

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE STATIQUE ET DYNAMIQUE
PAR ELEMENTS FINIS DU
COMPORTEMENT DE FONDATIONS
EN TENANT COMPTE DE
L'INTERACTION SOL-STRUCTURE

Proposé par :

Mr MESSAFER
Mr ZAGHLACHE

Etudié par :

Mr MESSAOUD M.
Mr ROGAI H

Dirigé par

Mr MESSAFER
Mr ZAGHLACHE

PROMOTION

1993

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا

DEDICACES

Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents,

Mes frères et soeur ,

Tous mes amis.

Hychem

Je dédie ce travail à

Tous les martyrs,

Mon père et ma mère,

Mes frères d'EL OUERTILANI,

Mes soeurs,

Arab M et El hadj M.

Mustapha

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier tout particulièrement pour l'intérêt qu'ils ont témoigné à l'égard de notre travail et pour les précieux conseils et encouragements: Mr ZAGHLACHE et Mr T.MESSAFER.

Nous remercions également:

Les enseignants de l'ENP ayant contribué à notre formation de polytechniciens.

Le personnel de la bibliothèque et du centre de calcul pour l'effort qu'ils ont fourni.

Les étudiants de poste graduation de l'ENP, particulièrement Mr S.BOUZIANE pour ses conseils.

Nos amis étudiants de l'ENP qui nous ont soutenu et encouragé, plus particulièrement

Mr N.AMOURA, Mr T.BENZADI

Mr N.SMARGHI et Mr M.LACHAA

A tous les amis qui nous ont aidés sans compter nous adressons nos sincères remerciements.

H. MESSAOUD, H. ROGAI

ملخص

يهدف بحثنا هذا إلى دراسة أساسيات تحت حمولات ساكنة أو ديناميكية باستعمال العناصر المحدودة آخذين بعين الاعتبار التأثير المتبادل بين التربة والمنشأة.

Abstract

The subject of this work is the application of finite element method for studying, in static and dynamic cases, the behaviour of foundations upon elastic soil with taking into account the phenomenon of soil -structure interaction.

Résumé

L'objet de ce mémoire est l'application de la méthode des éléments finis pour l'étude, dans le cas statique et le cas dynamique, le comportement de fondations sur sol élastique avec la prise en compte de phénomène d'interaction sol-structure

SOMMAIRE

CHAPITRE 1: INTRODUCTION

CHAPITRE 2: COMPORTEMENT MECANIQUE DES SOLS

I/ INTRODUCTION

1/ LOI DE COMPORTEMENT

2/ DESCRIPTION EXPERIMENTALE

II/ CHARGEMENT STATIQUE

III/ CHARGEMENT DYNAMIQUE

*1/ PHENOMENE DYNAMIQUE DANS LES SOLS ET ETATS LIMITES
ASSOCIES*

2/ MODELES DYNAMIQUES.

CHAPITRE 3: PRESENTATION GENERALE DE L'ANALYSE DYNAMIQUE D'UN SYSTEME

I/ INTRODUCTION

II/ CARACTERISTIQUES ESSENTIELLES D'UN PHENOMENE DYNAMIQUE

III/ FORMULATION DES EQUATIONS DE MOUVEMENT

IV/ L'OSCILLATEUR SIMPLE

V/ EXCITATION D'APPUI

CHAPITRE 4 : INTERACTION SOL -STRUCTURE

INTRODUCTION

A/ CAS STATIQUE

B/ CAS DYNAMIQUE

I/ INTRODUCTION

II/ FORMULATION D'UN PROBLEME D'I.S.S

III/ DEFINITION DE L'IMPEDANCE D'UNE FONDATION

IV/ METHODE DES SOUS-STRUCTURES

V/ METHODE HYBRIDE

VI/ METHODES GLOBALES

CHAPITRE 5: PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

I/ INTRODUCTION

II/ FORMULATION DE LA M.E.F

III/ QUELQUES TYPES D'ELEMENTS

IV/ CONVERGENCE

V/ FORMULATION ISOPARAMETRIQUE

CHAPITRE 6: METHODE NUMERIQUES

INTRODUCTION

I/ INTEGRATION NUMERIQUE

II/ RESOLUTION DES SYSTEMES PROPRES

III/ DETERMINATION DES VALEURS PROPRES ET DES VECTEURS

PROPRES

IV/ RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS DU SECONO ORDRE

CHAPITRE 7: PROGRAMMATION

I/ INTRODUCTION

II/ PRINCIPALES SUBROUTIENES APPELEES

III/ ORGANIGRAMMES

CHAPITRE 8: APPLICATIONS

A/ TESTS SUR LE PROGRAMME

1- PROBLEME STATIQUE

2- DETERMINATION DE VALEURS PROPRES

B/ APPLICATIONS AU CAS DE FONDATION SUR SOL ELASTIQUE

I/ CAS STATIQUE

II/ CAS DYNAMIQUE

CONCLUSION GENERALE

ANNEXES

BIBLIOGRAPHIE

Chapitre 1

Introduction

L'analyse de l'interaction sol-structure a reçu ces dernières années une attention considérable. Les études qui ont été faites dans les deux cas statique et dynamique ont prouvé l'importance de la prise en compte de ce phénomène qui constitue jusqu'à présent un champ très vaste et qui attire de plus en plus les chercheurs.

Généralement l'interaction sol-structure n'est prise en compte que dans le cas d'ouvrages exceptionnels tels que les centrales nucléaires et grands bâtiments.

Pour de telles structures la supposition de fondations infiniment rigides ne reflète pas exactement la réalité physique, et le comportement du système constitué par le sol et la structure ne peut être compris véritablement que lorsqu'on tient compte des paramètres définissant les rigidités correspondantes aux deux composantes (sol et structures).

Les premières études du phénomène ont débuté dans le cas de problèmes de statique, puis se sont développées pour des analyses dynamiques, c.à.d lorsqu'on est face à des problèmes de vibrations de machines ou des problèmes de séismes.

Il a été fort remarqué que le comportement d'une des composantes (sol ou structure) nécessite la prise en compte de l'existence de l'autre (structure ou sol), c.à.d que le mouvement du sol est perturbé lorsque la structure existe, aussi pour la structure qui ne peut être considérée comme encastree dans un milieu infiniment rigide.

La rigidité (ou flexibilité) d'une des deux composantes a un rôle très important dans le comportement de l'autre et ce phénomène s'observe surtout pour les ouvrages exceptionnels soumis à des chargements importants.

Les méthodes de prise en compte de l'interaction entre un sol et une structure se sont développées aussi, et la nécessité au recours à des méthodes numériques sur ordinateur est vital.

Avec le développement spectaculaire du monde de l'informatique c'est à dire de calculateurs plus puissants et rapides, les méthodes numériques, comme dans tous les problèmes d'engineering, ont trouvé leur place dans le domaine de la mécanique des sols et fondations, qui relèvent des problèmes des milieux continus, donc régis par des équations différentielles qui doivent être résolues numériquement, généralement grâce à la discrétisation pour se ramener à des équations algébriques.

Dans notre travail, on s'est intéressé à une méthode très efficace pour ce genre de problèmes, c'est la méthode des éléments finis, pour des raisons d'avantages qu'elle présente.

La méthode des éléments finis (M.E.F) s'applique parfaitement aux milieux hétérogènes, donc pour un sol multicouches le problème ne se pose pas. Le système constitué de structure ou fondation avec le sol, constitué de matériaux différents, donc le système est hétérogène et la méthode des éléments finis permet par conséquent la détermination simultanée de la réponse du système sol + structure sous un chargement, qu'il soit au niveau de la structure (statique ou vibration de machines par exemple) ou au niveau du sol comme dans le cas des séismes.

Toutefois, quelques problèmes se posent tels que celui des conditions aux limites, qui comme même peuvent être évités en imposant des C.A.L particulières. Aussi, les dimensions des problèmes étant importantes surtout si l'étude se fait en tridimensionnel, mais là encore, il est toujours possible de se ramener à un cas bidimensionnel par le biais de procédures appropriées.

En ce qui concerne le contenu de ce mémoire , il s'agit de l'étude du phénomène de l'interaction entre fondation et sol par la M.E.F dans le cas d'élasticité linéaire en adoptant un modèle bidimensionnel , les deux cas, statique et dynamique, ont été abordés , et des conclusions intéressantes ont découlé à partir d'exemples simples d'applications numériques.

Chapitre 2

Comportement mécanique des sols

1/ INTRODUCTION :

Une description complète du comportement du sol est obtenue si, partant d'un état d'équilibre caractérisé par un champ de contraintes σ et un champ de déformation ϵ , il est possible de déterminer le nouvel état de déformation obtenu après application d'un incrément de contrainte $d\sigma$.

Cette description est obtenue à l'aide de la loi de comportement du sol.

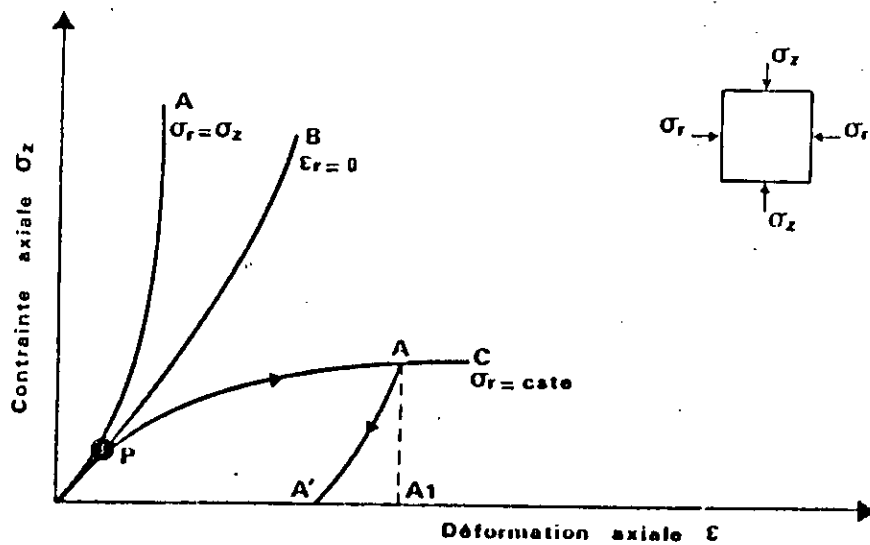
1)- LOI DE COMPORTEMENT :

Sa détermination se fait, dans le cadre d'une théorie donnée à partir d'un petit nombre de résultats expérimentaux. Le modèle ainsi déterminé permet d'évaluer le comportement du sol soumis à des chemins de contraintes quelconques. Ces chemins de contraintes sont généralement plus complexes que ceux ayant servi à l'établir.

Le modèle doit être formulé en contraintes effectives puisque, le comportement du sol, est régi par ces contraintes.

2)- DESCRIPTION EXPERIMENTALE :

La deuxième approche, plus pragmatique, relève d'une démarche courante en mécanique des sols. Elle consiste à anticiper le mode de chargement auquel va être soumis en place un élément de sol. Le comportement du sol sous ce type de chargement est alors caractérisé par une courbe effort-déformation qui est directement utilisée pour rendre compte du comportement du sol en place.



Figⁿ1ⁿ : Courbe effort-déformation
chargement quasi-statique monotone.

L'examen de ces résultats expérimentaux montre que :

- Pour des déformations faibles : le sol a un comportement élastique linéaire

- L'expérience montre que tant que les déformations relatives linéaires ou angulaires, restent inférieurs à une limite que l'on peut estimer à 10^{-4} , on peut alors considérer cette valeur comme étant une limite d'un domaine élastique conventionnel à l'intérieur du quel le comportement du sol reste linéaire

- Au delà d'un certain seuil de contrainte et quelque soit le chemin de contraintes suivi le comportement du sol cesse d'être linéaire.

Notons cependant que la non linéarité n'exclurait pas a priori l'hypothèse d'un comportement élastique.

- A partir d'une contrainte suffisamment élevée (point A sur la courbe C), il y a apparition d'une déformation résiduelle si on effectue une décharge de l'échantillon. On remarque qu'il y a eu écrouissage positif des matériaux. En A, la déformation est donc la somme d'une déformation élastique $A'A_1$ récupérable lors d'une décharge, et une déformation irréversible OA' appelée déformation plastique. Le comportement du sol est dit élasto-plastique.

- Pour certains trajets de chargement (courbe C) la déformation devient très importante pour une valeur finie de contrainte appliquée. Le sol atteint un état de rupture

CONCLUSION

Sous chargement quasi-statique monotone le comportement du sol est caractérisé par un domaine d'élasticité, variable au cours du chargement, et au delà du quel apparaissent des déformations plastiques irréversibles. Pour certains chemins de contraintes le sol peut atteindre un état de rupture.

III/ CHARGEMENT DYNAMIQUE :

Certaines des actions susceptibles de s'exercer sur un ouvrage peuvent être à l'origine de sollicitations variables dans le temps. Nous dirons qu'elles présentent un caractère dynamique lorsque les déformations correspondantes sont suffisamment rapides pour que les effets des forces d'inertie mises en jeu cessent d'être négligeables devant ceux de l'action appliquée fictivement de façon statique à chaque instant.

Les charges roulantes, les machines, les percussions et impacts, les vents, les séismes, les explosions sont connus pour produire de semblables effets.

1)- PHENOMENES DYNAMIQUES DANS LES SOLS ET ETATS

LIMITES ASSOCIES

Les sols sont le siège de phénomènes dynamiques, soit qu'ils servent d'assise à un ouvrage sollicité dynamiquement, c'est la structure qui est motrice et communique au sol toute l'énergie qu'il appartient à ce dernier de diffuser et de dissiper, soit que, se trouvant soumis à une excitation dynamique, c'est le sol qui est moteur et injecte dans la structure une partie de l'énergie dont il est porteur.

Les états limites à prendre en considération consistent essentiellement en des ruptures d'équilibre de pentes ou massifs ou encore entassements préjudiciables.

Leur apparition peut être la conséquence de l'entrée en jeu de forces d'inertie excessives c'est à dire d'un processus purement mécanique. Elle peut aussi résulter d'une altération des propriétés physiques ou mécaniques des sols, ou même d'une modification de leur texture sous l'effet des vibrations. Les phénomènes de liquéfaction en fournissent une illustration. Dans ce cas la détermination explicite de la réponse cède alors le pas en importance à la provision du processus cumulatif considéré.

1-1/ VARIABLES CARACTERISANT LA DEFORMABILITE

DYNAMIQUE DES SOLS.

a/ La déformabilité d'un sol en régime dynamique peut être considérée comme entièrement caractérisée par trois variables.

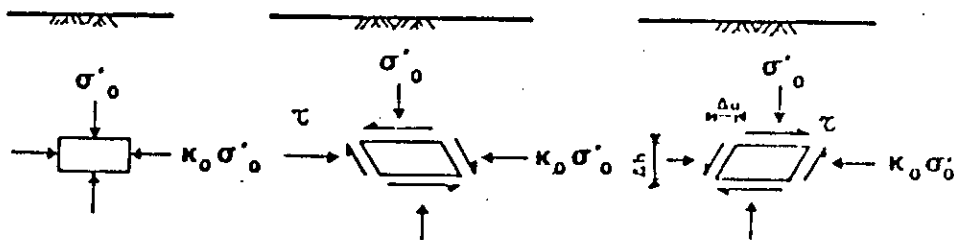
- Le module de déformation par glissement G .
- Le degré d'amortissement ξ (rapport de l'amortissement à l'amortissement critique).
- le coefficient de poisson ν .

Ces trois variables sont en effet, avec la masse volumique ρ , celles qui interviennent de façon à peu près exclusive dans les problèmes de propagation d'onde, d'interaction ou de réponse. Deux d'entre elles, G et ξ sont fortement dépendantes de l'amplitude des déformations.

b/ Le coefficient γ n'est susceptible de varier que dans des limites assez étroites entre sa valeur supérieure absolue de 0,5 (solide incompressible) et des valeurs inférieures qui se situent rarement en dessous de 0,25. Pour un type de sol donné, il est peu sensible aux variations des autres paramètres du sol ou du problème.

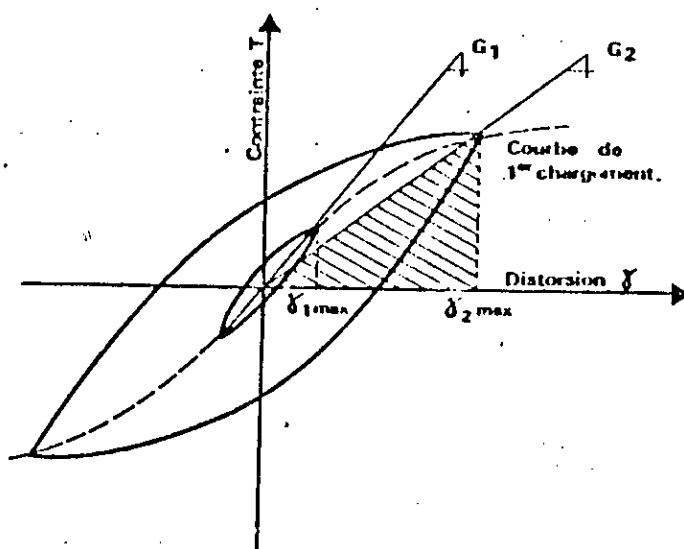
c/ Les variables G et ξ apparaissent quant à elles comme plus particulièrement représentatives des lois déformations contraintes.

Il est d'usage dans les calculs de réponse dynamique d'un projet de sol ou dans les problèmes d'I.S.S que le mouvement sismique a pour origine une onde de cisaillement se propageant verticalement.



"Fig-2 : Séquence de chargement idéalisée

l'enregistrement d'une courbe effort déformation de cisaillement $\tau = f(\gamma)$ est reproduit à la figure (3) pour un cycle de contrainte fermé.



"Fig"-3 : Courbe effort-de formation cyclique
- Amortissement interne -

Courbe du 1^{er} chargement issue de l'origine et pour un cycle de décharge-recharge apparaît une boucle d'hystérésis.

Expérimentalement , on constate que la forme de la boucle d'hystérésis est indépendante de la fréquence d'excitation.

Donc :

L'amortissement propre du sol n'est pas d'origine visqueux mais d'origine hystérique. Ce qui explique la non linéarité importante des sols à fort niveau de déformation.

La description d'un cycle donne lieu à la dissipation d'énergie qui est proportionnelle à la boucle d'hystérésis.

$$\xi = \frac{1}{4\pi} \frac{\text{airdelaboucle}}{\text{airOAH}}$$

On peut définir deux modules de glissement:

G_s : Module sécant , il est en fonction de l'amplitude considéré

G_{max} : Module tangent , il régie les déformations du domaine élastique.

1-2/ AMORTISSEMENT GEOMETRIQUE :

L'amortissement géométrique correspond à une perte d'énergie par propagation à l'infinie des vibrations dans le sol.

Dans tous les cas l'amortissement GÉOMETRIQUE augmente avec la fréquence. Il y correspond une réaction déphasée par rapport au mouvement dont l'importance relative augmente aussi avec la fréquence .

L'amortissement géométrique est beaucoup plus important pour les modes de translation - fréquemment supérieur à 20% - que pour les modes de rotation généralement inférieur à 10%.

2 / MODELES DYNAMIQUES.

2-1/ MODELE ELASTIQUE

Il ressort des constatations précédentes que le sol ne peut être représenté par un MODELE ELASTIQUE, tout au moins sur la plage de déformations étendue. L'étude du comportement du sol à l'intérieur de son domaine d'élasticité est cependant importante car il existe une gamme de problèmes pour lesquels ce modèle est valable ; c'est le cas des vibrations des massifs de machines bien conditionnés, des sollicitations sismiques de faible amplitude comme celles engendrées par des essais géophysiques...

Pour des sollicitations multidirectionnelles la loi de comportement s'écrit sous forme tensorielle:

$$\sigma = C \cdot \varepsilon$$

C: est un tenseur de 4eme ordre dans le cas du matériau isotrope seules (2) composantes suffisent à le définir. Il est commode en dynamique des sols de retenir le module de cisaillement (G) et, soit le coefficient de poisson ν , soit

le module de compressibilité volumétrique K.

La relation donnant G proposée par la plupart des auteurs pour les sols pulvérulents, est de la forme :

$$G_{max} = K \cdot Pa \cdot F(e) \left| \frac{\sigma'_m}{Pa} \right|^n$$

où :

- K et n sont des constantes dépendantes du matériau.
- Pa : pression atmosphérique
- $1/F(e) = 0,3 + 0,7e^2$ $0,4 \leq e < 1,2$ (2.3)
- σ' : contrainte moyenne effective pour les argiles.

$$G_{max} = K \cdot Pa (OCR)^k \cdot F(e) \left| \frac{\sigma'_m}{Pa} \right|^n$$

OCR : rapport de surconsolidation .

k : coefficient qui dépend de l'indice de plasticité.

2-2/ MODELE VISCOELASTIQUE LINEAIRE :

La prise en compte d'un amortissement des types décrits ci-dessus se heurte à des difficultés mathématiques considérables. On est donc amené à substituer à l'amortissement réel un amortissement équivalent du type dit visqueux, plus facile à appréhender dans les calculs.

Un amortissement de ce type est caractérisé par le fait que les forces qu'il met en jeu sont proportionnelles aux vitesses relatives des éléments en présence.

Le solide de VOIGT représente l'un de ces modèles dans lequel le comportement élastique du sol est représenté par un ressort de rigidité G et le comportement visqueux par un amortisseur de viscosité η .

Pour une sollicitation harmonique

$\epsilon(t) = \epsilon^0 e^{i\omega t}$, la loi de comportement est :

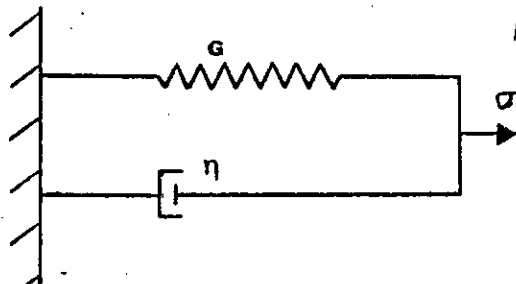
$$\sigma = \lambda^* (\text{trace} \epsilon^0) + 2\mu^* \epsilon^0$$

Pour un cas unidimensionnel la représentation rhéologique est schématisée ci dessus, les paramètres (λ^*, μ^*) ont pour expression:

$$\lambda^* = \lambda + i\omega\lambda'$$

$$\mu^* = \mu + i\omega\mu'$$

Où λ et $\mu = G$ (respectivement λ', μ') sont les constantes d'élasticité (respectivement de viscosité).



-Modèle de KELVIN-VOIGT-

2-2-1/ MODELE VISCOELASTIQUE LINEAIRE EQUIVALENT

SCHNABEL et AL (1972) ont introduit un modèle linéaire équivalent avec amortissement indépendant de la fréquence.

L'équivalence est fonction des caractéristiques du matériau mais également de la sollicitation dans notre cas on prendra pour exemple une sollicitation harmonique.

Le module de cisaillement complexe $\mu^* = G^*$ s'écrit :

$$- G^* = G(1+in) \quad (2-8)$$

Posant $2\beta = n$ la relation (2-9) prend la forme

$$G^* = G(1+2i\beta) \quad (2-10)$$

n : Coefficient de perte du matériau pour les sols il est indépendant de la fréquence de la sollicitation.

Ce modèle a été modifié en 1975 par LYSMER en proposant une formulation différente du module de cisaillement Complexe :

$$G^* = G_0 [1 - 2\beta + 2i\beta\sqrt{1-\beta^2}] = G_0 e^{i\theta}$$

Avec :

$$\beta = \sin\theta/2 = n/2$$

La courbe $(\tau - \gamma)$ de ce modèle est exprimée en modèles complexes par :

$$\tau = G^* \gamma \quad (2-11)$$

- Ce modèle linéaire équivalent doit être utilisé en conjoncture avec un processus itératif permettant de choisir des valeurs de G^* et de B compatible avec le niveau moyen de distorsion induite.

i.e : Le caractère non linéaire du sol est pris en compte de façon approximative.

REMARQUES

- Ces modèles fournissent des accélérations et des contraintes qui se comparent favorablement à celles obtenues à l'aide de modèles plus sophistiqués.

- Ces modèles ont le mérite de simplicité.

- Ils sont limités, car ils ne permettent pas d'introduire la notion de déformations rémanentes

- L'amortissement est vraisemblablement surestimé dans le domaine des hautes fréquences.

Chapitre 3

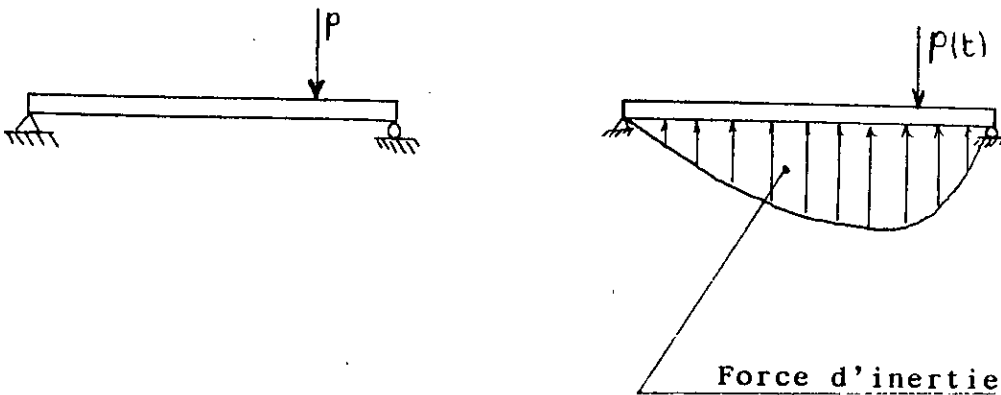
Presentation générale de l'analyse dynamique d'un système

I) INTRODUCTION:

L'objectif fondamental d'une étude dynamique d'un système est la détermination de sa réponse dans le temps lorsqu'il est soumis à un chargement donné variable dans le temps

II) Caractéristiques essentielles d'un phénomène dynamique :

Un problème de dynamique se distingue d'un problème statique par le fait que le chargement varie rapidement dans le temps, donc assez brusque, ce qui crée alors des forces d'inertie qui dépendront de cette brutalité c'est à dire de l'accélération de la force excitatrice.



