

وزارة الجامعات والبحث العلمي
Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT *GENIE CIVIL*

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*SIMULATION NUMERIQUE DU COMPORTEMENT
NON-LINEAIRE MATERIEL ET GEOMETRIQUE
DES STRUCTURES EN BETON ARME PAR
LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
MULTICOUCHE*

Proposé par :

A.CHARIF

Etudié par :

*E.M.GAOUAR
A.NOUNE*

Dirigé par :

A.CHARIF

PROMOTION

JUIN 92

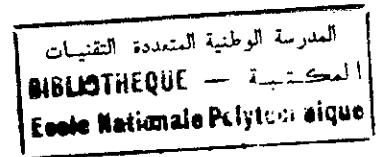
المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

مركز الدراسات والبحوث
العلمية والتقنية

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE CIVIL



Promoteur: Pr. Abdelhamid CHARIF

Elèves Ingénieurs: El Mehdi GAOUAR & Abdelkader NOUNE

Sujet: SIMULATION NUMERIQUE DU COMPORTEMENT NON-LINEAIRE MATERIEL ET GEOMETRIQUE DES STRUCTURES EN BÉTON ARMÉ PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS MULTICOUCHE.

Résumé: Le présent projet consiste essentiellement en l'élaboration d'un logiciel en vue de simuler numériquement le comportement non-linéaire flexionnel des poutres par la méthode des éléments finis multicouche.

Subject: NUMERICAL SIMULATION OF THE NON LINEAR MATERIAL AND GEOMETRIQUE BEHAVIOUR OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES BY LAYERED FINITE ELEMENT METHOD

Abstract: The present project consists essentially in the development of a computer program for the numerical simulation of the non linear behaviour of beam in bending by layered finite element method

D E D I C A C E S

JE DEDIE CE MODESTE TRAVAIL A

MA MERE .

MON PERE .

TOUTE MA FAMILLE .

TOUS CEUX QUI CROIENT EN DIEU ET LE CRAIGNENT .

ET TOUS CEUX QUI ME SONT CHERS .

E. M. . GAOUAR

JE DEDIE CE MODESTE TRAVAIL A

MA MERE .

MON PERE .

TOUTE MA FAMILLE .

TOUS CEUX QUI CROIENT EN DIEU ET LE CRAIGNENT .

ET TOUS CEUX QUI ME SONT CHERS .

A. NOUNE

R E M E R C I E M E N T S

JE TIENS A REMERCIER

MON PROMOTEUR , LE PROFESSEUR ABDELHAMID CHARIF QUI
MA AIDE , CONSEILLE ET DIRIGER AU COURS DE MON PROJET
AINSI QUE POUR SON APPORT MORAL ET SCIENTIFIQUE .

JE REMERCIE EGALEMENT Mr. BADA MOHAMED EL-HADI POUR
SA GRANDE CONTRIBUTION A LA FINALISATION DE CE TRAVAIL .

TOUS LES ENSEIGNANTS QUI ONT CONTRIBUE A MA
FORMATION , AINSI QU ' AU PERSONNEL DE LA BIBLIOTHEQUE
ET NOTAMMENT SALEH POUR SA SERVIABILITE , SANS , OUBLIER LE
PERSONNEL DU CENTRE DE CALCUL .

E. M. GAOUAR .

JE TIENS A REMERCIER

MON PROMOTEUR , LE PROFESSEUR ABDELHAMID CHARIF QUI
MA AIDE , CONSEILLE ET DIRIGER AU COURS DE MON PROJET
AINSI QUE POUR SON APPORT MORAL ET SCIENTIFIQUE .

JE REMERCIE EGALEMENT Mr. BADA MOHAMED EL-HADI POUR
SA GRANDE CONTRIBUTION A LA FINALISATION DE CE TRAVAIL .

TOUS LES ENSEIGNANTS QUI ONT CONTRIBUE A MA
FORMATION , AINSI QU ' AU PERSONNEL DE LA BIBLIOTHEQUE
ET NOTAMMENT SALEH POUR SA SERVIABILITE , SANS , OUBLIER LE
PERSONNEL DU CENTRE DE CALCUL .

A. NOUNE.

X SOMMAIRE

X INTRODUCTION:

X CHAPITRE I : LOIS DE COMPORTEMENT DU BETON ET DE L'ACIER ^

1- Béton

1.1. Comportement sous contrainte uniaxial

1.2. Comportement sous contraintes combinées

2. Acier d'armature

X CHAPITRE II : PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ^

1. Introduction

2. Le concept d'élément fini

3. Différentes formulations de la méthode des éléments finis

4. La méthode des éléments finis considérée comme une minimisation de l'énergie potentielle Totale ⊕

5. Conditions de convergence

5.1. complétude

5.2. compatibilité

6. Traitement des charges réparties

X CHAPITRE III : THEORIE DES STRATIFIES ^

1. Définition

2. Théorie élastique du pli

3. Théorie élastique du stratifié

3.1. hypothèses

3.2. relations contraintes-déformations

4. Equations fondamentales d'un stratifié

4.1. Efforts normaux

4.2. Moments fléchissant

X CHAPITRE IV : PRESENTATION DE L'ELEMENT POUTRE

1. Définition
2. Hypothèses de la théorie des poutres
3. Domaine de validité des hypothèses de la théorie des poutres
4. Eléments finis pour la flexion des poutres
 - 4.1. comportement membranaire
 - 4.2. comportement flexionnel
5. Formation de la matrice de rigidité d'un élément poutre
 - 5.1. relations sollicitations-déformations dans une section transversale d'une poutre multicouche
 - 5.2. Formulation de la matrice de rigidité avec terme de couplage
 - 5.3. Transformation de la matrice de rigidité

X CHAPITRE V : ANALYSE NON LINEAIRE

1. Introduction
2. Méthodes itératives
3. Méthodes incrémentales
4. Méthodes mixtes
5. Accélération de la convergence
6. Termination

X CHAPITRE VI : PROBLEMES A LOIES DE COMPORTEMENT NON-LINEAIRE

1. Introduction
2. Méthode des contraintes initiales
3. Méthode des déformations initiales
4. Méthode de rigidité variable
5. Conclusion

X CHAPITRE VII : NON-LINEARITE GEOMETRIQUE

1. Introduction

2. Changement de géométrie

3. Etablissement de la matrice de rigidité d'un élément poutre en tenant compte de la non-linéarité géométrique.

3.1. matrice de rigidité sécante

3.2. algorithme de la méthode de substitution

3.3. établissement de la matrice de rigidité dans le cas d'une poutre multicouche.

3.4. conclusion, difficultés, orientations

X CHAPITRE VIII : PRESENTATION DE NOTRE ANALYSE NON-LINEAIRE DU BETON ARME .CAS DE LA FLEXION DES POUTRES ET PORTIQUES.

1. Hypothèses de base:

2. Modèle de comportement

2.1. Béton en compression

2.2. Béton en traction

2.3. Armature d'acier

3. Critères de rupture

4. Modèle analytique et définitions géométriques

5. Procédure analytique

6. Détermination du chargement maximal

7. Analyse de la partie descendante

X CHAPITRE IX : PRESENTATION DU PROGRAMME MIS AU POINT

1. Introduction

2. Présentation du programme linéaire SKY-FLEX:

2.1. Méthode de mémorisation (linéaire-SKY-FLEX)

2.2. Lecture des données

2.3. Génération des données

2.4. Impression des résultats

2.5. Génération des caractéristiques multicouches

2.6. Calcul des indices des degrés de liberté bloqués

2.7. Calcul des hauteurs de colonne

2.8. Subroutine format

des grandes Matrices

2.9. Calcul des indices des termes diagonaux

2.10. Assemblage du système linéaire

2.11. Formation du second membre

2.12. Prise en compte aux limites

2.13. Résolution du système linéaire

2.14. Calcul des efforts dans les barres

2.15. Impression des résultats

3. Présentation du programme linéaire

3.1. Introduction de nouvelles données

3.2. Calcul des déformations, contraintes, modules

X CHAPITRE X : EXPERIMENTATION NUMERIQUE

1. Confrontation avec des résultats expérimentaux

1.1. Poutre de ALAMI et FERGUSON

1.2. Poutre de LITTLE et PAPARONI

1.3. Interprétation

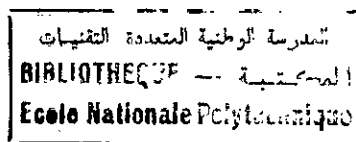
1.4. Conclusion

2. Etude de l'effort normal

3. Etude du confinement

X CONCLUSION:

INTRODUCTION



Dans les années passées, les méthodes d'analyse et de conception des structures en béton armé étaient principalement basées sur une analyse élastique combinée avec des procédures classiques variées aussi bien que sur des formules empiriques développées sur la base d'une grande quantité de données expérimentales. De telles approches sont encore nécessaires et désirables et continuent d'être les méthodes les plus pratiques et les plus efficaces pour la conception ordinaire .

Cependant, le rapide développement de techniques d'analyse numérique modernes et l'augmentation extraordinaire de la capacité des ordinateurs ont fourni aux ingénieurs structuralistes un outil puissant pour une complète analyse non-linéaire des structures, et ce avec des coûts relativement modérés compte-tenu des progrès informatiques.

Par l'utilisation de la méthode des éléments finis avec une analyse inélastique incrémentale, les caractéristiques de déformation et de rupture des structures en béton peuvent être évaluées avec un haut degré d'exactitude. Par exemple, quelques comportements complexes du béton armé tels que les propriétés multiaxiales contrainte-déformation non-linéaire, la fissuration, l'ancrage, le glissement et d'autres effets antérieurement ignorés ou traités d'une manière très approximative peuvent être modélisés et étudiés plus rationnellement. De plus, autant les informations nombreuses sur le comportement charge-déformation se sont développées, autant les capacités de calcul se sont étendues et la capacité des analyses non-linéaires peut être élargie pour inclure les structures en béton chargées triaxialement, tels que les réacteurs nucléaires, les plateformes offshore, ... pour qui ce type d'analyse est d'une valeur particulière, les études expérimentales à grande échelle de ces types de structure étant souvent très chères.

La première tentative pour appliquer la méthode des éléments finis pour des structures en béton armé a été réalisée par NGO et

SCORDELIS en 1967. Depuis un rapide développement a pris place. Il a été bien reconnu que l'incomplétude des modèles analytiques des matériaux pour le béton armé est le facteur majeur limitant la capacité à analyser les structures en béton. Cependant, la plupart des efforts dans le passé ont été dirigé vers l'amélioration de la description mathématique des relations constitutives des matériaux de béton aussi bien que la modélisation des interactions entre les armatures et le béton. Une variété d'approches de modèles ont été proposés incluant l'élasticité non-linéaire ,la plasticité ,le fluage,...

Dans cette présente étude, nous intéresserons au comportement non-linéaire des structures en béton armé incluant la non-linéarité physique due aux relations non-linéaires contrainte-déformation du béton et de l'acier ,et la non-linéarité géométrique due aux déformations des structures qui donnent lieu aux effets du second ordre . Notre analyse reposera sur une discrétisation par éléments finis multicouche en utilisant des procédures numériques élaborées d'analyse non-linéaire . L'objectif étant de pouvoir suivre l'évolution du comportement des structures en béton armé dans des hypothèses qui représentent bien la réalité physique.

