

6/94 الجمهورية الجزائرية الديمقراطية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE

الدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Département : Génie Civil

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**ANALYSE TRIDIMENSIONNELLE
DE STRUCTURES CONTREVENTÉES
PAR NOYAU CENTRAL**

Proposé par :

Mr BOUGHOFALLAH
Mr CHANTI CTC Est

Etudié par

CHALAL Larbi
TANFOUR M. Lyés

Dirigé par :

Mr BOUGHOFALLAH

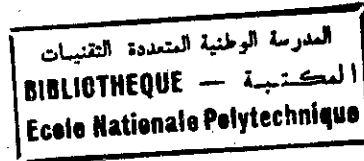
Promotion Juin 1994

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE



Département : Génie Civil

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**ANALYSE TRIDIMENSIONNELLE
DE STRUCTURES CONTREVENTÉES
PAR NOYAU CENTRAL**

Proposé par :

Mr BOUGHOFALLAH
Mr CHANTI CTC Est

Etudié par

CHALAL Larbi
TANFOUR M. Lyés

Dirigé par :

Mr BOUGHOFALLAH

Promotion Juin 1994

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEDICACES

A nos parents

A tous ceux qui,

par leur labeur quotidien,

participent à la promotion de l'homme

CHALAL Larbi

TANFOUR Med Lyes

REMERCIEMENTS

*Il ne sera jamais trop fait de remercier toutes les personnes
qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.*

*Pour ne citer que ceux là, nous remercions vivement notre
promoteur Mr Bougoufallah Med, qui a mis sa compétence à notre disposition.*

*Nos remerciements vont aussi aux travailleurs de la bibliothèque,
du service des périodiques et du centre de calcul, ainsi qu'à messieurs
N. Mezouar et S. Gadoum.*

Sans oublier l'ensemble de nos enseignants.

العنوان : التحليل البنيوي ذي الثلاث محاور
الملاحظ : يتمثل عملنا في تحليل منشأة من رتبة (R+12)
وفق النموذج المستمر و النموذج غير المستمر و البرهنة على أن
طرق التحليل المختلفة المبينة على تحديد القوى السلوكية
المكافئة بالاعتماد على مفهوم المحور الواحد غير صحيحة بل
لأن واقع الحال هو أنه هناك قتل وفق ثلاث محاور

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة - BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Titre : Analyse 3d de structure à noyau central.

Résumé : Notre travail consiste à analyser une structure (R+12) en modèle continu et modèle discontinu et de montrer que les différentes méthodes d'analyse basées sur la détermination des forces statiques équivalentes sont incorrectement fondées sur la notion d'axe unique de torsion, alors, qu'en général, il y en a trois.

Title : Three dimensional analysis of interconnected shear wall structures.

Abstract : Our Study consists in a three dimensional analysis of interconnected open section shear wall structures, we have studied a multistory building using continuous and uncontinuous model trying to proof that the methods based on a single torsional axis to determine lateral static load are uncorrect, in fact there are three torsional axes

SOMMAIRE



I introduction générale

- 1 - Introduction
- 2 - Présentation de l'ouvrage
- 3 - Prédimensionnement

II Descente de charges

- 1 - Introduction
- 2 - Evaluation des charges
- 3 - Charges revenant aux poteaux
- 4 - charges revenant aux voiles

III Calcul sismique

- 1 - Introduction
- 2 - Conditions d'application de la M.S.E
- 3 - Calcul de l'action sismique

IV Généralités sur les systèmes de contreventement

- 1 - Historique et évolution
- 2 - Les différentes méthodes d'analyse des contreventements spatiaux
- 3 - Aperçu de quelques méthodes d'analyse

V Méthode des trois pivots

- 1 - Introduction
- 2 - Hypothèses de la méthode
- 3 - Modélisation de la structure
- 4 - Types de liaisons
- 5 - Mise en équation
- 6 - Etapes de la méthode
- 7 - Application de la méthode
8. - Interprétation

VI Calcul automatique

- 1 - Introduction
- 2 - Etat de l'art
- 3 - Préparation du fichier donné sur SAP 80
- 4 - Choix du modèle
- 5 - Format des fichiers résultats
- 6 - Résultats
- 7 - Interprétation des résultats

VII Conclusion

Annexes

Bibliographie

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PREMIERE PARTIE

INTRODUCTION GENERALE

1.1. INTRODUCTION

Nous nous intéressons dans notre étude aux structures à contreventements mixte et nous nous proposons d'analyser une structure (R + 12) contreventée par noyau central et portiques par la méthode des trois pivots et par calcul automatique.

Les structures contreventées par noyau central ont vu leur apparition au milieu du 20^{ème} siècle. Ce type de structures présente l'avantage de libérer des espaces pour une utilisation des bureaux (tels que: cage d'ascenseur, escaliers etc.). Ceci étant vu d'un côté architectural ou plus exactement fonctionnalité et fluidité des déplacements.

Du côté résistance et stabilité, l'introduction d'un noyau dans des structures de grandes hauteurs permet de les rigidifier d'une manière notable.

L'utilisation de ce type de contreventement en Algérie est de date récente, ce qui n'a pas permis de maîtriser les techniques d'analyse.

Dans la pratique, on tend encore à analyser un noyau central comme étant un ensemble de refends dissociés, ce qui ne permet pas de tirer profit du comportement monolithique du noyau.

Notre travail comportera sept grandes parties :

- Une présentation de la structure et le prédimensionnement des différents éléments de l'ossature par le règlement BAEL 91.
- Le calcul de la descente de charges.
- L'étude au séisme.
- Le passage en revue des différents types de contreventements et des différentes méthodes d'analyse.

Après nous entamerons la partie la plus importante de l'étude avec l'introduction, d'abord, de notre modèle continu qui comporte les hypothèses, la formulation et la mise en équation de la méthode des trois pivots, puis d'un modèle utilisant une discrétisation par éléments finis et qui sera analysé par calcul automatique.

1.2. PRESENTATION DE L'OUVRAGE :

le bâtiment faisant l'objet de notre application comprend un sous-sol de 3,00 m servant comme ancrage, un rez-de-chaussée et onze étages avec une terrasse inaccessible sauf pour entretien.

Le bâtiment en question est implanté dans une zone de moyenne sismicité.

les dimensions de la structure sont : (voir figures 1.1, 1.2)

a. **Dimensions en plan**

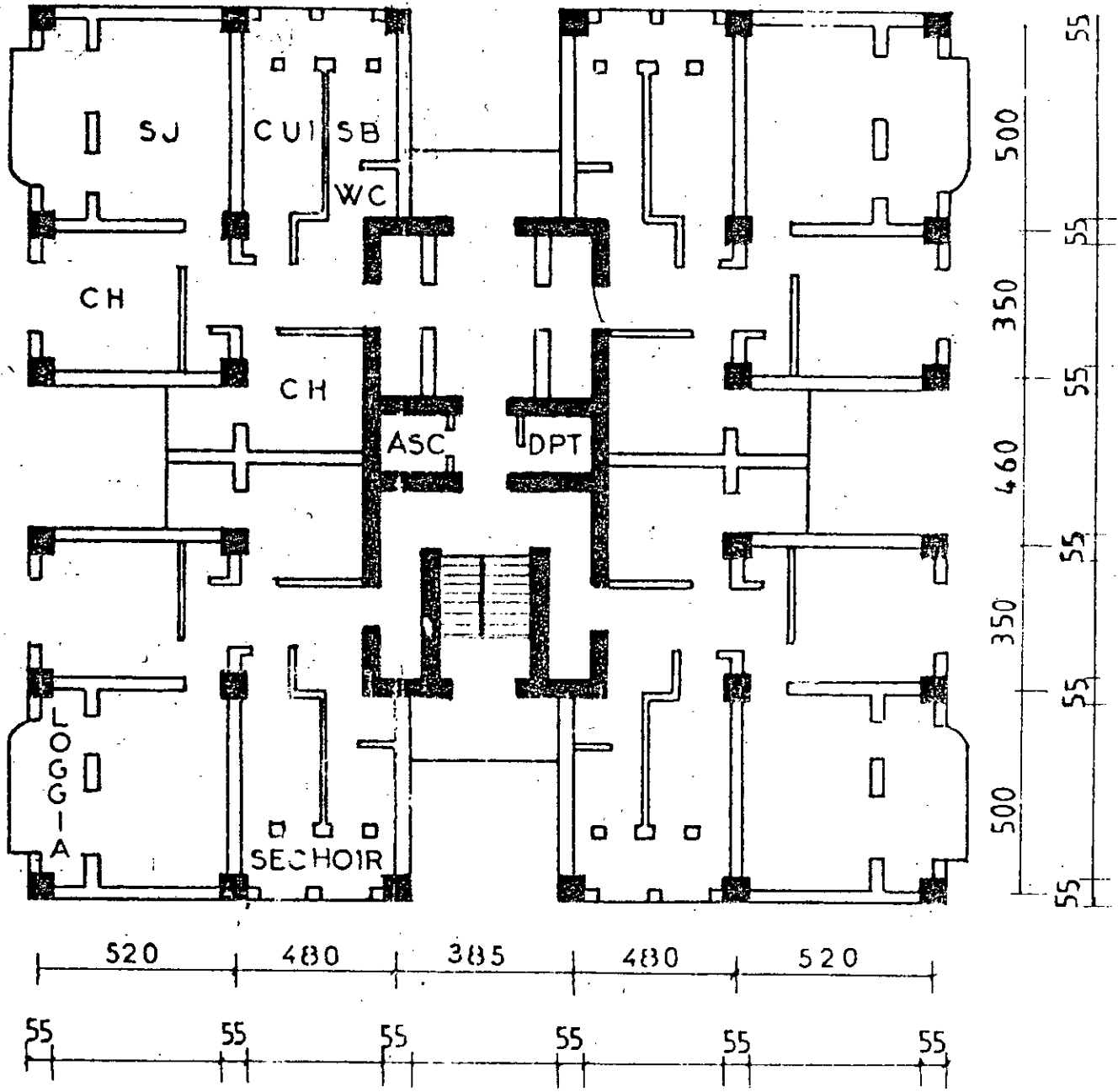
longueur	24,40 m
larguer	22,15 m

b. **Dimensions en élévation**

Hauteur totale	36 m
Hauteur d'étage	3 m

Chaque étage comprend quatre appartements du type F3.

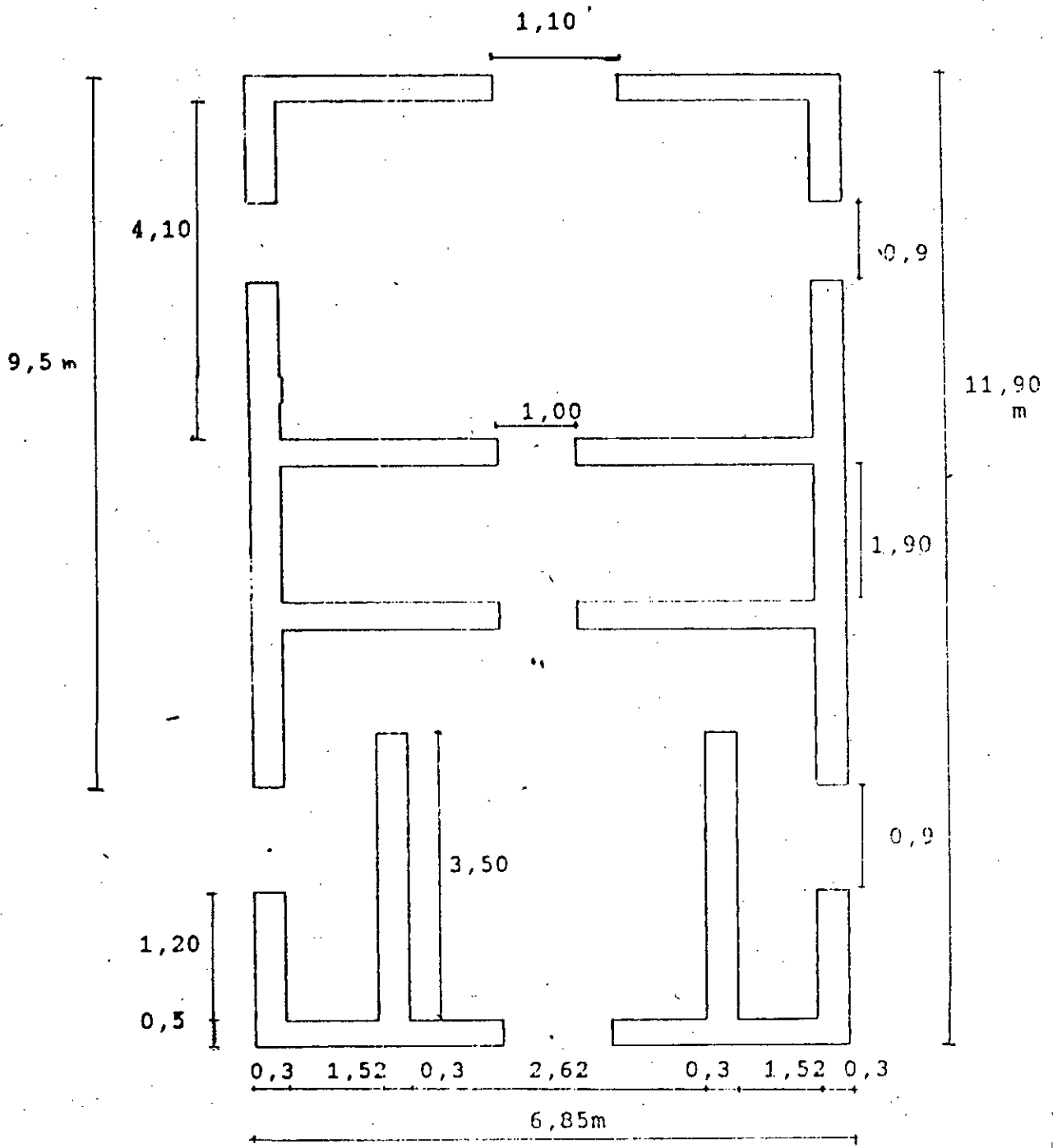
La communication entre les différents étages est assurée au moyen d'un ascenseur et des escaliers à deux volées préfabriquées.



VUE EN PLAN

ECH 1:250

Fig:11a



Носач
 Fig: 11.b

FACADE PRINCIPALE

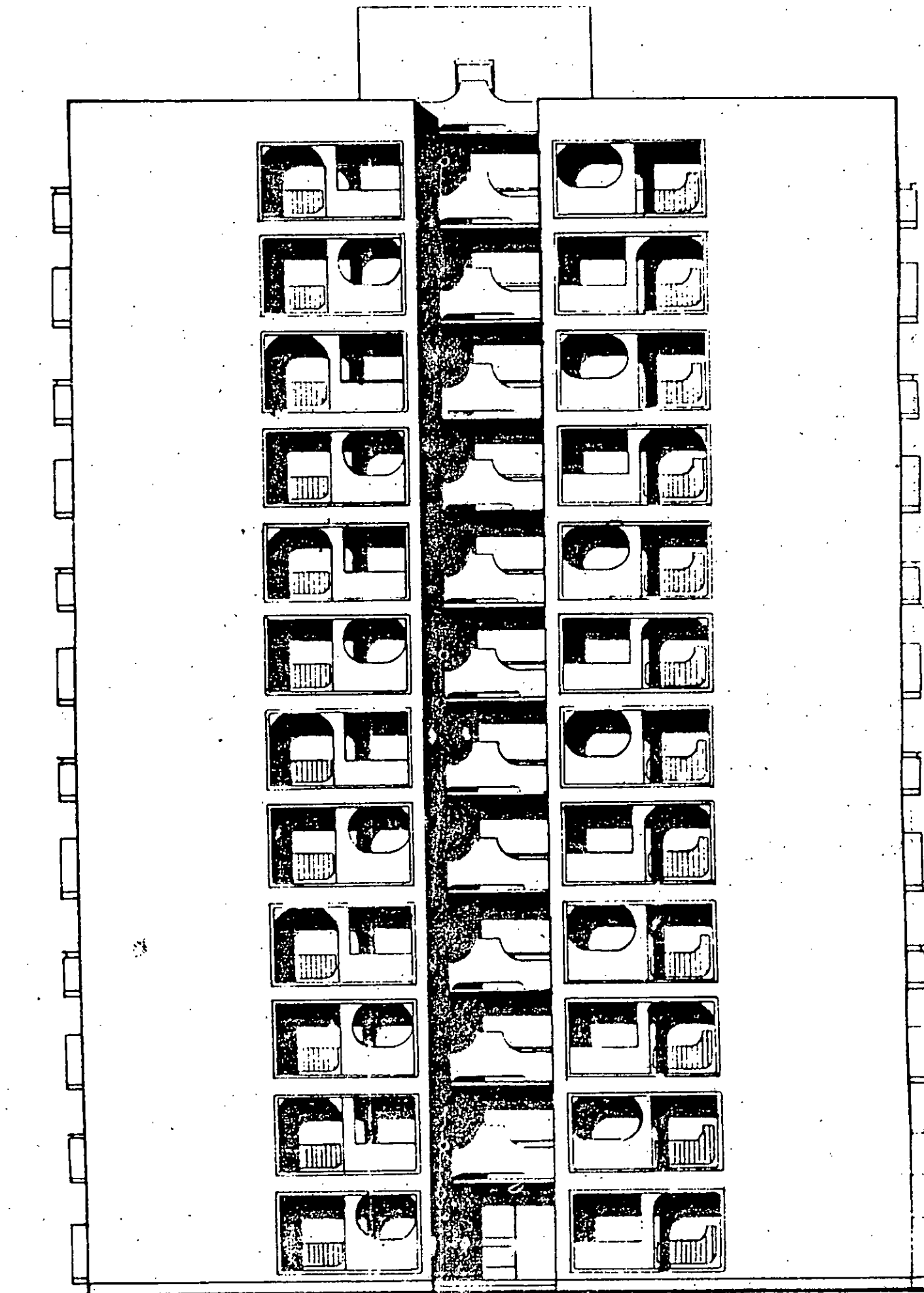


Fig:1.2

1.3. PREDIMENSIONNEMENT :

1.3.1. VOILES DU NOYAU CENTRAL :

$$RPA88 \Rightarrow \begin{cases} e_{min} = 15cm \\ e \geq \frac{h}{20} = \frac{300}{20} = 15cm \end{cases}$$

Nous prendrons comme valeur préliminaire :

$e = 30cm$

1.3.2. POUTRES :

a. Sens longitudinal :

$$BAEL91 \Rightarrow \begin{cases} l_{max}/15 \leq h \leq l_{max}/10 \\ h/l_{max} \leq M_t/10M_0 \\ M_t = 0,85M_0 \end{cases}$$

Nous prendrons :

$h = 50cm$
$b = 30cm$

$b = 0,3 \text{ à } 0,5h$

$$RPA88 \begin{cases} b > 20; h = 50 > 30 \\ h/b < 3 \end{cases}$$

Donc les dimensions précédente sont valables.

b. Sens transversal :

$$l_{max(i)} = 500 < l_{max(i)}$$

Donc, on peut garder les mêmes dimensions.

3. POTEAUX :

A première vue, le poteau le plus sollicité est le poteau central.

Une descente de charge préliminaire (en prenant la moitié de la portée dans chaque sens) a donné :

$$\begin{cases} G = 260810,625 \text{ kg} \\ Q = 28421,875 \text{ kg} \end{cases}$$

$$N_u = 3947271,563 \text{ kg}$$

N_u est majoré de (10%) pour tenir compte de l'effet de la continuité.

$$N_u = 434198,719 \text{ (N)}$$

Nous supposons que seul le béton résiste à la compression :

$$B_r \geq \frac{0,9\beta N_u}{f b_u}$$

$$\lambda = \frac{l_f \sqrt{12}}{a} \quad a = 0,5 \Rightarrow \lambda = \frac{0,7l_0 \sqrt{12}}{0,5}$$

$$\lambda = 14,55 \Rightarrow \alpha = 0,822 \Rightarrow \beta = 1,035$$

$$B_r \geq 2854 \text{ cm}^2 \quad (a-2)(b-2) = 2854 \text{ cm}^2$$

Nous prendrons un poteau:

$$55 \times 55 \text{ cm}^2$$

RPA 88 : $a = b_1, b = h_1$

$$\text{Min}(b_1, h_1) = 55 > 25 \text{ cm}$$

$$\text{Min}(b_1, h_1) > \frac{h_e}{20} = \frac{300 - 50}{20} = 12,5 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{b_1}{h_1} < 3$$

Donc les dimensions sont acceptables.

4. LES PLANCHERS :

Les planchers sont en dalles pleines en béton armé.

Condition à vérifier :

Isolation phonique : $e \geq 16 \text{ cm}$

Résistance au feu : $e \geq 11 \text{ cm (2 heures)}$.

a. Dalles hors noyau :

Le plus grand panneau a pour dimension

$$l_x = 482,5 \text{ cm}$$

$$l_y = 502,5 \text{ cm}$$

$$\rho = 0,96 > 0,6$$

$$\begin{cases} \frac{l_x}{50} \leq h_0 \leq \frac{l_x}{40} \\ \frac{h_0}{l_x} \geq \frac{M_{ox}}{20 M_{ox}} = \frac{0,85 M_{ox}}{20 M_{ox}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow h_0 = 20,5 \text{ cm}$$

b. Dalles à l'intérieur du noyau :

$$\frac{l_x}{l_y} = \frac{470}{625} = 0,75$$

$$\frac{l_x}{50} \leq h_0 \leq \frac{l_x}{40}$$
$$h_0 \geq \frac{0,75}{20} \times 470 = 19,98$$

On prendra

$h_0 = 20 \text{ cm}$

Remarque : Les dimensions trouvées sont acceptées sans vérification de la flèche car les conditions relatives à l'état de déformation sont vérifiées.

DEUXIEME PARTIE

DESCENTE DE CHARGE

DESCENTE DE CHARGE

2.1. INTRODUCTION

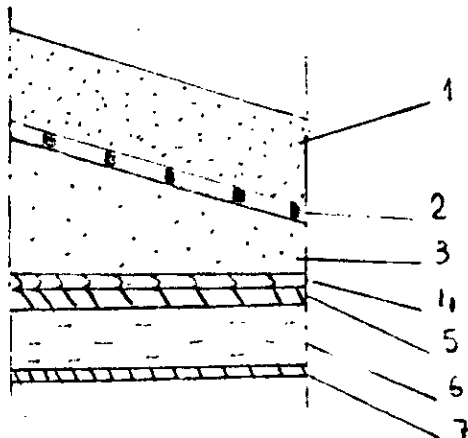
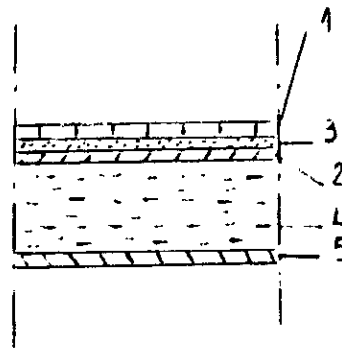
C'est l'opération qui consiste à calculer pour tout élément porteur (voiles et poteaux) les charges qu'il supporte au niveau de chaque étage jusque sur la fondation où on effectue une sommation et une dégression de charge pour déterminer respectivement : la charge permanente et la surcharge totale.

2.2. Evaluation des charges

Elements	G	Q	Unité
Plancher terrasse	7620	1000	N/m ²
Plancher étage courant	7130	1750	N/m ²
Balcon	3840	3500	N/m ²
Loggia	7130	3500	N/m ²
Murs extérieurs	8750	-	N/m
Poutres	3750	-	N/m
Poteaux	22687,5	-	N
Acrotère	1783	-	N
Garde corps	2100	-	N
Plancher R-D-C	7130	2000	N/m ²

Les planchers de notre structure sont en dalles pleines, ce choix n'est pas arbitraire mais en comparaison avec les planchers à corps creux, les planchers en dalles pleines sont plus efficaces vue leur rigidité qui leur permet de transmettre convenablement et totalement les charges aux voiles.

Détail des planchers (fig. 2-1, 2-2).

Plancher terrasse
Fig: 2.1Plancher étage courant.
Fig: 2.2

• **Planchers terrasse :**

1	Gravillons de protection (5cm)	: 75 kg/m ²
2	Etanchéité multicouche	: 10 kg/m ²
3	Forme de pente (béton banché 6 cm)	: 132 kg/m ²
4	Isolation thermique en liège (4c m)	: 16 kg/m ²
5	Ecran par vapeur	: 5 kg/m ²
6	Salle pleine en béton armé (20 cm)	: 500 kg/m ²
7	Enduit de plâtre (2 cm)	: 24 kg/m ²

La charge permanente G : 762 kg/m²

Terrasse inaccessible : Q = 100 kg/m²

• **Planchers étage courant :**

1	Revêtement en carrelage (2 cm)	: 44 kg/m ²
2	Mortier de pose (2 cm)	: 40 kg/m ²
3	Couche de sable (2 cm)	: 30 kg/m ²
4	Dalle pleine en béton armé	: 500 kg/m ²
5	Enduit de plâtre (2 cm)	: 24 kg/m ²

La charge permanente G : 713 kg/m²

Pièces habitées : Q = 175 kg/m²

2.3. Charges et surcharges revenant à chaque poteau :

Le poteau va reprendre le quart de chaque panneau. (fig. 2-3, 2-4, 2-5, 2-6)

Poteaux A1, A6, F1, F6			
Elements	Terrasse	E. courant	R-D-C
Acrotère	9896	-	-
Plancher	48563	47440	47440
Poutre	17062,5	17062,5	17062,5
Balcon	-	2880	2880
Garde corps	-	3885	3885
M. extérieur	-	39812,5	39812,5
Poteau	22687,5	22687,5	22687,5
Surcharges	6373	18759	15371,25
Niveau 26 - 26	G= 2396041N		Q= 145370,6N

Poteaux A2, A5, F2, F5			
Elements	Terrasse	E. courant	R-D-C
Acrotère	7578	-	-
Plancher	83391	78029	78029
Poutre	22594	22594	22594
Balcon	-	2880	2880
Garde corps	-	3885	3885
M. extérieur	-	12950	12950
Poteau	22687,5	22687,5	22687,5
Surcharges	10944	25478	24512,5
Niveau 26 - 26	G = 2085656,5 N		Q = 201546,3 N

Poteaux A3, A4, F3, F4			
Elements	Terrasse	E. courant	R-D-C
Acrotère	8558	-	-
Plancher	33847	31670	31670
Poutre	14250	14250	14250
Balcon	-	-	-
Garde corps	-	-	-
M. extérieur	-	13300	13300
Poteau	22687,5	22687,5	22687,5
Surcharges	4442	7773	8883,75
Niveau 26 - 26	G = 1302177,5 N		Q = 63295 N

Poteaux B1, B6, E1, E6			
Elements	Terrasse	E. courant	R-D-C
Acrotère	8915	-	-
Plancher	94297,5	88234	88234
Poutre	25969	25969	25969
Garde corps	-	-	-
M. extérieur	-	-	-
Poteau	22687,5	22687,5	22687,5
Surcharges	12375	22775	24750
Niveau 26 - 26	G = 2209226,5 N		Q = 212175 N

Poteaux B2, B5, E2, E5			
Elements	Terrasse	E. courant	R-D-C
Acrotère	-	-	-
Plancher	142898	133709	133709
Poutre	28659	28359	28359
Balcon	-	-	-
Garde corps	-	-	-
M. extérieur	-	-	-
Poteau	22687,5	22687,5	22687,5
Surcharges	18753	32818	37506,3
Niveau 26 - 26	G = 2411010,5 N		Q = 267233,2 N

Poteaux B3, B4, E3, E4			
Elements	Terrasse	E. courant	R-D-C
Acrotère	-	-	-
Plancher	124435	116433	116433
Poutre	27609	27609	27609
Balcon	-	-	-
Garde corps	-	-	-
M. extérieur	-	-	-
Poteau	22687,5	22687,5	22687,5
Surcharges	16330	28577,5	32660
Niveau 26 - 26	G = 2175485,5 N		Q = 232702,6 N

Poteaux D1, D6, C1, C6			
Elements	Terrasse	E. courant	R-D-C
Acrotère	9093	-	-
Plancher	44791	41911	41911
Poutre	16313	16313	16313
Balcon	-	-	-
Garde corps	-	-	-
M. extérieur	-	15225	15225
Poteau	22687,5	22687,5	22687,5
Surcharges	5878	15690	9456,25
Niveau 26 - 26	G = 1520572,5 N		Q = 120436 N

Surfaces afférentes (m²)						
Poteau A1	Poteau A2	Poteau A3	Poteau B1	Poteau B2	Poteau B3	Poteau D1
6,37	10,94	4,44	12,38	18,75	16,33	5,88

2.4. Charges et surcharges revenant aux voiles

Voile V_{x1}			
Eléments	Niveau 12		E. courant
	H.N	I.N	
Surface-afférente (m ²)	17,8	8,09	25,89
Longueur poutre (m)	3,15		3,15
Poids du voile (N)	267750		267750
Acrotère (N)	21218		-
Plancher (N)	173317,7		184596
Poutre (N)	11812,5		11812,5
Surcharge (N)	31957,5		45482,5
Niveau 28' - 28'	G = 6044000,2 N		Q = 350335 N

Voile V_{x4}				
Eléments	Niveau 12		E. Courant	Niveau 12
	H.N	I.N		D.M
Surface afférente	17,08	7,19	24,99	0,9025
Longueur poutre	3,15		3,15	-
Poids du voile	267750		267750	-
Acrotère	21218		-	-
Plancher	186900,7		178178,7	4512,5
Poutre	11812,5		11812,5	-
Surcharge	30382,5		43732,5	902,5
Niveau 28' - 28'	G = 5985088,1 N		Q = 337412,5 N	

Voile Vy1			
Eléments	Niveau 12		E. courant
	H.N	L.N	
Surface-afférente (m ²)	20,62	8,61	29,23
Longueur poutre (m)	6,73		6,73
Poids du voile (N)	140850		140850
Acrotère (N)	11857		-
Plancher (N)	218513,7		208410
Poutre (N)	25237,5		25237,5
Surcharge (N)	51152,5		51152,5
Niveau 28' - 28'	G = 4890428,2 N		Q = 409220 N

Voile Vy4			
Eléments	Niveau 12		E. courant
	H.N	L.N	
Surface-afférente (m ²)	14,72	1,14	23,44
Longueur poutre (m)	6,73		6,73
Poids du voile (N)	140850		140850
Acrotère (N)	11857		-
Plancher (N)	120294,6		167127,2
Poutre (N)	25237,5		26237,5
Surcharge (N)	16715		54285
Niveau 28' - 28'	G = 4296815,5 N		Q = 396710 N

Voile V_{x2} ; V_{x3}	
Eléments	Etage courant
Surface afférente (m ²)	4,31
Poids du voile (N)	105750
Plancher (N)	30730,5
Surcharge (N)	9852,5
Niveau 28' - 28'	G = 1637766 Q = 78820 N

Voile : V_{y2}		
Eléments	Niveau 12	E. courant
	Dalle machine	
Surface afférente (m ²)	1,0925	12,05
Poids du voile (N)	105750	105750
Plancher (N)	5462,5	85916,5
Surcharge (N)	1092,5	21087,5
Niveau 28' - 28'	G = 2411210,5 N	Q = 169792,5 N

Voile : V_{y2}		
Eléments	Niveau 12	E. courant
	Dalle machine	
Surface afférente (m ²)	1,0925	6,29
Poids du voile (N)	105750	105750
Plancher (N)	5462,5	44847,7
Surcharge (N)	1092,5	13982,5
Niveau 28' - 28'	G = 1918384,9 N	Q = 112952,5 N

• **Charge et surcharge revenants aux portiques :**

$$G_p = 56400680 N$$

$$Q_p = 4971034,8 N$$

$$P_p = G_p + 0,2Q_p = 57394,9 KN$$

$$P = P_n + P_p = 27554,7419 + 57394,9$$

$$P = 84949,642 KN$$

$$P_n/P = \frac{27554,7419}{84949,642} = 0,32 \Rightarrow 32\% > 20\%$$

Puisque notre bâtiment est constitué de voiles et de portiques et les voiles reprennent plus de 20 % des charges verticales, la structure sera classée dans la catégorie 5, d'après l'art. 2-3.2 du RPA88.

N.B. : Les charges de la dalle machine concernent le niveau 12 et le sous-sol.

• **Charges et surcharges revenants au noyau :**

G : Charge permanente revenant au noyau jusqu'au sous-sol obtenue par sommation.