Chargement statique : P

Chargement dynamique : $P(t)$

III) Formulation des équations de mouvement :

Les expressions mathématiques définissant les déplacements sont appelées équations de mouvement . La solution de telles équations représente l'histoire des déplacements .

Trois procédures permettront la formulation des équations de mouvement :

- Ecriture directe de l'équilibre dynamique en se basant sur le principe de d'Alembert. .

- A partir du principe des déplacements virtuels.

- A partir du principe de Hamilton.

1) Ecriture directe de l'équilibre dynamique à partir du principe de d'Alembert :

Les équations de mouvement d'un système dynamique quelconque sont les expressions de la 2^{ème} loi de Newton selon laquelle le taux d'accroissement de la quantité de mouvement d'une masse quelconque m est égal à la force qui lui est appliquée . Cette relation s'exprime mathématiquement par:

$$P(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) \quad \text{ok} \quad (3.1)$$

ok

$P(t)$: vecteur force appliquée.

$X(t)$: vecteur position de la masse m .

Lors que m est indépendante du temps ; (3.1) devient :

$$P(t) = d^2x/dt^2 = m\ddot{x}$$

$$\text{ou bien } p(t) - m\ddot{x} = 0 \quad (3.2)$$

ou $m\ddot{x}$ est la force d'inertie , elle s'oppose à l'accélération de la masse . Cette loi selon laquelle une masse produit une force d'inertie proportionnelle et opposée à son accélération est connue comme étant le principe de d'Alembert .

2) Principe des déplacements virtuels :

Si la structure est relativement complexe , si elle comprend plusieurs points massiques ou plusieurs corps finis liés entre eux , l'écriture directe de l'équilibre peut s'avérer très complexe on peut donc abandonner la première formulation (de d'Alembert) et formuler les équations de mouvement en utilisant le principe des déplacements virtuels qui s'exprime comme suit :

Si un système qui est en équilibre sous l'action d'un ensemble de forces est soumis à un déplacement virtuel , alors le travail total effectué par les forces est nul. Ce qui est donc équivalent à l'expression d'un équilibre .

Les équations de la réponse du système dynamique peuvent donc s'établir de la manière suivante :

On relève toutes les forces agissant sur les masses du système (y compris les forces d'inertie définies selon le principe de d'Alembert) , puis les équations du mouvement sont obtenues en coincidant des déplacements virtuels correspondant à chaque d.d.l et en annulant le travail effectué.

3) Principe de Hamilton :

Une autre méthode consiste à utiliser les grandeurs énergétiques scalaires sous une forme variationnelle. Le principe variationnel le plus généralement applicable est celui de Hamilton qui s'exprime comme suit :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (3-3)$$

ou T : énergie cinétique totale du système .

W_{nc} : Travail des forces non conservatrices.

δ : Variation subie durant l'intervalle du temps considéré .

Le principe de Hamilton peut s'expliquer comme étant la somme nulle de la variation d'énergie cinétique et potentielle et de la variation du travail effectué par les forces non conservatrices .

L'application de ce principe même directement aux équations du mouvement de tout système donné .

On peut appliquer ce principe au cas statique : où l'on a $\dot{T} = 0$ et l'équation (3-2) devient

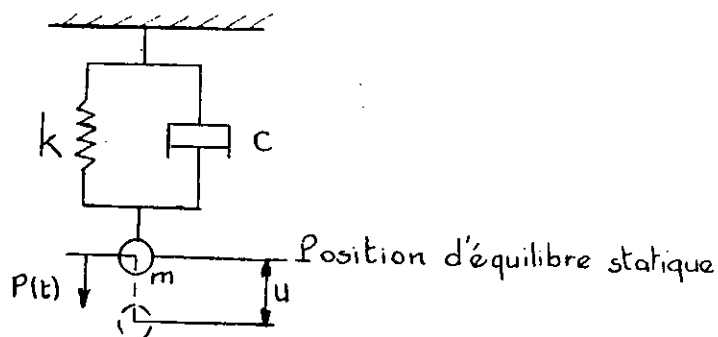
$$\delta (U - Wnc) = 0 \quad (3-4)$$

Qui est d'ailleurs le principe du minimum de l'énergie potentielle.

IV) L'oscillateur simple :

1) Introduction :

Les caractéristiques physique essentielles de tout corps élastique linéaire soumis à un chargement dynamique sont : Sa masse, ses propriétés élastiques (rigidité ou souplesse) , l'amortissement et le chargement .



Oscillateur simple (à un seul d.d.l)

2) Formulation de l'équation de mouvement :

L'équation de mouvement peut être obtenue par n'importe laquelle des trois formulations précédentes .

Si nous appliquons le principe de d'Alembert :

Exprimons l'équilibre :

$$f_i + f_e + f_a + p(t) = 0 \quad (3.5)$$

où:

f_i : Force d'inertie

$$f_i = - m\ddot{u} \quad (3.6)$$

f_e : Force de rappel élastique

$$f_e = - k u \quad (3.7)$$

f_a : Force due à l'amortissement

supposée proportionnelle à \dot{u} (3.8)

$$f_a = - c \dot{u}$$

$p(t)$: Chargement appliqué

En substituant les équations (3.6) , (3.7) et (3.8) dans (3.5) , on obtient :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (3.9)$$

on en déduit l'équation du mouvement :

$$\ddot{u} + (c/m) \dot{u} + (k/m)u = p(t) \quad (3.10)$$

$$\text{avec } \omega^2 = k/m \quad (3.11)$$

ou ω est dite pulsation

3) Oscillations libres :

En l'absence de la force extérieure $p(t)$, la masse oscille librement :

$$\ddot{u} + (c/m) \dot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (3.12)$$

La solution de l'équation (3.12) prend une forme différente selon que l'oscillateur est amorti ou non .

3.1) Oscillateur non Amorti :

$$c = 0 \implies \ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (3.13)$$

La solution de (3.13) est de la forme :

$$u(t) = A \sin (\omega t - \phi) \quad (3.14)$$

Où A et ϕ se déterminent à partir des conditions initiales .

3.2) Oscillateur Amorti :

La solution dependra du coefficient d'amortissement C qui est cette fois ci nul .

Si on pose ξ :
$$\xi = c/2m\omega \quad (3.15)$$

où ξ est le pourcentage d'amortissement critique .

On distingue les trois cas suivants :

a). amortissement critique ($\xi = 1$)

La solution de l'equation (3.12) est de la forme ,

$$u(t) = (A + Bt)e^{-\omega t} \quad (3.16)$$

où A et B sont des constantes à determiner par les C.A.L .

Le mouvement ne comporte pas d'oscillations, la figure 2 illustre $u(t)$ dans ce cas .

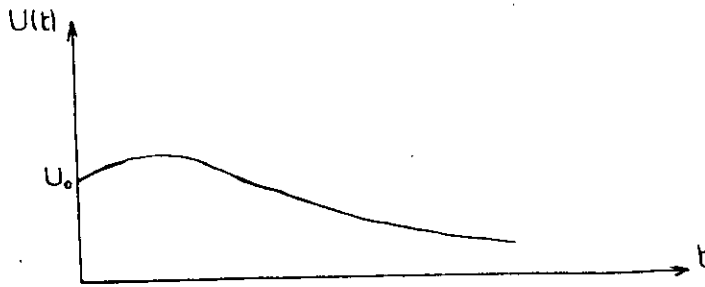


Fig. 2

b) Oscillateur suramorti : ($\xi > 1$)

La solution , dans ce cas ($\xi > 1$) , est de la forme

$$U(t) = (Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}) e^{-\xi \omega t} \quad (3.17)$$

où

$$\omega_0 = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (3.18)$$

La aussi , le mouvement ne présente pas d'oscillations.

c) Oscillateur sous amorti : ($\xi < 1$)

c'est le cas dont nous nous intéressons en analyse dynamique pratique , car les systèmes à étudier ont toujours un amortissement inférieur à l'amortissement critique .

La solution , cette fois ci , est de la forme :

$$U(t) = (A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t) e^{-\xi \omega t} \quad (3.19)$$

Le mouvement est pseudo-periodique (fig 4) , l'amplitude décroît avec le temps à cause de l'amortissement . la pseudo-période a pour valeur :

$$T = 2\pi / \omega_0 \quad (3.20)$$

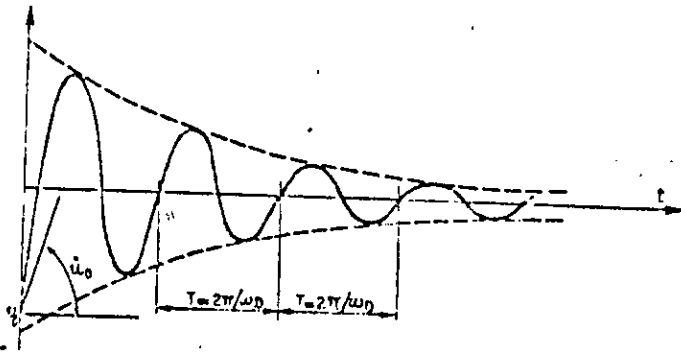


fig. 4

4/ Oscillations forcées:

On examinera l'oscillateur simple initialement au repos, ($u_0 = 0$ et $\dot{u}_0 = 0$), et soumis à une force $p(t)$ qui peut être harmonique ou non.

4-1/ Cas de l'excitation harmonique:

Soit $p(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t$ (3.21)

$p(t)$ peut être, par exemple, une force engendrée par une machine tournante à une vitesse angulaire $\bar{\omega}$.

L'équation de mouvement, dans ce cas, est:

$$\ddot{U} + 2\xi\omega\dot{U} + \omega^2 U = (p_0/m) \sin \bar{\omega}t \quad (3.22)$$

Dans le cas d'un oscillateur sous amorti, la solution de l'équation (3.22) est de la forme:

$$U = (A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t) e^{-\xi\omega t} + (p_0/k) \lambda \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (3.23)$$

$$\text{où } \lambda = 1/\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \quad (3.24)$$

$$\beta = \bar{\omega}/\omega \quad \theta = \text{arctg}(2\xi\beta/(1-\beta^2))$$

θ est le déphasage entre la force excitatrice et les vibrations de la masse.

- Le premier terme définit le mouvement transitoire qui est amorti et disparaît donc rapidement.

- Le deuxième terme définit le mouvement permanent qui s'effectue avec la même pulsation $\bar{\omega}$ que la force excitatrice, et qui après un certain moment lorsque le mouvement transitoire s'annule il reste le seul mouvement du système.

La fig.5, illustre le mouvement d'un système dans le cas d'oscillation forcée.

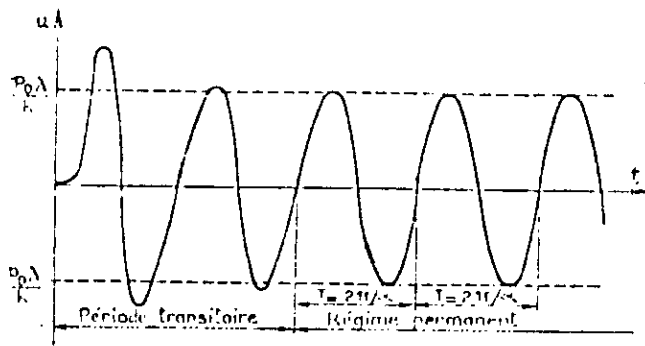


Fig.5 oscillation forcée, cas de l'excitation harmonique

- Le coefficient p/k représente le déplacement statique du ressort sous l'action de P_0 .
- Le coefficient λ est dit coefficient d'amplification dynamique qui dépend de β et de ξ (fig.6 : p 38)

On remarque que la réponse de l'oscillateur à une excitation $p(t)$ de la pulsation propre du système (ω).

Aussi, il est à noter que lorsque ω coïncide avec $\bar{\omega}$, le coefficient d'amplification est maximum et est plus important lorsque le pourcentage d'amortissement ξ est moins important on dira dans ce cas ($\beta = \bar{\omega}/\omega = 1$) que le système est rentré en résonance.

4.2/ Cas d'une excitation dynamique quelconque

Si $p(t)$ est quelconque dans le temps, à ce moment là on utilise l'intégrale de Duhamel pour donner la solution $U(t)$:

$$U(t) = (1/m\omega_0) \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin(\omega_0(t-\tau)) d\tau \quad (3.27)$$

Pendant le temps d'application de la force $p(t)$, la masse est soumise à des sollicitations forcées, auxquelles succèdent des oscillations libres amorties (fig.8 : p.38).

V/ INFLUENCE D'UNE EXCITATION D'APPUI (cas de séisme).:

Pour tenir compte du mouvement du sol en cas de séisme, on impose au point A (fig.9) un déplacement horizontal variable avec le temps

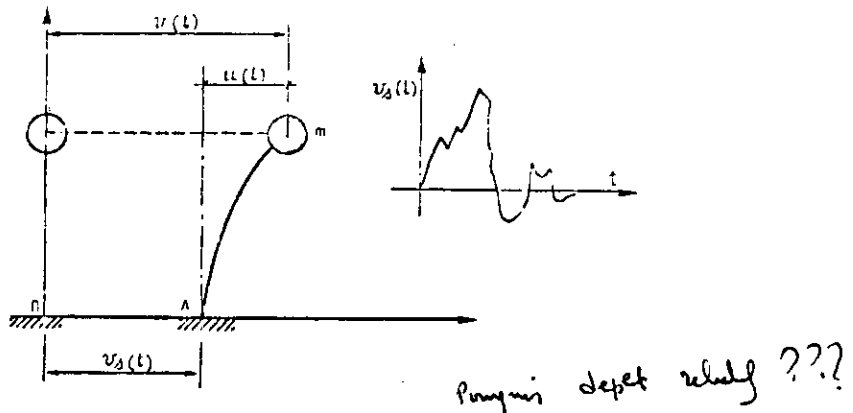


Fig.9 Excitation par déplacement d'appui

Les déplacements de la masse M sont mesurés soit dans un repère relatif lié au point A:

(déplacement $U(t)$); soit dans un repère absolu:

(déplacement $V(t)$).

$$V(t) = U(t) + v_s(t)$$

(3.28)

$$\text{d'où : } \ddot{U} + (c/m) \dot{U} + \omega^2 U = p(t)/m \quad (3.29)$$

$$\text{et } p(t) = -m\ddot{V}_s(t) \quad (3.30)$$

On voit qu'on se ramène à l'étude d'un oscillateur simple dans le repère relatif en supposant la masse soumise à une force fictive :

$$p(t) = -m\ddot{V}_s(t)$$

proportionnelle à l'accélération absolue du point d'appui A .

Remarque :

L'étude de l'oscillateur simple est fondamentale pour la raison que l'analyse dynamique d'un système après sa discretisation se ramène à l'analyse d'un certain nombre d'oscillateurs simples.

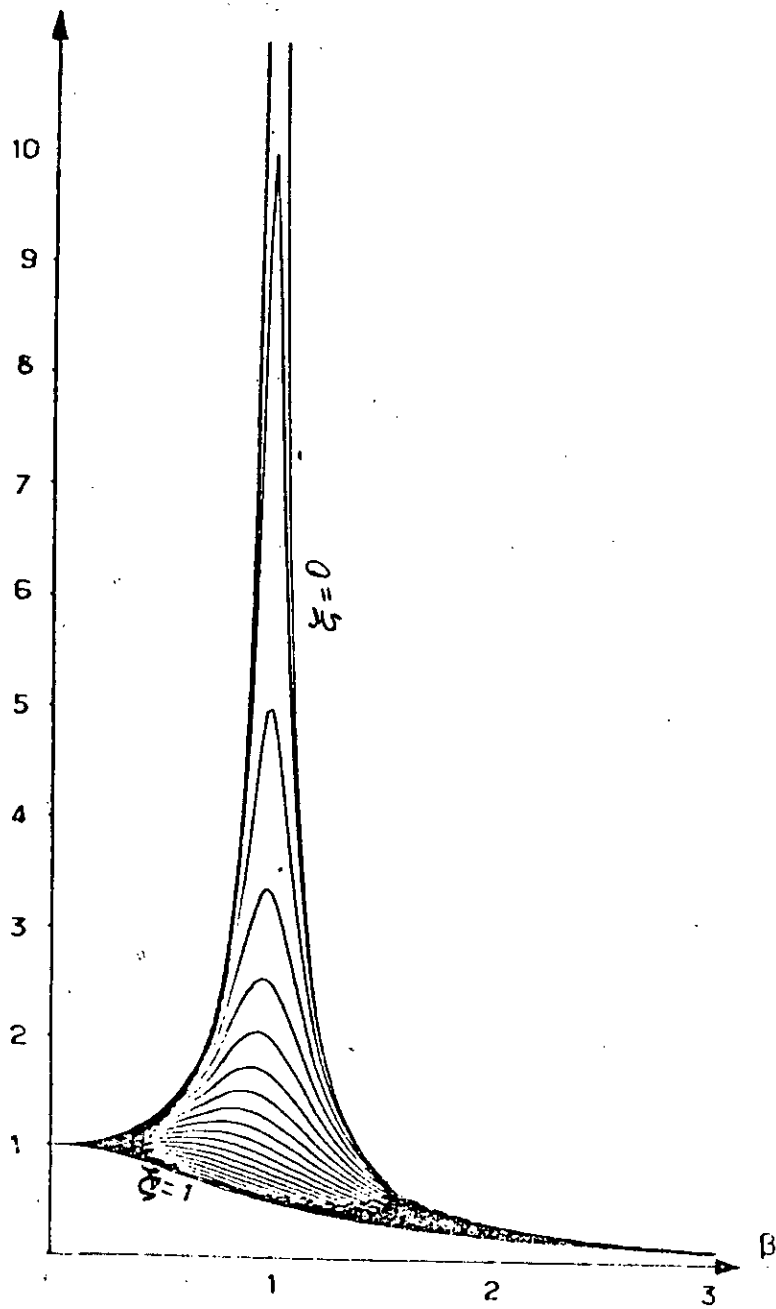


fig. 6

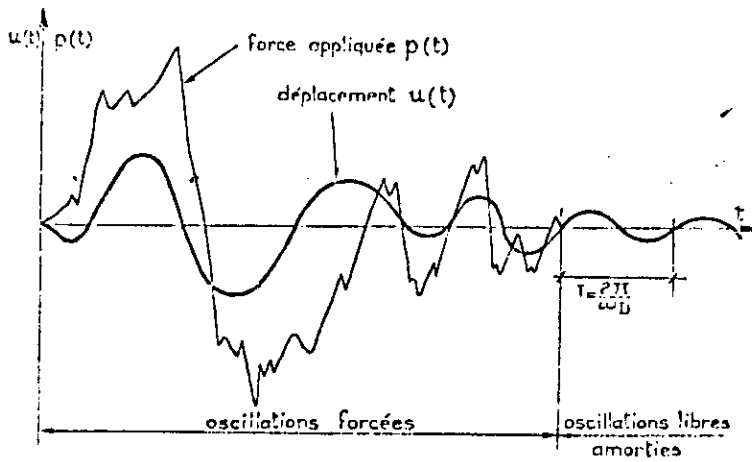


fig 8

Chapitre 4

Intéraction Sol-Structure

INTRODUCTION :

Dans le cas d'ouvrages exceptionnels, ou de grands bâtiments, il est nécessaire de considérer en même temps la structure et le sol qui la supporte comme un seul système. En d'autres termes, lorsqu'on procéde à l'analyse d'une composante (resp. sol ou structure) il faut tenir compte de la présence de l'autre (resp. structure ou sol) et cette prise en compte de l'interaction sol-structure (I.S.S) est influencée par les caractéristiques géométriques et matérielles du système sol-structure.

En ce que concerne le sol, il y a lieu de considérer sa rigidité, son homogénéité (ou hétérogénéité), l'existence de multicouches, les limites (s'il y a un substratum rigide), tous ces facteurs sont importants pour l'analyse de la réponse de la structure.

Quand à la structure, il y a lieu de considérer le type de fondations, sa rigidité, sa géométrie qui influent aussi sur la réponse du sol.

Le chargement peut quand à lui, être appliqué soit sur la structure (statique ou dynamique), soit au niveau du sol (séisme).

Dans le cas où c'est un chargement dynamique au niveau du sol (séisme), la structure en oscillation imprime au sol des sollicitations variables perturbant ainsi le mouvement moteur et renvoyant au sol une partie de l'énergie qu'elle reçoit.

Dans le cas d'un chargement dynamique au niveau de la structure — machines tournantes — les forces d'inertie développées dans le sol réagissent sur le mouvement du socle.

Dans les deux cas, les processus mécaniques, mis en jeu sont les mêmes. La différence s'introduit surtout au niveau de la pratique courante qui, selon qu'elle néglige, simplifie, ou au contraire prend en compte de façon exhaustive les phénomènes d'I.S.S, accorde une prépondérance plus ou moins exhaustive à l'un ou l'autre des aspects ci-dessus.

Dans ce qui suit nous présenteront dans les 2 cas, statique et dynamique les méthodes principales de prise en compte de l'interaction sol-structure.

A/ CAS STATIQUE:

Dans une analyse statique, avec prise en compte de l'I.S.S; on étudiera principalement la distribution des pressions à la base de la structure, c.a.d sous la fondation ainsi que les déformations de cette dernière et ceci dépendra, comme on l'a signalé ci dessus, des caractéristiques du sol et de la fondation (rigidités).

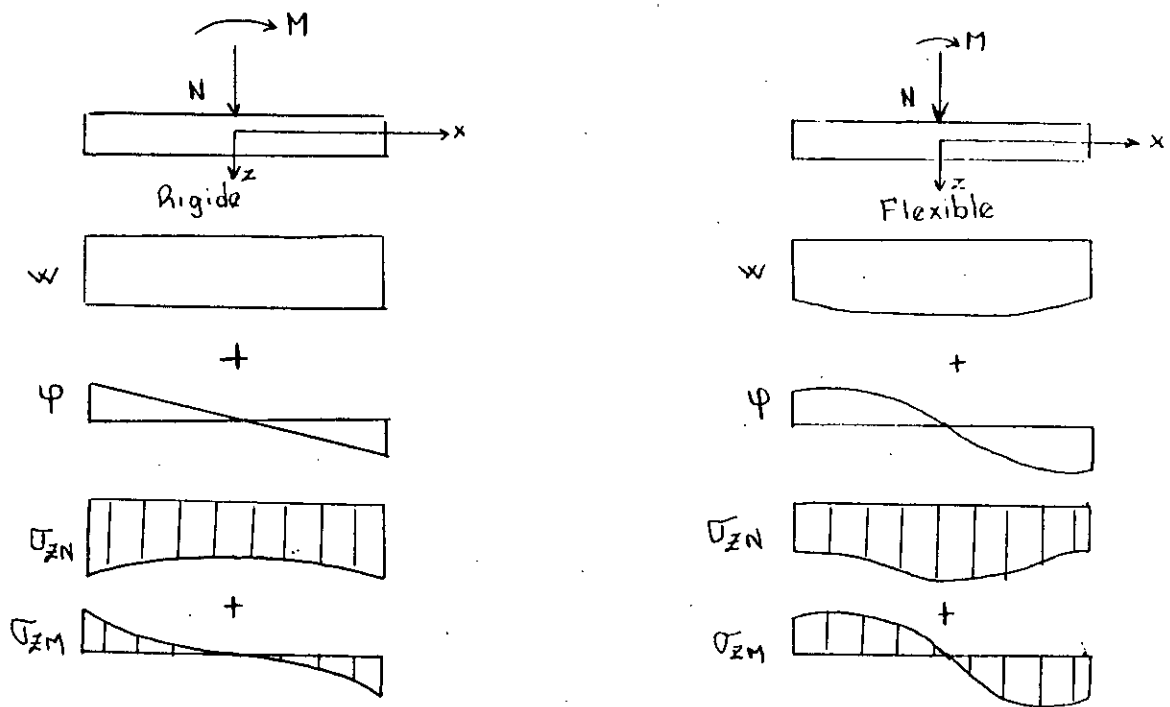


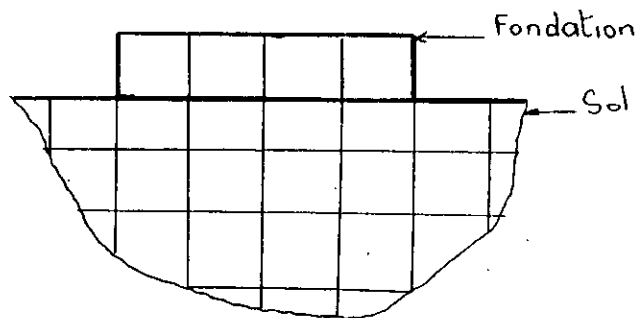
FIG 4.1

Les deux modèles les plus couramment utilisés pour tenir compte de l'interaction sol structure sont:

- Le modèle de Winkler
- La modélisation par éléments finis (MEF)



MODELE DE WINKLER



MODELE ELEMENTS FINIS.

