessivement simples. Pour être en mesure de traiter des cas plus complexes, et correspondant à ceux rencontrés dans la pratique, il a fallu attendre l'essor des techniques numériques et les progrès de l'informatique.

La méthode des éléments finis, bien qu'ayant des fondements moins anciens que celles des équations intégrales, s'est imposée la première dès les années 50, sans doute en raison de sa plus grande simplicité de mise en œuvre.

Les fondements mathématiques de la méthode des éléments frontières se trouvent dans les travaux de Fredholm, et dans ceux de l'école russe: Mikhlin, Muskhelishvili et Kupradze [42].

Les premières publications sur le traitement numérique de l'équation de Laplace sont celles de Symon et Jaswon [7] et Pointer [42]. Le contour est approximé par des segments de droites, et la solution est supposée constante par segment.

On trouve aussi d'autres travaux pour d'autres types d'équations. On cite, par exemple, les travaux de Rizzo [53], Cruse et Ricardella dans le domaine de l'élasticité.

D'autres publications plus récentes ont permis le développement de la méthode, notamment celle de Banerjee et Butterfield [6], Crouch [10], Brebbia [1,2,3,8,9].

Il a été prouvé pour la première fois en 1977-1978 par Brebbia que la méthode des éléments frontières, comme la FEM et d'autres méthodes numériques, peut être obtenue en la considérant comme un cas spécial de la méthode générale des résidus pondérés.

Elle peut donc être liée aux méthodes qui existent produisant ainsi des méthodes hybrides.

2.4.2 Discrétisation de l'équation intégrale:

On va essayer dans ce paragraphe de montrer comment on peut discrétiser l'équation intégrale (2.18) pour trouver le système d'équations qui nous permettra de résoudre le problème.

Rappelons l'équation intégrale:

$$c_{\xi} u_{\xi} + \int_{\Gamma} q_{\xi}^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{\xi}^* q d\Gamma$$

Pour des raisons de simplification, on considère d'abord le cas bidimensionnel. Divisons la frontière Γ en N segments (éléments). (Fig. 2.6)

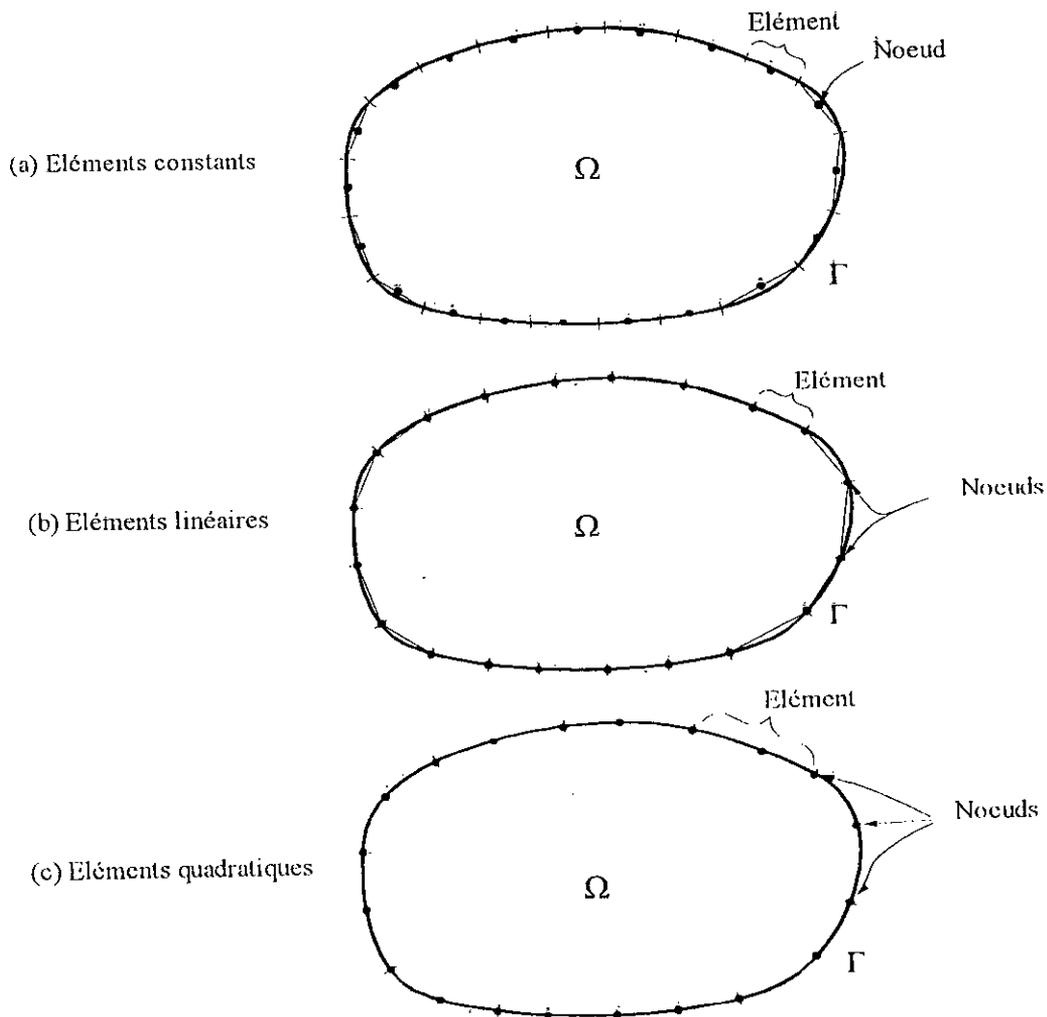


Fig. 2.6 Les différents types des éléments frontières

Les points où il y a des inconnues sont appelés "Noeuds" ou points d'interpolation. On peut définir plusieurs types d'éléments:

- **Éléments constants:** ces éléments sont des segments de droites. Chaque noeud se trouve au centre de chaque élément (Fig. 2.6a).
- **Éléments linéaires:** ces éléments sont, comme les précédents, des segments de droites. Chaque élément comporte deux noeuds qui coïncident avec les points géométriques décrivant l'élément. (Fig. 2.6b).
- **Éléments quadratiques:** les éléments sont des segments de parabole décrits par 3 points géométriques. Les noeuds coïncident avec les points géométriques (Fig. 2.6c).

Nous nous limitons dans ce chapitre aux éléments constants. Les éléments linéaires et quadratiques seront étudiés lorsque nous aborderons les éléments d'ordre supérieur.

Si le problème est bien posé, on connaît toujours, en tout point du contour, soit le potentiel \bar{u} , soit la dérivée normale du potentiel $\bar{q} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$. La variable complémentaire, (q si u est connu ou u si q est connue), devient donc l'inconnue. Le but de la méthode des éléments frontières est de déterminer ces inconnues.

L'idée est donc de découper le contour Γ en N segments Γ_i repérés par leurs points milieux (noeuds) P_i et de supposer les fonctions u et q constantes sur chaque segment.

Si le point ξ de l'équation intégrale parcourt les noeuds P_i , on aura N équations intégrales qui s'écrivent sous la forme:

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} q^* u d\Gamma_j \right) = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} u^* q d\Gamma_j \right) \quad i = 1, N \quad (2.19)$$

u_i étant le potentiel au noeud P_i appartenant au segment Γ_i .

Comme u et q sont supposés constants sur chaque élément Γ_j , on peut faire sortir u et q des intégrales $\int_{\Gamma_j} q^* u d\Gamma_j$ et $\int_{\Gamma_j} u^* q d\Gamma_j$ définies sur cet élément:

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma_j \right) u_j = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma_j \right) q_j \quad i = 1, N \quad (2.20)$$

Ces équations représentent les relations entre les noeuds P_i et tous les éléments Γ_j de la frontière (les élément Γ_i inclus). (Fig. 2.7).

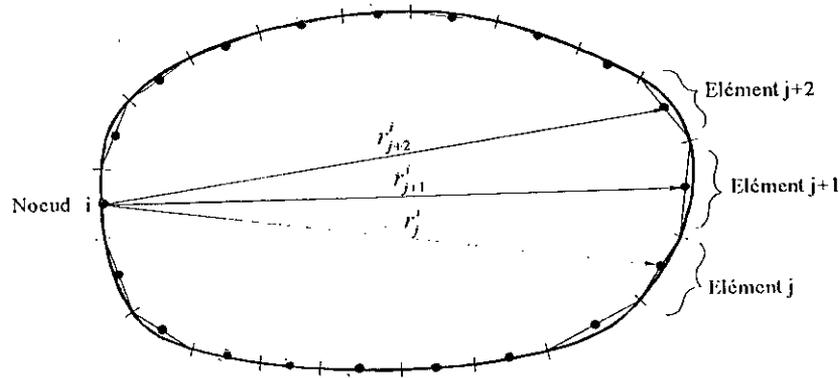


Fig. 2.7 Relation entre le noeud i et les éléments de la frontière.

Les éléments constants créent toujours des frontières lisses au niveau des noeuds. Le paramètre c_i vaut donc $1/2$.

Le système d'équations précédent s'écrit :

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad i = 1, N \quad (2.21)$$

avec:

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2} \delta_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \hat{H}_{ij} & \text{si } j = i \\ \hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) d\Gamma_j & \text{si } j \neq i \end{cases} \quad (2.22)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \ln \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma_j \quad (2.23)$$

δ_{ij} est le symbole de Kronecker et r est la distance entre le point P_i et l'élément différentiel $d\Gamma_j$.

Les intégrales \hat{H}_{ij} et G_{ij} sont parfois appelées coefficients d'influence, du fait qu'elles relient les noeuds i aux éléments j .

Sous forme matricielle ceci s'écrit :

$$\begin{pmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1j} & \cdots & H_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_{i1} & \cdots & H_{ij} & \cdots & H_{iN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_{N1} & \cdots & H_{Nj} & \cdots & H_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1j} & \cdots & G_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{i1} & \cdots & G_{ij} & \cdots & G_{iN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{N1} & \cdots & G_{Nj} & \cdots & G_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_j \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

ou:

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{Q} \tag{2.25}$$

Sur les $2N$ variables u_j et q_j ($j=1, N$), N sont connues et N sont inconnues. Le nombre d'inconnues est donc égal au nombre d'équations et le système matriciel peut être alors résolu. Pour chaque équation (2.21), on ramène toutes les variables inconnues du côté gauche et toutes les variables connues du côté droit, de façon à ce que nous pouvons écrire le système matriciel sous la forme:

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} x_j = B_i \quad i = 1, N \tag{2.26}$$

$$A_{ij} = \begin{cases} H_{ij} & \text{si } u_j \text{ est inconnue} \\ -G_{ij} & \text{si } q_j \text{ est inconnue.} \end{cases} \tag{2.27}$$

$$x_j = \begin{cases} u_j & \text{si } u_j \text{ est inconnue} \\ q_j & \text{si } q_j \text{ est inconnue} \end{cases} \tag{2.28}$$

les x_j représentent les inconnues qui se trouvent sur la frontière. Les termes B_i peuvent être calculés par:

$$B_i = \sum_{\substack{j=1 \\ q_j \text{ connue}}}^N G_{ij} q_j - \sum_{\substack{j=1 \\ u_j \text{ connue}}}^N H_{ij} u_j \tag{2.29}$$

Sous forme matricielle ceci s'écrit:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \tag{2.30}$$

Il est intéressant de mentionner ici que les variables inconnues incluent à la fois les potentiels et leurs dérivées, plutôt que les potentiels seuls comme c'est le cas dans la méthode des éléments finis. La méthode des éléments frontières permet non seulement la détermination du potentiel sur la frontière, mais aussi la composante normale du champ électrique sur celle ci.

En résolvant le système matriciel (2.30), par la méthode de Gauss par exemple, toutes les variables sur la frontière seront donc connues.

Une fois le travail fait, il est possible de calculer n'importe quelle valeur intérieure de u par les formules:

$$u_i = -\int_{\Gamma} q^* u d\Gamma + \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma \quad (2.31)$$

et en utilisant la discrétisation faite précédemment, on aura:

$$u_i = -\sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j + \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (2.32)$$

Remarquons que dans l'équation précédente, les coefficients \hat{H}_{ij} et G_{ij} doivent être calculés pour chaque point intérieur P_i où on veut calculer le potentiel.

Le champ électrique pour un point intérieur P_i peut être calculé par:

$$u_i = -\mathbf{grad}V = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}\right) \quad (2.33)$$

Les dérivées de u par rapport aux directions x , y et z peuvent être obtenues en dérivant l'équation intégrale (2.31):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i &= -\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial q^*}{\partial x}\right)_i u d\Gamma + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x}\right)_i q d\Gamma \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i &= -\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial q^*}{\partial y}\right)_i u d\Gamma + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y}\right)_i q d\Gamma \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_i &= -\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial q^*}{\partial z}\right)_i u d\Gamma + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z}\right)_i q d\Gamma \end{aligned} \quad (2.34)$$

Les dérivées à l'intérieur des intégrales ont portés uniquement sur les solutions fondamentales u^* et q^* , puisqu'on a dérivé l'expression de u autour du point P_i . Les expressions des dérivées de q^* par rapport aux différentes directions x , y et z sont données par la formule [33] :

$$\frac{\partial q^*}{\partial m} = -\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{r^2} + 2 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})}{r^4} \quad (2.35)$$

où \mathbf{m} est la direction de dérivation.

2.4.3 Evaluations des intégrales:

Dans le calcul des intégrales \hat{H}_{ij} et G_{ij} deux cas peuvent se présenter:

- $i \neq j$: Le segment j sur lequel on intègre n'est pas le segment i où l'on écrit l'équation intégrale. La distance r entre le point P_i et l'élément différentiel d'intégration $d\Gamma_j$ n'est jamais nulle.
- $i = j$: Le segment d'intégration j et celui où on écrit l'équation intégrale coïncident. La distance r entre P_i et $d\Gamma_j$ ($=d\Gamma_i$) s'annule lorsque $d\Gamma_j$ passe par P_i . Par conséquent, une singularité dans les intégrales \hat{H}_{ii} et G_{ii} se présente. Cependant, malgré la singularité qui existe dans les intégrantes, celle-ci n'atteint pas les intégrales du fait que ces dernières ont une limite finie.

Le calcul de \hat{H}_{ij} et G_{ij} peut se faire analytiquement ou numériquement. Les deux façons seront décrites dans ce qui suit.

2.4.3.1 Calcul analytique des intégrales:

Considérons d'abord les expressions explicites de la fonction de Green u^* et de sa dérivée q^* ⁽³⁾ [33]:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad r \text{ distance entre } P_i \text{ et } d\Gamma_j \quad (2.36)$$

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \quad (2.37)$$

Le calcul analytique des différentes intégrales, en se référant aux figures (2.8) et (2.9), est donné par les expressions suivantes [3,4,6]:

- $i \neq j$: (Fig. 2.8)

⁽³⁾ Cette égalité découle des deux résultats suivants [25,26,27]:

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{m}} = \frac{\partial V}{\partial x} m_x + \frac{\partial V}{\partial y} m_y + \frac{\partial V}{\partial z} m_z = \mathbf{Grad}V \cdot \mathbf{m} \quad \text{et} \quad \mathbf{Grad}f(r) = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

On notera toujours en gras les grandeurs qui représentent des vecteurs ou des matrices.

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma_j = \frac{1}{2\pi} (\theta_B - \theta_A)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma_j = -\frac{1}{2\pi} [r \sin \theta (\ln r - 1) + \theta h]_{\theta_A, r_A}^{\theta_B, r_B}$$
(2.38)

■ $i=j$: (Fig. 2.9)

$$\hat{H}_{ii} = 0 \quad \text{car } \mathbf{n} \perp \mathbf{r}$$

$$G_{ii} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\text{Point1}}^{\text{Noeud } i} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dr + \int_{\text{Noeud } i}^{\text{Point2}} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dr \right) = \frac{l}{2\pi} \left(\ln\left(\frac{2}{l}\right) + 1 \right)$$
(2.39)

l étant la longueur de l'élément i .

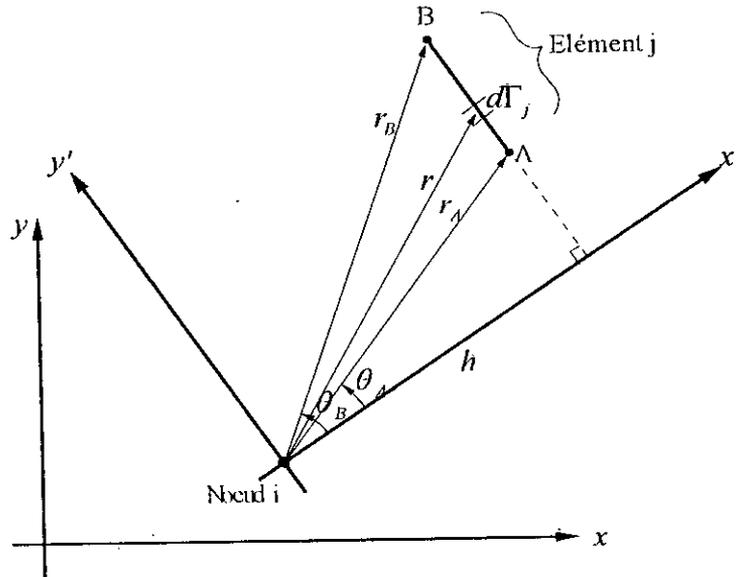


Fig. 2.8 Paramètres géométriques pour l'évaluation des intégrales analytiques régulières

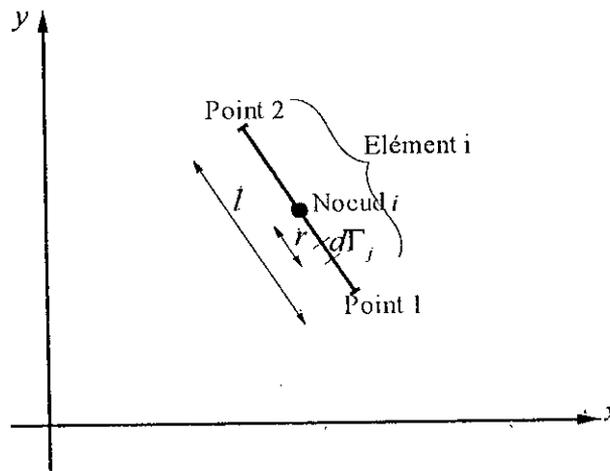


Fig. 2.9 Paramètres géométriques pour l'évaluation des intégrales analytiques singulières

2.4.3.2 Calcul Numérique des intégrales:

Les intégrales régulières \hat{H}_{ij} et G_{ij} ($i \neq j$) peuvent aussi être évaluées numériquement, en utilisant par exemple la quadrature simple de Gauss qui s'exprime sous la forme [2,4]: (Voir Annexe B)

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ij} &= \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma_j = \frac{l}{2} \sum_{k=1}^K w_k q^*(M_k) = \frac{1}{2\pi} \frac{l}{2} d_{ij} \sum_{k=1}^K w_k \left(-\frac{1}{r_{ik}^2} \right) \\ G_{ij} &= \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma_j = \frac{l}{2} \sum_{k=1}^K w_k u^*(M_k) = \frac{1}{2\pi} \frac{l}{2} \sum_{k=1}^K w_k \ln \left(\frac{1}{r_{ik}} \right) \end{aligned} \tag{2.40}$$

où:

l est la longueur de l'élément j

w_k sont les poids de la quadrature de Gauss

M_k sont les points d'intégration de la quadrature de Gauss où les fonctions q^* et u^* sont évaluées

r_{ik} est la distance entre le point P_i et le point M_k

K est l'ordre de la quadrature de Gauss

d_{ij} est la distance perpendiculaire entre P_i et la droite portant l'élément Γ_j

Pour les problèmes bidimensionnels, 4 points d'intégrations ($K=4$) donnent de très bons résultats. Les poids w_k et les points M_k pour $K=4$ sont définis par (Fig. 2.10):

$$l_1 = l_4 = 0.8611 \frac{l}{2} \quad w_1 = w_4 = 0.3478$$

$$l_2 = l_3 = 0.3399 \frac{l}{2} \quad w_2 = w_3 = 0.6521$$

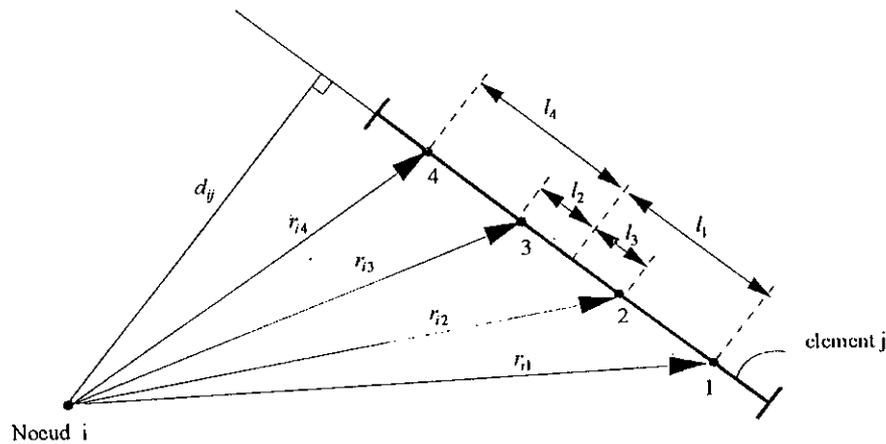


Fig. 2.10 Définition des points d'intégration d'un élément Γ_j

Les tables d'intégration utilisant différentes valeurs de K se trouvent dans l'annexe B.

Il faut noter aussi que les intégrales singulières \hat{H}_{ii} et G_{ii} peuvent être évaluées numériquement, et ceci en utilisant des formules spéciales de quadrature de la forme:

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right) f(x) dx = \sum_{k=1}^K w_k f(x_k)$$

L'utilisation de ces formules de quadratures sera étudiée en détail lors du calcul des intégrales singulières pour une discrétisation de la frontière par des éléments linéaires.

2.5 Etude des problèmes tridimensionnels:

2.5.1 Discrétisation:

La résolution de l'équation intégrale (2.18) pour le cas tridimensionnel peut aussi être effectuée en suivant les mêmes étapes invoquées aux paragraphes précédents.

La frontière, qui est maintenant une surface et non une courbe, peut être modélisée par des formes triangulaires ou quadrilatérales, planes ou courbées. Les potentiels et leurs dérivées peuvent avoir une variation constante, linéaire ou quadratique. Les fonctions d'interpolation adoptées sont généralement les mêmes que celles employées dans l'analyse des problèmes bidimensionnels par éléments finis.

Dans ce paragraphe, on discrétisera la frontière en utilisant des éléments triangulaires de forme plane ayant une variation constante du potentiel u et de sa dérivée normale q . La surface Γ est divisée en N éléments triangulaires Γ_j ($j=1,2,\dots,N$) (Fig. 2.11). Chaque triangle est décrit par 3 points géométriques et un noeud situé au centre du triangle (Fig.2.12).

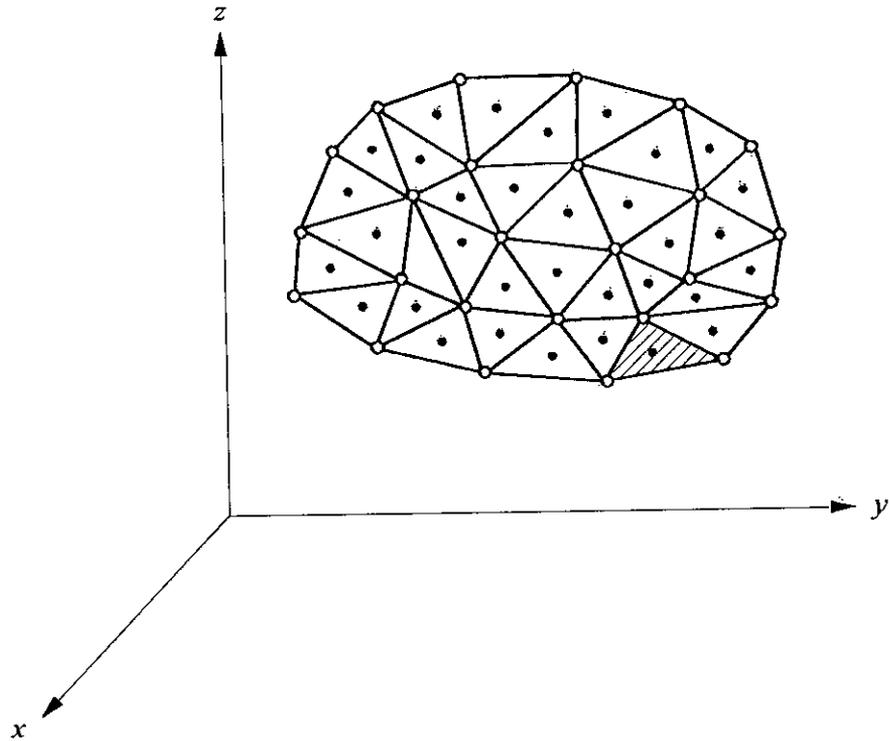


Fig. 2.11 Discrétisation d'un domaine tridimensionnel en éléments triangulaire

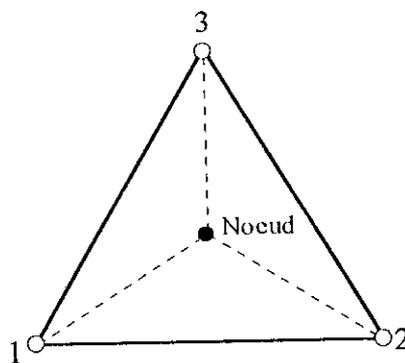


Fig. 2.12 Définition d'un élément constant triangulaire

L'équation intégrale s'écrit:

$$c_\xi u_\xi + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} q^* u d\Gamma_j \right) = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} u^* q d\Gamma_j \right)$$

De la même manière que pour le cas bidimensionnel, on obtient le système matriciel en laissant le point ξ parcourir tous les noeuds. Vu que u et q sont supposés constants sur chaque élément Γ_j , on obtient le système d'équations suivant:

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad i = 1, N$$

avec :

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma_j = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma_j \tag{2.41}$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma_j = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r} d\Gamma_j \tag{2.42}$$

c_i est égale à $\frac{1}{2}$ (surface lisse au niveau du noeud).

2.5.2 Calcul des intégrales:

Pour le calcul des intégrales \hat{H}_{ij} et G_{ij} , il est intéressant de passer des coordonnées cartésiennes x, y et z aux coordonnées locales η_1, η_2 et ζ (Fig. 2.13).

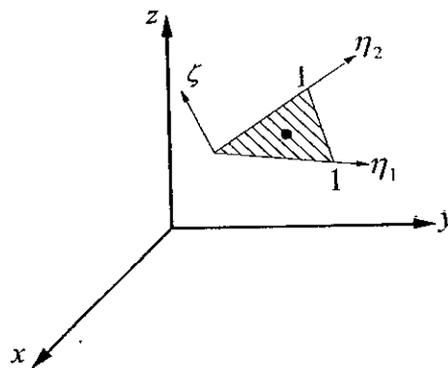


Fig. 2.13 Définition des coordonnées locale η_1, η_2 et ζ

Ce passage des coordonnées permet d'écrire [25,26,27]:

$$d\Gamma = |J| d\eta_1 d\eta_2 \tag{2.43}$$

Le Jacobien J vaut ici deux fois l'aire du triangle:

$$|J| = 2A$$

En utilisant ces coordonnées locales, les expressions de \hat{H}_{ij} et G_{ij} deviennent:

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma_j = \int_0^1 \left(\int_0^{1-\eta_2} q^*(\eta_1, \eta_2) |J| d\eta_1 \right) d\eta_2 \quad (2.44)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma_j = \int_0^1 \left(\int_0^{1-\eta_2} u^*(\eta_1, \eta_2) |J| d\eta_1 \right) d\eta_2 \quad (2.45)$$

Lorsque le point P_i n'appartient pas à l'élément Γ_j les deux intégrales précédentes peuvent être évaluées numériquement en utilisant la quadrature de Hammer qui est donnée par [1]:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ij} &= \left(\frac{1}{4\pi} \right) 2A_j d_{ij} \sum_{k=1}^K \frac{1}{r_{ik}^3} w_k \\ G_{ij} &= \left(\frac{1}{4\pi} \right) 2A_j \sum_{k=1}^K \frac{1}{r_{ik}} w_k \end{aligned} \quad (2.46)$$

A_j est l'aire de l'élément triangulaire Γ_j .

d_{ij} est la distance perpendiculaire entre le point P_i et le plan passant par l'élément Γ_j (Fig. 2.14).

w_k sont les poids de la quadrature.

r_{ik} est la distance entre P_i et le point d'intégration M_k .

La table des w_k et M_k pour différentes valeurs de l'ordre K se trouve à l'annexe B.

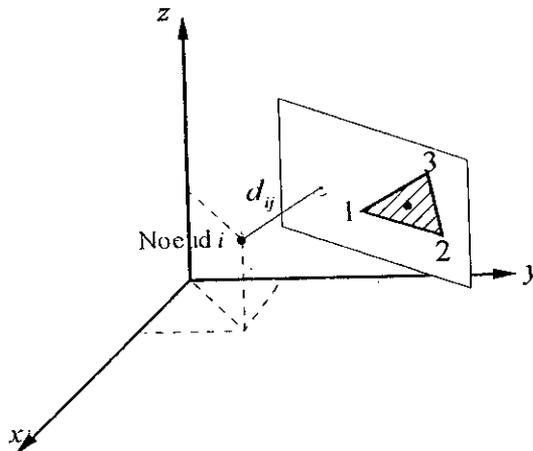


Fig. 2.14 Définition des paramètres géométriques de l'intégration numérique

Lorsque $i=j$ ($P_i \in \Gamma_j$), les formules de quadratures précédentes sont imprécises et il faut remédier en ayant recours soit à d'autres formules de quadratures, soit au calcul analytique. Les éléments constants étant simples, il est préférable d'utiliser, en se référant à la figure (2.15), les expressions analytiques suivantes [4]:

$$\begin{aligned}
 H_{ii} &= 0 \quad \text{car } \mathbf{n} \perp \mathbf{r} \\
 G_{ii} &= \frac{1}{4\pi} \frac{2A_i}{3} \left[\frac{1}{r_{23}} \ln \left(\frac{\tan\left(\frac{\theta_1 + \alpha_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)} \right) + \frac{1}{r_{31}} \ln \left(\frac{\tan\left(\frac{\theta_2 + \alpha_3}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r_{12}} \ln \left(\frac{\tan\left(\frac{\theta_3 + \alpha_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)} \right) \right] \quad (2.47)
 \end{aligned}$$

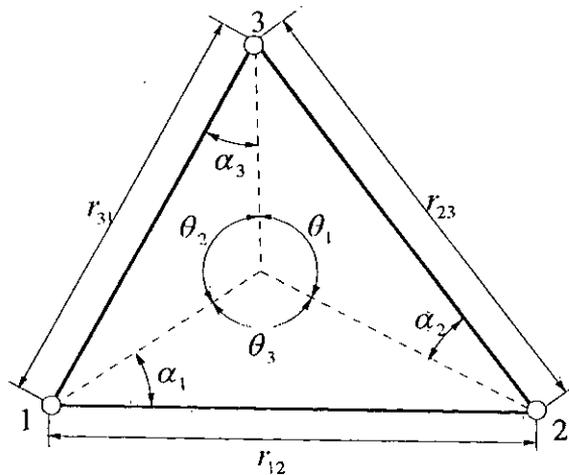


Fig. 2.15 Définition des paramètres géométriques de l'intégration singulière

2.6 Conclusion:

Ce chapitre nous permet de voir comment la méthode des éléments frontières permet de réduire la dimension du problème d'un degré. En effet pour un problème tridimensionnel, elle nécessite seulement la discrétisation de la surface au lieu du volume tout entier.