Notre investigation a aboutit à l'élaboration d'un logiciel de simulation du comportement flexionnel non-linéaire des poutres et portiques en béton armé. Ce qui nous a permis d'étudier numériquement certains aspects très intéressants du comportement du béton armé tels que l'effet de l'effort normal et surtout l'effet du confinement sur l'amélioration de sa résistance et de sa ductilité.

CHAPITRE 1

LOIS DE COMPORTEMENT DU BETON ET DE L'ACIER

1 Béton:

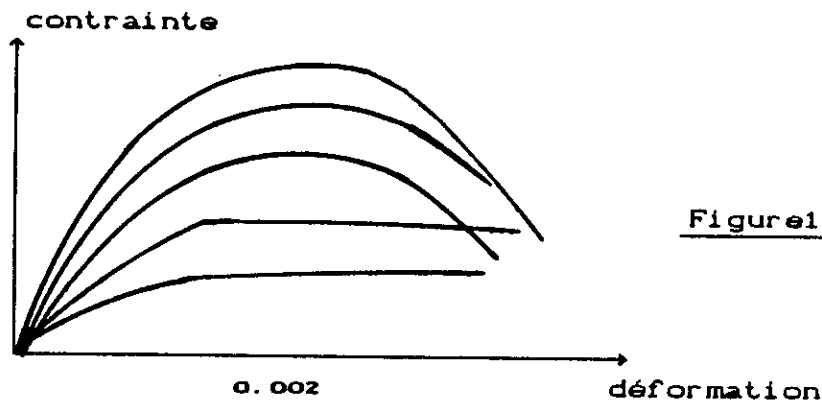
Le béton est un matériau composite .Il consiste en un mélange d'aggrégats grossiers et d'une matrice continue de mortier qui est elle-même composée de pâte de ciment et de sable. Son comportement physique est très complexe,étant largement déterminé par la structure du matériau composite,tel que le rapport eau-ciment,le rapport ciment-aggrégat,la forme et la dimension des aggrégats et le type de ciment. Dans ce chapitre nous restreindrons notre étude au comportement contrainte-déformation d'un béton moyen ordinaire.

Le béton est une sorte de matériau fragile.Son comportement contrainte-déformation est affecté par le développement de micro et macro fissures dans le corps du matériau.Particulièrement,le béton contient un grand nombre de microfissures spécialement à l'interface graviers-mortiers,même avant application du chargement extérieur.Ces microfissures initiales sont causées par la ségrégation, le retrait,ou l'expansion thermique dans la pâte de ciment. Sous l'application d'un chargement plusieurs autres micro-fissures se produisent à l'interface graviers-pâte de ciment qui est le lien plus fragile dans ce système composite.La progression de ces fissures,qui sont initialement invisibles ,pour devenir des des fissures visibles se produit avec l'application des charges extérieures et contribue au comportement non-linéaire contrainte-déformation généralement obtenu.

1.1 Comportement du béton sous contrainte uniaxiale

Comportement sous contrainte de compression:

La résistance à la compression du béton est généralement obtenue à partir de cylindres standards testés en compression.La figure 1 les courbes contrainte-déformation typique obtenues.



En grandes déformations, après que la contraintes maximale ait été atteinte , des contraintes peuvent être encore reprises même si des fissures parallèles à la direction du chargement deviennent visibles .

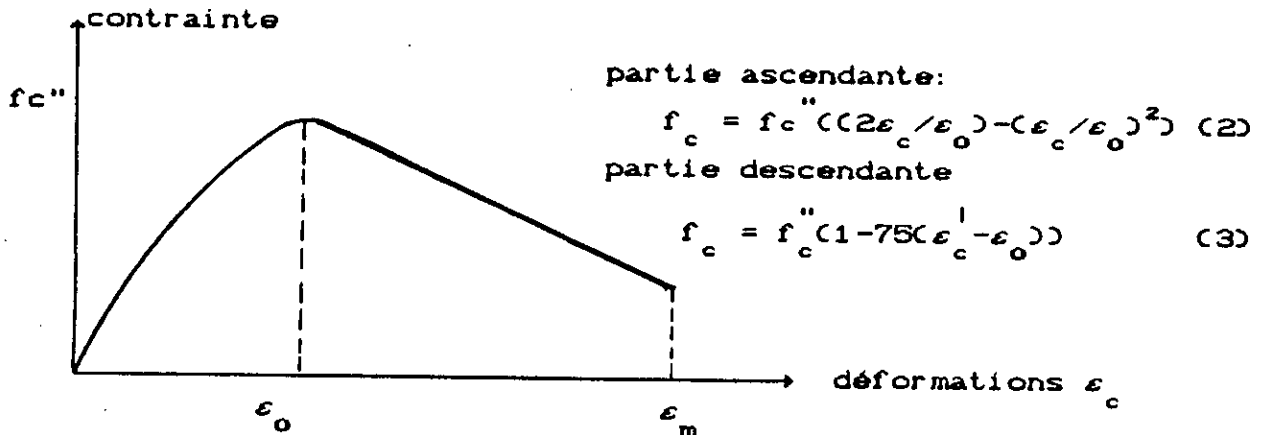
Le module d'élasticité du béton peut être pris comme égal à :

$$E_c = (W)^{1.5} \cdot 33(f'_c)^{0.5} \text{ PSI} (1 \text{ PSI} = 0.00689 \text{ N/Mn}^2) \quad (1)$$

où W est la densité du béton en lb/ft (1lb/ft =16.02 kg/m)
 et f'_c est la résistance à la compression du cylindre de béton en
 Pour un poids normal de béton , E_c peut être considéré égal à
 $4730(f'_c)^{0.5} \text{ N/mn}^2$.

Une large approximation utilisée pour la forme de la courbe contrainte-déformation avant la contrainte max est une parabole du second degré. Par exemple, la courbe contrainte déformation, souvent reprise, due à Hognestad est montré en figure 2 ci-dessous où f'_c est la contrainte maximale atteinte dans le béton. Le prolongement de la branche descendante du comportement adoptée dépend de la limite de déformation du béton. Cette idéalisation de la courbe contrainte-déformation pour le béton non compression uniaxiale est utilisée dans notre étude. Il est à noter cependant que la contrainte de compression maximale f'_c atteinte dans le béton d'une poutre en flexion peut différer de la résistance mesurée sur cylindre f'_c à cause de la différence dans les dimensions et la forme du béton comprimée. La résistance du béton comprimée en flexion est prise alors comme étant égale à la résistance à la compression f'_c mesurée sur cylindre multipliée par un facteur k qui dépendra du confinement du béton (voire plus loin)

Figure 2: courbe contrainte-déformation de HOGNESTAD



comportement sous contrainte de traction

La forme du diagramme contrainte-déformation du béton en traction dépend beaucoup de la procédure d'essai utilisée. Le terme résistance à la traction et la relation contrainte-déformation en traction n'a aucun sens absolu, mais doit être exprimé en terme de procédure d'essai spécifique utilisée. Trois sortes de test sont utilisés pour tester le béton simple: le test de traction direct, le 'beam test', et l'essai brésilien

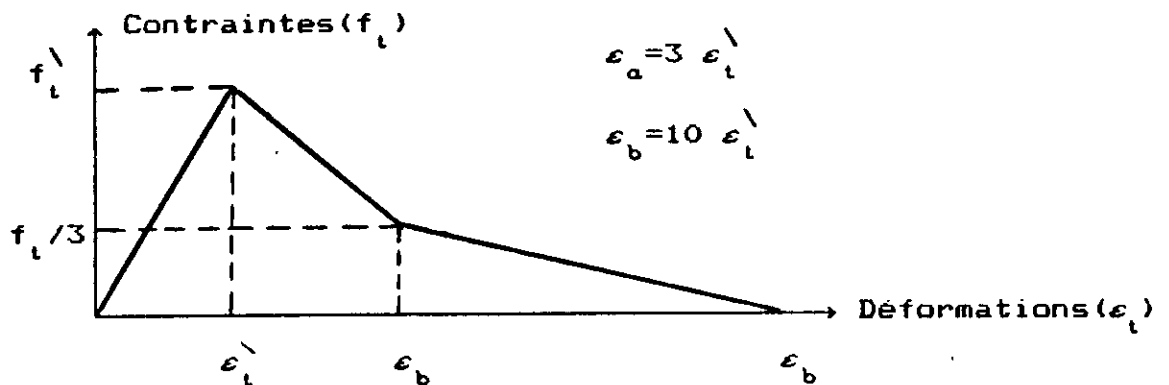
Les résultats du beam test et de l'essai brésilien sont basés sur la théorie de l'élasticité. Seul l'essai de traction direct peut fournir le diagramme contrainte-déformation complet au-delà de la limite élastique. Cependant, la plupart des machines de test ne peuvent absorber l'énergie relâché lorsque le chargement sur le spécimen commence à diminuer. Il a été ainsi conclu que le béton en traction se comporte presque linéairement jusqu'à sa contrainte limite de traction sans avoir de branche descendante significative. Néanmoins le comportement non linéaire du béton simple en traction a été observé expérimentalement; HUGHES et CHAPMAN, ainsi que EVANS et MARATHE ont utilisé des machines de test modifiées pour obtenir un diagramme contrainte-déformation en traction avec branche descendante et ascendante similaires à celles obtenues en compression.

Relation contrainte-déformation du béton en traction utilisée dans l'analyse par éléments finis:

Des diagrammes contrainte-déformation pour le béton en traction incluant une branche descendante ont été utilisés pour l'analyse par élément multicouche discret. Ils ont donné de résultats proches des résultats expérimentaux. Ceci parce que les diagrammes avec une branche descendante raisonnable améliorent significativement la précision des déflexions calculées en comparaison aux diagrammes dans lesquels la contribution du béton en traction est négligée ou se réduit à une ligne droite jusqu'à la limite de résistance en traction.

Dans notre étude nous utiliserons de même un modèle trilineaire pour décrire le comportement du béton en traction. Ce modèle est illustré en figure 3 ci-dessous:

figure 3: relation contrainte-déformation pour le béton en traction.



La courbe est définie de la manière suivante:

pour $\epsilon_t \leq \epsilon_t^1$ $f_t = E_t \epsilon_t$

pour $\epsilon_t^1 \leq \epsilon_t \leq \epsilon_a$ $f_t = f_t^1 \left[\frac{2\epsilon_t + (\epsilon_t^1 - \epsilon_a)}{3(\epsilon_t - \epsilon_a)} \right]$

pour $\epsilon_a \leq \epsilon_t \leq \epsilon_b$ $f_t = f_t^1 (\epsilon_t - \epsilon_b) / [3(\epsilon_a - \epsilon_b)]$

On utilisera les valeurs suivantes pour f_t^1 et ϵ_t^1 :

$f_t^1 = 0.65 (f_c^u)^{2/3}$ et $\epsilon_t^1 = 0.1 \epsilon_o$

Ces valeurs ont été proposées par CARREIRA et CHU pour les calculs de flexion.

1.2. Comportement sous contraintes combinées

Dans plusieurs situations de structure, le béton est soumis à des contraintes directes et de cisaillement agissantes dans plusieurs directions.