FIG 4.2

Le modèle de Winkler suppose que pour un déplacement d'un ressort, la pression de contact q est donnée par:

$$q = K_s \cdot \delta$$

où K_s est le coefficient de réaction sous fondation. La fondation est ainsi représentée par un certain nombre de ressorts tous indépendants les uns des autres. Les hypothèses de Winkler supposent que K_s ne dépend pas de l'intensité du chargement, mais de la nature du sol. l'avantage du modèle réside dans sa simplicité de mise en oeuvre mais reste un problème majeur, celui de la détermination de K_s .

La M.E.F par contre (qu'on présentera dans le chapitre 5) reflète mieux la continuité du milieu et permet de représenter les complexités (multicouches) qui peuvent y avoir et les coefficients E_s (de Young), ainsi que ν (module de poisson) sont plus faciles à obtenir (expérimentalement) que K_s dans le modèle de Winkler

REMARQUE :

Il est à noter que K_s peut s'exprimer en fonction de E_s et ν ; ou fonction du type de fondations. Toutefois plusieurs formules ont été proposées:

- Terzagui. proposa (1955),

$$K_s = K_1 \cdot B_f \quad (4.2)$$

Pour les semelles sur sable

$$K_s = K_1 (B+1/2B)^2 \quad (4.3)$$

Pour une semelle rectangulaire $b \times nb$

$$k_s = K_1 \cdot (m + 0,5/1,5m) \quad (4.4)$$

où K_1 est évaluée expérimentalement.

Versic proposa:

$$K_s = K'_s / B$$

$$\text{ou } K'_s = 0,65 \sqrt[3]{(E_s \cdot B^3 / E_f \cdot I_f)} \cdot E_s / (1 - \nu^2) \quad (4.6)$$

E_s, E_f : Modules de young pour sol et fondation

B, I_f : demi largeur de la fondation et moment d'inertie

de fondation

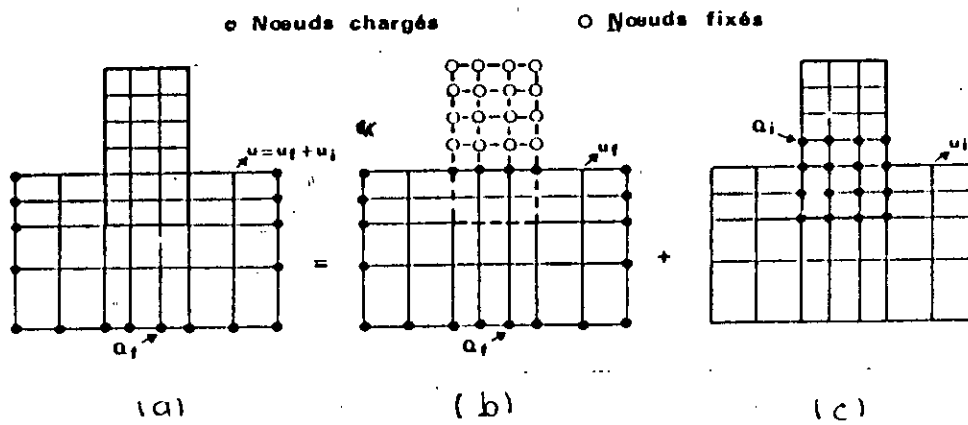
B/ CAS DYNAMIQUE :

I/ INTRODUCTION,

En dynamique, on entend par interaction sol-structure (I.S.S) l'étude du comportement d'une structure soumise à une sollicitation sismique ou de machine vibrante. L'I.S.S traduit la modification du mouvement du sol (ou de la présence de l'autre composante (structure ou sol). Dans le cas dynamique, il est nécessaire d'étudier le comportement du sol sous chargement cyclique. Il est aussi nécessaire, de définir le chargement (Loi de variation) et d'évaluer la réponse du sol en champ libre et celle des structures sous chargement.

II FORMULATION D'UN PROBLEME D'I.S.S:

La complexité de problème est tel que le recours aux méthodes numériques est inévitable, un traitement du phénomène d'I.S.S en éléments finis serait intéressant.



PROBLEME D'INTERACTION = REPOSE EN CHAMP LIBRE + I.S.S

FIG (4.3)

Si M , C , et K sont les matrices respectivement de masse, d'amortissement et de raideur du système.

L'équation du mouvement s'écrit:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = Q_f \quad (4.7)$$

En l'absence de structure:

$$M_f \ddot{u}_f + C_f \dot{u}_f + K_f u_f = Q \quad (4.8)$$

L'indice f désigne le champ libre.

si on pose $U = U_i + U_f$ (4.9)

Les déplacements et les charges appliquées sont schématisés par la fig (4-3).

L'équation (4-9) définit le déplacement d'interaction U_i qui satisfait l'équation:

$$M\ddot{U}_i + C\dot{U}_i + KU_i = Q_i \quad (4.10)$$

Avec:

$$Q_i = [M - M_f] \ddot{u}_f + [C - C_f] \dot{u}_f + [K - K_f] u_f \quad (4.11)$$

Le vecteur de charge Q_i est déterminé à partir des déplacements en champ libre.

Pour les systèmes linéaires, le problème d'interaction est décomposé en la somme d'un problème de réponse du sol en champ libre (eq. (4.8)) et d'un problème source (eq (4.10)) où les forces Q_i n'ont de composantes non nulles qu'aux noeuds communs à la structure et au sol.

REMARQUE: Ce dernier problème est par essence analogue à un problème de vibration de machines.

l'équation (4.11) met en évidence le fait qu'il ya interaction dès qu'il ya différence de masse ou raideur entre le sol et la structure.

Pour simplifier supprimons le terme d'amortissement dans l'équation (4.11).

1) INTERACTION INERTIELLE;

Si la fondation est infiniment rigide, le dernier terme de l'équation (4.11) s'annule, et Q_i devient:

$$Q_i = [M - M_f] \ddot{u}_f \quad (4.12)$$

Les forces Q_i appliquées à la base de la structure engendrent un mouvement du support, équivalent à un champ de forces d'inertie dans la structure. par suite, l'interaction ne résulte que des forces d'inertie développées dans cette structure. On lui donne le nom d'interaction inertielle.

2) INTERACTION CINEMATIQUE;

A l'opposé, considérons une structure dont la masse est nulle, hors du sol, et égale (en valeur et en répartition) à celle du sol pour la partie en terre. Les forces Q_i ont alors pour expression:

$$Q_i = [K - K_f] U_f \quad (4.13)$$

Elle ne résulte que de la différence de raideur pour la partie en terre, le sol et la structure. Même sans différence de masse, il y a interaction, on lui donne le nom d'interaction cinématique. Elle résulte de la raideur de la fondation qui l'empêche de suivre les mouvements imposés par le sol.

Dans le cas le plus général, l'interaction résulte d'une interaction inertielle et une interaction cinématique.

La fig (4-3) illustre les deux grandes méthodes d'approche de l'I.S.S. La figure ^(4-3a) correspond aux méthodes globales dont la solution est obtenue par résolution directe de l'équation (4.7). Elles ne font intervenir aucune notion de superposition, donc adaptables aux problèmes ^{non} linéaires.

Alternativement, les méthodes des sous structures s'appuient sur la décomposition de la figure (4-3b), (4-3c) ou sur des décompositions analogues pour résoudre le problème par étapes. Ces méthodes sont bien entendu applicables qu'aux problèmes linéaires, justifiables qu'aux problèmes linéaires, justifiables de superposition.

III DEFINITION DE L'IMPEDANCE D'UNE FONDATION:

Soit une fondation de forme quelconque sur une surface d'un milieu semi-infini, autre une force harmonique $P_0 e^{i\omega t}$ à laquelle elle est soumise, des forces d'inertie sont exercées sur cette fondation et aussi des réactions $R(t)$. Il en résulte en régime stationnaire, un déplacement $Z_0 e^{i\omega t}$ de la fondation.

Associons à la fondation réelle, une fondation fictive de mêmes caractéristiques géométriques mais de masse nulle.

Soit $Z(t)$ le déplacement lorsqu'elle est soumise à la force appliquée $P(t)$.

Par définition, on appelle impédance de la fondation le quotient de la force appliquée au déplacement de la fondation sans masse.

$$K = P(t)/Z(t) \quad (4-14)$$

$$K = R(t)/Z(t) \quad (4-15)$$

A partir de l'équation (4-14), on peut définir une impédance de la fondation pour les modes de translation, de balancement et de torsion.

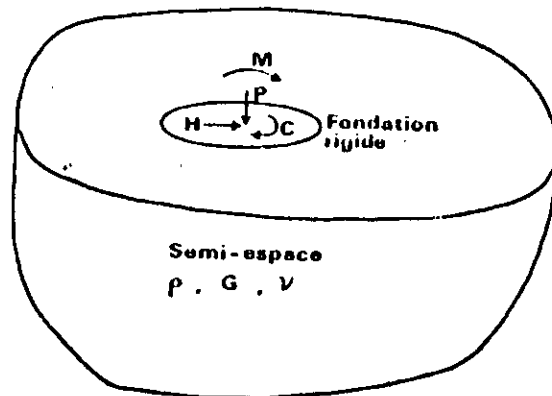


FIG 4-4 REPONSE D'UNE FONDATION A UNE SOLLICITATION DYNAMIQUE.

Considérons le cas d'un oscillateur simple à un seul d.d.l pour la compréhension de la forme générale prise par les fonctions d'impédance.

L'équation d'équilibre:

$$m \ddot{z} + C\dot{z} + \bar{k}z = P e^{i\omega t} \quad (4-16)$$

Solution de (4-16):

$$Z(t) = P e^{i\omega t} / I(k - m\omega^2) + i\omega c \quad (4-17)$$

L'impédance dynamique:

$$K = (\bar{k} - m\omega^2) + i\omega c \quad (4-18)$$

où $i^2 = -1$.

L'eq (4-18) peut s'écrire:

$$K = \bar{k} [1 - (\omega/\omega_n)^2 + i2\zeta\omega/\omega_n] \quad (4-19)$$

où ω_n est la pulsation propre et ζ le pourcentage d'amortissement.

Ainsi, k est le produit de la raideur \bar{k} par le terme $(kz + i\omega c)$ dit impédance du système.

IV/ METHODE DES SOUS -STRUCTURES:

Basée sur la superposition, donc le problème d'I.S.S s'analyse en plusieurs étapes successives.

Différentes méthodes de décomposition du modèle global en sous modèles existent

- Les méthodes de frontière.
- Les méthodes de volume.

1) LES METHODES DE FRONTIERE;

Dans cette méthode, on décompose le système sol-structure en deux : Le sol et la structure. Fig 4.5)

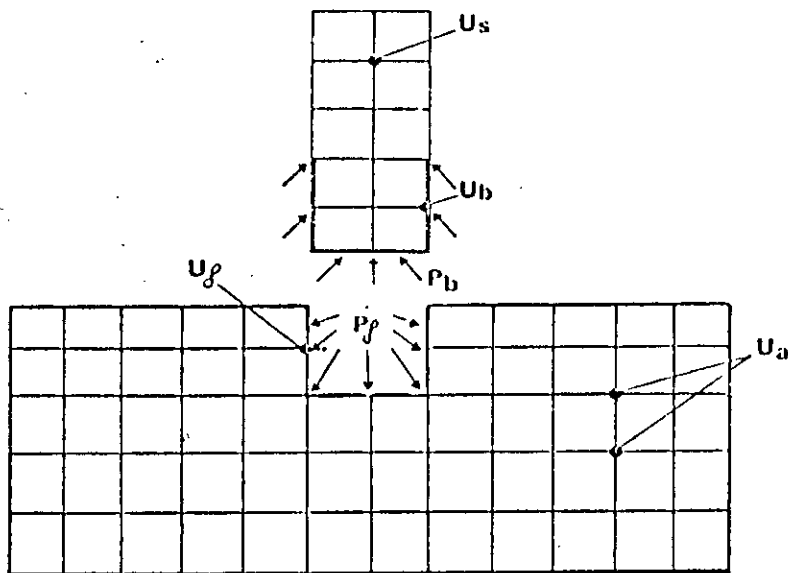


FIG (4.5) METHODE DE FRONTIERE

Les équations d'équilibre:

- Structure:

$$\begin{bmatrix} M_s & 0 \\ 0 & M_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_s \\ \dot{u}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sb} \\ K_{bs} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_s \\ U_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad (4-28)$$

- sol

$$\begin{bmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_f \\ \dot{u}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fa} \\ K_{af} & K_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_f \\ U_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_b \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-29)$$

En l'absence de structure, on écrit:

$$\begin{bmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_f^* \\ \dot{u}_a^* \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fa} \\ K_{af} & K_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_f^* \\ U_a^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-30)$$

Elle régit le mouvement en "champ libre". La structure n'existe plus, mais l'excavation est présente.

Par soustraction des équations (4.29) et (4.30) et en désignant par $\{U_i\} = \{u\} - \{U^*\}$ Les déplacement d'interaction, on obtient.

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_j \\ \ddot{U}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fa} \\ K_{af} & K_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_j \\ U_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_b \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-31)$$

Le domaine fréquence conduit à une formulation plus simple :

$$(-w^2 M + K) \tilde{U} = -\tilde{P} \quad (4-32)$$

où le symbole \sim désigne les transformées de fourrier.

Cette formule peut être condensée pour chaque fréquence aux F d.d.l situés sur la frontière de séparation.

$$S_f(w) \cdot \tilde{U}_f^i(w) = -\tilde{P}_b(w) \quad (4-32a)$$

ou S_f est la matrice d'impédance du sol.

En tenant compte de la condition de compatibilité des déplacements à l'interface sol-structure

$$\tilde{U}_f = \tilde{U}_b \quad (4-33)$$

et de la relation:

$$U_f^i = \tilde{U}_f - \tilde{U}_f^* \quad (4-34)$$

La solution de l'équation (4-32a) dans l'équation (4-34)

$$-w^2 \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sb} \\ K_{bs} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_s \\ \tilde{U}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ S_f \tilde{U}_f^* \end{Bmatrix} \quad (4-35)$$

C'est l'équation du mouvement de la structure en terme de déplacements absolus lorsque celle ci est soumise aux forces, résultant de mouvement du champ libre, imposés de la frontière interface avec le sol.

En supposant que la fondation soit infiniment rigide, alors:

$$\tilde{U}_b = T \cdot \tilde{U}_o \quad (4-36)$$

ou T est la matrice de transformation

\tilde{U}_o Vecteur de déplacement et rotations de corps rigide.

De même les forces nodales P_b sont reliées aux forces et moments P_o appliqués à la fondation par:

$$\tilde{P}_o = T \tilde{P}_b \quad (4-37)$$

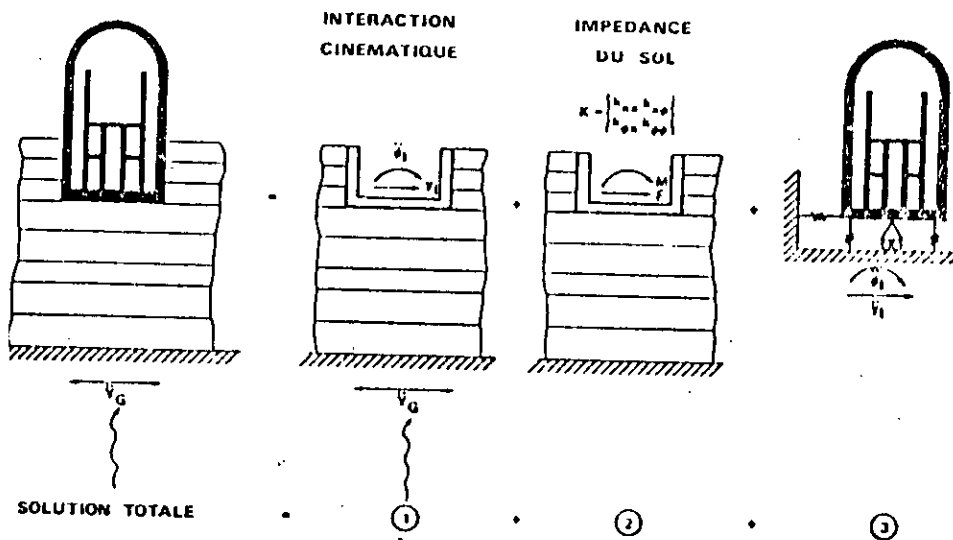
Avec ces relations, l'équation (4.33) prend la forme.

$$-w^2 M \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sb} \\ K_{bs} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_s \\ \tilde{U}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ T^T S_f \tilde{U}_f^* \end{Bmatrix} \quad (4-38)$$

REMARQUE:

L'examen de l'équation (4-38) montre que la réponse du système peut être obtenue en appliquant, à son support un mouvement défini par: $K^{-1} T^T S_f U_f^*$

La figure (4.5) illustre les 3 étapes successives pour obtenir la réponse de la structure.



FIG(4.5): THEOREME DE SUPERPOSITION DE KAUSEL

Mais, dans le cas général, la fondation n'est pas infiniment rigide, Le problème à résoudre est plus complexe, il est défini par l'équation (4.35)

2) METHODE DE VOLUME :

Elle évite la résolution des problèmes de diffraction. l'I.S. S'est prise en compte, non seulement à l'interface sol-structure, mais à tous les noeuds de la structure sous la surface du sol.

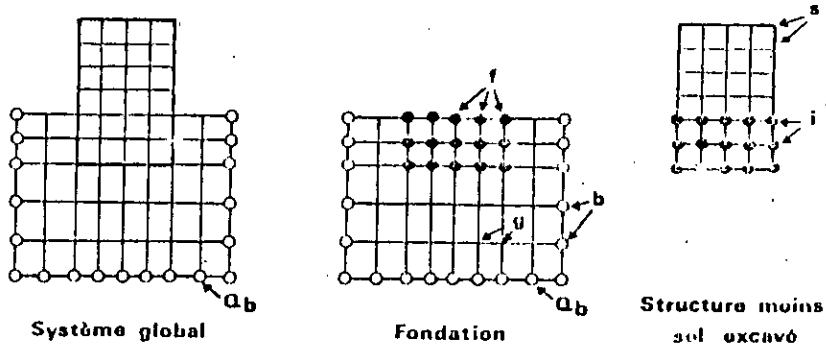


FIG (4.6) METHODE DE VOLUME

V METHODE HYBRIDE:

La résolution du problème d'impédance constitue une étape longue et coûteuse dans la méthode des sous structures.

Pour s'affranchir de cette étape, Gupta et al (1980) ont développé une méthode hybride dont le principe est de séparer le sol en un champ lointain et un champ libre.

Le champ lointain modélisé à l'aide d'une matrice d'impédance.

VI METHODES GLOBALES:

Les méthodes globales sont celles conduisant à une détermination simultanée du mouvement dans le sol et dans la structure.

Le problème à résoudre est celui défini par l'équation (4.7), la mise en oeuvre pratique de telles solutions est illustrée par la figure ci-dessous.

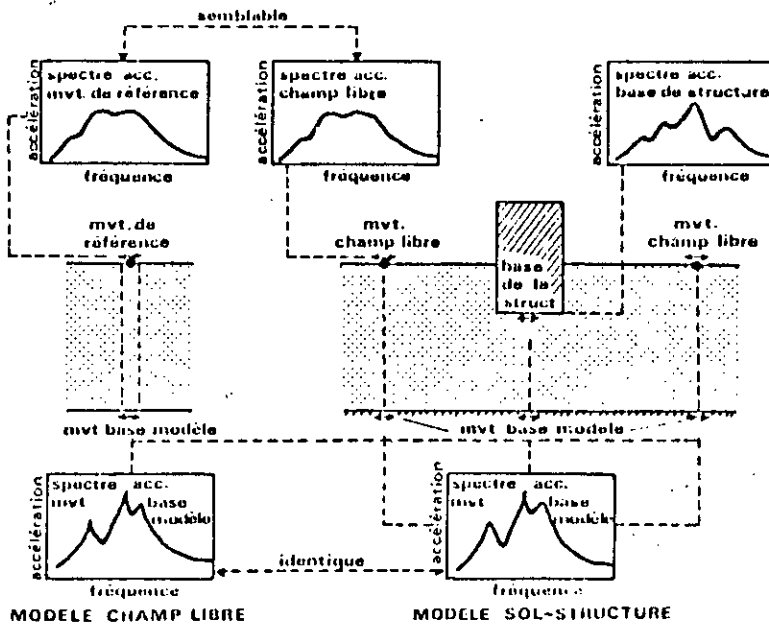


FIG (4-8) METHODE GLOBALE.

Les méthodes globales peuvent être étendues aux cas tridimensionnels et sont susceptibles d'appréhender les comportements non linéaires.

L'un des avantages principaux des méthodes globales est leur capacité de prendre en compte les hétérogénéités du sol.

Dans notre travail nous nous sommes intéressés à l'une des méthodes globales qui est la méthode des éléments finis.

Chapitre 5

La méthode des éléments finis

1) INTRODUCTION.

On classe les systèmes en 2 grandes catégories: Les systèmes discrets et les systèmes continus.

- Les systèmes discrets sont ceux constitués d'un nombre fini d'éléments bien définis, et donc les problèmes correspondants peuvent être résolus quelque soit l'importance du nombre de constituants,

- Les systèmes continus, sont par ailleurs, constitués d'éléments infinitésimaux, donc leur nombre est infini, dans ce cas, seul l'emploi de la notion mathématique d'infiniment petit permet de caractériser le problème. cela conduit donc à des équations différentielles que l'on ne peut résoudre exactement que pour des cas simplifiés.

Pour surmonter la difficulté à traiter des problèmes continus sous une forme permettant de refléter approximativement son comportement et pouvant ainsi être résolu, En d'autres termes, le système continu peut être approché par un système discret.

On peut dire que, pour tout problème d'engineering, il ya lieu de considérer les 4 étapes subséquentes:

1- Idéalisation du système à analyser, c'est à dire de le représenter à l'aide d'un modèle pouvant simplifier le traitement du problème.

2- Position des équations gouvernantes, Il s'agit d'équations algébriques (gouvernant le système idéalisé: discrétisé) et non différentielles (gouvernant le système continu).

3- Résolution des équations gouvernantes.

4- Interprétation des résultats, qui est absolument nécessaire pour justifier le choix du modèle et des étapes de résolution.

La figure (5.1) résume les cas de problèmes pouvant être traités soit dans le cas discret ou dans le cas continu, et la forme des équations gouvernantes, avec la possibilité de passer à partir d'un système continu vers un système discret moyennant une discrétisation par éléments.

II FORMULATIONS DE LA M.E.F.

On considérera la formulation basée sur la méthode des déplacements, c'est à dire sur l'approximation de la fonction à chercher qui est la fonction déplacement.

Soit un corps soumis à des chargements extérieurs, volumiques f^b , surfaciques f^s et concentrées F^c .