Les fondements de la méthode des éléments frontières sont basés sur la méthode des résidus pondérés.

Le traitement numérique de la méthode peut être donné par les étapes suivantes:

- Discrétisation de la frontière.
- Calcul des coefficients d'influences H_{ij} et G_{ij} (réguliers et singuliers) et formation du système d'équations linéaires.
- Arrangement du système matriciel.
- Résolution des équations.



Chapitre 3

***ELÉMENTS D'ORDRE
SUPÉRIEUR***

3. Éléments d'ordre supérieur

3.1 Introduction :

Dans le chapitre précédent, on a supposé que u et q étaient constants sur chaque élément de la frontière. En général, u et q peuvent avoir une variation linéaire, quadratique ou même d'ordre supérieur. En plus, leurs variations ne doivent pas être obligatoirement du même ordre, et il est plus consistant de prendre l'ordre de q inférieur à celui de u , vu que la première grandeur (q) est la dérivée de la seconde (u). Cependant, il est plus simple en pratique de considérer u et q ainsi que la géométrie de l'élément du même ordre de variation. Ceci constitue ce qu'on appelle les éléments isoparamétriques. Les éléments, où u et q sont d'ordres différents, sont par contre appelés éléments mixtes.

Les éléments d'ordre supérieur permettent une amélioration importante dans les résultats obtenus, vu qu'ils approximent avec moins d'erreurs les grandeurs physiques et géométriques du problème.

Dans le présent chapitre, on traitera la méthode des éléments frontières avec les éléments linéaires, quadratiques et cubiques. Une discussion approfondie au niveau des éléments linéaires est présentée afin de montrer comment introduire les éléments d'ordre supérieur dans la formulation de la méthode. Nous avons aussi présenté à la fin du chapitre les éléments d'ordre supérieur pour le cas tridimensionnel.

3.2 Éléments d'ordres supérieurs dans le cas bidimensionnel:

3.2.1 Éléments linéaires:

3.2.1.1 Discrétisation de l'équation intégrale:

Il s'agit ici des éléments sur lesquels u et q varient linéairement entre les deux noeuds localisés aux extrémités des segments (Fig. 3.1).

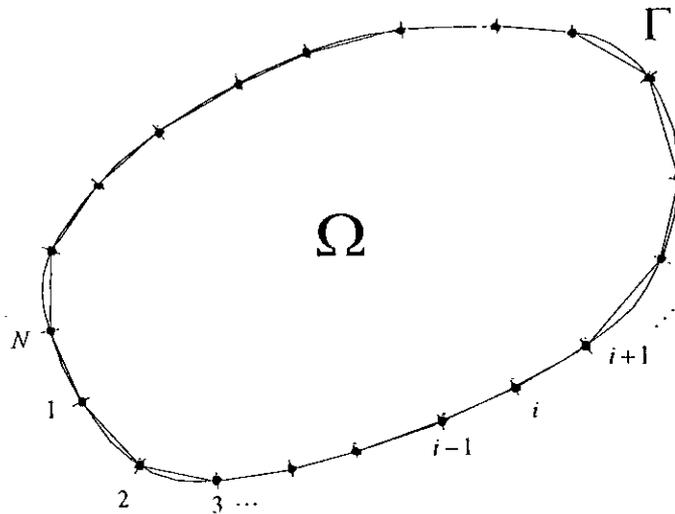


Fig. 3.1 Discretisation de la frontière en éléments linéaires

Lorsque le point ξ de l'équation (2.18) parcourt tous les noeuds P_i , on obtient comme en (2.19) l'équation intégrale discrète suivante :

$$c_i u_i + \sum_{m=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_m} q^* u d\Gamma_m \right) = \sum_{m=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_m} u^* q d\Gamma_m \right) \quad i = 1, N \quad (3.1)$$

Ne étant le nombre d'éléments et N le nombre de noeuds se trouvant sur la frontière.

Il faut noter que le coefficient c_i ne peut plus être remplacé par la valeur $\frac{1}{2}$ comme c'était le cas pour les éléments constants. Ceci parce que le noeud P_i où on écrit l'équation intégrale peut se trouver sur un coin et non sur une surface lisse. Le calcul de c_i , malgré qu'il peut se faire à partir des expressions (2.17) du chapitre 2, peut être évité. Nous montrerons ceci lorsque nous aborderons le problème de calcul des intégrales singulières.

Comme u et q varient linéairement sur chaque élément (Fig. 3.2), on ne peut plus faire sortir u et q des intégrales comme on le faisait pour le cas des éléments constants. Ces intégrales sont maintenant plus difficiles à évaluer et il faut les écrire autrement. L'idée est d'essayer d'exprimer la variation de u et q le long de chaque élément Γ_m en fonction des valeurs nodales u_m^1, u_m^2, q_m^1 et q_m^2 .

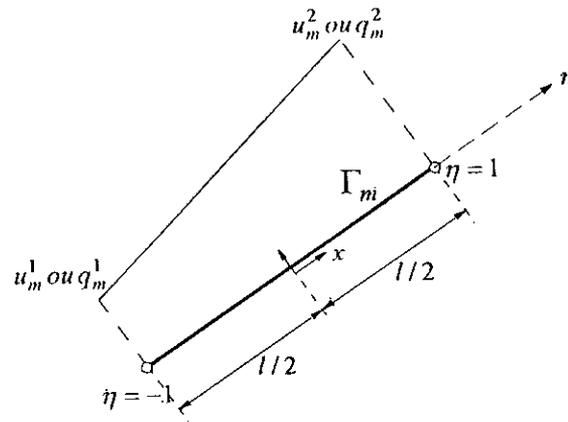


Fig. 3.2 Définition d'un élément linéaire

En se basant sur ce qui a été fait dans la méthode des éléments finis pour représenter les éléments d'ordre supérieur, nous pouvons montrer que u et q peuvent s'exprimer par les relations:

$$\begin{aligned} u_m(\eta) &= \phi_1(\eta)u_m^1 + \phi_2(\eta)u_m^2 \\ q_m(\eta) &= \phi_1(\eta)q_m^1 + \phi_2(\eta)q_m^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont deux fonctions d'interpolation définies par (Fig. 3.3)

$$\begin{aligned} \phi_1(\eta) &= \frac{1}{2}(1 - \eta) \\ \phi_2(\eta) &= \frac{1}{2}(1 + \eta) \end{aligned} \tag{3.3}$$

et η est la coordonnée locale définie sur l'élément et allant de -1 à +1. Pour un point M situé sur l'élément Γ_m à une distance x de son centre, $\eta(M)$ est égale à $\frac{x}{l/2}$, l étant la longueur de cet élément.

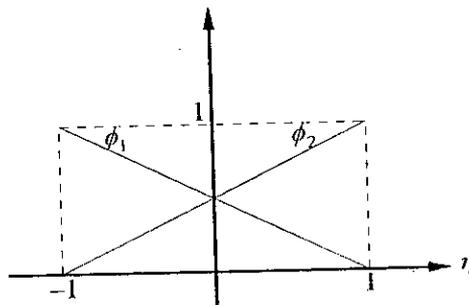


Fig. 3.3 Définition de fonctions ϕ_1 et ϕ_2

Les intégrales de l'équation (3.1) peuvent alors s'exprimer par :

$$\int_{\Gamma_m} q^* u d\Gamma_m = \int_{\Gamma_m} q^* (\phi_1 u_m^1 + \phi_2 u_m^2) d\Gamma_m = \left(\int_{\Gamma_m} q^* \phi_1 d\Gamma_m \right) u_m^1 + \left(\int_{\Gamma_m} q^* \phi_2 d\Gamma_m \right) u_m^2 \quad (3.4)$$

$$\int_{\Gamma_m} u^* q d\Gamma_m = \int_{\Gamma_m} u^* (\phi_1 q_m^1 + \phi_2 q_m^2) d\Gamma_m = \left(\int_{\Gamma_m} u^* \phi_1 d\Gamma_m \right) q_m^1 + \left(\int_{\Gamma_m} u^* \phi_2 d\Gamma_m \right) q_m^2$$

et nous pouvons alors établir les équations discrètes suivantes:

$$c_i u_i + \sum_{m=1}^{N_e} (h_{im}^1 u_m^1 + h_{im}^2 u_m^2) = \sum_{m=1}^{N_e} (g_{im}^1 u_m^1 + g_{im}^2 u_m^2) \quad i = 1, N \quad (3.5)$$

avec :

$$h_{im}^k = \int_{\Gamma_m} q^* \phi_k d\Gamma_m \quad k = 1, 2 \quad (3.6)$$

$$g_{im}^k = \int_{\Gamma_m} u^* \phi_k d\Gamma_m \quad k = 1, 2$$

Notons qu'on ne peut résoudre le système d'équations précédent tel qu'il est. Il est nécessaire de passer de la numérotation locale, où chaque noeud est repéré par l'élément où il appartient, à la numérotation globale faite sur toute la frontière.

Pour effectuer ce passage, nous avons besoin de regrouper les deux termes correspondants aux deux éléments adjacents $(m-1)$ et m en un seul terme (Fig. 3.4). Ceci ressemble à la technique d'assemblage rencontrée dans la méthode des éléments finis.

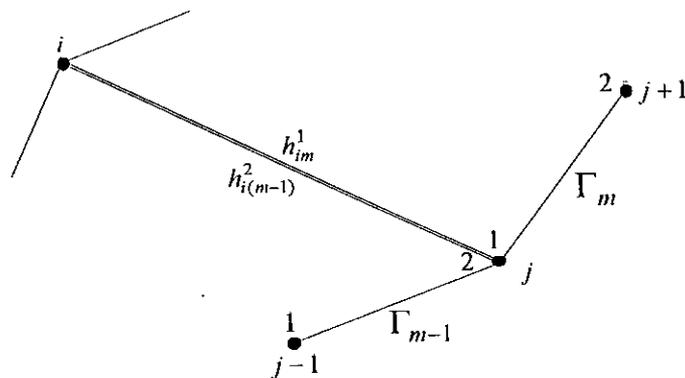


Fig. 3.4 Assemblage des deux termes $h_{i(m-1)}^2$ et h_{im}^1

En se référant à la figure (3.4), la valeur u_j est rencontrée deux fois lors du calcul de la somme de gauche de l'équation (3.5). La première fois dans le noeud 2 de l'élément $(m-1)$

et la deuxième fois dans le noeud 1 de l'élément m . Les termes $(m-1)$ et m de cette somme s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} & \left(h_{i(m-1)}^1 u_{i(m-1)}^1 + h_{i(m-1)}^2 u_{i(m-1)}^2 \right) + \left(h_{im}^1 u_{im}^1 + h_{im}^2 u_{im}^2 \right) \\ & = \left(h_{i(m-1)}^1 u_{j-1} + h_{i(m-1)}^2 u_j \right) + \left(h_{im}^1 u_j + h_{im}^2 u_{j+1} \right) \\ & = h_{i(m-1)}^1 u_{j-1} + \left(h_{i(m-1)}^2 + h_{im}^1 \right) u_j + h_{im}^2 u_{j+1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

De même, on effectue le même type d'assemblage pour les termes q_j .

Cet assemblage doit se faire pour tous les noeuds de la frontière, et l'équation (3.5) devient :

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad i = 1, N \quad (3.8)$$

avec les termes assemblés \hat{H}_{ij} et G_{ij} définis par:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ij} &= h_{i(m-1)}^2 + h_{im}^1 \\ G_{ij} &= g_{i(m-1)}^2 + g_{im}^1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

j étant le noeud commun entre l'élément $(m-1)$ et m .

En introduisant le terme $c_i u_i$ dans la somme de gauche, l'équation prend la forme :

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad i = 1, N \quad (3.10)$$

avec :

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} + c_i \delta_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij} & \text{si } i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + c_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

On obtient ainsi un système d'équations, N équations N inconnues, semblable à celui obtenu pour les éléments constants (équation (2.21)). Pour le résoudre, il suffit de faire passer les inconnues d'un côté et les valeurs connues de l'autre. On obtient ainsi le système :

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} x_j = B_i \quad i = 1, N \quad (3.11)$$

Il ne reste alors plus qu'à résoudre ce système, et obtenir toutes les valeurs de u et q en chaque noeud de la frontière.

Pour les points P_i intérieurs au domaine, on peut calculer le potentiel par l'équation :

$$u_i = -\sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j + \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (3.12)$$

3.2.1.2 Evaluation des intégrales h_{im}^k et g_{im}^k :

Comme nous l'avons fait pour les éléments constants, il est nécessaire de considérer séparément le cas où le noeud i est l'un des deux noeuds de l'élément m sur lequel on intègre, et le cas où i ne l'est pas.

- $i \notin \Gamma_m$: Dans ce cas (Fig. 3.5), les intégrantes varient lentement sur l'intervalle d'intégration, et la quadrature standard de Gauss peut être utilisée :

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \sum_{k=1}^K w_k f(\eta_k) \quad (3.13)$$

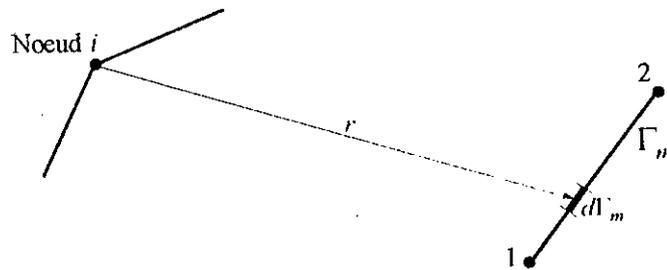


Fig. 3.5 Intégration régulière ($i \notin \Gamma_m$)

Vu que la formule de Gauss utilise l'intervalle $[-1,1]$, il est alors nécessaire de faire un changement de variables de façon à ce que l'intervalle d'intégration devienne $[-1,1]$.

Pour cela, il suffit de décrire la géométrie de l'élément sur lequel on intègre par une représentation paramétrique utilisant la coordonnée locale η . L'élément géométrique étant un segment de droite, cette représentation est définie par (Fig. 3.6):

$$\begin{aligned} x &= \phi_1(\eta) x_m^1 + \phi_2(\eta) x_m^2 \\ y &= \phi_1(\eta) y_m^1 + \phi_2(\eta) y_m^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

où x_m^1, y_m^1 et x_m^2, y_m^2 sont les coordonnées des noeuds 1 et 2 de l'élément m et η varie entre -1 et 1 .

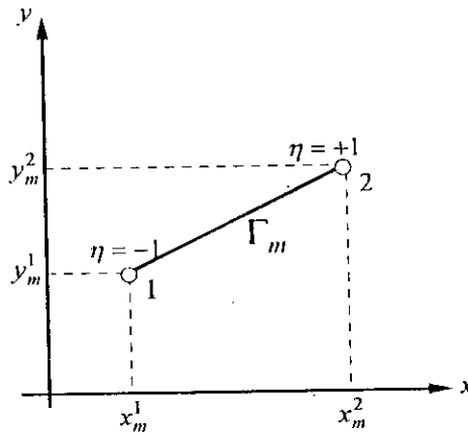


Fig. 3.6 Représentation paramétrique de l'élément Γ_m

L'élément d'intégration $d\Gamma_m$ peut aussi s'écrire en fonction de la coordonnée locale η de la manière suivante :

$$d\Gamma_m = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{3.15}$$

et en dérivant les expressions de x et y , on obtient :

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{2}(x_m^2 - x_m^1)d\eta \\ dy &= \frac{1}{2}(y_m^2 - y_m^1)d\eta \end{aligned} \tag{3.16}$$

d'où :

$$d\Gamma_m = \frac{1}{2} \sqrt{(x_m^2 - x_m^1)^2 + (y_m^2 - y_m^1)^2} d\eta = \frac{1}{2} l_m d\eta \tag{3.17}$$

l_m étant la longueur de l'élément m .

Les intégrales h_{im}^k et g_{im}^k peuvent être finalement écrites en fonction uniquement de la coordonnée locale η :

$$\begin{aligned} h_{im}^k &= \int_{\Gamma_m} q^* \phi_k d\Gamma_m = \int_{-1}^1 -\frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(\eta)}{r(\eta)} \phi_k(\eta) \left(\frac{l_m}{2}\right) d\eta = \int_{-1}^1 f_1(\eta) d\eta \quad k = 1,2 \\ g_{im}^k &= \int_{\Gamma_m} u^* \phi_k d\Gamma_m = \int_{-1}^1 \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r(\eta)}\right) \phi_k(\eta) \left(\frac{l_m}{2}\right) d\eta = \int_{-1}^1 f_2(\eta) d\eta \quad k = 1,2 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$\mathbf{r}(\eta)$ est le vecteur de composante $(x(\eta)-x_i, y(\eta)-y_i)$.

Ayant écrit les intégrales en fonction de η , la quadrature de Gauss peut être utilisée sans difficultés.

- $i \in \Gamma_m$: deux autres cas peuvent être considérés pour le calcul des intégrales h_{im}^k et g_{im}^k :

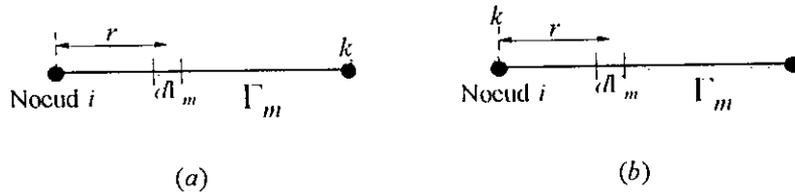


Fig. 3.7 Intégration régulière ($i \in \Gamma_m$)

- a) Le noeud i ne coïncide pas avec le noeud k de l'élément m (Fig. 3.7a) :

Dans ce cas aussi, les intégrantes varient lentement, même si la distance r s'annule (l'élément d'intégration $d\Gamma_m$ passe par le noeud i). En effet, on peut montrer que, dans ce cas, la limite des intégrantes lorsque r tend vers 0 est finie. Ceci vient du fait que les noyaux u^* et q^* ont un comportement de l'ordre $O(\ln r)$ et $O(1/r)$ et que la fonction ϕ_k a un comportement de l'ordre $O(r)$.

Vu qu'il n'y a pas de singularités, on applique de nouveau la formule standard de la quadrature de gauss.

- b) Le noeud i coïncide avec le noeud k de l'élément m (Fig. 3.7b) :

Dans ce cas, la procédure doit être modifiée. Les intégrantes varient maintenant très rapidement lorsque r tend vers 0.

- Pour l'intégrale g_{im}^k , la quadrature spéciale de Gauss utilisant la fonction de poids $\ln(1/r)$ doit être utilisée :

$$\int_0^1 f(\eta) \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta = \sum_{k=1}^K w_k f(\eta_k) \quad (3.19)$$

Ceci nécessite cependant un changement de variable de l'intervalle $[-1,1]$ à l'intervalle $[0,1]$. Pour montrer comment utiliser cette quadrature, on va considérer le cas où i est le noeud 1 de l'élément m et où $k=1$. Soit alors le

changement de variable $\eta' = \frac{1}{2}(1 + \eta)$. $\phi_1(\eta)$ devient alors égale à

$$\frac{1}{2}(1 - \eta) = 1 - \eta'$$

et l'intégrale g_{im}^k s'écrit :

$$\begin{aligned}
 g_{im}^1 &= \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{1}{l_m \eta'}\right) \cdot (1-\eta') \cdot \left(\frac{l_m}{2}\right) \cdot 2d\eta' \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{1}{l_m}\right) \cdot (1-\eta') \cdot l_m d\eta' + \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{1}{\eta'}\right) \cdot (1-\eta') \cdot l_m d\eta'
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

La première intégrale ne présente pas une singularité, et peut être calculée par la quadrature standard. La deuxième est de la forme $\int_0^1 f(\eta) \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta$ et sera évaluée en utilisant la quadrature spéciale mentionnée plus haut.

Notons d'un autre côté que l'intégrale précédente (g_{im}^k) peut être calculée analytiquement par la formule [1] :

$$g_{im}^k = \frac{l}{2} \left(\frac{3}{2} - \ln(l) \right)
 \tag{3.21}$$

• Pour le calcul de h_{im}^k , il n'existe aucune formule de quadrature qui permet d'évaluer cette intégrale [36,41].

Cependant, son calcul ainsi que celui du coefficient c_i peuvent être évités. En effet, l'élément H_{ii} de la matrice \mathbf{H} regroupe l'intégrale h_{im}^k et le coefficient c_i . En se référant à la figure (3.8), ceci veut dire que :

$$H_{ii} = c_i + h_{i(m-1)}^2 + h_{im}^1
 \tag{3.22}$$

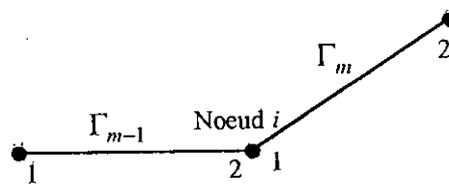


Fig. 3.8 Représentation de deux éléments adjacents

Le calcul de H_{ii} , sans celui de h_{im}^k et c_i , peut être effectué en se basant sur le fait que si on appliquait sur toute la frontière un potentiel uniforme, les valeurs de q sur celle-ci doivent être obligatoirement nulles [1,2,4,7]. Sous cette hypothèse l'équation (3.10) produirait :

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} = 0 \quad i = 1, N
 \tag{3.23}$$

et les termes singuliers H_{ii} peuvent être obtenus par :

$$H_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij} \quad i = 1, N \quad (3.24)$$

3.2.2 Éléments quadratiques :

Les éléments quadratiques sont fréquemment utilisés. Ils permettent de mieux représenter la géométrie de la frontière et ne présentent pas de difficultés particulières par rapport aux éléments linéaires.

Comme dans le cas des éléments constants et linéaires, la frontière Γ est divisée en Ne éléments, mais cette fois ci, ces éléments sont des parties de paraboles repérées par 3 points géométriques (Fig. 3.9).

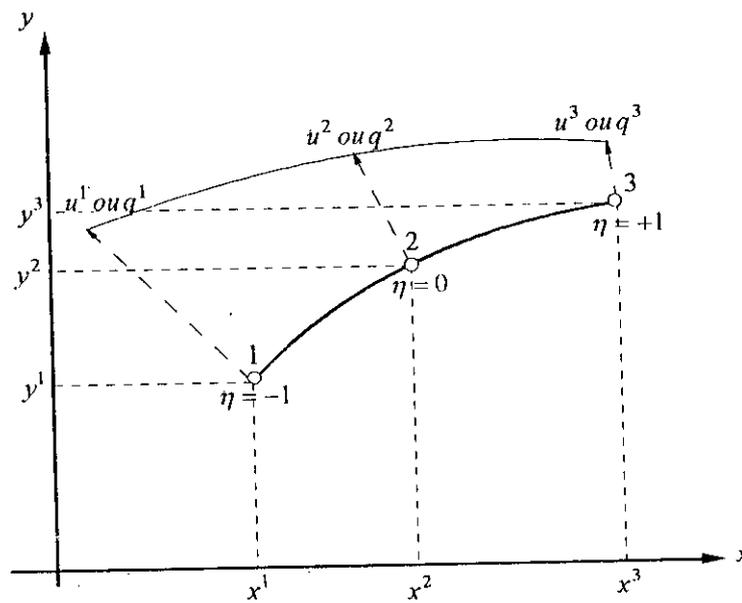


Fig. 3.9 Représentation d'un élément quadratique

La représentation paramétrique de chaque élément en fonction de sa coordonnée locale η est définie par:

$$\begin{aligned} x &= \phi_1 x^1 + \phi_2 x^2 + \phi_3 x^3 \\ y &= \phi_1 y^1 + \phi_2 y^2 + \phi_3 y^3 \end{aligned} \quad (3.25)$$

avec (Fig. 3.10):

$$\begin{aligned}
 \phi_1(\eta) &= -\frac{1}{2}\eta(1-\eta) \\
 \phi_2(\eta) &= (1-\eta)(1+\eta) \\
 \phi_3(\eta) &= \frac{1}{2}\eta(1+\eta)
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

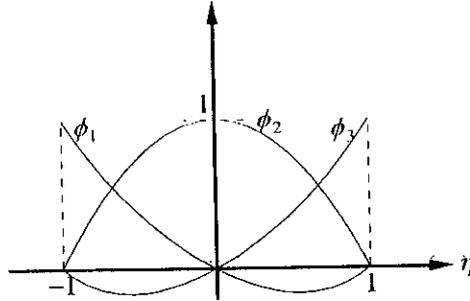


Fig. 3.10 Définition des fonctions d'interpolation ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_3

Les fonctions u et q varient quadratiquement et peuvent aussi s'écrire en fonction de la coordonnée locale η :

$$\begin{aligned}
 u &= \phi_1 u^1 + \phi_2 u^2 + \phi_3 u^3 \\
 q &= \phi_1 q^1 + \phi_2 q^2 + \phi_3 q^3
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

Les intégrales $\int_{\Gamma_m} q^* u d\Gamma_m$ et $\int_{\Gamma_m} u^* q d\Gamma_m$ se décomposent maintenant en 3 intégrales :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_m} q^* u d\Gamma_m &= \left(\int_{\Gamma_m} q^* \phi_1 d\Gamma_m \right) u_m^1 + \left(\int_{\Gamma_m} q^* \phi_2 d\Gamma_m \right) u_m^2 + \left(\int_{\Gamma_m} q^* \phi_3 d\Gamma_m \right) u_m^3 \\
 \int_{\Gamma_m} u^* q d\Gamma_m &= \left(\int_{\Gamma_m} u^* \phi_1 d\Gamma_m \right) q_m^1 + \left(\int_{\Gamma_m} u^* \phi_2 d\Gamma_m \right) q_m^2 + \left(\int_{\Gamma_m} u^* \phi_3 d\Gamma_m \right) q_m^3
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

et l'équation intégrale s'écrit :

$$c_i u_i + \sum_{m=1}^{Ne} (h_{im}^1 u_m^1 + h_{im}^2 u_m^2 + h_{im}^3 u_m^3) = \sum_{m=1}^{Ne} (g_{im}^1 u_m^1 + g_{im}^2 u_m^2 + g_{im}^3 u_m^3) \quad i = 1, N
 \tag{3.29}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 h_{im}^k &= \int_{\Gamma_m} q^* \phi_k d\Gamma_m & k &= 1, 2, 3 \\
 g_{im}^k &= \int_{\Gamma_m} u^* \phi_k d\Gamma_m & k &= 1, 2, 3
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

Après assemblage l'équation précédente devient :

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad i = 1, N \quad (3.31)$$

avec :

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \begin{cases} c_i + \hat{H}_{ij} & \text{si } i = j \\ \hat{H}_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases} \\ \hat{H}_{ij} &= \begin{cases} h_{i(m-1)}^3 + h_{im}^1 & \text{si } j \text{ est le noeud commun entre } (m-1) \text{ et } m \\ h_{im}^2 & \text{si } j \text{ est le noeud milieu de } m \end{cases} \\ G_{ij} &= \begin{cases} g_{i(m-1)}^3 + g_{im}^1 & \text{si } j \text{ est le noeud commun entre } (m-1) \text{ et } m \\ g_{im}^2 & \text{si } j \text{ est le noeud milieu de } m \end{cases} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Le reste de la procédure (réarrangement du système en $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$, calcul du potentiel aux points intérieurs) est semblable à celle étudiée avec les éléments linéaires.

Pour le calcul des intégrales h_{im}^k et g_{im}^k , on suit les mêmes étapes discutées pour les éléments linéaires:

- **$i \neq$ noeud k de l'élément m (pas de singularité)** : On utilise alors la quadrature standard de Gauss. Les intégrales doivent être transformées pour prendre la forme :

$$\begin{aligned} h_{im}^k &= \int_{-1}^1 q^*(\eta) \phi_k(\eta) |J| d\eta \\ g_{im}^k &= \int_{-1}^1 u^*(\eta) \phi_k(\eta) |J| d\eta \end{aligned} \quad (3.33)$$

où $|J|$ est le jacobien défini par :

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\eta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta}\right)^2} \quad (3.34)$$

- **$i =$ noeud k de l'élément m (singularité)** : Le calcul de g_{im}^k nécessite l'utilisation de la quadrature de Gauss ayant la fonction de poids $\ln(1/\eta)$. Un changement de variable est nécessaire pour ramener l'intervalle de $[-1, 1]$ à $[0, 1]$. On distingue alors trois cas :

- $i =$ noeud 1 de l'élément m :

Le changement de variable est défini par : $\eta' = \frac{\eta+1}{2}$.

L'intégrale g_{im}^1 se divise en deux parties, une possédant un terme singulier en $\ln(1/\eta')$, l'autre ne possédant aucune singularité. La première est donc évaluée au moyen de la quadrature de Gauss spéciale ; la deuxième par la quadrature de Gauss standard.

- $i = \text{noeud 2 de l'élément } m :$

L'intégrale est d'abord divisée en deux :

$$g_{im}^2 = \int_{-1}^0 u^*(\eta)\phi_2(\eta) |J| d\eta + \int_0^1 u^*(\eta)\phi_2(\eta) |J| d\eta \quad (3.35)$$

Un changement de variable $\eta' = -\eta$ est effectué pour la première. Chacune des deux intégrales est elle même décomposée en deux intégrales, l'une singulière, l'autre régulière. Leur calcul s'effectue comme précédemment.