.Comportement sous contraintes biaxiales:

Un état de contrainte biaxiale se produit, si les contraintes principales agissent uniquement en deux directions: les contraintes agissent en un seul plan et la troisième contrainte principale est nulle. RUSCH, KUPFER, HILSDORF en étudiant le béton sous contrainte biaxiale, ont conclu que la résistance du béton soumis à une contrainte biaxiale de compression peut être de 27% plus grande que la résistance de compression uniaxiale. Des résultats sur des éléments avec une contrainte normale dans une direction, combinée avec une contrainte de cisaillement, obtenue par BRESLER et PISTER, a indiquée par ailleurs que la résistance à la compression du béton est réduite en présence de contraintes de cisaillement. Ainsi, quand le cisaillement est présent cela peut donc influencer la résistance du béton dans les zones de compression des poutres ou des colonnes.

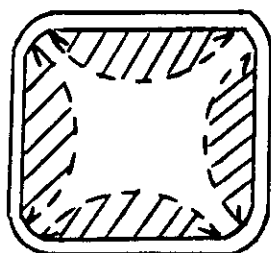
Comportement sous contraintes de compression triaxiale

Des essais réalisés sur des cylindres de béton confiné par pression de fluide par RICHART, BROWN, ont montré que la résistance et la ductilité du béton sont sensiblement augmentée sous des conditions de compression triaxiale.

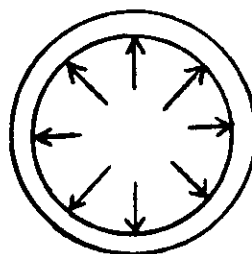
Confinement du béton par des armatures

En pratique le béton peut être confiné par des armatures transversales communément en forme de cerceaux ou de cadres d'acier fermés et espacés. Lorsque le niveau de contraintes dans le béton est bas, les armatures transversales sont à peine contraintes; par conséquent le béton est non confiné. Le béton devient confiné lorsque, pour des contraintes approchant la résistance à la

compression uniaxiale, les déformations transversales deviennent si grandes que le béton tendra à sortir contre les armatures transversales qui appliqueront ainsi au béton une réaction de confinement. Ainsi les armatures transversales fourniront un confinement passif. Des tests par plusieurs chercheurs ont montré que le béton confiné par des armatures transversales peut considérablement améliorer les caractéristiques contraintes-déformation du béton pour des déformations élevées. Il a été prouvé d'autre part que les armatures circulaires confinent le béton beaucoup plus efficacement que les cadres carrés ou rectangulaires. La cause de la différence entre ces deux types de confinement est illustré en figure 4 ci-dessous:



(a)



(b)

confinement par cadre et cerceau (circulaire) (a) cadre, (b) cerceau

Les cerceaux circulaires à cause de leur forme sont en tension axiale et produisent une pression de confinement continue le long de la circonférence qui pour de grandes déformations transversales approxime le confinement d'un fluide. Par contre les armatures carrées ne peuvent appliquer une réaction de confinement seulement au niveau des coins de l'armature, en effet la pression du béton contre les côtés des cadres tend à les faire fléchir vers l'extérieur. Ainsi une portion considérable du béton de la section efficace peut être inconfiné. Ainsi à cause d'un fléchissement interne entre les coins le béton est confiné effectivement seulement dans les coins et la région centrale de la section. Néanmoins le confinement par des armatures carrées produit une significative augmentation de la ductilité et un gain de résistance assez appréciable. La forme de la courbe

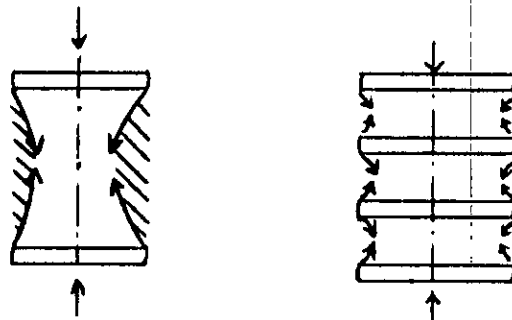
contrainte-déformation en grande déformation pour le béton confiné va dépendre de plusieurs variables dont les plus importantes sont:

1) Le rapport du volume des armatures transversales sur le volume du béton couvert parce que une grande quantité d'armatures transversales signifiera une grande pression de confinement

2) La limite élastique des armatures transversales car elle donne une limite supérieure à la pression de confinement

3) Le rapport de l'espacement des armatures transversales sur la dimension du béton couvert, en effet un espacement petit conduit à plus de confinement effectif comme illustré en figure 5 ci-dessous:

figure 5: effet de l'espacement des aciers transversaux sur l'efficacité du confinement:



4) Le rapport du diamètre des armatures transversales sur la longueur ou le périmètre de ces cadres. En effet une barre possédant un grand diamètre conduit à plus de confinement car possédant une rigidité flexionnelle.

5) La quantité et les dimensions des armatures longitudinales car ces armatures confineront eux aussi le béton.

6) La résistance du béton, parce que un béton de basse résistance est mieux ductile qu'un béton de haute résistance.

7) Le taux de chargement parce que les contraintes déformations sont dépendantes du temps.

En dehors des aciers transversaux, le béton n'est pas confiné et cette coque ou couverture de béton devrait avoir des caractéristiques contraintes-déformations différentes de celles du

béton situé à l'intérieur des armatures transversales. La couverture de béton commence généralement à s'arracher lorsque la résistance du béton non confiné est atteinte particulièrement si la quantité d'armatures transversales est élevée, la présence d'un grand nombre de barres transversales créant un plan ou une surface de moindre résistance et précipitant ainsi l'effondrement de la couverture de béton. Ainsi pour de grandes quantités d'armatures transversales, la contribution du béton de couverture en grande déformation devra être ignorée. La couverture de béton pourra être considérée comme ayant les caractéristiques du béton non confiné jusqu'à une déformation d'arrachage considérée et ne donner aucune contribution en grande déformation. Si la quantité d'armatures transversales est faible, la couverture de béton tendra à s'arracher moins facilement et à agir plus avec la zone confinée. Dans ce cas on pourra prendre en compte la couverture de béton lorsqu'on arrive en grande déformation. Une proposition pour la résistance et la ductilité du béton confiné par des armatures est exposée ci-dessous

Béton confiné par des cadres rectangulaires

De nombreux chercheurs ont proposé des relations contraintes-déformations pour le béton confiné par des armatures rectangulaires.

Sur la base de l'existence de données expérimentales, KENT et PARK ont proposé la courbe illustrée en figure 16 pour le béton confiné par des cadres rectangulaires.

La courbe de KENT et PARK se compose de deux parties:

région AB : $\epsilon_c \leq 0.002$

$$f_c = f_c \left[2\epsilon_c / 0.002 - (\epsilon_c / 0.002)^2 \right] \quad (g)$$

La partie ascendante de la courbe est représentée par une parabole du second degré et nous supposons que le confinement de l'acier n'a pas d'effet sur la forme de cette partie de la courbe ou sur la déformation à la contrainte maximale. Il est aussi supposé que la contrainte maximale atteinte par le béton confiné est la résistance de cylindre f_c . La contrainte maximale f_c sera donc supposée conservative bien qu'il existe des preuves expérimentales que le

confinement par des cadres rectangulaires cret une augmentation de la résistance.

région BC: $0.002 < \epsilon_c \leq \epsilon_{20c}$

$$f_c = f_c' \left[1 - Z(\epsilon_c - 0.002) \right] \quad (7)$$

$$Z = \frac{0.5}{\epsilon_{50U} + \epsilon_{50h} - 0.002} \quad (8)$$

Avec

$$\epsilon_{50U} = \frac{3 + 0.29 f_c'}{145 f_c' - 100} \quad (9) \quad \epsilon_{50h} = 0.75 \rho_s \left(\frac{b''}{S_h} \right)^{0.5} \quad (10)$$

f_c' est la résistance à la compression du béton mesurée sur cylindre standard en mpa.

ρ_s est le rapport du volume des armatures transversales sur le volume du béton couvert mesuré hors cadre .

Le paramètre Z définie la forme de la supposée linéaire branche descendante du diagramme contrainte déformation pour le béton en compression. La forme de la branche descendante est définie par la déformation lorsque la contrainte est tombée de $0.5 f_c'$, résultats obtenus à partir de preuves expétimentales. L'équation 9 pour ϵ_{50U} prend en compte les effets de la résistance du béton sur la forme de la branche descendante, les bétons de haute résistance étant plus fragiles que les bétons de basse résistance. L'équation 10 pour ϵ_{50h} donne la ductilité additionnelle due aux cadres rectangulaires et a été obtenue à partir de résultats expérimentaux Une réalisée par SOLIMAN et YU a donnée des résultats incluant l'eefet du gradient de déformation à travers la section mais puisqu'aucun effet n'a été remarqué, il n'apparait pas dans l'équation. En analysant les résultats de trois recherches différentes on a pu supposé que le béton de couverture s'est arraché pendant que la contrainte est tombé de 0.5 fois la contrainte maximale. Le béton confiné a été supposé être au centre des côtés du cadre.

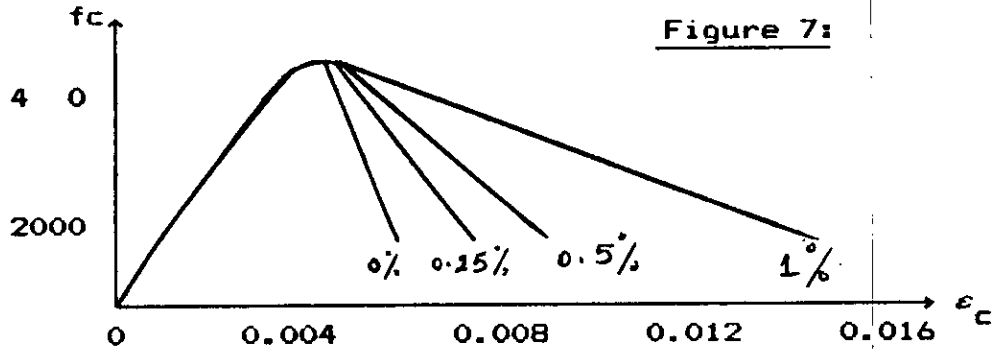
région CD: $\epsilon_c \geq \epsilon_{20c}$

$$f_c = 0.2 f_c'$$

(11)

Cette équation prend en compte l'aptitude du béton à reprendre quelques contraintes à de très grandes déformations.

La figure 7 montre l'influence des cadres d'acier rectangulaires sur la courbe contrainte déformation donnée par les équations précédentes.



Il y a clairement une amélioration dans le comportement de la branche descendante pour de petites quantités de cadres rectangulaires, mais l'amélioration devient progressivement moins significative lorsqu'on ajoute de plus en plus de cadres.