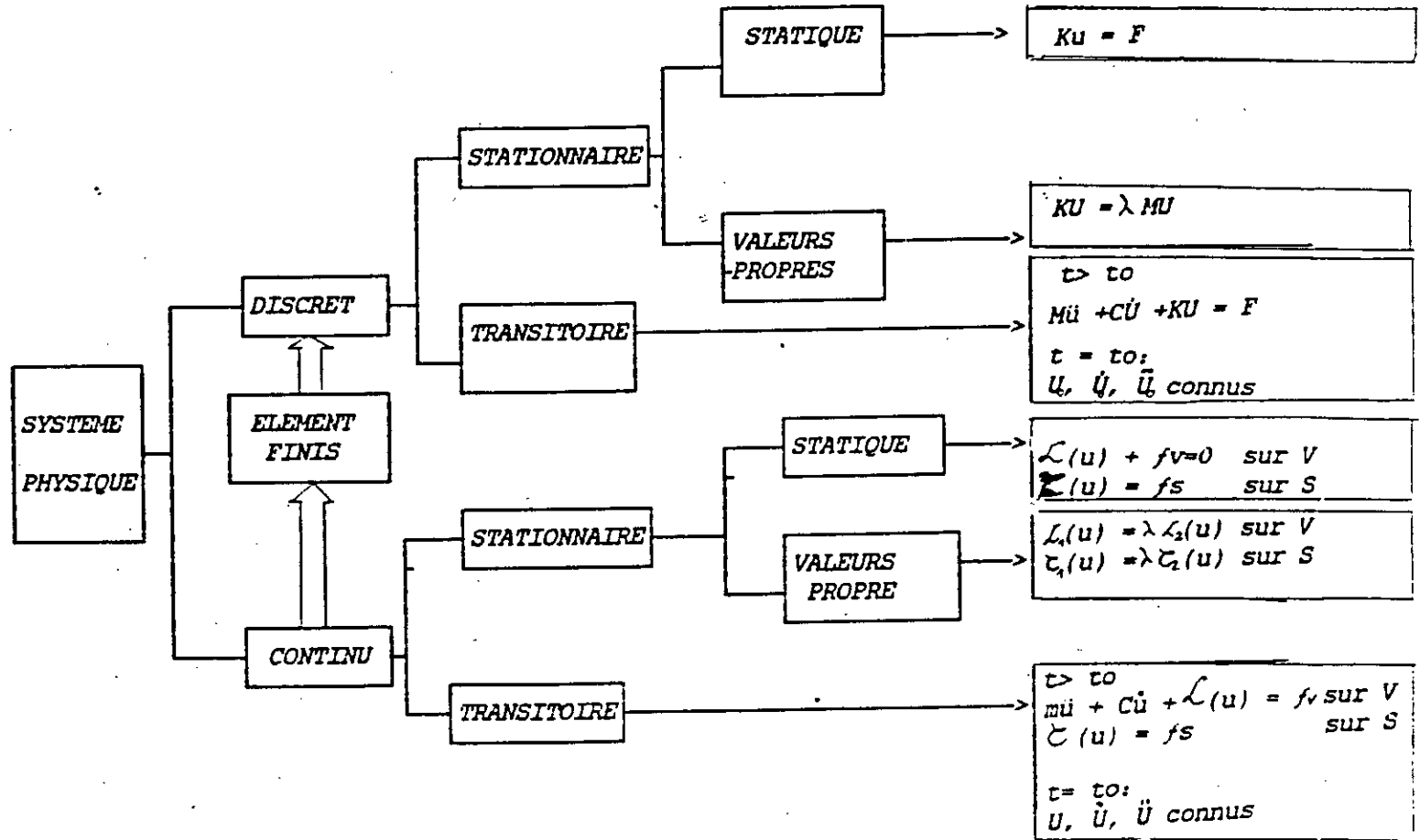
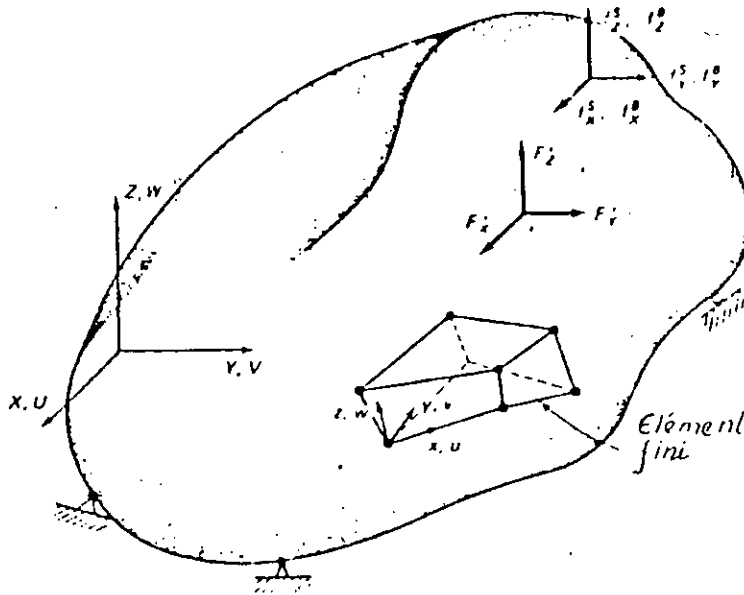


fig. 5.1

Soient U, ϵ et τ respectivement, les vecteurs déplacements, déformations et contraintes.



$$f^e = \begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \end{bmatrix}; \quad f^e = \begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \end{bmatrix}; \quad F^e = \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \end{bmatrix}$$

$$U^e = [U \quad V \quad W]$$

$$\epsilon^e = [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]$$

$$\tau^e = [\tau_{xx} \quad \tau_{yy} \quad \tau_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]$$

L'équilibre du corps peut être exprimé moyennant une approche variationnelle basée sur le principe des travaux virtuels. Ce dernier (P.T.V) stipule que l'équilibre du corps suppose que pour tout δ déplacement compatible, virtuel, infinitésimal, satisfaisant les conditions aux limites, imposé, les travaux virtuels, totaux, interne et externe sont alors égaux.

$$\int_V \delta \tau_{ij} dV = \int_V \delta U^e dV + \int_S \delta U^e \tau_{ij} dS + \sum_i \delta U_i^e F_i \quad (5.2)$$

Si le corps considéré est discrétisé en N éléments finis qui sont bien définis par leurs caractéristiques géométriques et matérielles, considérons l'élément (m)

$$U^{(m)}(x, y, z) = H^{(m)}(x, y, z) \hat{U} \quad (5.3)$$

$U^{(m)}$, Déplacement mesuré dans le repère local de (m) .

$H^{(m)}$, Matrice des fonctions d'interpolation de (m)

\hat{U} , Déplacements nodaux.

$$\hat{U} = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ \dots \ u_n \ v_n \ w_n]$$

L'approximation nodale sur l'élément (m) ne fait intervenir, dans le cas de la M.E.F, que les déplacements nodaux de l'élément (m) .

On peut exprimer les déformations par:

$$\epsilon^{(m)}(x, y, z) = B^{(m)}(x, y, z) \hat{U}$$

Les lignes de $B^{(m)}$ sont obtenues par différentiation et combinaison des lignes de $H^{(m)}$

Les contraintes sont alors :

$$\tau^{(m)} = C^{(m)} \epsilon^{(m)} + \tau^{(m)} \quad (5.5)$$

$C^{(m)}$ Matrice élasticité de (m)

$\tau^{(m)}$, Contrainte initiale.

Après assemblage, (5.2) devient:

$$\begin{aligned} \hat{U}^T \left[\sum_{m=1}^N B^{(m)T} C^{(m)} B^{(m)} \Delta V^{(m)} \right] \hat{U} = \hat{U}^T \left[\left(\sum_{m=1}^N H^{(m)T} f^{(m)} \Delta V^{(m)} \right) \right. \\ \left. + \left(\sum_{m=1}^N H^{(m)T} \tau^{(m)} \Delta V^{(m)} \right) \right. \\ \left. - \left(\sum_{m=1}^N B^{(m)T} \tau^{(m)} \Delta V^{(m)} \right) + F \right] \quad (5.6) \end{aligned}$$

On peut écrire (5.6) sous la forme:

$$KU = R \quad (5.7)$$

$$R = R_3 + R_5 + R_7 + R_9$$

$$K = \sum_n \int_{V^{(n)}} \frac{B^{(n)T} C B^{(n)}}{K^{(n)}} dV^{(n)}$$

$$R_3 = \sum_n \int_{V^{(n)}} \frac{H^{(n)T} (S^{(n)} d) dV^{(n)}}{R_3^{(n)}}$$

$$R_5 = \sum_n \int_{V^{(n)}} \frac{H^{(n)T} (T^{(n)} dS^{(n)})}{R_5^{(n)}} dV^{(n)}$$

$$R_7 = \sum_n \int_{V^{(n)}} \frac{B^{(n)T} (T^{(n)} d) dV^{(n)}}{R_7^{(n)}}$$

$$R_9 = F$$

Jusqu'ici, nous n'avons considéré que des chargements ne dépendant pas du temps, ou bien ne varient que très lentement avec le temps.

Si on considère maintenant des charges appliquées d'une manière rapide, des forces d'inertie se créent, et on est donc dans un cas dynamique. Le principe de d'Alembert nous permet de considérer les forces d'inertie comme des forces de volume donc qui prendront part dans l'expression de R_3 :

$$R_3 = \sum_n \int_{V^{(n)}} H^{(n)T} [(S^{(n)} - \rho^{(n)} H \cdot \ddot{U})] dV^{(n)} \quad (5.9)$$

L'équation d'équilibre devient dans ce cas:

$$M\ddot{U} + KU = R \quad (5.10)$$

où ρ est le poids volumique de (m)

et \ddot{U} accélérations nodales.

Si on considère encore l'effet de l'amortissement, les forces d'amortissement font aussi part de R_3 :

$$R_3 = \sum_n \int_{V^{(n)}} H^{(n)T} [(S^{(n)} - \rho^{(n)} H \cdot \ddot{U} - \kappa^{(n)} H \cdot \dot{U})] dV^{(n)} \quad (5.11)$$

où k^m . Coefficient d'amortissement de (m) et l'équation d'équilibre devient donc:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + KU = R \quad (5.12)$$

$$M = \sum_n \int_{V_n} \rho^m H^m H^m dV^m \quad (5.13)$$

$$C = \sum_n \int_{V_n} K^m H^m H^m dV^m \quad (5.14)$$

En cas de vibrations libres, c.a.d lorsque $R=0$, le système (5.10) devient:

$$M\ddot{u} + KU = 0 \quad (5.15)$$

et la solution est donnée par:

$$u = \phi \sin(\omega t + \psi) \quad (5.16)$$

$$\text{donc } \dot{u} = -\omega^2 \phi \sin(\omega t + \psi) \quad (5.17)$$

d'où l'on obtient le système:

$$K \phi - \omega^2 M \phi = 0 \quad (5.18)$$

où : ϕ , vecteur des amplitudes nodales.

ω , pulsation

Le système (5.18) interprète le mouvement de vibrations libres, Il caractérise un problème de valeurs propres.

Vu la taille importante des problèmes qu'on rencontre en pratique, il est nécessaire d'avoir recours à des calculs sur ordinateur. Méthode d'intégration, de résolution de systèmes d'équations pour 3 cas (statique, dynamique et de valeurs propres) sont décrites dans le chapitre: Méthode numériques.

III/ QUELQUES TYPES D'ELEMENTS:

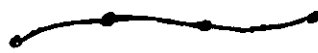
1) ELEMENTS A UNE DIMENSION:



LINEAIRE (2)



QUADRATIQUE (3)



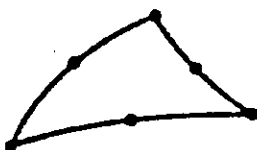
CUBIQUE (4)

2) ELEMENTS A DEUX DIMENSIONS:

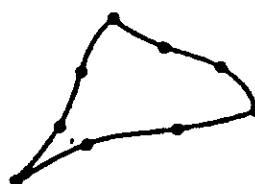
- TRIANGULAIRES:



LINEAIRE (3)

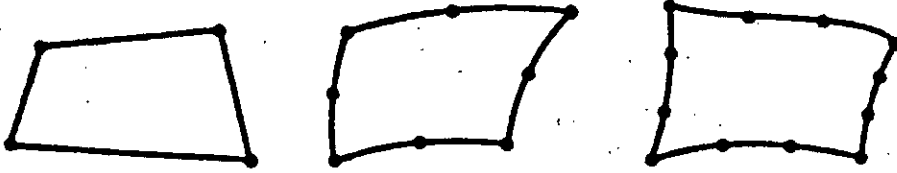


QUADRATIQUE (6)



CUBIQUE (9)

- QUADRILATERALE



LINEAIRE (4)

QUADRATIQUE (8)

CUBIQUE (12)

C) ELEMENT A 3 DIMENSIONS:

- Tétraédres (Linéaire(4) quadratique(10) cubique(16))
- Hexaédres (Linéaire(8) quadratique(20) cubique(32))
- Prismatiques (Linéaire(6) quadratique(15) cubique(24))

IV CONVERGENCE:

Il ya des propriétés qui sont nécessaires ou tout au moins souhaitables au niveau de l'élément afin d'obtenir une solution aussi proche que possible de la solution exacte. Au fur et à mesure qu'on augmente le nombre d'éléments, la solution converge vers l'exacte, mais aussi, le choix du modèle, du type d'éléments ...etc, interviennent comme facteurs influents sur la convergence.

Le tableau ci-dessous résume quelques sources d'erreurs et les lieux de manifestation correspondants:

Source d'erreur	lieu de manifestation de l'erreur
- Discrétisation	- Utilisation de fonctions d'interpolation pour les différents éléments finis
- Intégration numérique	- Evaluation des matrices élémentaires
- Si la solution est itérative (statique)	- Evaluation des déplacements.
- Solution des équations d'équilibre dynamique	- Méthodes d'intégration directe, superposition modèle

La convergence de la solution n'est pas toutefois toujours monotone, c'est pourquoi on rencontre 2 types de convergence : monotone et non monotone.

1- CONVERGENCE MONOTONE:

Pour qu'elle soit ainsi, deux conditions sont à satisfaire: La complétude et la compatibilité.

a) La complétude:

Un élément fini est dit complet s'il satisfait les 2 conditions suivantes:

- Représentation des modes rigides:

Quand on prescrit aux déplacements nodaux des valeurs correspondantes à un déplacement d'ensemble, on doit trouver un état de déformation nul dans l'élément.

- Représentation de l'état de déformation constant:

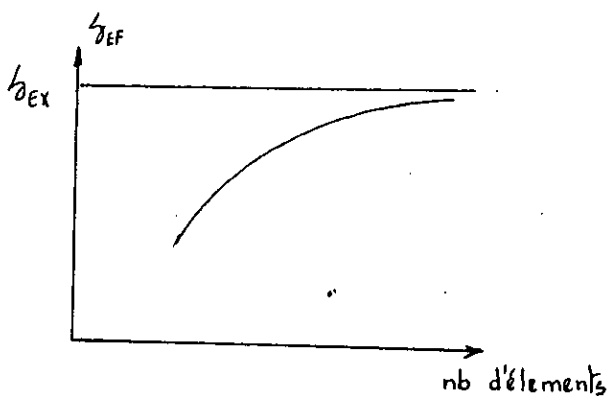
Quand on prescrit aux déplacements nodaux des valeurs correspondantes à un état de déformation constant, on doit trouver effectivement cet état de déformation à l'intérieur de l'élément.

b) Compatibilité:

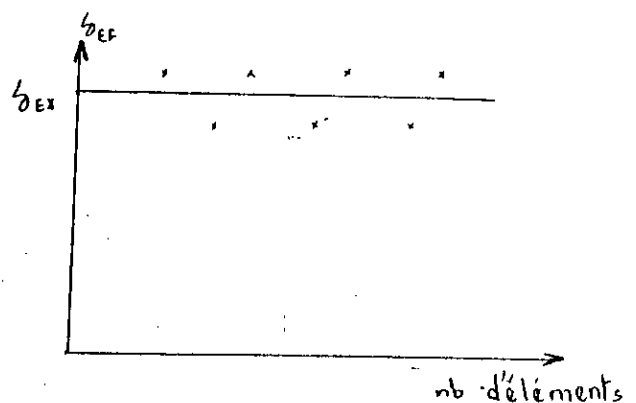
Un élément est dit compatible s'il permet la définition d'un champ compatible, C.a.d une continuité des déplacements au sein des éléments et aux frontières de ces derniers, et une continuité des déplacements et de leurs dérivées premières pour les problèmes de flexion. Physiquement, la compatibilité peut s'expliquer par le fait qu'aucun vide n'apparaît entre les éléments lorsque l'assemblage est chargé.

2- CONVERGENCE NON MONOTONE:

Certains éléments ne satisfassent pas toutes les conditions de complétude comme condition essentielle mais en la remplaçant par un autre critère de complétude sur un groupe d'éléments. Le test de complétude collective est appelé "Patch-test". On constate que les éléments complétés et incompatibles qui satisfassent ce test convergent.



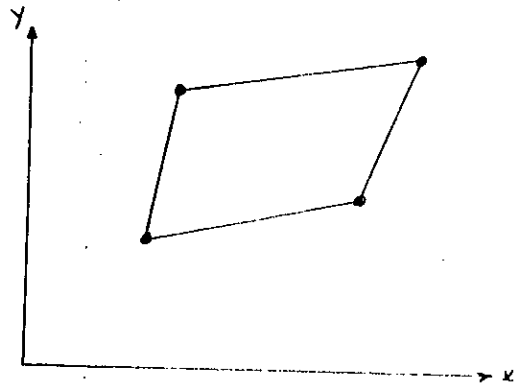
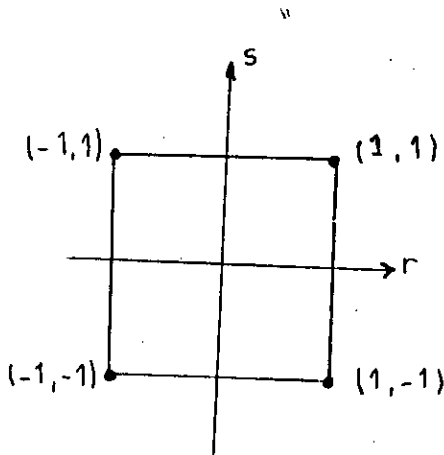
CONVERGENCE MONOTONE



CONVERGENCE NON MONOTONE

V) FORMULATION ISOPARAMETRIQUE:

La formulation isoparamétrique a pour but la simplification de la définition analytique des éléments de forme complexe. On appelle élément isoparamétrique un élément de forme simple, repéré dans un espace dit isoparamétrique, qui peut être transformé en chaque élément réel par une transformation géométrique tel que les fonctions de transformation sont identiques aux fonctions d'interpolation donc les noeuds géométriques et d'interpolations sont confondus.



ELEMENT ISOPARAMETRIQUE

ELEMENT REEL

Exemple d'élément isoparamétrique "carré"

Essayons d'exprimer la matrice K élémentaire en utilisant la formulation isoparamétrique.

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial r & \partial y/\partial r \\ \partial x/\partial s & \partial y/\partial s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } \begin{bmatrix} \partial x/\partial r & \partial y/\partial r \\ \partial x/\partial s & \partial y/\partial s \end{bmatrix} = J; \text{ Matrice jacobienne}$$

$$\text{donc } \begin{bmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial s \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix}$$

Les fonctions de transformation étant identiques aux fonctions d'interpolation des déplacements:

$$J = \begin{bmatrix} \partial H/\partial r \\ \partial H/\partial s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix}$$

La matrice B a été obtenue par différentiation a partir de H

On peut donc exprimer B en fonction de r et s pour un élément $dx dy$

$$dx \cdot dy = (\det J) dr ds$$

La matrice de rigidité peut donc être exprimée

$$K^{(m)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^{(m)T}(r,s) \cdot C \cdot B^{(m)}(r,s) \cdot \det J \cdot dr ds$$

$$M^{(m)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho^{(m)} \cdot H^{(m)T}(r,s) \cdot H^{(m)}(r,s) \cdot \det J \cdot dr ds$$

Chapitre 6

Méthodes Numériques

INTRODUCTION :

Le recours aux méthodes numériques et calcul sur ordinateur, dans les problèmes d'éléments finis, est vital, vu les dimensions importantes de ces dernières. Dans ce qui suit, nous présentons les méthodes numériques les plus communément utilisées dans des programmes d'éléments finis, notamment, le programme que nous avons élaboré et que nous présenterons dans le prochain chapitre.

1/ INTEGRATION NUMERIQUE :

La constitution des matrices de rigidité et de masse élémentaires, comme nous l'avons vu dans la formulation M.F.F nécessite le calcul d'intégrales:

Pour un élément de référence (m):

$$\begin{aligned} K^{(m)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^{(m)T} \cdot C^{(m)} \cdot B^{(m)} \det J \, dr \, ds \\ M &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho^{(m)} \cdot H^{(m)T} \cdot H^{(m)} \det J \, dr \, ds \end{aligned} \quad (6.1)$$

où B, H et J sont fonction de r et de s.

L'intégration numérique est basée essentiellement sur l'approximation de la fonction à intégrer F(r) par un polynôme $\Psi(r)$.

Avant de généraliser, nous présentons en premier lieu le cas unidimensionnel:

$$\int_a^b F(r) \, dr = \int_a^b \Psi(r) \, dr \quad (6.2)$$

La procédure d'interprétation polynomiale la plus pratique étant celle de Lagrange:

Pour (n+1) point d'intégration:

$$\Psi(r) = \sum_{j=0}^n F_j \cdot l_j(r) \quad (6.3)$$

$$\text{où: } \begin{cases} l_j(r) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{(r - r_i)}{(r_j - r_i)} \\ l_j(r_i) = \delta_{ij} : \text{Kronecker} \end{cases}$$

1/ FORMULE DE NEWTON - COTES :

Tous les points d'interpolation étant considérés équadistants.

$$\int_a^b F(r) dr = \sum_{i=0}^n \left\{ \int_a^b l_i(r) dr \right\} F_i + R_n = (b-a) \sum_{i=0}^n C_i^n F_i + R_n \quad (6.4)$$

où: C_i^n : Constantes de Newton - Cotes.

R_n : Reste.

2/ FORMULE DE GAUSS :

On se base sur la relation:

$$\int_a^b F(r) dr = \sum_{i=1}^n \alpha_i F(r_i) + R_n \quad (6.5)$$

où on a cette fois-ci 2n inconnues, à savoir:

Les poids (α_i) ainsi que les positions (r_i).

On peut écrire:

$$F(r) = \Psi(r) + P(r)(\beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \dots) \quad (6.6)$$

$$\text{Où: } P(r) = \prod_{i=1}^n (r - r_i) \quad (6.7)$$

On pourra donc évaluer r_j , $j = 1, 2, \dots, n$

$$\int_a^b P(r) \cdot r^k dr = 0 \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (6.8)$$

Il est pratique de connaître les valeurs de r_j et α_j , dits coefficients de Gauss-Legendre pour $a = -1$ et $b = 1$ et leur faire respectivement correspondre sur un domaine quelconque $[a, b]$:

$$(a+b)/2 + (b-a)/2 \cdot r_j \text{ et } \alpha_j (b-a)/2 \quad (6.9)$$

On peut généraliser ces résultats pour un cas bidimensionnel ou tridimensionnel.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(r, s) dr ds = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j F(r_i, s_j) \quad (6.10)$$

$\alpha_i, \alpha_j, r_i, s_j$: coefficients de Gauss-Legendre.

α_i et α_j sont calculés à partir du cas unidimensionnel.

REMARQUES IMPORTANTES:

- Dans la méthode de Newton-Cotes, nous utilisons (n+1) points équadistants et nous intégrons exactement un polynôme d'ordre au plus égal à n, par ailleurs, dans la méthode de Gauss, n points non équadistants et l'intégration exacte se fait sur un polynôme d'ordre au plus égal à (2n-1).

- L'ordre d'intégration (nombre de points) choisi influe directement sur la précision des résultats. Toutefois lorsque l'ordre est inférieur à une certaine limite, des singularités surgiront.

- Le choix de la méthode dépend du problème à considérer. Pour des raisons d'efficacité (lère remarque) nous avons choisi la méthode de Gauss. Cependant la méthode de Newton-Cotes est préférable dans une analyse non linéaire qui ne correspond pas donc à notre cas.

II/RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

Les systèmes de la forme:

$$(6.11) \quad K \cdot U = R$$

peuvent être rencontrés soit en analyse statique soit en analyse dynamique. Donc R et U peuvent être fonction du temps.

Les méthodes les plus couramment utilisées sont dites: méthodes directes, pour les quelles le nombre d'opérations est connu d'avance, ce qui n'est pas le cas des méthodes dites: indirectes ou itératives. La méthode la plus utilisée étant celle de l'élimination de Gauss qui consiste à triangulariser K pour obtenir une matrice triangulaire supérieure S:

On peut écrire que:

$$(6.12) \quad K = \left(\prod_{i=1}^{n-1} L_i^{-1} \right) \cdot K = S$$

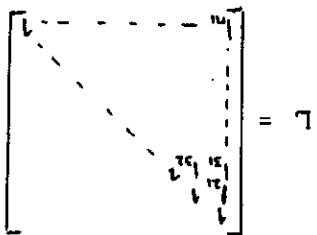
où:
$$L_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

avec $l_{ij}^{(i)} = K_{ij}^{(i)} / K_{ii}^{(i)}$

$l_{ij}^{(i)}$: facteurs multiplicatifs de Gauss.

On peut donc écrire que: $K = \left(\prod_{i=1}^{n-1} L_i \right) \cdot S$

ou bien $K = L \cdot S$ (6.15)



S peut à son tour être décomposée:

$$S = D \cdot \tilde{S} \quad (6.16)$$

Où D est matrice diagonale tel que $d_{ii} = s_{ii}$.

En raison de la symétrie de K et de l'unicité de la décomposition, nous pouvons écrire:

$$K = L D L^T \quad (6.17)$$

Résolution du système (6.11) avec décomposition

$K = L D L^T$ connue aussi sous l'appellation de:

Factorisation sans racine carrée de Cholevski.

- Décomposition:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pour } i = 1, 2, \dots, n \\ \quad l_{ii} = 1 \\ \text{Pour } r = 1, 2, \dots, n \\ \quad d_{rr} = k_{rr} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} \cdot d_{kk} \cdot l_{rk} \\ \quad \text{Pour } j = r+1, n \\ \quad l_{jr} = (k_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} \cdot d_{kk} \cdot l_{jk}) / d_{rr} \end{array} \right\} \text{- Résolution de } L D L^T U = R$$

étapes: $L \cdot Y = R$

$D \cdot Z = Y$

$L^T \cdot U = Z$

Ces trois systèmes seront résolus respectivement par les trois algorithmes subséquents:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pour } i = 1, 2, \dots, n \\ \quad y_i = R_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} \cdot y_j \\ \text{Pour } i = 1, 2, \dots, n \\ \quad z_i = y_i / d_{ii} \\ \text{pour } i = n, n-1, \dots, 1 \\ \quad u_i = z_i - \sum_{j=i+1}^n l_{ji} \cdot u_j \end{array} \right\}$$

III/ DETERMINATION DES VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES :

1/ INTRODUCTION:

Il s'agit de résoudre le système:

$$K \phi = \lambda M \phi \quad (6.18)$$

où K et M sont respectivement les matrices de rigidité et de masse globales, définies positives et symétriques.

λ : C'est la valeur propre correspondant en mécanique des structures à ω^2 où ω est la pulsation propre de la structure:

Φ : Vecteur propre ou mode propre correspondant à lorsqu'on cherche p valeurs propres et vecteurs propres:

$$K \Phi = M \Phi \Lambda \quad (6.19)$$

Lorsque K et M sont de dimension n:

est de dimension n x p; Φ est de dimension p x p;

$\Phi = [\phi_1 \dots \phi_p]$: Matrice modale.