Q : Surcharge supportée par le noyau en tenant compte de la dégression et d'après le RPA88, on ne prend en considération que 20 % pour les bâtiments à usage d'habitation.

$$G_n = 27183693,4 N = 27183,6934 KN$$

$$Q_n = 1855242,5 N = 1855,2425 KN$$

D'où le poids : $P_n = G_n + 0,2Q_n$

$$P_n = 27554,7419 KN$$

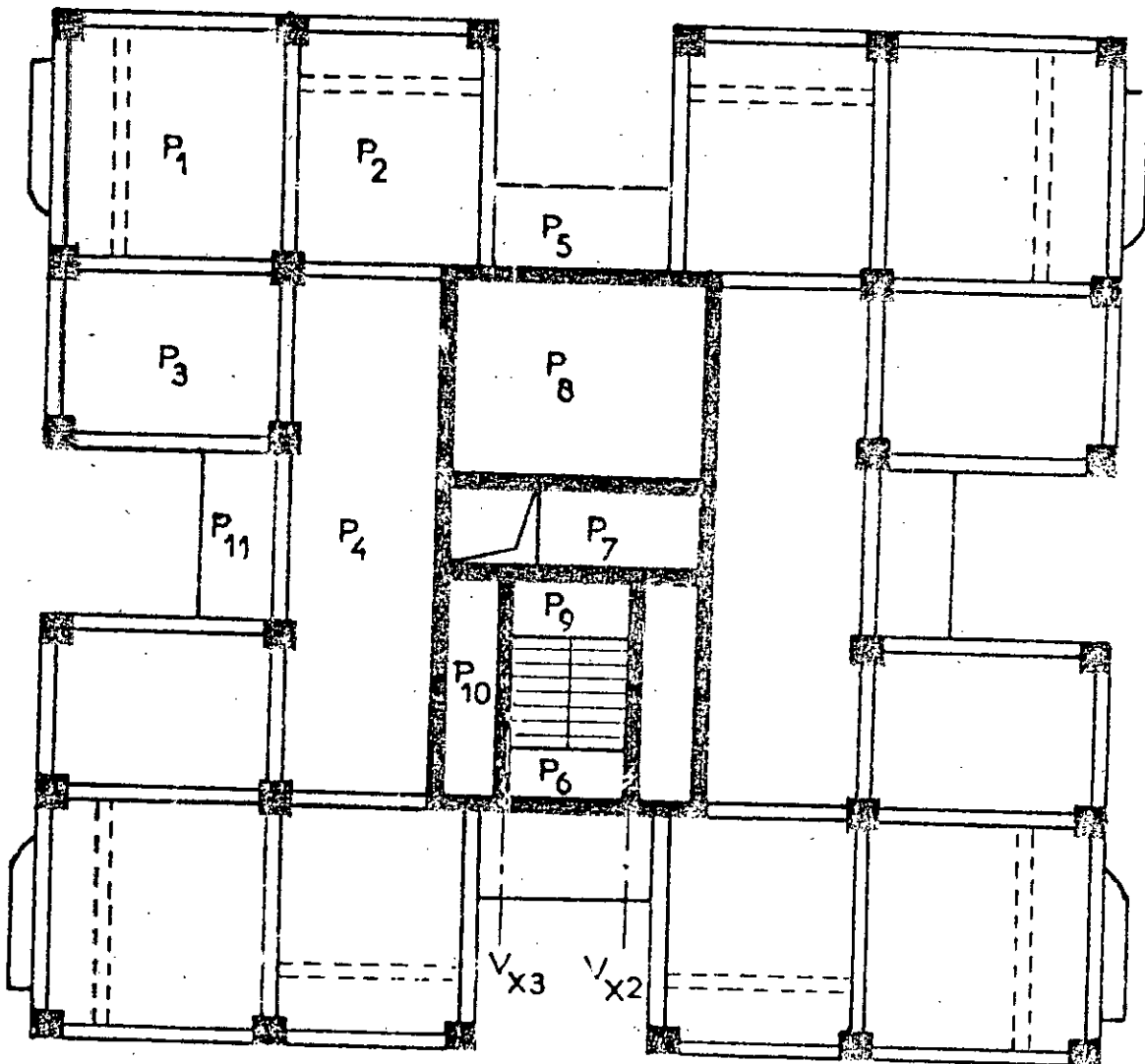
Charges et surcharges revenant au noyau pour les différents niveaux :

Niveau	NG (KN)	NQ (KN)
Base	25181,087	1730,529
3	18856,017	1450,958
6	13654,440	1091,595
9	7329,370	588,488
11	2173,760	133,295

		2'	1' 2'	niveau 12	36,00	
1	1	3'	3'			Terrasse
2	2	4'	4'	niveau E.courant	33,00	
3	3	5'	5'			11e
4	4	6'	6'		30,00	
5	5	7'	7'			10e
6	6	8'	8'		27,00	
7	7	9'	9'			9e
8	8	10'	10'		24,00	
9	9	11'	11'			8e
10	10	12'	12'		21,00	
11	11	13'	13'			7e
12	12	14'	14'		18,00	
13	13	15'	15'			6e
14	14	16'	16'		15,00	
15	15	17'	17'			5e
16	16	18'	18'		12,00	
17	17	19'	19'			4e
18	18	20'	20'		9,00	
19	19	21'	21'			3e
20	20	22'	22'		6,00	
21	21	23'	23'			2e
22	22	24'	24'		3,00	
23	23	25'	25'			1e
24	24	26'	26'	RDC	0,00	
25	25	27'	27'			RDC
26	26	28'	28'	S-SOL	-3,00m	

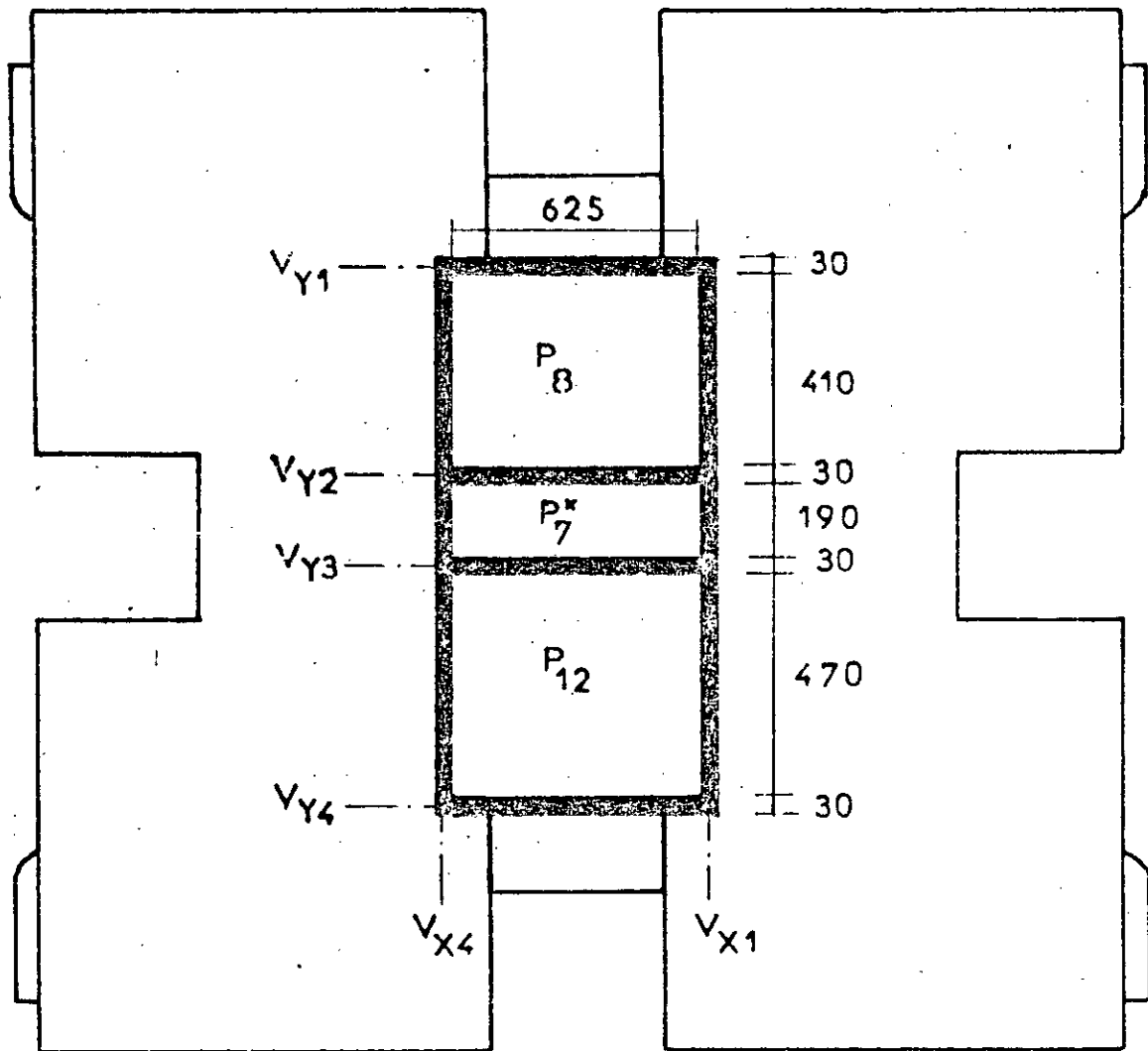
Fig: 2.4

IDENTIFICATION
DES
PLANCHERS



E - COURANT

Fig:2.5



TERRASSE - NOYAU

Fig. 26

TROISIEME PARTIE

CALCUL SISMIQUE

3.1. INTRODUCTION

Une grande partie du Nord algérien est susceptible d'être soumise à d'importantes secousses telluriques.

L'intensité de ces secousses est suffisante pour causer des dommages et ou ruines des constructions à moins que celles ci ne soient conçues et construites de manière à résister à ces effets.

3.2. CONDITIONS D'APPLICATION DE LA METHODE STATIQUE EQUIVALENTE

D'après l'article 3-2-1-2 des RPA88, l'application de la méthode statique équivalente est subordonnée à la satisfaction des conditions suivantes :

- a. le bloc a une hauteur au plus égale à 60 m en zone I, II et 30 m en zone III.
- b. la forme du bloc est simple, symétrique.
- c. La variation des dimensions ne dépasse pas 25 % dans le cas de décrochement en élévation.
- d. La distance entre le centre de torsion et le centre des masses ne dépasse pas 25 % de la largeur effective du bloc.
- e. Le rapport masse sur rigidité de deux niveaux successifs ne doit pas varier de plus de 25 %.
- f. Le bâtiment étudié présente un degré d'amortissement moyen à tous les niveaux.
- g. La structure ne présente pas plusieurs degrés de liberté dans un même plan horizontal.
- h. La rigidité de deux niveaux successifs ne doit pas varier de plus de 25 %.
- i. Pour les maisons d'habitation et les ouvrages de groupe d'usage (3) dont la hauteur n'excède pas 12 m (I, II) et 9 m (III) tous les rapports indiqués ci-dessus sont fixés à 40 %.

3.3. CALCUL DE L'ACTION SISMIQUE

D'après l'article 3-2-1-3 du RPA88 page 32

V : l'effort sismique

$$V = ABDQW$$

A : Facteur d'accélération de zone
Groupe d'usage 2
zone 2

$$A = 0,15$$

B : Facteur de comportement de la structure : dépend du type et de la nature du contreventement

$$B = \frac{1}{3}$$

Puisque notre structure n'a pas de classification spécifique, nous prenons le cas le plus proche ou le plus défavorable.

W : Poids de la structure : nous nous situons dans le cas d'un bâtiment à usage d'habitation, il faut prendre en considération 20 % des charges d'exploitation :

$$W = 5124,38 \text{ t}$$

G : Facteur qualité

$$Q = 1 + \sum_{q=1}^6 p_q$$

$$Q = 1 + 0,05 + 0,05 + 0,05 + 1$$

$$Q = 1,25$$

Ce quotient est fonction de l'hyperstaticité et de la surabondance du système, de la symétrie en plan, de la régularité en élévation et de la qualité du contrôle pendant la construction.

D : Facteur d'amplification dynamique moyen : donné par le spectre de réponse et qui fait appel à la classification des sols et à l'évaluation de la période T de l'ouvrage.

$$T = \frac{0,09H}{\sqrt{L}}$$

H : Hauteur du bâtiment

L : Dimension du bâtiment dans le sens de l'action sismique.

T : Peut aussi être obtenu en utilisant les propriétés structurales, ainsi que les caractéristiques de déformation des éléments participant à la résistance.

	H (m)	L (m)	T(s)	D
Long°	36	24,40	0,656	1,669
trans°	36	22,15	0,688	1,612

L'action sismique dans les deux directions :

$$V_{long} = 534,537 \text{ t}$$

$$V_{trans} = 516,281 \text{ t}$$

$$F_j = \frac{(V - F_t) \cdot w_j z_j}{\sum_i w_i z_i} \quad (\text{fig. 3-1})$$

Cote	Niveau	Hauteur (m)	W_i (t)	$W_i h_i$	F_{Klong} (t) ⊙	F_{Ktrans} (t)	M_{long} (tm)	M_{trans} (tm)
1	12	36	424,30	15274,8	81,75	78,91	0	0
0,92	11	33	427,28	14100,24	75,46	72,84	245,25	236,73
0,83	10	30	427,28	12818,4	68,60	66,22	471,63	455,25
0,75	9	27	427,28	11536,56	61,74	59,60	677,43	653,91
0,67	8	24	427,28	10254,72	54,88	52,97	862,65	832,71
0,58	7	21	427,28	8972,88	48,02	46,35	1027,29	991,62
0,50	6	18	427,28	7691,04	41,16	39,73	1171,35	1130,67
0,42	5	15	427,28	6409,2	34,30	33,11	1294,83	1249,86
0,33	4	12	427,28	5127,36	27,44	26,49	1397,73	1349,19
0,25	3	9	427,28	3845,52	20,58	16,86	1480,05	1428,66
0,17	2	6	427,28	2563,68	13,72	13,24	1541,79	1488,24
0,08	1	3	427,28	1281,84	6,86	6,62	1582,95	1527,96
0	RDC	0			0	0	1603,53	1547,82

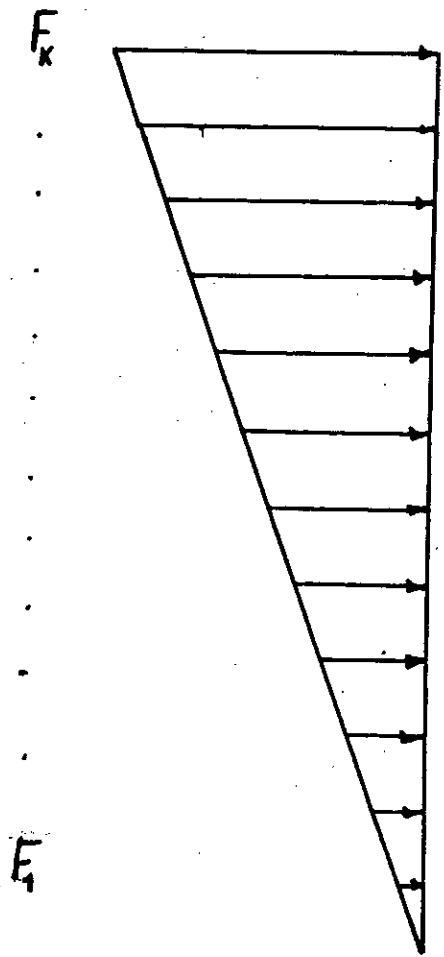
Distribution verticale de la force sismique :

$$V_i = F_t + \sum F_i$$

$$F_i = 0,07TV$$

Pour prendre en compte les modes supérieurs pour structures flexibles.

Dans notre cas $F_t = 0$ puisque $T < 0,7 \text{ s}$



Charge sismique

Fig: 3.1

QUATRIEME PARTIE

GENERALITES SUR LES SYSTEMES DE CONTREVENTEMENT

4.1. HISTORIQUE ET EVOLUTION DES DIFFERENTS TYPES DE CONTREVENTEMENT

Depuis toujours, l'homme a voulu montrer sa grandeur en construisant de plus en plus haut. Au début de ce siècle, de nouvelles structures ont vu le jour avec comme particularité: un nombre d'étages approchant la centaine, chose jusqu'alors considérée comme irréalisable.

Les matériaux et techniques d'exécution n'ont pas, non plus, été épargnés. En effet, on a vu une succession de matériaux tels que le bois, les matériaux classiques non armés (maçonnerie), les charpentes métalliques et finalement les bétons : armé et précontraint.

Mais cette évolution des matériaux de construction n'a pas suffi, à elle seule, à résister aux sollicitations inhérentes à l'environnement de la structure, aussi des systèmes dits de contreventement ont été conçus pour combler cette lacune.

Parmi les systèmes de contreventement les plus utilisés, on peut citer:

- 1/ Les portiques
- 2/ Les portiques associées aux refends linéaires
- 3/ Les refends linéaires
- 4/ Les noyaux
- 5/ Les noyaux associés aux portiques
- 6/ Les noyaux associés aux façades.

1/ Les portiques :

Le terme portique désigne une structure qui peut résister aux efforts horizontaux grâce à la rigidité des liaisons (noeuds) entre poutres et poteaux. L'effort repris est reparti entre les différents éléments proportionnellement à leurs rigidités. Les contreventements par portiques sont utilisés fréquemment pour des structures de faibles et moyennes hauteurs. Le comportement d'une telle ossature de structure sous un chargement latéral est souple. Le portique se déforme en mode distorsionnel. (fig. 4-1)

En Algérie, pour des zones de moyennes sismicité, le nombre d'étages d'une structure à portiques est limité à 7 ou 8 niveaux, cette limitation est due à des exigences de résistance vu les grandes déformations latérales du portique.

2/ Voiles (ou refends linéaires) :

Au fur et à mesure que la nécessité de construire de plus en plus haut se faisait sentir, les portiques ont commencé à être remplacés par des refends linéaires disposés au droit des cages d'escaliers. (fig. 4-2).

Les structures à voiles sont assez rigides dans le sens de la disposition des refends, c'est à cela qu'elles doivent leur appellation de crâne d'oeuf, elles s'avèrent satisfaisante du point de vue de résistance, pour des immeubles de 20 à 25 niveaux implantés dans les zones de moyenne sismicité.

L'ossature en voiles dans une structure est généralement imposée par le type de coffrage disponible.

3/ Contreventement mixte (voiles + portiques):

L'association de plusieurs plans de contreventements à savoir: voiles et portiques, s'avère concluante du point de vu résistance et économie. Ceci peut être appliqué par le fait que sous l'action de forces latérales, un refend et un portique présentent des déformées fondamentalement différentes : la déformation du refend étant régie par la flexion d'ensemble et celle du portique par la flexion des barres. Lorsque ces deux éléments sont appelés à travailler conjointement, on se placera dans le cas de déformabilité non semblable pour l'ensemble de la structure, ceci aura comme conséquence sur le comportement global: (fig. 4-3)

- A la base, l'effort tranchant est presque repris entièrement par les refends, alors qu'en partie haute, il est moins sollicité avec un effort dans le sens inverse.
- Les poteaux sont moins sollicités à la base mais en partie haute, ils le sont fortement, malgré l'effort induit en élévation faible.

Dans une telle structure, les portiques s'activent en développant des forces de résistance réduisant la déformée en élévation d'où l'interaction portiques - voiles est équivalente à une charge complémentaire variable avec la hauteur.

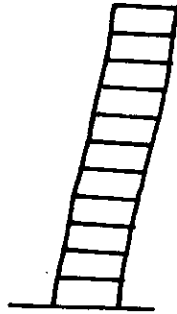


Fig:4.1 Portique



Fig:4.2 Refends

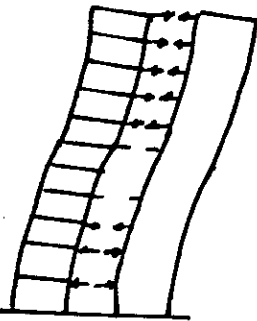


Fig:4.3 Interaction

4/ Les noyaux :

Les limites des structures comprenant les refends se sont faites ressentir dès que les bâtiments tours ont été utilisés comme bureaux ce qui a poussé les ingénieurs à rechercher un nouveau genre de structures tout en concentrant les différents services dans un noyau central. Le noyau servira de contreventement tandis que les poteaux périphériques serviront à acheminer les efforts verticaux aux fondations.

Ce genre de structure est utilisé jusqu'à 30 niveaux en zone de moyenne sismicité.

Sous l'action de charges latérales le noyau sera soumis à plusieurs déformations notamment :

- La torsion pure
- La torsion fléchie
- La flexion qui sera la sollicitation prépondérante dans la plus part des cas.

Par soucis de simplification, le concepteur admet parfois que l'action des forces latérales soit uniquement équilibrée par le noyau central. Il en résulte une surestimation des efforts et par conséquent un surdimensionnement du noyau.

Le problème peut être contourné en faisant participer les façades au contreventement. La rigidité de la structure peut alors être accrue. Mais le calcul de ce genre de structures est fastidieux sans modèle mathématique car la méthode qui intègre le noyau et la façade ne peut être utilisée qu'après avoir prédimensionné les deux parties (noyau et façade)

4.2. LES DIFFERENTES METHODES D'ANALYSES DES CONTREVENTEMENT SPATIAUX :

L'analyse statique du contreventement peut être menée soit en modèle continu, soit en modèle discontinu.

Le premier permet de simplifier le problème, c'est à dire: la résolution approximative avec des moyens de calcul modestes.

Le second est plus conforme à la réalité mais nécessite toujours l'emploi d'un ordinateur (vu la complexité des calculs)

Dans le modèle discontinu, la structure est remplacée par un système d'éléments verticaux identiques à son contreventement et liées entre eux au niveau de tous les planchers par les bras d'inertie articulées à leurs extrémités. Les charges sont supposées n'être appliquées qu'au niveau des planchers.

Par contre, en modèle continu, les contreventement sont supposés sans discontinuité et la répartition des planchers suffisamment dense pour pouvoir considérer l'ensemble de leurs réactions sur un élément de contreventement comme une charge répartie.

Ce modèle a été utilisé initialement par Albiges et Goulet, Rosman et Beck pour le calcul des systèmes plans. Mais ensuite son utilisation a été généralisée pour tout système spatial.

Bien que leur formulation puisse varier d'un auteur à une autre, les méthodes reposent toutes sur un même principe pour chaque classe de structures étudiées.

Pour les systèmes dépourvus de files d'ouvertures, on se sert toujours des relations suivantes :

- Déformations - efforts de chaque élément
- Compatibilité des déformations horizontales
- Equilibre des charges et des efforts

Pour les murs à files d'ouvertures, on utilise la méthode des coupures (ou méthode des forces) Là encore la formulation peut prendre des aspects différents, une étude approfondie des divers procédés montre qu'au début, le calcul repose sur la continuité des systèmes en certains points.

Enfin, quand les structures sont constituées d'éléments liés par les liaisons travaillant en cisaillement qui ne sont pas réductibles à un simple mur à files d'ouvertures, le problème devient plus complexe.

En guise de conclusion, on peut avancer que bien que le modèle continu ne soit pas en général en conformité parfaite avec la réalité, son utilisation permet l'obtention de résultats satisfaisant tout en apportant des simplifications aux calculs;

En effet, supposons qu'une structure ait un n niveaux et p éléments, en modèle discontinu, on recherche les efforts régnant à chaque niveau dans chaque élément du contreventement soit $3np$ scalaires (en torsions de saint - venant et flexion), alors qu'en modèle continu, on désire obtenir les efforts dans chaque contreventement en fonction de la côte c'est à dire $3p$ fonctions (en torsion de saint - venant, flexion)

EXEMPLE DE TABLEAU DE SELECTION DU TYPE DE STRUCTURE

Cas de L'Amérique du Nord: : zone de faible sismicité

Type	Nombre d'étages	
	bureaux	habitation
portique	15	20
refend (egg - crate)	---	150
Mixte	40	70
Noyau	50	60

4.3. APERÇU DE QUELQUES METHODES D'ANALYSE:

4.3.1. Méthode forfaitaire: (Méthode des 120%)

On fait reprendre aux voiles les 100% des charges latérales tout en donnant 20% aux portiques, cette méthode ne va pas obligatoirement dans le sens de la sécurité puisqu'elle néglige les forces d'interaction développées dans la structure mixte donc il y a risque de sous-dimensionnement des poteaux

4.3.2. Méthode développées dans le livre de M. Diver:

L'étude préliminaire a été faite pour une structure comprenant un refend et un portique formé d'une seule travée dont la compatibilité des déformations sous l'action des forces latérales est imposée par la présence de barres articulées aux extrémités, de longueur invariable et uniformément réparties sur la hauteur de l'ouvrage.

De différents abaques ont été établis pour fournir les valeurs du rapport de l'effort tranchant repris par le refend à la côte "z" en fonction des rapports total à la côte "z" en fonction des rapports des rigidités de deux poteaux.

Compte tenu de la présence des planchers imposant une déformation uniforme pour l'ensemble de l'ouvrage on peut généraliser l'étude à des bâtiments comportant plusieurs refends et plusieurs portiques.

4.3.3. Méthode développée dans le livre de Fuentes:

- * Portiques et refends parallèles : La détermination des efforts horizontaux dans les refends se fait aux portiques, en attribuant une inertie fictives aux portiques puis procéder à la résolution du problème en ce ramenant à l'étude d'une série de refends parallèles dont l'inertie est connue.
- * Portiques et refends dans le même plan : Le calcul d'un tel système se fait en deux phases:
 - Supposer que l'effort est repris par le refend
 - Déterminer les réactions du portique dans l'hypothèse ou il est soumis aux mêmes déplacements que le refend

4.3.4. Méthode de Zigallov:

Cette méthode est applicable aux bâtiments à étages dont la structure comprend :

Des éléments porteurs verticaux plans constitués par des portiques et des voiles pleins ou à files d'ouvertures implantées parallèlement à deux directions principales perpendiculaires à ox et oy au plan horizontal. Elle peut aussi être appliquée aux bâtiments comportant des voiles profilés ou des planchers monolithes sans décrochements en élévation constitués de dalles pleines. Les conditions d'applications sont :

- a) Σ (moments d'inertie des voiles) \geq Σ (moments d'inertie des poteaux)
- b) planchers infiniment rigides dans leur plan
- c) les voiles peuvent être considérés comme parfaitement encastés au niveau de la base
- d) les éléments verticaux ont les mêmes caractéristiques variant progressivement en élévation
- e) les points de passage des forces horizontales ont la même implantation à tous les niveaux

4.3.5. Méthode des trois pivots :

Méthode d'analyse des structures développée par le professeur Anatassiadis Kyriakos. Cette méthode a été inspirée de la théorie des voiles minces.

La mise en équation de cette méthode et son application seront détaillées plus loin.

CINQUIEME PARTIE

ANALYSE DE LA STRUCTURE PAR LA METHODE DES TROIS PIVOTS

5.1. INTRODUCTION

La présente méthode est une méthode de calcul statique des contreventements mixtes tridimensionnels.

Nous conviendrons d'appeler poteau tout élément vertical du contreventement et linteaux tous les éléments horizontaux.

Nous aurons alors trois cas de systèmes :

- Systèmes liés : où tous les éléments verticaux sont reliés entre eux par des linteaux.
- Systèmes non liés : les éléments verticaux ne sont pas reliés entre eux par des éléments horizontaux.
- Systèmes partiellement liés.

Pour notre étude, nous retiendrons le cas des systèmes liés.

La mise en équation du système est explicitée plus loin. En effectuant l'élimination des forces de cisaillement on aboutit à un système différentiel du 4ème ordre.

Ce dernier peut se décomposer en trois équations indépendantes par rapport aux systèmes d'axes principaux de la structure.

Ce système constitué de trois axes de torsion et les équations sont semblables à celles données par la torsion mixte des pièces longues en voiles minces et à profil ouvert.

Il en résulte que tout contreventement peut être assimilé à une console fictive à profil ouvert caractérisée par trois centres de torsion. On arrive ainsi à la formulation de la méthode des trois pivots permettant le calcul des contreventements en faisant la superposition de trois états de torsion mixte de la console fictive.

5.2. HYPOTHESES DE LA METHODE

Les hypothèses de base de la méthode sont semblables à celles de la théorie de Vlassov :

- Comportement des matériaux élastique linéaire.
- Dalles indéformables dans leur propre plan.
- Déformations distorsionnelles négligeables.

Dans le modèle continu, les linteaux qui sont supposés être réguliers espacés dans la structure réelle sont remplacés par une plaque élastique se déformant dans son plan par distorsion. La rigidité distorsionnelle est évaluée en fonction des caractéristiques des linteaux ainsi que de leur espacement.

En ce qui concerne les trumeaux, il est habituel de négliger leur déformation distorsionnelle due à l'effort tranchant. Il en résulte qu'à une côte z donnée, toutes les sections auront tourné d'un même angle et par conséquent, le linteau situé à cette côte aura un point d'inflexion en son milieu (l'identité des déformations dans les planchers est imposée par des planchers). Il est alors naturel de choisir pour inconnue l'effort tranchant dans les linteaux, ce qui revient à prendre une fonction de cisaillement dans le modèle de calcul.

De plus, on suppose que les linteaux n'apportent pas de perturbations au niveau de leur encastrement, ce qui est d'autant mieux réalisé que l'inertie des linteaux est faible devant l'inertie des trumeaux.

Donc résumons nos hypothèses :

- a. comportement des matériaux élastique linéaire
- b. dalles indéformables dans leur propre plan
- c. déformations distorsionnelles négligées.

Et admettons aussi, les hypothèses particulières suivantes :

- d. les caractéristiques mécaniques et géométriques sont constantes sur toute la hauteur
- e. la réaction des planchers sur les éléments verticaux de rigidité est considérée comme une charge répartie.
- f. les points de moments nuls dans les travées des linteaux sont indépendants de la sollicitation horizontale.

5.3. MODELISATION DE LA STRUCTURE

L'étude statique d'une structure comporte toujours deux phases :

- la modélisation
- le calcul proprement dit qui s'applique au modèle établi précédemment.

Le choix du modèle représente une phase très importante de l'étude : d'une structure. En effet, si notre modèle mathématique n'est pas représentatif du modèle physique, on aura beau utiliser des formules compliquées et les résoudre sur ordinateur, les résultats obtenus seront erronés car un mauvais modèle peut s'écarter de la réalité, où encore l'incohérence des hypothèses peut apporter un degré de précision illusoire.

Avant de commencer une étude, il faut en préciser les hypothèses clairement et en vérifier la compatibilité.

Tous les modèles sont supposés vérifier les trois hypothèses de base (énoncées précédemment).

Choix du modèle : on considère l'ossature d'un bâtiment habituel constitué de poteaux et des refends (ou noyaux) reliés entre eux au niveau de tous les planchers par des poutres (linteaux) avec lesquelles, ils forment des portiques spatiaux complexes.

Les poteaux sont numérotés de 1 à n (nombres dans des cercles). (fig. 5.1)

Dans le cas général, le poteau i aura une section droite à profil ouvert, rapporté au système d'axes principaux d'inertie $G_i \xi_i \eta_i \zeta_i$, et à celui des axes principaux d'élasticité $K_i \xi_i^* \eta_i^* \zeta_i^*$ parallèle au précédent.

G_i, K_i sont respectivement le centre de gravité et le centre élastique.

(ξ_i, η_i) ou (ξ_i^*, η_i^*) sont placés au niveau de l'encastrement à la fondation de l'axe ζ_i ou ζ_i^* dirigé vers le haut.

Toutes les poutres sont numérotées de 1 à l (nombres dans les rectangles).

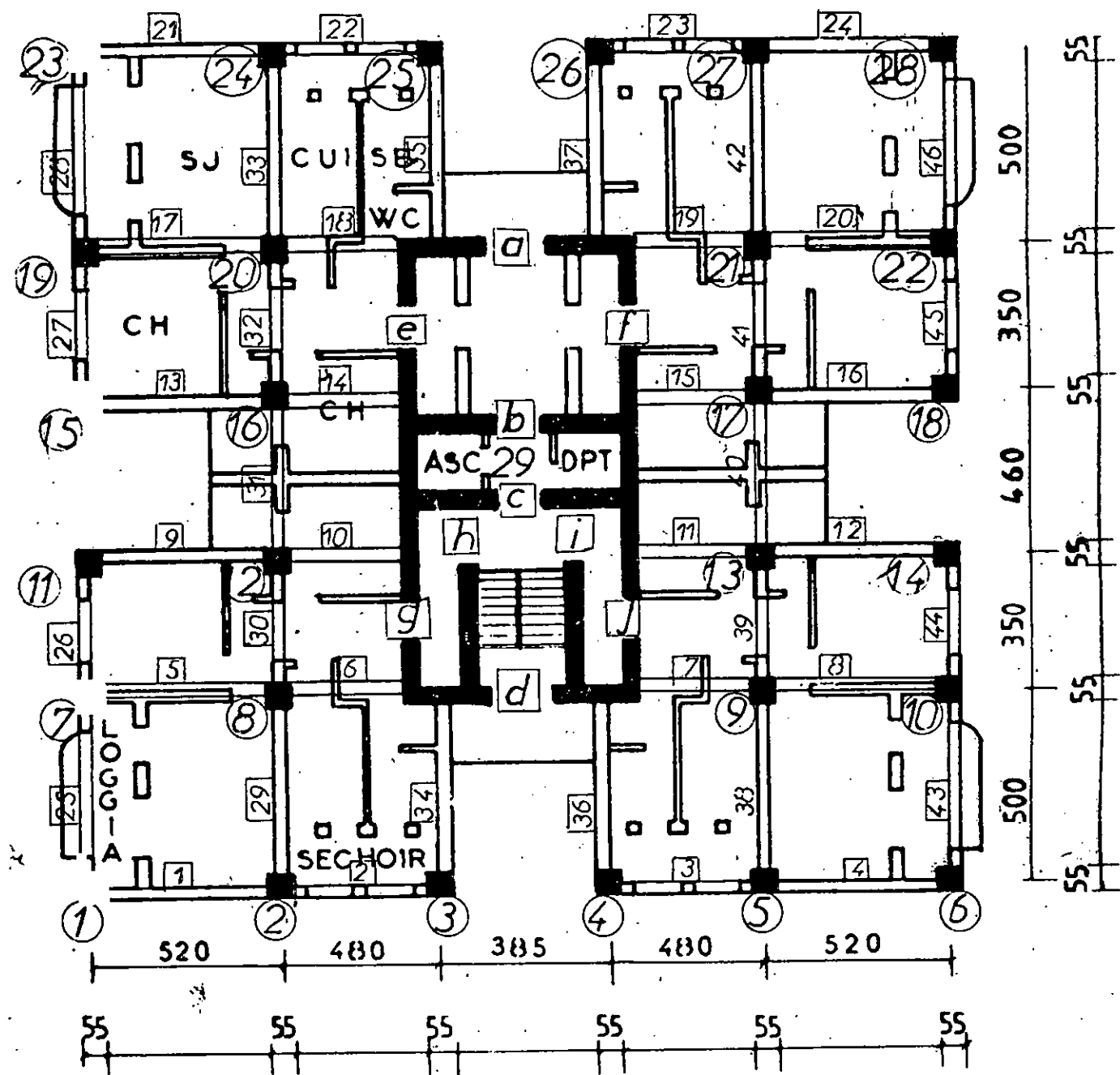


Fig:51 Numérotation
des liaisons

Pour l'établissement du modèle continu de la structure, une liaison directe (r) de rigidité EJ_r , reliant les poteaux i et j est remplacée par une liaison répartie fictive (plaque élastique) de rigidité (EJ_r/h) , h étant la hauteur d'étage. En effectuant une coupure au point M_r de moment nul de la liaison, on obtiendra un effort tranchant ($\mp Q_r$) sur la poutre réelle et un flux de cisaillement ($\pm J_r$) sur la plaque élastique; ce dernier est considéré positif du côté i si ($i < j$). Les forces positives sont notées par un cercle blanc et les forces négatives par un cercle noir. (voir figures 5.2 et 5.3)

En résumé, le modèle mathématique du contreventement est constitué par une ensemble de consoles (poteaux) solidarisiées par des milieux élastiques. Une section droite du contreventement reste indéformable dans son plan pendant la déformation du système.

Pour la flexion des poteaux à section pleine, on appliquera la théorie classique des poutres mais pour les poteaux à profil ouvert, on appliquera la théorie de Vlassov.