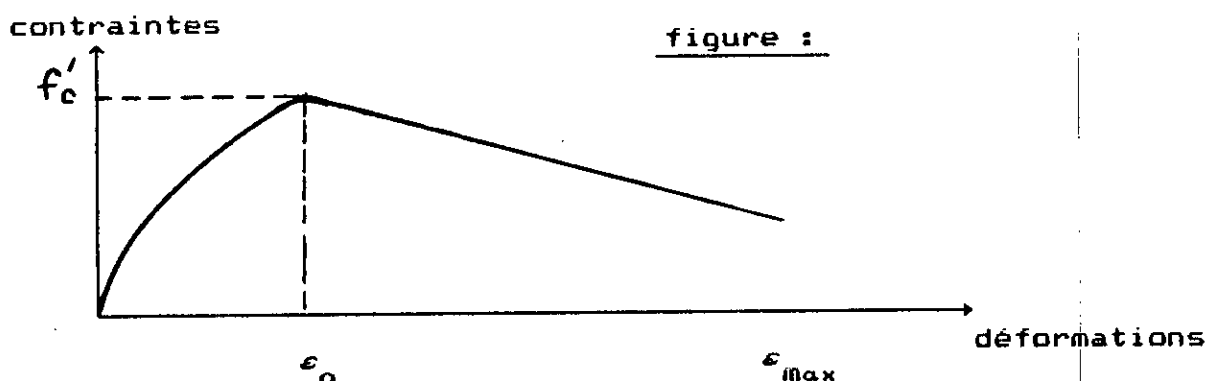
Le modèle de comportement adopté par KENT et PARK peut être considéré uniquement comme une approximation, mais il est admis qu'il donne des résultats raisonnables. Le modèle de KENT et PARK ne tient cependant pas compte de l'augmentation de résistance due au confinement. Car, en réalité les cadres rectangulaires produisent une augmentation de la résistance, celle-ci étant malgré tout moins significative que l'augmentation de ductilité.

Le modèle de comportement que nous adopterons dans notre étude tiendra compte de ce phénomène, une forme modifiée du modèle de KENT et PARK sera utilisé. Elle améliore le modèle original de KENT et PARK en tenant compte de l'augmentation due au confinement. La figure (8) montre le modèle contrainte-déformation modifié de KENT et PARK. La contrainte maximale atteinte est supposée être de Kf_c pour une déformation de $\epsilon_0 = 0.002K$ dans laquelle:

$$K = 1 + (\rho_s f_{yh}) / f_c \quad (12)$$

L'équation 8 suppose que les cadres rectangulaires causent une augmentation de la résistance du béton de $\rho_s f_{yh}$ comme il a été

observé dans des tests récents à l'université de Canterbury. La déformation du béton correspondant à la contrainte maximale est prise comme étant $0.002K$ dans quoi 0.002 est la valeur supposée de la déformation en contrainte maximale pour le béton non confiné. Cette supposée valeur pour la déformation à la contrainte maximale permet à la parabole définie dans la région AB de la figure 13 d'avoir la même pente à l'origine que celle du béton non confiné, sans prêter attention à la quantité d'acier de confinement. Cette supposition résulte en fait de la valeur de la déformation en contrainte max qui n'est pas aussi élevée que celle en réalité observée dans les tests. Ainsi la courbe contrainte-déformation modifiée de KENT et PARK peut être définie comme suit en référence à la figure .



région AB: $\epsilon < 0.002K$

$$f_c = K f'_c \left[2\epsilon_c / (0.002k) - (\epsilon_c / (0.002K))^{0.5} \right]$$

région BC: $\epsilon > 0.002K$

$$f_c = K f'_c \left[1 - Z_m (\epsilon_c - 0.002K) \right]$$

Et : $f_c > 0.2Kf'_c$, f'_c (Mpa)

$$\text{Avec : } Z_m = \frac{0.5}{\frac{3+0.29f'_c}{145f'_c-100} + \frac{3}{4} \rho_s \left[\frac{h''}{S_h} \right]^{0.5} - 0.002K}$$

2.1. acier d'armature
 Les courbes typiques contraintes-déformations pour les barres d'acier utilisées en construction de béton armé sont obtenues à partir de barres d'acier soumises à une traction.

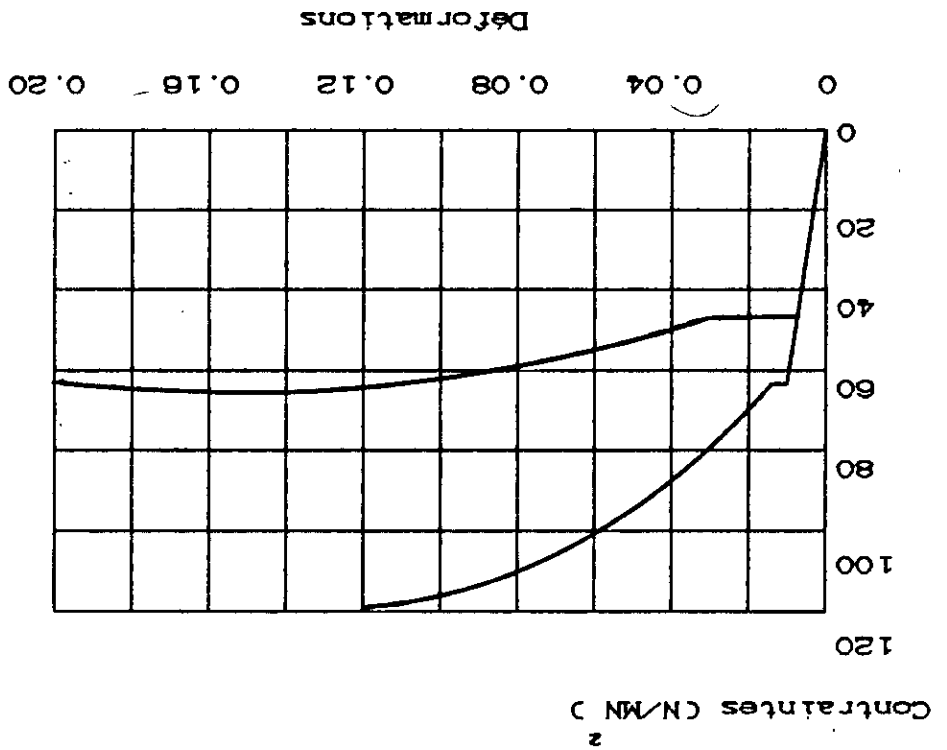


Figure 9: Courbes typiques contraintes-déformations pour l'acier d'armature

Les courbes exhibent une partie initiale linéaire et élastique, un plateau de plasticité (les déformations augmentent avec peu ou pas d'augmentation de contraintes), une zone d'écroutissage dans laquelle la contrainte augmente encore avec la déformation, et finalement une partie dans laquelle les contraintes diminuent jusqu'à ce que la rupture survienne.
 Le module d'élasticité de l'acier est donné par la pente de la partie linéaire élastique de la courbe. Sa valeur est généralement prise comme étant égale à $2 \cdot 10^5$ N/mm².
 Les aciers de haute résistance ont généralement un plateau de plasticité plus petit que les aciers de basse résistance. D'autre part les aciers de haute résistance ont aussi une elongation plus

petite avant la rupture que les aciers de basse résistance.

Généralement la courbe contraintes-déformations de l'acier en traction et compression sont supposé être identique. Des tests ont montré que cette supposition est raisonnable.

Pour les calculs de conception il est nécessaire d'idéaliser la courbe contrainte-déformation. Généralement la courbe est idéalisée par deux lignes droites (figure a) en ignorant l'augmentation de contrainte due à l'écroutissement. C'est ce type d'idéalisation qui est repris par les BAEL83. Si la déformation plastique qui se produit pour une quasi constante contrainte après la limite élastique est beaucoup plus grande que l'extension à la limite élastique, ce type de courbe donnera de très bons résultats. Cette simplification est particulièrement adaptée pour l'acier ayant une basse limite d'élasticité. Si l'écroutissement se produit rapidement après le début de plasticité, cette supposée courbe sous-estimera la contrainte de l'acier pour de grandes déformations. Dans certains cas il peut être nécessaire d'évaluer la contrainte de l'acier pour des déformations plus grandes que la plasticité, pour évaluer plus sûrement la résistance des membres lorsqu'on atteint de grandes déformations. Ceci est particulièrement vrai pour la conception antisismique.

Une idéalisation plus précises de la courbe contraintes-déformations est représentée en figure 10. b. Les valeurs pour les contraintes et les déformations au commencement de la plasticité, la déformation d'écroutissement et la résistance à la traction sont nécessaires pour de une idéalisation. Ces points peuvent être localisés à partir de courbes contraintes-déformations obtenues à partir de tests.

Ce modèle qui représente avec une quasi-exactitude le comportement des armatures d'acier a été proposé PARK et PAULAY. Sa courbe est représentée en figure 10. a; il peut être décrit mathématiquement par les équations suivantes:

* pour $\epsilon_s \leq \epsilon_y$

$$\sigma_s = \epsilon_s E_s$$

* pour $\epsilon_y \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{sh}$

$$\sigma_s = \sigma_y$$

* pour $\epsilon_{sh} \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{su}$

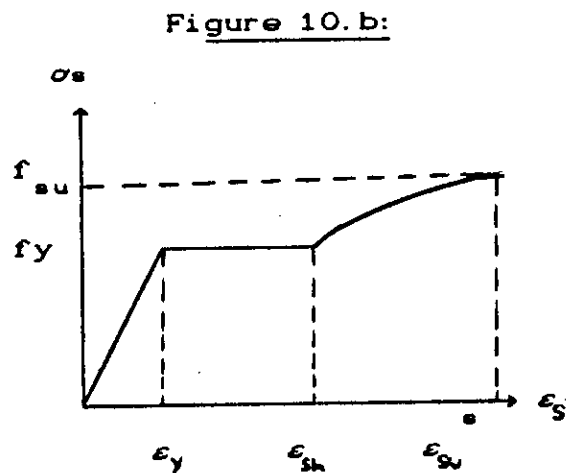
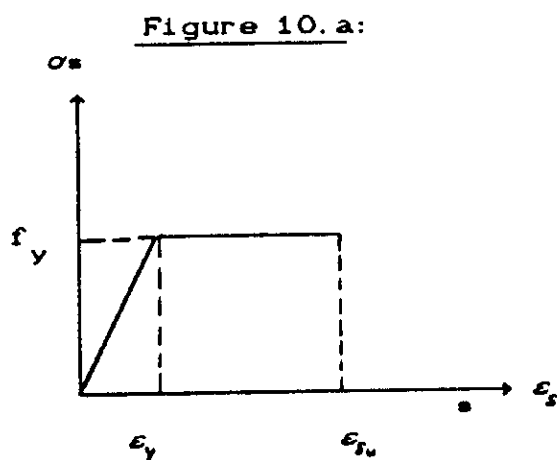
$$\sigma_s = \sigma_y \left\{ \left[\frac{(m k_1 + 2)/(60 k_1 + 2)}{\quad} \right] + \left[\frac{k_1 (60 - m)/2(30r + 1)^2}{\quad} \right] \right\}$$

$$\text{avec } m = \left\{ \left[\frac{(f_u / f_y) (30r + 1)^2}{\quad} \right] - 60r - 1 \right\} / (15r^2)$$

$$\left| \begin{array}{l} r = \epsilon_{su} - \epsilon_{sh} \\ k_1 = \epsilon_s - \epsilon_{sh} \end{array} \right.$$

C'est ce modèle que l'on utilisera dans notre étude. On tiendra ainsi compte de la plasticité et de l'écroutissement non-linéaire de l'acier.