$\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$

où $\lambda_i \geq 0$.

Il s'agit donc de déterminer p couples (λ_i, ϕ_i)

2/ PROPRIETES DES VALEURS PROPRES ET DES VECTEURS PROPRES:

- A tout λ_i correspond ϕ_i ; $i = 1, 2, \dots, n$

- Chaque couple (λ_i, ϕ_i) doit satisfaire:

$$K \phi_i = \lambda_i M \phi_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.20)$$

- Les vecteurs propres sont M-orthonormaux et K-orthogonaux:

$$\phi_i^T M \phi_j = \delta_{ij} \quad (6.21)$$

$$\phi_i^T K \phi_j = \lambda_i \delta_{ij} \quad (6.22)$$

δ_{ij} : Kronecker.

- Pour p valeurs propres et p vecteurs propres correspondants:

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (6.23)$$

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (6.24)$$

I: matrice identité.

- Si X contient p vecteurs; i.e: $X = [x_1 \dots x_p]$

et $X^T K X = D$ D: Matrice diagonale.

$X^T M X = I$ I: Matrice identité.

. Lorsque $p < n$; où n est la dimension de K et de M alors, X et D peuvent être ou ne pas être respectivement Φ et Λ

. Lorsque $p = n$; X et D le sont.

3/ POLYNOME CHARACTERISTIQUE :

Les valeurs propres sont donc les racines du POLYNOME, dit caractéristique:

$$P(\lambda) = \det (K - \lambda M) \quad (6.25)$$

Veut dire que $(K - \lambda M)$ est singulière pour qu'on puisse satisfaire:

$$(K - \lambda_i M) \phi_i = 0 \quad (6.26)$$

Pour que le système ci-avant soit résoluble, il faudrait se donner a priori une composante de .

4/ DECOMPOSITION SPECTRALE:

Considérons la relation $K\Phi = M\Phi\Lambda$

Les ϕ_i étant M-orthonormaux; on peut écrire:

$$K = M\Phi\Lambda\Phi^T M$$

Ou bien: $K = (M\Phi) \Lambda (M\Phi)^T$ car M est symétrique.

$$\text{Ou encore: } K = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i y_i^T \quad (6.27)$$

$$\text{ou } y_i = M \cdot \phi_i$$

Un vecteur x quelconque peut être représenté dans la base des vecteurs propres:

$$x = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i \quad (6.28)$$

et les composantes de x sont les c_i ; t.q:

$$c_i = \phi_i^T M x$$

5/ QUOTIENT DE RAYLEIGH:

On appelle quotient de Rayleigh d'un vecteur x:

$$P(x) = (x^T K x) / (x^T M x) \quad (6.29)$$

- Si λ_1 est la plus petite valeur propre et λ_n la plus grande, alors :

$$\lambda_1 < P(x) < \lambda_n \quad (6.30)$$

Autrement dit:

$$P(\phi_i) = \lambda_i \quad (6.31)$$

6/ SEPARATION DES VARIABLES:

Notons $p^{(r)}(\lambda^{(r)})$ le polynôme caractéristique lorsqu'on supprime les r dernières lignes et les r dernières colonnes de K et de M:

$$p^{(r)}(\lambda^{(r)}) = \det (K^{(r)} - \lambda^{(r)} M^{(r)}) \quad (6.32)$$

Supposons 2 polynômes $P^{(r)}(\lambda^{(r)})$ et $P^{(r+1)}(\lambda^{(r+1)})$, alors:

$$\lambda_1^{(r)} < \lambda_1^{(r+1)} < \lambda_2^{(r)} < \lambda_2^{(r+1)} \dots < \lambda_{n-r-1}^{(r)} < \lambda_{n-r-1}^{(r+1)} < \lambda_{n-r}^{(r)} \quad (6.33)$$

et la suite des polynômes $P^{(r)}(\lambda^{(r)})$ est appelée suite de Sturm.

7/ METHODES DE CALCUL DES VALEURS PROPRES ET VECTEURS

PROPRES:

Plusieurs procédures existent, on peut soit chercher la valeur propre en utilisant le fait que la polynôme caractéristique est nul puis d'en déduire le vecteur propre correspondant en donnant à priori une composante de ce dernier, soit de calculer le vecteur propre par itération puis utiliser le quotient de Rayleigh pour évaluer la valeur propre correspondante, soit la recherche simultanée des couples (λ_i, ϕ_i) .

Le choix de la méthode la plus convenable dépendre essentiellement du type de problème à résoudre et de ce qu'on cherche.

a/ METHODE DE L'ITERATION INVERSE:

On calcule le vecteur propre et en même temps la valeur propre lui correspondante.

Le principe de la méthode est de supposer un vecteur initial x_1 , puis pour $k = 1, 2, \dots$

$$K \bar{x}_{k+1} = M x_k \quad (6.34)$$

$$\text{et } x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} / \sqrt{\bar{x}_{k+1}^T M x_{k+1}} \quad (6.35)$$

Par la relation (6.35) nous voulons satisfaire la M-orthonormalité; i.e:

$$x_{k+1}^T M x_{k+1} = 1$$

Pour la recherche de la plus petite valeur propre, on peut établir l'algorithme suivant:

- Décomposer $K = L D L^T$
- Choisir x_1 , non M-orthogonal à
- Calculer $y_1 = M x_1$
- Pour chaque itération $k = 1, 2, \dots$
 - Résoudre $L D L^T \bar{x}_{k+1} = y_k$
 - Calculer $y_{k+1} = M x_{k+1}$
 - Calculer l'approximation de λ_1 par le quotient de Rayleigh:

$$\lambda_1^{k+1} = \rho(\bar{x}_{k+1}) = \bar{x}_{k+1}^T y_k / (\bar{x}_{k+1}^T \bar{y}_{k+1})$$
 - Calculer $y_{k+1} = \bar{y}_{k+1} / \sqrt{\bar{x}_{k+1}^T \bar{y}_{k+1}}$
 - Vérifier la convergence de $\lambda_1^{k+1} : |\lambda_1^{k+1} - \lambda_1^k| < \epsilon$
- Calculer le vecteur propre M-normaliser

$$\phi_1 = \bar{x}_{k+1} / \sqrt{\bar{x}_{k+1}^T \bar{y}_{k+1}}$$

Pour la recherche des autres couples (λ_p, ϕ_p) , $p \geq 2$, il faut contraindre le vecteur \bar{x}_{k+1} à rester M-orthogonal à $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{p-1}$. Nous devrions donc soustraire à ce vecteur ses projections sur $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{p-1}$.

En utilisant la décomposition spectrale:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_{k+1} - \sum_{j=1}^{p-1} (c_j \phi_j) \quad (6.36)$$

où $c_j = \phi_j^T \cdot M \cdot \bar{x}_{k+1}$

b/ LA METHODE DE JACOBI:

Nous nous basons sur les relations:

$$\begin{aligned} \Phi^T K \Phi &= \Lambda \\ \Phi^T M \Phi &= I \end{aligned}$$

Où Φ est de même ordre que K et M. Il s'agit d'une méthode de transformation de K et de M en des matrices diagonales:

$$k = 1, 2, \dots$$

$$K_{k+1} = P_k^T K_k P_k \quad (6.37)$$

$$M_{k+1} = P_k^T M_k P_k \quad (6.38)$$

Où $K_1 = K$ et $M_1 = M$

K et M tendent respectivement vers Λ et I, lorsque $k \rightarrow \infty$, si l est la dernière itération:

$$\Lambda = \text{diag} (k_{ii}^{(l)}, / m_{ii}^{(l+1)}) \quad (6.39)$$

$$\Phi = \left(\prod_{j=1}^l P_j \right) \text{diag} (1 / \sqrt{m_{ii}^{(l+1)}}) \quad (6.40)$$

c/ LA METHODE DE RITZ:

Elle permet de transformer les problèmes de valeurs propres de grande dimension en un problème de dimension réduite que l'on résoudra par la méthode de Jacobi, et ce, en contraignant chaque vecteur propre à s'exprimer sous forme d'une combinaison linéaire de p vecteurs indépendants q_i dits de RITZ.

$$\phi = Q \cdot a \quad (6.47)$$

$$\text{Où } Q = [q_1 \dots q_p] \text{ et } a^T = \langle a_1, \dots, a_p \rangle \quad (6.48)$$

Cherchons a pour qu'un vecteur x soit aussi proche que possible d'un vecteur propre ϕ .

$$J(x) = x^T K x / x^T M x = a^T \bar{K} a / a^T \bar{M} a \quad (6.49)$$

$$\text{Où } \bar{K} = Q^T K Q \text{ et } \bar{M} = Q^T M Q \quad (6.50)$$

Où \bar{K} et \bar{M} sont donc de dimension $p \times p$.

On doit satisfaire:

$$(\bar{K} - \rho \bar{M}) a = 0 \quad (6.51)$$

On a ainsi obtenu un problème de valeurs propres de dimension $p \times p$.

$$\bar{K} \cdot A = \bar{M} \cdot A \cdot \bar{\Lambda} \quad (6.52)$$

$$\text{Où } A = [A_1 \dots A_p] \quad (6.53)$$

$$\text{et } \bar{\Lambda} = \text{diag}(\bar{\lambda}_i)$$

Les $\bar{\lambda}_i$ sont des approximations des valeurs propres du système $(K - \lambda M) \phi = 0$

Les $\bar{\lambda}_i$ vérifient, aussi, une relation semblable à celle des valeurs propres (6.33):

$$\lambda_1 < \bar{\lambda}_1 ; \lambda_2 < \bar{\lambda}_2 ; \dots ; \lambda_r < \bar{\lambda}_r < \lambda_n \quad (6.54)$$

De manière à obtenir rapidement les plus petites valeurs propres, on choisira comme vecteurs de Ritz, les solutions de:

$$K \cdot q_i = f_i \quad (6.55)$$

$$\text{Où } f_i^T = \langle 0 \dots \underset{\substack{| \\ \text{ligne } i}}{0} \dots \rangle \quad (6.56)$$

Les i correspondents aux plus petites des valeurs k / m .

On obtient donc:

$$\phi = Q \cdot a \quad (6.57)$$

Algorithme:

- Recherche des p plus petites valeurs k_{ii} / m_{ii}
- Fixer les i correspondantes
- Construire les f_i d'après (6.56)
- Retrouver q_i correspondantes à l'aide de (6.55)
- Former $Q = [q_1 \dots q_p]$
- Former \bar{K} et \bar{M} à l'aide de (6.50)
- Résoudre le système (6.52) par Jacobi pour obtenir $\bar{\Lambda}$ et A .
- Retrouver $\bar{\Phi}$; $\bar{\Phi} = Q \cdot A$: p vecteurs propres. ---

d/ METHODE DU SOUS-ESPACE:

La méthode du sous-espace permet la détermination des p premières valeurs propres d'un système de grande dimension. Elle utilise en même temps les trois méthodes qu'on a vues précédemment. Grâce à la méthode d'itération inverse on ajuste la base vectorielle de Ritz, donc on calculera $Q = [q \dots q]$. Puis, c'est la méthode de Ritz, utilisant la méthode de Jacobi, qui nous permet de trouver les valeurs propres dans le sous-espace de Ritz en contraignant les vecteurs à rester orthogonaux entre eux. Enfin, on testera la convergence de , et si besoin est, les deux opérations précédentes, plus le test, seront répétés.

Algorithme:

- Initialiser
Où $\bar{\Phi} = [\phi_1 \dots \phi_p]$
- Utiliser la méthode de l'itération inverse pour déterminer Q à partir de:
 $K \cdot Q = M$
- Utiliser la méthode de Ritz pour déterminer $\bar{\lambda}_i, i = 1, 2, \dots, p$:
Résoudre par Jacobi $\bar{K} \cdot A = \bar{M} \cdot A \cdot \bar{\Lambda}$
 $\bar{\Phi} = Q \cdot A$
- Tester la convergence des $\bar{\lambda}_i$

IV/ RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS DU SECOND ORDRE :

Il s'agit de résoudre un système d'équations linéaires de la forme:

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = R \quad (6.56)$$

équivalent au système:

$$F_i(t) + F_a(t) + F_e(t) = R(t) \quad (6.57)$$

Où: $F_i(t) = M \ddot{U}$: Forces d'inertie.

$F_a(t) = C \dot{U}$: Forces d'amortissement.

$F_e(t) = K U$: Forces élastiques.

La résolution de (6.56) peut être effectuée soit par une méthode directe ou par la méthode de la superposition des modes.

1/ METHODES DIRECTES:

Dans les méthodes directes, on utilise la procédure numérique dite pas à pas. A partir des valeurs initiales (i.e: $t=t_0$) des inconnues: U , \dot{U} et \ddot{U} , on retrouvera leurs valeurs à des instants $t_0+k \Delta t$; $k=1, 2, \dots$

Les méthodes directes sont basées sur deux idées:

i/ Discrétisation temporelle.

ii/ La supposition d'une variation de U , \dot{U} et \ddot{U} à l'intérieur de chaque intervalle de temps.

a/ LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES CENTRALES:

Dans cette méthode on détermine U en se basant sur l'équilibre à l'instant t , comme on le verra dans l'équation (6.60). C'est pourquoi cette méthode est dite méthode d'intégration explicite.

Exprimons ${}^t\dot{U}$ et ${}^t\ddot{U}$ en fonction de tU , ${}^{t-\Delta t}U$, ${}^{t+\Delta t}U$:

$${}^t\ddot{U} = 1/\Delta t \left(\frac{{}^{t+\Delta t/2}U - {}^{t-\Delta t/2}U}{\Delta t} \right)$$

$${}^{t+\Delta t/2}\dot{U} = 1/\Delta t \left(\frac{{}^{t+\Delta t}U - {}^{t-\Delta t}U}{2\Delta t} \right) = 1/\Delta t \left(\frac{{}^{t+\Delta t}U - {}^tU}{\Delta t} - \frac{{}^tU - {}^{t-\Delta t}U}{\Delta t} \right)$$

$$\text{et } {}^{t-\Delta t/2}\dot{U} = 1/\Delta t \left(\frac{{}^tU - {}^{t-\Delta t}U}{\Delta t} - \frac{{}^{t-\Delta t}U - {}^{t-2\Delta t}U}{\Delta t} \right)$$

$$\text{d'où: } {}^t\ddot{U} = 1/(\Delta t)^2 \left({}^{t+\Delta t}U - 2 {}^tU + {}^{t-\Delta t}U \right) \quad (6.58)$$

$$\text{et } {}^t\dot{U} = 1/2 \cdot \Delta t \left(\frac{{}^{t+\Delta t}U - {}^{t-\Delta t}U}{\Delta t} \right) \quad (6.59)$$

Considérons l'équation (6.56) à l'instant t :

$$M {}^t\ddot{U} + C {}^t\dot{U} + K {}^tU = {}^tR \quad (6.60)$$

En injectant (6.58) et (6.59) dans (6.60), on obtient:

$$A_1 {}^{t+\Delta t}U = {}^tR - A_2 {}^tU - A_3 {}^{t-\Delta t}U \quad (6.61)$$

$$\text{où } \begin{cases} A_1 = 1/(\Delta t)^2 M + 1/(2 \cdot \Delta t) \cdot C \\ A_2 = K - 2/(\Delta t)^2 M \\ A_3 = 1/(\Delta t)^2 M - 1/(2 \cdot \Delta t) \cdot C \end{cases} \quad (6.62)$$

Pour savoir la valeur de ${}^{t-\Delta t}U$, on utilise (6.58) et (6.59) à l'instant $t = 0$:

$$U = {}^0U - \Delta t \cdot {}^0\dot{U} + (\Delta t)^2 / 2 \cdot {}^0\ddot{U} \quad (6.63)$$

0U , ${}^0\dot{U}$ et ${}^0\ddot{U}$: conditions initiales connues.

* CHOIX DU PAS Δt :

Dans la méthode des différences finies centrale:

$$\Delta t < \Delta t_{cr} = T_n / \pi \quad (6.64)$$

Δt_{cr} : pas critique

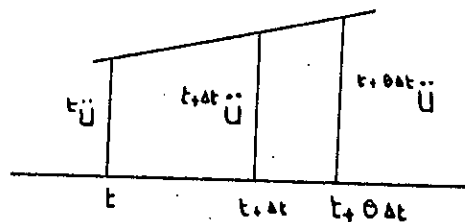
T_n : Plus petite période du système; $T_n = 2\pi / \sqrt{\lambda_n}$

Dans la méthode des différences finies centrale on a supposées que $\Delta t < \Delta t_{cr}$, elle est donc dite: méthode conditionnellement stable.

Si $\Delta t > \Delta t_{cr}$, elle sera dite: instable.

b/ LA METHODE DE WILSON :

Dans cette méthode on suppose que l'accélération varie linéairement dans un intervalle de temps t , où $\theta > 1$.



Soit τ , telque: $0 < \tau < \theta \cdot \Delta t$

$${}^{t+\tau} \ddot{U} = {}^t \ddot{U} + \tau / (\theta \cdot \Delta t) ({}^{t+\theta \Delta t} \ddot{U} - {}^t \ddot{U}) \quad (6.65)$$

Par intégration:

$${}^{t+\tau} \dot{U} = {}^t \dot{U} + {}^t \ddot{U} \cdot \tau + (\tau^2 / (2 \theta \cdot \Delta t)) ({}^{t+\theta \Delta t} \ddot{U} - {}^t \ddot{U}) \quad (6.66)$$

$$\text{et } {}^{t+\tau} U = {}^t U + {}^t \dot{U} \cdot \tau + 1/2 {}^t \ddot{U} \cdot \tau^2 + (\tau^3 / (6 \theta \cdot \Delta t)) ({}^{t+\theta \Delta t} \ddot{U} - {}^t \ddot{U}) \quad (6.67)$$

Si on exprime (6.66) et (6.67) lorsque $\tau = \theta \cdot \Delta t$

$${}^{t+\theta \Delta t} \dot{U} = {}^t \dot{U} + \theta \cdot \Delta t / 2 ({}^{t+\theta \Delta t} \ddot{U} + {}^t \ddot{U}) \quad (6.68)$$

$${}^{t+\theta \Delta t} U = {}^t U + \theta \cdot \Delta t {}^t \dot{U} + \theta^2 (\Delta t)^2 / 6 ({}^{t+\theta \Delta t} \ddot{U} + 2 {}^t \ddot{U}) \quad (6.69)$$

2/ METHODE DE SUPERPOSITION MODALE :

La méthode de superposition modale est basée sur l'exploitation des valeurs et vecteurs propres pour résoudre l'équation (6.56).

Considérons la transformation sur les déplacements modaux:

$$U(t) = P \cdot x(t) \quad (6.74)$$

P: matrice de transformation

L'équation (6.56) devient :

$$\tilde{M} \ddot{X}(t) + \tilde{C} \dot{X}(t) + \tilde{K} X(t) = \tilde{R}(t) \quad (6.75)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{M} &= P^T \cdot M \cdot P \\ \tilde{C} &= P^T \cdot C \cdot P \\ \tilde{K} &= P^T \cdot K \cdot P \\ \tilde{R} &= P^T \cdot R \cdot P \end{aligned} \right\} \quad (6.76)$$

On choisit $P = \Phi$: matrice modale, $\Phi = [\phi_1 \dots \phi_n]$

ϕ_i correspond à λ_i et $\lambda_i < \lambda_{i+1}$, $i = 1, n-1$

D'après les propriétés (6.21) et (6.22), le système (6.75) devient:

$$\ddot{X}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{X}(t) + \Omega^2 X(t) = \Phi^T R(t) \quad (6.77)$$

Où: $\Omega^2 = \text{diag}(\lambda_i)$

$$\Phi_i^T C \Phi_j = 2 \xi_{ij} \omega_i \delta_{ij} \quad (6.78)$$

Où ξ_{ij} est le coefficient d'amortissement modale.

Les conditions initiales sont:

$${}^0 X = \Phi^T M {}^0 U, \quad {}^0 \dot{X} = \Phi^T M {}^0 \dot{U} \quad (6.79)$$

d'où:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X}_i(t) + 2 \omega_i \xi_i \dot{X}_i(t) + \omega_i^2 X_i(t) &= r_i(t) \\ \text{où } r_i(t) &= \Phi_i^T R(t) \end{aligned} \right\} \quad i=1, \dots, n \quad (6.80)$$

L'équation (6.80) est l'équilibre d'un système à un seul degré de liberté avec masse unité, rigidité ω_i^2 et coefficient d'amortissement ξ_i .

La solution de (6.80) est donnée par l'intégrale de Duhamel:

$$\begin{aligned} X_i(t) &= \frac{1}{\bar{\omega}_i} \int_0^t r_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \bar{\omega}_i (t-\tau) d\tau \\ &+ e^{-\xi_i \omega_i t} [\alpha_i \sin \bar{\omega}_i t + \beta_i \cos \omega_i t] \quad \text{où } \bar{\omega}_i = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (6.81) \end{aligned}$$

On se rend compte d'après (6.79) qu'on a pas besoin de construire la matrice C.

La deuxième égalité de (6.77) montre que l'amortissement total est la somme des amortissements modaux.

Enfin;

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i x_i(t) \quad (6.81)$$

En pratique il suffit de considérer les premiers modes correspondants aux basses fréquences du système, car les autres fréquences sont quasi statiques.

D'où l'intérêt de ne chercher qu'un nombre p , $p < n$ (ou même $p \ll n$), de vecteurs propres.

Dans le cas des séismes, $p = 10$ généralement.

Chapitre 7

Programmation

I/ INTRODUCTION

Le programme que nous avons élaboré , en langage FORTRAN 77 traite les problèmes qui relèvent de l'élasticité plane : Déformation plane et contraintes planes dans le cas linéaire et ce par la méthode des éléments finis.

Le programme traite les 3 types de problèmes :

- Problèmes de statique : Recherche des déplacements , contraintes et réactions (problème n°1)
- Les problèmes de valeurs propres : Recherche des valeurs propres et vecteurs propres correspondants. (problème n°2)
- Les problèmes de dynamique : Recherche des déplacements dans le domaine des temps. (problème n°3)

Dans ce qui suit , nous présentons les principales sous-routines et les organigrammes correspondants , notamment l'organigramme principal.

II/ PRINCIPALES SUBROUTINES APPELEES :

1/ Subroutine CONEC :

Lorsqu'on a un cadre de maillage comme l'indique la figure ci-dessous (fig 7.1) , il suffit à l'utilisateur du programme de donner les numéros du 1^{er} et dernier noeuds ainsi que les numéros du 1^{er} et dernier éléments à condition qu'une règle de numérotage soit respectée, ainsi la sous-routine construit la table NN (fig 7.2)

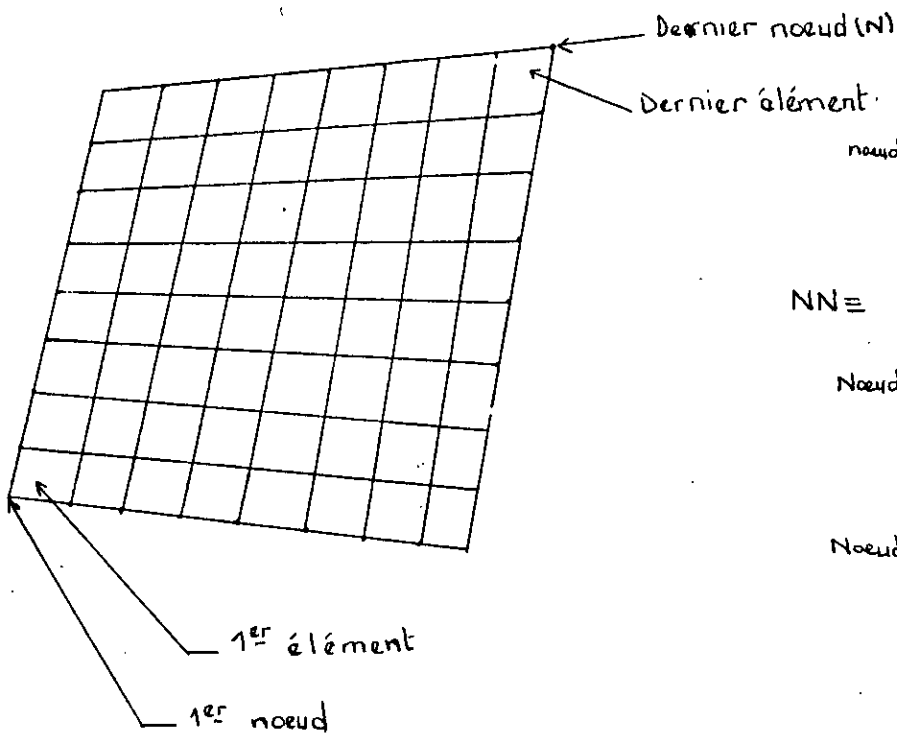


fig. 7.1

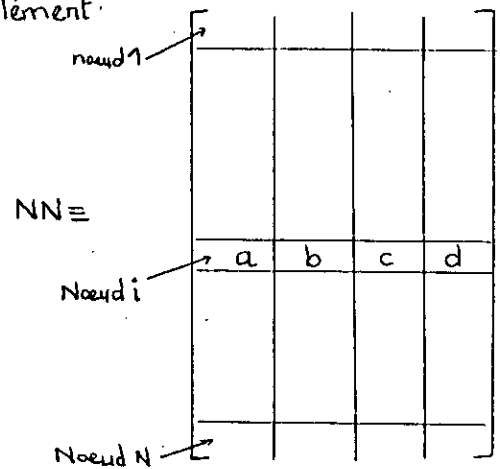


fig. 7.2

REMARQUE :

Pour chaque élément le sens de numérotage est préservé (sens trigonométrique) . La figure 3 indique le sens de numérotage de l'élément i.