- $i = \text{noeud 3 de l'élément } m :$

Ce cas ressemble au 1^{er}, sauf que le changement de variable est défini

$$\text{maintenant par: } \eta' = \frac{1-\eta}{2}.$$

Pour les intégrales h_m^k il n'est pas nécessaire de faire leur calcul, puisqu'on détermine directement les termes H_{ii} par :

$$H_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij} \quad i = 1, N. \quad (3.36)$$

3.2.3 Eléments cubiques :

Les éléments d'ordre plus grand que 2 sont rarement utilisés en pratique, mais peuvent être intéressants dans certains cas d'application. Pour cette raison, ils seront décrits brièvement, à savoir par la variation cubique de la géométrie, de u et de q (Fig. 3.11).

$$\begin{cases} x = \phi_1 x^1 + \phi_2 x^2 + \phi_3 x^3 + \phi_4 x^4 \\ y = \phi_1 y^1 + \phi_2 y^2 + \phi_3 y^3 + \phi_4 y^4 \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\begin{cases} u = \phi_1 u^1 + \phi_2 u^2 + \phi_3 u^3 + \phi_4 u^4 \\ q = \phi_1 q^1 + \phi_2 q^2 + \phi_3 q^3 + \phi_4 q^4 \end{cases} \quad (3.38)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{1}{16}(1-\eta)(-10+9(\eta^2+1)) \\
 \phi_2 &= \frac{1}{16}(1+\eta)(-10+9(\eta^2+1)) \\
 \phi_3 &= \frac{9}{16}(1-\eta^2)(1-3\eta) \\
 \phi_4 &= \frac{9}{16}(1-\eta^2)(1+3\eta)
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

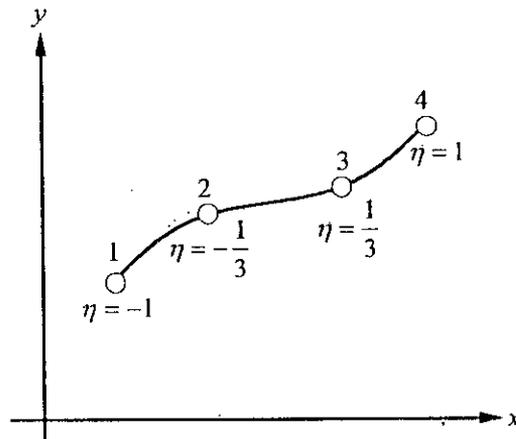


Fig. 3.11 Représentation d'un élément cubique

3.3 Éléments d'ordre supérieur dans le cas tridimensionnel :

3.3.1 Préliminaire :

La discrétisation des objets tridimensionnels se fait généralement en utilisant les éléments triangulaires ou quadrilatéraux. Les fonctions u et q et ceux décrivant la géométrie peuvent être constants (Chapitre 2), linéaires ou ayant un ordre plus élevé. Les éléments d'ordre supérieur ont une grande importance dans les objets tridimensionnels puisqu'ils permettent de bien suivre la courbure de la surface entourant le domaine d'étude.

Afin d'étudier les éléments courbés, on a besoin d'abord de connaître comment passer des coordonnées globales (x, y, z) au coordonnées locales (η_1, η_2, ζ) définies sur la surface de notre domaine (Fig. 3.12).

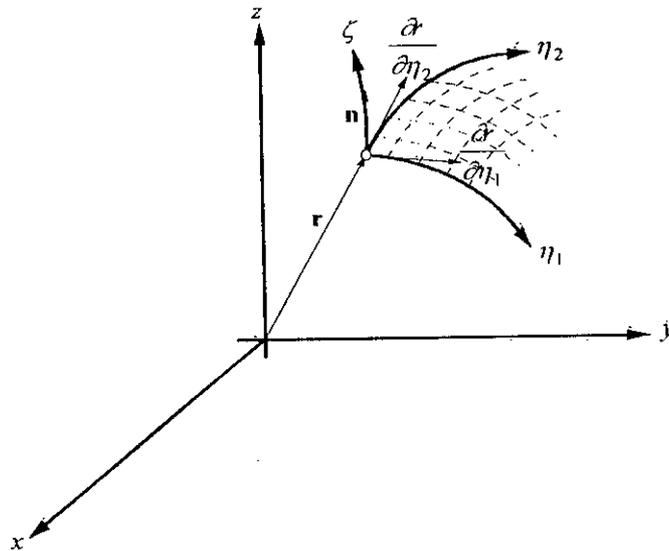


Fig. 3.12 Définition des coordonnées locales η_1 , η_2 et ζ

Connaissant cette bijection entre (x, y, z) et (η_1, η_2, ζ) , on peut écrire pour n'importe quelle fonction f , la transformation générale suivante [1,2,4] :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial f}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta_1} & \frac{\partial y}{\partial \eta_1} & \frac{\partial z}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta_2} & \frac{\partial y}{\partial \eta_2} & \frac{\partial z}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Cette transformation nous permet de décrire des éléments différentiels de volume $d\Omega$ ou de surface $d\Gamma$ en terme des coordonnées curvilignes η_1 , η_2 et ζ .

Un élément différentiel de volume $d\Omega$ (Fig. 3.13) peut s'écrire [1,2,4,26]:

$$d\Omega = \left| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_2} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \right| d\eta_1 d\eta_2 d\zeta = |J| d\eta_1 d\eta_2 d\zeta \quad (3.41)$$

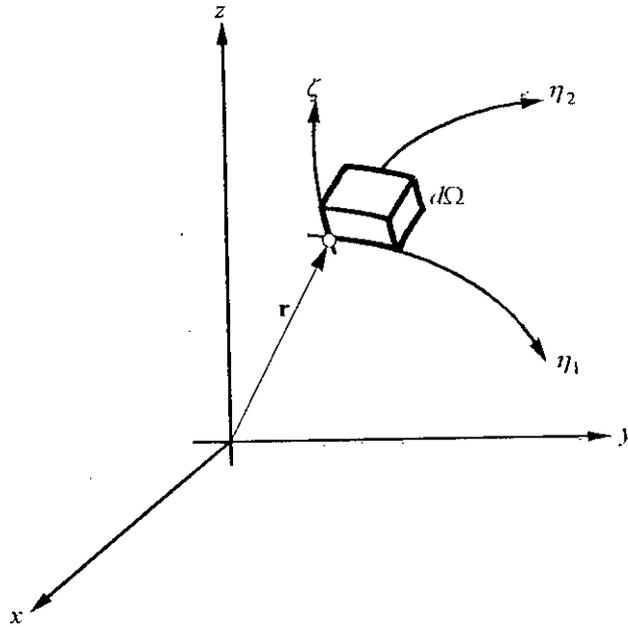


Fig. 3.13 Élément différentiel de volume

Pour un élément différentiel de surface (Fig. 3.14), on a :

$$d\Gamma = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_2} \right| d\eta_1 d\eta_2 = |G| d\eta_1 d\eta_2 \quad (3.42)$$

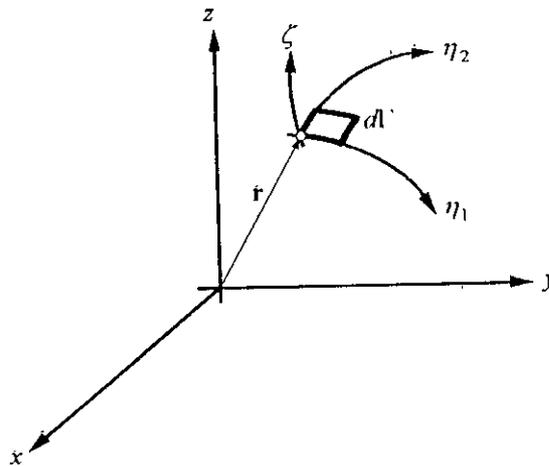


Fig. 3.14 Élément différentiel de surface

Ces relations peuvent être utilisées pour intégrer les intégrales de la forme $\int_{\Gamma_m} q^* u d\Gamma_m$ et

$\int_{\Gamma_m} u^* q d\Gamma_m$ et $\int_{\Omega} b u^* d\Omega$ (cette dernière est rencontrée lors de l'étude de l'équation de poisson

(chapitre 4)), qui prennent maintenant la forme :

$$\int u^* q |G| d\eta_1 d\eta_2 \text{ et } \int q^* u |G| d\eta_1 d\eta_2 \text{ et } \int b u^* |J| d\eta_1 d\eta_2 d\zeta .$$

3.3.2 Classification des éléments tridimensionnels :

La représentation des éléments tridimensionnels d'ordre élevé sera illustrée dans un tableau les regroupant tous. Pour n'importe quel type, on fera l'approximation suivante sur les fonction u et q et sur le vecteur position \mathbf{r} décrivant la géométrie de l'élément:

$$\begin{cases} u = \phi_1 u^1 + \phi_2 u^2 + \dots + \phi_m u^m = \sum_{i=1}^m \phi_i u^i \\ q = \phi_1 q^1 + \phi_2 q^2 + \dots + \phi_m q^m = \sum_{i=1}^m \phi_i q^i \\ \mathbf{r} = \phi_1 \mathbf{r}^1 + \phi_2 \mathbf{r}^2 + \dots + \phi_m \mathbf{r}^m = \sum_{i=1}^m \phi_i \mathbf{r}^i \end{cases} \quad (3.43)$$

où m représente le nombre de noeuds de l'élément. u^i , q^i et \mathbf{r}^i sont le potentiel u , sa dérivée q et le vecteur position \mathbf{r} du noeud i de cet élément.

Pour chaque type d'élément on ne présentera dans le tableau que la forme de l'élément et les fonctions d'interpolation ϕ_i (Tableau 3.1).

<p style="text-align: center;">Elément triangulaire linéaire</p>	$\phi_1 = \eta_1$ $\phi_2 = \eta_2$ $\phi_3 = 1 - \eta_1 - \eta_2$
<p style="text-align: center;">Elément triangulaire quadratique</p>	$\phi_1 = \eta_1(2\eta_1 - 1)$ $\phi_2 = \eta_2(2\eta_2 - 1)$ $\phi_3 = \eta_3(2\eta_3 - 1)$ $\phi_4 = 4\eta_1\eta_2$ $\phi_5 = 4\eta_2\eta_3$ $\phi_6 = 4\eta_3\eta_1$

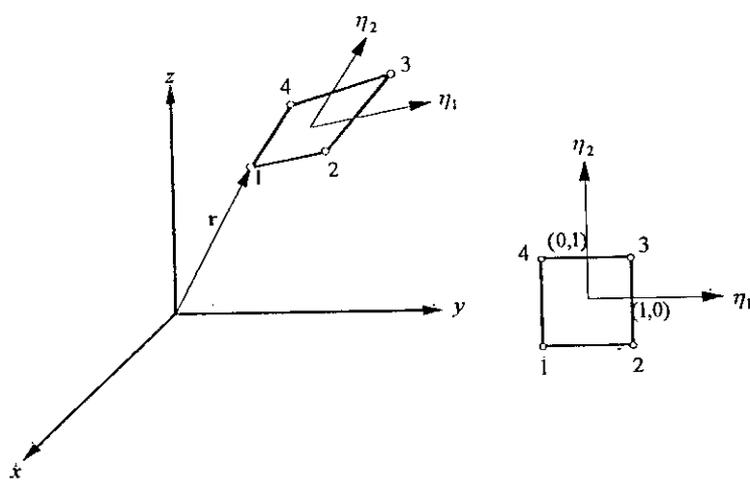
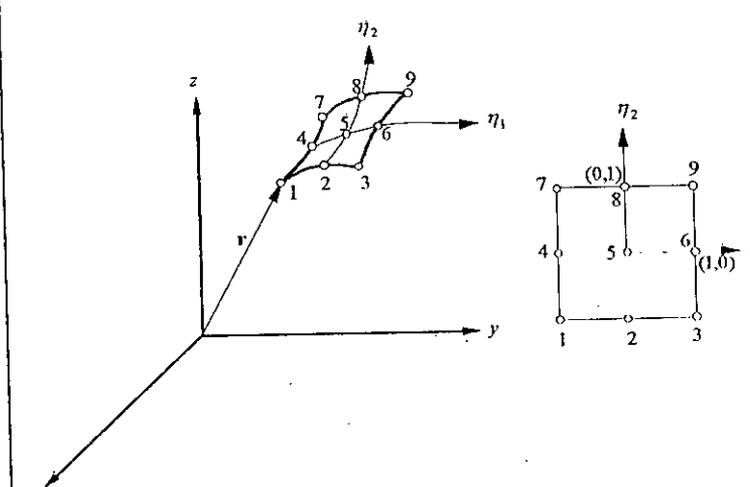
 <p style="text-align: center;">Elément quadrilatérale bilinéaire</p>	$\phi_1 = \frac{1}{4}(1 - \eta_1)(1 - \eta_2)$ $\phi_2 = \frac{1}{4}(1 + \eta_1)(1 - \eta_2)$ $\phi_3 = \frac{1}{4}(1 + \eta_1)(1 + \eta_2)$ $\phi_4 = \frac{1}{4}(1 - \eta_1)(1 + \eta_2)$
 <p style="text-align: center;">Elément quadrilatérale biquadratique</p>	$\phi_1 = \frac{1}{4} \eta_1 (\eta_1 - 1) \eta_2 (\eta_2 - 1)$ $\phi_2 = \frac{1}{2} (1 - \eta_1^2) \eta_2 (\eta_2 - 1)$ $\phi_3 = \frac{1}{4} \eta_1 (1 + \eta_1) \eta_2 (1 + \eta_2)$ $\phi_4 = \frac{1}{2} \eta_1 (\eta_1 - 1) (1 - \eta_2^2)$ $\phi_5 = (1 - \eta_1^2) (1 - \eta_2^2)$ $\phi_6 = \frac{1}{2} \eta_1 (1 + \eta_1) (1 - \eta_2^2)$ $\phi_7 = \frac{1}{4} \eta_1 (\eta_1 - 1) \eta_2 (1 + \eta_2)$ $\phi_8 = \frac{1}{2} (1 - \eta_1^2) \eta_2 (1 + \eta_2)$ $\phi_9 = \frac{1}{4} \eta_1 (1 + \eta_1) \eta_2 (1 + \eta_2)$

Tableau 3.1 Présentation des éléments d'ordre supérieur dans le cas tridimensionnel

L'évaluation des intégrales qui se présentent ici peut être effectuée grâce à la quadrature de Gauss standard [Annexe B] si $r \neq 0$, et celle de Gauss spéciale s'il y a un problème de singularité ($r \rightarrow 0$). Cristescu, Loubignac et Piña [4,42] ont présenté une formule de quadrature numérique permettant le calcul d'intégrales définies sur des triangles ou des

rectangles et ayant la singularité en $1/r$. L'étude du calcul de ces intégrales singulières est très compliquée et ne sera pas décrite ici.

3.4 Conclusion:

Les éléments d'ordre supérieur permettent une amélioration considérable des erreurs introduites lors de la mise en œuvre de la méthode. En effet, les erreurs sont de trois types:

- Erreurs dues à l'approximation géométrique.
- Erreurs dues à l'approximation des grandeurs u et q .
- Erreurs d'arrondis du calculateur numérique.

L'utilisation des éléments d'ordre supérieur minimise les deux premiers types d'erreurs, ce qui implique une augmentation de la précision dans les résultats.



Chapitre 4

PROBLÈMES DIVERS

4. Problèmes divers

4.1 Introduction :

La méthode des éléments frontières présentée dans les chapitres précédents pour les cas bidimensionnels et tridimensionnels avait des restrictions considérables. Parmi ces restrictions : l'absence de sources intérieures, le traitement seulement de domaines fermés, homogènes et entourés de simples frontières. Toutes ces restrictions seront levées dans ce chapitre, et toutes les modifications nécessaires à la méthode seront introduites.

4.2 Charges intérieures (Equation de Poisson) :

S'il y a des charges discrètes ou continues à l'intérieur du domaine d'étude, l'équation définissant le problème doit être remplacée par celle de Poisson :

$$\nabla^2 u = \frac{\rho}{\varepsilon} = b \quad \text{dans } \Omega \quad (4.1)$$

b étant une fonction connue partout dans Ω .

L'équation intégrale qui prend en considération l'équation de Poisson, peut aussi être obtenue soit par le théorème de Green, soit par la méthode des résidus pondérés. En remplaçant $\nabla^2 u$ dans la formule de Green par la fonction connue b , on obtient en suivant les mêmes étapes qu'au paragraphe 3 du chapitre 2 :

$$c_\xi u_\xi + \int_\Gamma q_\xi^* u \, d\Gamma + \int_\Omega b u^* \, d\Omega = \int_\Gamma u_\xi^* q \, d\Gamma \quad (4.2)$$

Cette équation est la même que celle obtenue en utilisant l'équation de Laplace (2.18), à part qu'il existe un nouveau terme :

$$D_i = \int_\Omega b u^* \, d\Omega \quad (4.3)$$

Cette intégrale ne met en jeu que des fonctions connues dans son intégrande et son évaluation ne pose pas un grand problème. Pour calculer numériquement D_i , le domaine intérieur Ω est divisé en un nombre fini M de cellules, triangulaires et/ou quadrilatérales

(Fig. 4.1) pour les problèmes bidimensionnels et de formes tétraédriques et/ou hexaédriques pour les problèmes tridimensionnels.

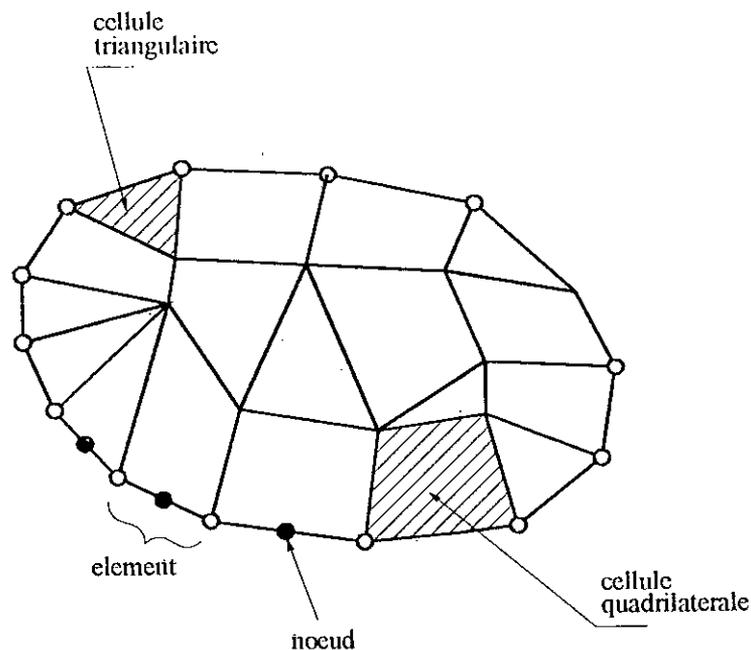


Fig. 4.1 Discrétisation du domaine Ω

L'évaluation de l'intégrale peut s'effectuer en utilisant une quadrature régulière, celle de Gauss par exemple [1,2] :

$$D_i = \int_{\Omega} bu^* d\Omega = \sum_{e=1}^M \left(\sum_{k=1}^K w_k (bu^*)_k \right) \Omega_e \quad (4.4)$$

où e identifie les différentes cellules, w_k sont les poids d'intégration de la quadrature, Ω_e est l'aire de la cellule e et D_i est le résultat, différent pour chaque point i où on écrit l'équation intégrale. La fonction (bu^*) doit être évaluée en K points d'intégration pour chaque cellule.

Ainsi l'équation (4.2) devient après discrétisation de la frontière :

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j + D_i = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad i = 1, N \quad (4.5)$$

où sous forme matricielle :

$$\mathbf{HU} + \mathbf{D} = \mathbf{GQ} \quad (4.6)$$

Comme \mathbf{D} est un vecteur connu, il n'y a pas de nouvelles inconnues et la résolution peut s'effectuer de la même façon que celle présentée aux chapitre 2 et 3.

Les valeurs de u et q étant connues sur toute la frontière après résolution, on peut calculer le potentiel en n'importe quel point intérieur P_i par :

$$u_i = -\sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j - D_i + \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (4.7)$$

La subdivision de tout le domaine, afin d'évaluer l'intégrale D_i , n'est pas toujours indispensable. En effet, il existe des cas particuliers où l'intégrale sur le domaine pourra être transformée en une intégrale uniquement sur la frontière. C'est le cas, par exemple, lorsqu'il y a des charges discrètes dans le domaine ou lorsque la fonction b est harmonique, c'est à dire, $\nabla^2 b=0$.

Le premier cas se manipule facilement avec la méthode des éléments frontières. S'il y a N_c charges à l'intérieur du domaine, l'équation de poisson au niveau de chaque charge Q^l s'écrit [1,2] :

$$\nabla^2 u = b = Q^l \delta^l \quad l = 1, N_c \quad (4.8)$$

où Q^l est la valeur de la charge l , et δ^l est la fonction de Dirac associée au point l .

L'intégrale sur le volume $\int_{\Omega} b u^* d\Omega$ devient alors [1,2] :

$$D_i = \int_{\Omega} b u^* d\Omega = \sum_{l=1}^{N_c} Q^l (u^*)^l \quad (4.9)$$

$(u^*)^l$ est la valeur de la solution fondamentale u^* au point l .

Le deuxième cas où b est harmonique, peut être traité en essayant de trouver une fonction v^* telle que :

$$u^* = \nabla^2 v^* \quad (4.10)$$

et écrire la formule de Green :

$$\int_{\Omega} (b \nabla^2 v^* - v^* \nabla^2 b) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(b \frac{\partial v^*}{\partial n} - v^* \frac{\partial b}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (4.11)$$

Etant donné que $\nabla^2 b=0$, on a alors :

$$\int_{\Omega} bu^* d\Omega = \int_{\Omega} b\nabla^2 v^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(b \frac{\partial v^*}{\partial n} - v^* \frac{\partial b}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (4.12)$$

La fonction v^* requise pour ce cas est la solution fondamentale de l'équation biharmonique définie par :

$$\nabla^2 u^* = \nabla^2 (\nabla^2 v^*) = \nabla^4 v^* = -\delta_i \quad (4.13)$$

v^* est définie en 2 dimensions par [2] :

$$v^* = \frac{r^2}{8\pi} \left(\ln \left(\frac{1}{r} \right) + 1 \right) \quad (4.14)$$

et en 3 dimensions par :

$$v^* = \frac{r}{8\pi} \quad (4.15)$$

4.3 Régions infinies :

Bien que l'équation intégrale a été obtenue dans l'hypothèse où le domaine Ω est entouré par une frontière régulière et fermée Γ (problèmes intérieurs), tous les concepts étudiés jusqu'ici sont aussi valables pour une région infinie et régulière (problèmes extérieurs) (Fig. 4.2). Cependant, pour que cette extension soit valide, certaines régularités dans les conditions concernant les fonctions de l'équation (2.18), définies sur une surface très loin de l'origine, doivent être vérifiées.

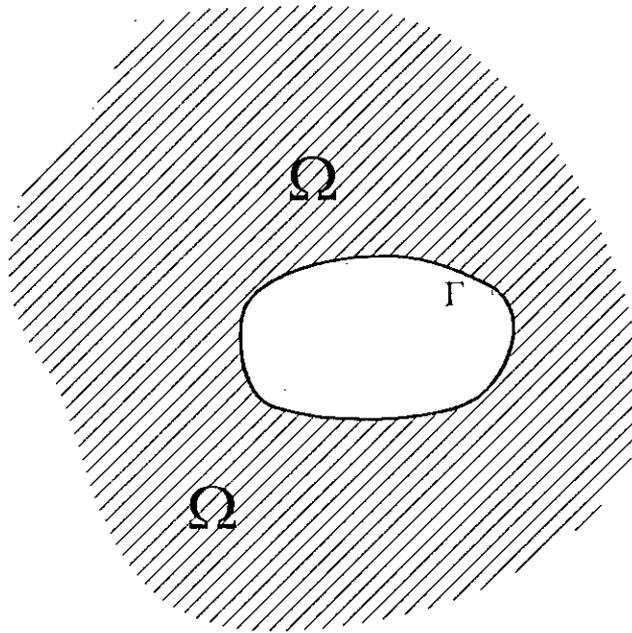


Fig. 4.2 Problème extérieur

Soit $\bar{\Gamma}$ une surface circulaire (ou sphérique si le problème est tridimensionnel) de rayon R entourant la surface Γ (Fig. 4.3).

On peut écrire l'équation intégrale aux frontières (2.18) pour le domaine fermé Ω limité par la surface réelle Γ et la surface fictive $\bar{\Gamma}$:

$$c_{\xi} u_{\xi} + \int_{\Gamma} q_{\xi}^* u d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} q_{\xi}^* u d\bar{\Gamma} = \int_{\Gamma} u_{\xi}^* q d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} u_{\xi}^* q d\bar{\Gamma} \quad (4.16)$$

Notons que l'intégration sur Γ se fait dans le sens des aiguilles d'une montre alors que celle sur $\bar{\Gamma}$ suivant le sens trigonométrique.

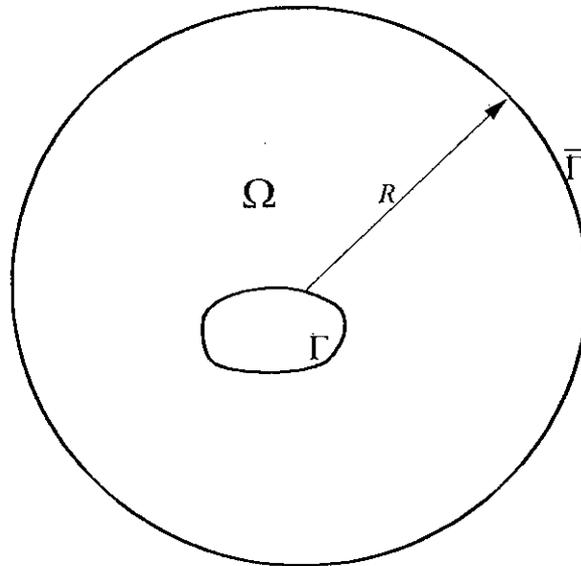


Fig. 4.3 Définition de la frontière fictive

Pour que tout le domaine extérieur à Γ soit pris en compte, il suffit de tendre R vers l'infini, et l'équation (2.18) ne sera valide que si :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\bar{\Gamma}} (q_{\xi}^* u - u_{\xi}^* q) d\bar{\Gamma} \right) = 0 \tag{4.17}$$

c'est à dire qu'on ne peut écrire : $c_{\xi} u_{\xi} + \int_{\Gamma} q_{\xi}^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{\xi}^* q d\Gamma$ que si la condition (4.17) soit vérifiée.

On peut montrer [1] que ceci n'est vraie que si u est au moins de l'ordre $O(1/r)$ pour les problèmes tridimensionnels et $O(\ln(r))$ pour les problèmes bidimensionnels.

Il faut noter qu'il est possible, dans le cas de problèmes externes, d'évaluer l'élément singulier H_{ii} de la diagonale de la matrice \mathbf{H} en utilisant l'équation (3.23), mais il faut faire attention car les conditions de régularité à l'infini ne sont pas vérifiées du fait que u est supposé constant partout dans le domaine Ω .

Etant donné qu'on peut montrer que :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\bar{\Gamma}} q^* d\bar{\Gamma} \right) = -1 \tag{4.18}$$

pour les problèmes bidimensionnels et tridimensionnels et que q est nul partout, on a à la place de $H_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}$ la formule :

$$H_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij} + 1 \quad (4.19)$$

Pour les problèmes semi-infinis, où un plan infini appartient à la frontière (Fig. 4.4), il n'est pas nécessaire de prendre en considération ce plan. En effet, il suffit d'utiliser la méthode des images où une frontière Γ' , symétrique à Γ par rapport au plan et portant des conditions aux limites permettant de les retrouver sur le plan, remplace ce dernier.

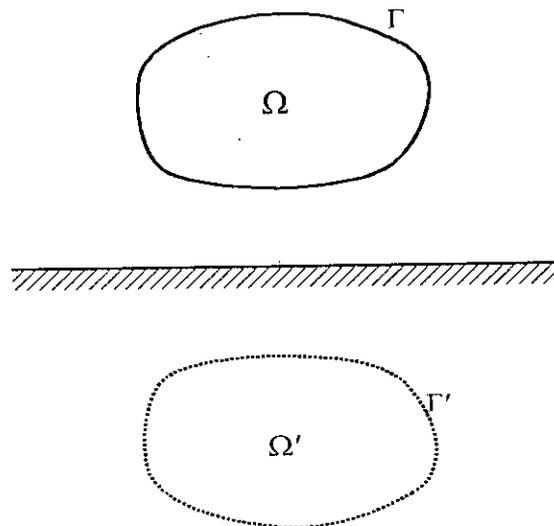


Fig. 4.4 Méthode des images

Les problèmes extérieurs sont souvent rencontrés en électrotechnique, étant donné que le milieu physique est généralement l'air. Le traitement par la méthode des éléments frontières des milieux s'étendant à l'infini est un avantage considérable lorsqu'on la compare aux méthodes des différences finies et des éléments finis.

4.4 Milieux non homogènes :

Lorsque les propriétés physiques du milieu en question (permittivité, perméabilité, etc.) changent en fonction de la position, le milieu est dit non homogène et la méthodologie utilisée pour les milieux homogènes n'est pas applicable sans introduire certaines modifications. L'étude par la BEM des milieux non homogènes est très difficile.

Cependant, si le domaine à étudier peut être divisé en plusieurs sous domaines homogènes (Fig. 4.5) (et c'est souvent le cas), l'utilisation de la BEM devient aisée. On applique la BEM pour chaque sous domaine Ω_i comme s'il était indépendant des autres. L'ensemble des équations finales peut être obtenu en ajoutant les équations qui existent au niveau des interfaces communes.

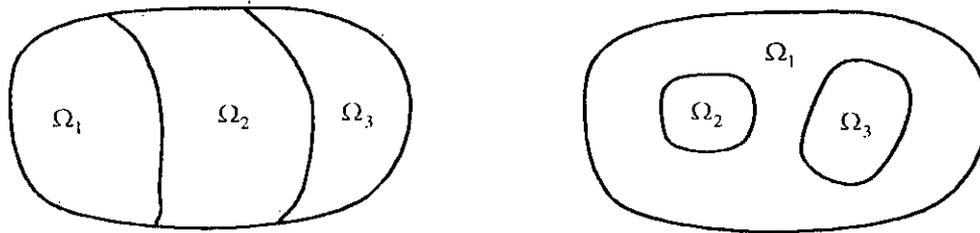


Fig. 4.5 Domaine divisé en plusieurs sous domaines

Considérons le cas simple de deux sous régions Ω_1 et Ω_2 de permittivités relatives ϵ_{r1} et ϵ_{r2} (Fig. 4.6).