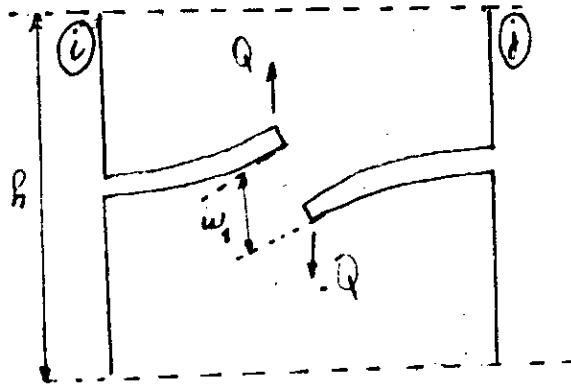


Fig: 5.2

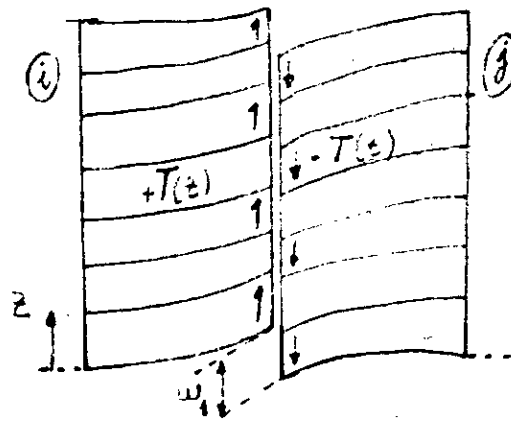


Fig: 5.3

1. Liaison réelle
2. Définition de la plaque élastique

Modèle mathématique (continu)

5.4. TYPES DE LIAISONS :

Une liaison peut-être soit interne dans un même poteau, soit externe entre deux poteaux distincts.

Les liaisons seront appelées planes si elles appartiennent à des portiques habituels, et spatiales si elles aboutissent sur un noyau.

Les premières ne se mobilisent que pour un déplacement dans leur plan alors que les deuxièmes se mobilisent pour tout déplacement.

Enfin, chaque liaison est caractérisée par le point de moment nul M_r , et sa souplesse f_r , représentant le déplacement relatif les deux lèvres de la coupure verticale au point M_r .

5.5. MISE EN EQUATIONS

5.5.1. CONDITIONS CINEMATIQUES :

D'après l'hypothèse (b), le mouvement d'une section droite du contreventement dans un plan à la cote Z peut être défini par le vecteur :

$$d(z) = \begin{bmatrix} u(z) \\ v(z) \\ \theta(z) \end{bmatrix}$$

Avec u, v projection du déplacement de la section sur les axes X et Y du référentiel général et θ l'angle de rotation autour de l'axe Z (figure 5.4 et 5.5).

D'après la théorie de Vlassov, une section droite du poteau à la cote Z reste indéformable dans son plan pendant la déformation du poteau. Par conséquent, sa portion dans l'espace est définie par :

$$d_i(z) = \begin{bmatrix} u_i(z) \\ v_i(z) \\ \theta_i(z) \end{bmatrix}$$

On aura d'après l'hypothèse (b), on a la condition cinématique,

$$d_i(Z) = A_i d(Z)$$

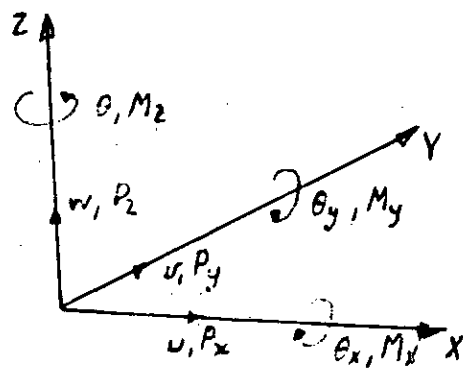
Avec A_i : matrice de transformation des déplacements.

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos a_i & \sin a_i & -\bar{Y}_{0i} \\ -\sin a_i & \cos a_i & +\bar{X}_{0i} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

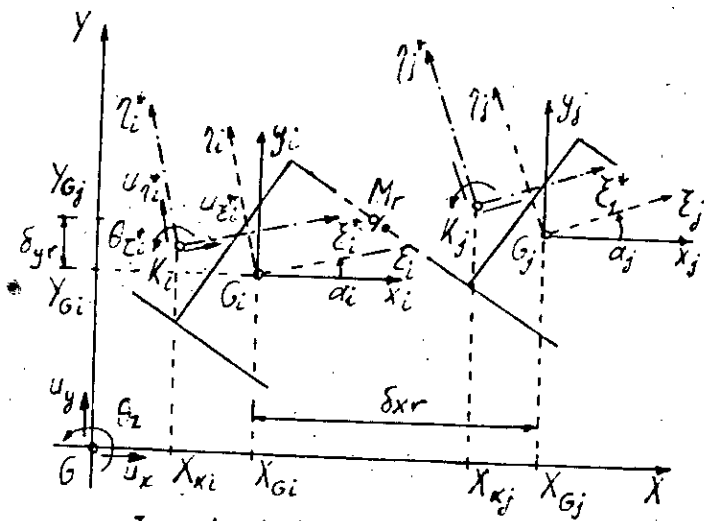
$$\bar{X}_{0i} = X_{0i} \cos a_i + Y_{0i} \sin a_i$$

$$\bar{Y}_{0i} = -X_{0i} \sin a_i + Y_{0i} \cos a_i$$

X_{0i}, Y_{0i} : coordonnées du centre de torsion



Convention des signes
Fig: 5.4



Implantation des poteaux
Fig: 5.5

5.5.2. CONDITIONS ELASTIQUES

En considérant une liaison quelconque "K" entre poteaux adjacentes "i" et "j", on désigne par C_{ki} les coordonnées cartésiennes et C_{kj} les coordonnées sectorielles du point M_k par rapport aux axes principaux; on a :

$$C_{ki} = \begin{bmatrix} \xi_{ki} \\ \eta_{ki} \\ \omega_{ki} \end{bmatrix} \text{ et } C_{kj} = \begin{bmatrix} \xi_{kj} \\ \eta_{kj} \\ \omega_{kj} \end{bmatrix}$$

a) La liaison k peut ainsi équilibrer :

$$M\eta_{kj}(Z) = -\xi_{kj} N_k(Z)$$

$$-M\xi_{kj}(Z) = -\eta_{kj} N_k(Z)$$

$$-\beta\tau_{kj}(Z) = -\omega_{kj} N_k(Z)$$

$$-\beta\zeta_{kj}(Z) = -\omega_{kj} N_k(Z)$$

$$\mu_{kj}(Z) = -C_{kj} N_k(Z)$$

b) Soient maintenant les vecteurs :

$$q_i = \begin{bmatrix} Q\xi_{ki} \\ Q\eta_{ki} \\ M\xi_{ki} \end{bmatrix} \text{ et } p_i = \begin{bmatrix} P\xi_{ki}^* \\ P\eta_{ki}^* \\ m\xi_{ki}^* \end{bmatrix}$$

Nous avons :

$$\mu_i'(Z) = -q_i(Z) + S_{0i} di'(Z)$$

$$\mu_i''(Z) = p_i(Z) + S_{0i} di''(Z)$$

$$S_{0i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G \cdot I_{0i} \end{bmatrix} \quad G \cdot I_{0i} : \text{rigidité à la torsion pure}$$

en résumé :

$$\begin{cases} q_i(Z) = -K_i di''''(Z) + S_{0i} di'(Z) - C_{kj} \cdot N_k'(Z) \\ q_i(Z) = -K_i di''''(Z) + S_{0i} di'(Z) + C_{kj} \cdot N_k'(Z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_i(Z) = -K_i d''''(Z) - S_{0i} di''(Z) + C_{ki} \cdot N_k''(Z) \\ p_i(Z) = -K_i d''''(Z) - S_{0i} di''(Z) - C_{kj} \cdot N_k''(Z) \end{cases}$$

On désigne par :

$$\left. \begin{matrix} M\xi_{ki}(Z) \\ M\eta_{ki}(Z) \end{matrix} \right\} \text{moments de flexion}$$

$$B\zeta_i(Z) : \text{bimoment}$$

$$N_k(Z) = \int_Z^H T_k(Z) dZ, \quad N_k'(Z) = -T_k(Z)$$

représente la somme des forces de cisaillement $T_k(Z)$ agissant sur une coupure verticale effectuée au point M_k

Ces grandeurs sont liées par les conditions élastiques :

$$M\eta_i(Z) = EI\eta_i \cdot u'_i(Z) + \xi_{ki} \cdot N_k(Z)$$

$$-M\xi_i(Z) = EI\xi_i \cdot v'_i(Z) + \eta_{ki} \cdot N_k(Z)$$

$$B\zeta_i(Z) = EI\omega_i \cdot v'_i(Z) + \omega_{ki} \cdot N_k(Z)$$

On peut la mettre sous la forme matricielle

$$\mu_i(Z) = K_i \cdot d'_i(Z) + C_{ki} \cdot N_k(Z)$$

5.5.3. CONDITIONS STATIQUES :

$$p(Z) = \begin{bmatrix} p_x(Z) \\ p_y(Z) \\ m_z(Z) \end{bmatrix}$$

avec :

- p_x, p_y : densités de charges réparties sur la hauteur du bâtiment suivant les axes x et y
- m_z : densité du couple de torsion par rapport à z. fig 5.6

On définit :

$$q(Z) = \begin{bmatrix} Q_x(Z) \\ Q_y(Z) \\ M_z(Z) \end{bmatrix} \quad \mu(Z) = \begin{bmatrix} M_x(Z) \\ -M_y(Z) \\ B_z(Z) \end{bmatrix}$$

$$Q_x(Z) = \int_z^H P_x(Z) dz \quad Q_y(Z) = \int_z^H P_y(Z) dz \quad M_z(Z) = \int_z^H m_z(Z) dz$$

$$M_y(Z) = \int_z^H Q_x(Z) dz \quad M_x(Z) = \int_z^H Q_y(Z) dz \quad B_z(Z) = \int_z^H M_z(Z) dz$$

On écrit les conditions statiques de trois façons équivalentes :

$$\sum_i A'_i \mu_i(Z) + \sum_k A'_k \mu_{kj}(Z) \approx \mu(Z)$$

$$\sum_i A'_i q_i(Z) + \sum_k A'_k q_{kj}(Z) = q(Z)$$

$$\sum_i A'_i p_i(Z) + \sum_k A'_k p_{kj}(Z) \approx p(Z)$$

La sommation est étendue à tous à les poteaux (i) et toutes les liaisons (K). Après transformation, on obtient trois formes équivalentes de l'équation d'équilibre statique du système.

$$Kd''''(Z) = \mu(Z) - \Delta n(Z)$$

$$Kd'''(Z) - S_0 d'(Z) = -q(Z) - \Delta' n'(Z)$$

$$Kd''(Z) - S_0 d''(Z) = p(Z) - \Delta' n''(Z)$$

$$K = \sum_i A_i' \cdot K_i \cdot A_i \quad S_0 = \sum_i A_i' \cdot S_{0i} \cdot A_i$$

$$n(Z) = \begin{bmatrix} N_1(Z) \\ N_2(Z) \\ \vdots \\ N_e(Z) \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} S_{x_1} & S_{x_2} & \dots & S_{x_r} \\ S_{y_1} & S_{y_2} & \dots & S_{y_r} \\ S_{w_1} & S_{w_2} & \dots & S_{w_r} \end{bmatrix}$$

$$K = E \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad S_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_i G \cdot I_{0i} \end{bmatrix}$$

$$K_{xx} = E \sum_i (I \eta_i \cos^2 a_i + I \xi_i \sin^2 a_i) = E \sum_i I y_i$$

$$K_{xy} = K_{yx} = E \sum_i (I \eta_i - I \xi_i) \cdot \sin a_i \cdot \cos a_i = E \sum_i I x y_i$$

$$K_{yy} = E \sum_i (I \eta_i \sin^2 a_i + I \xi_i \cos^2 a_i) = E \sum_i I x_i$$

$$K_{xz} = K_{zx} = E \sum_i (-y_{0i} I y_i + X_{0i} I x y_i)$$

$$K_{yz} = K_{zy} = E \sum_i (-y_{0i} I x y_i + X_{0i} I x_i)$$

$$K_{zz} = E \sum_i (I w_i + y_{0i}^2 \cdot I y_i + X_{0i}^2 \cdot I x_i - 2 x_{0i} \cdot y_{0i} \cdot I x y_i)$$

$$S_{xt} = (\xi_{ki} \cos a_i - \eta_{ki} \cdot \sin a_i) - (\xi_{kj} \cos a_j - \eta_{kj} \cdot \sin a_j) = X_{ki} - X_{kj}$$

$$S_{yt} = (\xi_{ki} \sin a_i + \eta_{ki} \cdot \cos a_i) - (\xi_{kj} \sin a_j + \eta_{kj} \cdot \cos a_j) = X_{ki} - X_{kj}$$

$$S_{wt} = (-\xi_{ki} \bar{Y}_{0i} + \eta_{ki} \cdot \bar{X}_{0i} + w_{ki}) - (-\xi_{kj} \bar{Y}_{0j} + \eta_{kj} \cdot \bar{X}_{0j} + w_{kj}) = \Omega_{ki} - \Omega_{kj}$$

5.5.4 CONDITIONS DE COMPATIBILITE

Exprimant la fermeture des coupures effectuées aux points M_k de moment nul dans les liaisons.

On aura dans la coupure (K), l'équation de fermeture :

$$w_{k0}(z) + w_{k1}(z) + w_{k2}(z) = 0$$

sous forme matricielle : $w_0(z) + w_1(z) + w_2(z) = 0$

a) Effet de flexion - torsion :

On a pour une liaison (K) reliant les poteaux (i) et (j),

$$\begin{aligned} w_{k0}(z) &= w'_{k0}(z) - w''_{k0}(z) = -[d'_i(z) \cdot C_{ki} - d'_j(z) \cdot C_{kj}] \\ &= -d''(z) [A'_i \cdot C_{ki} \cdot A'_i(z) \cdot C_{kj}] = d''(z) \cdot \Delta_k = -\Delta'_k \cdot d'(z)^2 \end{aligned}$$

Pour l'ensemble des liaisons on a : $w_{k0}(z) = w'_{k0}(z) - w''_{k0}(z) = -\Delta'_k \cdot d'(z)$

b) Déformation des liaisons :

Pour une liaison : $w_{k1}(z) = f_k T_k(z) = -f_k N'_k(z)$

$$w_1(z) = -Fn'(z)$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & & & \\ & f_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & f_n \end{bmatrix}$$

c) Effet de compression différentielle :

Si $i < j$, on a pour une liaison (k) :

$$w_{k_2}(z) = \frac{1}{ES_i} \int_0^z \tilde{N}_i(z) d\tau - \frac{1}{ES_j} \int_0^z \tilde{N}_j(z) d\tau$$

Avec \tilde{N}_i et \tilde{N}_j : efforts de compression des poteaux.

On peut l'écrire sous forme matricielle

$$w_{k_2}(z) = (U'_k \bar{P} U_k) \int_0^z n(z) d\tau$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 1/ES_1 & & & & \\ & 1/ES_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & 1/ES_n \end{bmatrix}$$

Matrice de souplesse des poteaux

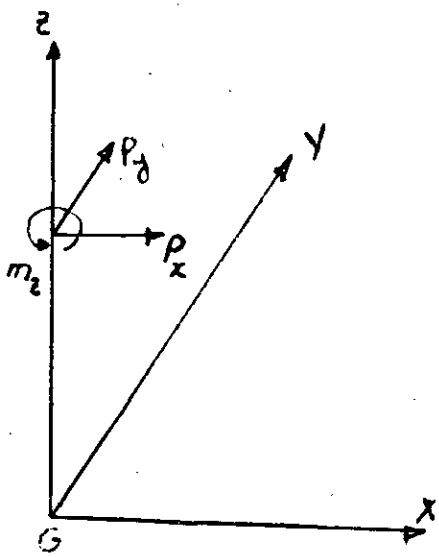
$$U_k = \begin{bmatrix} & & \vdots & & \\ \dots & \dots & +1 & \dots & \\ & & -1 & & \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} \begin{matrix} (i) \\ (j) \end{matrix}$$

Matrice de Boole définissant les différentes corrections

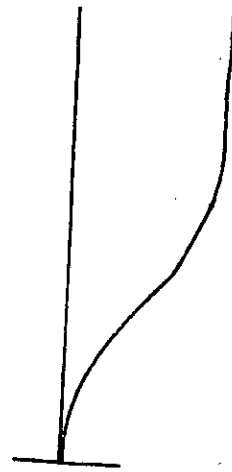
$$w_k = p \int_0^z n(z) dz$$

L'équation de fermeture : $\Delta' \cdot d'(Z) = -F\eta'(Z) + P \int_u^z \eta(z) dz$

Après une deviation on a : $\Delta' \cdot d''(Z) = -F\eta''(Z) + P\eta^0(Z)$



Sollicitations extérieures
Fig. 5.6



Déformée mince
Fig: 57

5.5.5. ELIMINATION:

La condition de compatibilité devient

$$\eta''(Z) = -F^{-1}\Delta'd''(Z) + P\eta(Z)$$

On remarque l'expression de $\eta''(Z)$ dans l'équation d'équilibre statique n°3 :

$$Kd''''(Z) - (S_0 + S_1)d''(Z) = P(Z) - \Delta F^{-1}Pn(z)$$

On a : $S_1 = \Delta F^{-1}\Delta'$

$$\eta(Z) = F^{-1}\Delta'\bar{\eta}(Z) \quad \text{avec} \quad \bar{\eta}(Z) = \begin{bmatrix} \bar{N}_1(Z) \\ \bar{N}_2(Z) \\ \bar{N}_3(Z) \end{bmatrix}$$

On suppose que les poteaux ne sont pas extensibles, par conséquent; les déformations axiales sont négligées d'ou $P = 0$

$$\eta''(Z) = -F^{-1}\Delta'd''(Z)$$

Par intégration on a : $\eta'(Z) = -F^{-1}\Delta'd'(Z) + C_1$

$$\text{Avec : } C_1 = 0 \quad \text{car} \quad d'(0) = 0 \quad \text{et} \quad n'(0) = -\zeta(0) = 0$$

$$\eta(Z) = F^{-1}\Delta'd(Z) + C_2 = F^{-1}\Delta'\bar{\eta}(Z)$$

③ et ② deviennent :

$$* \quad Kd''''(Z) - (S_0 + S_1)d''(Z) = P(Z) - F^{-1}\Delta'\bar{\eta}(Z) = P(Z) - R\bar{\eta}(Z)$$

$$** \quad Kd''(Z) = \mu(Z) - S_1\bar{\eta}(Z)$$

$$** \quad Kd''(Z) - (S_0 + S_1)d''(Z) = P(Z) - F^{-1}\Delta'\bar{\eta}(Z) = P(Z) - R\bar{\eta}(Z)$$

On remplace : $\bar{\eta}(Z) = [\mu(Z) - Kd''(Z)]S_n^{-1}$ dans (*)

on obtient $Kd''''(Z) - (S_0 + S_1 + S_2)d''(Z) = P(Z) - \Gamma\mu(Z)$

Avec : $\Gamma = RS_1^{-1}$, $S_2 = RS_1^{-1}K = \Gamma K$

Déformations axiales des poteaux nulles \Rightarrow

$$Kd''''(Z) - (S_0 + S_1)d''(Z) = P(Z)$$

$$Kd''''(Z) - Sd''(Z) = P(Z)$$

Avec l'effet des poteaux exprimé par la matrice K et les liaisons par la matrice S.

On en conclut que tout système travaillant conjointement : un sous système flexionnel de matrice de rigidité k et un sous système distorsionnel de matrice de rigidité S. Sous l'action des forces d'interactions, la déformée commune de ces systèmes a une forme mixte entre la forme flexionnelle et la forme distorsionnelle (fig .5.7).

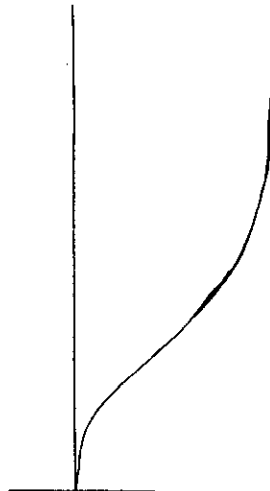


Fig: 5.7

5.6. ETAPES DE CALCUL DE LA METHODE DES TROIS PIVOTS : (CAS D'UN SYSTEME INEXTENSIBLE)

5.6.1 DETERMINATION DES TROIS PIVOTS Ω_i , ET DES RIGIDITES EJ_{w_i} , ET EJ_{d_x}

a. Calcul des matrices de rigidité flexionnelle et distorsionnelle

a.1. Matrice de rigidité flexionnelle

$$K = E \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix}$$

Avec:
$$K_{xx} = E \sum_i (I\eta_i \cos^2 a_i + I\xi_i \sin^2 a_i) = E \sum_i Iy_i$$

$$K_{xy} = K_{yx} = E \sum_i (I\eta_i - I\xi_i) \cdot \sin a_i \cdot \cos a_i = E \sum_i Ixy_i$$

$$K_{yy} = E \sum_i (I\eta_i \sin^2 a_i + I\xi_i \cos^2 a_i) = E \sum_i Ix_i$$

$$K_{xz} = K_{zx} = E \sum_i (-y_{ki} Iy_i + X_{ki} Ixy_i)$$

$$K_{yz} = K_{zy} = E \sum_i (-y_{ki} Ixy_i + X_{ki} Ix_i)$$

$$K_{zz} = E \sum_i (Iw_i + y_{ki}^2 \cdot Iy_i + X_{ki}^2 \cdot Ix_i - 2x_{ki} \cdot y_{ki} \cdot Ixy_i)$$

a.2 Matrice de rigidité distorsionnelle:

On détermine les coefficients de souplesse f_r des liaisons, ensuite, on calcule séparément les matrices de rigidité distorsionnelle S_{pl} , S_{sp} , S_0 des liaisons spatiales et internes respectivement.

* Liaisons planes : (fig 5.8)

$$S_{pl} = \sum_j S_{bj} \begin{bmatrix} \cos^2 aj & \frac{1}{2} \sin 2aj & rj \cos aj \\ \frac{1}{2} \sin 2aj & \sin^2 aj & rj \sin aj \\ rj \cos aj & rj \sin aj & rj^2 \end{bmatrix}$$

Avec:

$S_{bj} = \sum_r L_r^2 / f_r$: désigne la rigidité distorsionnelle

rj : est toujours pris positif

aj : angle $(+X, +\xi_j)$

Direction ξ_j choisi de façon à donner un moment positif / à G

* Liaisons spatiales :

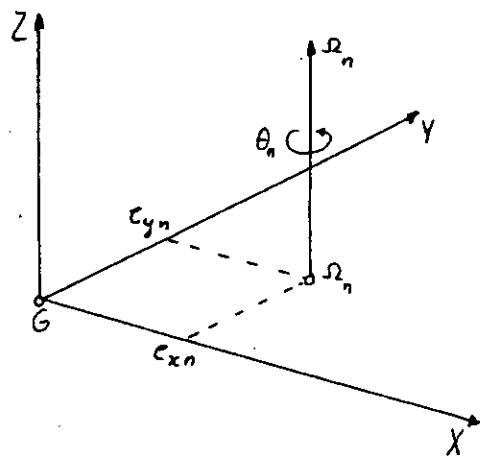
$$S_{sp} = \sum_{r=1}^l \frac{1}{br} \begin{bmatrix} \delta^2 xr & \delta xr \delta yr & \delta xr \delta wr \\ \delta yr \delta xr & \delta^2 yr & \delta yr \delta wr \\ \delta wr \delta xr & \delta wr \delta yr & \delta^2 wr \end{bmatrix}$$

Avec : $\delta xr = X_{Gj} - X_{Gi}$

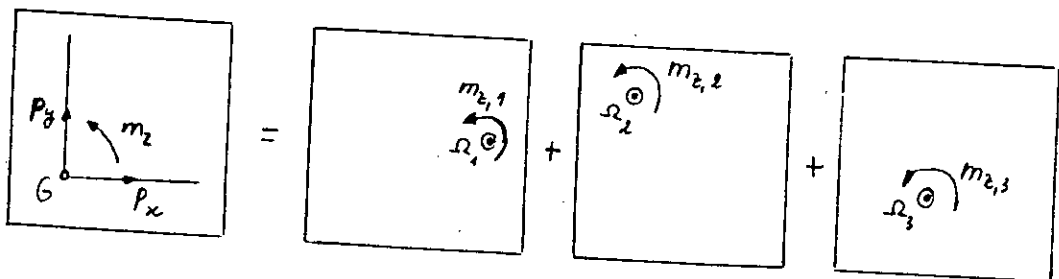
$\delta yr = Y_{Gj} - Y_{Gi}$

$\frac{1}{2} \delta wr = Aire(G G_i K_i M_{oi} M_r M_{oj} K_j G_j G)$ (fig. 5.9)

M_{oi}, M_{oj} : Points sectoriels nuls des poteaux (i) et (j).



Axes principaux de système mixte
Fig: 5.8.a



Les trois états de torsion mixte
Fig: 5.8.b

* Liaisons internes :

$$S_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum GI_s^* \end{bmatrix}$$

Avec $GI_s^* = GI_s + \Omega_r^2 / f_r$

Ω_r : double de l'aire de la cellule qui se forme par la liaison et la ligne moyenne du profil.

La matrice de rigidité distorsionnelle de la structure est donnée par $S = S_{pl} + S_{sp} + S_o$

b) détermination des pivots EJ_{wn} et EJ_{dn}

En tenant compte des conditions de diagonalisation $\Psi^T K \Psi = 0$ et $\Psi^T S \Psi = 0$.

On arrive à la conclusion que les trois vecteurs $\Psi_n (n = 1, 2, 3)$ sont K orthogonaux et S orthogonaux et donc solution de l'équation aux valeurs propres $S \Psi = \lambda^2 K \Psi$.

Par la résolution de l'équation caractéristique $\det(S - \lambda^2 K) = 0$.

On obtient trois valeurs propres λ_1^2, λ_2^2 et λ_3^2 . De même par la résolution du système homogène on a : $(S - \lambda_n^2 K) \Psi_n = 0 (n = 1, 2, 3)$.

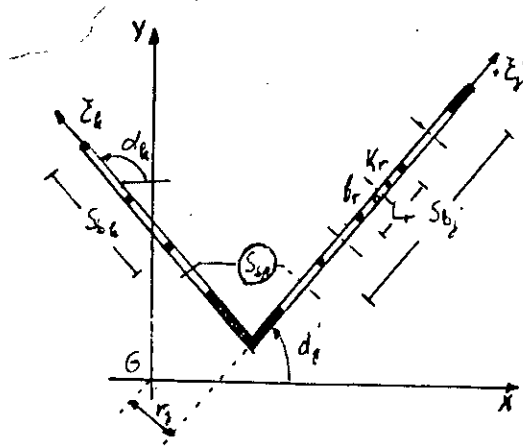
On calcule aussi trois vecteurs propres correspondants Ψ_1, Ψ_2 et Ψ_3 qui déterminent la position exacte des trois pivots Ω_n et vérifient les relations d'orthogonalité :

$$\begin{aligned} \Psi_n^T \cdot K \cdot \Psi_n &= EJ_{wn} \cdot \delta_{nk} \\ \Psi_n^T \cdot S \cdot \Psi_n &= EJ_{dn} \cdot \delta_{nk} \end{aligned}$$

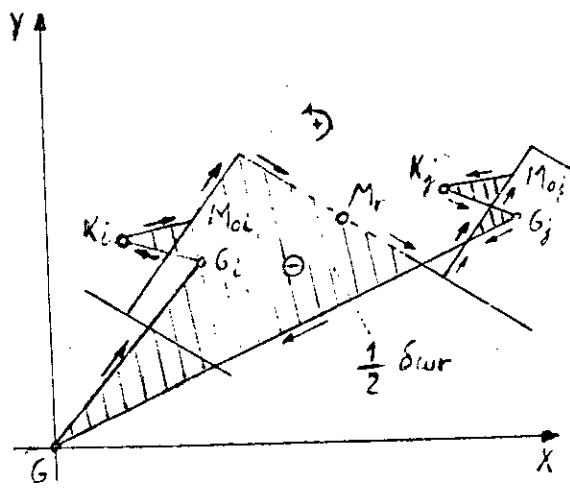
avec $\delta_{ij} = \delta_{nk}$: Symbole de Kronecker.

Ce qui donne : $EJ_{wn} \cdot \delta_{nk} = \Psi_n^T \cdot K \cdot \Psi_n$
 $EJ_{dn} = \Psi_n^T \cdot S \cdot \Psi_n = \lambda_n^2 \cdot EJ_{wn}$

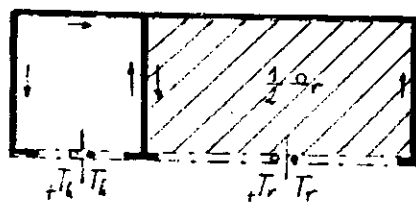
Voir (fig. 5.10)



Liaisons planes et liaisons spatiales



Calcul de δ_{wr}
Fig.5.9



Liaisons internes
Fig.5.10

5.6.2 CALCUL DES ANGLES PRINCIPAUX

Dans le repère (Ω_n) défini par les trois vecteurs (Ψ_n) , on a :

$$EJ_{wn} \cdot \varphi_n''(Z) - GJ_{dn} \varphi_n''(Z) = m_n(Z) - m_n^*(Z) = m_{z,n}(Z)$$

$$m_{z,n}(Z) = \Psi_n^T p(Z) = m_z(Z) + e_{yn} \cdot P_x(Z) - e_{xn} \cdot P_y(Z)$$

Une console verticale à profil ouvert de rigidité au gauchissement EJ_{wn} et à la torsion GJ_{dn} , centrée en Ω_n et sollicitée par le couple torsionnel $m_{z,n}$ donnant à la cote Z un moment de torsion $M_{z,n}$ et un bimoment $B_{z,n}$ précédente et les conditions aux limites :

$$Z = 0 \Rightarrow \varphi_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_n'(0) = 0 \quad \text{voir fig 5-11}$$

$$Z = H \Rightarrow \begin{cases} \varphi_n''(H) \\ -EJ_{wn} \cdot \varphi_n'''' + GJ_{dn}(H) = 0 \end{cases}$$

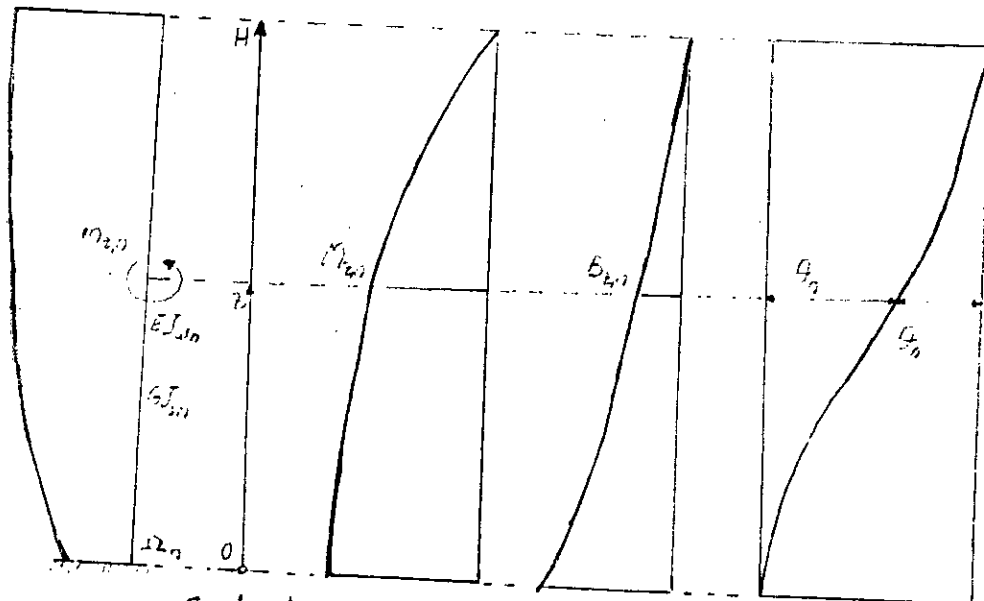
La solution de l'équation vérifiant les conditions précédentes en posant : $\xi = Z/H$

$$\varphi_n(\xi) = \frac{B_{z,n}(0)}{GJ_{d,n}} \mu_n(\xi) \quad n = 1, 2, 3$$

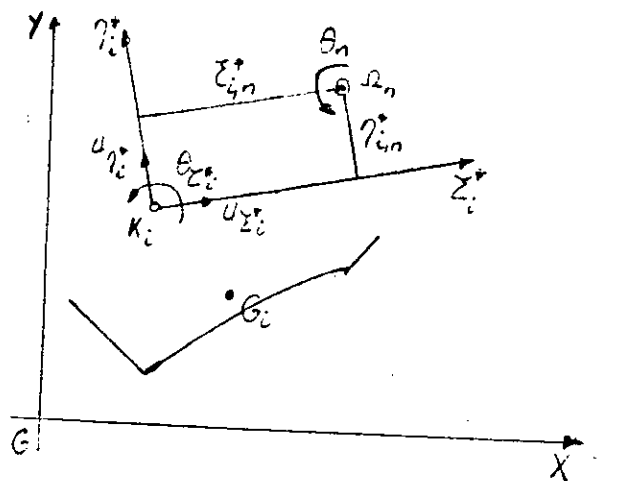
$$\mu_n(\xi) = \mu_n(0) - \mu_n(\xi)$$

$$\varphi_n'(\xi) = \frac{M_{d,n}(0)}{GJ_{d,n}} \tau_n(\xi)$$

Remarque: pour la signification des paramètres τ_n μ_n voir annexes.