Figure 10:



CHAPITRE II

PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

1 - Introduction:

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux, et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères.

Pour dominer ces projets, l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes. Il peut ainsi prévoir l'influence de ses décisions au moment de la conception du système.

Les sciences de l'ingénieur permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles.

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées pour résoudre effectivement ces équations.

C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions.

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

Elle fait appel aux trois domaines suivants :

- Sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles.
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur.

Dés 1960 la méthode des éléments finis subit un développement rapide dans plusieurs directions à savoir :

- La méthode est reformulée ,à partir de considérations énergétiques et variationnelles , sous la forme générale de résidus pondérés .

- Une base mathématique de la méthode des éléments finis finis est construite à partir d'analyse fonctionnelle

- De nombreux auteurs créent des éléments de haute précision et des éléments isoparamétriques.

2 Le concept d'élément fini

La méthode des éléments finis permet d'étudier le comportement approché d'un système original en le reconstruisant à partir de ses constituants . Dans beaucoup de cas , on peut bâtir un modèle satisfaisant en utilisant un nombre finis de constituants bien définis , de tels problèmes sont appelés discrets .

Dans d'autres cas , on continue la subdivision indéfiniment et seul l'emploi de notion mathématique d'infiniment petit permet de caractériser le problème .

Cela conduit à des équations différentielles ou à des relations équivalentes, ce qui signifie qu'il ya un nombre infini d'éléments De tels systèmes sont appelés continus .

Avec l'apparition d'ordinateurs , les problèmes discrets peuvent en général être résolus facilement , et comme aucun ordinateur n'a une puissance infini, les problèmes continus , eux, n'ont de solution exacte que par traitement mathématique .

Pour surmonter cette difficulté à traiter les vrais problèmes continus , aussi bien que les ingénieurs que les mathématiciens ont périodiquement proposé diverses méthodes de discrétisations , qui heureusement sont telles que l'on peut approcher la vraie solution d'aussi près que l'on veut , à mesure que l'on augmente le nombre de variables discrètes .

3-Différentes formulations de la méthode des éléments finis

Pour traiter un problème par éléments finis , il existe en tout trois formulations possibles , à savoir :

- Formulation en déplacement (methode des déplacements).
- Formulation en contrainte .
- Formulation mixte .

Pour la première formulation , l'ingénieur établit d'abord les relations forces-déplacements pour chaque élément de la structure, puis il assemble le tout selon une procédure bien définie , où l'on écrit l'équilibre local en chaque noeud , ou point de connection de la structure .

C'est à partir de telles équations que l'on peut trouver les déplacements inconnus . Cette formulation suppose que le champ de déplacement déjà défini , satisfait la compatibilité des déplacements à l'intérieur de l'élément, ceci en choisissant une fonction déplacement permettant de définir l'état de déplacement d'une façon unique .

La deuxième formulation consiste à définir un champ de contrainte de façon à assurer l'équilibre de l'élément, puis poser les équations de compatibilité des déplacements et les résoudre pour obtenir les forces (solutions en contraintes).

Les formulations envisagées antérieurement , sont des cas particuliers de la formulation mixte , celle-ci a donné naissance au concept d'élément fini hybride .

Pour notre cas on a opté pour la première formulation , car il est plus facile d'approcher des déplacements que des contraintes . Les déplacements sont donc les inconnus de base , on approchera le ~~champ~~ champ de déplacement réel , dans un élément , par des fonctions d'interpolations ou fonctions de forme (généralement polynomiales),

assurant la continuité des déplacements à l'interface de l'élément et aux noeuds. On choisira donc une fonction permettant de définir de manière unique le champ des déplacements à l'intérieur de chaque élément fini en fonction des déplacements de ses noeuds. Ces fonctions de déplacements définissent maintenant l'état des déformations à l'intérieur d'un élément en fonction des déplacements de ces noeuds. Ces déplacements jointes à d'éventuelles déformations initiales, et compte tenu des propriétés élastiques du matériau définissent l'état des contraintes en tout point de l'élément et par conséquent sur ses frontières.

Il n'est pas toujours facile de faire en sorte que les fonctions de déplacements choisies satisfassent aux conditions de continuité des déplacements entre éléments adjacents bien qu'à l'intérieur de l'élément ces conditions doivent être satisfaites en raison de l'unicité des déplacements qui découle de leur représentation par une fonction.

Il faut noter également que la concentration des forces équivalentes aux noeuds, fait que les conditions d'équilibre ne sont satisfaites que globalement.

Il se présentera des violations locales des conditions d'équilibre à l'intérieur de chaque élément et à ses frontières. Pour chaque système donné, le choix de telle ou de telle forme d'élément et de telle ou de telle fonction de déplacement est laissé à l'intuition et à l'habileté de l'ingénieur.

Nous verrons que la méthode proposée revient à minimiser l'énergie potentielle totale du système par rapport à un champ de déplacement de forme donnée.

Si un tel champ est défini d'une manière convenable, alors la convergence vers la solution exacte est réalisée. On constate donc une certaine équivalence avec la méthode variationnelle de " RAYLEIGH-RITZ " .

Un tel élargissement, des bases sur lesquelles repose la méthode des éléments finis, permet d'étendre son domaine d'application à

d'autres problèmes de milieux continus dès qu'il est possible de les formuler de manière variationnelle .

4 Méthode des éléments finis considérée comme une minimisation de l'énergie potentielle totale .

Le principe de minimisation de l'énergie potentielle totale constitue un fondement variationnel de la formulation directe des équations de rigidité des éléments .

on a : $\pi = u + w$

- avec :
- π : L'énergie potentielle totale .
 - u : L'énergie de déformation du système .
 - w : L'énergie de déformation des charges extérieures *potentielle*

Ainsi , parmi tous les déplacements de forme admissible qui vérifient les conditions de compatibilité , ceux qui satisfont aux conditions d'équilibre donnent à " π " une valeur stationnaire c'est-à-dire qu'on a :

$$\delta\pi = \delta u + \delta w$$

Il faut noter que dans le domaine élastique " π " n'est pas seulement stationnaire mais passe par un minimum qui correspond à un équilibre stable , puisque :

$$\delta^2\pi = \delta^2 u + \delta^2 w$$

Donc : $\delta^2\pi = 0$

Démonstration :

Utilisant le principe des travaux virtuels .

on a :

$$\delta u = \int_V \delta \epsilon^T \cdot \sigma \, dV \quad \int_V \delta a^T(x,y) \cdot Fv \, dV$$

variation de l'énergie de déformation :

$$-\delta w = \delta \cdot \{a\}^T \{q_e\} .$$

$$u = \frac{1}{2} \cdot \int_V \varepsilon^T \cdot \sigma \, dV - \frac{1}{2} \cdot \int_V a_e^T \cdot N(x,y) \cdot F_v \, dV$$

$$w = - \frac{1}{2} \cdot \sum (a_e^T \cdot q_e)$$

Les équations d'équilibre seront satisfaites en chaque noeud , de manière globale si :

$$q_e = \int_V B \cdot \sigma \, dV - \int_V N(x,y) \cdot F_v \, dV$$

Donc : $\delta(u + w) = \delta\pi = 0$

$\{\pi\}$ est donc stationnaire .

Sachant que " π " est non seulement stationnaire mais aussi mini-

-male dans le cas où l'on travaille dans le domaine élastique , on peut dire que le processus des éléments finis consiste à chercher un tel minimum , pour un champ de déplacement bien défini .

Ceci fait intervenir la notion de convergence vers la solution exacte qui est celle qui réalise l'équilibre complet (minimum de π) à condition que les déplacements tendent à la limite vers les valeurs réelles .

Et comme la solution exacte correspond à un minimum de " π " , on peut dire que toute solution approchée , obtenue par la méthode des éléments finis, à partir de la formulation déplacement , fournira toujours une valeur approchée de π ; supérieure à la valeur exacte. On parle alors de convergence par le haut .

Puisque la fonctionnelle " π " est minimale pour un certain nombre de paramètres (U) des déplacements , alors on peut traduire ce minimum par les équations suivantes .

$$\frac{\partial \pi}{\partial U_i} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \pi}{\partial U_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \pi}{\partial U_i} \end{array} \right\} = 0$$

5 - Conditions de convergence

Précisons maintenant les conditions de convergences de la méthode de " RITZ " quant au choix des fonctions de base , dans le cas de l'approche déplacement , les conditions nécessaires de convergence de la méthode sont les suivantes :

- Complétude .
- L'admissibilité (ou compatibilité)

5.1-complétude

Un élément fini est dit complet quant il permet la définition d'un champ de déplacements complet au sens de RITZ , c'est-à-dire quant l'approximation de la solution dans l'élément permet de représenter à la limite n'importe quelle valeur des déformations (ou des courbures dans le problèmes de flexion) quand on diminue la taille de l'élément .

Ce critère s'applique d'une part aux états de déformation nulle , c'est-à dire aux modes rigides , et d'autre part aux états de déformation élastique.

5.1.1 - représentation des modes rigides

Quand on prescrit aux déplacements nodaux des valeurs correspondant à un déplacement d'ensemble, on doit trouver un état de déformation nulle dans l'élément et donc des forces nodales nulles .

5.1.2 - représentation des états de déformation constantes

Quant on prescrit aux déplacements nodaux d'un élément des valeurs correspondantes à un état de déformation constante, on doit effectivement trouver cet état de déformation à l'intérieur de l'élément

5.2 - compatibilité

Un élément fini est dit compatible quant il permet la définition d'un champ compatible au sens de " RITZ ", c'est-à-dire avec une continuité C^0 (déplacements continus, pour les problèmes à comportements membranaires) .

C^1 (déplacements et leur dérivées premières continus, pour les problèmes de flexion) .

De par le principe même de la méthode des éléments finis, cette condition de continuité s'applique à l'intérieur des éléments et aux interfaces (inter-élément) .

La continuité des déplacements à l'intérieur des éléments ne pose pas de problèmes particuliers sauf pour des corps non homogènes où des hypothèses doivent être prises notamment sur la parfaite adhérence des constituants .

Il n'en est pas de même pour la compatibilité inter-élément qui requiert une attention particulière pour le choix de l'approximation et des déplacements nodaux . Par ailleurs, la compatibilité inter-éléments s'explique très simplement par le caractère physique des modèles de déplacement .

En effet en élasticité plane par exemple ,la violation de ce critère entrainerait des modèles de déplacement inadmissibles d'un point de vue physique, à cause de l'apparition d'ouvertures entre éléments au cours du chargement .

Dans le cas des poutres en flexion , ce critère se traduit par la la continuité du déplacement transverse "V" et de la pente "dV/dx" le long des interfaces .Le non respect de cette condition par exemple par des discontinuités de pente correspond à des modèles de déplacements non satisfaisants d'un point de vue physique .

Remarques :

Les éléments finis de type déplacement convergent s'ils satisfont les conditions de complétude et de compatibilité présentées précédemment De tels éléments sont appelés éléments conformes .

Pour des éléments conformes , la suite de solutions définie à partir d'une suite de maillage (chaque maillage est obtenu par subdivision du maillage précédent) convergent vers la solution de façon monotone .