Sur Ω_1 on définit :

U^1, Q^1 : vecteur potentiel et flux des N_1 noeuds de la frontière externe Γ_1

U^1_b, Q^1_l : vecteur potentiel et flux des N_l noeuds de l'interface Γ^l considérée appartenant à Ω_1

Sur Ω_2 on définit :

U^2, Q^2 : vecteur potentiel et flux des N_2 noeuds de la frontière externe Γ_2

U^2_b, Q^2_l : vecteur potentiel et flux des N_l noeuds de l'interface Γ^l considérée appartenant à Ω_2

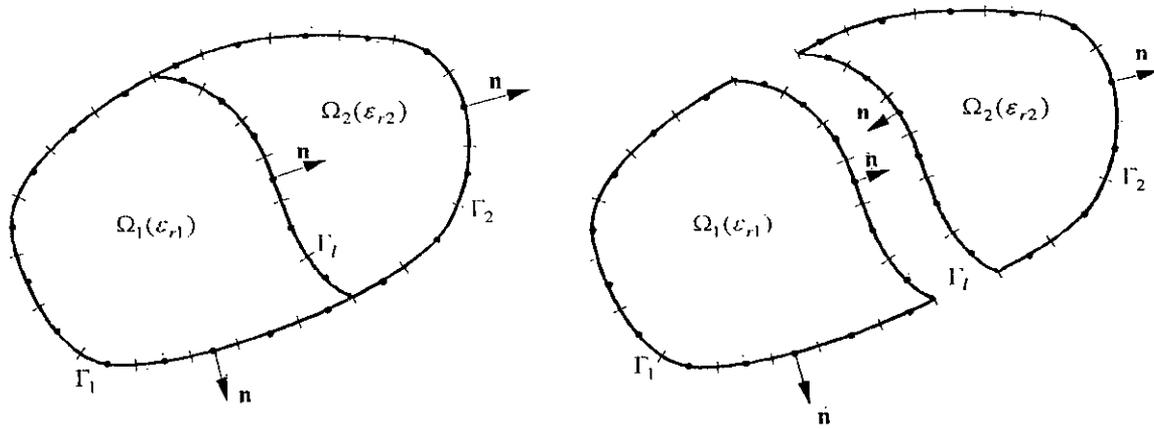


Fig. 4.6 Discretisation d'un domaine divisé en 2 sous domaines

Le système d'équations correspondant à la région Ω_1 peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}_I^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}_I^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^1 & \mathbf{G}_I^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^1 \\ \mathbf{Q}_I^1 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

où les dimensions des matrices sont :

$$\mathbf{H}^1 \text{ et } \mathbf{G}^1 : (N_1+N_I) \times N_1$$

$$\mathbf{H}_I^1 \text{ et } \mathbf{G}_I^1 : (N_1+N_I) \times N_I$$

et celui correspondant à Ω_2 sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}^2 & \mathbf{H}_I^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^2 \\ \mathbf{U}_I^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^2 & \mathbf{G}_I^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^2 \\ \mathbf{Q}_I^2 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

où les dimensions des matrices sont :

$$\mathbf{H}^2 \text{ et } \mathbf{G}^2 : (N_2+N_I) \times N_2$$

$$\mathbf{H}_I^2 \text{ et } \mathbf{G}_I^2 : (N_2+N_I) \times N_I$$

Les conditions aux interfaces sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_I^1 &= \mathbf{U}_I^2 \\ \varepsilon_{r1} \frac{\partial \mathbf{U}_I^1}{\partial n} + \varepsilon_{r2} \frac{\partial \mathbf{U}_I^2}{\partial n} &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

La première correspond à la continuité du potentiel sur l'interface, la deuxième à la continuité de la composante normale du vecteur déplacement électrique \mathbf{D} (on suppose qu'il n'y a pas de charges superficielles au niveau de l'interface).

Pour faciliter l'étude, il vaut mieux changer les variables q^1 et q^2 définies sur les frontières des deux régions Ω_1 et Ω_2 . On définit les nouvelles variables suivantes :

$$\psi^{(1)} = \varepsilon_{r1} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n^{(1)}} = \varepsilon_{r1} q^{(1)} \text{ et } \psi^{(2)} = \varepsilon_{r2} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n^{(2)}} = \varepsilon_{r2} q^{(2)} \quad (4.23)$$

où les indices entre parenthèses font référence aux régions Ω_1 et Ω_2 .

Ainsi les conditions à l'interface Γ_I deviennent :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_I^1 &= \mathbf{U}_I^2 \\ \Psi_I^1 + \Psi_I^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

ou en prenant la région 1 comme référence :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_I &= \mathbf{U}_I^1 = \mathbf{U}_I^2 \\ \Psi_I &= \Psi_I^1 = -\Psi_I^2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Les équations intégrales s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} c_\xi u_\xi^{(1)} + \int_{\Gamma_1 + \Gamma_I'} q_\xi^* u^{(1)} d\Gamma &= \int_{\Gamma_1 + \Gamma_I'} \frac{1}{\varepsilon_{r1}} u_\xi^* \psi^{(1)} d\Gamma && \text{sur } \Omega_1 \\ c_\xi u_\xi^{(2)} + \int_{\Gamma_2 + \Gamma_I'} q_\xi^* u^{(2)} d\Gamma &= \int_{\Gamma_2 + \Gamma_I'} \frac{1}{\varepsilon_{r2}} u_\xi^* \psi^{(2)} d\Gamma && \text{sur } \Omega_2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

et les systèmes d'équations (4.20) et (4.21) deviennent :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}_I^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}_I^1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{1'} & \mathbf{G}_I^{1'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi_I^1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{H}^2 & \mathbf{H}_I^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^2 \\ \mathbf{U}_I^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{2'} & \mathbf{G}_I^{2'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^2 \\ \Psi_I^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.27)$$

où :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{G}^{1'} &= \frac{1}{\varepsilon_{r1}} \mathbf{G}^1 \\ \mathbf{G}_I^{1'} &= \frac{1}{\varepsilon_{r1}} \mathbf{G}_I^1 \end{aligned} \right. \text{ et } \left\{ \begin{aligned} \mathbf{G}^{2'} &= \frac{1}{\varepsilon_{r2}} \mathbf{G}^2 \\ \mathbf{G}_I^{2'} &= \frac{1}{\varepsilon_{r2}} \mathbf{G}_I^2 \end{aligned} \right. \quad (4.28)$$

Si on introduit les conditions (4.25) sur l'interface Γ_I dans les équations précédentes on obtient le système matriciel complet suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}_I^1 & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_I^2 & \mathbf{H}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}_I \\ \mathbf{U}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{1'} & \mathbf{G}_I^{1'} & 0 \\ 0 & -\mathbf{G}_I^{2'} & \mathbf{G}^{2'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi_I \\ \Psi^2 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

et comme \mathbf{U}_I et Ψ_I sont inconnus sur l'interface, ce système est généralement écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}_I^1 & -\mathbf{G}_I^{1'} & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_I^2 & \mathbf{G}_I^{2'} & \mathbf{H}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}_I \\ \Psi_I \\ \mathbf{U}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{1'} & 0 \\ 0 & \mathbf{G}^{2'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Le nombre d'équations de ce système matriciel est $(N_1+N_I)+(N_I+N_2)= N_1+2N_I+N_2$, et le nombre d'inconnues est $N_1+2N_I+N_2$ (N_1 (potentiel ou sa dérivée) sur Γ_1 , $2N_I$ (potentiel et sa dérivée) sur Γ_1 et N_2 sur Γ_2). Etant donné que le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues, ce système peut être résolu sans aucun problème, et les inconnues sur les frontières externes et les interfaces seront retrouvées.

Le calcul du potentiel en un point intérieur peut se faire à l'aide de l'une des équations (4.26) suivant que le point appartient à Ω_1 ou à Ω_2 .

La procédure utilisée ici pour deux régions peut être étendue pour prendre en compte plusieurs régions. Pour un milieu composé de 3 régions, la matrice globale \mathbf{A} après application des conditions aux limites et arrangement ressemble à celle de la figure (4.7).

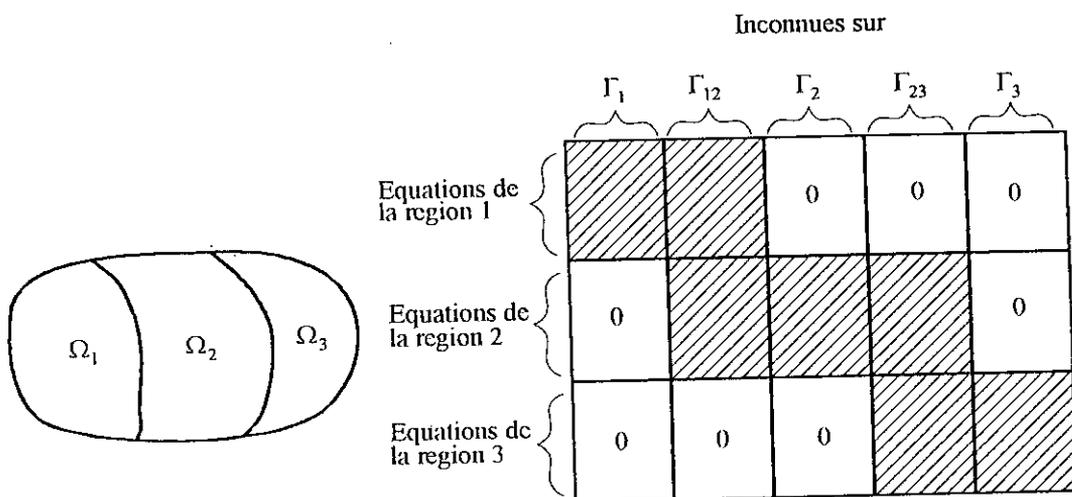


Fig. 4.7 Matrice bande correspondante à un domaine divisé en 3 sous régions

4.5 Formulation axisymétrique :

Dans beaucoup de problèmes pratiques, le domaine, dans lequel est écrite l'équation de Laplace et les conditions aux limites, présente une certaine axisymétrie. La résolution de ce type de problèmes intéresse à l'évidence l'électrotechnicien qui utilise quotidiennement des dispositifs axisymétriques (isolateurs et différentes parties d'appareillage de haute tension). La résolution des problèmes tridimensionnels présentant une certaine axisymétrie peut être essentiellement réduite à un problème bidimensionnel, minimisant ainsi l'effort des calculs numériques rencontrés dans un vrai problème tridimensionnel [33,43].

Considérons un problème axisymétrique quelconque et plaçons nous dans un système de coordonnées cylindriques (R, θ, z) , dont l'axe z coïncide avec l'axe de symétrie du problème (Fig. 4.8).

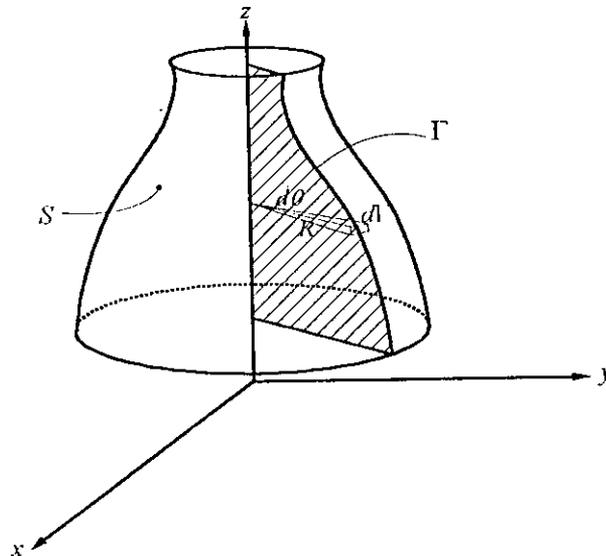


Fig. 4.8 Géométrie d'un domaine axisymétrique

L'équation intégrale est :

$$c_{\xi} u_{\xi} + \int_S q_{\xi}^* u dS = \int_S u_{\xi}^* q dS \quad (4.31)$$

où S est la surface entourant notre domaine d'étude (Fig. 4.8).

L'élément différentiel dS est exprimé en coordonnées cylindriques :

$$dS = R d\theta d\Gamma \quad (4.32)$$

où R est la distance entre dS et l'axe z .

L'équation intégrale s'écrit alors :

$$c_\xi u_\xi + \int_S q_\xi^* u R d\theta d\Gamma = \int_S u_\xi^* q R d\theta d\Gamma$$

ou

$$c_\xi u_\xi + \int_\Gamma \left(\int_0^{2\pi} q_\xi^* u R d\theta \right) d\Gamma = \int_\Gamma \left(\int_0^{2\pi} u_\xi^* q R d\theta \right) d\Gamma \quad (4.33)$$

Comme le problème est axisymétrique, R , u et q ne dépendent pas de l'angle θ , et l'équation précédente s'écrit :

$$c_\xi u_\xi + \int_\Gamma \left(\int_0^{2\pi} q_\xi^* d\theta \right) u R d\Gamma = \int_\Gamma \left(\int_0^{2\pi} u_\xi^* d\theta \right) q R d\Gamma \quad (4.34)$$

ou

$$c_\xi u_\xi + \int_\Gamma \hat{q}^* u d\Gamma = \int_\Gamma \hat{u}^* q d\Gamma \quad (4.35)$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{q}^* &= R \int_0^{2\pi} q_\xi^* d\theta \\ \hat{u}^* &= R \int_0^{2\pi} u_\xi^* d\theta \end{aligned} \quad (4.36)$$

Le calcul de \hat{u}^* et \hat{q}^* fait intervenir les intégrales elliptiques complètes de première et de deuxième espèce $K(m)$ et $E(m)$ [1] :

$$\begin{aligned} \hat{u}^* &= R \frac{4K(m)}{\sqrt{a+b}} \\ \hat{q}^* &= R \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left[\frac{1}{2R} \left(\frac{R_i^2 - R^2 + (z_i - z)^2}{a-b} E(m) - K(m) \right) n_R \right. \\ &\quad \left. + \frac{z_i - z}{a-b} E(m) n_z \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

où :

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{2b}{a+b} \quad (0 \leq m \leq 1) \\
 a &= R_i^2 + R^2 + (z_i - z)^2 \\
 b &= 2R_i R
 \end{aligned}
 \tag{4.38}$$

R est la distance entre l'élément différentiel $d\Gamma$ et l'axe de symétrie z

R_i est la distance entre le point P_i où on écrit l'équation intégrale et l'axe de symétrie z

n_R est la composante suivant l'axe R du vecteur \mathbf{n} normale à $d\Gamma$

n_z est la composante suivant l'axe z du vecteur \mathbf{n} normale à $d\Gamma$

Les fonctions $K(m)$ et $E(m)$ peuvent être obtenues soit par leurs tables de valeurs, soit par un développement en séries numériques [26].

Ainsi le traitement du problème tridimensionnel par la formulation axisymétrique permet de transformer l'équation intégrale (4.31) sur le volume Ω en une équation intégrale (4.35) sur le contour Γ .

4.6 Traitement des problèmes de coins :

Un domaine discrétisé par les éléments frontières peut présenter des coins géométriques (Fig. 4.9) qui nécessitent une certaine attention, vu que les conditions sur les deux cotés du coin peuvent ne pas être les mêmes.

Quand on utilise les éléments linéaires par exemple, le noeud 2 de l'élément $(m-1)$ se superpose avec le noeud 1 de l'élément m (Fig. 4.9). Comme le potentiel est unique en chaque point, $u^2_{(m-1)}$ est égale à u^1_m . Cependant, cette égalité ne peut pas s'appliquer toujours pour le flux q . En effet, au niveau d'un coin de la frontière, la normale n'est pas unique et ceci est de même pour q qui dépend de cette normale (Fig. 4.9). Ainsi une discontinuité de q se présente lorsque des coins géométriques se trouvent sur la frontière.

Lors de l'écriture du système d'équations de la BEM, chaque noeud correspondait à une équation de ce système et présentait une seule inconnue (soit le potentiel, soit sa dérivée). Cependant, si la frontière contient des coins et si le potentiel est connu pour un certain nombre de ces coins, alors deux inconnues sont mises en jeu pour chacun de ces coins : le flux q avant ce coin et celui après le coin. Le nombre d'inconnues excède alors celui des équations et le système ne peut plus être résolu.

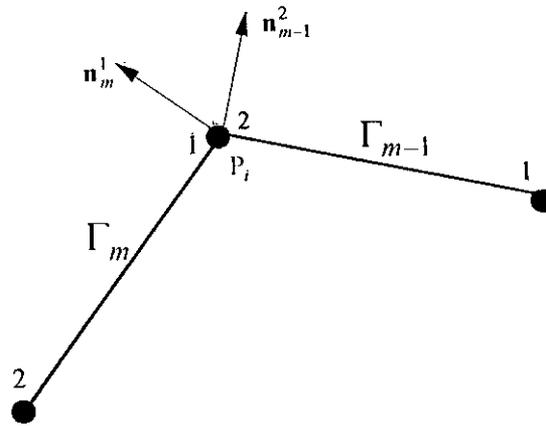


Fig. 4.9 Discontinuité dans les flux entre les élément m-1 et m

Pour faire face à ce problème, on peut arrondir le coin comme dans la figure (4.10a) tout en introduisant deux noeuds proches du coin. Cette approche ne donne des résultats acceptables qu'aux points loin de ce coin. Cependant, beaucoup de problèmes physiques exigent la connaissance des résultats près du coin.

Une autre solution simple est de supposer que les flux à gauche et à droite du coin sont égaux, c'est à dire : $q^2_{(m-1)} = q^1_m = q_i$. Cette représentation du noeud unique, introduite en premier par Lachat [36], est, comme la précédente, valable uniquement loin du coin.

Une autre approche, étudiée par Ricadella, consiste à considérer deux noeuds très proches du coin et qui représentent le noeud 2 de l'élément (m-1) et le noeud 1 de l'élément m (Fig. 4.10b). Le désavantage de cette représentation est que l'existence d'un vide entre les deux noeuds entraîne une instabilité dans les équations produites par la BEM [4].

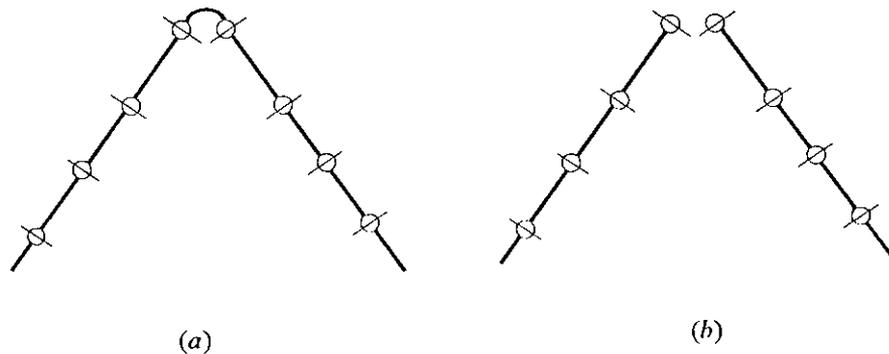


Fig. 4.10 Traitement de la discontinuité du flux par (a) arrondissement du coin (b) introduction de 2 noeuds proches du coin

Une autre méthode très intéressante introduite récemment par Patterson et ses coéquipiers [51], consiste à introduire ce qu'on appelle les éléments discontinus. Etant donné que la méthode est très pratique pour résoudre les problèmes de coins et que c'est elle qu'on a adopté lors de la programmation, on va l'étudier avec plus de détails.

Prenons le cas des éléments linéaires discontinus (Fig. 4.11). Les deux noeuds de chaque élément se trouvent maintenant à l'intérieur de l'élément géométrique.

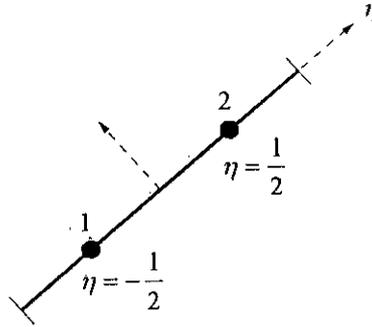


Fig. 4.11 Représentation d'un élément discontinu

Les variations de u et q restent toujours linéaires mais s'écrivent en fonction de la coordonnée locale $\eta \in [-1, 1]$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} u = \phi_1^d(\eta)u^1 + \phi_2^d(\eta)u^2 \\ q = \phi_1^d(\eta)q^1 + \phi_2^d(\eta)q^2 \end{cases} \quad (4.39)$$

où $\phi_1^d(\eta)$ et $\phi_2^d(\eta)$ (Fig. 4.12) sont maintenant définies par :

$$\begin{cases} \phi_1^d(\eta) = \left(\frac{1}{2} - \eta\right) \\ \phi_2^d(\eta) = \left(\frac{1}{2} + \eta\right) \end{cases} \quad (4.40)$$

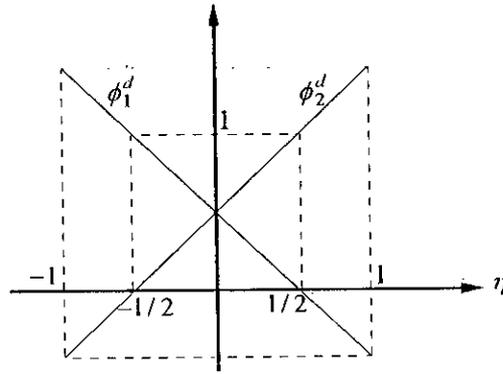


Fig. 4.12 Définition des fonctions d'interpolations ϕ_1^d et ϕ_2^d

Il faut noter que la géométrie de l'élément est toujours décrite par les mêmes fonctions ordinaires ϕ_1 et ϕ_2 :

$$\begin{cases} x = \phi_1(\eta) x^1 + \phi_2(\eta) x^2 \\ y = \phi_1(\eta) y^1 + \phi_2(\eta) y^2 \end{cases} \quad (4.41)$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont :

$$\begin{cases} \phi_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta) \\ \phi_2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta) \end{cases} \quad (4.42)$$

Les intégrales h_{im}^k et g_{im}^k s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} h_{im}^k &= \int_{\Gamma_m} q^* \phi_k^d d\Gamma_m & k = 1,2 \\ g_{im}^k &= \int_{\Gamma_m} n^* \phi_k^d d\Gamma_m & k = 1,2 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Les éléments linéaires discontinus permettent alors de conserver l'allure de la variation linéaire de nos variables tout en évitant les problèmes rencontrés au niveau des coins. Cependant, ces éléments entraînent un nombre important de noeuds du fait que ce nombre est le double de celui des éléments linéaires continus. Pour cette raison, Patterson et ses coéquipiers ont introduit les éléments dits partiellement discontinus, retenant ainsi la discontinuité entre éléments seulement là où c'est voulu, c'est à dire aux coins ou aux points où les données aux frontières sont discontinues.

Les éléments partiellement discontinus pour le cas linéaire sont représentés sur la figure (4.13).

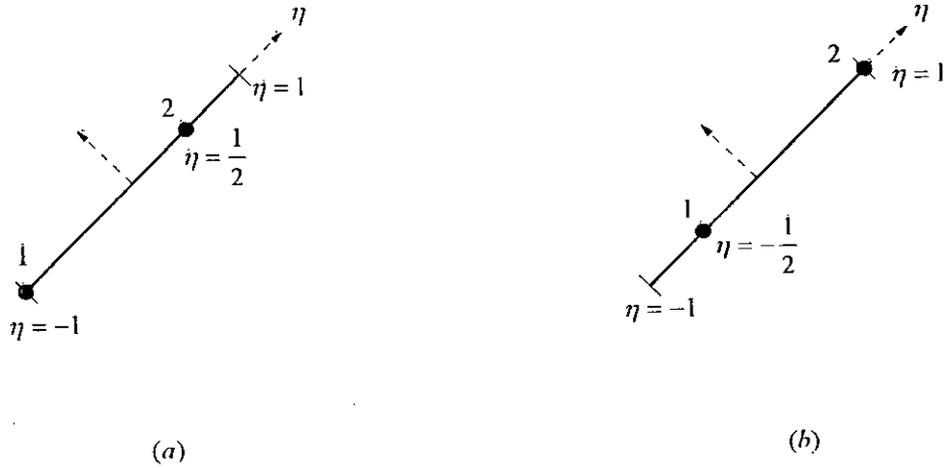


Fig. 4.13 Représentation des éléments discontinus (a) à droite (b) à gauche

Les fonction d'interpolation pour les deux types sont :

- pour les éléments discontinus à gauche :

$$\begin{cases} \phi_1^{rd}(\eta) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} - \eta \right) \\ \phi_2^{rd}(\eta) = \frac{2}{3} (1 + \eta) \end{cases} \quad (4.44)$$

- pour les éléments discontinus à droite :

$$\begin{cases} \phi_1^{ld}(\eta) = \frac{2}{3} (1 - \eta) \\ \phi_2^{ld}(\eta) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + \eta \right) \end{cases} \quad (4.45)$$

L'utilisation donc des éléments linéaires discontinus se résume aux différents cas suivants :

- si les deux nœuds géométriques de l'élément ne présentent aucune discontinuité, on utilise les éléments linéaires continus.
- si le 1^{er} nœud géométrique de l'élément présente une discontinuité, on utilise les éléments linéaires discontinus à gauche.
- si le 2^{ème} nœud géométrique de l'élément présente une discontinuité, on utilise les éléments linéaires discontinus à droite.
- si les deux nœuds géométriques de l'élément présentent une discontinuité, on utilise les éléments linéaires discontinus.

Le calcul des intégrales singulières g_{im}^k , où le noeud i coïncide avec le noeud k de l'élément m , peut se faire analytiquement de la manière suivante :

- si l'élément m est continu et i est l'un des deux noeuds de m on a :

$$g_{im}^k = \frac{l}{2} \left(\frac{2}{3} - \ln(l) \right) \quad (4.46)$$

- si l'élément m est discontinu à gauche et $i =$ noeud 2 de m ou si m est discontinu à droite et $i =$ noeud 1 de m on a :

$$g_{im}^k = \frac{l}{3} (2 - \ln(l)) \quad (4.47)$$

- si l'élément m est discontinu à gauche et $i =$ noeud 1 de m ou si m est discontinu à droite et $i =$ noeud 2 de m on a :

$$g_{im}^k = \frac{l}{2} \left(\frac{5}{3} - \frac{7}{12} \ln\left(\frac{l}{4}\right) - \frac{3}{4} \ln\left(\frac{3l}{4}\right) \right) \quad (4.48)$$

- si l'élément m est discontinu et $i =$ un des deux noeuds de m on a :

$$g_{im}^k = \frac{l}{16} \left(12 - 5 \ln\left(\frac{l}{4}\right) - 3 \ln\left(\frac{3l}{4}\right) \right) \quad (4.49)$$

Une extension pour les éléments quadratiques et cubiques et même pour les éléments du cas tridimensionnel peut se faire de la même manière.

Il faut noter que cette propriété de pouvoir utiliser des éléments discontinus est l'un des avantages que possède la méthode des éléments frontières par rapport à la méthode des éléments finis qui quant à elle ne permet que l'utilisation des éléments continus.



Chapitre 5

***PROGRAMMATION ET
APPLICATIONS***

5. Programmation et Applications

5.1 Programmation:

5.1.1 Introduction:

Le traitement numérique de la méthode des éléments frontières abordé aux chapitres précédents ne peut vraiment être bénéfique que s'il est implementé dans un programme.

Pour cette raison, nous avons élaboré deux programmes (Bem2D et MRBem2D) traitant les parties principales de la méthode. Les deux programmes résolvent seulement les problèmes bidimensionnels. Le premier qui s'exécute sous Windows et qui est muni d'une interface graphique permet de résoudre l'équation de Laplace dans un milieu homogène. Ce programme prend en considération aussi bien les problèmes internes que les problèmes externes. Le deuxième programme traite aussi l'équation de Laplace mais dans des milieux non homogènes. Ce deuxième programme s'exécute uniquement sous DOS et ne possède pas d'interface graphique.

On commencera cette première partie par une description générale des programmes de calcul de champ électrique. On présentera ensuite les deux programmes réalisés tout en spécifiant les problèmes rencontrés lors de leur élaboration.

Notons que nous avons réussi à donner aux programmes le caractère général malgré les difficultés qui se posent lorsqu'on veut réaliser un programme qui traite beaucoup de problèmes physiques.

Le compilateur que nous avons utilisé est le BORLAND C++ version 4.0 [30]. Nous avons adopté la programmation orientée objet (P.O.O) [28,29,30,31,32]. Cette dernière bénéficie d'importants avantages tels que la bonne structuration, la lisibilité et la possibilité d'extension des programmes.

5.1.2 Description générale des programmes de calcul de champ:

Tous les programmes de calcul de champ, où traitant en général d'un problème d'équations aux dérivées partielles, comportent les étapes suivantes:

- description de la géométrie et des caractéristiques physiques.
- Mise en œuvre de la méthode adoptée pour la résolution.
- Visualisation et interprétation des résultats de la simulation.

5.1.2.1 Fonctions du module d'entrée:

La première étape consiste à préparer les données qui seront utilisées dans la deuxième étape. Ces données concernent la géométrie, la discrétisation et le comportement physique du domaine ou de sa frontière. Cette première étape doit réaliser les trois fonctions suivantes:

- description de la géométrie de l'objet.
- discrétisation du domaine ou de la frontière.
- description des caractéristiques physiques (caractéristiques du milieu, sources, conditions aux limites, conditions initiales, etc.).

5.1.2.2 Fonctions du module de calcul:

La deuxième étape procède à la mise en œuvre de la méthode utilisée, c'est à dire la résolution du ou des systèmes d'équations linéaires ou non linéaires qui proviennent de la formulation de la méthode. Dans cette étape, on reçoit en entrée la discrétisation, les caractéristiques physiques et les conditions aux limites. En sortie, on aura les valeurs des grandeurs recherchées en chaque noeud de la discrétisation. La résolution des systèmes d'équations comprend les étapes suivantes:

- construction des matrices et vecteurs du système matriciel.
- prise en compte des conditions aux limites.
- résolution du système matriciel.

La résolution des systèmes linéaires est réalisée de plusieurs manières possibles:

- méthodes directes (Gauss, Choleski, etc.)
- méthodes itératives par blocs (Gauss-Seidel, Newton-Raphson, etc.)