Calcul des angles principaux de torsion θ
 Fig: 5.11.a



Déplacements d'un poteau
 Fig: 5.11.b

5.6.3. CALCUL DES DEPLACEMENTS

$$d(Z) = \Psi \cdot \varphi(Z)$$

$$\varphi(Z) = \begin{Bmatrix} \varphi_1(Z) \\ \varphi_2(Z) \\ \varphi_3(Z) \end{Bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} e_{y_1} & e_{y_2} & e_{y_3} \\ -e_{x_1} & -e_{x_2} & -e_{x_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d(Z) = \begin{Bmatrix} u(Z) \\ v(Z) \\ \theta(Z) \end{Bmatrix} \quad \text{d: Vecteur déplacement (fig.5.12)}$$

5.6.4 CALCUL DES FORCES DE CISAILLEMENT N_K, T_K DES LIAISONS

$$N_K(Z) = \int_Z^H T_K(Z) dZ \quad \text{et } N'_K(Z) = -T_K(Z)$$

D'après la condition de compatibilité :

$$\Delta' d''(Z) = -F \cdot \eta''(Z)$$

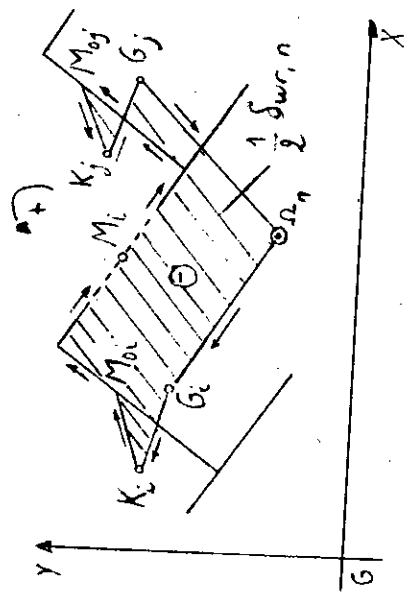
$$\eta''(Z) = -F^{-1} \Delta' d''(Z)$$

Après intégration nous avons :

$$\eta(Z) = F^{-1} \Delta' \bar{\eta}(Z) \quad (\text{de } Z \text{ à } H)$$

$$\text{avec : } \bar{\mu}(Z) = \begin{bmatrix} \tilde{N}_1(Z) \\ \tilde{N}_2(Z) \\ \tilde{N}_3(Z) \end{bmatrix} \quad \text{efforts de compression des poteaux}$$

F : matrice diagonale des coefficients de souplesse $f_r, r = 1, 2, \dots, l$



Calcul de $\delta_{u,n}$
Fig:5.12

Nous avons aussi :

$$F\tau(Z) = \Delta' \bar{\tau}(Z) = \Delta' \cdot \mu'(Z)$$

$$\text{où : } \tau(Z) = [T_1(Z) \quad T_2(Z) \quad \dots \quad T_l(Z)]^T$$

Pour une liaison (r) nous avons :

$$T_r(Z) = \frac{1}{f_r} \delta_r' \mu'(Z) = \frac{1}{f_r} \Psi \phi'(Z) = \frac{1}{f_r} \sum_{n=1}^3 (\delta_r' \Psi_n) \phi_n'(Z)$$

$$N_r(Z) = \frac{1}{f_r} \delta_r' \mu(Z) = \frac{1}{f_r} \Psi \phi(Z) = \frac{1}{f_r} \sum_{n=1}^3 (\delta_r' \Psi_n) \phi_n(Z)$$

Posons :

$$\begin{aligned} \delta_r' \Psi_n &= \delta_{w_r n} = \delta_{w_r} + \delta_{x_r} - e_{y_n} - \delta_{y_r} \cdot e_{x_n} \\ &= \delta_{w_r} + (X_{Gj} - X_{Gi}) e_{y_n} - (Y_{Gj} - Y_{Gi}) e_{x_n} \\ &= \delta_{w_r} + (X_{Gj} e_{y_n} - X_{Gi} e_{y_n}) + (Y_{Gj} e_{x_n} - Y_{Gi} e_{x_n}) \\ &= \delta_{w_r} + 2 \text{ Aire}(GGj\Omega_n) - 2 \text{ Aire}(GGi\Omega_n) \end{aligned}$$

$$\delta_{w_r n} = 2 \text{ Aire}(\Omega_n G_i K_i M_{oi} M_r M_{oj} K_j G_j \Omega_n)$$

$$\phi_n(\xi) = \frac{B_{z,n}(0)}{GJ_{d,n}} \mu_n(\xi)$$

$$T_r(\xi) = \frac{1}{f_r} \sum_{n=1}^3 \left[\frac{M_{z,n}(0)}{GJ_{d,n}} \delta_{w_r n} \cdot \tau_n(\xi) \right]$$

$$N_r(\xi) = \frac{1}{f_r} \sum_{n=1}^3 \left[\frac{B_{z,n}(0)}{GJ_{d,n}} \delta_{w_r n} \cdot \mu_n(\xi) \right]$$

(fig. 5-13)

5.6.5 CALCUL DES EFFORTS DANS LES POTEAUX:

L'effort tranchant des poutres réelles et l'effort normal dans les poteaux sont donnés par :

$$Q_r(Z_k) = hT_r(Z_k)$$

$$Q_r(H) = \frac{1}{2}hT_r(H)$$

$\bar{N}_i(Z) = \sum_r N_r(Z)$ La sommation est étendue à toutes les liaisons débouchant sur le poteau considéré.

Le couple de torsion pure pour l'ensemble des poteaux est donné par :

$$C_s(\xi) = GI_s \varphi'(\xi) = GI_s \sum_{n=1}^3 \left[\frac{M_{z,n}(0)}{GJ_{d,n}} \tau_n(\xi) \right]$$

Ce couple se distribue à tous les poteaux proportionnellement à leur inertie :

$$C_{si}(\xi) = \frac{I_{si}}{I_s} \cdot C_s(\xi)$$

Les moments de flexion et le bimoment dans les poteaux seront donnés par :

$$M_{\eta_i}(\xi) = EI_{\eta_i} \mu_{\xi_i}''(\xi) = EI_{\eta_i} \sum_1^3 \eta_{im}^* \varphi''(\xi)$$

$$M_{\xi_i}(\xi) = -EI_{\xi_i} \mu_{\eta_i}''(\xi) = EI_{\xi_i} \sum_1^3 \xi_{im}^* \varphi''(\xi)$$

$$B_{\zeta_i}(\xi) = EI_{\zeta_i} \varphi_{\zeta_i}''(\xi) = EI_{\zeta_i} \sum_1^3 \varphi_n''(\xi)$$

Pour le calcul de φ_n'' , on considère l'équation d'équilibre des moments par rapports à l'axe (Ω_n) (fig.5.13, 5.14).

$$\beta_{wn}(\zeta) + \beta_{\alpha,n}(\zeta) = \beta_{z,n}(\zeta)$$

$$\text{On pose : } \left. \begin{array}{l} \beta_{z,n}(\zeta) = \beta_{z,n}(0) \cdot \mu_0(\zeta) \\ \beta_{\alpha,n}(\zeta) = \beta_{z,n}(0) \cdot \mu_n(\zeta) \\ \beta_{wn}(\zeta) = EJ_{z,n} \cdot \varphi'' \mu_n(\zeta) \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi''_n(\zeta) = \frac{\beta_{z,n}(0)}{EJ_{z,n}} [\mu_0(\zeta) - \mu_n(\zeta)]$$

Les formules définitives s'écrivent :

$$M_{\eta_i}(\zeta) = EJ\eta_i \sum_{n=1}^3 \left(\frac{B_{z,n}(0)}{EJ_{wn}} \eta_{in}^* [\mu_0(\zeta) - \mu_n(\zeta)] \right)$$

$$M_{\zeta_i}(\zeta) = EJ\zeta_i \sum_{n=1}^3 \left(\frac{B_{z,n}(0)}{EJ_{wn}} \zeta_{in}^* [\mu_0(\zeta) - \mu_n(\zeta)] \right)$$

$$B_{k_i}(\zeta) = EIw_i \sum_{n=1}^3 \left(\frac{B_{z,n}(0)}{EJ_{wn}} [\mu_0(\zeta) - \mu_n(\zeta)] \right)$$

Qui donnent les valeurs des moments et des bimoments du modèle continu.

En réalité, les diagrammes de ces grandeurs présentent à chaque niveau d'étage les sauts :

$$\Delta M_{\eta_i}(\zeta_k) = - \sum_{n=1}^3 \zeta_{i,r} \cdot Q_r(\zeta_k)$$

$$\Delta M_{\zeta_i}(\zeta_k) = \sum_{n=1}^3 \zeta_{i,r} \cdot Q_r(\zeta_k)$$

$$\Delta B_{k_i}(\zeta_k) = \sum_{n=1}^3 w_{i,r} \cdot Q_r(\zeta_k)$$

dus à l'effort tranchant Q_r des traverses et ζ_{ir} , η_{ir} et w_{ir} sont les coordonnées cartésiennes et la coordonnée sectorielle du point M_r de moment nul de la traverse par rapport aux axes propres du porteur "i"

On aura les moments corrigés :

$$M_{\eta_i}(\zeta_k) = M_{\eta_i}(\zeta_k) + \frac{1}{2} \Delta M_{\eta_i}(\zeta_k)$$

$$M_{\zeta_i}(\zeta_k) = M_{\zeta_i}(\zeta_k) + \frac{1}{2} \Delta M_{\zeta_i}(\zeta_k)$$

$$B_{k_i}(\zeta_k) = B_{k_i}(\zeta_k) + \frac{1}{2} \Delta B_{k_i}(\zeta_k)$$

On aura les efforts tranchants et le couple de torsion fléchi :

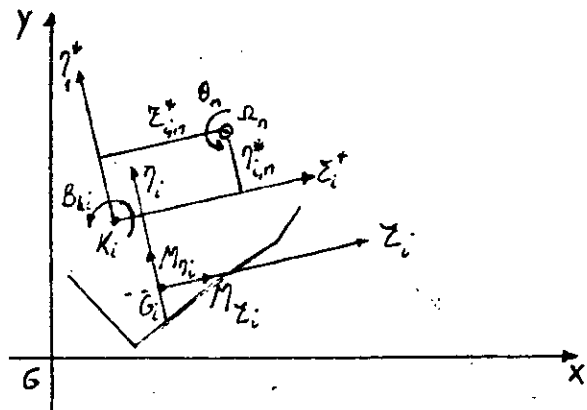
$$Q_{\xi_i}(\xi_k) = -[M_{\eta_i}(\xi_{k+1}) - M_{\eta_i}(\xi_k)]/h$$

$$Q_{\eta_i}(\xi_k) = -[M_{\xi_i}(\xi_{k+1}) - M_{\xi_i}(\xi_k)]/h$$

$$C_{k_i}(\xi_k) = -[B_{k_i}(\xi_{k+1}) - B_{k_i}(\xi_k)]/h$$

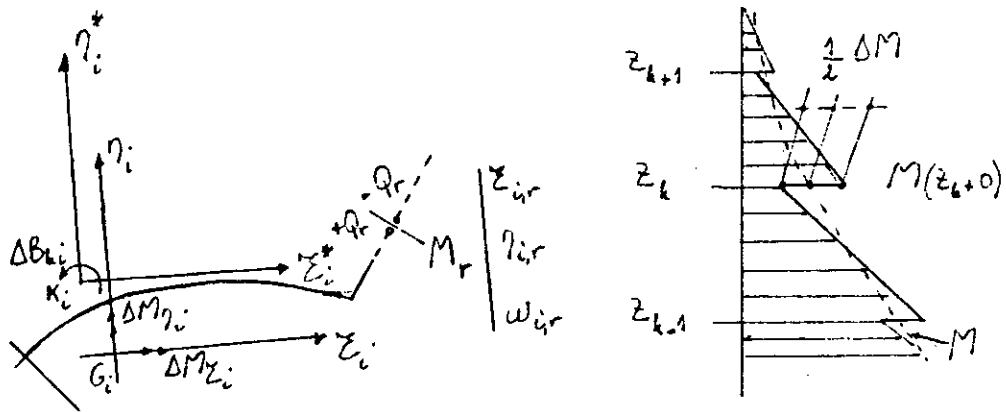
Enfin, le moment total de torsion d poteau "i" :

$$M_{C_i}(\xi) = C_{S_i}(\xi) + C_{K_i}(\xi)$$



Moments de flexion et bimoment d'un poteau

Fig: 5.13



Correction des moments fléchissants
et du bimoment

Fig: 5.14

5.7. APPLICATION DE LA METHODE**5.7.1 DETERMINATION DES MATRICES K ET S****a. Détermination des caractéristiques mécaniques du noyau :**

Nous devons d'abord déterminer les caractéristiques mécaniques du noyau, à savoir :

G : cdg

C : c. d. torsion (flexion)

I_x, I_y, I_{xy}, I_w

Le centre de gravité (G) et les inerties I_x, I_y, I_{xy} ont été donnés pour programme.

$$\begin{cases} X_G = 3,438 \text{ m} \\ Y_G = 5,47 \text{ m} \\ I_x = 260,2 \text{ m} \\ I_y = 102,5 \text{ m} \\ I_{xy} = 3,075 \text{ m} \end{cases}$$

δ : inclinaison du référentiel général par rapport à t aux axes principaux = $-1,38^\circ \approx 0^\circ$

Pour déterminer le centre de torsion, nous allons considérer l'équilibre des contraintes de cisaillement autour d'un axe (oz) définissant un pôle initial (B).

Néanmoins, nous serons contraint de supprimer certaines liaisons qui sont classées comme petites (voir M. Diver) pour permettre de faire passer le flux de cisaillement dans toute la structure.

Nous aurons alors :

$$x_c - x_b = \frac{\int_s wyeds}{I_x}$$

$$y_c - y_b = \frac{\int_s wxeds}{I_y}$$

Notre structure présente un axe de symétrie axe y donc; nous devons choisir un pôle (B) qui soit l'intersection de l'axe de symétrie et la ligne moyenne du profil.

Il faut tout d'abord tracer les épures x, y (fig. 5-15), puis w (voir fig.5-17).

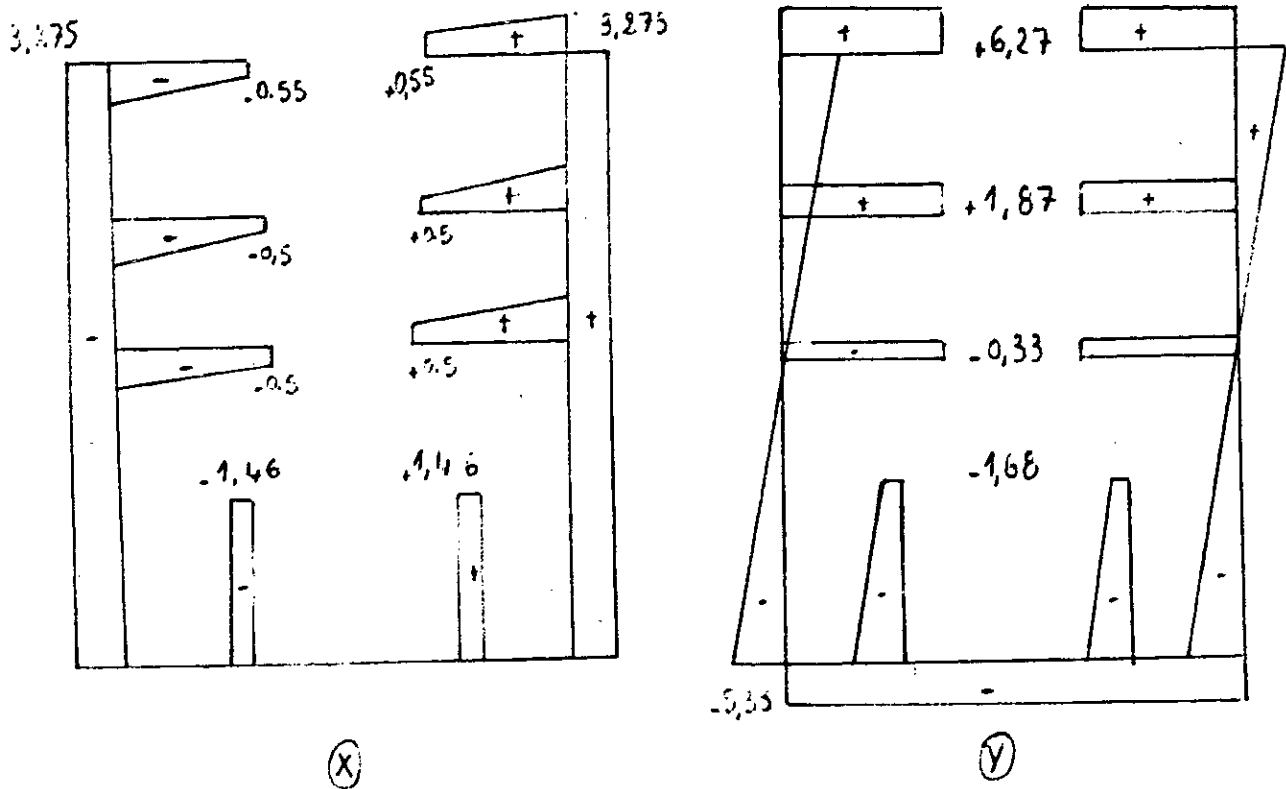
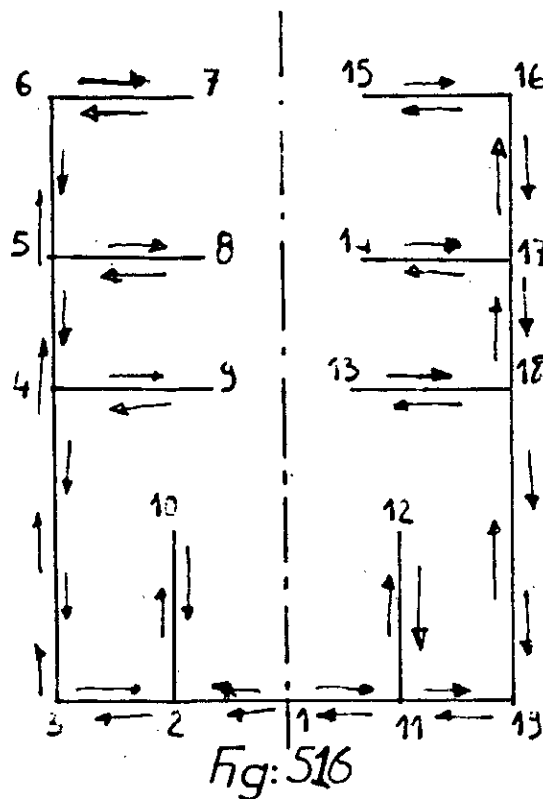


Fig: 5.15

Comme nous l'avons énoncé précédemment, notre structure est symétrique, aussi nous choisirons comme pôle le point B $\begin{pmatrix} 0 \\ -5,33 \end{pmatrix}$.

Nous n'aurons pas à calculer x_{ct} car le centre de torsion appartient à l'axe de symétrie $\Rightarrow x_{ct} = 0$.

Les coordonnées (aires) sectorielles seront calculées suivant le schéma suivant (en suivant le flux de cisaillement) (fig. 5-16) :



	x	y	w_B
1	0	-5,33	0
2	-1,46	-5,33	-7,78
3	-3,275	-5,33	-17,45
4	-3,275	-0,33	-33,825
5	-3,275	1,87	-41,03
6	-3,275	6,27	-55,44
7	-0,55	6,27	-72,53
8	-0,5	1,87	-46,22
9	-0,5	-0,33	-32,91
10	-1,46	-1,68	-13,11
11	1,46	-5,33	7,78
12	1,46	-1,68	13,11
13	0,5	-0,33	32,91
14	0,5	1,87	46,22
15	+0,55	6,27	72,53
16	3,275	6,27	55,44
17	3,275	1,87	41,03
18	3,275	-0,33	33,825
19	3,275	-5,33	+17,45

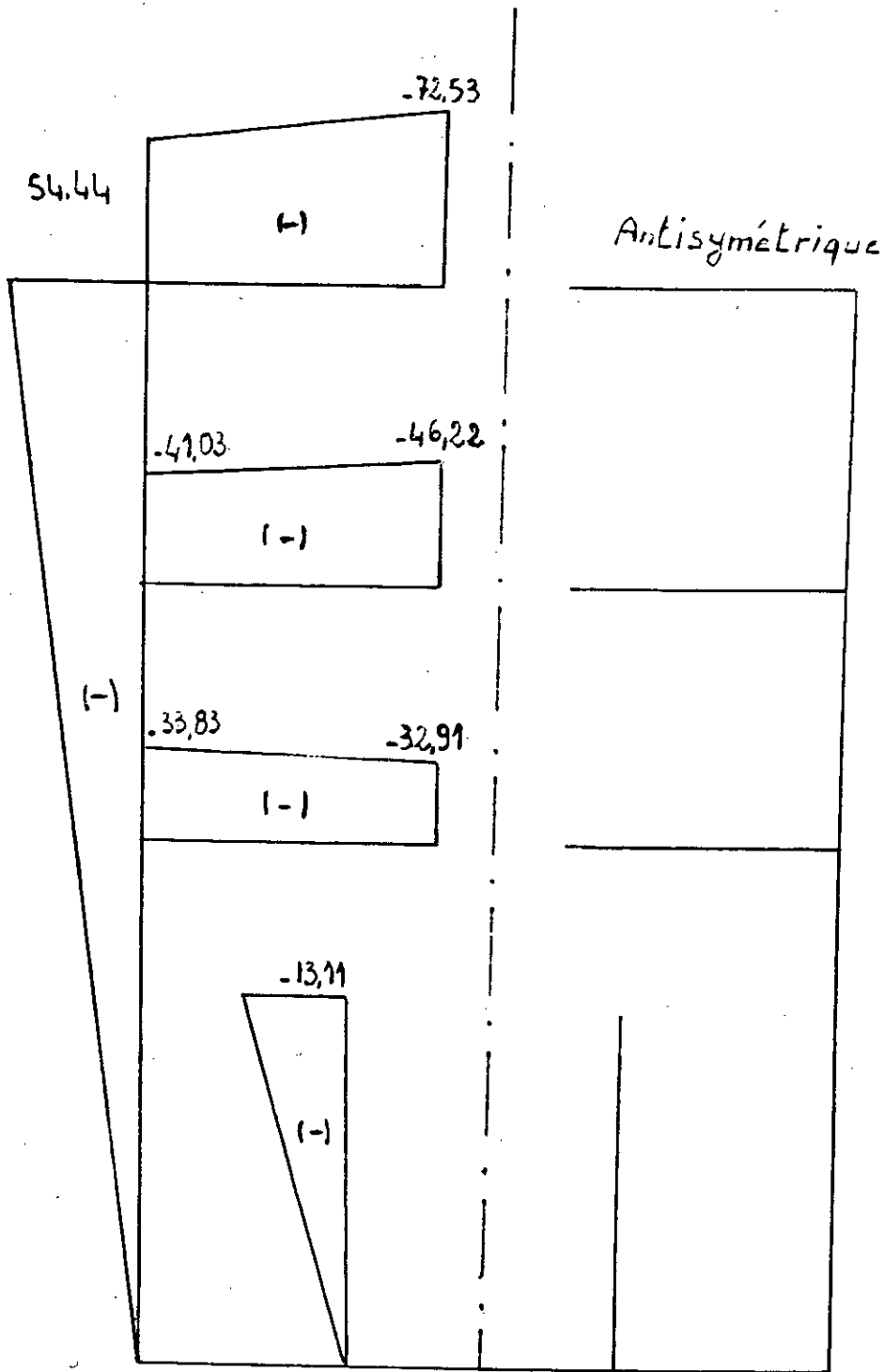


Fig. 5-17 : Diagramme des aires vectorielles

Nous aurons, en utilisant la méthode de Veresheaguine :

$$U_{wx} = 0,3 \sum \text{Aires} \times \text{coordonnées correspondantes}$$

Remarque : Aire du diagramme linéaire \otimes donnée du cdg du diagramme non linéaire.

Application numérique :

$$U_{wx} = 0,3 \times [1378,78 + 155,42 + 118,89 + 46,58] \times 2$$

$$U_{wx} = 1019,80$$

$$\Rightarrow y_{CT} = -4,43 \text{ m}$$

Dans notre cas, il n'est pas nécessaire de corriger les aires sectorielles car à priori comme nous sommes contraint de choisir un pôle initial appartenant à l'axe de symétrie et que notre centre de torsion n'appartient pas au profil, on retombera sur le même point.

Calculons maintenant le moment sectoriel d'inertie :

$$I_w = \int_s w^2 e \cdot ds$$

on trouve

$$I_w = 16662 \text{ m}^6$$

b. Détermination de la matrice K :

Nous avons :

$$K_{xx} = \sum I_{y_i} = 102,71 m^4$$

$$K_{yy} = \sum I_{x_i} = 230,41 m^4$$

$$K_{xy} = \sum I_{xy_i} = 3,075 m^4$$

$$K_{xz} = K_{zx} = \sum (-y_{0i} I_{xy_i} + x_{0i} I_{x_i}) = 453,97 m^5$$

$$K_{zz} = \sum (I_{x_i} + y_{0i}^2 I_{y_i} + x_{0i}^2 I_{x_i} - 2x_{0i} y_{0i} I_{xy_i}) = 18674,83 m^6$$

Ce qui nous donnera la matrice de rigidité flexionnelle K :

$$K = E \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix}$$

$$K = E \begin{bmatrix} 102,71 & 3,075 & 453,97 \\ 3,075 & 230,41 & 13,62 \\ 453,97 & 13,62 & 18703,89 \end{bmatrix}$$

	I_x	I_y	I_{xy}	X_{oi}	Y_{oi}
1	$7,62 \cdot 10^{-3}$	$7,62 \cdot 10^{-3}$	0	-11.925	-10.32
2	-	-	-	-6.725	-10.32
3	-	-	-	-1.925	-10.32
4	-	-	-	1.925	-10.32
5	-	-	-	6.725	-10.32
6	-	-	-	11.925	-10.32
7	-	-	-	-11.925	-5.32
8	-	-	-	-6.725	-5.32
9	-	-	-	6.725	-5.32
10	-	-	-	11.925	-5.32
11	-	-	-	-11.925	-1.82
12	-	-	-	-6.725	-1.82
13	-	-	-	6.725	-1.82
14	-	-	-	11.925	-1.82
15	-	-	-	-11.925	2.78
16	-	-	-	-6.725	2.78
17	-	-	-	6.725	2.78
18	-	-	-	11.925	2.78
19	-	-	-	-11.925	6.28
20	-	-	-	-6.725	6.28
21	-	-	-	6.725	6.28
22	-	-	-	11.925	6.28
23	-	-	-	-11.925	11.28
24	-	-	-	-6.725	11.28
25	-	-	-	-1.925	11.28
26	-	-	-	1.925	11.28
27	-	-	-	6.725	11.28
28	-	-	-	11.925	11.28
29	230,2	102,5	3,075	0	-4,43

C. Détermination de la matrice S :

a. Coefficient de souplesse :

$\frac{1}{f_i}$: coefficient de souplesse; i: liaison; x_i : point de moment nul.

i	$1/f_i$	x_i (m)	i	$1/f_i$	x_i (m)	i	$1/f_i$	x_i (m)
1	0.0764	2.60	21	0.0764	2.60	41	0.235	1.75
2	0.0971	2.40	22	0.0971	2.40	42	0.0805	2.50
3	0.0971	2.40	23	0.0971	2.40	43	0.0834	2.50
4	0.0764	2.60	24	0.0764	2.60	44	0.243	1.75
5	0.067	2.42	25	0.0834	2.50	45	0.243	1.75
6	0.673	5.99	26	0.243	1.75	46	0.0834	2.50
7	0.673	5.99	27	0.243	1.75	a	0.019E	1.915
8	0.067	2.42	28	0.0834	2.50	b	0.022E	1.89
9	0.067	2.42	29	0.0805	2.50	c	0.022E	1.89
10	0.673	5.99	30	0.235	1.75	d	0.022E	1.915
11	0.673	5.99	31	0.099	2.30	e	0.026E	4
12	0.067	2.42	32	0.235	1.75	f	0.026E	4
13	0.067	2.42	33	0.0805	2.50	g	0.026E	1.125
14	0.673	5.99	34	0.222	9.202	h	0.026E	2.5
15	0.673	5.99	35	0.222	9.202	i	0.0165E	2.5
16	0.067	2.42	36	0.222	9.202	j	0.0165E	1.125
17	0.067	2.42	37	0.222	9.202			
18	0.673	5.99	38	0.0805	2.50			
19	0.673	5.99	39	0.235	1.75			
20	0.067	2.42	40	0.099	2.30			

N.B. : Pour les coefficients de souplesse des liaisons de 1 jusqu'à 46, ils doivent être multipliés par "10³ E" où E est le module de Young.

Pour la méthode de calcul de ces coefficients, voir l'annexe A.

b. Cas de liaisons planes

Direction (x - x)

Liaison 1.2 (1) :

$$S_{bx_1} = (\overline{5,2}^2 \times 0,0764 + \overline{4,8}^2 \times 0,0971) \cdot 10^{-3} E$$

$$S_{bx_1} = 4,303 \cdot 10^{-3} E$$

Liaison 3.4 (2) :

$$S_{bx_2} = (\overline{4,8}^2 \times 0,0971 + \overline{5,2}^2 \times 0,0764) \cdot 10^{-3} E$$

$$S_{bx_2} = 4,303 \cdot 10^{-3} E$$

Liaison 21.22 (3) :

$$S_{bx_3} = S_{bx_2} = S_{bx_1} = 4,303 \cdot 10^{-3} E$$

Liaison 23.24 (4) :

$$S_{bx_4} = S_{bx_3} = S_{bx_2} = S_{bx_1} = 4,303 \cdot 10^{-3} E$$

Liaison 5 (5) :

$$S_{bx_5} = \overline{5,2}^2 \times 0,067 \cdot 10^{-3} E = 1,812 \cdot 10^{-3} E$$

Liaison 9 (6) :

$$S_{bx_6} = \overline{5,2}^2 \times 0,067 \cdot 10^{-3} E = 1,812 \cdot 10^{-3} E$$

Liaison 13 (7) :

$$S_{bx_7} = \overline{5,2}^2 \times 0,067 \cdot 10^{-3} E = 1,812 \cdot 10^{-3} E$$

Liaison 8 (8) :

$$S_{bx_8} = \overline{5,2}^2 \times 0,067 \cdot 10^{-3} E = 1,812 \cdot 10^{-3} E$$

Liaison 12 (9) :

$$S_{bx_9} = \overline{5,2}^2 \times 0,067 \cdot 10^{-3} E = 1,812 \cdot 10^{-3} E$$

Liaison 16 (10) :

$$S_{bx_{10}} = \overline{5,2}^2 \times 0,067 \cdot 10^{-3} E = 1,812 \cdot 10^{-3} E$$

Liaison 17 (11) :

$$S_{bx_{11}} = \overline{5,2}^2 \times 0,067 \cdot 10^{-3} E = 1,812 \cdot 10^{-3} E$$

Liaison 20 (12) :

$$S_{bx_{12}} = \overline{5,2}^2 \times 0,067 \cdot 10^{-3} E = 1,812 \cdot 10^{-3} E$$

Direction (v - v)

Liaison 25, 26 (13)

$$S_{by_1} = (5^2 \times 0,0834 + \overline{3,5}^2 \times 0,243) \cdot 10^{-3} E$$

$$S_{by_1} = 5,062 \cdot 10^{-3} E$$

Liaison 27.28 (14) :

$$S_{by_2} = (\overline{3,5}^2 \times 0,243 + 5^2 \times 0,0834) \cdot 10^{-3} E$$

$$S_{by_2} = 5,062 \cdot 10^{-3} E$$

Liaison 43.44 (15) :

$$S_{by_4} = S_{by_2} = S_{by_1} = 5,062 \cdot 10^{-3} E$$

Liaison 46.45 (16) :

$$S_{by_3} = S_{by_4} = S_{by_2} = S_{by_1} = 5,062 \cdot 10^{-3} E$$

Liaison 29.30.31.32.33 (17) :

$$S_{by_6} = (5^2 \times 0,0805 + \overline{3,5}^2 \times 0,235 + \overline{4,6}^2 \times 0,099 + 5^2 \times 0,0805 + \overline{3,5}^2 \times 0,235) \cdot 10^{-3} E$$

$$S_{by_6} = 11,877 \cdot 10^{-3} E$$

Liaison 38.39.40.41.42 (18) :

$$S_{by_7} = (5^2 \times 0,0805 + \overline{3,5}^2 \times 0,235 + \overline{4,6}^2 \times 0,099 + 5^2 \times 0,0805 + \overline{3,5}^2 \times 0,235) \cdot 10^{-3} E$$

$$S_{by_7} = 11,877 \cdot 10^{-3} E$$

$$1. \quad 4,303 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10,32 \\ 0 & 0 & 0 \\ -10,32 & 0 & \overline{10,32^2} \end{bmatrix}$$

$$7. \quad 1,812 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2,78 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2,78 & 0 & \overline{2,78^2} \end{bmatrix}$$

$$2. \quad 4,303 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10,32 \\ 0 & 0 & 0 \\ -10,32 & 0 & \overline{10,32^2} \end{bmatrix}$$

$$8. \quad 1,812 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5,32 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5,32 & 0 & \overline{5,32^2} \end{bmatrix}$$

$$3. \quad 4,303 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11,28 \\ 0 & 0 & 0 \\ -11,28 & 0 & \overline{11,28^2} \end{bmatrix}$$

$$9. \quad 1,812 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1,82 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1,82 & 0 & \overline{1,82^2} \end{bmatrix}$$

$$4. \quad 4,303 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11,28 \\ 0 & 0 & 0 \\ -11,28 & 0 & \overline{11,28^2} \end{bmatrix}$$

$$10. \quad 1,812 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2,78 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2,78 & 0 & \overline{2,78^2} \end{bmatrix}$$

$$5. \quad 1,812 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5,32 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5,32 & 0 & \overline{5,32^2} \end{bmatrix}$$

$$11. \quad 1,812 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6,28 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6,28 & 0 & \overline{6,28^2} \end{bmatrix}$$

$$6. \quad 1,812 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1,82 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1,82 & 0 & \overline{1,82^2} \end{bmatrix}$$

$$12. \quad 1,812 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6,28 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6,28 & 0 & \overline{6,28^2} \end{bmatrix}$$

$$13. \quad 5,062 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 11,925 \\ 0 & 11,925 & \overline{11,925^2} \end{bmatrix}$$

$$14. \quad 5,062 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 11,925 \\ 0 & 11,925 & \frac{11,925^2}{11,925^2} \end{bmatrix}$$

$$15. \quad 5,062 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 11,925 \\ 0 & 11,925 & \frac{11,925^2}{11,925^2} \end{bmatrix}$$

$$16. \quad 5,062 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 11,925 \\ 0 & 11,925 & \frac{11,925^2}{11,925^2} \end{bmatrix}$$

$$17. \quad 11,877 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6,725 \\ 0 & 6,725 & \frac{6,725^2}{6,725^2} \end{bmatrix}$$

$$18. \quad 11,877 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6,725 \\ 0 & 6,725 & \frac{6,725^2}{6,725^2} \end{bmatrix}$$

Donc la matrice de rigidité distorsionnelle pour le cas de liaison plane :

$$S_{pl} = 10^{-3} E \begin{bmatrix} 31,708 & 0 & -246,700 \\ 0 & 44,002 & 401,203 \\ -246,700 & 401,203 & 6250,747 \end{bmatrix}$$

c. Liaisons internes :

Nous avons un cas de torsion flexion avec un axe de symétrie, les liaisons a, b, c, d, empêchent à priori le découpage de la flexion suivant l'axe des y : (fig. 5-18).