6 - Traitement des charges réparties

Dans la méthodes des éléments on considère toujours que les charges sont appliquées au ~~x~~noeud. S

En pratique il existe plusieurs cas où les structures sont soumises à des charges réparties . Pour pouvoir appliquer dans ce cas la methode des éléments finis , on doit remplacer ces charges réparties par des charges ponctuelles appliquées aux noeuds .

Pour cela il faut que les travaux virtuels des charges réparties et des charges ponctuelles soient égaux .

Soit une charge $q(x,y,z)$ répartie sur le volume ayant comme composantes X , Y et Z .

le travail virtuel de la charge répartie est :

$$W_{cr}^* = \int_V (dU.X + dV.Y + dW.Z) dv$$

$$W_{cr}^* = \int_V \left\{ \begin{matrix} dU \\ dV \\ dW \end{matrix} \right\}^T q(x,y,z) . dv$$

$$W_{cr}^* = \int_V \left\{ df(x,y,z) \right\}^T \left\{ q(x,y,z) \right\} dv$$

Or la fonction de déplacement est :

$$\left\{ f(x,y,z) \right\} = \left[\phi(x,y,z) \right] . \left\{ \alpha \right\} \text{ et } \left\{ \alpha \right\} = \left[A \right]^{-1} . \left\{ \delta \right\}$$

$$\left\{ f(x,y,z) \right\} = \left[\phi(x,y,z) \right] \left[A \right]^{-1} . \left\{ \delta \right\}$$

$$D'où : W_{cr}^* = \int_V \left\{ \left[\phi(x,y,z) \right] \left[A \right]^{-1} . \left\{ d\delta \right\} \right\}^T . \left\{ q(x,y,z) \right\} dv$$

$$W_{cr}^* = \left\{ d\delta \right\}^T . \left[A^{-1} \right]^T \int_V \left[\phi(x,y,z) \right]^T . \left\{ q(x,y,z) \right\} dv$$

Le travail virtuel des forces ponctuelles équivalentes $\left\{ f_{p,e} \right\}$ est:

$$W_{cp}^* = \left\{ d\delta \right\}^T . \left\{ f_{p,e} \right\}$$

En égalisant les deux travaux obtenus on aura :

$$\left\{ f_{p,e} \right\} = \left[A^{-1} \right]^T \int_V \left[\phi(x,y,z) \right]^T . \left\{ q(x,y,z) \right\} dv$$

CHAPITRE III

THEORIE DES STRATIFIES

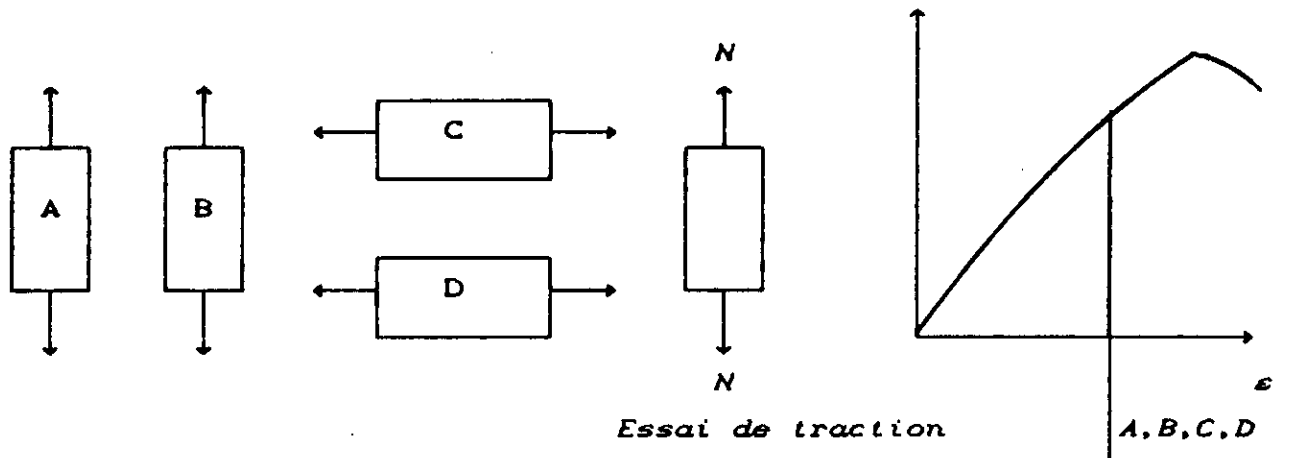
1- Définition

On entend par le terme stratification , la superposition de plusieurs couches élémentaires de matériaux composites , appelées , plies .

2- Théorie élastique du pli

On a l'habitude , pour les matériaux homogènes isotropes, de déterminer le module d'élasticité : "E" , le module de cisaillement: " G " , et le coefficient de poisson " ν " , afin de définir les caractéristiques élastiques du matériaux . Il est aisé d'obtenir ces caractéristiques en réalisant des essais relativement simples sur des éprouvettes de matériaux isotropes.

Soient quatre éprouvettes isotropes A,B,C,D soumises à un essai de traction dans deux directions différentes(voir figure). Les quatre courbes contraintes-déformations sont confondues.

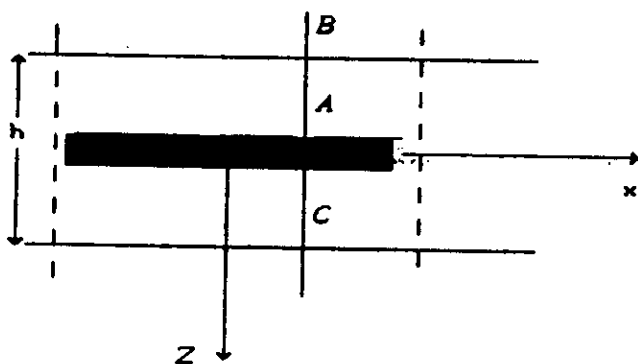


Ces 4 éprouvettes sont tirées d'un matériau isotrope.

Figure 1 - CAS ISOTROPE -

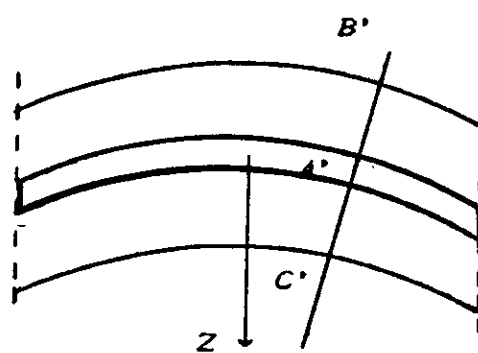
On suppose qu'une ligne perpendiculaire au plan moyen avant déformation, demeure perpendiculaire à la surface moyenne, transformée du plan moyen dans la configuration fléchie.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{\text{couche } k} = \begin{bmatrix} \overline{c_{11}} & \overline{c_{12}} & \overline{c_{16}} \\ \text{Sym} & \overline{c_{22}} & \overline{c_{26}} \\ & & \overline{c_{66}} \end{bmatrix}_k \times \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_k$$



■ : Plan moyen

AVANT DEFORMATION



APRES DEFORMATION

On rappelle que le plan moyen est par définition le plan qui sépare en deux nombres égaux les plis situés de part et d'autre de ce plan et a pour cote " Z = 0 " , par convention .

Le champ de déplacement est représenté par U₀, V₀, les déplacements dans le plan moyen et W₀, le déplacement dans la direction Z

Ecrivons les équations du champ de déplacement pour un point quelconque du statifié , après déformation .

$$U = U_0 - U'$$

$$\text{et } \sin(\alpha) \quad \alpha = \frac{U'}{Z_0}$$

Avec : $U' = Z_0 \times \alpha$

$$\text{tg}(\alpha) \quad \alpha = \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

En procédant de la même manière sur une poutre en matériau composite, on réalise d'une part, que les courbes des éprouvettes A et B sont confondues, ce qui nous permet de considérer le matériau comme homogène, et d'autre part, la non concordance des courbes relatives aux éprouvettes C et D avec les éprouvettes A et B, bien qu'elles soient confondues entre elles, nous suggère de considérer le matériau comme anisotrope. Ainsi le matériau composite est dit : **Elastique Homogène Anisotrope**.