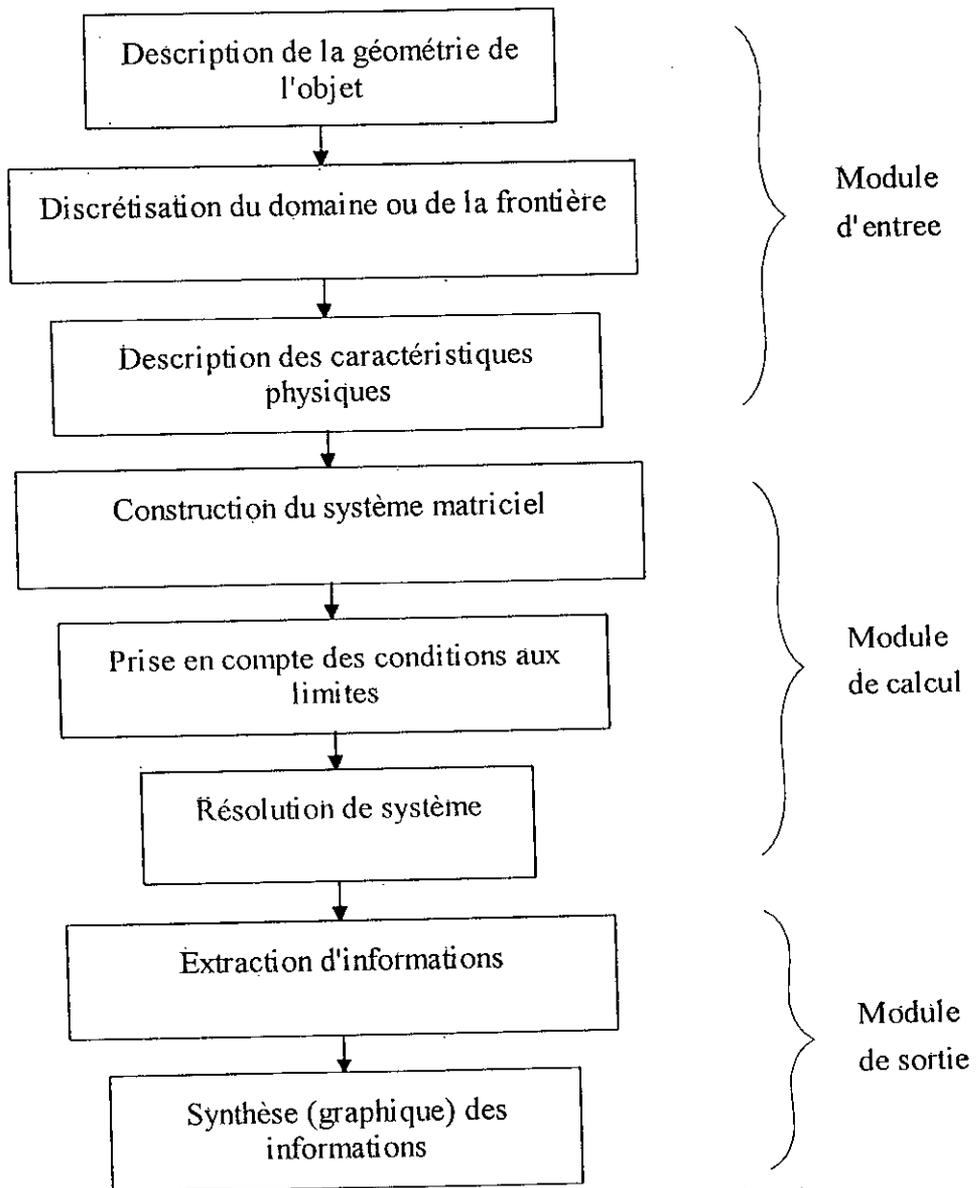
5.1.2.3 Fonctions du module de sortie:

Le rôle de la troisième étape est double:

- extraction d'informations significatives. Ces informations peuvent être reliées à des grandeurs locales (induction magnétique, champ électrique, densité de courant, etc.) ou globales (flux, forces, couples, etc.).
- présentation synthétique des informations numériques sous forme graphique pour faciliter leurs interprétations (Lignes équipotentiellles, lignes de champ, etc.).

5.1.2.4 Organigramme:

En regroupant toutes les étapes pour traiter le problème, on peut donner l'organigramme suivant:



Organigramme. 5.1 Description générale des méthodes de calcul de champ

5.1.3 Description du programme Bem2D:

5.1.3.1 Description générale:

Le programme Bem2D permet le traitement des problèmes de potentiel (équation de Laplace) dans un milieu homogène Ω . Le programme permet la résolution des problèmes intérieurs et extérieurs. Bem2D s'exécute dans une fenêtre Windows (Fig. 5.1) ayant un menu comportant la plupart des tâches à réaliser (Discrétisation, Calcul du potentiel ou du champ, etc.).

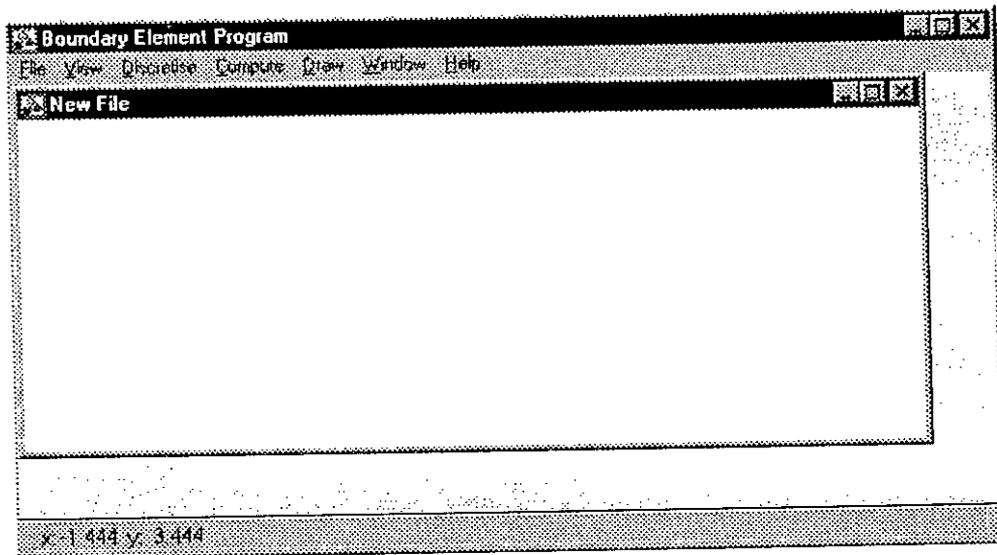
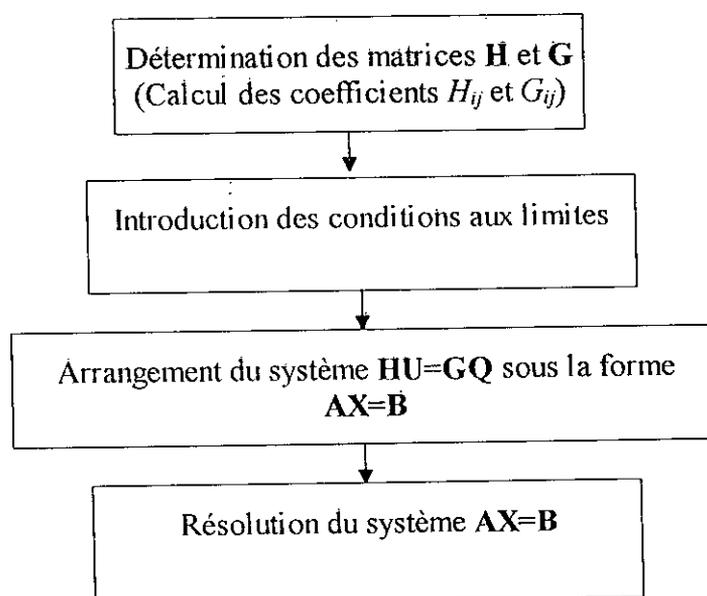


Fig. 5.1 Interface du programme Bem2D

5.1.3.2 Algorithmes:

Comme le programme Bem2D est un programme Windows, on ne peut donner un algorithme total englobant tout le programme. En effet, la programmation Windows est une programmation par événements, c'est à dire qu'à chaque événement (choix d'un menu, clic sur la souris, ...) on associe une certaine fonction que le programme doit traiter. Ainsi, on trouve par exemple une fonction spéciale pour traiter la commande "New" du menu "File", et une autre traitant la commande "Compute On Boundary" du menu "Compute".

Cependant, nous pensons qu'il est judicieux de présenter l'algorithme principal qui traite la résolution de l'équation de Laplace. Il s'agit des étapes nécessaires pour trouver les valeurs du potentiel et de sa dérivée au niveau de tous les noeuds de la frontière.



Organigramme 5.2 Etapes principales de résolution du programme Bem2D.

Dans notre programme (Bem2D), nous avons regroupé les étapes 1,2 et 3 en une seule opération. Ceci veut dire qu'on a calculé directement les éléments de la matrice **A** sans déclarer deux matrices différentes **H** et **G**, bénéficiant ainsi d'un gain dans l'espace mémoire.

5.1.3.3 Description des parties essentielles du programme Bem2D:

Les tâches importantes qu'on peut effectuer par le programme sont :

- introduction des données du problème.
- discrétisation de la frontière.
- calcul sur la frontière.
- calcul du potentiel et du champ.
- dessin des lignes équipotentielles.

5.1.3.3.1 Introduction des données:

Les données peuvent être introduite de deux manières possibles:

- soit on récupère les données d'un fichier existant.
- soit on insère ces données manuellement.

La première façon est réalisée par la commande "Open..." du menu "File", la deuxième par la commande "New..." de ce même menu. L'insertion des données par la commande "New..." se fait à l'intérieur de la boîte de dialogue illustrée à la figure (5.2).

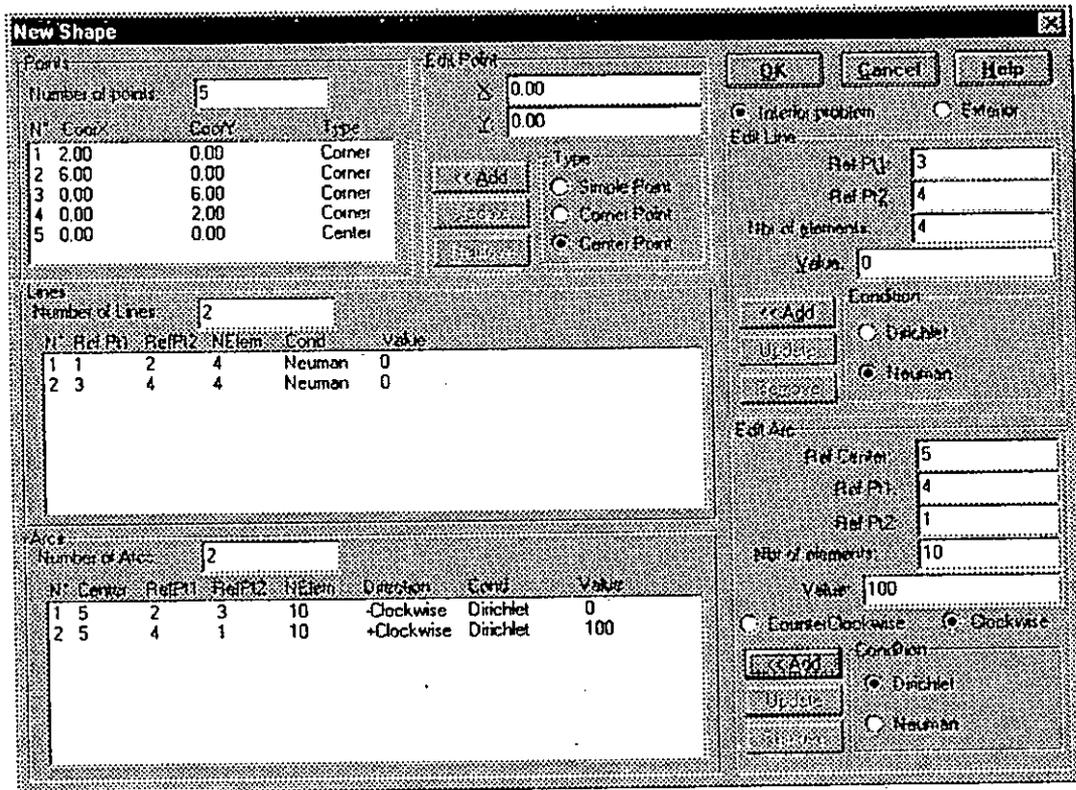


Fig. 5.2 Boite de dialogue d'entrée des données

Pour décrire les parties de cette-boite de dialogue, on a représenté dans la figure (5.2) les données du problème aux limites correspondant à la figure (5.3) suivante:

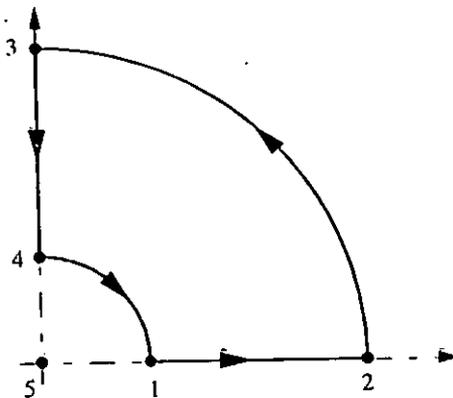


Fig. 5.3 Géométric des données de la boite de dialogue précédente

La boite de dialogue comporte les parties suivantes:

- Listes des points géométriques de l'objet (partie gauche du haut): Pour chaque point on spécifie ses coordonnées géométriques X et Y et son type:
 - "Simple Point": C'est un point située sur une surface lisse.
 - "Corner Point": C'est un point où sont définies deux tangentes différentes.
 - "Center Point": C'est un point qui représente le centre d'un certain arc.

- Liste des arrêtes droites (partie du milieu): Pour chaque arrête, on spécifie:
 - Le numéro de son premier point.
 - Le numéro de son deuxième point.
 - Le nombre d'éléments correspondant à la discrétisation de cette arrête.
 - La valeur (potentiel ou sa dérivée) prescrite sur cette arrête.
 - Le type de conditions (Dirichlet ou Neuman).
- Liste des arcs (partie du bas): On y trouve les mêmes champs que ceux spécifiés sur la liste précédente excepté:
 - Le numéro du point représentant le centre de l'arc.
 - La direction de l'arc (CounterClockwise ou Clockwise).

Remarque:

Le choix du sens des arrêtes et des arcs est d'une importance capitale. Ce sens dépend de l'orientation de la normale à la frontière. On spécifiera le sens trigonométrique si le problème est interne (fig. 5.4a), et le sens inverse dans le cas des problèmes externes (Fig. 5.4b).

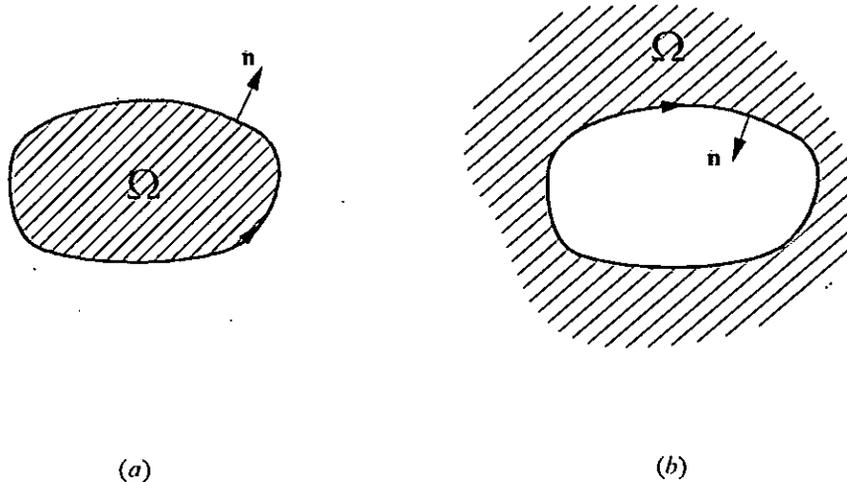


Fig.5.4 Convention de sens de parcourt (a) Problème intérieur (b) Problème extérieur

En appuyant sur le bouton "Ok" de la boîte de dialogue, On voit s'afficher, dans la fenêtre, notre objet à étudier. Ceci permet de vérifier rapidement et visuellement qu'il n'y a pas d'erreurs dans les données.

1.1.1.1.1 Discrétisation de la frontière:

L'action de la discrétisation se fait à l'aide du menu "Discretise". Deux possibilités sont attribuées:

- "Constant Element": Dans ce cas on discrétise la frontière en utilisant les éléments constants.
- "Linear Element": Dans ce cas on utilise les éléments linéaires.

Après le choix de l'une des deux options, la discrétisation est visualisée sur l'écran (Fig. 5.5) afin de vérifier de nouveau si la discrétisation a été réalisée avec succès.

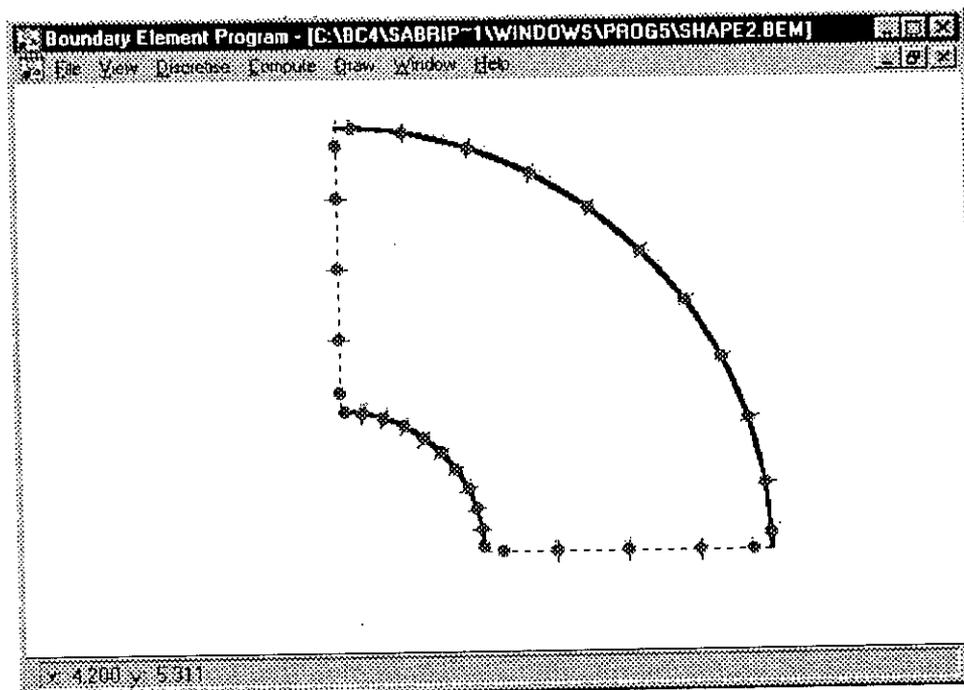


Fig. 5.5 Discrétisation obtenue par le programme Bcm2D

5.1.3.3.3 Calcul sur la frontière:

Le calcul des valeurs nodales inconnues sur la frontière est réalisé lorsqu'on lance la commande "Compute On Boundary" du menu "Compute".

5.1.3.3.4 Calcul du potentiel et du champ:

La résolution sur les frontières étant obtenue, on peut effectuer les actions suivantes:

- calcul du potentiel et du champ en chaque point du domaine et éventuellement sur la frontière. Ceci peut se faire soit par la commande "Potential & Field at Point...", soit en cochant sur les options "Potential" ou "Field" du menu "Compute". Cette dernière action permet de visualiser, dans la barre des messages, le potentiel et le champ en tout point où se trouve la souris.

- calcul du potentiel et du champ le long d'une ligne. Ceci se fait par la commande "Potential & Field on Line..." du menu "Compute". Elle permet de tracer une ligne et de spécifier le nombre de subdivisions où on veut connaître le potentiel ou le champ. Les résultats de cette action sont dirigés vers un fichier qu'on choisit dans une boîte de dialogue. Le fichier contient les données suivantes:

- 1^{ère} colonne: la coordonnées X des points de la subdivision.
- 2^{ème} colonne: la coordonnées Y des points de la subdivision.
- 3^{ème} colonne: la distance l entre les points de la subdivision et le point de départ de la ligne.
- 5^{ème} colonne: la valeur du potentiel aux points de la subdivision.
- 6^{ème} colonne: la valeur du champ aux points de la subdivision.

5.1.3.3.5 Dessin des lignes équipotentielles:

On peut tracer une ligne équipotentielle en utilisant la commande "Equipotential" du menu "Draw" et en spécifiant un point de cette équipotentielle.

5.1.3.4 Traitement des problèmes rencontrés dans le programme:

5.1.3.4.1 Problème des coins:

Les problèmes de coins abordés au chapitre 4, engendrent des difficultés lors de la programmation. Pour faire face à ces difficultés, on a choisi l'utilisation des éléments discontinus lorsque c'est nécessaire. C'est pour cette raison qu'on a ajouté le type "Corner Point" dans la boîte de dialogue de préparation des données.

Sur la figure (5.5), on a représenté la discrétisation de l'objet dont les données sont celles de la boîte de dialogue de la figure (5.2). On voit bien, par exemple, comment sont définis les éléments linéaires de part et d'autre du point 2 de la figure (5.3): l'un est discontinu à droite, l'autre discontinu à gauche.

5.1.3.4.2 Calcul du potentiel et du champ près de la frontière:

Lorsque le point, où on veut déterminer le potentiel ou le champ, se trouve près de la frontière, le calcul des coefficients H_{ij} et G_{ij} devient imprécis. En effet, la distance r dans les noyaux u^* et q^* diminue et varie très rapidement pour les éléments proche du point en question.

Dans le but de lever cette imprécision, nous avons suivi les étapes suivantes:

- chercher tous les éléments proches du point.
- diviser ces éléments en plusieurs sous éléments.
- remplacer les intégrales H_{ij} et G_{ij} par la somme des intégrales définies sur chaque sous élément.

Dans le programme, le point P_i est considéré comme proche de l'élément Γ_j s'il appartient à la surface hachurée de la figure (5.6).

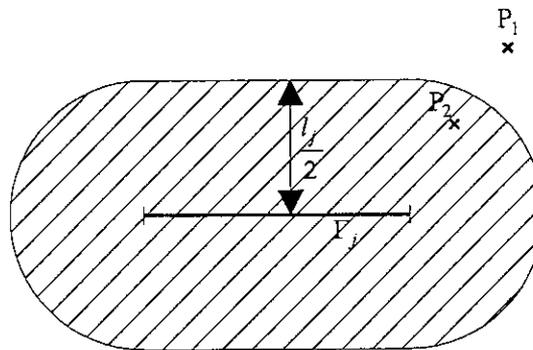


Fig. 5.1 Voisinage de l'élément Γ_j

Ainsi le point P_1 sur la figure (5.6) est considéré loin de l'élément Γ_j , alors que P_2 est considéré proche de cet élément.

La condition mathématique pour que le point M appartienne à la surface hachurée est:

$$\left((\mathbf{MB} \wedge \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{MA} \wedge \mathbf{n}) \leq 0 \text{ et } d_{ij} \leq (l_j / 2) \right) \text{ ou } (\|\mathbf{MA}\| \leq (l_j / 2)) \tag{5.1}$$

ou $(\|\mathbf{MB}\| \leq (l_j / 2))$

\mathbf{n} est la normale à l'élément Γ_j , l_j la longueur de Γ_j , et d_{ij} la distance entre le point M et l'élément Γ_j exprimée par la relation: $d_{ij} = |\mathbf{MA} \cdot \mathbf{n}|$.

Si le point M appartient à la surface hachurée de l'élément Γ_j , il faut diviser ce dernier en un nombre suffisant de sous éléments de façon à ce que la condition (5.1) ne soit pas vérifiée pour ces différents sous éléments. Ce nombre est la partie entière du quotient:

$$\left(\frac{l_j / 2}{d_{ij}} \right)$$

1.1.1.1.1 Traçage des équipotentiellles:

Pour tracer une ligne équipotentielle V_0 passant par le point P_0 , Krähenbühl a proposé dans [33,48] une méthode pas à pas illustrée à la figure (5.7).

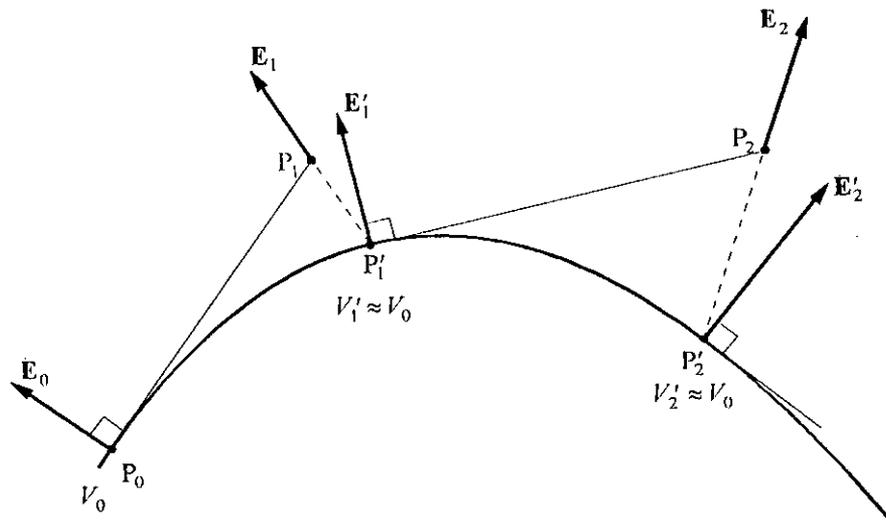


Fig. 5.7 Etapes pour le tracé des lignes équipotentielles

- P_0 est le point de départ.
- Connaissant le vecteur champ E_0 en P_0 , on peut en déduire la tangente à l'équipotentielle (direction P_0P_1).
- On calcule le potentiel et le champ au point P_1 .
- On effectue une correction linéaire suivant la direction de E_1 pour trouver le point P'_1 qui a le potentiel V'_1 proche du potentiel V_0 de l'équipotentielle.
- On refait la même chose avec le point P'_1 , et on procède ainsi pas à pas, etc.

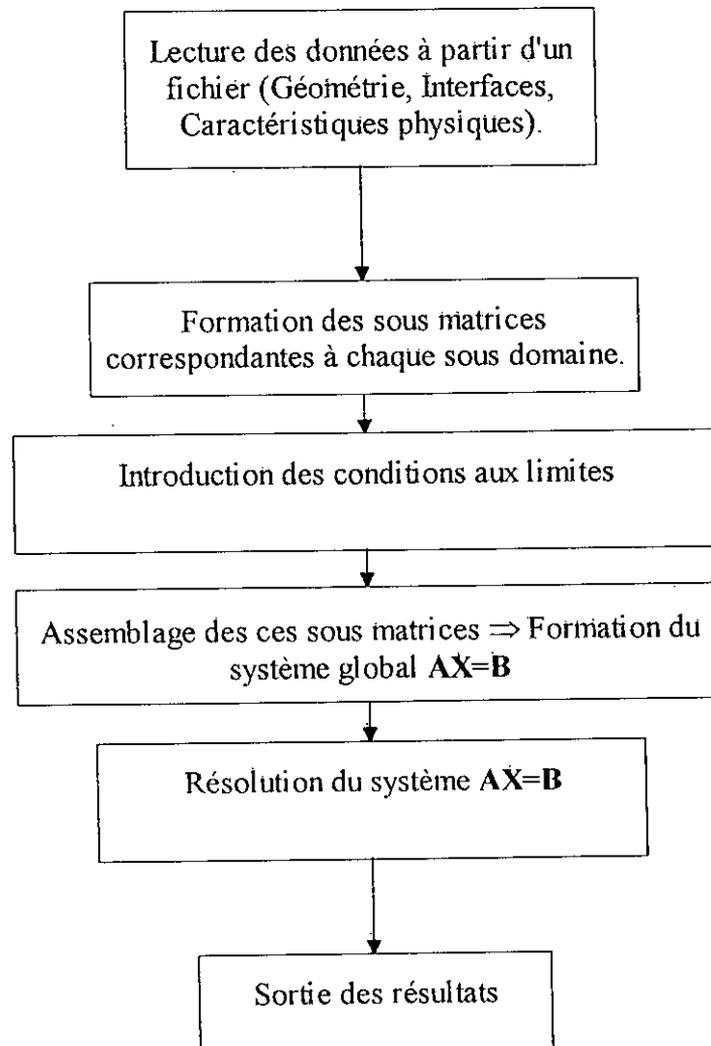
5.1.4 Description du programme MRBem2D (Multi-RegionBem2D):

Ce programme traite l'équation de Laplace dans un milieu non homogène, composé par plusieurs sous domaines homogènes. Chaque sous domaine a sa propre permittivité diélectrique.

Le programme s'exécute seulement sous DOS et nous espérons qu'il sera intégré plus tard dans le programme Bem2D afin de bénéficier des avantages graphiques et interactifs que présente ce dernier.

Nous avons conservé pour ce programme le caractère général, de façon à ce qu'il peut traiter n'importe quelle configuration possible et même si elle comporte un nombre élevé de régions. Ce programme ne prend en compte que les éléments constants.

L'organigramme du programme MRBem2D est présenté comme suit:



Organigramme 5.3 Etapes principales du programme MRBem2D

5.2 Applications:

5.2.1 Introduction:

Tous les exemples de cette deuxième partie traitent seulement l'équation de Laplace dans les problèmes bidimensionnels. La première partie des applications prend en considération un seul domaine homogène Ω , alors que la seconde traite les problèmes de plusieurs régions différentes. Les résultats numériques ont été obtenus par les deux programmes Bem2D et MRBem2D exécutés sur un micro-ordinateur muni d'un microprocesseur Pentium75.

5.2.2 Partie 1:

5.2.2.1 Exemple 1: Système plan - plan idéal

Cet exemple traite le problème de deux plans parallèles et infinis (Fig. 5.8). Le premier plan est soumis à un potentiel V_1 , alors que le second au potentiel V_2 . La distance entre les deux plans est a . On prendra l'air comme milieu entre les deux plans, mais ceci n'influe pas sur les résultats obtenus.

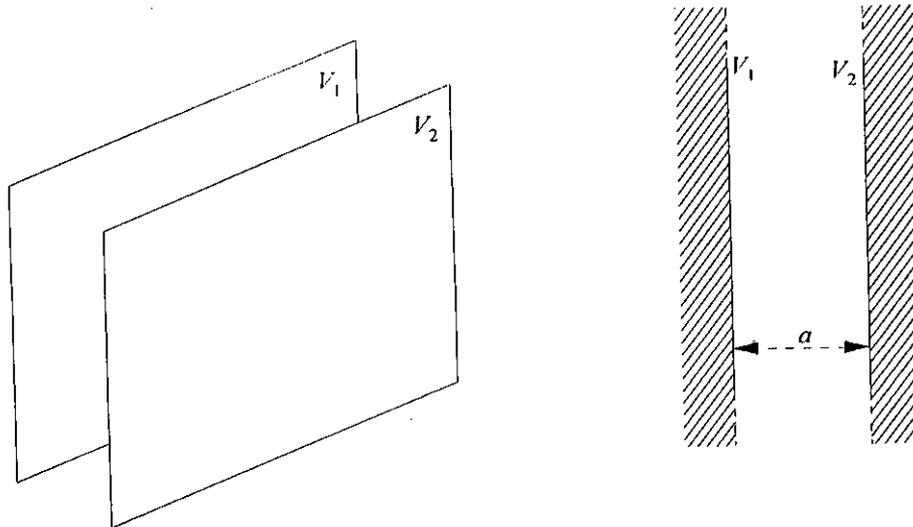


Fig. 5.8 Définition du problème de l'exemple 1

Pour des raisons géométriques, le champ électrique \mathbf{E} en tout point de l'espace est perpendiculaire aux deux plans. Le domaine d'étude sera donc réduit à celui de la figure (5.9), avec les conditions aux limites:

$$\begin{aligned}
 u &= V_1 && \text{sur } AD \\
 u &= V_2 && \text{sur } BC \\
 q = \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{sur } AB \text{ et } CD \text{ (composante normale du champ nulle)}
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

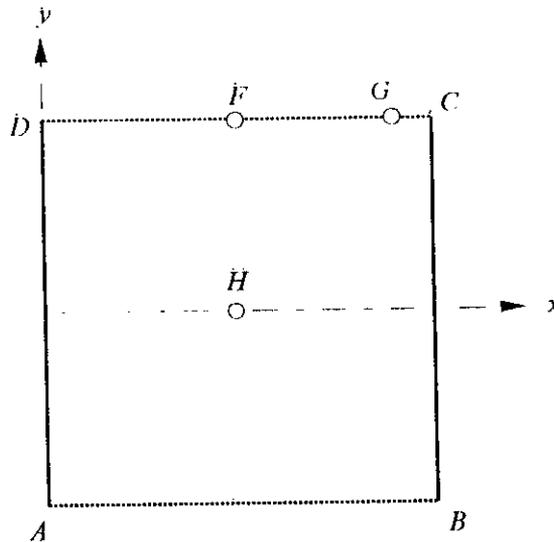


Fig. 5.9 Modélisation du problème

Le problème consiste à déterminer le potentiel électrique V et le champ électrique \mathbf{E} en tout point du domaine Ω et éventuellement sur la frontière de celui-ci.