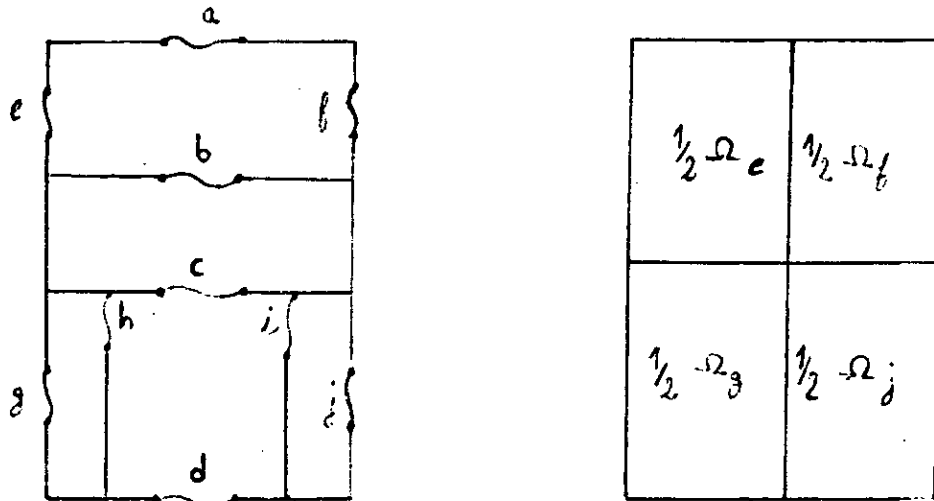


Fig:518

$$\Omega_e = \Omega_f = \Omega_g = \Omega_j = \frac{1}{2} = 39,79$$

$$\Omega_h = \Omega_i = 8,05$$

Nous aurons alors :

$$GI_{sl} = \frac{1}{3} \times 0,3^3 \times ((11,6 - 2 \times 0,9) \times 2 + 2 \times (5 - 1,2) + 2 \times (2 \times 6,86 - 1,1 - 1,0))$$

$$= G \times 0,454 \text{ m}^4$$

$$GI_{0t} = GI_{sl} + \frac{\Omega_e}{f_e} + \frac{\Omega_f}{f_f} + \frac{\Omega_g}{f_g} + \frac{\Omega_h}{f_h} + \frac{\Omega_i}{f_i} + \frac{\Omega_j}{f_j}$$

$$GI_{0t} = 0,454 \times \frac{E}{2,3} + \left(\frac{39,79^2}{37,6} + \frac{39,79^2}{37,6} + \frac{39,79^2}{37,6} + \frac{39,79^2}{37,6} + \frac{8,05^2}{60,5} + \frac{8,05^2}{60,5} \right) \times E = 170,78 E$$

Donc la matrice de rigidité distorsionnelle pour le cas de liaison interne sera :

$$S_0 = E \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 170,78 \end{bmatrix}$$

d. Liaisons spatiales :

Liaisons 6, 7 10, 11, 14, 15, 18, 19, 39, 36, 35, 37.

Liaison 6 : (8 → 29)

Exemple : $\delta_{x6} = X_{G29} - X_{G8} = -X_{G8}$

$$\delta_{y6} = Y_{G29} - Y_{G8} = -Y_{G8}$$

$$\frac{1}{2} \delta_{w6} = Aire (GG_i K_i M_{0i} M_j M_{0j} K_j G_j G)$$

Tableau récapitulatif :

Liaison	δ_{xr}	δ_{yr}	δ_{wr}
$6 \begin{pmatrix} 8 \\ 29 \end{pmatrix}$	+6,725	+5,32	- 35,77
$7 \begin{pmatrix} 29 \\ 9 \end{pmatrix}$	+6,725	-5,32	35,77
$10 \begin{pmatrix} 12 \\ 29 \end{pmatrix}$	+6,725	+1,82	-18,12
$11 \begin{pmatrix} 29 \\ 13 \end{pmatrix}$	+6,725	-1,82	18,12
$14 \begin{pmatrix} 16 \\ 29 \end{pmatrix}$	+6,725	-2,78	-18,34
$15 \begin{pmatrix} 29 \\ 17 \end{pmatrix}$	+6,725	+2,78	18,34
$18 \begin{pmatrix} 20 \\ 29 \end{pmatrix}$	+6,725	6,28	-21,64
$19 \begin{pmatrix} 29 \\ 21 \end{pmatrix}$	+6,725	+6,28	21,64
$34 \begin{pmatrix} 3 \\ 29 \end{pmatrix}$	+1,925	+10,32	-0,41
$35 \begin{pmatrix} 25 \\ 29 \end{pmatrix}$	+1,925	11,28	-65,41
$36 \begin{pmatrix} 29 \\ 4 \end{pmatrix}$	+1,925	-10,32	0,41
$37 \begin{pmatrix} 29 \\ 26 \end{pmatrix}$	+1,925	+11,28	+65,44

Liaison (6) (8-29)

$$0,673 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 45.23 & 35.81 & -240.55 \\ 35.81 & 28.30 & -190.48 \\ -240.55 & -190.48 & 1279.5 \end{bmatrix}$$

Liaison (7) (9-28)

$$0,673 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 45.23 & -35.81 & 240.55 \\ -35.81 & 28.30 & -190.48 \\ 240.55 & -190.78 & 1279.5 \end{bmatrix}$$

Liaison (10) (12-29)

$$0,673 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 45.23 & 12.24 & -121.86 \\ 12.24 & 3.31 & -32.99 \\ -121.86 & -32.99 & 328.33 \end{bmatrix}$$

Liaison (11) (13-29)

$$0,673 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 45.23 & -12.24 & 121.86 \\ -12.24 & 3.31 & -32.99 \\ 121.86 & -32.99 & 328.33 \end{bmatrix}$$

Liaison (14) (16-29)

$$0,673 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 45.23 & -18.70 & -123.34 \\ -18.70 & 7.73 & 50.99 \\ -123.34 & 50.99 & 336.35 \end{bmatrix}$$

Liaison (15) (29-17)

$$0,673 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 45.23 & 18.70 & 123.34 \\ 18.70 & 7.730 & 50.99 \\ 123.34 & 50.98 & 336.35 \end{bmatrix}$$

Liaison (18) (20-29)

$$0,673 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 45.23 & -42.23 & -145.56 \\ -42.23 & 39.44 & 135.90 \\ -145.56 & 135.90 & 468.29 \end{bmatrix}$$

Liaison (19) (29-21)

$$0,673 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 45.23 & 42.23 & 145.56 \\ 42.23 & 39.44 & 135.90 \\ 145.56 & 135.90 & 468.29 \end{bmatrix}$$

Liaison (34) (3-29)

$$0,222 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 3.70 & 19.87 & -0.79 \\ 19.87 & 106.50 & -4.23 \\ -0.79 & -4.23 & 0.17 \end{bmatrix}$$

Liaison (35) (25-29)

$$0,222 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 3.70 & 21.71 & -125.97 \\ -21.71 & 127.24 & 738.16 \\ -125.97 & 738.16 & 4282.4 \end{bmatrix}$$

Liaison (36) (29-4)

$$0,222 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 3.70 & -19.87 & 0.79 \\ -19.87 & 106.5 & -4.23 \\ 0.79 & -4.23 & 0.17 \end{bmatrix}$$

Liaison (37) (29-26)

$$0,222 \cdot 10^{-3} E \begin{bmatrix} 3.70 & 21.71 & 125.97 \\ 21.71 & 127.24 & 738.16 \\ 125.97 & 738.16 & 4282.4 \end{bmatrix}$$

Nous aurons alors :

$$S_{0int} = 10^{-3} E \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 170780 \end{bmatrix} \quad \text{Liaisons internes}$$

$$S_{pl} = 10^{-3} E \begin{bmatrix} 31.708 & 0 & -246.700 \\ 0 & 44.002 & 401.203 \\ -246.700 & 401.203 & 6250.747 \end{bmatrix} \quad \text{Liaisons planes}$$

$$S_{sp} = 10^{-3} E \begin{bmatrix} 246.80 & 0 & 0 \\ 0 & 209.89 & 276.63 \\ 0 & 276.63 & 5148.65 \end{bmatrix} \quad \text{Liaisons spatiales}$$

Ce qui nous donnera la matrice (S)

$$S = 10^{-3} E \begin{bmatrix} 278.51 & 0 & -246.700 \\ 0 & 253.892 & 677.83 \\ 246.700 & 677.83 & 182179.40 \end{bmatrix}$$

5.7.2. DETERMINATION DES PIVOTS :

La résolution de l'équation caractéristique :

$$\det(S \cdot \lambda^2 K) = 0$$

On obtient les trois valeurs propres $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$.

$$\det(S \cdot \lambda^2 K) = -394992450.5 \lambda^6 + 5996838,858 \lambda^4 - 17753.747 \lambda^2 + 12.738 = 0$$

$$\lambda_1^2 = 1.08996 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \lambda_1 = 0.033015$$

$$\lambda_2^2 = 1.1525 \cdot 10^{-2} \Rightarrow \lambda_2 = 0.10735$$

$$\lambda_3^2 = 2.56722 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \lambda_3 = 0.050668$$

De même par la résolution du système homogène :

$$(S \cdot \lambda^2 K) \Psi = 0 \quad \text{avec} \quad n = 1, 2, 3$$

On obtient les trois vecteurs propres :

$$\Psi_n = \begin{Bmatrix} e_{y_n} \\ -e_{x_n} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Psi_2 = \begin{Bmatrix} -6.064 \\ 0.306 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Psi_1 = \begin{Bmatrix} -0.402 \\ -241.229 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Psi_3 = \begin{Bmatrix} 95.11 \\ -0.320 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Qui déterminent la position exacte des trois pivots $\Omega_n(e_{x_n}, e_{y_n})$

5.7.3. DETERMINATION DES RIGIDITES

a. Rigidités sectorielles (ou de gauchissement) : EJ_{w_n}

$$EJ_{w_n} = \Psi_n' K \Psi_n$$

$$EJ_{w_1} = \Psi_1' K \Psi_1 = 135568.31 E$$

$$EJ_{w_2} = \Psi_2' K \Psi_2 = 16999.652 E$$

$$EJ_{w_3} = \Psi_3' K \Psi_3 = 1033991.386 E$$

b. Rigidités à la torsion : GJ_{s_n}

$$GJ_{s_n} = \Psi_n' S \Psi_n = \lambda_n^2 EJ_{w_n}$$

$$GJ_{s_1} = \lambda_1^2 EJ_{w_1} = 1477.639 E$$

$$GJ_{s_2} = \lambda_2^2 EJ_{w_2} = 195.921 E$$

$$GJ_{s_3} = \lambda_3^2 EJ_{w_3} = 2654.483 E$$

5.7.4 FORCES APPLIQUEES SUR LA BATIMENT :

Les charges sismiques ne s'appliquent pas simultanément, on utilise la force prépondérante $F_{k\ long}$

Pour notre étude on suppose la charge extérieure de répartition triangulaire.

On détermine une charge équivalente de répartition triangulaire qui donne le même moment extérieure :

$$\frac{1}{3}qH^2 = 16035.3 \Rightarrow q = 37.119 \text{ KN/m}$$

Moment de torsion des charges extérieures autour des axes Ω_n

$$m_{z,n} = \varphi p(z) = m_z(z) + \xi_n p_x(z) - \zeta_n p_y(z)$$

Valeurs en tête de la structure :

$$m_1(H) = 37.119 \times (-0.402) = -14.922 \text{ KNm/m}$$

$$m_2(H) = 37.119 \times (-6.064) = -225.090 \text{ KNm/m}$$

$$m_3(H) = 37.119 \times (95.11) = 3530.388 \text{ KNm/m}$$

Il en résulte que les moments pivotaires à la base de la structure ont pour valeurs :

$$M_{z_1}(0) = \frac{1}{2}m_1H = -268,596 \text{ KNm}$$

$$M_{z_2}(0) = \frac{1}{2}m_2H = -4051,62 \text{ KNm}$$

$$M_{z_3}(0) = \frac{1}{2}m_3H = 63546,984 \text{ KNm}$$

$$B_{z_1}(0) = \frac{1}{3}m_1H^2 = -6446,304 \text{ KNm}^2$$

$$B_{z_2}(0) = \frac{1}{3}m_2H^2 = -97238,88 \text{ KNm}^2$$

$$B_{z_3}(0) = \frac{1}{3}m_3H^2 = 1525127,616 \text{ KNm}^2$$

5.7.5. CALCUL DES DEPLACEMENTS :

$$U_{\xi_i}^* = \eta_{i,1}^* \theta_1(\xi) + \eta_{i,2}^* \theta_2(\xi) + \eta_{i,3}^* \theta_3(\xi)$$

$$U_{\eta_i}^* = \eta_{i,1}^* \theta_1(\xi) + \eta_{i,2}^* \theta_2(\xi) + \eta_{i,3}^* \theta_3(\xi)$$

$$\theta_{\zeta_i}^* = \theta_1(\xi) + \theta_2(\xi) + \theta_3(\xi)$$

avec $\xi_{i,n}^*$ et $\eta_{i,n}^*$ ($n=1,2,3$) Coordonnées des pivots Ω_n par rapport aux axes principaux élastiques $\xi_{i,n}^*$ et $\eta_{i,n}^*$ du poteau.

$$\theta_1(\xi) = \frac{B_{z_1}(0)}{GJ_{s_1}} \mu_1(\xi)$$

$$\theta_2(\xi) = \frac{B_{z_2}(0)}{GJ_{s_2}} \mu_2(\xi)$$

$$\theta_3(\xi) = \frac{B_{z_3}(0)}{GJ_{s_3}} \mu_3(\xi)$$

$$\begin{cases} \xi_{i,1}^* = 241,228m \\ \eta_{i,1}^* = -4,028m \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_{i,2}^* = -0,306m \\ \eta_{i,2}^* = -1,634m \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_{i,3}^* = 0,32m \\ \eta_{i,3}^* = 99,54m \end{cases}$$

$$U_{\xi_i}^* = [0,00059\mu_1 + 0,027\mu_2 + 1,906\mu_3] \cdot 10^{-3}$$

$$U_{\eta_i}^* = [0,0351\mu_1 - 0,0051\mu_2 - 0,0061\mu_3] \cdot 10^{-3}$$

$$\theta_{\zeta_i}^* = [-0,00014\mu_1 - 0,01654\mu_2 + 0,01915\mu_3] \cdot 10^{-3}$$

(voir fig. 5-19, 5-20)

Niv eau	z (m)	ξ z/h	μ_0	$\lambda_1 H = 1,188$		$\lambda_2 H = 3,864$		$\lambda_3 H = 1,824$	
				τ_1	μ_1	τ_2	μ_2	τ_3	μ_3
36	12	1	0	0.212	0	0.314	0	0.347	0
33	11	0.92	$1.12 \cdot 10^{-2}$	0.2128	$2.531 \cdot 10^{-2}$	0.317	$3.488 \cdot 10^{-2}$	0.364	$4.24 \cdot 10^{-2}$
30	10	0.83	$4.34 \cdot 10^{-2}$	0.2136	$5.444 \cdot 10^{-2}$	0.324	$8.121 \cdot 10^{-2}$	0.402	$9.43 \cdot 10^{-2}$
27	9	0.75	$8.9 \cdot 10^{-2}$	0.2145	$8.048 \cdot 10^{-2}$	0.330	0.120	0.445	0.145
24	8	0.67	0.148	0.2128	0.106	0.3350	0.160	0.490	0.201
21	7	0.58	0.229	0.2078	0.134	0.334	0.206	0.533	0.270
18	6	0.50	0.313	0.199	0.159	0.564	0.336	0.561	0.336
15	5	0.42	0.408	0.1838	0.181	0.309	0.283	0.567	0.404
12	4	0.33	0.524	0.1611	0.205	0.277	0.322	0.544	0.479
9	3	0.25	0.634	0.1335	0.223	0.234	0.353	0.489	0.541
6	2	0.17	0.748	$9.9018 \cdot 10^{-2}$	0.237	0.177	0.378	0.394	0.595
3	1	0.08	0.992	$2.7248 \cdot 10^{-2}$	0.248	$9.28 \cdot 10^{-2}$	0.397	0.221	0.638
0	RDC	0	1	0	0.252	0	0.405	0	0.656

ξ	U_{ξ_i} (mm)	U_{η_i} (mm)	θ_{ξ_i} (mm)
1	1.2614	$2.7781 \cdot 10^{-3}$	$5.8284 \cdot 10^{-3}$
0.92	1.2269	$2.7883 \cdot 10^{-2}$	$5.6166 \cdot 10^{-3}$
0.83	1.1444	$2.7614 \cdot 10^{-3}$	$5.1089 \cdot 10^{-3}$
0.75	1.0408	$2.7269 \cdot 10^{-3}$	$4.4903 \cdot 10^{-3}$
0.67	0.9218	$2.6314 \cdot 10^{-3}$	$3.8183 \cdot 10^{-3}$
0.58	0.7778	$2.4454 \cdot 10^{-3}$	$3.0304 \cdot 10^{-3}$
0.50	0.6496	$1.8177 \cdot 10^{-3}$	$8.547 \cdot 10^{-3}$
0.42	0.5203	$2.0058 \cdot 10^{-3}$	$1.7445 \cdot 10^{-3}$
0.33	0.3875	$1.6785 \cdot 10^{-3}$	$1.1879 \cdot 10^{-4}$
0.25	0.2796	$1.32283 \cdot 10^{-3}$	$7.8068 \cdot 10^{-4}$
0.17	0.1820	$9.2144 \cdot 10^{-4}$	$4.5501 \cdot 10^{-4}$
0.08	$8.1771 \cdot 10^{-2}$	$4.5184 \cdot 10^{-4}$	$2.3150 \cdot 10^{-4}$
0	0	0	0

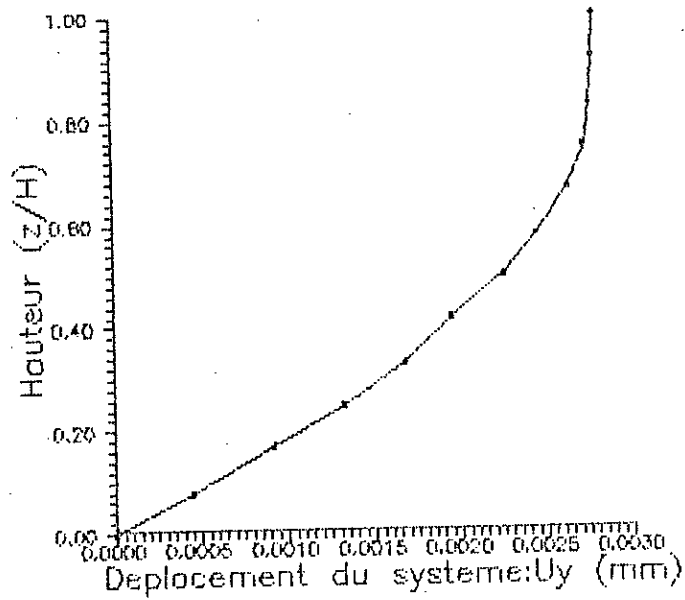
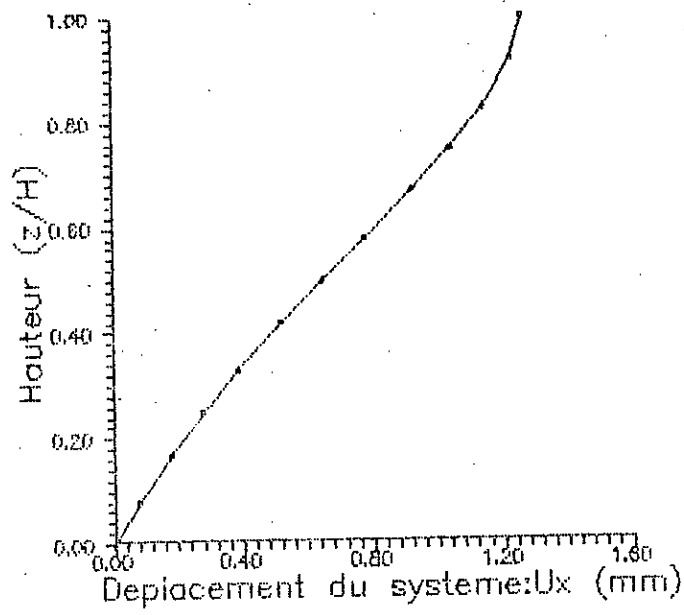


Fig:5.19

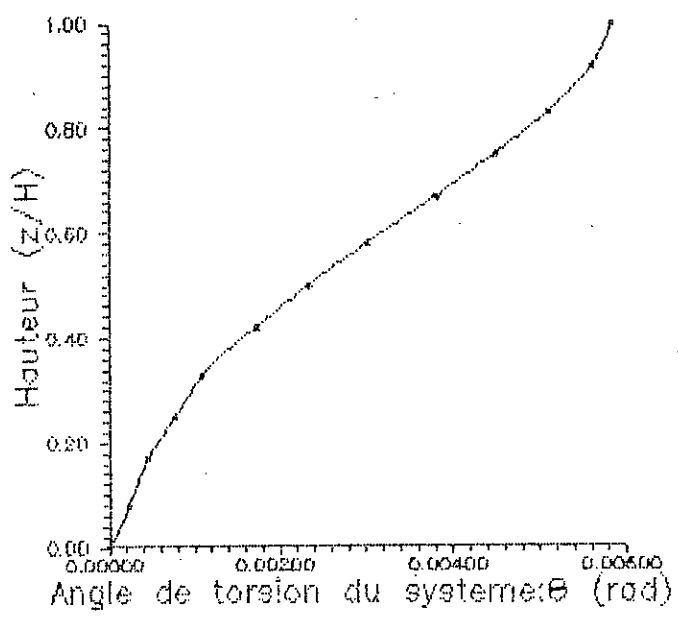


Fig: 5.20

5.7.6. CALCUL DES EFFORTS DE CISAILLEMENT

On a pour une seule liaison r :

$$T_r(\xi) = \frac{1}{b_r} \sum_{n=1}^3 \left[\frac{M_{z,n}(0)}{GJ_{Sn}} \cdot \delta_{w,r,n} \cdot \tau_n(\xi) \right]$$

$$N_r(\xi) = \frac{1}{b_r} \sum_{n=1}^3 \left[\frac{B_{z,n}(0)}{GJ_{Sn}} \cdot \delta_{w,r,n} \cdot \mu_n(\xi) \right]$$

$\xi = 0$					
r	Tr (kn)	Nr (kn)	r	Tr (kn)	Nr (kn)
6	0	174.5798	37	0	127.6787
7	0	173.185	a	0	2610.2781
10	0	200.3522	b	0	3089.2011
11	0	199.280	c	0	3110.4449
14	0	292.1729	d	0	2738.3402
15	0	293.7863	e	0	-3337.9139
18	0	333.2924	f	0	3408.1888
19	0	334.4747	g	0	-4463.7801
34	0	31.5359	h	0	-26.5470
35	0	-127.3917	i	0	44.3382
36	0	-32.9728	0	2877.4565	2798,3327

$\xi = 0,08$					
r	Tr (kn)	Nr (kn)	r	Tr (kn)	Nr (kn)
6	2,4396	169,8039	37	1,7890	124,1777
7	2,4358	168,4293	a	35,7117	2540,1665
10	2,8033	194,8686	b	42,5858	3005,6803
11	2,8029	194,4499	c	43,2208	3025,8519
14	4,0963	284,1667	d	38,5280	2663,1371
15	4,1065	285,7523	e	48,0654	-3244,4237
18	4,6748	324,1583	f	48,3821	3313,5831
19	4,6748	325,3259	g	-63,3902	-4340,2175
34	0,4470	30,6656	h	-0,3641	-25,9374
35	-1,7929	-123,8914	i	0,3550	43,5150
36	-0,4554	-32,0782	j	40,4297	2798,3327

$\xi = 0,17$					
r	Tr (kn)	Nr (kn)	r	Tr (kn)	Nr (kn)
6	4,3577	158,3896	37	3,1941	115,8104
7	4,3357	157,0743	a	64,0091	2372,6302
10	5,0022	181,3661	b	76,2351	2806,0897
11	4,9958	181,3661	c	77,1711	2823,7955
14	7,3014	265,0442	d	68,5568	2483,5963
15	7,3289	266,5575	e	-85,1604	-3021,2403
18	8,3293	302,3447	f	86,3112	3087,3321
19	8,3466	303,4643	g	-112,6084	-4045,2236
34	0,7928	28,5896	h	-0,5237	-24,6204
35	-3,1913	-115,5333	i	0,7825	41,4792
36	-0,8170	-29,9382	j	72,1945	2609,1750

$\xi = 0,25$					
r	Tr (kn)	Nr (kn)	r	Tr (kn)	Nr (kn)
6	5.4107	144.0533	37	3.9644	105.3041
7	5.3809	142.8124	a	79.7250	2161.7399
10	6.2108	165.3104	b	94.8466	2555.0450
11	6.2020	164.9310	c	95.9230	2569.7740
14	9.0642	241.0243	d	85.0829	2258.0859
15	9.1010	242.4444	e	-105.3463	-2741.5330
18	10.3402	274.9432	f	106.8978	2803.7206
19	10.3641	276.0038	g	-139.5700	-3675.0355
34	0.9832	25.9826	h	-0.6829	-22.8462
35	-3.9601	-105.0365	i	1.0403	38.8259
36	-1.0157	-27.2489	j	89.5593	2371.7661

$\xi = 0,33$					
r	Tr (kn)	Nr (kn)	r	Tr (kn)	Nr (kn)
6	6.0220	127.5834	37	4.4105	93.2400
7	5.9858	126.4396	a	89.0213	1918.5061
10	6.9122	146.4057	b	105.7829	2265.9180
11	6.9015	146.0550	c	106.8803	2277.5631
14	10.0863	213.4375	d	94.6471	1999.1987
15	10.1304	214.7394	e	-116.7880	-2421.7578
18	11.5062	243.4732	f	118.6609	2478.9259
19	11.5357	244.4548	g	-155.0445	-3250.7699
34	1.0929	22.9925	h	-0.7973	-20.7019
35	-4.4048	-92.9877	i	1.2384	35.5015
36	-1.1320	-24.1542	j	99.5837	2099.3297

$\xi = 0,42$					
r	Tr (kn)	Nr (kn)	r	Tr (kn)	Nr (kn)
6	6.2800	107.6501	37	4.5973	78.6431
7	6.2383	106.6386	a	93.1872	1623.4893
10	7.2081	123.5293	b	110.5837	1915.5023
11	7.1956	123.2187	c	111.6041	1923.7185
14	10.5160	180.0628	d	98.6404	1686.1206
15	10.5658	181.2104	e	-121.2288	-2035.9669
18	11.9962	205.4026	f	123.3648	2086.4422
19	12.0307	206.2728	g	-161.3247	-2738.184
34	1.1381	19.3795	h	-0.8746	-181223
35	-4.5900	-78.4170	i	1.3906	31.2462
36	-1.1823	-20.4039	j	103.7369	1769.7803

$\xi = 0,50$					
r	Tr (kn)	Nr (kn)	r	Tr (kn)	Nr (kn)
6	6.2288	89.6805	37	4.5331	65.2627
7	6.1951	88.8988	a	96.7614	1393.4873
10	7.1666	103.0684	b	112.9892	1627.0466
11	7.1601	102.8612	c	113.0013	1624.3180
14	10.4592	150.2674	d	98.0497	1406.4802
15	10.5266	151.4002	e	-114.7761	-1644.1208
18	11.9460	171.5489	f	117.0887	1688.4609
19	11.9583	172.0812	g	-157.2504	-2254.6603
34	1.1278	16.1306	h	-2.0768	-26.3856
35	-4.4590	-65.2848	i	2.2226	34.0902
36	-1.1848	-17.1155	j	101.2636	1459.0287

$\xi = 0,58$					
r	Tr (kn)	Nr (kn)	r	Tr (kn)	Nr (kn)
6	5.9110	72.0122	37	4.3225	52.5646
7	5.8630	71.2590	a	88.4645	1093.0165
10	6.7836	82.6279	b	104.6599	1286.7007
11	6.7836	82.3953	c	105.3514	1289.7419
14	9.8921	120.4026	d	92.7046	1126.7086
15	9.9475	121.2473	e	-112.8859	-1350.7657
18	11.2843	137.3457	f	115.3007	1388.1341
19	11.3250	137.9992	g	-151.0554	-1824.5135
34	-1.0674	12.9304	h	-0.9122	-12.9957
35	-4.3126	-52.3884	i	1.5236	22.8655
36	-1.1168	-13.6854	j	97.3972	1181.6190

$\xi = 0,67$					
r	Tr (kn)	Nr (kn)	r	Tr (kn)	Nr (kn)
6	5.4388	53.6398	37	3.9742	39.1367
7	5.3894	53.0404	a	81.8811	816.9187
10	6.2412	61.5415	b	96.6683	960.5339
11	6.2261	61.3553	c	97.1344	961.7518
14	9.0984	89.6561	d	85.2145	961.7518
15	9.1548	90.3200	e	-103.0939	-1001.5087
18	10.3789	102.2698	f	105.5669	1031.0688
19	10.4213	102.7946	g	-138.4909	-1355.0688
34	0.9798	9.6154	h	-0.8990	-9.9263
35	-3.9633	-38.9898	i	1.5379	17.8631
36	-1.0301	-10.2097	j	89.4605	879.2905

$\xi = 0,75$					
r	Tr (kn)	Nr (kn)	r	Tr (kn)	Nr (kn)
6	4.9438	38.7155	37	3.6097	28.2358
7	4.8936	38.2587	a	74.8750	591.5246
10	5.6727	44.4156	b	88.2108	694.7314
11	5.6572	44.2731	c	88.4741	694.9106
14	8.2668	64.6936	d	77.3748	604.9051
15	8.3232	65.1956	e	-92.9877	-719.7252
18	9.4301	73.7942	f	95.4804	742.1685
19	9.4736	74.1966	g	-125.4168	-976.6145
34	0.8884	6.9297	h	-0.8679	-7.3594
35	-3.5980	-28.1206	i	1.5259	13.4500
36	-0.9388	-7.3786	j	81.1760	634.0416

$\xi = 0,83$					
r	Tr (kn)	Nr (kn)	r	Tr (kn)	Nr (kn)
6	4.4704	25.1899	37	3.2613	18.3632
7	4.4202	24.8809	a	68.1517	386.1772
10	5.1291	28.8983	b	80.1047	453.0179
11	5.1135	28.8020	c	80.1864	452.6996
14	7.4721	42.0858	d	69.8888	393.3935
15	7.5275	42.4230	e	-83.3699	-466.2587
18	8.5234	48.0066	f	85.8522	481.4403
19	8.5673	48.2887	g	-112.9497	-634.1602
34	0.8012	4.5034	h	-0.8412	-4.9826
35	-3.2491	-18.2854	i	1.5049	9.1010
36	-0.8512	-4.8077	j	73.2575	412.0986

$\xi = 0,92$					
r	Tr (kn)	Nr (kn)	r	Tr (kn)	Nr (kn)
6	4.0520	11.3272	37	2.9535	8.2615
7	4.0016	11.1801	a	62.1802	172.9974
10	4.6485	12.9895	b	72.9177	203.2092
11	4.6328	12.9425	c	72.8452	203.1506
14	6.7694	18.9128	d	63.2699	176.7423
15	6.8247	19.0666	e	-74.9043	-210.3026
18	7.7217	21.5694	f	77.3772	217.3608
19	7.7661	21.7035	g	-101.9473	-285.3653
34	0.7241	2.0227	h	-0.8092	-1.9721
35	-2.9408	-8.2180	i	1.4810	4.0126
36	-0.7737	-2.1614	j	66.2694	185.5840

$\xi = 1$					
r	Tr (kn)	Nr (kn)	r	Tr (kn)	Nr (kn)
6	3.8647	0	37	2.8157	0
7	3.8145	0	a	59.5099	0
10	4.4334	0	b	69.7029	0
11	4.177	0	c	69.5623	0
14	6.4551	0	d	60.3104	0
15	6.5101	0	e	-71.1170	0
18	7.3632	0	f	73.5807	0
19	7.4076	0	g	-97.0267	0
34	0.6897	0	h	-0.7972	0
35	-2.8029	0	i	1.4697	0
36	-0.7390	0	j	63.1408	0

Les forces de cisaillement étant calculés, l'effort tranchant des poutres réelles et l'effort normal des poteaux sont donnés par :

$$Q_r(Z_n) = hT_r(Z_n)$$

$$Q_r(H) = \frac{1}{2}hT_r(H)$$

$$N_r(Z_n) = \sum_r N_r(Z)$$

où la sommation est étendue à toutes les liaisons aboutissant sur le poteau considéré.