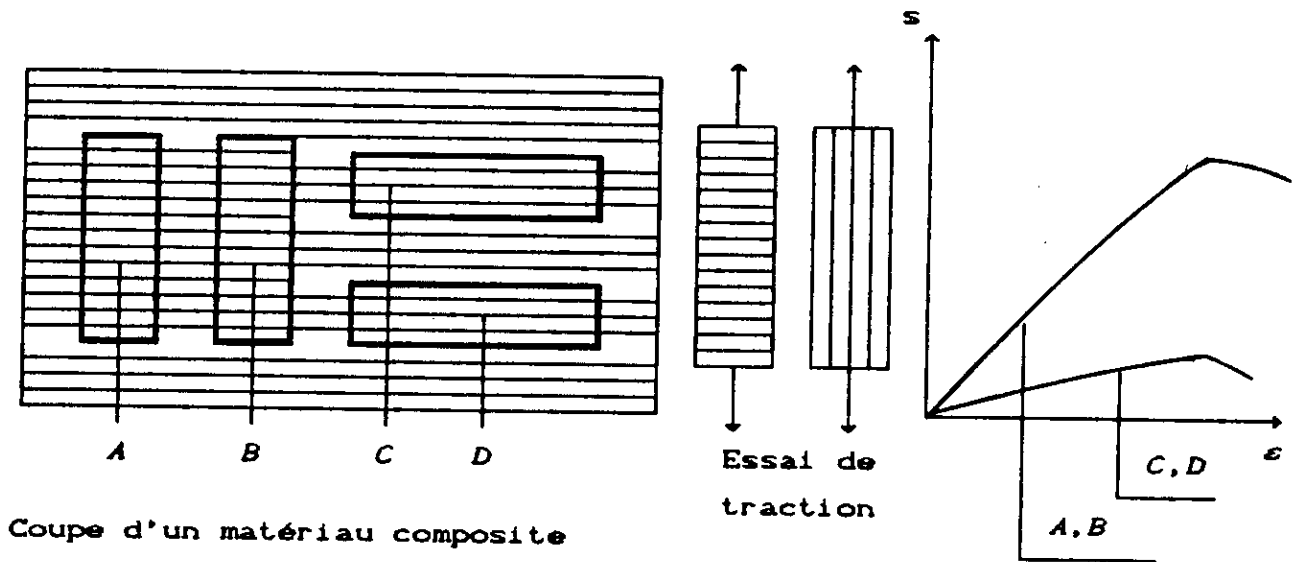


Figure 2 - CAS ANISOTROPE -

3 -Théorie élastique du stratifié

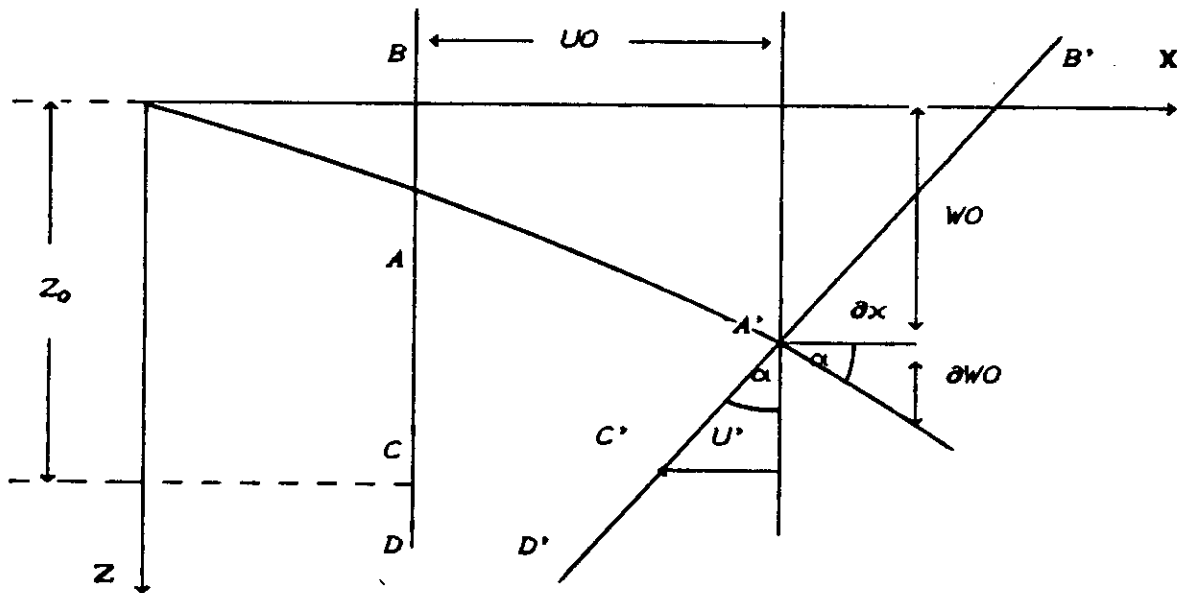
On appelle stratifié ce qui résulte de la superposition de plusieurs couches unidirectionnelles (ou plis).

3.1 -Hypothèses

- Empilement de couches orthotropes .
- Couches parfaitement "soudées" l'une par rapport à l'autre ni glissement, ni séparation .

3.2 -Relations contraintes-déformations:

Et soit la figure :



Et ainsi le champ de déplacement en tout point de cote " Z " dans le statifié s'écrit :

$$\begin{cases} U = U_0 - Z \cdot \frac{\partial W_0}{\partial x} \\ V = V_0 - Z \cdot \frac{\partial W_0}{\partial y} \\ W = W_0 \end{cases} \quad (1)$$

On déduit de (1), les déformations non nulles correspondantes, ceci pour les petites déformations (linéaires) .

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(U_0 - Z \cdot \frac{\partial W_0}{\partial x} \right) = \frac{\partial U_0}{\partial x} - Z \cdot \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \\ \epsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(V_0 - Z \cdot \frac{\partial W_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial V_0}{\partial y} - Z \cdot \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} - 2 \cdot Z \cdot \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Les relations déformations-déplacements ci-dessus peuvent être écrites en fonction des déformations du plan moyen ($\varepsilon^0_x, \varepsilon^0_y, \tau^0_{xy}$) et des courbures du plan moyen (k_x, k_y, k_{xy}). On a :

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon^0_x = \frac{\partial U_0}{\partial x} \\ \varepsilon^0_y = \frac{\partial V_0}{\partial y} \\ \gamma^0_{xy} = \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \end{array} \right. \quad \text{Et :} \quad \left[\begin{array}{l} K_x = -\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \\ K_y = -\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \\ K_{xy} = -2 \cdot \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \end{array} \right.$$

D'où :

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right]_{\text{Couche}(K)} = \left[\begin{array}{l} \varepsilon^0_x \\ \varepsilon^0_y \\ \gamma^0_{xy} \end{array} \right] + Z \cdot \left[\begin{array}{l} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{array} \right]$$

Enfin la relation contraintes-déformations s'écrit :

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right]_K = \left[\begin{array}{ccc} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{1\sigma} \\ & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{2\sigma} \\ & \text{SYM} & \bar{C}_{\sigma\sigma} \end{array} \right]_K \cdot \left(\left[\begin{array}{l} \varepsilon^0_x \\ \varepsilon^0_y \\ \gamma^0_{xy} \end{array} \right] + Z \cdot \left[\begin{array}{l} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{array} \right] \right)$$

4-Equations fondamentales d'un stratifié

4.1- Efforts normaux.

- Effort résultant dans la direction "x" :
$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz$$

- Effort résultant dans la direction "y" :
$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz$$

- Effort résultant dans la direction "x,y" :
$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz$$

4.2- Moments fléchissants

- Moment fléchissant d'axe "y" , dû aux contraintes σ_x :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z dz$$

- Moment fléchissant d'axe "x" , dû aux contraintes σ_y :

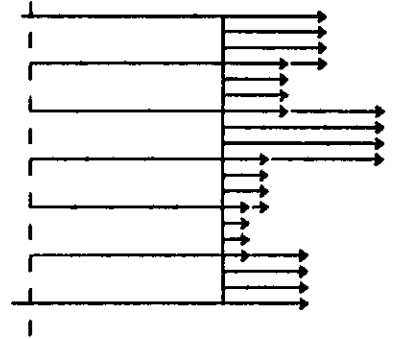
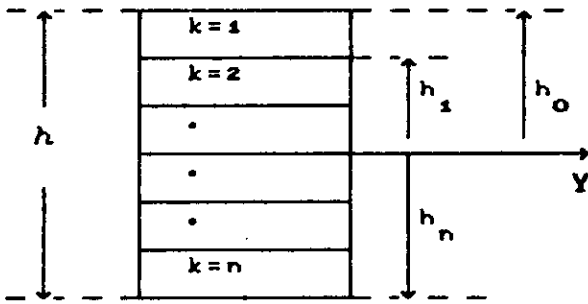
$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z dz$$

- Moment de torsion dans le plan (x,y) , dû à t_{xy} :

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z dz$$

Etant donné pour chaque pli d'épaisseur $(h_k - h_{k-1})$, on a les mêmes contraintes , et d'autant plus que les contraintes sont discontinues le long de l'axe z.

On'a :



On a :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^{k=n} b \cdot \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz$$

Et :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{k=n} b \cdot \left[\bar{C} \right]_k \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \cdot \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \cdot \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \quad (2)$$

Remarques :

- 1- $b \cdot \left[\bar{C} \right]_k$, Dépendent du numéro du pli uniquement , non de de la cote Z
- 2- $\left[\epsilon^0 \right]$ et $\left[K \right]$, sont des caractéristiques du stratifié, donc indépendantes

D'où , l'équation finale des efforts résultants

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \left\{ A \right\} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \left\{ B \right\} \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$A_{ij} = b \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \bar{C}_{ij} \cdot \rho_k (h_k - h_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \bar{C}_{ij} \cdot \rho_k (h_k^2 - h_{k-1}^2)$$

En procédant de la même manière les moments s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \cdot z \, dz = \sum_{k=1}^{k=n} b \cdot \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \cdot z \, dz \quad (3)$$

Ainsi l'équation finale des moments devient :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \cdot b \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \bar{C}_{ij} \cdot \rho_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (4)$$

On peut écrire les efforts et les moments résultants sous une forme condensée, enfin nous avons l'équation fondamentale d'un stratifié :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ K \end{bmatrix}$$

De l'équation(2) , on tire $\{ \varepsilon^{\circ} \}$, qu'on injecte dans l'équation(4) ce qui nous donne les courbures $\{ K \}$.

Avec :

$$\{ K \} = \{ D' \}^{-1} \{ M \} - \{ D' \}^{-1} \{ C' \} \{ N \} . \quad (5)$$

En substituant dans l'équation de $\{ \varepsilon^{\circ} \}$:

$$\{ K \} = \left[\{ A' \} - \{ B' \} \{ D' \}^{-1} \{ C' \}^{-1} \right] \{ N \} + \{ B' \}^{-1} \{ D' \}^{-1} \{ M \}$$

(6)

En combinant (5) et (6) , on aura :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^{\circ} \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad (7)$$

Avec :

$$\{ A' \} = \{ A' \} - \{ B' \} \{ D' \}^{-1} \{ C' \}^{-1}$$

$$\{ B' \} = \{ B' \} \{ D' \}^{-1}$$

$$\{ C' \} = - \{ D' \}^{-1} \{ C' \}^{-1} \quad \text{et} \quad \{ D' \} = \{ D' \}^{-1}$$

Et:

$$\{ A' \} = \{ A \}^{-1} \quad \text{et} \quad \{ C' \} = \{ B \} \{ A \}^{-1}$$

$$\{ B' \} = - \{ A \}^{-1} \{ B \}$$

$$\{ D' \} = \{ D \} - \{ B \} \{ A \}^{-1} \{ B \}$$

CHAPITRE IV

PRESENTATION DE L'ELEMENT POUTRE

1- Définition

Une poutre est un solide élastique dont l'une des dimensions est importante par rapport aux deux autres et qui comporte un axe de symétrie appelé axe neutre .

2- Hypothèse de la théorie des poutres

La théorie des poutres repose sur deux théories , les plus importantes dans l'analyse linéaire des structures :

- La théorie de *BERNOUILLI* : théorie linéaire des poutres sans cisaillement transverse.
- La théorie de *TIMOSHENKO* : théorie linéaire des poutres avec cisaillement transverse .

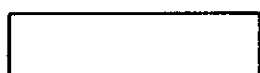
Dans l'étude des poutres minces à petites flèches , l'effet du cisaillement peut être négligé , ce qui nous permet d'opter pour la théorie de *BERNOUILLI* définie par les hypothèses suivantes:

-les contraintes σ_y et σ_z sont négligeables par rapport à la composante normale σ_x .

-l'axe neutre ne subit aucune contraction ni extension lors de la flexion de la poutre .

-Les points situés sur une normale à la l'axe neutre avant déformation restent sur cette normale après déformation (effet du cisaillement transverse négligeable) .

3- Domaine de validité des hypothèses de la théorie des poutres



l



h

on a : $1/15 \leq h \leq 1/10$

et $0.3 \cdot h \leq b \leq 0.7 \cdot h$

b

$$\text{et } r_c/h > 5$$

Le rayon de courbure r_c de la fibre moyenne de la poutre doit être relativement grand par rapport à la dimension transversale h de la poutre.

4- Éléments finis pour la flexion des poutres

Nous avons développé dans le chapitre précédent une description générale de la méthode des éléments finis .

Dans ce présent chapitre nous allons appliquer la méthode aux problèmes de flexion des poutres .

On présentera très brièvement les étapes de base utilisées pour le calcul de la rigidité d'un élément fini et plus particulièrement pour l'élément poutre .

Étape 1 : - Identification du type de problème .

- Choisir un système de coordonnées convenable .
- Numérotation des noeuds .

Soient $\left\{ F^{\circ} \right\}$ le vecteur contenant les forces nodales appliquées

$\left\{ \delta^{\circ} \right\}$ le vecteur des déplacements nodaux.