Les grandeurs électriques V et E en se référant à la figure (5.9) sont données analytiquement par:

$$\begin{aligned}
 V(x, y) &= \left(\frac{V_2 - V_1}{a} \right) x \\
 E(x, y) = E_x(x, y) &= \frac{V_2 - V_1}{a}
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

Les valeurs choisies de V_1 , V_2 et a sont:

$$V_1 = 10 \text{ V}$$

$$V_2 = 0 \text{ V}$$

$$a = 10 \text{ cm}$$

Pour résoudre ce problème numériquement, on a effectué une discrétisation des arrêtes AB , BC , CD et DA par des éléments constants (Fig. 5.10a) et linéaires (Fig. 5.10b). Le sens des éléments doit respecter le sens trigonométrique pour que la normale \mathbf{n} soit orientée vers l'extérieur. En effet, il s'agit là d'un problème intérieur.

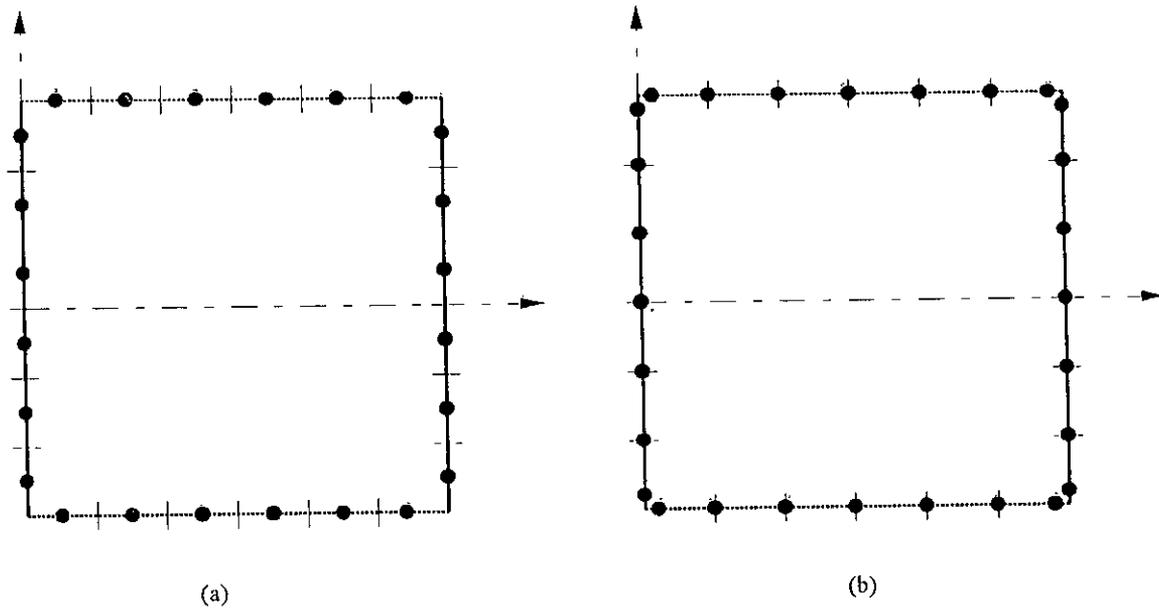


Fig. 5.10 Discretisation de la frontière (a) éléments constants (b) éléments linéaires

Les résultats obtenus nous ont permis de tracer:

- Les courbes de convergence $V=f(N)$ et $E=f(N)$.
- Les courbes de variation $V=f(x)$ et $E=f(x)$.
- Les lignes équipotentielles.

5.2.2.1.1 Courbes de convergence $V=f(N)$ et $E=f(N)$:

Pour étudier l'influence du nombre d'éléments N sur les résultats, on a varié ce dernier et on a calculé pour chaque valeur de N le potentiel V et le champ E aux points $F(5,5)$, $G(9,5)$, $H(5,0)$.

On a tracé les courbes $V(F, G \text{ et } H)=f(N)$ et $E(F, G \text{ et } H)=f(N)$ pour les deux cas: éléments constants et linéaires. Sur ces courbes, on a montré les valeurs exactes :

$$V(F)=V(H) = 5 \text{ V.}$$

$$V(G)= 9 \text{ V.}$$

$$E(F, G \text{ et } H) = 1 \text{ V/cm}$$

Il est à remarquer que la courbe de convergence du champ électrique pour les points F et G correspondante au cas constant, n'est pas tracée. La raison est que les points F et G se trouvent sur la frontière et que la variation de u sur chaque élément est constante. En d'autres termes, la composante tangentielle calculée en dérivant u par rapport à la tangente serait toujours nulle, et ceci n'est pas vrai en réalité.

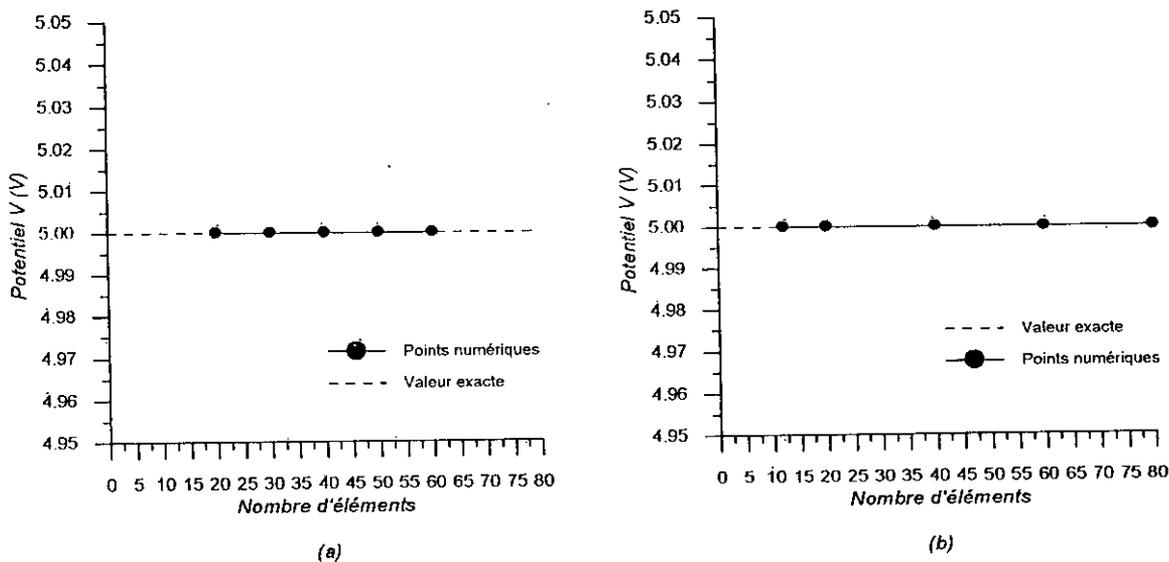


Fig. 5.11 Courbe de convergence du potentiel au point F(5,5).
 (a)éléments constants. (b)éléments linéaires

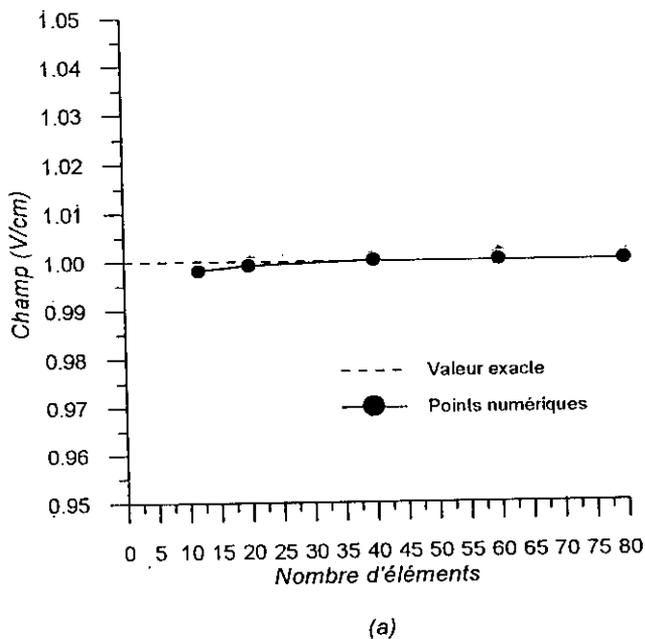


Fig. 5.12 Courbe de convergence du champ électrique au point F(5,5),
 éléments linéaires

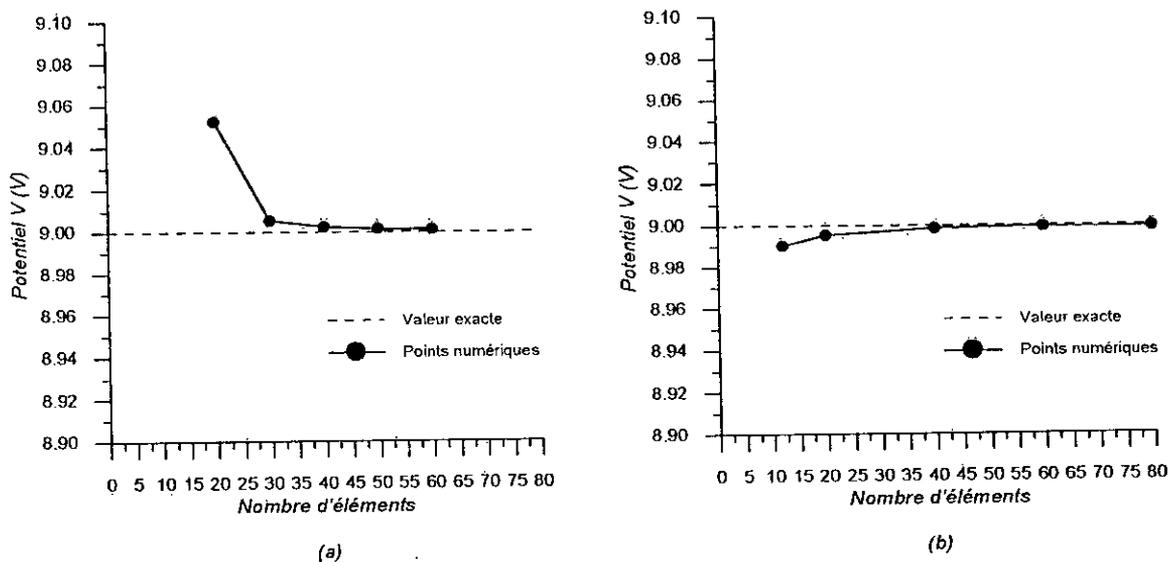


Fig. 5.13 Courbe de convergence du potentiel au point G(9,5). (a) éléments constants. (b) éléments linéaires

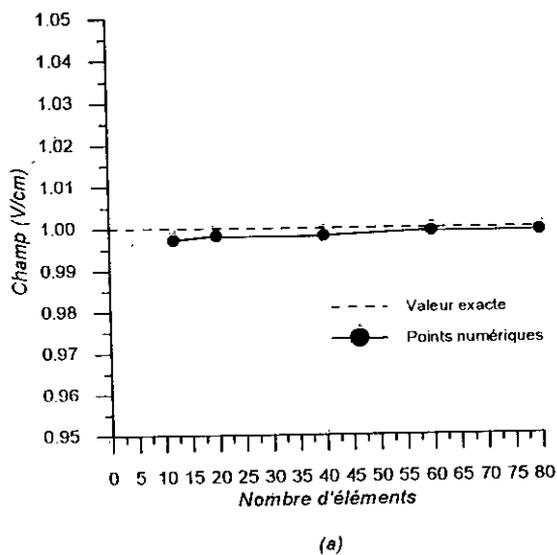


Fig. 5.14 Courbe de convergence du champ électrique au point G(9,5), éléments linéaires

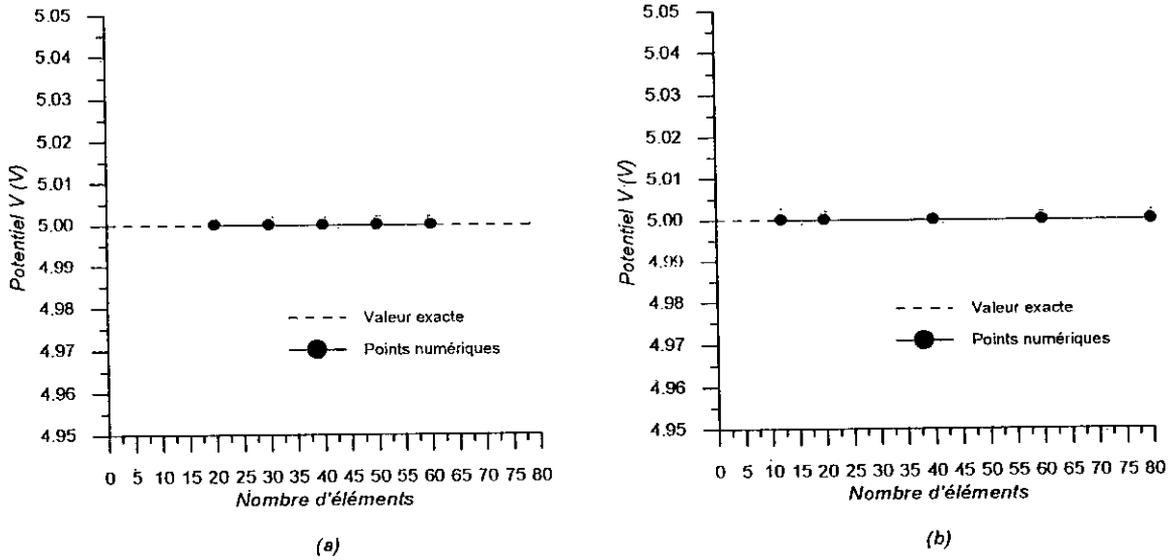


Fig. 5.15 Courbe de convergence du potentiel au point H(5,0).
 (a)éléments constants. (b)éléments linéaires

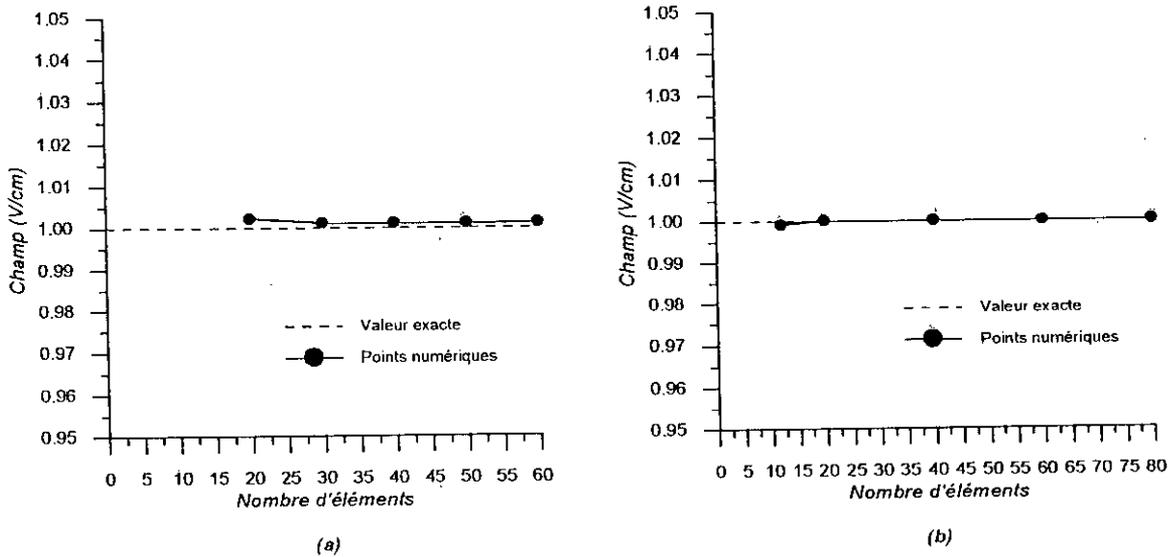


Fig. 5.16 Courbe de convergence du champ électrique au point H(5,0).
 (a)éléments constants. (b)éléments linéaires

Les courbes de convergence $V=f(N)$ et $E=f(N)$ des point F , G et H permettent de faire les remarques suivantes:

- Toutes les courbes convergent vers leur solution exacte.
- Le potentiel des point F et H est exactement le même que celui de la solution exacte et ceci même pour des valeurs réduites du nombre d'éléments N . Par contre celui du point G nécessite un nombre considérable d'éléments ($N \approx 50$) pour donner de bons résultats. Ceci s'explique par le fait que le point G se trouve près d'un coin géométrique, alors que les points F et H ne le sont pas.

La convergence du potentiel est plus rapide que celle du champ. Cette différence vient du fait que le champ dérive du potentiel: $\mathbf{E} = \text{grad}V$.

- Les résultats obtenus par les éléments linéaires convergent plus rapidement que ceux obtenus par les éléments constants.

5.2.2.1.2 Courbes de variation $V=f(x)$ et $E=f(x)$:

Ces courbes représentent la variation du potentiel V et du champ E le long de l'axe x ($y=0$). Aux figure (5.17) et (5.18), on a tracé les courbes analytiques et numériques correspondantes à un nombre d'éléments égal à 20.

Les fonctions analytiques de V et E pour les valeurs choisis de V_1 , V_2 et a sont:

$$\begin{aligned} V(x, y = 0) &= x & (V) \\ E(x, y = 0) &= Cte = 1 & (V/cm) \end{aligned} \tag{5.4}$$

où x est mesurée en cm.

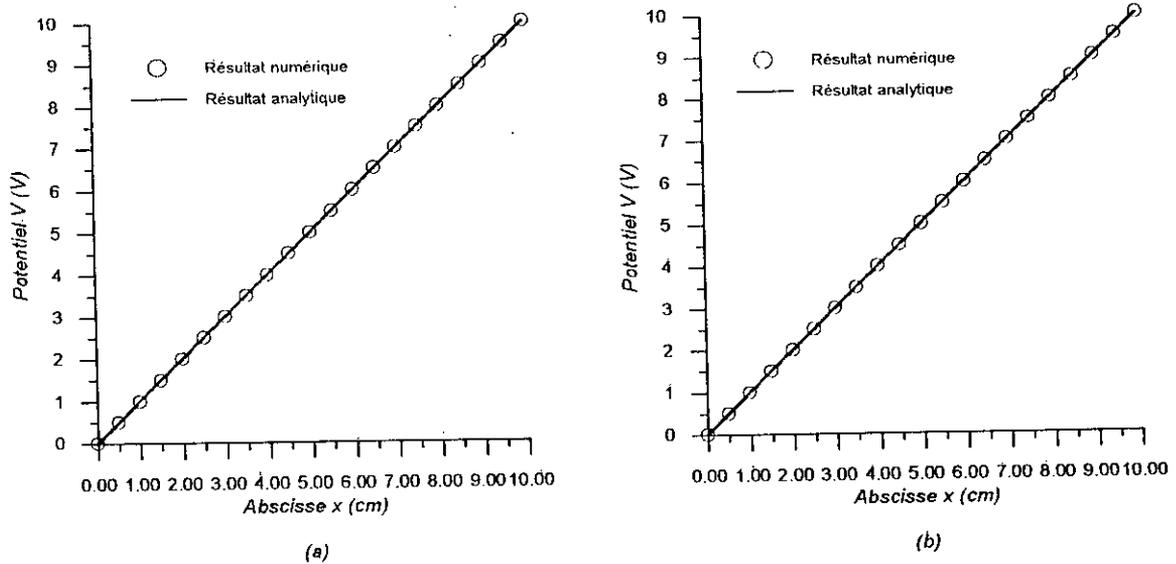


Fig. 5.17 Courbe de variation du potentiel le long de l'axe des x .
 (a)éléments constants. (b) éléments linéaires.

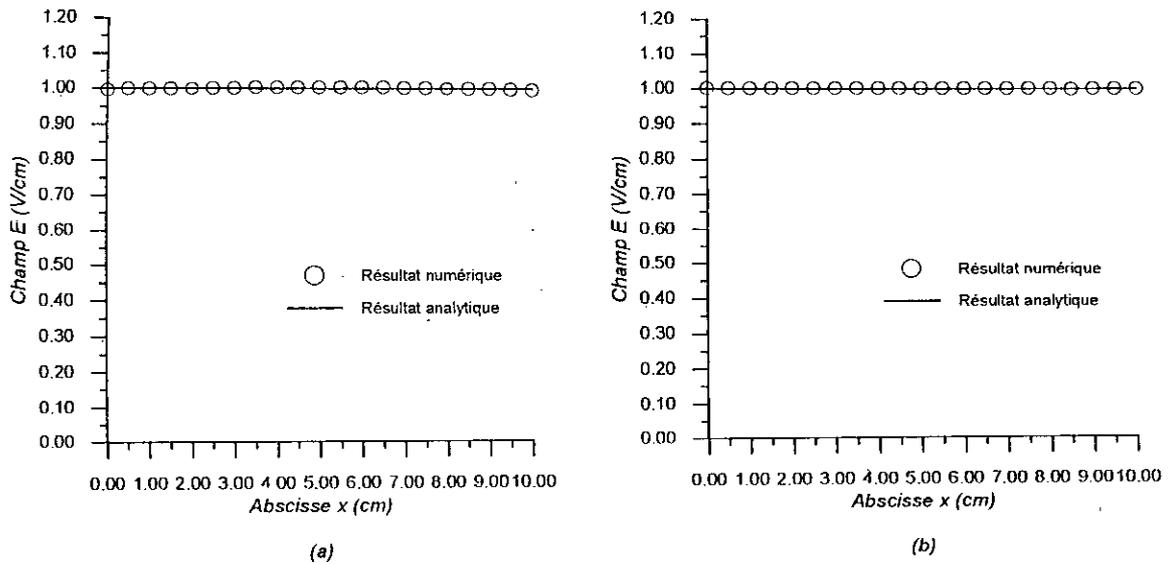


Fig. 5.18 Courbe de variation du champ électrique le long de l'axe des x.
(a) éléments constants. (b) éléments linéaires.

Les courbes tracées à partir des résultats numériques coïncident très bien avec celles obtenues par les expressions analytiques. On en déduit que pour un nombre réduit d'éléments, la méthode des éléments frontières donne de très bons résultats.

5.2.2.1.3 Lignes équipotentielles:

Les lignes équipotentielles tirées du programme Bem2D sont tracées à la figure (5.19). Elles correspondent au cas d'éléments linéaires avec $N=20$. La différence de potentiel entre deux lignes consécutives est 10 V.

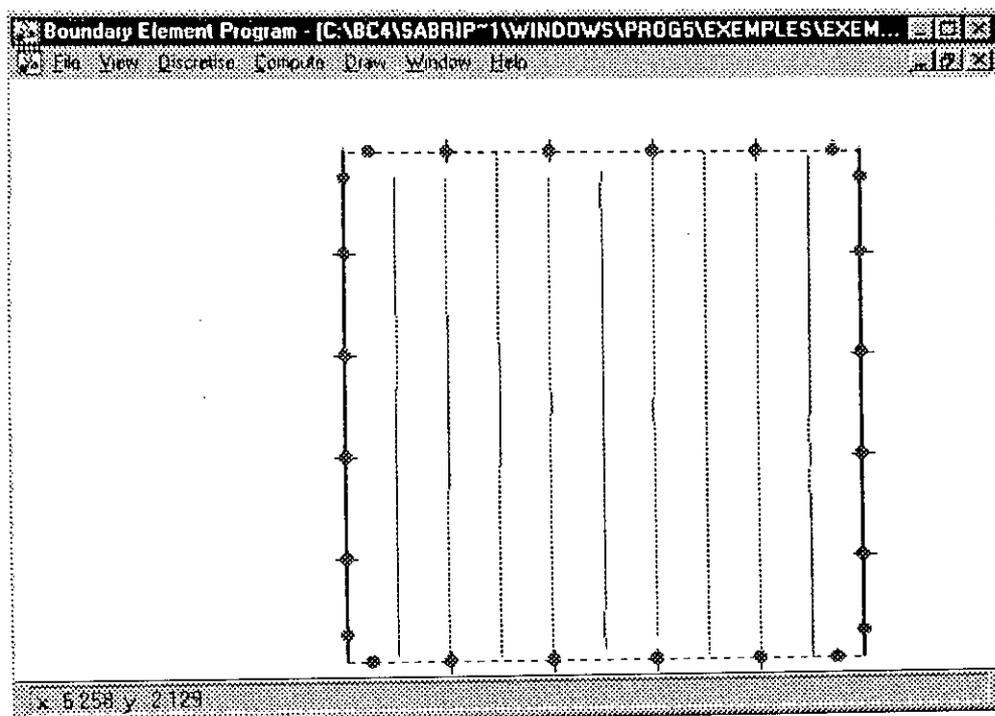


Fig. 5.19 Lignes équipotentielles

5.2.2.2 Exemple 2: Système Cylindre - Cylindre concentrique:

Il s'agit dans cet exemple de deux cylindres concentriques (Fig 5.20) de rayons R_1 et R_2 , mis aux potentiels V_1 et V_2 .

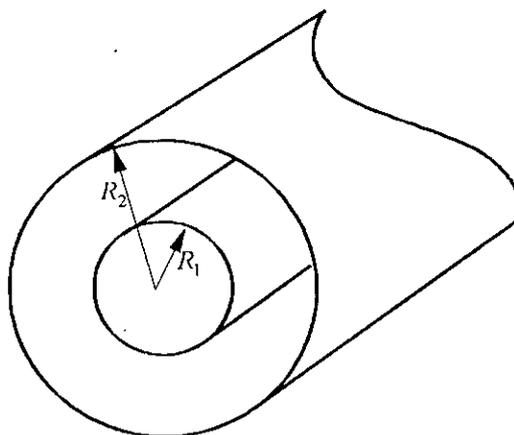


Fig. 5.20 Deux cylindres concentriques

Pour des raisons de symétrie, le champ est radial et le domaine d'étude peut être réduit à un seul quadrant (Fig. 5.21). Les conditions aux limites sont alors:

$$\begin{aligned}
 u &= V_1 && \text{sur l'arc } AD \\
 u &= V_2 && \text{sur l'arc } BC \\
 q = \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{sur } AB \text{ et } CD \text{ (composante normale du champ nulle)}
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

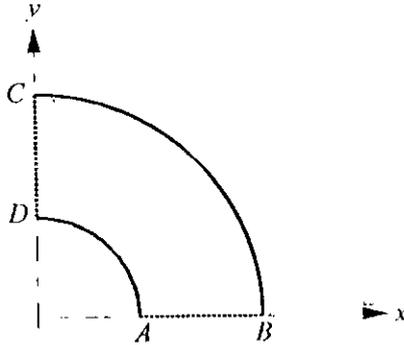


Fig. 5.21 Modélisation du problème

Le calcul analytique des grandeurs électriques V et E donne:

$$\begin{aligned}
 V(r) &= \frac{(V_1 - V_2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{R_2}{r}\right) + V_2 \\
 E(r) &= \frac{(V_1 - V_2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \left(\frac{1}{r}\right)
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

Les valeurs choisies de V_1 , V_2 , R_1 et R_2 sont:

$$V_1 = 10 \text{ V}$$

$$V_2 = 0 \text{ V}$$

$$R_1 = 2 \text{ cm}$$

$$R_2 = 6 \text{ cm}$$

Après discrétisation de la frontière en 48 éléments et résolution du système d'équations, on a tracé:

- Les courbes de variation de $V(r)$ et $E(r)$.
- Les lignes équipotentielles .

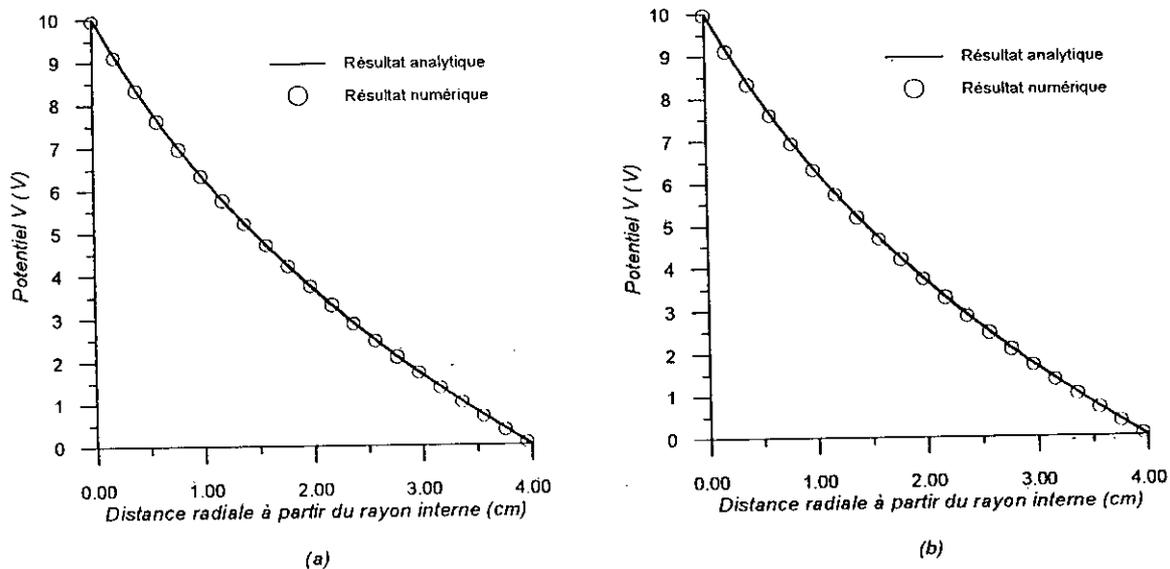


Fig. 5.22 Courbe de variation du potentiel le long d'un axe radial. (a)éléments constants. (b) éléments linéaires.