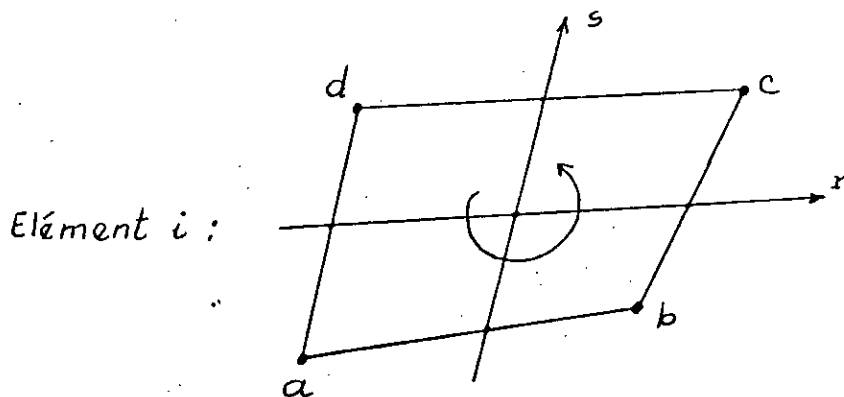


fig. 7.3

2/ SUBROUTINE COOR :

En donnant seulement les 4 numéros des noeuds avec leurs coordonnées sur un maillage régulier (fig.7.1) , la subroutine COOR construit la table XYN.



3/ SUBROUTINE ASMB :

Construit la matrice de rigidité globale K et aussi lorsque le problème est de valeurs propres ou dynamique la matrice masse globale M, par assemblage des matrices élémentaires K⁽ⁿ⁾ et M⁽ⁿ⁾. Ces dernières sont construites à l'aide d'intégration numérique par la méthode de GAUSS par la subroutine ELEM.

Les organigrammes 2 et 3 correspondent respectivement aux subroutines ASMB et ELEM.

4/ SUBROUTINE C.A.L :

Il existe 2 procédures permettant d'introduire les conditions aux limites

4-1/ METHODE DU TERME DIAGONAL :

Il s'agit de donner une valeur très grande aux termes diagonaux correspondants aux d.d.l éliminés, et ce au niveau de la matrice de rigidité globale. Il est à noter que cette démarche ne peut s'effectuer que dans le cas d'un problème statique pour résoudre $K.U = R$, car lorsqu'on examine les problèmes de valeurs propres et de dynamique, on ne peut prévoir quelle valeur très grande peut-on introduire dans la matrice masse M vu que K et M font partie d'une même équation. C'est pourquoi, il est préférable dans le cas statique pour minimiser les erreurs, et est nécessaire dans les autres cas de valeurs propres et de dynamique d'utiliser la méthode d'élimination des équations (4.2/).

4-2/ METHODE DE L'ELIMINATION DES EQUATIONS :

Il s'agit de supprimer les lignes et colonnes sur K et M et les termes du vecteur chargement qui correspondent aux d.d.l éliminés. Si la dimension du problème vaut n et le nombre de d.d.l éliminés vaut m , alors le système après introductions des C.A.L aura la dimension $l = (n - m)$

5/ SUBROUTINE DECK :

Il s'agit de décomposer K en le produit de 3 matrices :

$$K = LDL^T$$

6/ SUBROUTINE RESS :

Il s'agit de résoudre $LDL^T = R$

$$L(DL\bar{U}) = R \rightarrow X$$

$$D(L\bar{U}) = X \rightarrow y$$

$$L^T(U) = y$$

7/ SUBROUTINE ARRU :

Comme nous avons vu dans la sous-routine CAI, le système a été réduit d'une dimension n à une dimension l , et les solutions données par la sous-routine RESS ne correspondent pas aux d.d.l réels de notre modèle (c.a.d aux nœuds), il faudra donc arranger le vecteur solution U pour que chaque (déplacement du nœud i) correspondra au déplacement du nœud i du modèle, et les termes du U correspondant aux d.d.l éliminés prendront la valeur nulle.

8/ SUBROUTINE REAC :

Pour obtenir les réactions au niveau des appuis, donc au niveau des nœuds où les d.d.l ont été éliminés, il suffit de multiplier les lignes de K correspondantes aux d.d.l éliminés par le vecteur déplacement.

9/ SUBROUTINE CTRT :

les contraintes se calculent aux niveau du centre de gravité de chaque élément ($r = 0$, $s = 0$) à l'aide de la relation

$$\sigma^{(m)} = C^{(m)} . \epsilon^{(m)} = C^{(m)} . B^{(m)} . U^{(m)}$$

10/ SUBROUTINE VPVP :

La subroutine VPVP calcule les premières valeurs et vecteurs propres par la méthode du sous-espace. Il est nécessaire d'utiliser cette méthode pour un problème de grande dimension ($n > 100$). Toutefois elle est aussi préférable pour les problèmes de petite taille ($n < 100$) car pour ces derniers , si on utilise la méthode de JACOBI , on est obligé de calculer toutes les valeurs propres et tous les vecteurs propres correspondants ce qui augmente le coût de résolution. Certes , la méthode de l'itération permet aussi de calculer un nombre fini qu'on désire mais elle n'est pas si efficace que la méthode de JACOBI qu'utilise la méthode du sous-espace pour résoudre le problème sur un sous espace de Ritz de dimension p (ou $p < 100$).

L'organigramme 4. correspond à la subroutine VPVP.

La subroutine ITINV exécute une itération inverses pour calculer simultanément les P vecteurs de Ritz q_i à partir de

$$K q_i = M \phi_i \quad i = 1, \dots, p$$

La subroutine RITZ calcule les p valeurs propres et vecteurs propres en utilisant la méthode de JACOBI :

$$\bar{K}.A = \bar{\Lambda} \bar{M} A$$

Après avoir calculé K et M

$$- K = Q^T \cdot K \cdot Q$$

$$- M = Q^T \cdot M \cdot Q$$

Enfin : $\Phi = Q \cdot A$

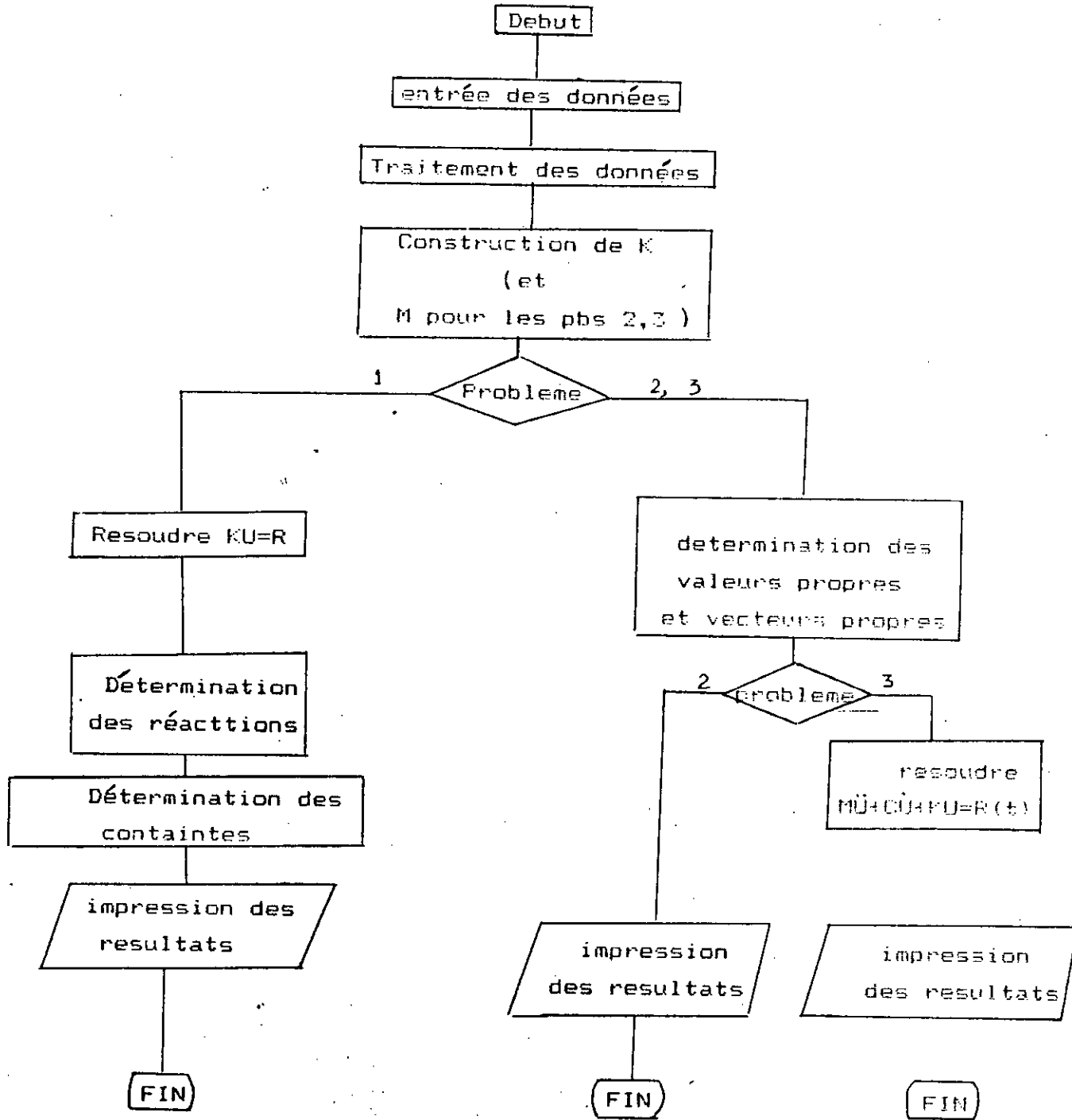
La résolution par la méthode de JACOBI se fait par appel à la subroutine JACOBI.

11/ SUBROUTINE RESD :

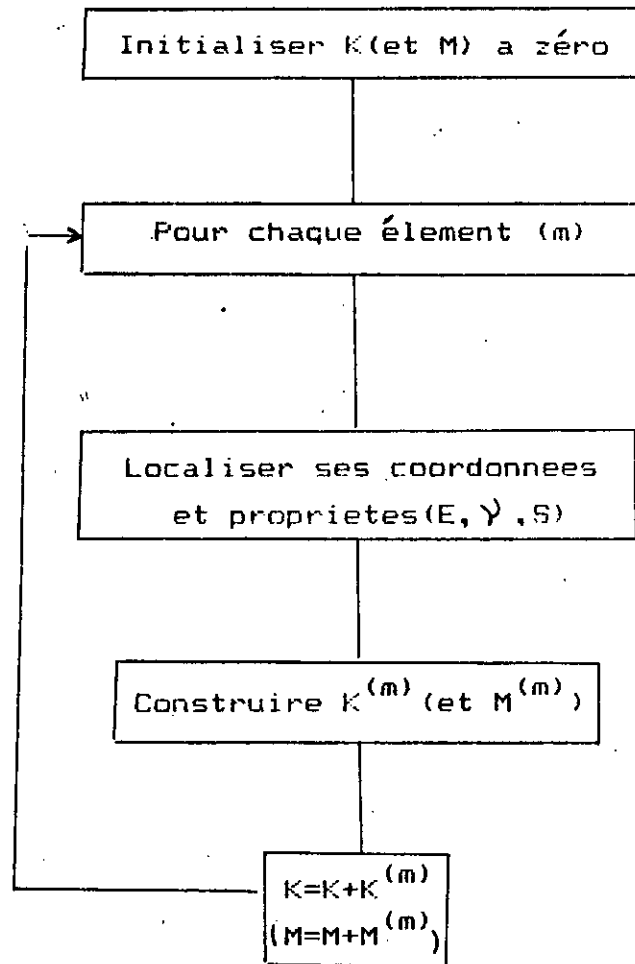
La subroutine RESD calcule la réponse dynamique du système dans le temps, en utilisant la méthode de la superposition des modes décrite dans le chapitre 4. La subroutine RESD appelle la subroutine SIMP qui calcule les déplacements généralisés X_i par intégration numérique en utilisant la méthode de Simpson.

L'organigramme n°5 Correspond à la subroutine RESD.

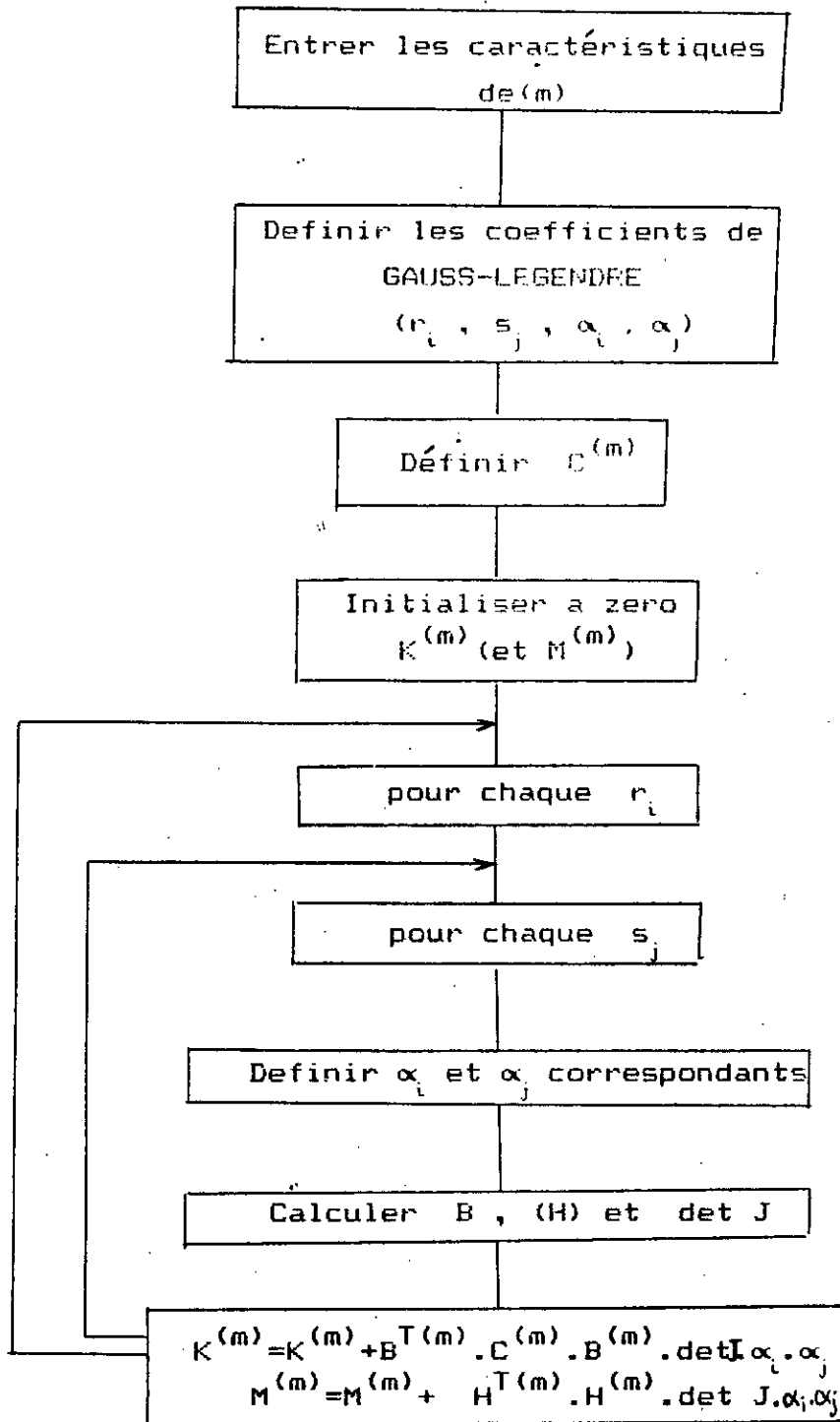
ORGANIGRAMME 1
PROGRAMME PRINCIPAL



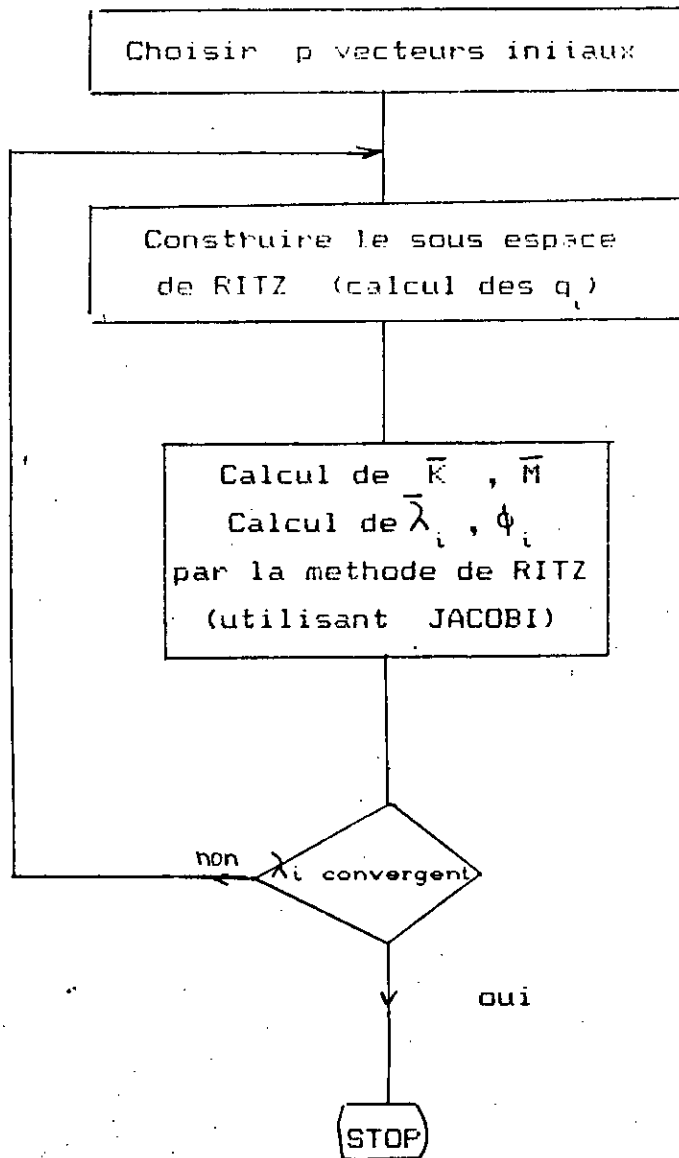
ORGANIGRAMME 2
SUBROUTINE ASMB



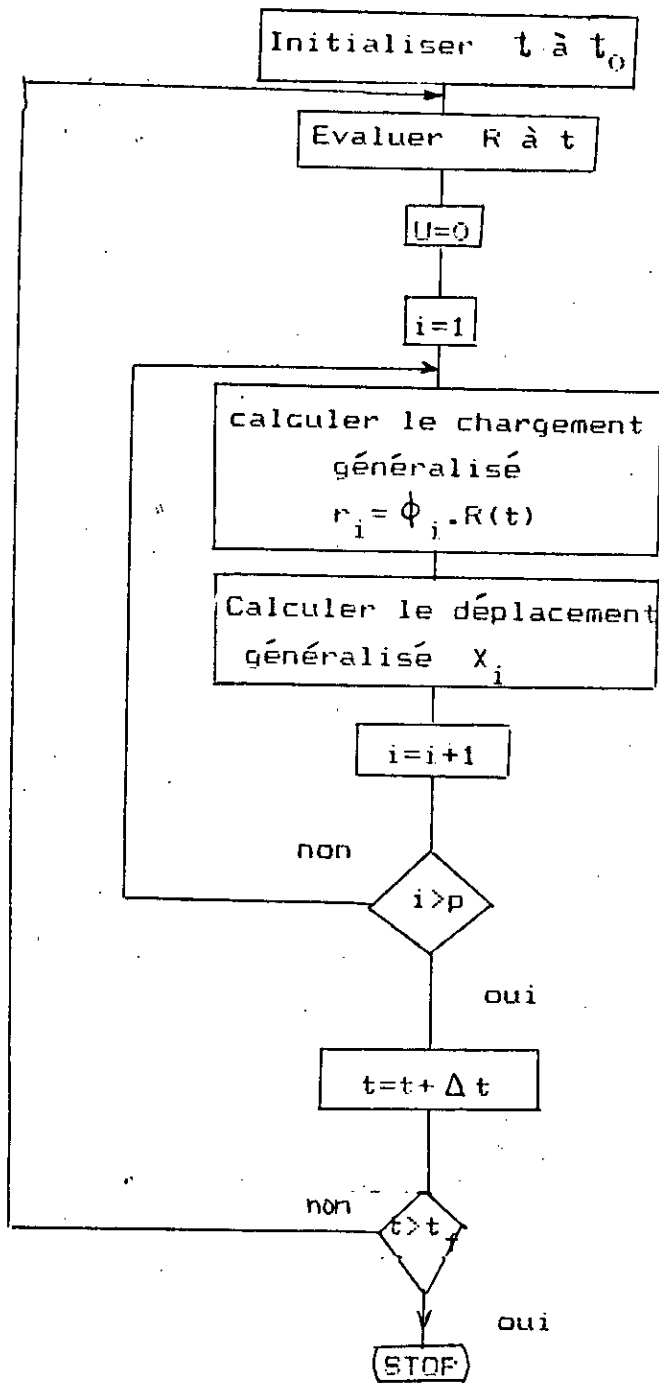
ORGANIGRAMME 3
SUBROUTINE ELEM



ORGANIGRAMME 4
SUBROUTINE VPVF



ORGANIGRAMME 5
SUBROUTINE RESD



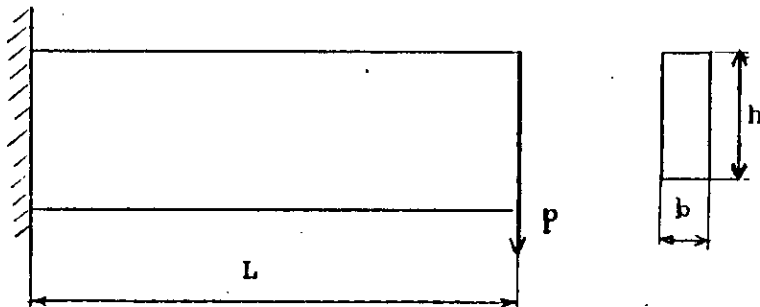
Chapitre 8

Applications

A/ TESTS SUR LE PROGRAMME:

Le fonctionnement du programme que nous avons élaboré a été testé sur un problème simple dont nous détenons les solutions théoriques de différents cas de problèmes de la mécanique des structures.

Nous avons choisi le problème classique de la console encastrée qui a été modélisée par des plaques membranaires (modélisation en contraintes planes), différents maillages sont proposés pour tester l'efficacité des éléments choisis qui sont des quadrilatères à 4 noeuds.

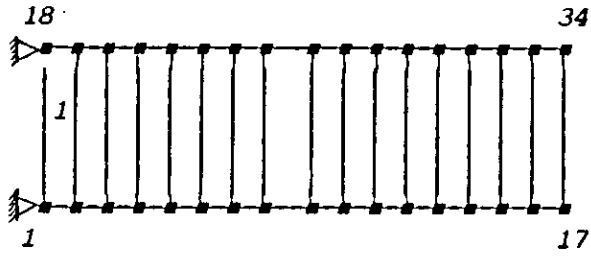


$$P = 500 \text{ N} \quad E = 21. 10 \text{ N/m}^2$$

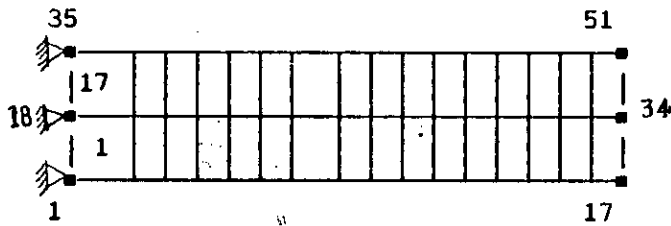
$$L = 1\text{m} \quad b = 0,01\text{m} \quad h = 0,1\text{m}$$

$$\nu = 0,3 \quad \rho = 7900 \text{ Kg/M}^3$$

Les différents maillages adoptés:

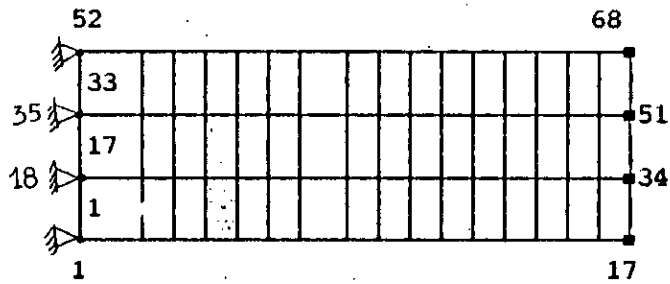


a) 16 éléments et 34 noeuds



b) 32 éléments et 51 noeuds.