Pour le noyau, nous aurons, (voir fig. 5-21)

ξ	$N(KN)$
1	0
0.92	129.5964
0.83	288.3387
0.75	443.2892
0.67	614.1701
0.58	824.7104
0.50	1028.7996
0.42	1253.3648
0.33	1461.6792
0.25	1650.5241
0.17	1814.9364
0.08	1945.8286
0	2000.6214

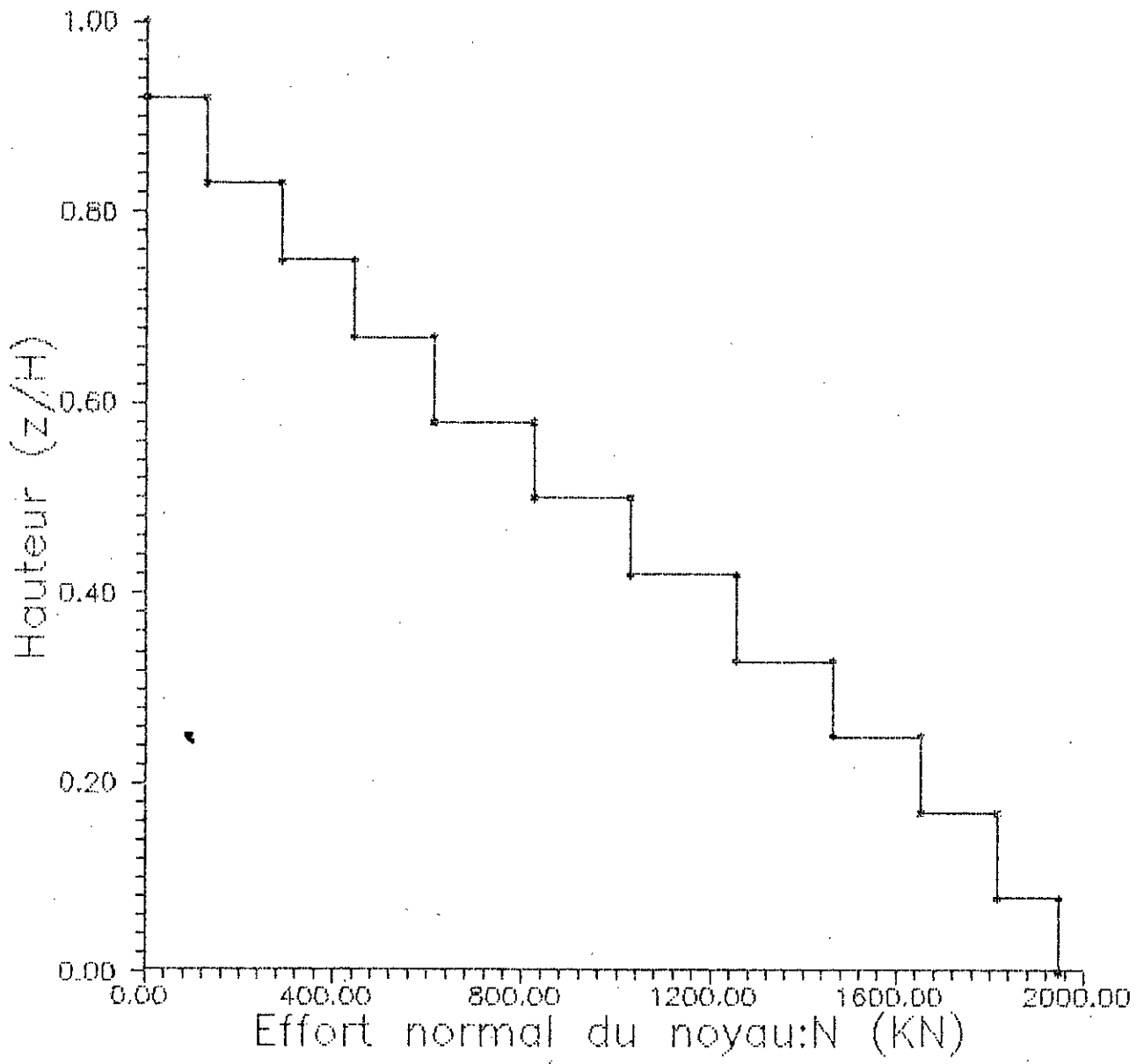


Fig: 5.21

5.7.7. MOMENTS DE FLEXION ET BIMOMENT :

$$M_{\eta_i}(\xi) = EI_{\eta_i} \sum_{n=1}^3 \left(\frac{B_{z,n}(0)}{EJ_{wn}} \eta_{i,n}^* [\mu_0(\xi) - \mu_n(\xi)] \right)$$

$$M_{\xi_i}(\xi) = EI_{\xi_i} \sum_{n=1}^3 \left(\frac{B_{z,n}(0)}{EJ_{wn}} \xi_{i,n}^* [\mu_0(\xi) - \mu_n(\xi)] \right)$$

$$B_{\eta_i}(\xi) = EI_{w_i} \sum_{n=1}^3 \left(\frac{B_{z,n}(0)}{EJ_{wn}} [\mu_0(\xi) - \mu_n(\xi)] \right)$$

Ces formules donnent les valeurs des moments et des bimoments du modèle continu. En réalité, les diagrammes de ces grandeurs présentent à chaque niveau d'étage les sauts :

$$\Delta M_{\eta_i}(\xi) = - \sum_r \xi_{ir} Q_r(\xi)$$

$$\Delta M_{\xi_i}(\xi) = + \sum_r \eta_{ir} Q_r(\xi)$$

$$\Delta B_{\eta_i}(\xi) = - \sum_r w_{ir} Q_r(\xi)$$

due à l'effort tranchant Q_r des traverses.

r	w	η	ξ	Q
6	-2.41	-5.32	-5.99	hT6
7	-2.41	-5.32	5.99	hT7
10	-18.95	-1.82	-5.99	hT10
11	13.91	-1.82	5.99	hT11
14	-57.55	2.78	-5.99	hT14
15	18.47	2.78	5.99	hT15
18	-83.46	6.28	-5.99	hT18
19	25.42	6.28	5.99	hT19
34	-6.038	-8.872	-5.99	hT34
35	-70.45	9.832	5.99	hT35
36	-6.038	-8.872	-5.99	hT36
37	58.37	9.832	5.99	hT37

N.B. : w, η, ξ coordonnées sectorielles et cartésienne d'un point quelconque sur la ligne moyenne du profil.

ξ	M_η	ΔM_η	M_ξ	ΔM_ξ	B_r	ΔB_r
1	0	-1.718	0	217.214	0	-18837.298
0.92	-492.250	-1.723	-11.576	227.648	1491.194	-19630.889
0.83	-802.249	-1.720	-21.717	250.957	2353.477	-21400.666
0.75	-872.435	-1.731	-25.072	277.327	1577.550	-23392.040
0.67	-809.014	-1.716	-25.693	304.878	-162.120	-25452.985
0.58	-594.782	-1.668	-23.353	331.118	-3207.214	-27368.439
0.50	-367.845	-3.066	-54.179	352.572	1614.593	-29902.420
0.42	180.429	-1.466	-8.758	351.444	-11833.009	-28622.560
0.33	871.407	-1.285	5.574	336.858	-18171.275	-27257.250
0.25	1813.729	-1.058	24.915	302.551	-25165.403	-24346.629
0.17	2658.071	-0.780	42.562	243.582	-31543.745	-19498.586
0.08	5899.002	-0.187	108.854	136.247	-48066.333	-10732.258
0	7050.501	0	75.134	0	-48543.341	0

5.7.8 MOMENT ET BIMOMENT CORRIGES

$$M_{\eta_i}(\xi_k, 0) = M_{\eta_i} \pm \frac{1}{2} \Delta M_{\eta_i}$$

$$M_{\xi_i}(\xi_k, 0) = M_{\xi_i} \pm \frac{1}{2} \Delta M_{\xi_i}$$

$$B_{\eta_i}(\xi_k, 0) = B_{\eta_i} \pm \frac{1}{2} \Delta B_{\eta_i}$$

ξ	$M_n(\xi, 0)$		$M_\xi(\xi, 0)$		$B_r(\xi, 0)$	
1	-0.859	0.859	-108.607	108.607	-9418.649	9418.649
0.92	-493.112	-493.388	102.248	-125.400	-8324.251	11306.6385
0.83	-803.109	-801.389	103.7615	-147.196	-8346.856	13053.81
0.75	-873.301	-871.570	113.592	-163.736	-10118.47	13273.57
0.67	-809.872	-808.156	126.746	-178.132	-12888.613	12564.373
0.58	-595.616	-593.948	142.206	-188.912	-16891.434	10477.006
0.50	-369.378	-366.312	122.107	-230.465	-13336.617	16565.803
0.42	179.696	181.162	166.964	-184.48	-26144.289	2478.271
0.33	870.7655	872.050	174.003	-162.855	-31799.9	-4542.65
0.25	1813.2	1814.258	176.191	-126.361	-37338.718	-12992.089
0.17	2657.681	2658.461	164.33	-79.229	-41293.038	-21794.452
0.08	5898.909	5899.096	176.978	40.731	-53462.462	-42700.204
0	7056.501	7056.501	175.134	175.134	-48543.34	-48543.341

(Voir fig. 5-22, 5-23, 5-24)

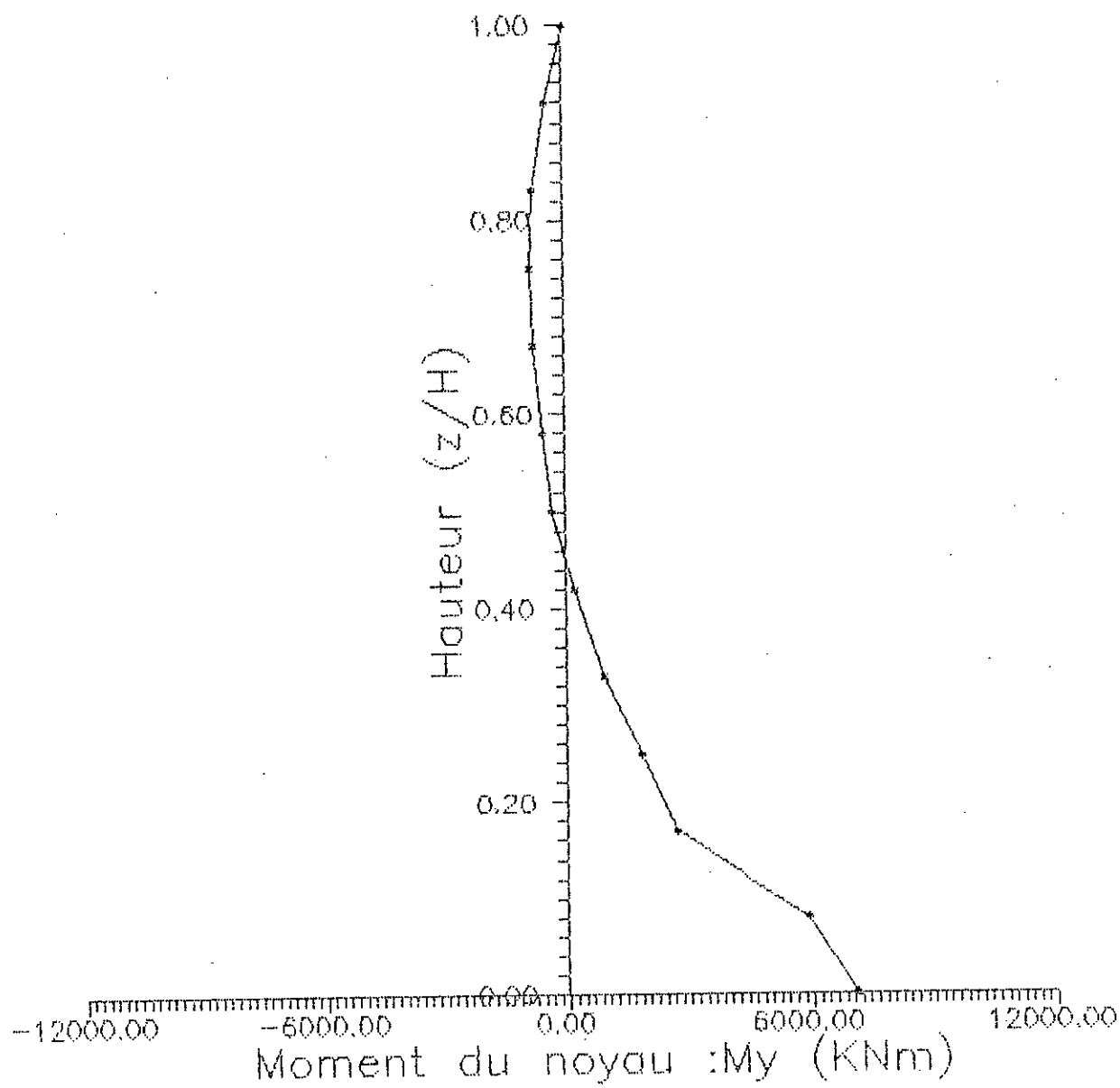


Fig: 5.22

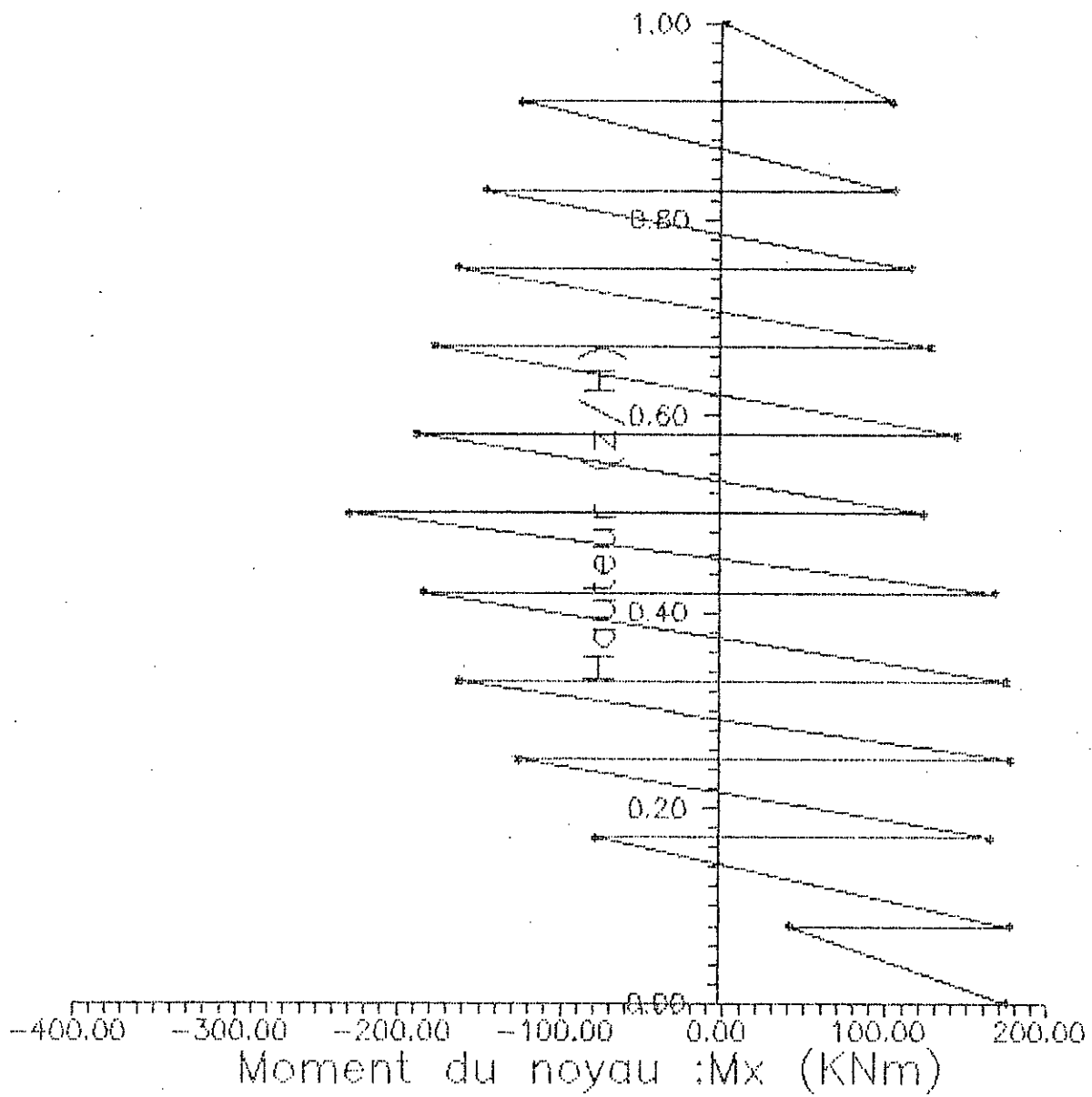


Fig: 5.23

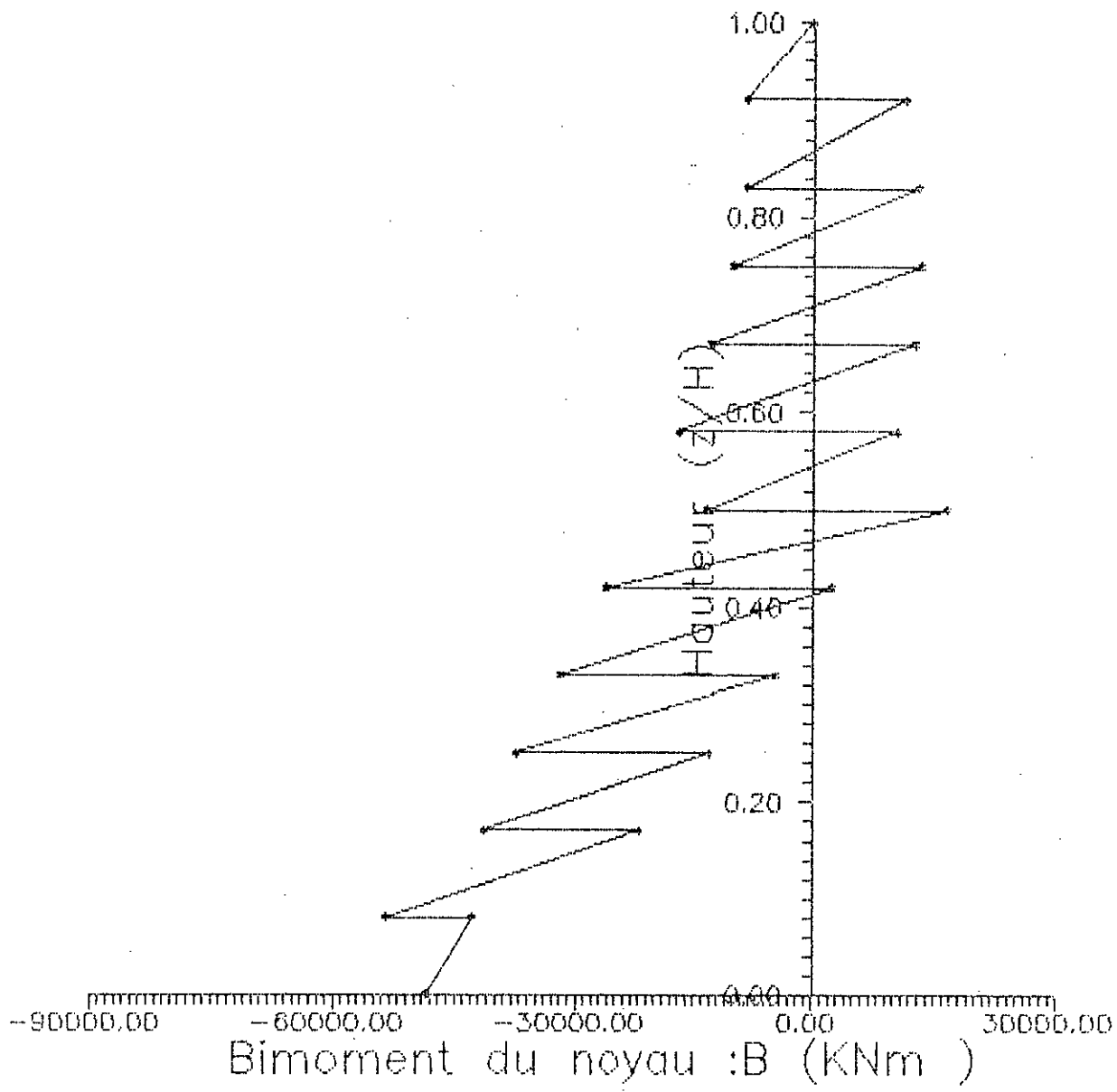


Fig:5.24

5.7.9 EFFORT TRANCHANT ET COUPLE DE TORSION FLECHIE :

$$Q_{\xi_i}(\xi_k) = -[M_{\eta_i}(\xi_{k+1} - o) - M_{\eta_i}(\xi_k + o)]/h$$

$$Q_{\eta_i}(\xi_k) = +[M_{\xi_i}(\xi_{k+1} - o) - M_{\xi_i}(\xi_k + o)]/h$$

$$C_{k_j}(\xi_k) = -[B_{k_j}(\xi_{k+1} - o) - B_{k_j}(\xi_k + o)]/h$$

ξ	Q_{ξ}	Q_{η}	C_k
1	-163.509	-70.285	6908.429
0.92	-102.759	-76.387	7126.020
0.83	-22.820	-86.929	7206.80
0.75	21.715	-96.827	7560.948
0.67	71.975	-106.779	7788.540
0.58	75.435	-103.673	11152.412
0.50	183.513	-132.476	5271.629
0.42	230.785	-119.494	7200.546
0.33	314.498	-113.015	6269.270
0.25	281.754	-96.905	5181.422
0.17	1080.472	-85.402	-469.055
0.08	385.864	-44.801	1629.707
0	-	-	-

(Voir fig. 5-25, 5-26, 2-27)

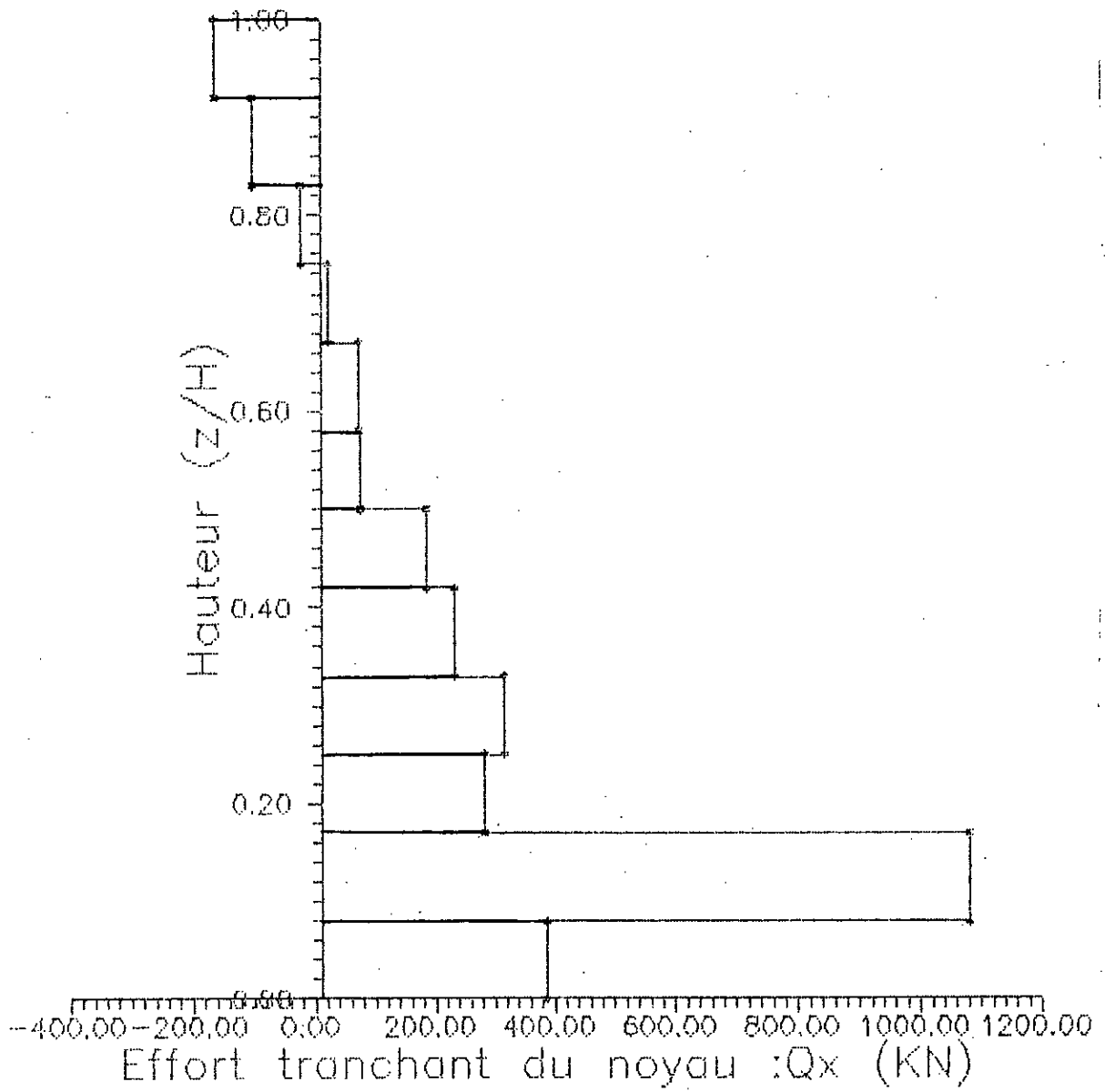


Fig: 5.25

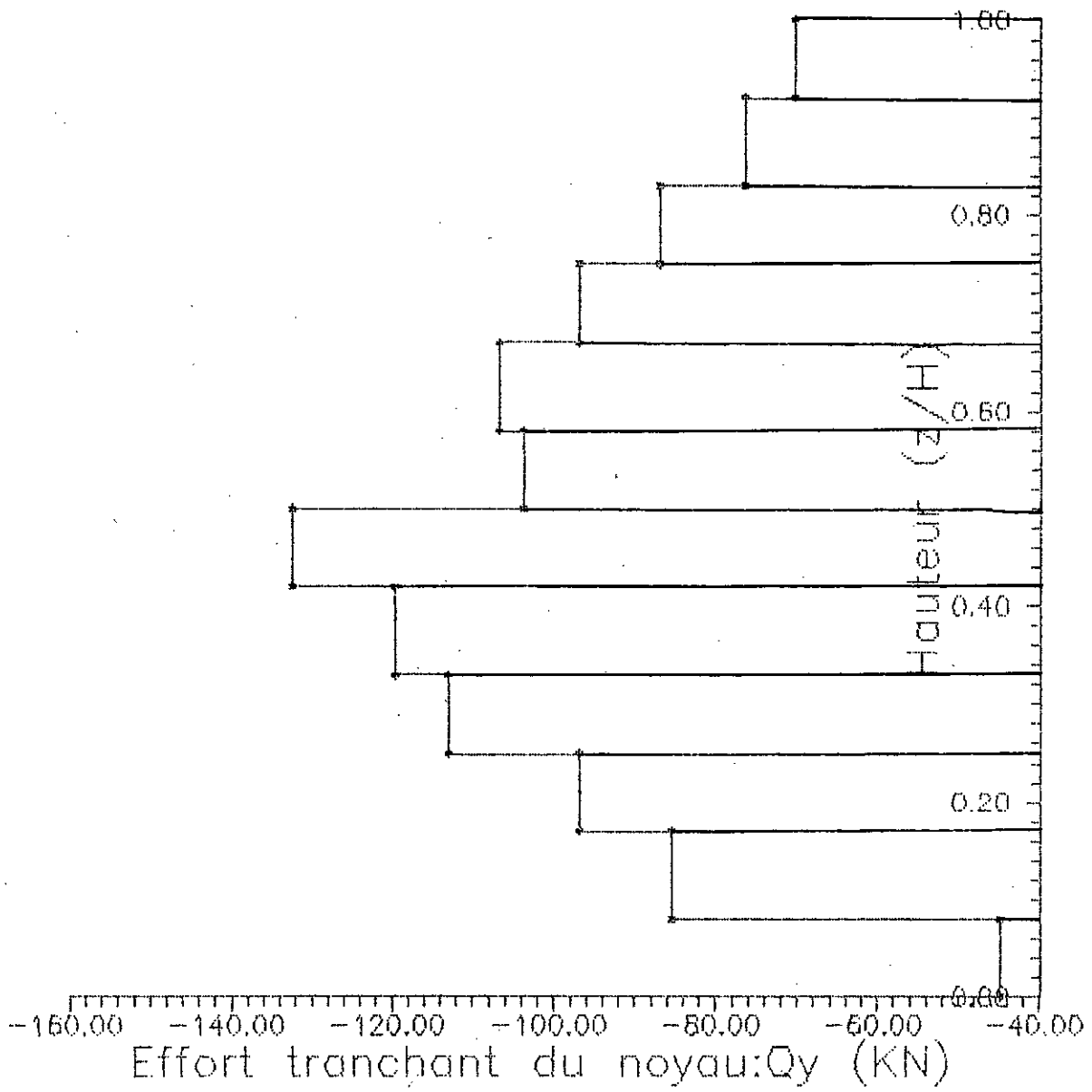


Fig.5.26

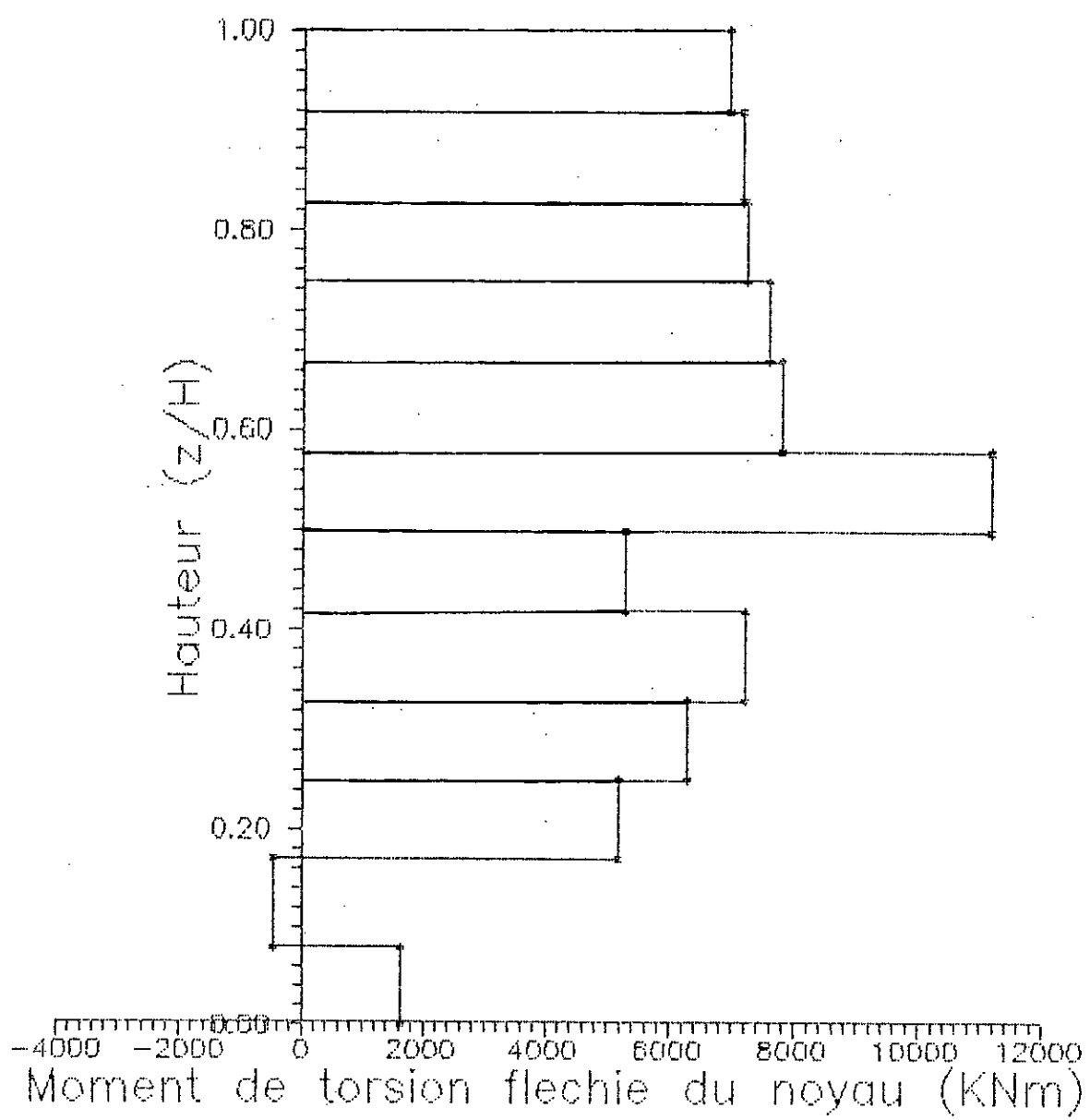


Fig:5.27

5.7.10 CONTRAINTES :

a. Contraintes normales :

$$\sigma_i = \frac{N}{A} \pm \xi_i \frac{M_\eta}{I_\eta} \pm \eta_i \frac{M_\xi}{I_\xi} \pm w_i \frac{B_k}{I_w}$$

Le calcul des contraintes se fera tout d'abord à la section d'encastrement du noyau qui est soumise aux sollicitations suivantes :

$$N = 0,8N_G - N_E$$

$$M_\eta = 7056,501 \text{ KNm}$$

$$M_\xi = 175,501 \text{ KNm}$$

$$B_k = -48543,341 \text{ KNm}^2$$

$$A = 14,412 \text{ m}^2, I_\eta = 102,5 \text{ m}^4, I_\xi = 230,2 \text{ m}^4, I_w = 16662 \text{ m}^6$$

Les résultats seront représentés dans un tableau, puis on fait les calculs pour les niveaux 3, 6, 9 et 11 où les résultats seront présentés sous forme de graphes. (fig. 5-28)

b. Contraintes de cisaillement :

Les sollicitations tangentes sur la section d'encastrement du noyau ont pour valeurs :

$$Q_\xi = 385,864 \text{ KN}$$

$$Q_\eta = -44,801 \text{ KN}$$

$$C_k = 1629,707 \text{ KNm}$$

$$\tau = \pm \frac{1}{e} \left[\frac{Q_\xi}{I_\eta} \delta_\eta(s) + \frac{Q_\eta}{I_\xi} \delta_\xi(s) + \frac{C_k}{I_w} \delta_w(s) \right]$$

Donc les contraintes maximales : $\begin{cases} \sigma = 1433,6 \text{ KN/m}^2 = 1,434 \text{ MPa} \\ \sigma = 189,972 \text{ KN/m}^2 = 0,189 \text{ MPa} \end{cases}$

Vérification de la contrainte de compression :

$$N = N_G + N_Q + N_E$$

La contrainte max de compression est de : $\tau_{\text{max cpr}} = 2180,754 \text{ KN/m}^2$

D'après D.T.U. février 90 on a :

$$\sigma_{\text{adm}} = \min \{ 0,45 \cdot \alpha \cdot \delta \cdot \gamma \cdot \sigma'_{28} ; 0,5 \cdot \alpha \cdot \delta \cdot \gamma \cdot \sigma'_{28} \}$$