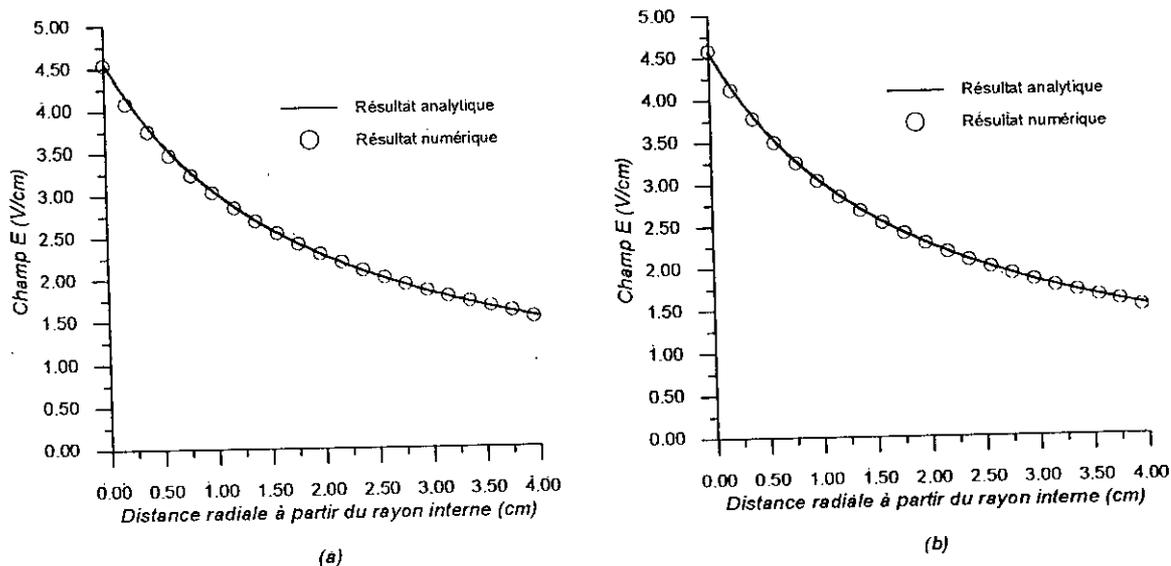


Fig. 5.23 Courbe de variation du champ électrique le long d'un axe radial. (a)éléments constants. (b) éléments linéaires.

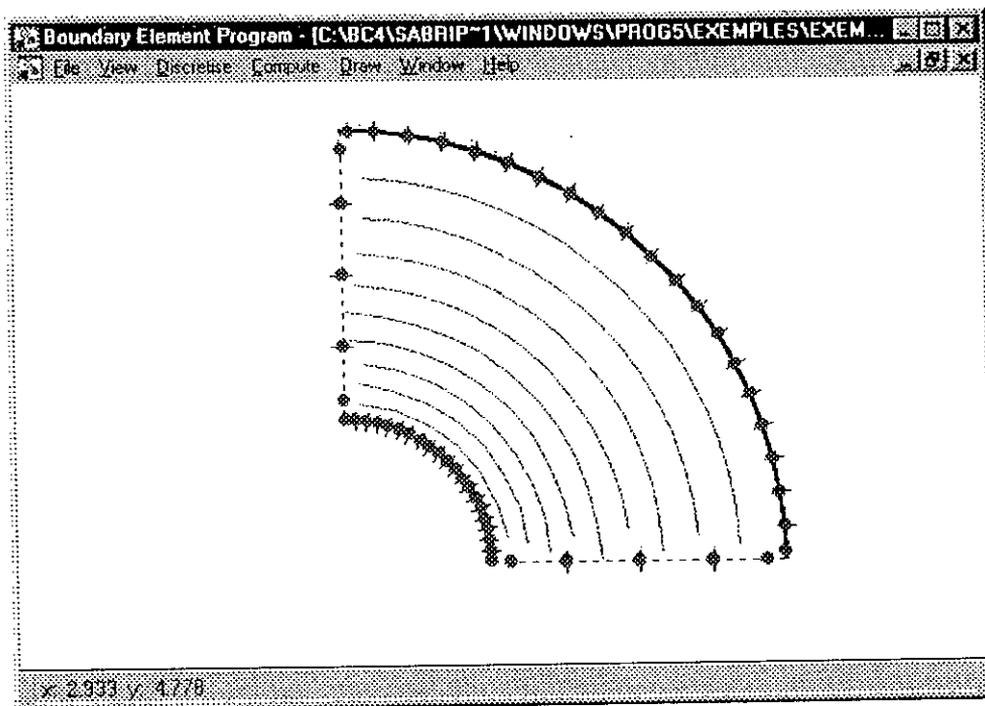


Fig. 5.24 Lignes équipotentiellles tracés par le programme Bem2D

On voit bien des figures (5.22) et (5.23) qu'il y a une très bonne convergence de la solution numérique vers la solution analytique. La valeur du champ électrique diminue lorsqu'on va du cylindre de petit rayon vers le cylindre de grand rayon. Ceci est du à la faible valeur du rayon de courbure du premier cylindre.

5.2.2.3 Exemple 3: Système Cylindre - Cylindre excentrique:

Dans cet exemple, deux cylindres excentriques de même rayons R et séparés d'une distance d , sont mis à des potentiels de signes opposés V et $-V$ (Fig. 5.25).

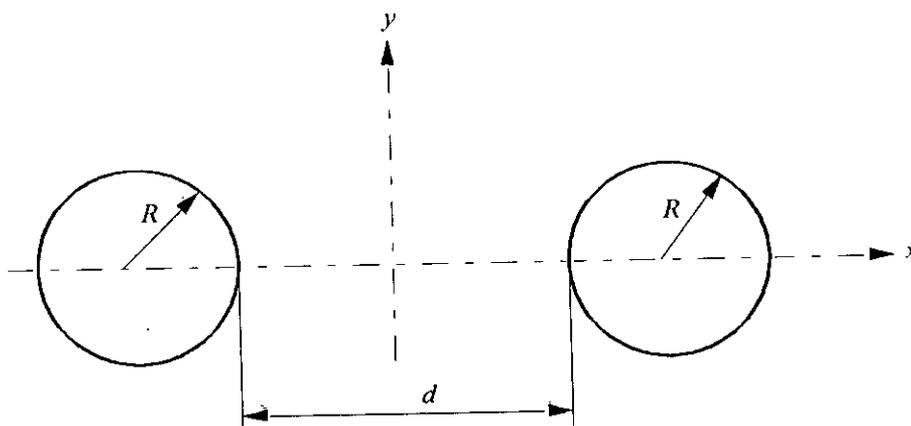


Fig. 5.25 Deux cylindres excentriques

Les valeurs de V et d sont:

$$V = 15 \text{ V}$$

$$d = 15 \text{ cm}$$

On a pris deux valeurs de R: R = 1cm et R = 5cm.

Sur les figures (5.26), (5.27), (5.28) et (5.29) on a tracé les courbes de variation analytiques et numériques (N=60) de V et E le long de l'axe x.

Les courbes théoriques sont données par les expressions suivantes:

$$V(x) = \frac{\Delta V}{2 \ln\left(\frac{d+R}{R}\right)} \ln\left(\frac{\frac{d}{2} + R + x}{\frac{d}{2} + R - x}\right) \tag{5.7}$$

$$E(x) = \frac{\Delta V}{2 \ln\left(\frac{d+R}{R}\right)} \left(\frac{1}{\frac{d}{2} + R + x} + \frac{1}{\frac{d}{2} + R - x} \right)$$

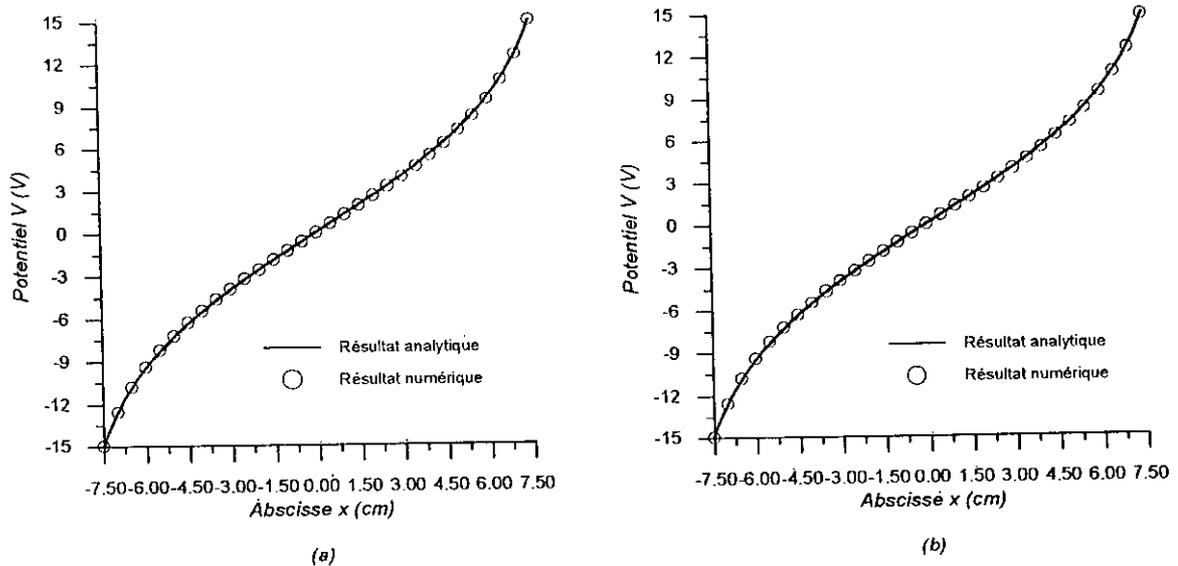


Fig. 5.26 Courbe de variation du potentiel. (a)éléments constants. (b)éléments linéaires. R=1cm

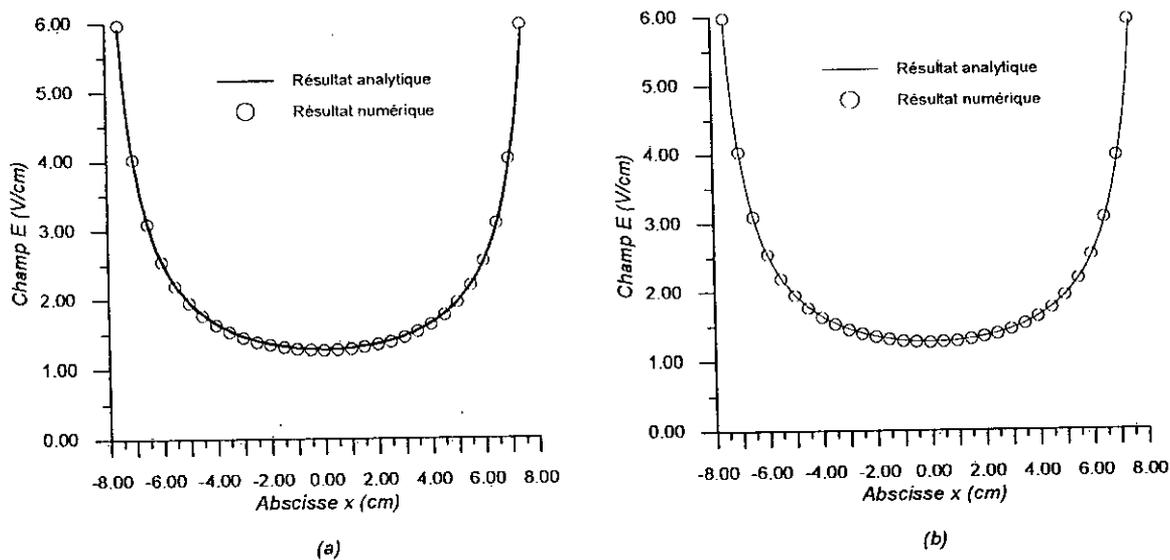


Fig. 5.27 Courbe de variation du champ électrique. (a)éléments constants. (b) éléments linéaires. $R=1\text{cm}$

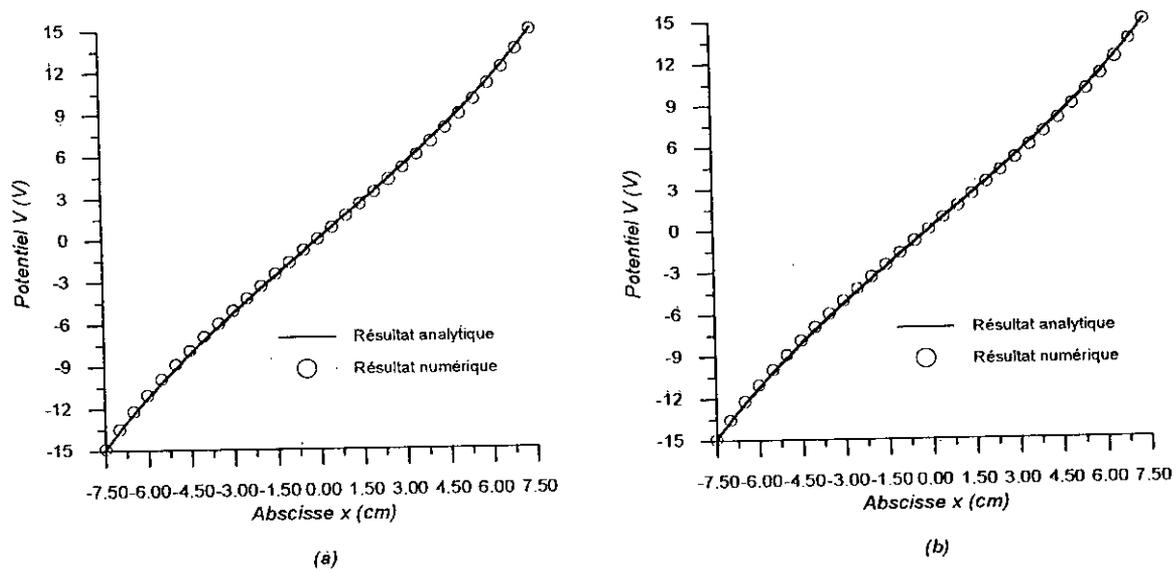


Fig. 5.28 Courbe de variation du potentiel. (a)éléments constants. (b)éléments linéaires. $R=5\text{cm}$

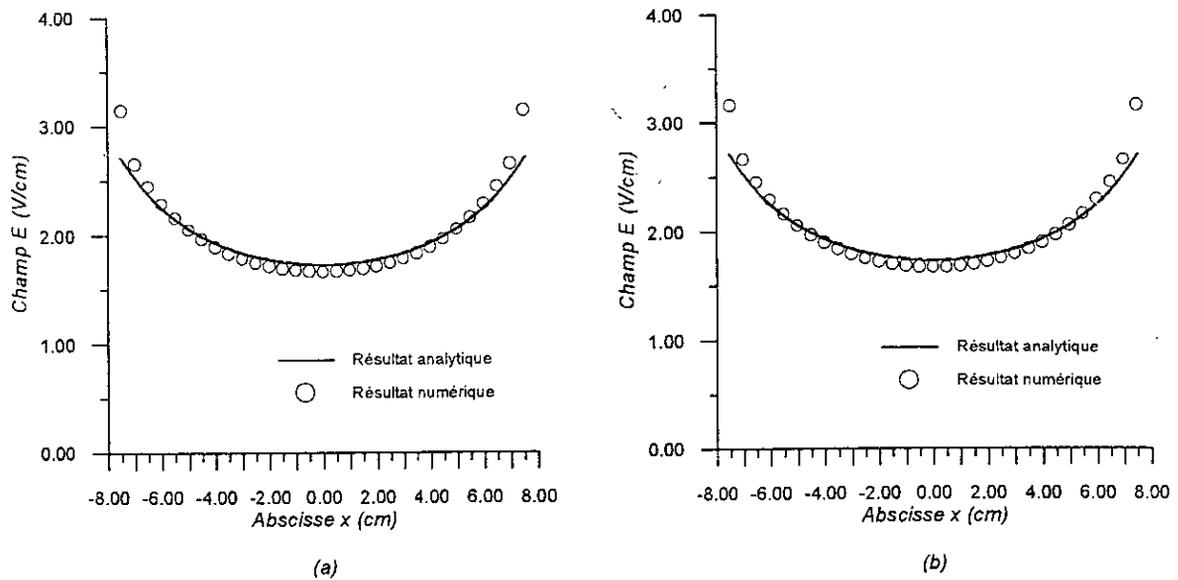


Fig. 5.2 Courbe de variation du champ électrique. (a)éléments constants.
(b) éléments linéaires. $R=5\text{cm}$

On voit bien que, pour le cas $R=1\text{cm}$, la simulation numérique présente une convergence remarquable alors que, pour le cas $R=5\text{cm}$, les résultats de la courbe de variation du champ ne sont pas très satisfaisants. On peut expliquer cette décroissance dans la précision des résultats par le fait que l'approximation géométrique faite par les segments de droites est mal adaptée lorsque le rayon R est grand. En effet, au niveau de chaque point liant deux segments, la courbe approximée, au lieu d'être lisse, est cassée. Ceci entraîne une augmentation de la valeur du champ près des deux cylindres. L'effet de cette cassure n'est pas considérable dans le cas où $R=1\text{cm}$ parce que les deux cylindres présentaient déjà une importante courbure.

Les deux courbes de variation du champ permettent de constater que, pour des valeurs faibles du rayon R , le champ est très élevé près des cylindres. Ceci est due au phénomène de pointe bien connue dans les problèmes d'électrostatique.

On peut aussi dire que les éléments constants donnent des résultats très satisfaisants malgré que les fonctions u et q sont supposées constantes sur chaque élément.

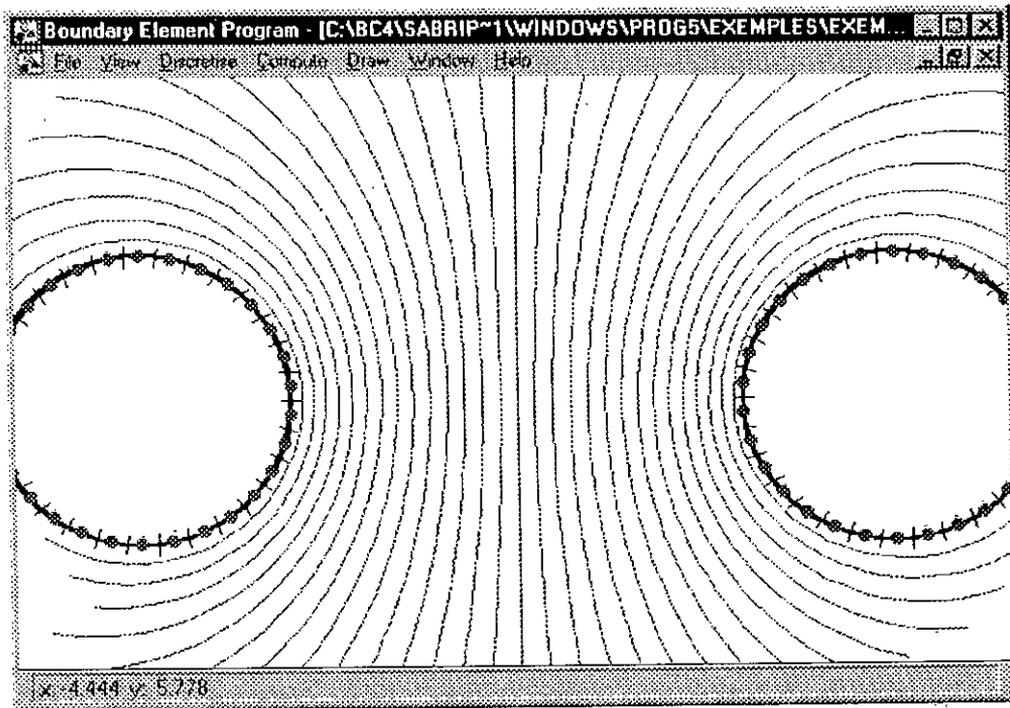


Fig. 5.30 Lignes équipotentiellles pour $R=5\text{cm}$ tracés par le programme Bem2D.

5.2.3 Partie 2:

5.2.3.1 Exemple 4: Système plan - plan stratifié

Il s'agit dans cet exemple du même système de l'exemple 1, mais cette fois ci le milieu n'est pas homogène. Il est constitué de deux régions différentes de permittivités relatives $\epsilon_{r1}=1$ et $\epsilon_{r2}=2$, comme il est montré sur la figure (5.31).

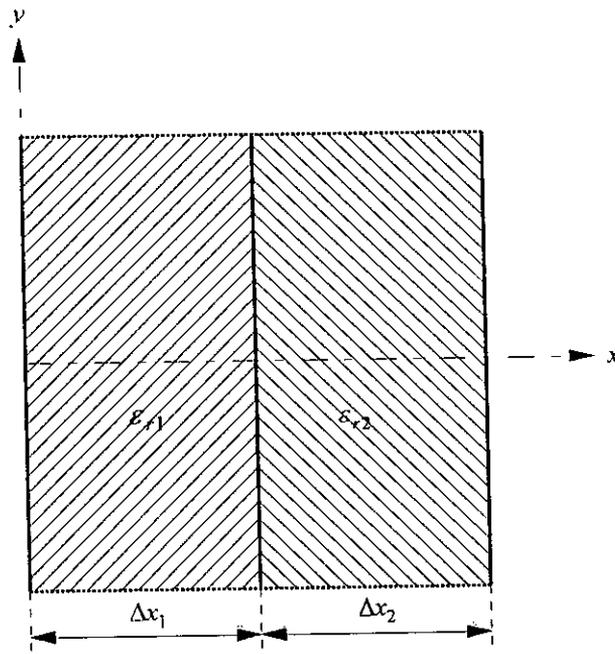


Fig. 5.31 Système plan - plan à deux couches

Les expressions analytiques du potentiel V et du champ électrique E sont:

$$E = \begin{cases} \frac{\alpha}{\epsilon_{r1}} & \text{si } x \in [0, \Delta x_1] \\ \frac{\alpha}{\epsilon_{r2}} & \text{si } x \in [\Delta x_1, \Delta x_2] \end{cases} \quad (5.8)$$

$$V = \begin{cases} \frac{\alpha}{\epsilon_{r1}} x & \text{si } x \in [0, \Delta x_1] \\ \frac{\alpha}{\epsilon_{r2}} (x - \Delta x_1) + \frac{\alpha}{\epsilon_{r1}} \Delta x_1 & \text{si } x \in [\Delta x_1, \Delta x_2] \end{cases} \quad (5.9)$$

avec:

$$\alpha = \frac{\Delta V}{\frac{\Delta x_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{\Delta x_2}{\epsilon_{r2}}} \quad (5.10)$$

Sur la figure (5.32) on a tracé les courbes analytiques et numériques du potentiel V et du champ E , obtenues par le programme MRBem2D, le long de l'axe des x .

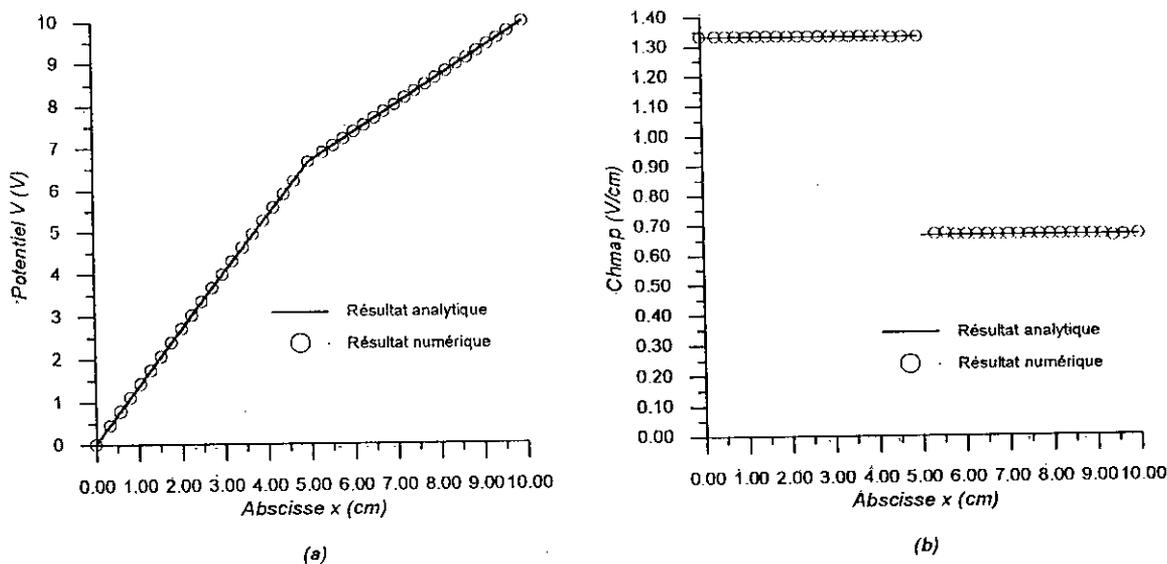


Fig. 5.32 Courbe de variation (a) du potentiel. (b) du champ.

On voit bien sur la figure 5.32b que le champ est élevé dans la région 1. Ceci est tout à fait prévisible puisque la permittivité de la région 1 est faible par rapport à celle de la région 2.

On constate aussi que les résultats obtenus par la simulation numérique sont satisfaisants.

5.2.3.2 Exemple 5: Système cylindre - cylindre

Cet exemple traite aussi un problème à deux régions de formes cylindriques (Fig.5.33) de permittivités relatives $\epsilon_{r1}=2$ et $\epsilon_{r2}=1$. Un exemple pratique, où on rencontre une telle configuration, est l'étude des câbles souterrains à haute tension.

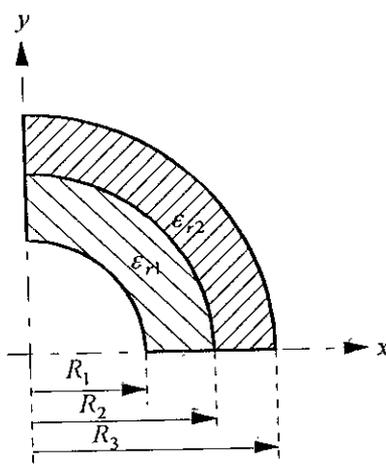


Fig. 5.33 Système cylindrique à deux couches

Les expressions analytiques du potentiel et du champ en fonction de la coordonnée radiale r sont données par:

$$E = \begin{cases} \frac{\alpha}{\epsilon_{r1} r} & \text{si } r \in [R_1, R_2] \\ \frac{\alpha}{\epsilon_{r2} r} & \text{si } r \in [R_2, R_3] \end{cases} \quad (5.11)$$

$$V = \begin{cases} \alpha \left(\frac{\ln(R_2 / r)}{\epsilon_{r1}} + \frac{\ln(R_3 / R_2)}{\epsilon_{r2}} \right) & \text{si } r \in [R_1, R_2] \\ \frac{\alpha}{\epsilon_{r2}} \ln(R_3 / r) & \text{si } r \in [R_2, R_3] \end{cases} \quad (5.12)$$

avec:

$$\alpha = \frac{\Delta V}{\frac{\ln(R_2 / R_1)}{\epsilon_{r1}} + \frac{\ln(R_3 / R_2)}{\epsilon_{r2}}} \quad (5.13)$$

Sur la figure (5.34) on a tracé les courbes de variation analytiques et numériques du potentiel et du champ en fonction de r .

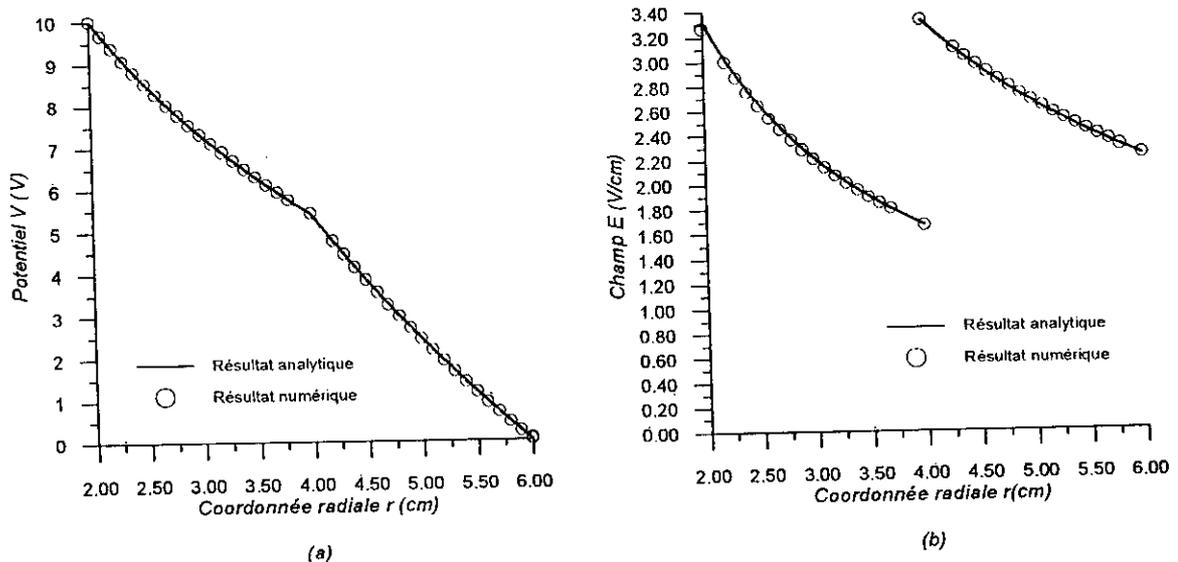


Fig. 5.34 Courbe de variation (a) du potentiel. (b) du champ.