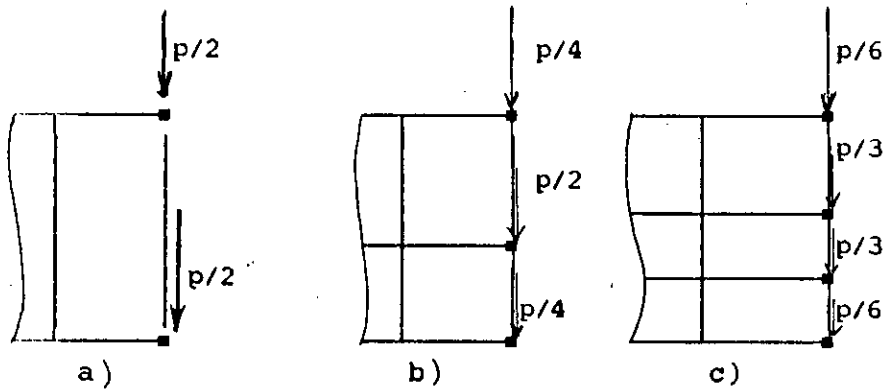
$N_{ix} \equiv N_{iy}$



c) 48 éléments et 68 noeuds.

1- PROBLEME STATIQUE:

Point d'application du chargement:



Résultats: (sont donnés en système MKSA).

La flèche à l'extrémité de la poutre est donnée par la théorie de l'élasticité, la formule s'exprime au niveau de la fibre neutre:

$$f = PL^3 / 3EI + PL^3 / 2IG$$

ou $G = E / 2(1 + \nu)$

Les contraintes étant calculées au niveau des centres de gravité des éléments.

CAS A/

	THEORIE	PROGRAMME
f	$- 0,95 \cdot 10^{-3}$	$- 0,76 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_x(1)$	0,00	0,00
$\epsilon_{xy}(1)$	500 000	500 000
$R_x(1)$	5000	5000
$R_x(18)$	-5000	-5000
ϵ_{Ry}	500	500

Cas b/

	THEORIE	PROGRAMME
f	$- 0,95 \cdot 10^{-3}$	$- 0,81 \cdot 10^{-3}$
$\sigma x(1)$	$1,45 \cdot 10^7$	$1,25 \cdot 10^7$
$\sigma x(17)$	$-1,45 \cdot 10^7$	$-1,25 \cdot 10^7$
$\Gamma xy(1)$	500 000	499999,99
$\Gamma xy(17)$	500 000	499999,99
$Rx(1)$	5000	4999,99
$Rx(18)$	0,00	0,00
$Rx(35)$	-5000	- 4999,99
ΣRy	500,00	500,00

depli.

convergence ???

Cas C/

	THEORIE	PROGRAMME
f	$- 0,95 \cdot 10^{-3}$	$- 0,82 \cdot 10^{-3}$
$\sigma x(1)$	$1,93 \cdot 10^7$	$1,67 \cdot 10^7$
$\sigma x(17)$	0,00	0,00
$\sigma x(33)$	$- 1,93 \cdot 10^7$	$- 1,67 \cdot 10^7$
$\Gamma xy(1)$	500 000	592457,87
$\Gamma xy(17)$	500 000	315078,24
$\Gamma xy(35)$	500 000	592457,887
ΣRy	500.00	500.00

5

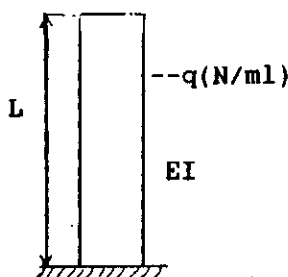
INTERPRETATION DES RESULTATS:

lorsqu'on examine les résultats concernant les déplacements, on voit bien que la précision n'est pas satisfaisante malgré qu'il y ait convergence à chaque fois qu'on raffine le maillage, si on veut obtenir des résultats plus précis il faut s'attendre à un coût de résolution exorbitant. Les résultats montrent la surestimation de la rigidité dans la méthode des éléments finis. Afin d'accélérer le processus de convergence avec un nombre plus limité d'élément, il est préférable d'utiliser des éléments de haute précision quadrilatères à 8 ou 9 noeuds.

2) DETERMINATION DE LA 1ERE VALEUR PROPRE:

La première valeur propre d'une console encastree est donnée par la formule:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \omega^2 = 3EI \cdot g / PL^3 \\ \text{ou } g &= 9,81 \text{ M/s}^2 \\ P &= (33/140)q \cdot L \\ \lambda_1 &= 0,27 \cdot 10^6 \text{ (rd/s)}^2 \end{aligned}$$



Les résultats donnés par le programme pour différents maillage.

	$\lambda_1 = \omega^2 \text{ (rd/s)}^2$
a	$0,33 \cdot 10^6$
b	$0,30 \cdot 10^6$
c	$0,29 \cdot 10^6$

B) APPLICATIONS OU CAS DE FONDATION SUR SOL ELASTIQUE:

1) INTRODUCTION:

Il s'agit d'analyser le comportement sol + structures et ce en utilisant le programme que nous avons élaboré et présenté précédemment. Il est à noter que nous avons évité de considérer les sols saturés pour ne pas être dans le cas de l'incompressibilité.

2) EXEMPLE STATIQUE:

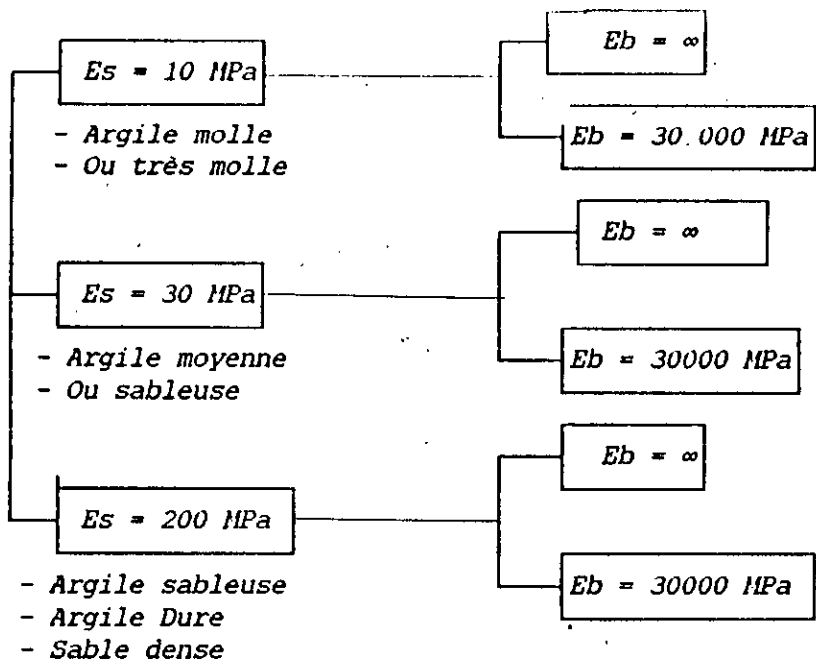
Nous avons considéré une fondation superficielle chargée uniformément reposant sur un sol dont nous asseyons de modifier à chaque fois les propriétés de matérielles (E et ν) et voir l'influence de ces modifications sur les résultats: contraintes et déplacements

2 cas de fondations ont été considérés:

- Fondation infiniment rigide: $E \Rightarrow \infty$
- Fondation flexible: $E = 30\ 000\ \text{MPa}$

Nous avons fixé pour le béton $\nu_b = 0,2$

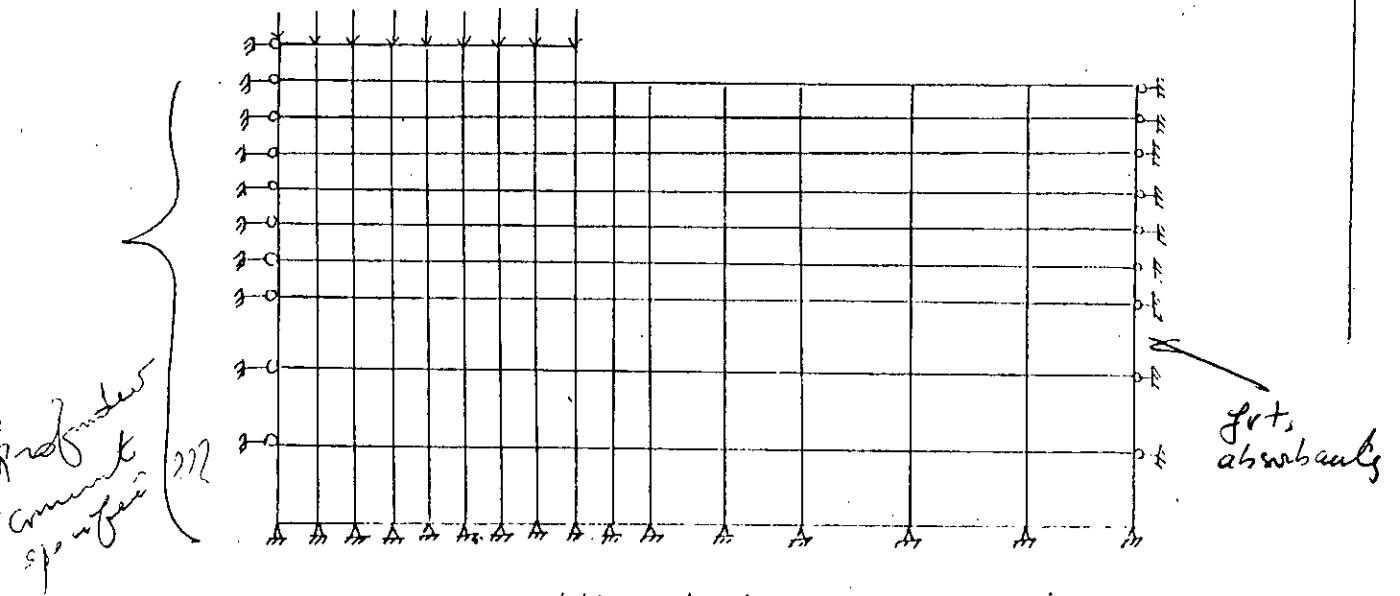
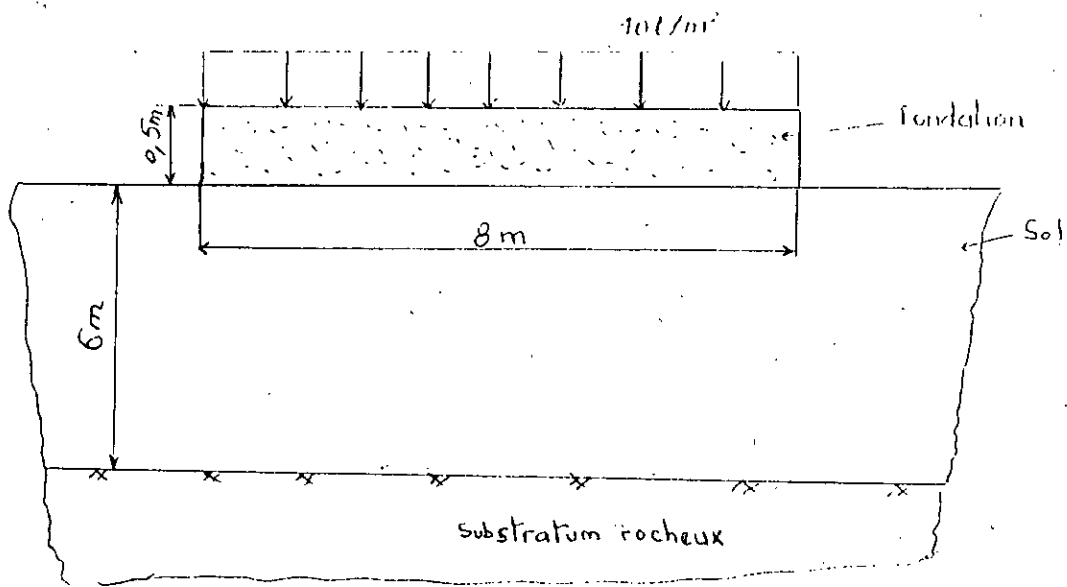
Pour $\nu_s = 0,25$ puis $\nu_s = 0,35$, nous avons considéré les cas suivants:



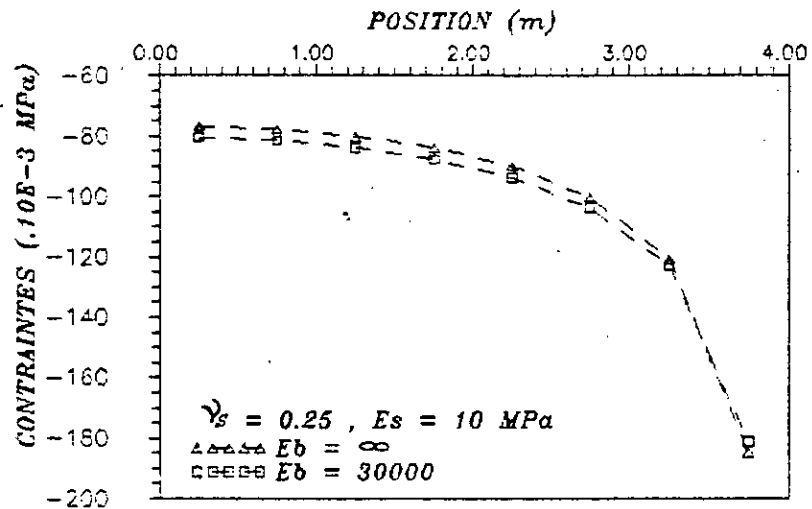
INTERPRETATION DES RESULTATS:

Les graphes de (8.1) à (8.6) montrent la distribution des pressions sous la fondation dans les 2cas: $E_b = \infty$ puis $E_b = 30.000$ MPa. On remarque que l'effet de la rigidité de la fondation apparait surtout lorsque le sol est de plus en plus rigide (E_s grand) et la contrainte maximale est surestimée dans la mesure où on suppose une fondation infiniment rigide.

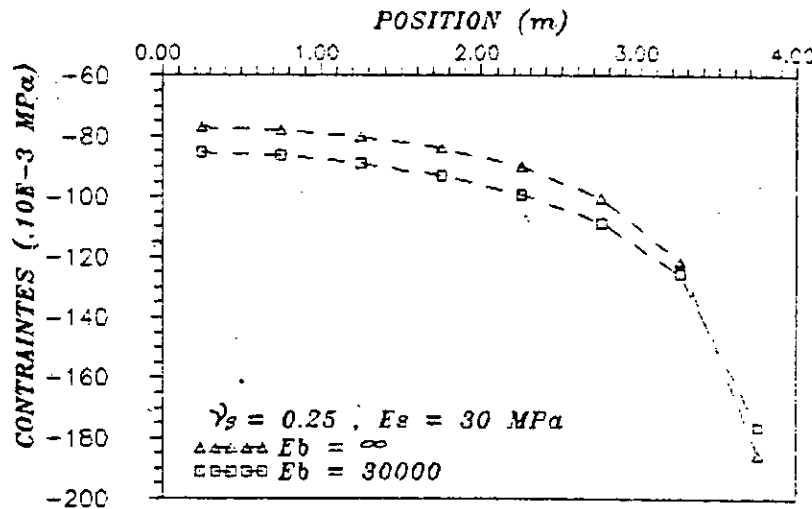
En ce qui concerne les graphes (8,7) et (8,8) qui représentent la déformée de la fondation, on peut en conclure que seul le module d'élasticité du sol a un effet et que le coefficient de poisson influence peu les déplacements.



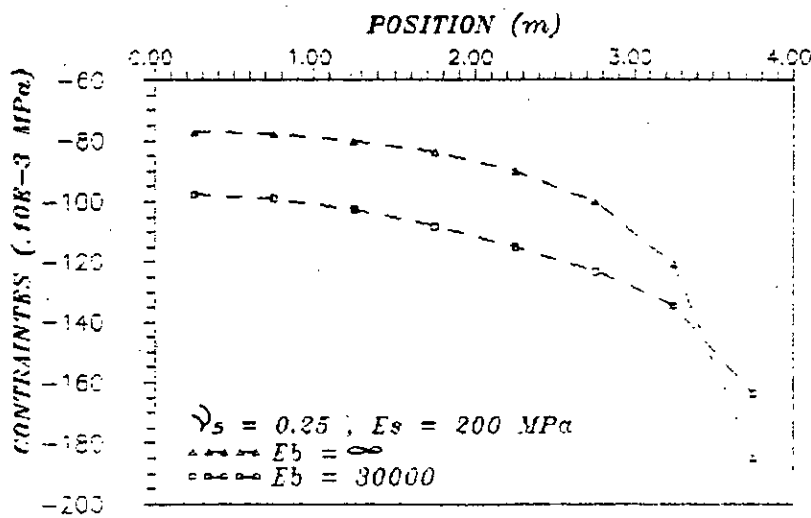
Modèle éléments finis



(6-1)

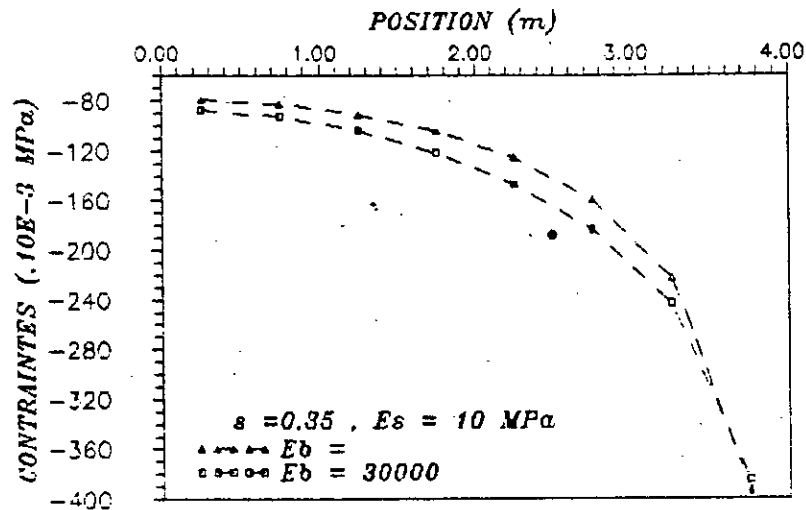


(8-2)

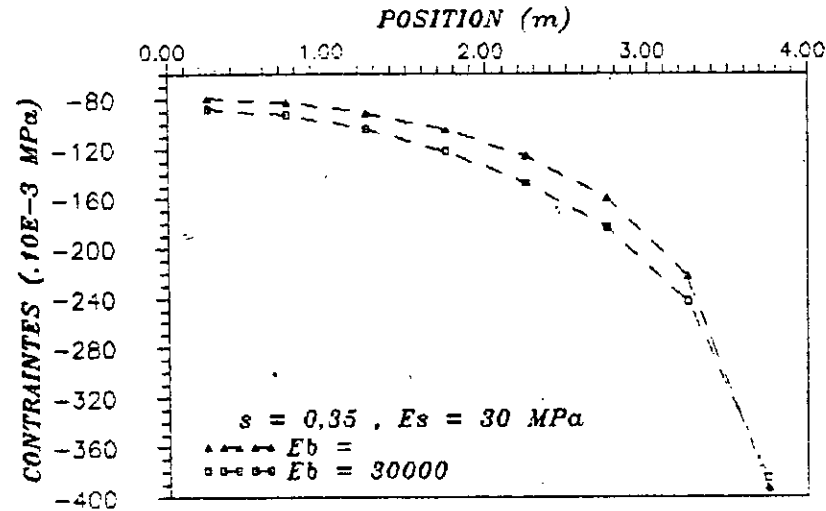


8-3

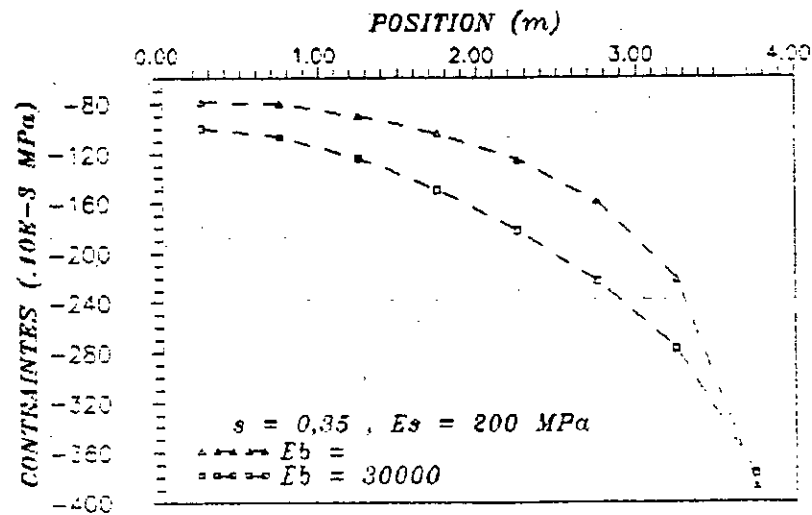
111



(8-4)

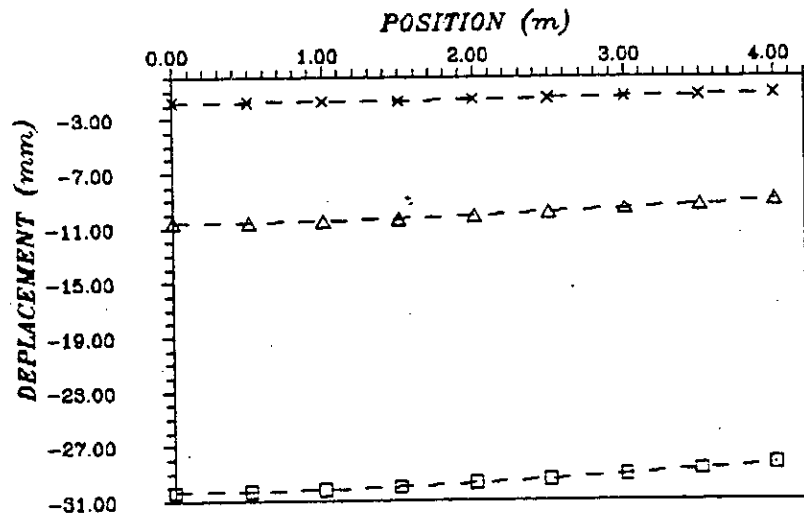


(8-5)

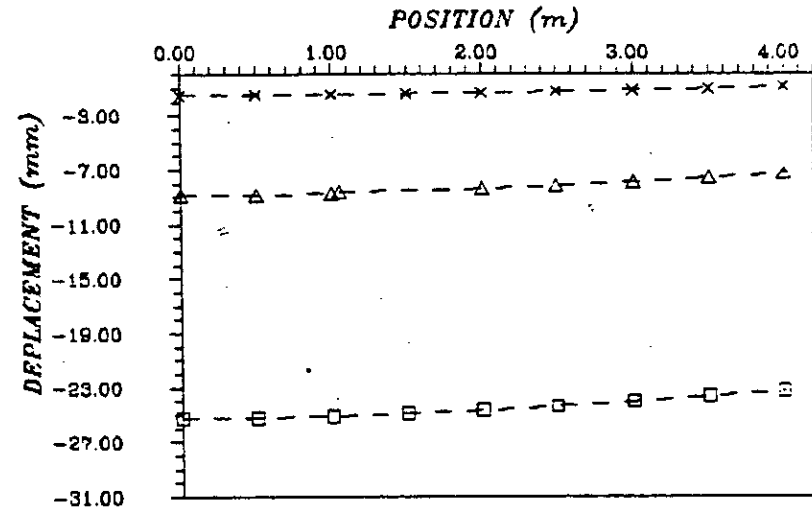


(8-6)

112



$E_b = 30000 \text{ MPa}$
 $\nu_s = 0.25$
 (8-7)



$E_b = 30000 \text{ MPa}$
 $\nu_s = 0.35$
 (8-8)

ok
 amije

- $E_s = 10 \text{ MPa}$
- ▲ $E_s = 30 \text{ MPa}$
- ✕ $E_s = 200 \text{ MPa}$

II : CAS DYNAMIQUE:

Nous considérons une fondation en béton sur sol élastique. La fondation possède une largeur de 4m. La couche de sol (argileux) est supposée égale à 16m et reposant sur un substratum à cette profondeur.

La dimension maximale des éléments dépend de la longueur d'onde associée à la fréquence maximale:

$$H \leq V_s / 8f_{\max}$$

Où V_s est la vitesse de propagation des ondes de cisaillement.