α Traduit la réduction de la surface portante provenant d'une excentricité

$$e = \max \{ 1 \text{ cm} , l_f / 300 \}$$

$$\alpha = \frac{a - 10e/3}{a}$$

$$l_f = 0,8l \quad : \text{ mur armé verticalement}$$

$$l_f = 0,8 \times 300 = 240 \text{ cm}$$

Donc :

$$\begin{cases} e = 1 \text{ cm} \\ \alpha = 0,88 \end{cases}$$

β : traduit la minoration des contraintes

$$\beta = \frac{1}{1 + 2(\lambda/100)^2} \quad \text{avec} \quad \lambda = l_f \frac{\sqrt{12}}{a}$$

$$b = c = 11,90 - 0,6 = 11,30 \text{ m} \quad \text{donc} \quad l_f < b$$

$$\Rightarrow l'_f = \frac{l_f}{1 + (l_f/b)^2} = 2,296 \text{ m}$$

$$\lambda = l'_f \frac{\sqrt{12}}{a} = 26,512$$

$$\beta = \frac{1}{1 + 2 \left(\frac{26512}{100} \right)^2} = 0,877$$

Donc $\delta = 0,83$ qualité de la section du béton.
 $\gamma = 1$

Donc $\sigma_{adm} = \min \{ 8,217 ; 8,007 \} = 8,007 \text{ MPa}$
 $\sigma_{max} = 2,181 \text{ MPa} < \sigma_{adm} = 8,007 \text{ MPa}$

La valeur maximale de la contrainte de cisaillement est de :

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{max} = 0,189 \text{ MPa} \\ \bar{\tau} = 0,2 \tau'_{28} = 0,5 \times 25 = 5 \text{ MPa} \end{array} \right\} \tau_{max} < \bar{\tau}$$

Contraintes de cisaillement dans les linteaux

On doit vérifier que : $\tau_{max} < \bar{\tau}_b$

$$\tau = \frac{1,4T}{0,8hb}$$

$$T = T_E + T_P + T_g$$

$$\bar{\tau} = 0,2 \sigma'_{28} = 5 \text{ MPa}$$

Avec $T_E = T_r \cdot h$

$$T_g = 9,13 \left(\frac{l^2}{2} \right)$$

$$T_p = 0,83 \left(\frac{l^2}{2} \right)$$

1	ξ_i	η_i	w_i	S_ξ	S_η	S_w	σ	τ	σ_{cpr}
2	-1.46	-5.33	-7.78	1.60	3.84	7.178	1181.119	50.580	1928.273
3	-3.275	-5.33	-17.45	1	0	0	1084.336	0	1831.490
4	-3.275	-0.33	-33.825	1.574	0.27	25.369	1132.036	11.844	1879.190
5	-3.275	1.87	-41.03	1.574	14.17	36.383	1153.024	189.972	1900.178
6	-3.275	6.27	-55.44	1.566	-5.14	51.994	1195.001	-47.171	1942.155
7	-0,55	6.27	-72.53	0	0	0	1432.384	0	2179.538
8	-0,5	1.87	-46.22	0	0	0	1359.185	0	2106.339
9	-0,5	-0.33	-32.91	0	0	0	1320.413	0	2067.567
10	-1.46	-1.68	-13.11	0	0	0	1196.645	0	1943.800
11	1.46	-5.33	7.78	-1.60	3.84	-7.178	1336.817	45.795	2083.971
12	1.46	-1.68	13.11	0	0	0	1321.291	0	2068.445
13	-0,5	-0.33	32.91	0	0	0	1197.523	0	1944.677
14	-0,5	1.87	46.22	0	0	0	1158.751	0	1905.905
15	-0,55	6.27	72.53	0	0	0	1085.552	0	1832.706
16	3.275	6.27	55.44	-1.566	5.14	-51.994	1322.935	047.171	2070.089
17	3.275	1.87	41.03	-1.574	10.500	-36.383	1364.912	119.635	2112.066
18	3.275	-0.33	33.825	-1.574	1.68	-27.828	1385.900	11.807	2133.054
19	3.275	-5.33	17.45	0	0	0	1433.600	0	2180.754

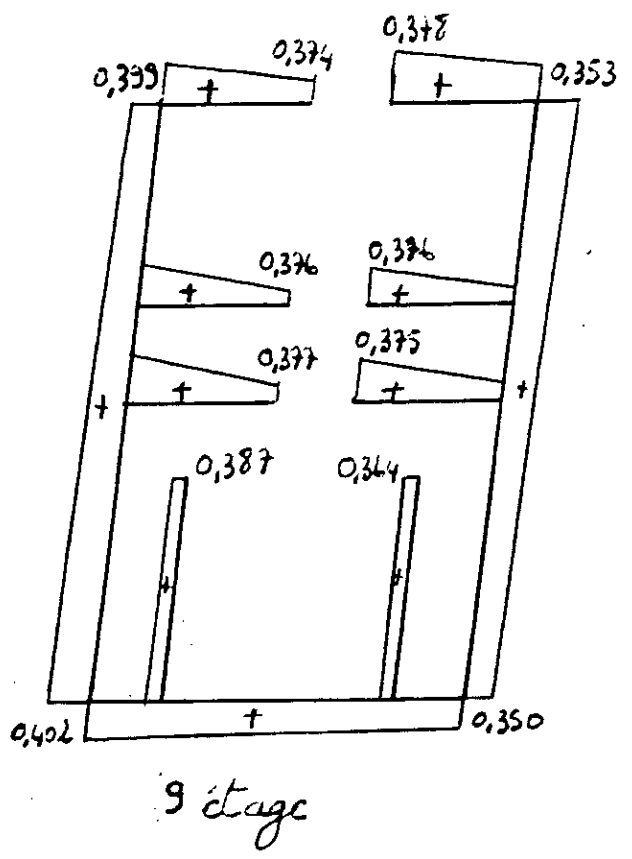
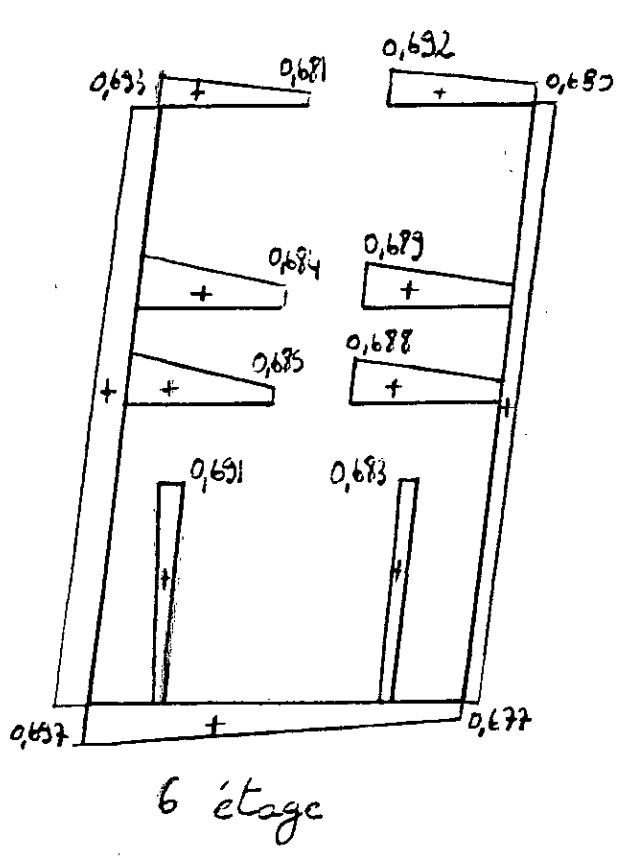
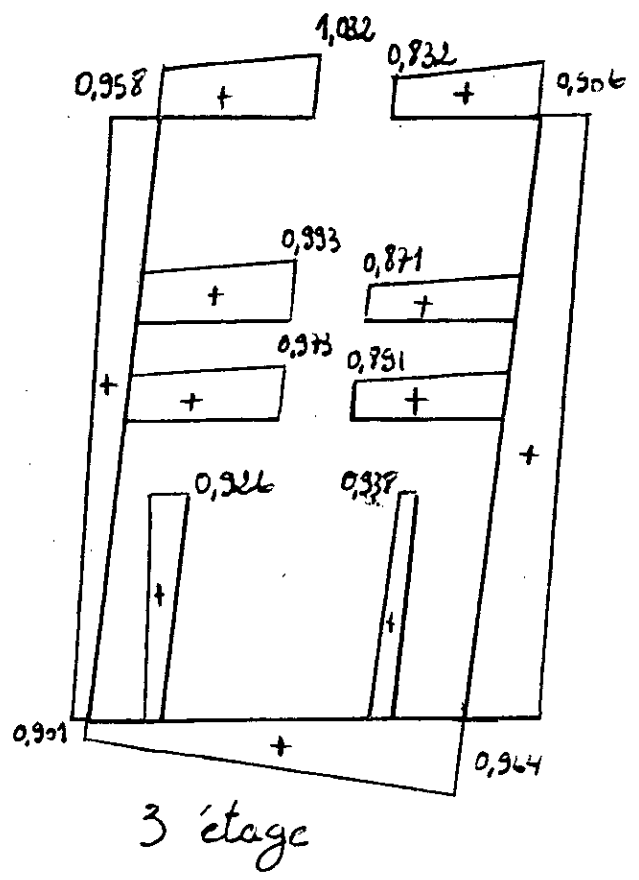
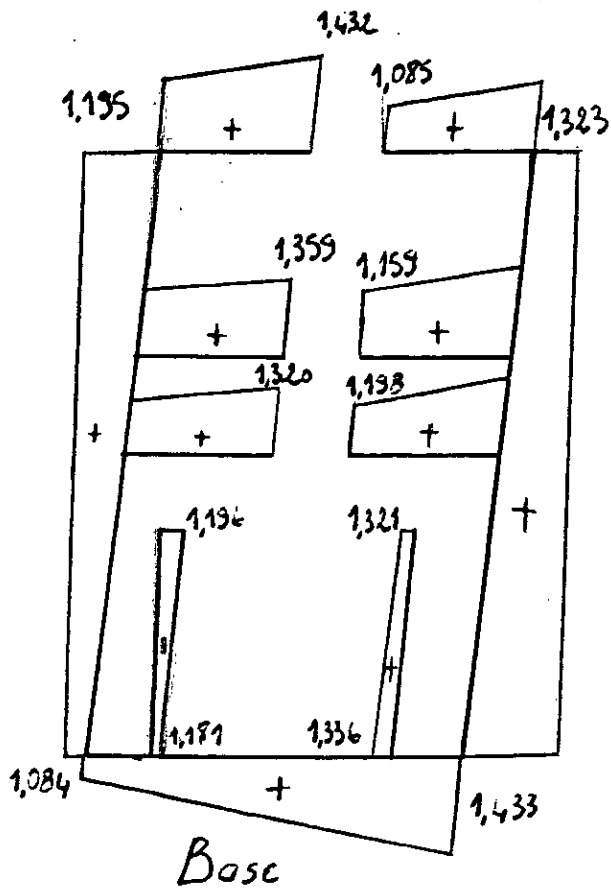


Diagramme des contraintes
Fig: 5.28

i	T (KN)	τ (KN/m ²)
a	295.264	1913.749
b	344.993	2236.068
c	345.030	2236.068
d	299.129	1938.800
e	348.362	2257.903
f	355.300	2302.870
g	475.785	3083.79
h	13.402	86.862
i	13.839	89.697
j	307.825	1995.159

On a $\tau_{\max} = 3,084 \text{ MPa} < \bar{\tau} = 5 \text{ MPa}$ Donc c'est vérifié.

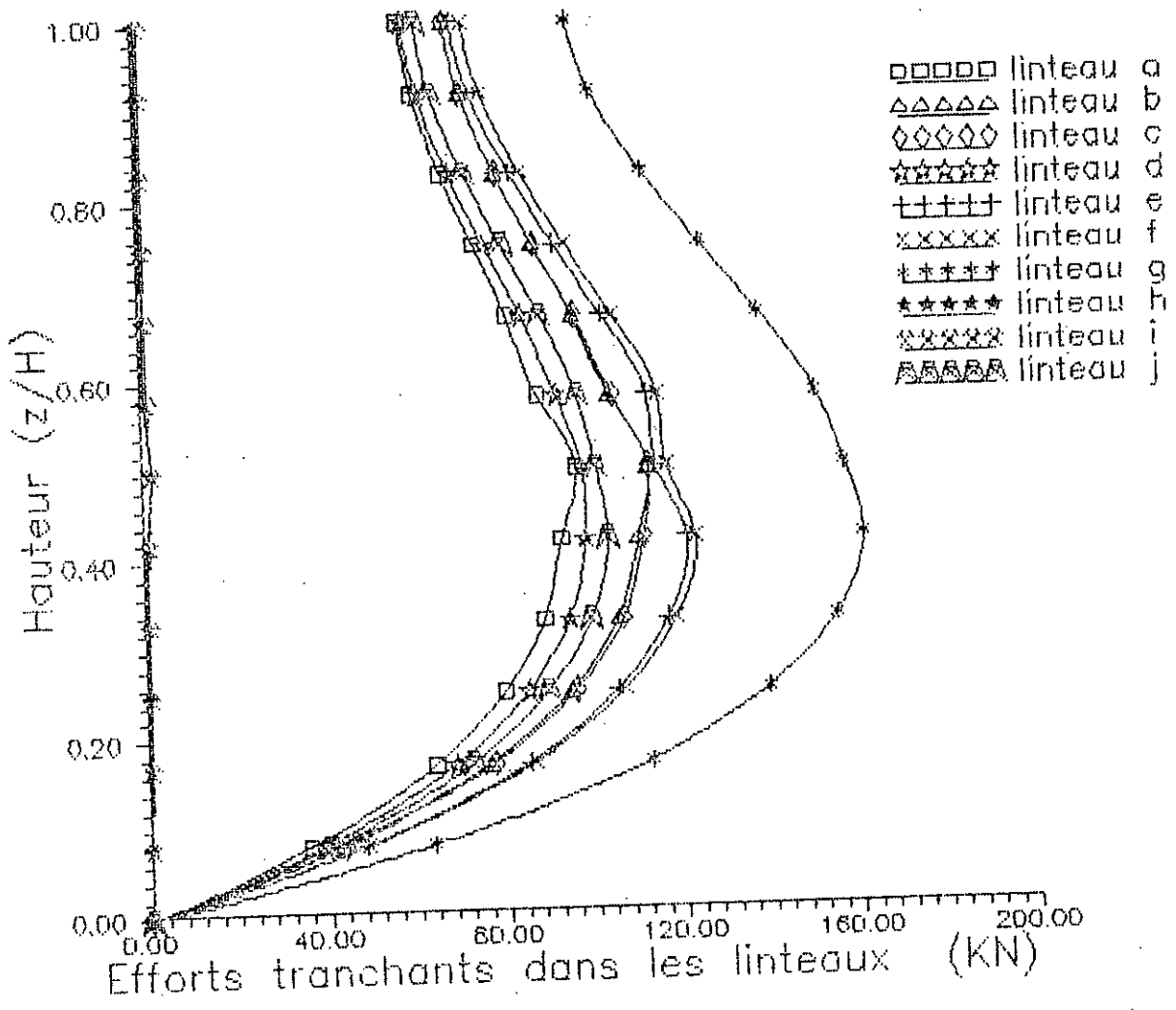


Fig: 5.29

5.8. INTERPRETATION DES RESULTATS

5.8.1. DEPLACEMENTS

On remarque d'après le tracé de la courbe des déplacements que le comportement de la structure est du type flexionnel dans la partie basse du bâtiment, ce qui est en accord avec le fait que ce sont les voiles qui retiennent les déplacements des portiques à la base.

Dans la partie haute, la déformée est du type distorsionnel ce qui induit que ce sont les portiques qui retiennent les voiles dans la partie haute. (voir fig. 5.19).

5.8.2. MOMENTS

on remarque d'après le tracé que le moment fléchissant qui s'annule au sommet et qui atteint son maximum à la base s'annule aussi au milieu de la structure, ce qui signifie qu'en ce point de moment nul, on a un changement de concavité pour la courbe de la déformée il représente le point d'inflexion puisque la déformée est la dérivé seconde du moment. (voir fig. 5.22)

5.8.3 EFFORTS TRANCHANTS DANS LES LINTEAUX

On remarque que l'effort tranchant est non uniforme (présentant un accroissement non triangulaire), tel que le maximum de l'effort se trouve à un étage médium et non minimum en partie basse, cela est du aux forces d'interaction dont l'effet est loin d'être négligeable (voir fig. 5-29)

SIXIEME PARTIE

CALCUL AUTOMATIQUE

6.1. INTRODUCTION

Le calcul automatique permet, grâce à une analyse préalable, le traitement d'une classe importante de problèmes.

La structure est constituée d'une infinité de points. La mécanique des milieux continus fournit théoriquement les équations permettant de définir en chaque point les contraintes et les déformations.

Dans certains cas simples, la discrétisation s'impose par la configuration même de la structure.

C'est le cas par exemple des ossatures formées de barres. Les éléments simples sont alors étudiés par la théorie des poutres, pour lesquelles, on a fait au préalable une hypothèse sur la distribution des contraintes (loi des sections planes). Dans d'autres cas la discrétisation n'est pas évidente, les plaques par exemples seront découpées en petits éléments pour lesquels on choisira une hypothèse en ce qui concerne la déformation. Ce découpage peut conditionner dans certains cas la précision des résultats obtenus.

6.2. ETAT DE L'ART :

Plusieurs logiciels ont été développés pour faciliter le calcul automatique les plus connus sont :

STRESS : (Structural Engineering System Solver) concerne les structures suivantes : fermes planes, portiques plans, plâtelage, fermes et portiques spatiaux.

STRUDL : (Structural Design Language) qui est un sous système du système intégré ICES (Integrated Civil Engineering System). Parmi les principales options du STRUDL; citons :

- prédimensionnement
- Analyse statique
- Analyse dynamique
- Instabilité élastique
- Elasticité non linéaire

ASKA : Programme d'éléments finis (et ossatures) qui permet l'analyse statique et dynamique des structures.

NASTRAM : (Nasa Structural Analysis permet l'analyse des structures par éléments finis.

STARDYNE : Programme général de calcul (statique et dynamique). Parmi les différentes option de ce programme, on peut citer :

- Analyse transitoire
- Analyse fréquentielle
- Analyse aléatoire
- Etude des chocs

SAP80 : (Structural Analysis programs) logiciel de calcul très évolué. Depuis sa première version des années 70, le SAP 80 à beaucoup évolué parallèlement à l'évolution des méthodes de résolution et des outils de calcul. L'étendue des possibilités qu'il propose, le nombre d'équations qu'il peut résoudre ainsi que son option d'analyse dynamique représentent sa puissance et son efficacité.

Analyse statique :

Nombre maximal d'équations (neq)	8000
Nombre de noeuds (numj)	4000
Nombre de conditions de chargement (nld)	20

Analyse dynamique :

Nombre maximal d'équations (neq)	5000
Nombre de noeuds (numj)	2500
Nombre de valeurs propres (nfq)	

$$neq \times (nld + nfq) < 40000$$

Dans ce qui suivra, nous analyserons la structure sur SAP 80.

6.3. PREPARATION DU FICHIER DONNEES SUR SAP 80

Avant l'utilisation du SAP80, nous devons préparer le fichier de données de la structure spécifiée. L'utilisateur doit créer un fichier données en utilisant un éditeur de texte. L'édition est guidée et assistée par une aide modulée.

Les données doivent être conformes aux spécifications du programme.

Les structures concernées par le programme, sont celles qui peuvent être mobilisées en :

Truss treillis 2D ou 3D
Frame : portiques 2D ou 3D
Quad : élément plaque, élément membranaire

Les données doivent être organisées en blocs :

System : carte contrôle
joints : coordonnées des noeuds
Restraints : Conditions d'appuis
Springs : Appuis élastiques
Constraints : présence ou non des noeuds esclaves
Frame : éléments barres
masses
Potential : Température ou pression aux noeuds
Shell : éléments coques
Asolid : éléments iso paramétriques
Solid : éléments 3D
Loads : Charges appliquées aux noeuds
Prestress : Précontrainte
Spec : Spectre de reponse
Combo : Combinaison des charges
Displacements : déplacements.

6-4 CHOIX DU MODELE

Le noyau a été modélisé comme le montrent les figures (6.1, 6.2, 6.3) modélisé en éléments *SHELL*. Les linteaux, quand à eux ont été schématisés en éléments *FRAME*. Des poutres auxiliaires ou fictives ont été rajoutées au modèle pour assurer une rigidité des coins ainsi qu'un comportement homogène de la section du noyau.

Nous aurions souhaités intégrer les portiques à notre modèle pour pouvoir comparer les résultats des deux méthodes de calcul, mais vue la taille du modèle et les moyens mis à notre disposition ne nous ont pas permis de le faire.

6.5 FORMAT DES FICHIERS RESULTATS :

Après une exécution sans erreurs des commandes *SAP80* et *GO*, quelques uns ou tous les fichiers présents existeront sur le disque, dépendent des options activées par les données d'entrée.

Ces fichiers sont :

- *SAP* : Tabulation écho des données d'entrée
- *EIG* : Analyse spectrale et facteurs de participation
- *SPC* : Analyse spectrale des facteurs modaux
- *SOL* : Déplacements des noeuds et réactions
- *F3F* : Eléments de force dans le portique
- *F4F* : Eléments de force dans la coque
- *ERR* : Messages d'erreurs

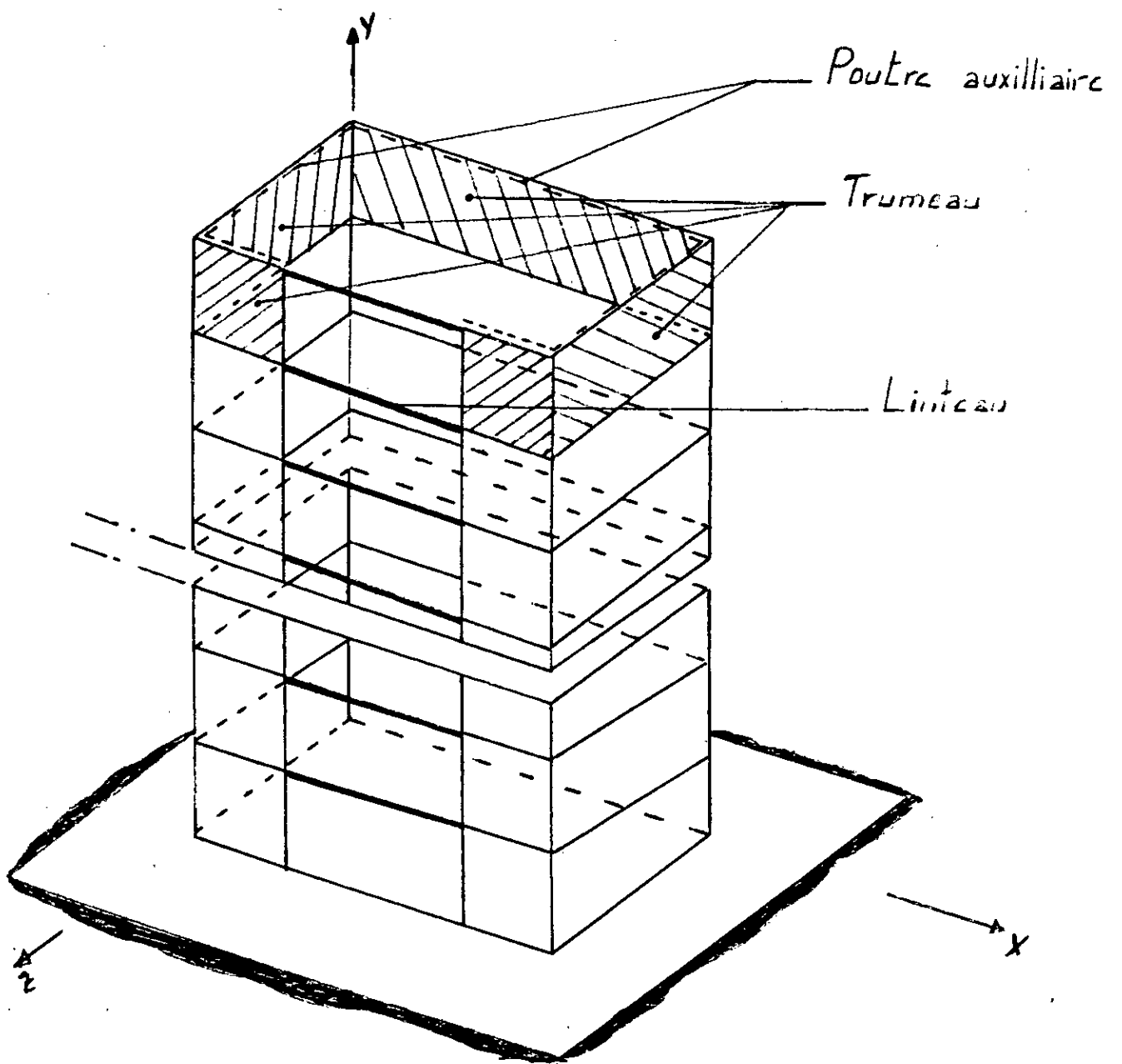


Fig. 6.1 Exemple de modèle

390 : noeuds
252 : plaques
288 : poutres

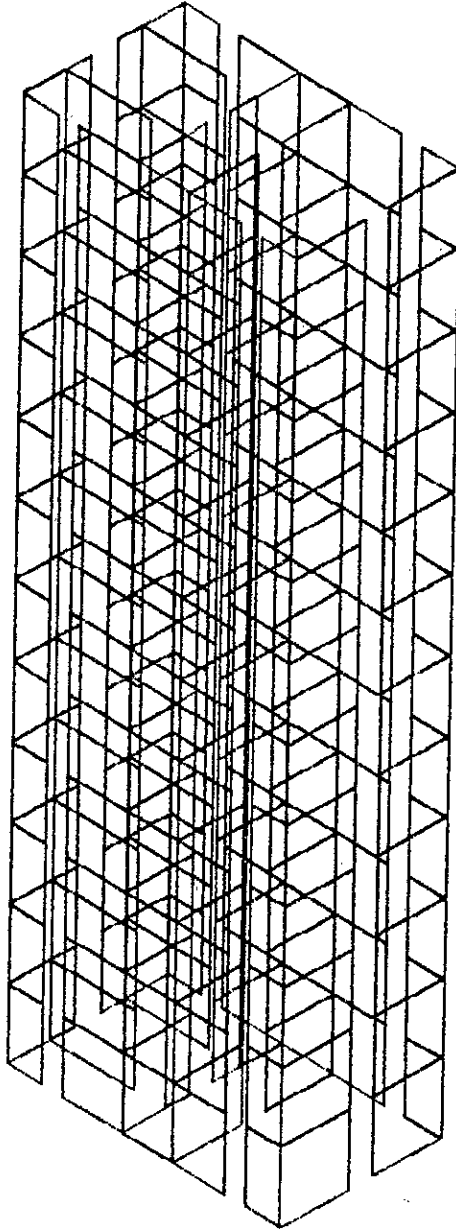


Fig: 6.2 Modèle du noyau

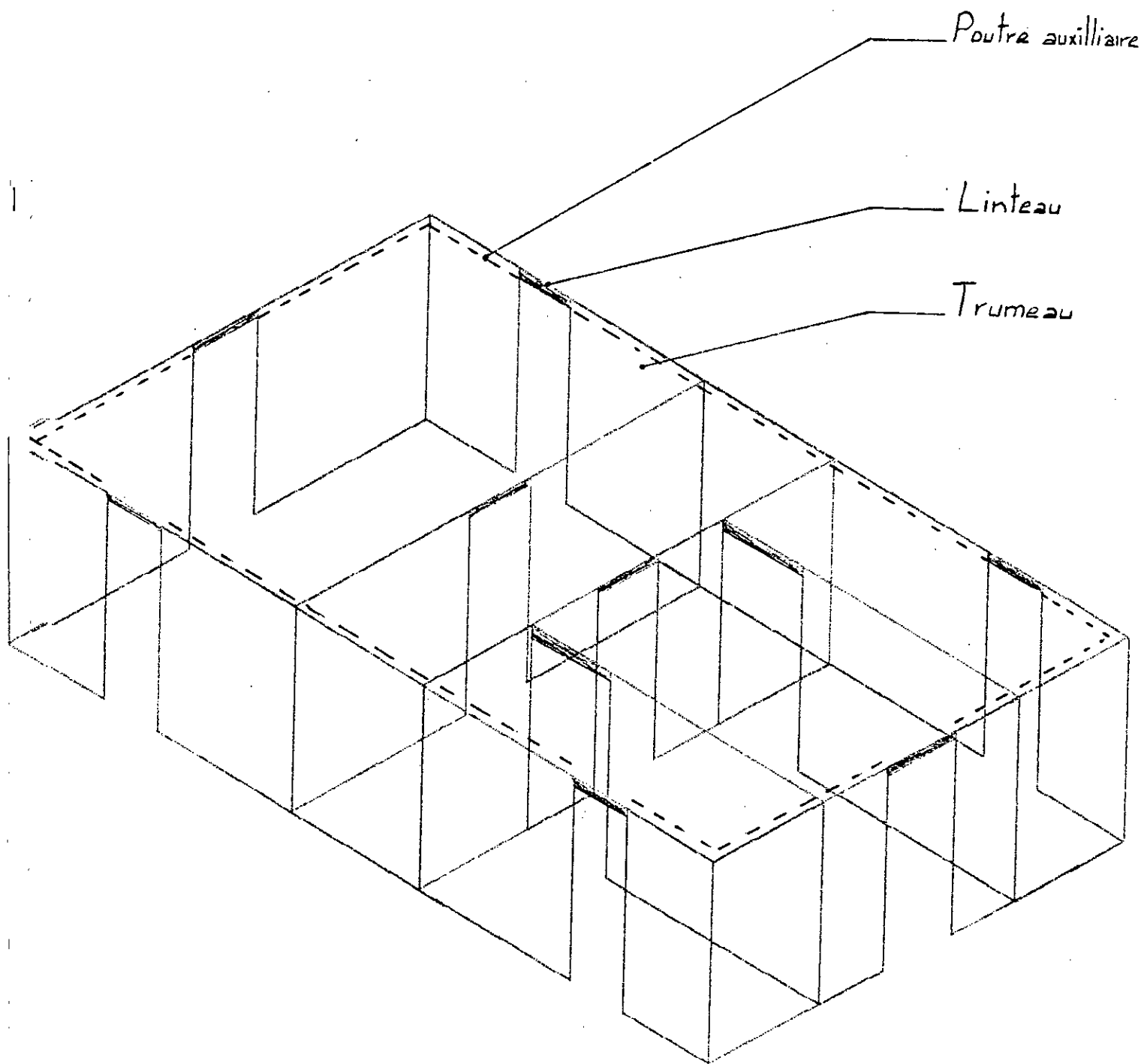


Fig:6.3 Modèle d'un étage du noyau

6. 6 RESULTATS :

Après passage sur SAP80, les résultats obtenus ont été résumés dans les tableaux suivants :

TABLEAU 1

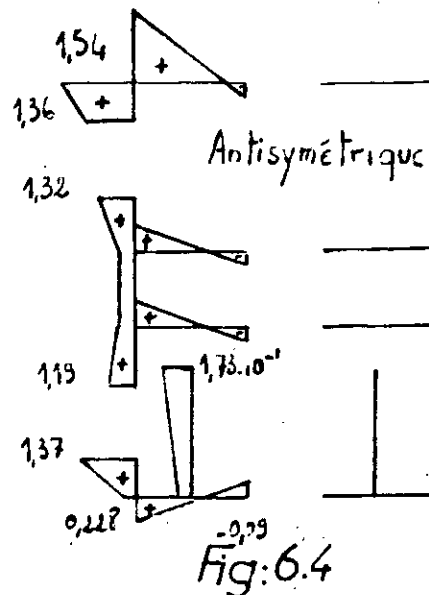
Hauteur	Ux
0	0
3	$0,56 \cdot 10^{-3}$
6	$0,17 \cdot 10^{-2}$
9	$0,33 \cdot 10^{-2}$
12	$0,53 \cdot 10^{-2}$
15	$0,75 \cdot 10^{-2}$
18	$0,98 \cdot 10^{-2}$
21	0,012
24	0,015
27	0,018
30	0,02
33	0,022
36	0,025

La file d'ouverture (d) les efforts dans les linteaux sont :

TABLEAU 2 :

Hauteurs	Effort tranchant (KN)
0	0
3	470
6	420
9	420
12	450
15	450
18	430
21	400
24	370
27	330
30	290
33	250
36	110

Les contraintes normales dans les différents points du noyau central sont données sur les figures suivantes : (6.5, 6.4).



6.7. INTERPRETATION DES RESULTATS:

6.7.1. LES DEPLACEMENTS :

On remarque d'après le tracé de la courbe des déplacements de la structure, que cette dernière a un comportement purement flexionnel. Les déplacements donnés par le calcul automatique sont proches de ceux donnés par la méthode des trois pivots pour les parties basses du bâtiment. Alors qu'en partie haute, les déplacements sont beaucoup plus importants. Ceci est dû au fait que c'est le portique qui retient la structure en partie haute. Donc, on peut avancer que c'est la suppression des portiques de notre structure qui a engendré une telle amplitude des déplacements au sommet de l'immeuble. (fig. 6.6, 6.7).

6.7.2. EFFORTS DANS LES LINTEAUX:

Nous remarquons d'après l'allure de la couche des efforts tranchants, que ces derniers sont sensiblement uniformes. L'effet des forces d'interaction, même s'il existe (présence des files d'ouvertures, donc, déformabilité non semblable) est moins intense que pour une structure à contreventement mixte (fig. 6-8).