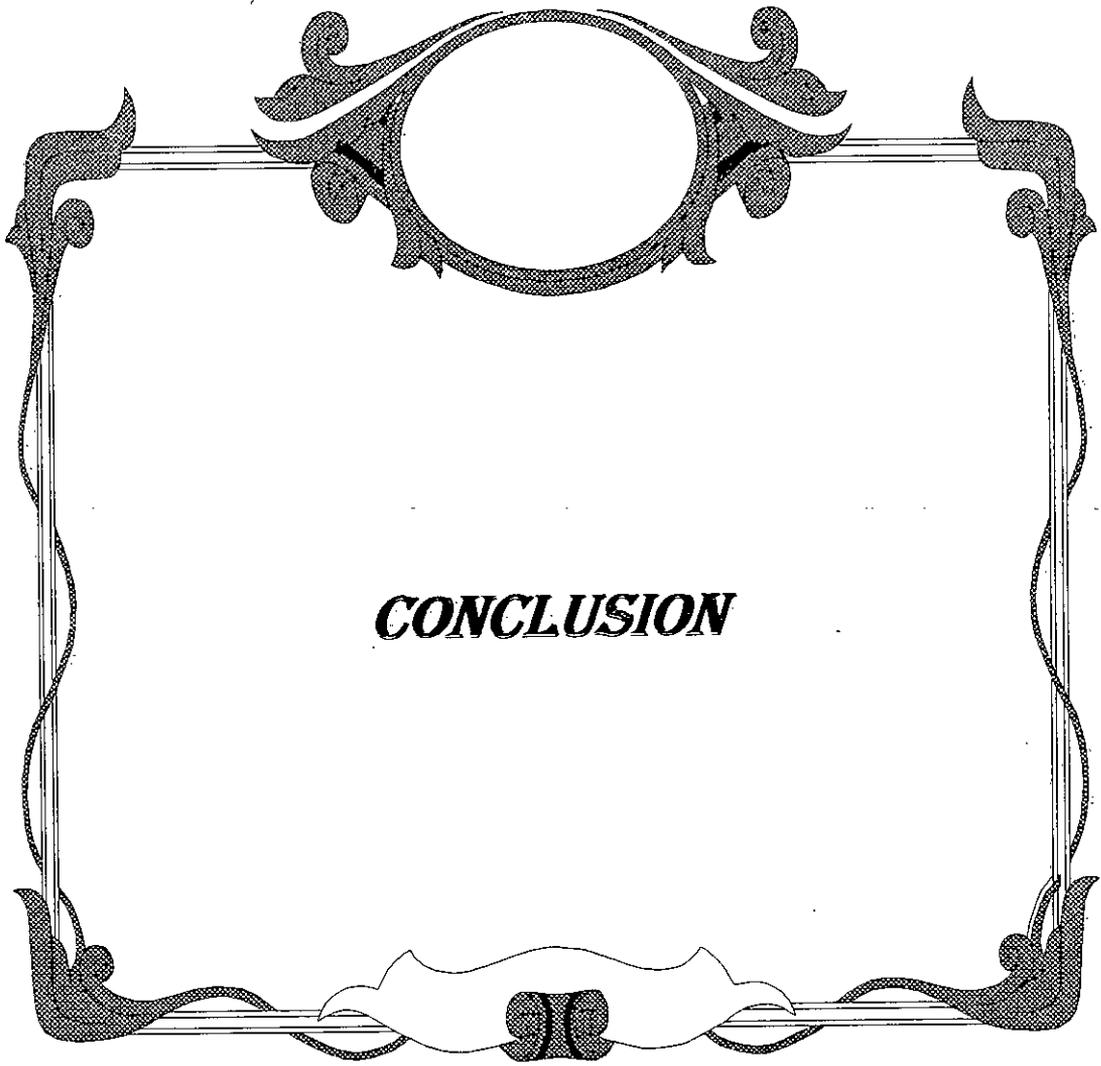
Dans chacune des deux régions, le champ est important au niveau des cylindres de faibles rayons (courbure importante).

Le champ subit une discontinuité à l'interface des deux régions. Il est important dans la région moins rigide (faible permittivité).

La convergence de la méthode se voit bien aussi dans cet exemple.

5.3 Conclusion:

D'après les exemples traités, on peut conclure que la méthode des éléments frontières donne des résultats excellents même si le nombre d'éléments est petit (convergence rapide). La comparaison entre les résultats numériques et analytiques montre la précision de la méthode. Cependant, il faut avoir recours, dans certains cas, aux éléments d'ordre supérieur afin d'éliminer l'erreur géométrique que posent les éléments constants et linéaires.



CONCLUSION

Conclusion

Arrivés au terme de ce travail, nous espérons avoir apporté une certaine clarification dans l'exposé de la méthode des éléments frontières et des caractéristiques de sa mise en œuvre numérique.

Les équations intégrales de frontières traitant les problèmes de potentiel permettent de résoudre l'équation de Laplace, qui régit des phénomènes physiques assez nombreux.

Par le biais du théorème de Green ou de la méthode des résidus pondérés, l'équation différentielle, régissant le comportement physique, est transformée en une équation intégrale sur la frontière. Une discrétisation de la frontière en un nombre fini d'éléments permet de transformer ces équations continues en un système discret d'équations linéaires.

La résolution de ce système, tenant compte des conditions aux limites, conduit à la détermination des inconnues physiques sur la frontière (potentiels et flux). Le calcul du potentiel ou du champ, en chaque point de l'espace, peut être obtenu à partir des solutions du système d'équations.

Nous avons illustré à la fin de ce travail la qualité des résultats obtenus par la méthode (bonne précision et convergence rapide).

A partir de l'étude détaillée que nous avons effectuée, nous pouvons énumérer les principaux avantages et inconvénients de la méthode comparée à celle des éléments finis:

Avantages:

- Seule une discrétisation de la frontière est nécessaire (problème réduit d'une dimension).

- Couplage facile avec les programmes de CAO.
- Précision meilleur pour le même temps de calcul.
- Traitement des milieux infinis.
- Calcul possible aussi aux points intérieurs.

Inconvénients:

- Matrices peuplées et non symétriques.
- Nécessité de discrétisation complète du domaine dans les milieux non homogènes.
- Non économique si le rapport surface/volume est grand.

L'élargissement de l'étude de la méthode des éléments frontières devrait constituer le cadre des perspectives envisagées et concernerait:

- L'étude du couplage entre la BEM et la FEM.
- L'étude de la DRM (Dual Reciprocity Boundary Element Method) récemment développée pour le traitement de l'équation de Poisson.
- Le traitement des milieux anisotropes rencontrés généralement dans les machines électriques.
- Le développement des programmes Bem2D et MRBem2D élaborés dans le cadre de cette étude.



***ANNEXES ET
BIBLIOGRAPHIE***

1. Intégration par partie:

L'intégration par partie sur un domaine Ω se fait de la même manière que l'intégration par partie sur un intervalle $[a,b]$. Ainsi, on a:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) g d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (fg) d\Omega - \int_{\Omega} f \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) d\Omega \quad (\text{A.1})$$

On a la formule de Green suivante:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} d\Omega = \int_{\Gamma} f \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) d\Gamma \quad (\text{A.2})$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à la surface Γ entourant le domaine Ω et \mathbf{i} est le vecteur unitaire de l'axe des x .

On peut en déduire la formule d'intégration suivante:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) g d\Omega = \int_{\Gamma} (fg) \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) d\Gamma - \int_{\Omega} f \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) d\Omega \quad (\text{A.3})$$

ou plus généralement:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial m} \right) g d\Omega = \int_{\Gamma} (fg) \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) d\Gamma - \int_{\Omega} f \left(\frac{\partial g}{\partial m} \right) d\Omega \quad (\text{A.4})$$

où \mathbf{m} est le vecteur suivant lequel se fait la dérivée.

2. Formule des Résidus pondérés:

On peut transformer la formule suivante:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u_0) w d\Omega = 0 \quad (\text{A.5})$$

à la formule générale des résidus pondérés:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) w d\Omega = \int_{\Gamma_1} (q - \bar{q}) w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (\text{A.6})$$

en suivant les étapes suivantes d'intégration par parties:

■ 1^{ère} intégration par parties:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) w \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right) w \right) d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} w \right) \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} w \right) \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \right) d\Gamma \\ & \quad - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial u_0}{\partial n} w d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

■ 2^{ème} intégration par parties:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} u_0 \right) \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} u_0 \right) \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \right) d\Gamma \\ & \quad - \int_{\Omega} \left(u_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + u_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} u_0 \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega} u_0 (\nabla^2 w) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

On obtient alors en posant $\frac{\partial u_0}{\partial n} = q_0$:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u_0) w d\Omega = \int_{\Gamma} q_0 w d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} u_0 d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla^2 w) u_0 d\Omega \quad (\text{A.9})$$

■ Introduction des conditions aux limites:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} q_0 w d\Gamma = \int_{\Gamma_1} q_0 w d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma \\ & \int_{\Gamma} u_0 \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_2} u_0 \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

On a donc la formule exacte suivante:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u_0) w d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla^2 w) u_0 d\Omega + \int_{\Gamma_1} q_0 w d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u_0 \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (\text{A.11})$$

■ Introduction des fonctions approchées u et q :

En remplaçant u_0 par u et q_0 par q on a:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w) u d\Omega + \int_{\Gamma_1} q w d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (\text{A.12})$$

■ 3^{ème} intégration par parties:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w) u d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} u d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega \quad (\text{A.13})$$

La formule (A.12) devient:

$$- \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_1} q w d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (\text{A.14})$$

■ 4^{ème} intégration par parties:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} w d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla^2 u) w d\Omega \quad (\text{A.15})$$

La formule (A.14) devient:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) w d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (\text{A.16})$$

1. Quadrature de Gauss standard:

1.1 Quadrature unidimensionnelle:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \cong \sum_{i=1}^K f(x_i) w_i \quad (\text{B.1})$$

où x_i est la coordonnée du $i^{\text{ème}}$ point d'intégration, w_i est le coefficient de pondération associé à ce point et K est le nombre total de points d'intégration. Ces paramètres sont listés dans la table B.1.

Table B.1

K	$\pm x_i$	w_i	K	$\pm x_i$	w_i
2	0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000	7	0.00000 00000 00000 0.40584 51513 77397 0.74153 11855 99394 0.94910 79123 42759	0.41795 91386 73469 0.38183 00505 05119 0.27970 53914 89277 0.12948 49661 68870
3	0.00000 00000 00000 0.77459 66692 41483	0.88888 88888 88889 0.55555 55555 55555	8	0.18343 46424 95650 0.52553 24099 16329 0.79666 64774 13627 0.96028 98564 97536	0.36268 37833 78362 0.31370 66458 77887 0.22238 10344 53374 0.10122 85362 90376
4	0.33998 10435 84856 0.86113 63115 94053	0.65214 51548 62546 0.34785 48451 37454	9	0.00000 00000 00000 0.32425 34234 03809 0.61337 14327 00590 0.83603 11073 26636 0.96816 02395 07626	0.33023 93550 01260 0.31234 70770 40003 0.26061 06964 02935 0.18064 81606 94857 0.08127 43883 61574
5	0.00000 00000 00000 0.53846 93101 05683 0.90617 98459 38664	0.56888 88888 88889 0.47862 86704 99366 0.23692 68850 56189	10	0.14887 43389 81631 0.43339 53941 29247 0.67940 95682 99024 0.86506 33666 88985 0.97390 65285 17172	0.29552 42247 14753 0.26926 67193 09996 0.21908 63625 15982 0.14945 13491 50581 0.06667 13443 08688
6	0.23861 91860 83197 0.66120 93864 66265 0.93246 95142 03152	0.46791 39345 72691 0.36076 15730 48139 0.17132 44923 79170	12	0.12523 34085 11469 0.36783 14989 98180 0.58731 79542 86617 0.76990 26741 94305 0.90411 72563 70475 0.98156 06342 46719	0.24914 70458 13403 0.23349 25365 38355 0.20316 74267 23066 0.16007 83285 43346 0.10693 93259 95318 0.04717 53363 86512

1.2 Quadrature bi- et tridimensionnelle pour les rectangles et les éléments hexaédriques:

On obtient ces formules en combinant les expressions (B.1):

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy \cong \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^K f(x_i, y_j) w_i w_j \quad (\text{B.2})$$

et

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y, z) dx dy dz \cong \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^K f(x_i, y_j, z_k) w_i w_j w_k \quad (\text{B.3})$$

où les coordonnées des points d'intégration et les coefficients de pondération sont données dans la même table B.1.

1.3 Intégration sur des triangles:

En se référant à l'élément triangulaire de la figure B.1, on a:

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-\eta_2} f(\eta_1, \eta_2, \eta_3) d\eta_1 \right) d\eta_2 \cong \sum_{i=1}^K f(\eta_1^i, \eta_2^i, \eta_3^i) w_i \quad (\text{B.4})$$

où les coordonnées triangulaires et les coefficients de pondération associés sont données dans la table B.2.

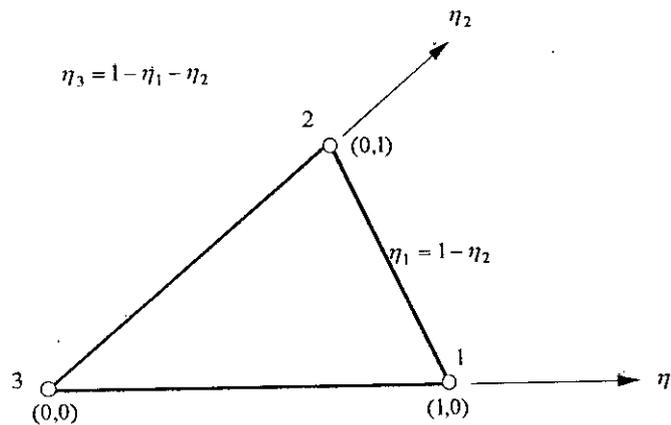


Fig. B.1 Définition des coordonnées triangulaires (η_1, η_2) .

Table B.2

K	i	η_1^i	η_2^i	η_3^i	w_i
1 (linéaire)	1	1/3	1/3	1/3	1
2 (quadratique)	1	1/2	1/2	0	1/3
	2	0	1/2	1/2	1/3
	3	1/2	0	1/2	1/3
4 (cubique)	1	1/3	1/3	1/3	-9/16
	2	3/5	1/5	1/5	25/48
	3	1/5	3/5	1/5	25/48
	4	1/5	1/5	3/5	25/48
7	1	0.333 333 33	0.333 333 33	0.333 333 33	0.225 000 00
	2	0.797 426 99	0.101 286 51	0.101 286 51	0.125 939 18
	3	0.101 286 51	0.797 426 99	0.101 286 51	0.125 939 18
	4	0.101 286 51	0.101 286 51	0.797 426 99	0.125 939 18
	5	0.059 715 87	0.470 142 06	0.470 142 06	0.132 394 15
	6	0.470 142 06	0.059 715 87	0.470 142 06	0.132 394 15
	7	0.470 142 06	0.470 142 06	0.059 715 87	0.132 394 15

Notons que la coordonnée locale η_3 n'est pas indépendante et s'écrit en fonction de η_1 et η_2 par: $\eta_3=1-\eta_1-\eta_2$.

2. Calcul des intégrales singulières:

2.1 Quadrature de Gauss logarithmique unidimensionnelle:

$$I = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right) f(x) dx \cong \sum_{i=1}^K f(x_i) w_i \quad (\text{B.5})$$

La table B.3 contient les points d'intégration et les coefficients de pondération nécessaires.

Table B.3

K	x_i	w_i	K	x_i	w_i
2	0.11200880 0.60227691	0.71853931 0.28146068	7	0.16719355 (-1) 0.10018568 0.24629424 0.43346349 0.63235098 0.81111862 0.94084816	0.19616938 0.27030264 0.23968187 0.16575777 0.88943226 (-1) 0.33194304 (-1) 0.59327869 (-2)
3	0.63890792 (-1) 0.36899706 0.76688030	0.51340455 0.39198004 0.94615406 (-1)	8	0.13320243 (-1) 0.79750427 (-1) 0.19787102 0.35415398 0.52945857 0.70181452 0.84937932 0.95332645	0.16441660 0.23752560 0.22684198 0.17575408 0.11292402 0.57872212 (-1) 0.20979074 (-1) 0.36864071 (-2)
4	0.41448480 (-1) 0.24527491 0.55616545 0.84898239	0.38346406 0.38687532 0.19043513 0.39225487 (-1)	9	0.10969338 (-1) 0.64983682 (-1) 0.16222943 0.29374996 0.44663195 0.60548172 0.75411017 0.87726585 0.96225056	0.14006846 0.20977224 0.21142716 0.17715622 0.12779920 0.78478879 (-1) 0.39022490 (-1) 0.13867290 (-1) 0.24080402 (-2)
5	0.29134472 (-1) 0.17397721 0.41170251 0.67731417 0.89477136	0.29789346 0.34977622 0.23448829 0.98930460 (-1) 0.18911552 (-1)	10	0.90425944 (-2) 0.53971054 (-1) 0.13531134 0.24705169 0.38021171 0.52379159 0.66577472 0.79419019 0.89816102 0.96884798	0.12095474 0.18636310 0.19566066 0.17357723 0.13569597 0.93647084 (-1) 0.55787938 (-1) 0.27159893 (-1) 0.95151992 (-2) 0.16381586 (-2)
6	0.21634005 (-1) 0.12958339 0.31402045 0.53865721 0.75691533 0.92266884	0.23876366 0.30828657 0.24531742 0.14200875 0.55454622 (-1) 0.10168958 (-1)			

Note: Les nombres sont à multiplier par 10 puissance la valeur entre parenthèses.

2.2 Intégration sur des triangles et des carrés présentant un singularité en $1/r$:

$$I = \int_{\Omega} \frac{1}{r} f(x, y) d\Omega \cong \sum_{i=1}^K f(x_i, y_i) w_i \quad (\text{B.6})$$

où Ω représente l'un des domaines d'intégration de la figure B.2. Les points d'intégrations et les coefficients de pondération sont regroupés dans la table B.4. Les notations TV k et TM k désignent la formule de degré k pour la configuration TV ou TM de

la figure B.2. La même notation est utilisée pour QV_k et QM_k . S'il existe plus d'une formule pour un ordre donné, on les distingue par l'utilisation des primes.

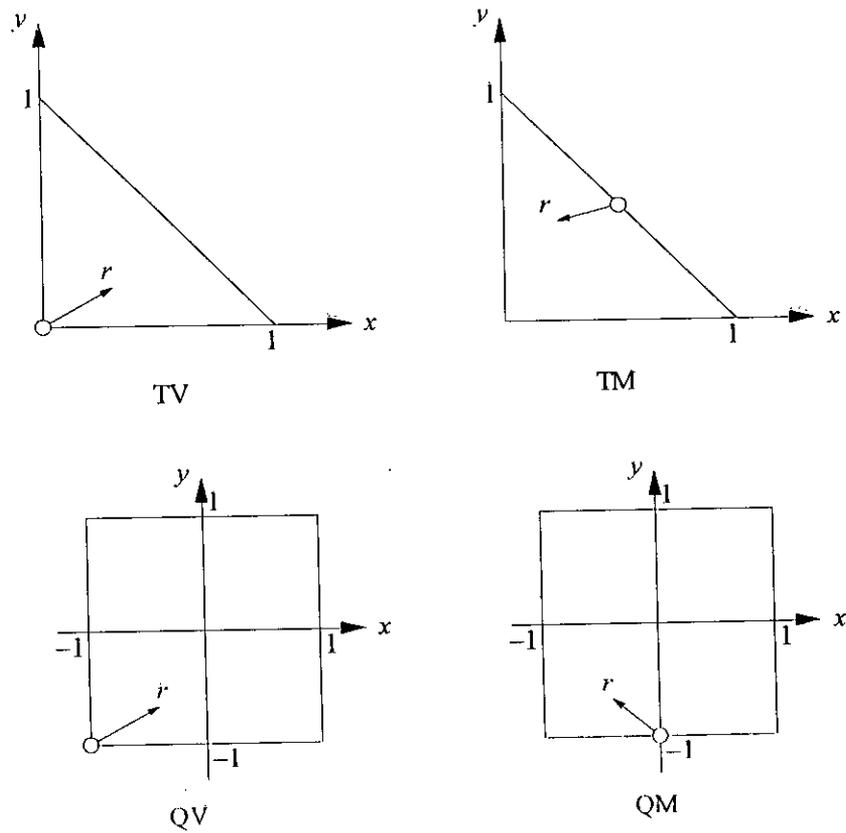


Fig. B.2 Description des configurations, (○) dénote la position de la singularité.

Table B.4

Formule	Coordonnée x_i	Coordonnée y_i	Poids w_i
TV 1	0.25	$y_1=x_1$	1.24645048
TV 2'	0.16666667 0.81742619	$y_1=x_1$ 0.18257381	0.93483790 0.15580629
	$x_3=y_2$	$y_3=x_2$	$w_3=w_2$
TV 2''	0.53764799 0.0	$y_1=x_1$ 0.35514705	0.25071485 0.49786782
	$x_3=y_2$	$y_3=x_2$	$w_3=w_2$
TV 3	0.16385495 0.61114353	0.04756957 0.17753138	0.31161231 0.31161293
	$x_3=y_1$ $x_4=y_2$	$y_3=x_1$ $y_4=x_2$	$w_3=w_1$ $w_4=w_2$
TM 1	0.125	$y_1=x_1$	1.76274717
TM 2'	0.28295366 0.24706775	$y_1=x_1$ 0.75293225	1.01519055 0.37377831
	$x_3=y_2$	$y_3=x_2$	$w_3=w_2$
TM 2'''	0.46805571 0.50271173	$y_1=x_1$ 0.0	1.00578450 0.37848134
	$x_3=y_2$	$y_3=x_2$	$w_3=w_2$
TM 3	0.073328962 0.26640495	0.33623395 0.61878355	0.25051549 0.63085810
	$x_3=y_1$ $x_4=y_2$	$y_3=x_1$ $y_4=x_2$	$w_3=w_1$ $w_4=w_2$
QV 1	-0.26501817	$y_1=x_1$	3.52549435
QV 2'	-0.58105530 1.0	$y_1=x_1$ -0.21877566	2.37881900 0.57333767
	$x_3=y_2$	$y_3=x_2$	$w_3=w_2$
QV 2''	0.39666491 -0.15632872	$y_1=x_1$ -1.0	0.13250102 1.19649666
	$x_3=y_2$	$y_3=x_2$	$w_3=w_2$
QV 3	-0.37512304 0.69629093	-0.92928746 -0.15602536	1.02276580 0.73998134
	$x_3=y_1$ $x_4=y_2$	$y_3=x_1$ $y_4=x_2$	$w_3=w_1$ $w_4=w_2$
QM 1	0.0	-0.34313433	4.81211825
QM 2'	0.0 0.76138824	0.13130626 -1.0	2.79404031 1.00903897
	$x_3=x_2$	$y_3=y_2$	$w_3=w_2$
QM 2''	0.0 1.0	-0.65952349 0.64186697	3.64221415 0.58495205
	$x_3=-x_2$	$y_3=y_2$	$w_3=w_2$
QM 3	0.44855808 0.57322583	-0.73405341 0.45407346	1.61441436 0.79164476
	$x_3=x_1$ $x_4=-x_2$	$y_3=y_1$ $y_4=y_2$	$w_3=w_1$ $w_4=w_2$

Bibliographie

Ouvrages:

- [1] C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, L.C. Wrobel, Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag. Berlin and New York, 1984.
- [2] C.A. Brebbia and J.Dominguez, Boundary Elements. An Introductory Course, Computational Mechanics Publications, McGraw-Hill, Southampton, 1989.
- [3] C.A. Brebbia and S. Walker, Boundary Element Techniques in Engineering, Newnes-Butterworths, London-Boston, 1980.
- [4] D.E. Beskos, Boundary Element methods in Mechanics, Vol. 3 in Computational Methods in Mechanics, North-Holland, 1987.
- [5] C.A. Brebbia, Topics in Boundary Element Research, Vol. 6, Electromagnetic Applications, Springer-Verlag, 1989.
- [6] P.K. Banerjee and R. Butterfield, Boundary Element Methods in Engineering Science, McGraw-Hill, 1981.
- [7] M.A. Jaswon and G.T. Symm, Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics, Academic Press, London-New York, 1977.
- [8] C.A. Brebbia (Ed), Boundary Elements in Mechanical and Electrical Engineering, Proceedings of the International Boundary Element Symposium, Nice, France, 15-17 May 1990, Springer-Verlag, 1990.
- [9] C.A. Brebbia (Ed) and N.G.Zamani, Boundary Element Techniques: Applications in Engineering, Proceedings of the fourth International Conference on Boundary Element Technology, Windsor, Canada, June 1989, Computational Mechanics Publications, Southampton Boston, 1989.
- [10] S.L. Crouch and A.M. Starfield, Boundary Element Methods in Solid Mechanics, George Allen & Unwin, 1983.
- [11] R.P. Silvester and R.L. Ferrari, Finite Elements for Electrical Engineers, Cambridge University Press, New York, 1990.
- [12] C.A. Brebbia and A.J. Ferrante, Computational Methods for the Solution of Engineering Problems, Pentech Press. London, 1979.

- [13] O.C.Zienkiewicz, The Finite Element Method, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1985.
- [14] J.R. Sabonnadière et J.L. Coulomb, Eléments Finis et CAO, HERNES-Paris, 1986.
- [15] G.Dhatt et G.Touzot, Une présentation de la méthode des éléments finis, Editions Laloine, 1984.
- [16] R.L. Burdin and J.D. Faires, Numerical Analysis, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1985.
- [17] B.Démidovitch et I.Maron, Eléments de Calcul Numérique, Ed. Mir-Moscou, 1979.
- [18] N.Bakhvalov, Méthodes Numériques, Ed. Mir-Moscou, 1984.
- [19] A.Gourdin et M.Boumahrat, Méthodes Numériques Appliquées, OPU, Alger, 1991.
- [20] M. Aguet et M.Lanovici, Haute Tension, Ed. Georgi, 1982.
- [21] Feynman, Leighton and Sands, Le Cours de Physique de Feynman, Electromagnetisme 1 et 2, InterEditions, 1979.
- [22] Purcell, Electricité et Magnétisme, Berkley: Cours de Physique, volume 2, Armand Colin, 1973.
- [23] W.H. Hayt, Engineering Electromagnetics, McGraw-Hill, 1981.
- [24] J.A. Edminister, Electromagnétisme, Serie Schaum, McGraw-Hill, 1985.
- [25] V. Smirnov, Cours de Mathématiques Supérieures, Ed. Mir-Moscou, 1969.
- [26] D.Spiegel, Analyse. Cours et Problèmes, Serie Schaum, McGraw-Hill, 1985.
- [27] N.Piscounov, Calcul Différentiel et Intégral, Tome 1 et 2, Ed. Mir-Moscou, 1972.
- [28] C.Delannoy, Programmer en Turbo C++, Ed. Eyrolles, 1991.
- [29] G.LebLANC, Turbo/Borland C++, Ed. Eyrolles, 1993.
- [30] G.LebLANC, Borland C++ v.4.0, Programmation Windows, Eyrolles, 1995.
- [31] B.Stroustrup, Le Langage C++, Addison-Wesley, 1992.
- [32] P.Wilken & D.Honekamp, La bible MS-Windows 3, Ed. Micro Application, 1991.

Thèses

- [33] M.L. Krähenbühl, La méthode des Equations Intégrales de Frontière pour la Résolution des Problèmes de Potentiel en Electrotechnique et sa Formulation Axisymétrique, Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1983.
- [34] J.L.R. Rasolonjanahary, Modélisation par la Méthode des Equations Intégrales de Frontière de Phénomènes de Conduction SurfACIQUE sur les Isolateurs Pollués, Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1992.

- [35] B. Ancelle, Emploi de la Méthode des Equations Intégrales de Frontière et Mise en Œuvre de la Conception Assisté par Ordinateur dans le Calcul des Systèmes Electromagnétiques, Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1979.
- [36] C. Lachat, A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics, Ph.D Thesis, University of Southampton, 1975.
- [37] H.Nouioua, Application de la méthode des éléments de frontière et des techniques d'optimisation aux problèmes tridimensionnels à surface libre, Certificat Préparatoire à la Recherche, Université Mohammed V, Rabat, 1996.
- [38] F. Djaalali et S. Boudaa, Analyse des Problèmes de l'Elasticité Planc par la Méthode des Equations Intégrales aux Frontières, Projet de Fin d'Etude, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, 1992.
- [39] M. Kherchouche, Calcul Numérique du Champ Electrique dans les Intervalles d'air Tige-Barrière-Plan, Projet de Fin d'Etude, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, 1995.
- [40] H. Mohellebi, Modèle Analytico-Numérique de Calcul de Courants de Foucault dans des Dispositifs Axisymétriques, Thèse de Magistère, Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, 1996.
- [41] S.Randi, Corrélation entre Modèle Continu et Discontinu d'un Isolateur Pollué, Projet de Fin d'Etude, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, 1995.
- [42] D.Lange, M.Dubois, A. Chaudouet and G.Loubignac, Application de la Méthode des Equations Intégrales à la Mécanique, Ecole nationale des travaux public de l'état, Lille.

Articles:

- [43] L. Krähenbühl and A.Nicolas, Axisymmetric Formulation for Boundary Integral Equation Methods in Scalar Potential Problems, IEEE Trans. On Magnetics, Vol. MAG-19, No. 6, pp. 2364-2366, November 1983.
- [44] R.G. Olsen, Integral Equations for Electrostatics Problems with Thin Dielectric or Conducting Layers, IEEE Trans. On Electrical Insulation, Vol. EI-21, No. 4, pp. 565-573, August 1986.
- [45] J.R. Brauer, H. Kalfaian and H. Moreines, Dynamic Electric Fields Computed by Finite Elements, IEEE Trans. On Industry Applications, Vol. 25, No. 6, pp. 1088-1092, November 1989.

- [46] S.J. Salon and J.M. Schneider, A Hybrid Finite Element-Boundary Integral Formulation of Poisson's Equation, IEEE Trans. On Magnetics, Vol. MAG-17, No. 6, pp. 2574-2576, November 1981.
- [47] B.C. Gellert and J.K. Rasmussen, Finite Element Modelling of Dry Zone Formation on Polluted Outdoor High Voltage Insulators, in Sixth International Symposium on High Voltage Engineering, New Orleans, LA, USA, August 28- September 1, 1989.
- [48] L. Krähenbühl and A.Nicolas, Efficient Techniques for Boundary Integral Equation Methods, IEEE Trans. On Magnetics, Vol. MAG-19, No. 6, pp. 2667-2669, November 1983.
- [49] Ma.S. Gomez Lera and E. Alarcon, Implementation of Boundary Elements in Microcomputers, in Microcomputers in Engineering Applications, Edited by B.A.Schrefler, Wiley, 1987.
- [50] C.A. Brebbia (Ed), Boundary element techniques in computer aided engineering, Kluwer Academic, 1984.
- [51] C.Patterson & N.A.S.El-Sebai, A Family of Partially Discontinuous Boundary Elements for Three Dimensional Analyses, Ed.R.W.Lewis, Pineridge Press, 1983.
- [52] Calcul des Champs Electromagnétiques, Technique de l'Ingénieur, D3020, pp. 2-16.
- [53] F.J.Rizzo & D.J.Shippy, A Method for Stress Determination in Plane Anisotropic Elastic Bodies, J.Composite Materials, vol.4, Janvier 1970, pp. 36-61.