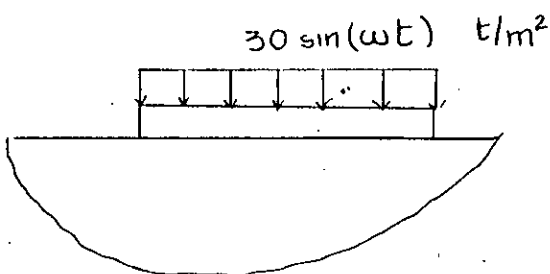
$$V_s = \sqrt{G/\rho_s}$$

$$G = E_s / 2(1+\nu_s)$$

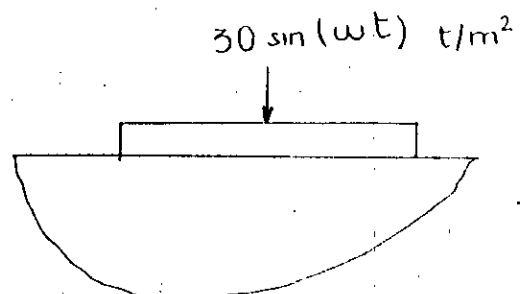
$$f_{\max} = (16/6)(V_s/H)$$

$$\text{D'où } h \leq (1/8) V_s \cdot 6H/(16 \cdot V_s) = 3H/64 = 0,75\text{m}$$

Dans cet exemple, nous proposons un chargement dû à des vibrations machines. Deux cas de distribution du chargement sont proposés:



CHARGEMENT REPARTI

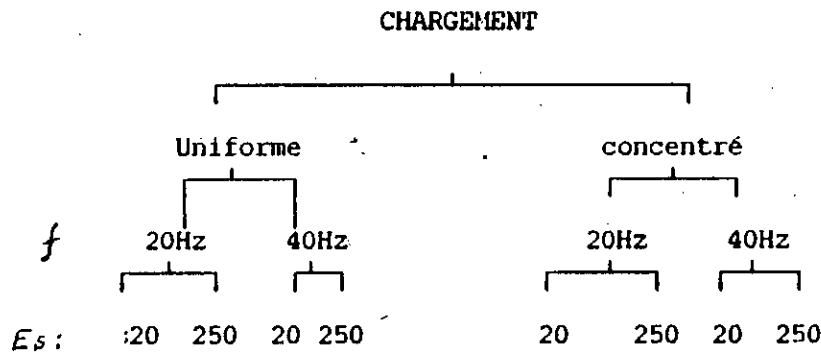


CHARGEMENT CONCENTRE

Nous fixons $\gamma_s = 0,25$ et $\gamma_b = 0,2$ et nous considérons pour chaque type de chargement les cas suivants:

$E_s = 250 \text{ MPa}$ et $E_b = 30000 \text{ MPa}$
 $E_s = 20 \text{ Mpa}$ et $E_b = 30000 \text{ Mpa}$

Cas à étudier:



Les graphes de (8-9) à (8-12) représentent le déplacement maximal pendant l'application du chargement de la fondation.

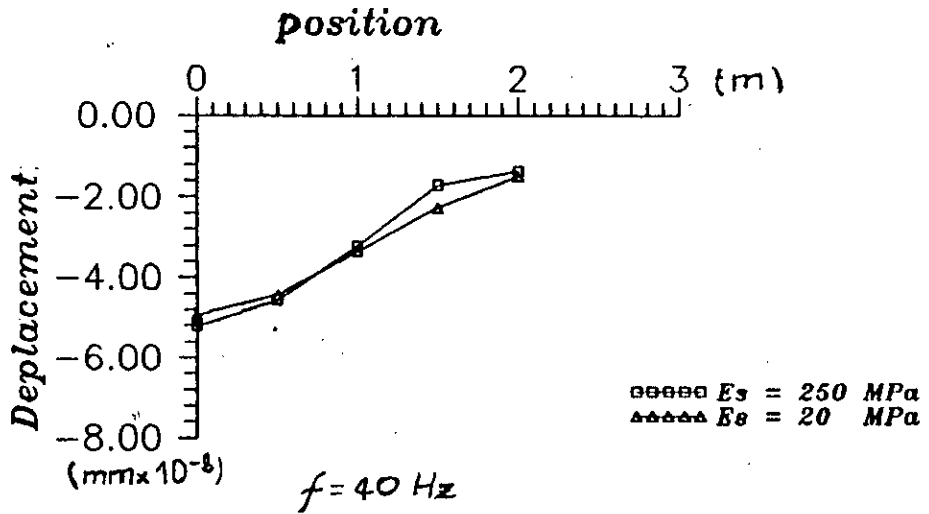
INTERPRETATION DES RESULTATS:

Avant de passer directement à l'Interprétation des résultats, il est à noter que le temps de résolution n'a pas permis de traiter plusieurs cas (plusieurs fréquences, plusieurs E_s, E_b). C'est pourquoi nous essayerons de commenter dans les limites de ce qu'on a obtenu comme résultats.

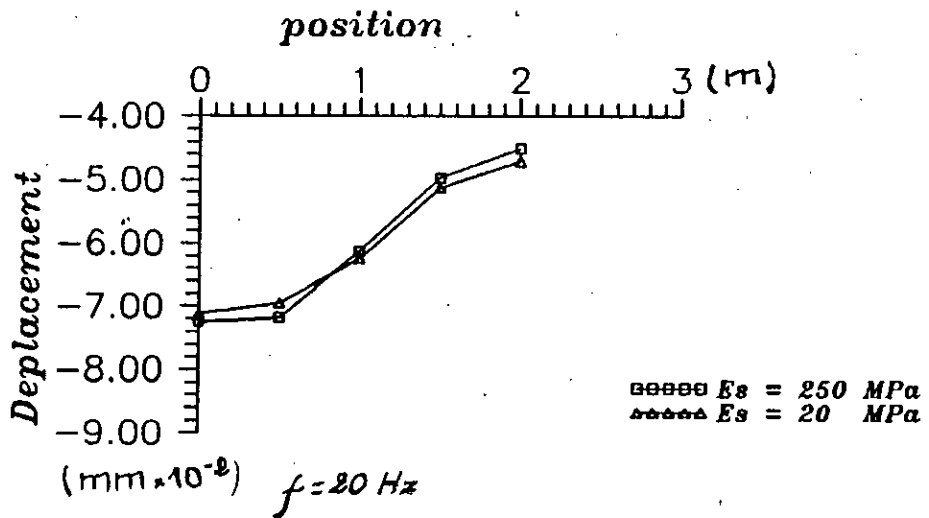
Lorsqu'on examine les graphes de (8-9) à (8-12), on remarque que les déplacements décroissent quand on augmente la fréquence.

L'effet de la distribution du chargement apparait aussi lorsqu'on compare les 2 cas de distribution du changement, lorsqu'on a changé E_s dans le cas d'un chargement uniforme (8.9) et (8-10) il n'a apparu qu'une légère différence, ce qui n'est pas le cas d'un chargement concentré au centre (8-11) et (8-12, Ces graphes qui montrent que plus on s'approche du centre de la fondation et plus l'influence de E_s sur les déplacements apparait.

CHARGEMENT UNIFORME

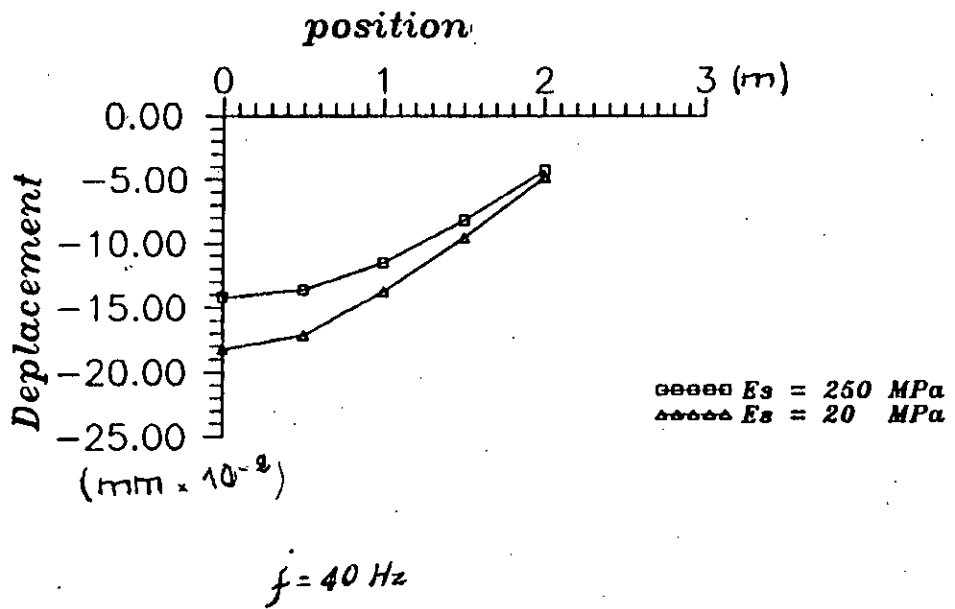


Graphe (8-9)

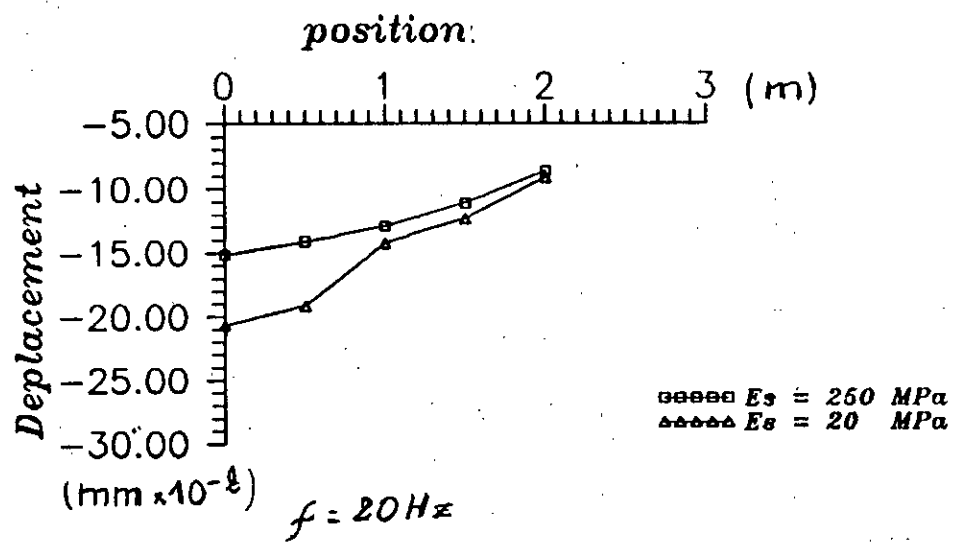


Graphe (8-10)

CHARGEMENT CONCENTRE



Graph (8-11)



Graph (8-12)

Conclusion Générale

La méthode des éléments finis appliquée aux problèmes de fondation a permis la prise en compte de l'interaction sol-structure tout en déterminant simultanément, la réponse, dans le sol et dans la structure, ce qui constitue un intérêt de la méthode.

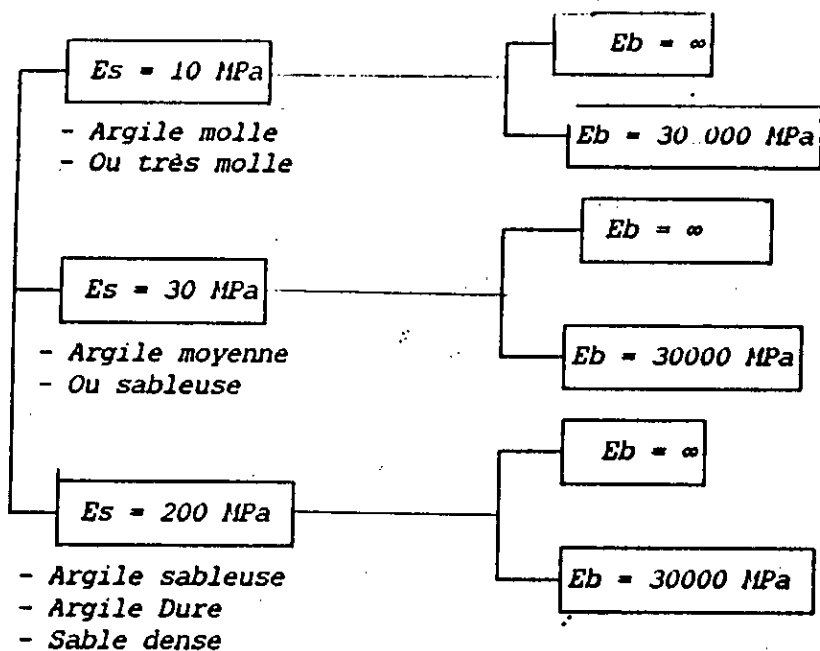
Il est à noter que la structure granulaire du sol n'a pas été prise en compte lorsqu'on considère celui-ci comme toute autre milieu continu, homogène et isotrope. ce problème se pose dans le cas des sables, pour lesquels l'allure de la déformée est différente (observée expérimentalement) à celle qu'on trouve en appliquant la théorie d'élasticité.

On remarque dans les exemples que nous avons traité, l'importance de la prise en compte de tous les facteurs:

- Rigidité du sol
- Rigidité de la fondation
- Existence d'un substratum à une profondeur limitée
- Distribution du chargement
- Fréquence de chargement

Qui influent considérablement sur le comportement d'une fondation telle que celle prise dans nos exemples.

En pratique, il est important de considérer les emplacements des machines vibrantes, dans le cas des usines, et aussi leur fréquence qui ne doit pas coïncider avec la fréquence propre du système pour éviter le phénomène de résonance.



INTERPRETATION DES RESULTATS:

Les graphes de (8.1) à (8.6) montrent la distribution des pressions sous la fondation dans les 2cas: $E_b = \infty$ puis $E_b = 30.000$ MPa. On remarque que l'effet de la rigidité de la fondation apparait surtout lorsque le sol est de plus en plus rigide (E_s grand) et la contrainte maximale est surestimée dans la mesure où on suppose une fondation infiniment rigide.

En ce qui concerne les graphes (8,7) et (8,8) qui représentent la déformée de la fondation, on peut en conclure que seul le module d'élasticité du sol a un effet et que le coefficient de poisson influence peu les déplacements.

Enfin nous souhaitons que notre travail ne reste pas limité, qu'il mérite une extension, c'est pourquoi, nous suggérons son développement comme suit:

- Etude dans le cas de non linéarité.
- Utilisation d'élément quadrilatères à 8 noeuds.
- Etude dans le domaine des fréquences.
- Utilisation des frontières absorbantes pour éviter le problème des C.A.L.

Annexes

ANNEXE 1

CALCUL DE LA REPOSE DYNAMIQUE D'UN PROFIL DE SOL

CALCUL DE LA REPONSE DYNAMIQUE D'UN PROFIL DE SOL

MODELISATION ET MISE EN EQUATION:

En laissant de côté la question de la loi de comportement du sol, la mise en équation du mouvement est directement liée à la Modélisation adoptée pour le milieu et au type d'ordre envisagé. on admet que le mouvement est créé par une onde de cisaillement à propagation verticale et on considère un profil de sol stratifié horizontalement dont les caractéristiques sont invariables au plan.

Dans ces conditions le problème devient unidimensionnel.

1 MODELE CONTINU

Soit un élément de sol pris à une profondeur z dans le profil dans nos hypothèses, les seules efforts s'exerçant sur cet élément sont les contraintes de cisaillement et les forces d'inertie (Fig-1)

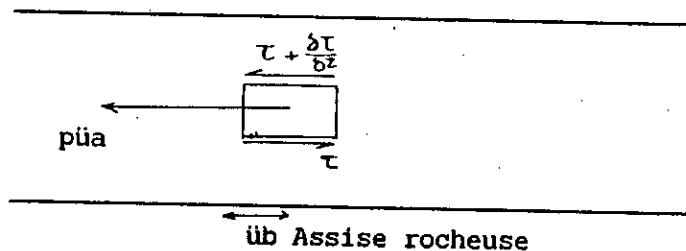


Fig 1

L'accélération absolue U_a de l'élément de sol est égale à la somme de l'accélération U_b de l'assise rocheuse, supposée exister à une certaine profondeur, et de l'accélération relative U .

$$U_a = U_b + U$$

L'équation de mouvement s'écrit (équation fondamentale de la dynamique)

$$\rho \delta z / \delta z = U_a \quad (1)$$

où ρ est la masse volumique de l'élément de sol.

En raisonnant en déplacement relatif (U) par rapport à l'assise rocheuse, l'équation (1) devient

$$\rho \delta^2 U / \delta t^2 - \delta \tau / \delta z = -\rho d^2 y / dt^2 \quad (2)$$

Cette équation associée à la loi de comportement du sol.

$$\tau = f(\delta U / \delta z) = f(\delta) \quad (3)$$

où δ est la déformation de cisaillement permet de déterminer la valeur du déplacement en tout point et par la loi de comportement (3) la valeur de la contrainte.

2- MODELE DISCONTINU.

Une modélisation des plus simples d'un profil consiste à concentrer les masses aux limites de couches et à les relier elles par des ressorts et des amortisseurs (Fig-2)

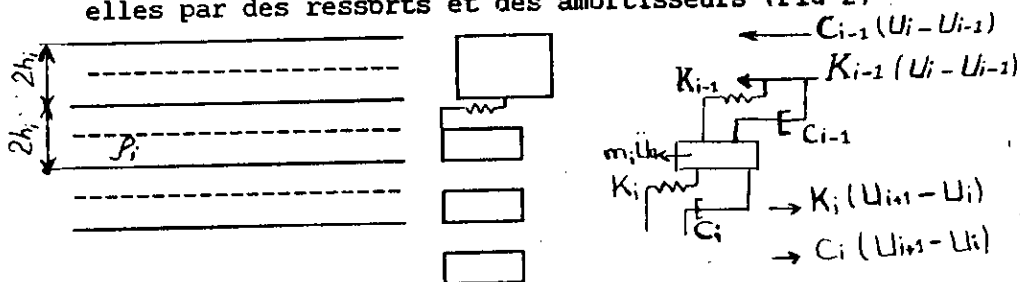


Fig 2 Modèle à masses concentrées

En écrivant l'équation de la masse on obtient:

$$m_i U_a + C_{i-1} (U_i - U_{i-1}) + K_i (U_i - U_{i-1}) = \quad (4)$$

$$K_i (U_{i-1} + U_i) + C_i (U_{i-1} + U_i)$$

Soit en introduisant le déplacement relatif par rapport à l'assise rocheuse,

$$M_{ii} - C_i U_{i+1} + (C_i + C_{i-1}) U_i - C_{i-1} U_{i-1} - K_i U_{i+1} \quad (5)$$

$$+ (K_{i-1} + K_i) U_i - K_{i-1} U_{i-1} = - m U_b$$

En regroupant les équations (5) pour l'ensemble des masses m_i et en introduisant des notations matricielles, l'équation du mouvement s'écrit:

$$[M]U + [C]U + [K]U = - m U_b \quad (6)$$

La matrice M est une matrice diagonale dont les éléments valent:

$$M_{ii} = \int_{i-1}^i h_i + \int_i^{i+1} h_i \quad (7)$$

C et K sont des matrices tridiagonales:

$$\left. \begin{aligned} K_{ii} &= G_{i-1/2} h_{i-1} + G_i / 2 h_i \\ K_{ij} &= -G_i / 2 h_i ; j = i-1 \text{ ou } j = i+1 \\ K_{ij} &= 0 ; j < i-1 \text{ ou } j > i+1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

REMARQUE:

Dans le modèle viscoélastique linéaire, la matrice K tient compte de l'amortissement du matériaux si elle est formée avec les modules complexes G^* .

D'autres discretisations que celle par masses concentrées sont possibles pour représenter le profil de sol, La M.E.F conduit à une équation différentielle du mouvement analogue à celle donnée par l'équation (6)

En prenant comme fonction d'interpolation du déplacement à l'intérieur d'un élément une fonction linéaire..

$$u = u_j \left[1 - \frac{z-z_j}{2h_j}\right] + u_{j+1} \frac{z-z_j}{2h_j} \quad (9)$$

La considération de l'énergie élastique de l'élément:

$$\frac{U}{2} [K]_{jj} = \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{G_j}{2} \partial u / \partial z dz = \frac{1}{2} G_j / h_j (u_{j+1} - u_j)^2 \quad (10)$$

et de son énergie cinétique

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{u}^T [m]_{jj} \dot{u} &= \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{\rho_j}{2} \dot{u}^2 dz = \\ \frac{1}{2} \dot{u}^T [m]_{jj} \dot{u} &= \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{\rho_j}{2} \dot{u}^2 dz = 1/6 \rho_j h_j [(u_{j+1} - u_j)^2 - \dot{u}_{j+1} u_j] \quad (11) \end{aligned}$$

Permet de calculer les matrices et de masse élémentaires.

$$K_j = G_j / h_j \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; m_j = \rho_j h_j \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

REMARQUES:

- Les matrices masse et raideur sont tridiagonales.
- La matrice d'amortissement est déterminée en tenant compte de la méthode de résolution

ANEXE 2 :

TECHNIQUES DE STOCKAGE DES MATRICES

Compte tenu de certaines propriétés des matrices globales (symétrie, structure bande), plusieurs méthodes de stockage ont été élaborées en vue de réduire la taille des matrices calculées.

Parmi elles on citera :

- MATRICE PLEINE SYMETRIQUE :

Il suffit de stocker le triangle supérieur de la matrice dans une table VK, par exemple par colonnes descendantes :

Exemple :

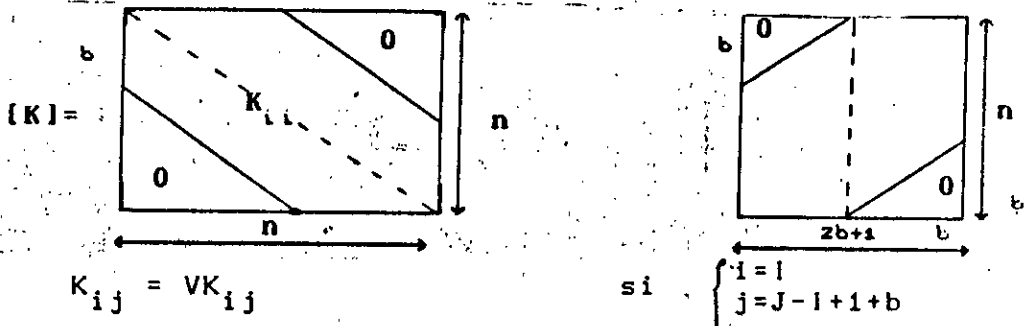
$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} ; VK = \langle k_{11}, k_{12}, k_{22}, k_{13}, k_{23}, k_{33} \rangle$$

$$K_{ij} = VK_l \quad \text{si} \quad \begin{cases} l = \frac{j(j-1)}{2} + i \\ j \geq i \end{cases}$$

Il faut stocker $\frac{n(n+1)}{2}$ termes réels .

- MATRICE BANDE NON SYMETRIQUE :

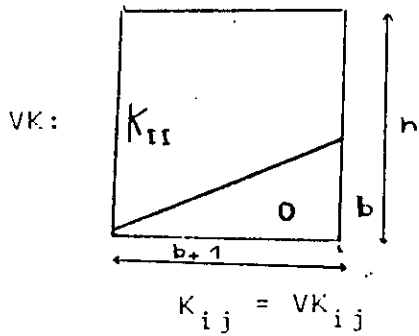
Nous stockons la matrice <<redressée>> dans une table rectangulaire VK de dimensions $n(2b+1)$.



Il faut stocker $n(2b+1)$ réels, incluant $b(b+1)$ valeurs nulles inutiles.

- MATRICE BANDE SYMETRIQUE :

Dans ce cas on a :



$$\text{si } \begin{cases} i = 1 \\ j = J-1+1 \\ J \geq 1 \end{cases}$$

- MATRICE A LIGNE DE CIEL NON SYMETRIQUE :

La methode de stockage la plus efficace pour les matrices globales est la methode de la "ligne de ciel". elle consiste a stocker les termes de [K] et [M] par lignes et colonnes de longueurs variables elle utilise trois tables de stockage .

VKGD : contient les termes diagonaux

VKGS : contient les termes du triangle superieur , organises par colonnes des cendantes (sans les termes diagonaux).

VKGI : contient les termes du triangle inferieur , organises par lignes de gauche a droite (sans les termes diagonaux).

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & 0 \\ 0 & 0 & K_{53} & 0 & K_{55} \end{bmatrix}$$

VKGS : $\langle k_{12}, k_{23}, k_{14}, k_{24}, k_{34}, k_{35}, 0 \rangle$

VKGI : $\langle k_{21}, k_{32}, k_{41}, k_{42}, k_{43}, k_{53}, 0 \rangle$

VEGD : $\langle k_{11}, k_{22}, k_{33}, k_{44}, k_{55} \rangle$

- MATRICE A LIGNE DE CIEL SYMETRIQUE :

Le stockage est identique a celui d'une matrice non symetrique, mais la table VKGI n'est pas utilisee dans ce cas .

Il faut stocker $n(b+1)$ reels ,incluant $b(b+1)/2$ valeurs nulles inutiles .

- MATRICE A LIGNE DE CIEL SEGMENTEE SUR DISQUE :

On a recours a cette methode lorsque la matrice K est tres volumineuse ou lorsqu'on utilise un ordinateur de capacite reduite il est necessaire de decomposer les tables CKGS et VKGI en blocks stockes sur disque il suffit de conserver en memoire a un instant donne un ou deux blocks de chacune des deux tables .

- REMARQUE :

Pour notre etude nous avons opte pour le stockage en ligne de ciel compte tenu des avantages qu'elle presente .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BATHE K.J (1982)
Finite élément procédures in engineering analysis
- [2] BATOZ J.L et DATT.G (1990)
Modélisation des structures par éléments finis
- [3] BOWLES.J (1984)
Foundations - analysis and design-
- [4] CLOUGH R.W et PENZIEN J. (1975)
Dynamics of structures.
- [5] DAVIDOVICI V. (1985)
Génie parasismique.
- [6] FILLIAT G. (1981)
La pratique des sols et fondations
- [7] LASCAU.Pet THEODOR R. (1987)
Analyse numérique et matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur
- [8] PECK R.,HANSON W., THORNBURN T (1973)
Foundation engineering.
- [9] PECKER A. (1984)
Dynamique des sols.
- [10] PRESS W,FLANNERY B,TEUKOSKY S,YETTERLING W (1986)
Numerical recipes
- [11] TOUZOT G. ET DATT. G (1984)
Une prestation de la méthode des éléments finis.
- [12] ZIENKIEWICZ O.C (1977)
The finite element method.