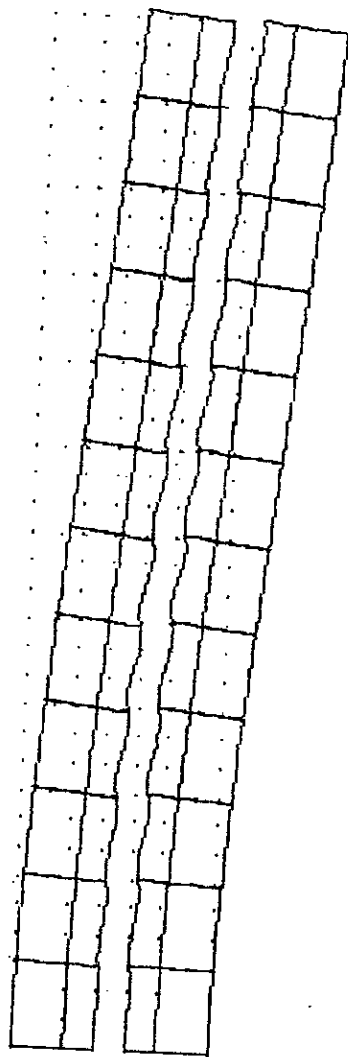


Fig.6.6 Déformée du noyau

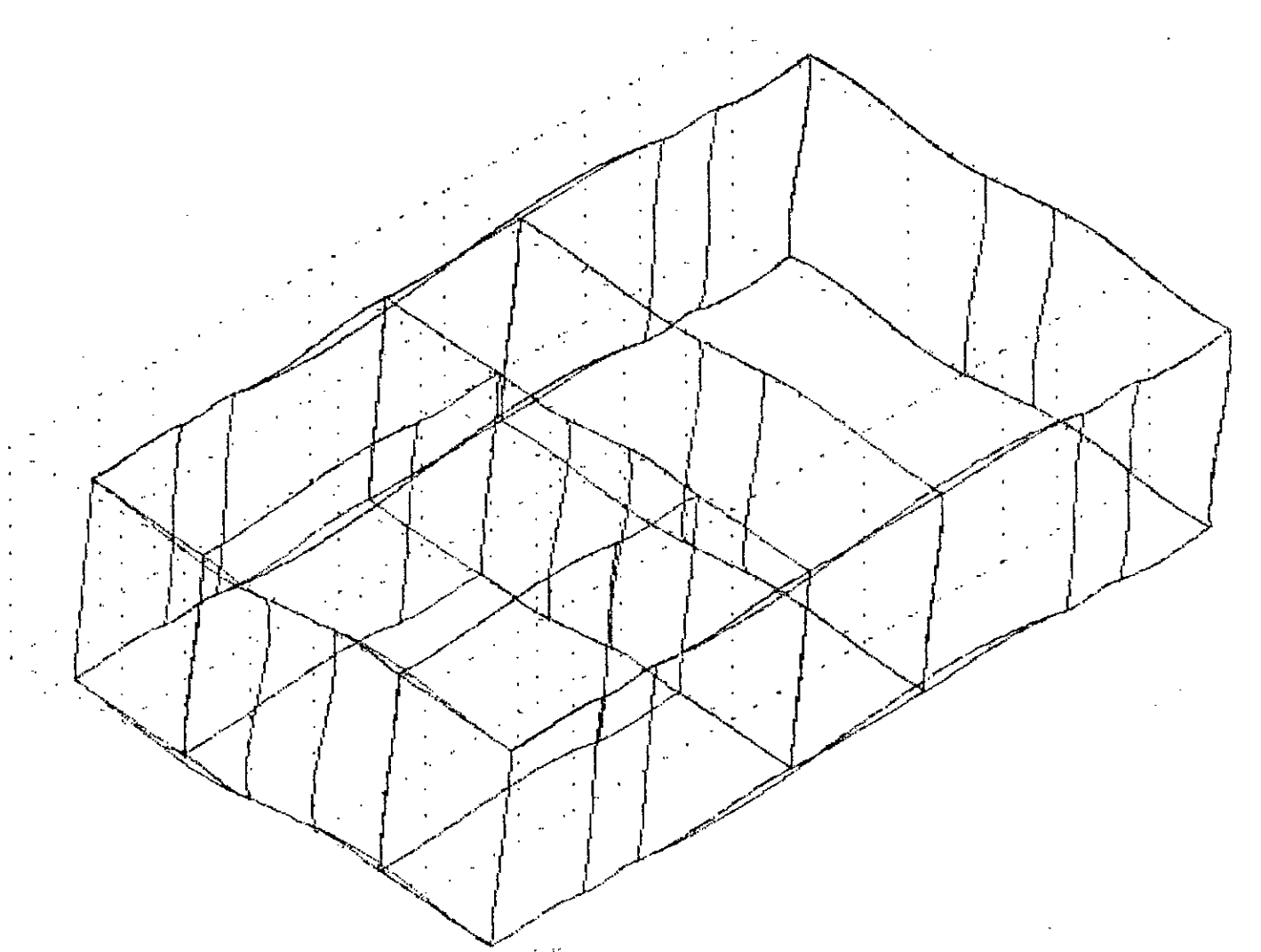


Fig: 6.7 Déformation d'un étage du noyau

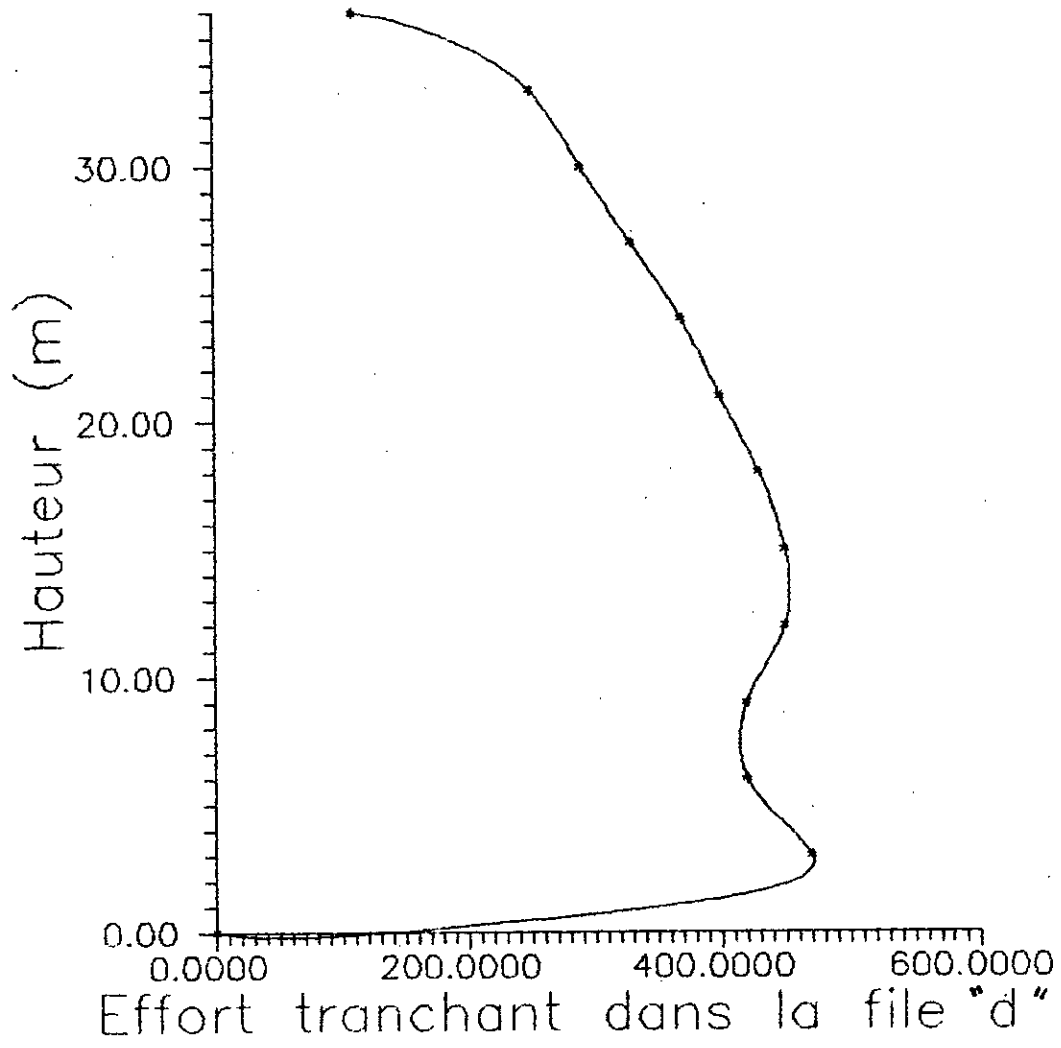


Fig: 68

SEPTIEME PARTIE

CONCLUSION

Cette étude nous a permis d'analyser deux structures, la première possédant un contreventement mixte et qui a été analysée par la méthode des trois pivots, la seconde contreventée uniquement par un noyau central a été discrétisée en éléments finis et analysée par calcul automatique sur SAP80.

Les structures analysées étant différentes, nous avons dû restreindre notre comparaison au côté qualitatif et l'axer sur la différence entre les deux comportements.

Pour le cas du noyau seul, le comportement est purement flexionnel et la structure peut être schématisée par une console flexionnelle dont l'opérateur dans l'équation différentielle:

$$Kd''''(Z) - Sd'' = f(Z)$$

$$\text{est : } K^* = K \frac{d^4}{dZ^4}$$

qui est semblable à l'opérateur $EI \frac{d^4}{dZ^4}$ d'une poutre fléchie.

Par contre, pour la seconde structure, dont le contreventement est mixte, une autre console s'ajoute à la précédente. C'est la console qui schématise les portiques et dont l'opérateur dans l'équation différentielle est:

$$S^* = -S \frac{d^2}{dZ^2}$$

qui est semblable à l'opérateur

$$-GS_r \frac{d^2}{dZ^2}$$

d'une poutre ne se déformant qu'en distorsion. Par ailleurs, nous savons qu'en résistance des matériaux, la combinaison de ces deux opérateurs dans le cas d'une console encastree à la base, donne deux déformées avec des courbures de signes contraires. Par conséquent, sous l'action simultanée des deux opérateurs, l'on obtiendra une déformée intermédiaire, ayant un point d'inflexion.

On en conclut que tout système de contreventement est constitué, en général, de deux sous-systèmes travaillant conjointement : un système "flexionnel" de matrice de rigidité "K" et un système distorsionnel de matrice de rigidité "S".

Sous l'action des forces d'interaction, la déformée commune de ces systèmes a une forme mixte variant de la flexionnelle en dessous du point d'inflexion au comportement distorsionnel au dessus de ce point.

Ce qui explique le fait que c'est les portiques qui retiennent le noyau en partie haute et l'inverse en partie basse.

Nous avons constaté en passant en revue les différentes méthodes d'analyse des contreventements spatiaux que ces dernières tendaient à déterminer les forces statiques équivalentes en ne prenant en considération qu'un centre de torsion alors qu'en général, il y en a trois. En effet, les codes parasismiques modernes (les R.P.A. 88 incluses) autorisant que la ligne d'action des forces sismiques équivalentes doit avoir une excentricité par rapport au centre de gravité M des planchers. Mais le procédé proposé par ces codes admet implicitement la similitude du comportement élastique entre le modèle à un seul étage et le modèle multi-étage ou encore entre structure symétrique et structure non symétrique.

Or, les trois pivots auront des effets comparables sur notre structure, et par conséquent il n'existera pas de plans privilégiés de sollicitation provoquant une translation parallèle sans torsion.

Inversement, si l'action extérieure était purement torsionnelle, les déplacements du système continueraient à être calculés en faisant la superposition entre les trois états de torsion mixte autour des axes propres de vibration spatiale (Ω_n) et donc, on n'aurait pas de torsion autour d'un axe unique, comme c'est le cas des pièces longues à profils ouverts.

Il résulte de ce qui précède, que le procédé proposé par les R.P.A. 88 pour la détermination de l'excentricité (e) n'est applicable qu'aux structures possédant un axe élastique, il s'ensuit que la champ d'application de la méthode statique équivalente est en fait très limité, couvrant seulement un petit nombre de structures symétriques, homotropes, etc.

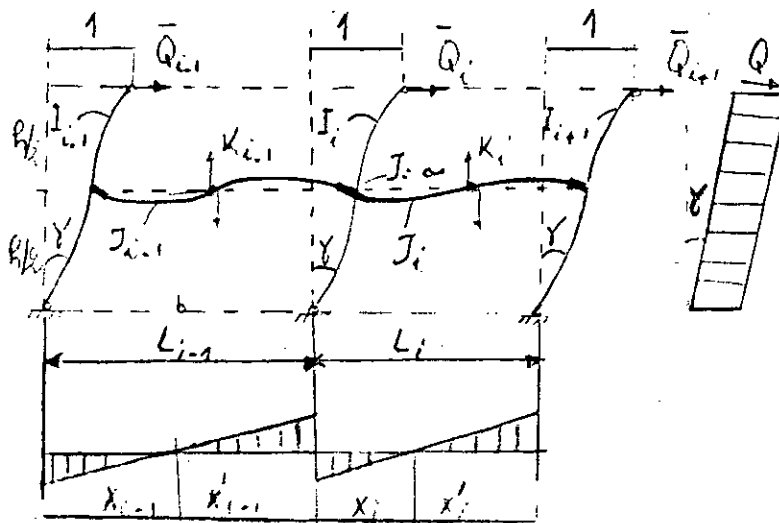
Par conséquent, et en conclusion de notre travail, nous pouvons dire que : si l'abandon de la méthode statique équivalente en faveur de la méthode dynamique spectrale préconisée par la R.P.A 88 ne semble pas être raisonnable, un calcul des excentricités plus réaliste s'impose.

ANNEXES

Annexe A. RIGIDITE DISTORSIONNELLE DES PORTIQUES

On considère un portique étagé, composé de poteaux habituels et de réfind (portique mixte) et ayant des caractéristiques mécaniques constantes sur toutes la hauteur.

Isolons une tranche de celui-ci entre deux étages consécutifs, de mi-hauteur à mi-hauteur, et imposons lui une déformation unitaire.



Calcul de la rigidité distorsionnelle.

La rigidité cherchée à pour expression : $S_b = \frac{Q}{\gamma} = h \cdot \sum_i \bar{Q}_i$

En tenant compte des conditions d'équilibre :

$$h\bar{Q}_i = x_i K_i + x_{i-1} K_{i-1}$$

s'écrit : $S_b = \sum_{i=1}^{n-1} K_i K_i$

Expression générale du coefficient de souplesse : $f_i = \frac{L_i}{K_i}$

Coefficient de rigidité A_{ij}, A_{ji}, B_{ij} et $B_{ji} = B_{ij}$ des poutres, avec des segments rigides à leurs extrémités sont calculés par :

$$A_{ij} = \frac{EJ}{(1+a)L} \left(\frac{4+a}{n} + \frac{12n_i}{n^2} + \frac{12n_i^2}{n^3} \right)$$

$$B_{ij} = B_{ji} = \frac{EJ}{(1+a)L} \left(\frac{2-a}{n} + \frac{6(n_i + n_j)}{n^2} + \frac{12n_i n_j}{n^3} \right)$$

$$A_{ji} = \frac{EJ}{(1+a)L} \left(\frac{4+a}{n} + \frac{12n_j}{n^2} + \frac{12n_j^2}{n^3} \right)$$

où : $a = \frac{12}{(nL)^2} \frac{EJ}{GS_r}$

Dans ces formules, on met $a = 0$, si les déformations distortionnelles des poutres sont négligeables.

- Souplesse d'une liaison entre deux refends:

$$f = h \left(\frac{l^3}{12EJ} + \frac{1}{GS_r} \right)$$

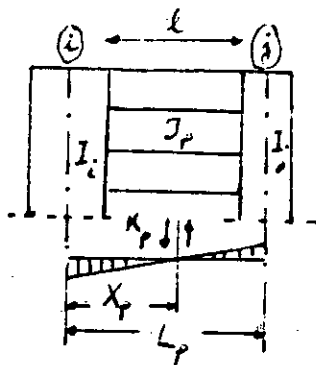
En admettant avec une approximation suffisante que le point de moment nul se trouve à mi-portée.

Pour une section rectangulaire du linteau d et de largeur b et E/G=2,3 on a

$$f = \frac{hl}{Ebd} \left(\frac{l^2}{d^2} + 2,76 \right)$$

Rigidité distorsionnelle des portiques.

Refend + Refend



$$S_i = 12EI_i/h$$

$$S_j = 12EI_j/h$$

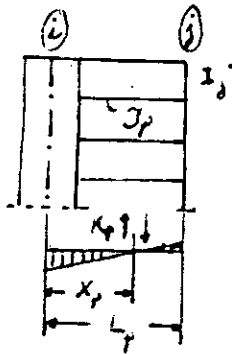
$$\lambda_i = \frac{S_i(A_{ji} + S_j) - S_j B_{ij}}{(A_{ij} + S_i)(A_{ji} + S_j) - B_{ij}^2}$$

$$\lambda_j = \frac{S_j(A_{ij} + S_i) - S_i B_{ji}}{(A_{ij} + S_i)(A_{ji} + S_j) - B_{ij}^2}$$

$$x_p = \frac{L_p(\lambda_i A_{ij} + \lambda_j B_{ij})}{\lambda_i(A_{ij} + B_{ij}) + \lambda_j(A_{ji} + B_{ji})}$$

$$K_p = \frac{\lambda_i(A_{ij} + B_{ij}) + \lambda_j(A_{ji} + B_{ji})}{h \cdot L_p}$$

Refend + Poteau :



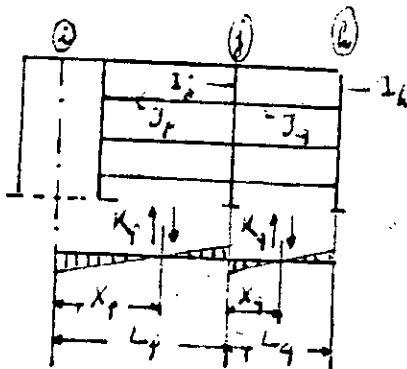
$$S = 12EI_j / h$$

$$\lambda = \frac{S - B_{ij}}{S + A_{ij}}$$

$$x_p = \frac{L_p (A_{ij} + \lambda B_{ij})}{A_{ij} + B_{ij} + \lambda (A_{ji} + B_{ji})}$$

$$K_p = \frac{A_{ij} + B_{ij} + \lambda (A_{ji} + B_{ji})}{h \cdot L_p}$$

Refend + 2 Poteaux



$$S_j = 12EI_j / h$$

$$S_k = 12EI_k / h$$

$$\lambda_j = \frac{(S_j - B_{ij})(A_{kj} + S_k) - S_k B_{jk}}{(A_{kj} + S_k)(A_{ji} + A_{jk} + S_j) - B_{jk}^2}$$

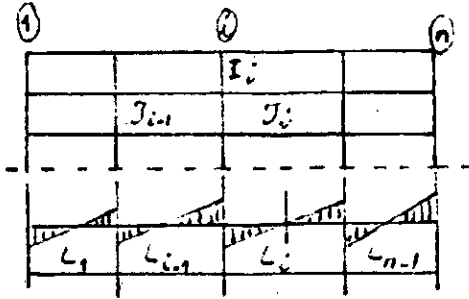
$$\lambda_k = \frac{S_k (A_{ji} + A_{ik} + S_j) - B_{jk} (S_j - B_{ij})}{(A_{kj} + S_k)(A_{ji} + A_{jk} + S_j) - B_{jk}^2}$$

$$x_p = L_p \frac{A_{ij} + \lambda_j B_{ij}}{A_{ij} + B_{ij} + \lambda_j (A_{ji} + B_{ji})}$$

$$K_p = \frac{A_{ij} + B_{ij} + \lambda_j (A_{ji} + B_{ji})}{h \cdot L_p}$$

$$x_q = L_q \frac{\lambda_j A_{jk} + \lambda_k B_{jk}}{\lambda_j (A_{jk} + B_{jk}) + \lambda_k (A_{kj} + B_{kj})}, L_q = \frac{\lambda_j (A_{jk} + B_{jk}) + \lambda_k (A_{kj} + B_{kj})}{h \cdot L_q}$$

Portique proportionnel



$$r_i = \frac{EJ_i}{L_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$S_i = \frac{EI_i}{h}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

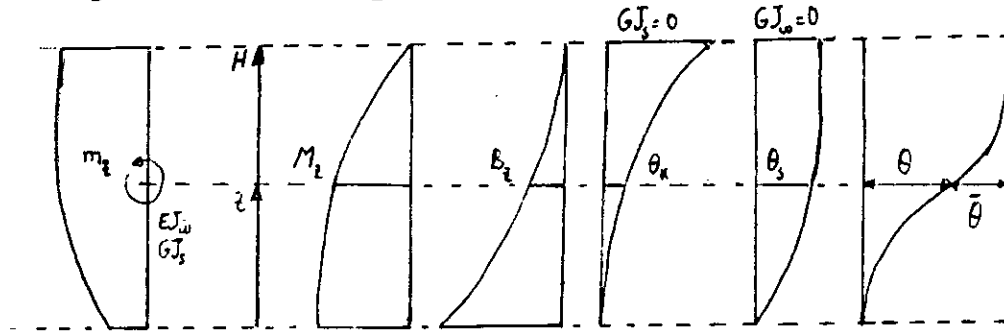
$$r = \sum_i r_i, \quad S = \sum_i S_i$$

$$K_i = \frac{12}{hL_i} \cdot \frac{r_i}{1+r/S}$$

Annexe B. TORSION D'UNE CONSOLE A PROFIL OUVERT

L'action extérieure, d'un couple réparti m_z donnant comme éléments de réduction à la côte z un moment de torsion M_z et un bimoment B_z , soit :

$$M_z(Z) = \int_z^H m_z(\tau) d\tau, \quad B_z(Z) = \int_z^H M_z(\tau) d\tau \quad (1a,b)$$



Torsion d'une console à profil ouvert.

On admet un castrement élastique au sol, caractérisé par la rigidité au gauchissement de la fondation :

$$K_{\varphi\omega} = 2C_z J_{\varphi\omega} \quad (2)$$

Torsion fléchie :

$GJ_s = 0$, l'angle de torsion θ_K d'une section de la console vérifie l'équation différentielle:

$$EJ_{\omega} \theta_K''''(Z) = m(Z) \quad (3)$$

et les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \theta_K(0) = 0, & K_{\varphi\omega} \cdot \theta_K'(0) = EJ_{\omega} \cdot \theta_K''(0) & (4a,b) \\ \theta_K''(H) = 0, & \theta_K'''(H) = 0 & (4c,d) \end{cases}$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$\theta_K(\xi) = \frac{B_z(0)}{EJ_{\omega}} H^2 \cdot \rho(\xi) + \frac{B_z(0)}{K_{\varphi\omega}} H \cdot \xi \quad (5a)$$

$$\theta_K'(\xi) = \frac{M_Z(o)}{EJ_\omega} H^2 \cdot \gamma(\xi) + \frac{M_Z(o)}{K_{\varphi\omega}} H \cdot K \quad (5b)$$

ρ, γ, K coefficient sans dimension.

On aura :

$$(6a) : \text{Moment de torsion fléchie} : C_K = -EJ_\omega \theta_K''' = M_Z(\xi) = M_Z(o) \cdot \tau_o(\xi)$$

$$(6b) : \text{Bimoment} : B_K = -EJ_\omega \theta_K'' = B_Z(\xi) = B_Z(o) \cdot \mu_o(\xi)$$

μ_o et τ_o : coefficient sans dimension.

Torsion pure :

$EJ_\omega = o$, l'angle de torsion θ_S d'une section de la console vérifie l'équation différentielle :

$$-GJ_S \theta_S''(Z) = m_Z(Z) \quad (7)$$

et les conditions aux limites :

$$\theta_S(o) = 0, \quad \theta_S'(H) = 0 \quad (8a, b)$$

$$\text{- Moment de torsion pure} : C_S(Z) = GJ_S \cdot \theta_S'(Z) = M_Z(Z)O \quad (9a)$$

$$\text{- Bimoment} : B_S(\xi) = \int_Z^H C_S(\tau) d\tau \quad (9b)$$

En combinant (6 et 9) on obtient :

$$\theta_S(\xi) = \frac{B_Z(o)}{GJ_S} \mu_o(\xi) \quad (10 a)$$

$$\theta_S'(\xi) = \frac{M_Z(o)}{GJ_S} \tau_o(\xi) \quad (10 b)$$

Torsion mixte :

$EJ_\omega \neq o$ et $GJ_S \neq o$, l'angle de torsion θ_S d'une section de la console vérifie l'équation différentielle :

$$EJ_\omega \cdot \theta_S'''(Z) - GJ_S \cdot \theta_S''(Z) = m_Z(Z) \quad (11)$$

et les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(o) = 0, \quad K_\omega \cdot \theta_S'(o) = EJ_\omega \cdot \theta_S''(o) \end{array} \right. \quad (12a, b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(H) = 0, \quad -EJ_\omega \cdot \theta_S'(H) + GJ_S \cdot \theta_S(H) = o \end{array} \right. \quad (12c, d)$$

$$C_K(Z) + C_S(Z) \bullet = M_Z(Z) \quad (13) \text{ équation d'équilibre des moments de torsion.}$$

$$C_K = EJ_\omega \bullet \theta'' \quad \text{moment de torsion fléchié.}$$

$$C_S = GJ_S \bullet \theta' \quad \text{moment de torsion pure.}$$

Après intégration entre Z et H de (13) on obtient l'équation d'équilibre des bimoments:

$$B_Z(Z) = B_K(Z) + B_S(Z) \quad (14)$$

$$B_K(Z) = EJ_\omega \bullet \theta''(Z) \quad (15a)$$

$$B_S(Z) = GJ_S \bullet \theta(Z) \quad (15b)$$

En remplaçant $EJ_\omega \bullet \theta''$ dans (11) l'équation différentielle devient :

$$B_K''(Z) - \lambda^2 B_K(Z) = m_Z(Z) \quad (16)$$

$$\text{Avec } \lambda^2 = GJ_S/EJ_\omega \quad (17)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_\varphi \bullet B_K - B_K'(o) = M_Z(o) \end{array} \right. \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_K(H) = o \end{array} \right. \quad (19)$$

$$\text{Avec : } \lambda_\varphi = GJ_S/K_{\varphi\omega} \quad (20)$$

la première condition résulte de l'équation d'équilibre (13)

$$\text{pour } Z = o, \text{ en y posant } C_K(o) = -B_K'(o)$$

$$C_S(o) = GJ_S \bullet \theta'(o)$$

$$\text{Avec : } \theta'(o) = B_K'(o)/K_{\varphi\omega}$$

Dans ce qui suit, on va intégrer l'équation (16) au lieu de (11) en exprimant sa solution en fonction du degré d'encastrement β

$$\text{Avec } \beta = \frac{B_K(o)}{B_K(o)} = \frac{\text{Bimoment d'encastrement élastique}}{\text{Bimoment d'encastrement parfait}}$$

on aura la solution générale de (16) :

$$B_K(Z) = B_K(o)ch(\lambda Z) + \frac{B_K'(o)}{\lambda} \Delta h(\lambda Z) + f(Z) \quad (21)$$

Avec $f(Z)$ fonction dépendante de $m_Z(Z)$. On en déduit le bimoment d'encastrement élastique :

$$B_K(o) = \left[\frac{sh(\lambda H)}{\lambda} M_Z(o) - f(H) \right] \left[ch((\lambda H) + \frac{\lambda \phi}{\lambda} sh(\lambda H) \right] \quad (22)$$

D'après les conditions aux limites (18) et (19) on aura le bimoment d'encastrement parfait :

$$B_K^*(o) = \frac{1}{ch(\lambda Z)} \left[\frac{sh(\lambda H)}{\lambda} M_Z(o) - f(H) \right] \quad (23)$$

D'après les conditions aux limites : $B_K'(o) = -M_Z(o)$

$$B_K(H) = 0$$

$$\text{On aura alors : } \beta = 1 / \left(1 + \frac{\lambda \phi}{\lambda} th(\lambda H) \right) \quad (24a)$$

$$\frac{\lambda \phi}{\lambda} = \frac{1 - \beta}{\beta} \coth(\lambda H) \quad (24b)$$

D'après ce qui précède la solution (21) avec les C.A.L

$$B_K'(o) = \beta \cdot B_K^*(10)$$

$$B_K(H) = 0$$

$$\text{Prend la forme: } B_K(Z) = B(\lambda Z) - \frac{B(\lambda H)}{\Delta h(\lambda H)} \Delta h \lambda Z \quad (25a)$$

$$\text{où } B(\lambda Z) = \beta \cdot B_K^*(o) \cdot ch(\lambda Z) + f(Z) \quad (25a)$$

On en déduit alors : Moment de torsion fléchie C_K

Moment de torsion pure C_S

en fonction de " λZ "

$$\begin{cases} C_K(\xi) = M_Z(o) \cdot \tau_K(\xi) \\ B_K(\xi) = B_Z(o) \cdot \mu_K(\xi) \end{cases} \quad (26a,b)$$

$$\begin{cases} C_S(\xi) = M_z(o) \cdot \tau(\xi) \\ B_S(\xi) = B_z(o) \cdot \mu(\xi) \end{cases} \quad (27a,b)$$

ou les coefficients sans dimension τ_K , μ_K et τ , μ sont liés par la relation :

$$\begin{cases} \tau(\xi) = \tau_o(\xi) \cdot \tau_K(\xi) \\ \mu(\xi) = \mu_o(\xi) \cdot \mu_K(\xi) \end{cases} \quad (28a,b)$$

L'angle de torsion θ et sa dérivée θ' sont déduits des relations :

$$\begin{aligned} C_S &= GJ_S \cdot \theta' \\ B_S &= GJ_S \cdot \theta \end{aligned}$$

D'après les expressions (27) on a :

$$\begin{cases} \theta(\xi) = \frac{B_z(o)}{GJ_S} \mu(\xi) \\ \theta'(\xi) = \frac{M_z(o)}{GJ_S} \tau(\xi) \end{cases} \quad (29a,b)$$

Expressions analytiques de μ_k et τ_k pour quatre cas de charge, avec :

$$F_1(\lambda Z) = ch(\lambda Z) - 1$$

$$F_2(\lambda Z) = sh(\lambda Z) - \lambda Z$$

$$F_3(\lambda Z) = ch(\lambda Z) - \frac{(\lambda Z)^2}{2} - 1$$

a) Charge uniforme :

$$\tau_k(\zeta) = \frac{\lambda H}{2} \frac{B(\lambda H)}{sh(\lambda H)} ch(\lambda H \zeta) - \left(\frac{\lambda H}{2} f \cdot \frac{F(\lambda H)}{ch(\lambda H)} + \frac{1}{\lambda H} \right) sh(\lambda H \zeta)$$

$$\mu_k(\zeta) = B(\lambda H \zeta) - \frac{B(\lambda H)}{sh(\lambda H)} sh(\lambda H \zeta)$$

$$\text{Avec : } B(\lambda H) = f \cdot \frac{F(\lambda H)}{ch(\lambda H)} ch(\lambda H \zeta) + 2 \frac{F_1(\lambda H \zeta)}{(\lambda H)^2}$$

$$F(\lambda H) = 2 \frac{sh(\lambda H)}{\lambda H} - 2 \frac{F_1(\lambda H)}{(\lambda H)^2}$$

b) Charge triangulaire

$$\tau_k(\zeta) = \frac{2\lambda H}{3} \frac{B(\lambda H)}{sh(\lambda H)} ch(\lambda H \zeta) - \left(\frac{2\lambda H}{3} f \cdot \frac{F(\lambda H)}{ch(\lambda H)} sh(\lambda H \zeta) \right) - 2 \frac{F_1(\lambda H \zeta)}{(\lambda H)^2}$$

$$\mu_k(\zeta) = \text{comme précédent}$$

$$B(\lambda H) = f \cdot \frac{F(\lambda H)}{ch(\lambda H)} ch(\lambda H \zeta) + 8 \frac{F_3(\lambda H \zeta)}{(\lambda H)^4}$$

$$F(\lambda H) = \frac{4sh(\lambda H)}{3\lambda H} - \frac{8F_3(\lambda H)}{(\lambda H)^4}$$

d) Charge concentrée

$$\tau_K(\zeta) = f \left[ch(\lambda H \zeta) - \frac{sh(\lambda H)}{ch(\lambda H)} sh(\lambda H \zeta) \right]$$

$$\mu_K(\zeta) = \frac{f}{\lambda h} \left[\frac{sh(\lambda H)}{ch(\lambda H)} ch(\lambda H \zeta) - sh(\lambda H \zeta) \right]$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. Z. Vlassov, "Pièces longues en voiles minces"
Editions Eyrolles, Paris 1951
- [2] M. Larédo, "Grands bâtiments"
Eyrolles, Paris 1977
- [3] K. Anastassiadis, "Analyse statique tridimensionnelle du contreventement des bâtiments. La méthode des trois pivots".
Annales ITBTP N° 452, Fev 1987
- [4] K. Anastassiadis, "Caractéristiques élastiques spatiales des bâtiments à étages"
Annale ITBTP N° 435, Juin 1985
- [6] K. Anastassiadis, "Calcul statique des contreventements par la méthode des trois pivots"
Annale ITBTP N° 498, Nov 1991
- [7] M. MEDDEB "Projet de fin d'études : calcul des structures",
E.N.P. 1991.
- [8] M. Albiges et J. Goulet, "Contreventement des bâtiments".
Annale ITBTP série TMC/38, Mai 1960
- [9] E. Absi, "Stabilité des bâtiments de grande hauteur".
Annale ITBTP, série TMC/231, N°380, Fev 1980
- [10] Mark Fintel, "Handbook of concrete engineering".
- [11] BISWAS et TSO, "Three dimensional analysis of shear wall buildings to lateral loads"
ASCE, Vol. 100, N° ST5, Mai 1974
- [12] J. Gluck, "Lateral - load analysis of asymmetric multistory structures",
ASCE, Vol. 96, N° ST2, Fev 1960
- [13] Stamato et Mancini, "Three dimensional interaction of walls and frames"
ASCE, Vol. 99, N° ST12, Dec 1973

- [14] B. Taranath, "Analysis of interconnected open section shear wall structures"
ASCE, Vol. 101, N° ST11, Nov 1975

- [15] E. Wilson, "Logiciel SAP80"
CSI, 1986

- [16] Mme Baouche, "Notes de cours d'ouvrages et structures"

- [17] Mr Demidem, "Notes de cours du calcul automatique des structures"

- [18] L. Talbi, "Projet de fin d'études : Calcul d'une tour en béton armé"
Université de Constantine, 1992

- [19] S. Timoshenko, "Théorie de la stabilité élastique"
Editions Dunod, Paris 1966

- [20] S. Timoshenko, "Résistance des matériaux"
Editions Dunod, Paris 1966

- [21] DTR B.C. 2-48 "RPA 88"

- [22] DTR 2-2 sur les charges et les surcharges d'exploitation.