Entre ces deux vecteurs on a la relation:

$$\left\{ F^{\circ} \right\} = \left[K^{\circ} \right] \left\{ \delta^{\circ} \right\}$$

Étape 2 : - Choisir une fonction de déplacement (d'interpolation) .
convenable telle que:

$$\left\{ \delta(x,y) \right\} = \left[f(x,y) \right] \left\{ \alpha \right\} .$$

Etape 3 :- Obtenir l'état de déplacement en chaque point en fonction des déplacements nodaux δ^*

$$\left\{ \delta(x,y) \right\} = \left[f(x,y) \right] \left[A \right]^{-1} \left\{ \delta^* \right\} .$$

Etape 4 :- On relie maintenant les déformations $\epsilon(x,y)$, de l'élément, aux déplacements $\delta(x,y)$ et donc aussi aux déplacements nodaux.

$$\left\{ \epsilon(x,y) \right\} = \left[\text{Différentielle de } \delta(x,y) \right]$$

$$\left\{ \epsilon(x,y) \right\} = \left[B \right] \left\{ \delta^* \right\} .$$

Etape 5 :- Les contraintes internes à l'élément $\epsilon(x,y)$, sont maintenant reliées aux déformations $\epsilon(x,y)$:

$$\left\{ \sigma(x,y) \right\} = \left[D \right] \left\{ \epsilon(x,y) \right\}$$

$$\left\{ \sigma(x,y) \right\} = \left[D \right] \left[B \right] \left\{ \delta^* \right\}$$

Etape 6 :- Remplacer $\left\{ \sigma(x,y) \right\}$ par des forces nodales équivalentes,

en appliquant le principe des travaux virtuels:

$$\left\{ F^* \right\} , \text{ reliant ainsi } \left\{ F^* \right\} \text{ à } \left\{ \delta^* \right\} .$$

$$\left\{ F^* \right\} = \int_v \left[B \right]^T \left[D \right] \left[B \right] dv \left\{ \delta^* \right\} .$$

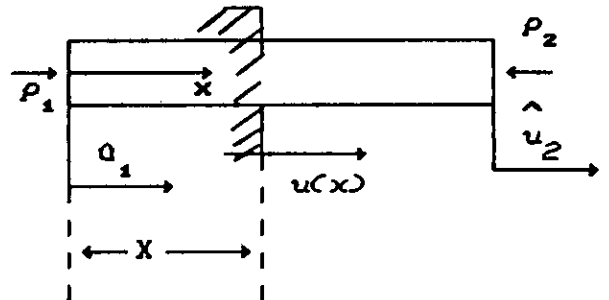
En comparaison avec l'équation de l'étape 1, on voit que

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dv$$

4.1- Comportement membranaire

Ce problème est la traction ou la compression de barres ; chaque noeud possède un degré de liberté, soit un déplacement nodal u_i , et donc une force nodale p_i .

$$\{P\} = [K] \{u\}$$



On a finalement, à la 7^{ème} étape :

$$[K] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2- Comportement flexionnel

Ce problème est la flexion des poutres, chaque noeud possède deux degrés de liberté (v, θ).

De la même façon, à la 7^{ème} étape nous aurons la matrice de rigidité d'une poutre en flexion :

$$[K] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Vu que l'axe neutre n'est pas toujours au centre géométrique de la section transversale, donc sa position doit être définie par rapport à un axe fixe (axe de référence). Cependant la symétrie des couches de part et d'autre de l'axe neutre n'est plus vérifiée, et un terme non diagonal apparaît, dit terme de couplage.

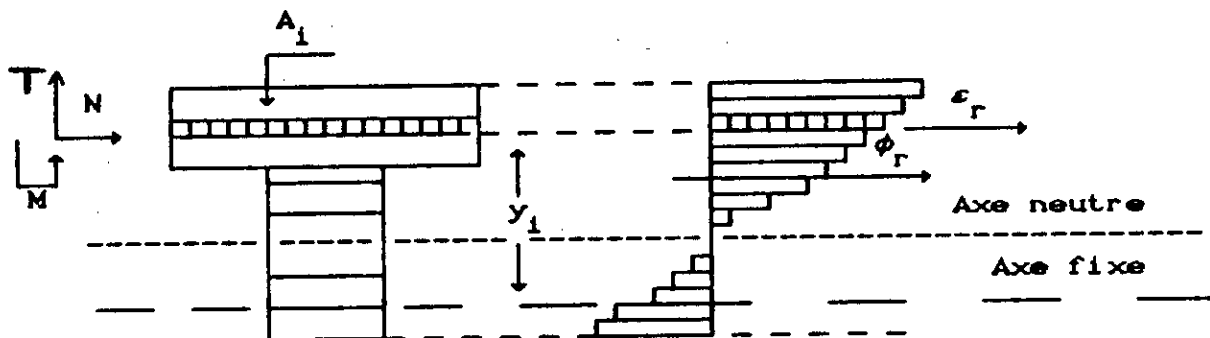
5 Formation de la matrice de rigidité d'un élément poutre avec introduction d'un terme de couplage.

5.1 Relations sollicitations-déformations dans une section transversale d'une poutre multicouche

On suppose la conservation des sections planes et l'absence de glissement entre béton et acier. Les déformations d'une section transversale sont définies par deux paramètres.

- La déformation au niveau du centre géométrique " ϵ_r ".
- la courbure " ϕ_r ".

Sous des sollicitations CN, MD, ces paramètres auront des valeurs bien définies soit : ϵ_r et ϕ_r .



Dans chaque fibre d'aire " A_i ", située à l'ordonnée y_i par rapport à l'axe de référence, subit une déformation ϵ_i telle que :

$$\epsilon_i = \frac{du}{dx} - y_i \frac{d^2v}{dx^2}$$

Avec : $\frac{du}{dx}$: Déformation du plan moyen, $\implies \epsilon_r = \frac{du}{dx}$

$$-y \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} : \text{La courbure, } \implies \phi_r = -y \cdot \frac{d^2 v}{dx^2}$$

D'où : la formation de contraintes " σ_1 ". Le module élastique est défini par :

$$E_1 = \sigma_1 / \epsilon_1$$

L'équilibre de la section élastique non homogène est exprimé par la relation :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_2 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \phi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \phi_r \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\left| \begin{aligned} K_1 &= \sum_{i=1}^n A_i \cdot E_i = EA \\ K_2 &= \sum_{i=1}^n A_i \cdot E_i \cdot y_i = EM \\ K_3 &= \sum_{i=1}^n A_i \cdot E_i \cdot y_i^2 = EI \end{aligned} \right.$$

DEMONSTRATION:

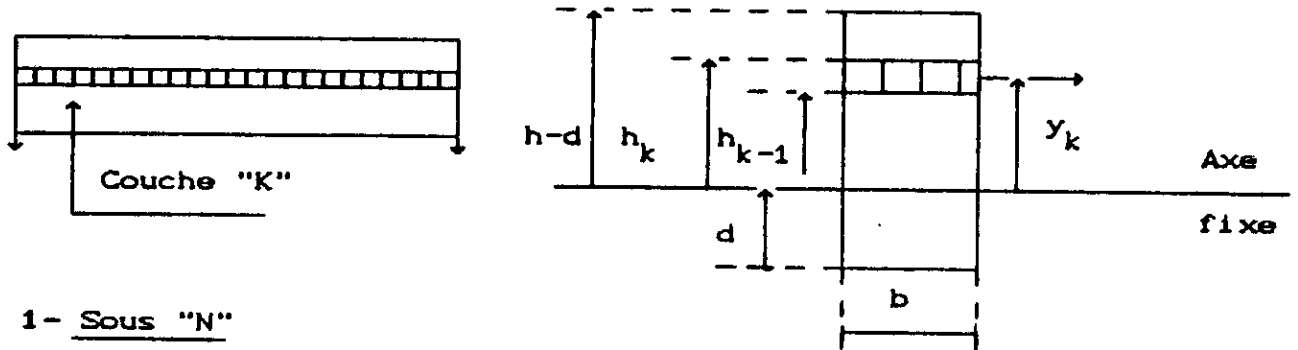
$$a) \text{ Démontrons que : } \left| \begin{aligned} N_x &= EA \cdot \epsilon_r + EM \cdot \phi_r \text{ et} \\ M_x &= EM \cdot \epsilon_r + EI \cdot \phi_r \end{aligned} \right| \left| \begin{aligned} EA &= \sum_{i=1}^n A_i \cdot E_i \\ EI &= \sum_{i=1}^n A_i \cdot E_i \cdot y_i^2 \\ EM &= \sum_{i=1}^n A_i \cdot E_i \cdot y_i \end{aligned} \right.$$

Sachant que : $\epsilon_r = \frac{du}{dx}$

$$\phi_r = -y \cdot \frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{du_0}{dx} - y \cdot \frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$N_x = b \cdot \int_{-d}^{h-d} \sigma_x dy \quad \text{et} \quad M_x = b \cdot \int_{-d}^{h-d} \sigma_x \cdot Y dy$$



1- Sous "N"

$$N_x = b \cdot \int_{-d}^{h-d} \sigma_x \cdot Y dy = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} b \cdot \sigma_x dy = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} b \cdot E_k \cdot \epsilon_x dy$$

$$N_x = b \cdot \sum_{k=1}^n \epsilon_x \cdot E_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dy = b \cdot \sum_{k=1}^n E_k \left[\epsilon_r \cdot \int_{h_{k-1}}^{h_k} dy - \frac{d^2 v}{dx^2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} y dy \right]$$

$$N_x = \sum_{k=1}^n b \cdot E_k \cdot \epsilon_r (h_k - h_{k-1}) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} b \cdot E_k \cdot \phi_r (h_k^2 - h_{k-1}^2)$$

$$N_x = \epsilon_r \cdot \sum_{k=1}^n E_k \cdot A_k + \phi_r \cdot \sum_{k=1}^n E_k \cdot A_k \cdot y_k$$

====>

$$N_x = \epsilon_r \cdot EA + \phi_r \cdot EM$$

et

$$EA = \sum_{i=1}^n A_i \cdot E_i$$

2- Sous "M"

$$M_x = b \cdot \int_{-d}^{h-d} \sigma_x \cdot y \, dy = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} b \cdot \sigma_x \cdot y \, dy = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} b \cdot E_k \cdot \epsilon_x \cdot y \, dy$$

Et :

$$M_x = b \cdot \sum_{k=1}^n E_k \left[\epsilon_r \cdot \int_{h_{k-1}}^{h_k} y \, dy - \frac{d^2 v}{dx^2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} y^2 \, dy \right]$$

$$M_x = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n b \cdot E_k \cdot \epsilon_r (h_k^2 - h_{k-1}^2) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} b \cdot E_k \cdot \phi_r (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

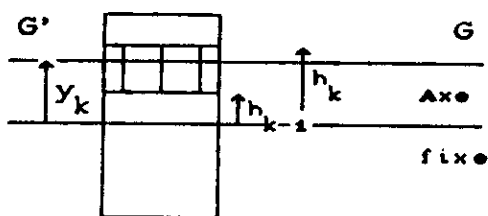
$$M_x = \sum_{k=1}^n E_k \cdot \epsilon_r \cdot A_k \cdot y_k + \phi_r \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \cdot b \cdot E_k \cdot (h_k + h_{k-1} + h_k \cdot h_{k-1}) (h_k - h_{k-1})$$

$$M_x = \sum_{k=1}^n E_k \cdot \epsilon_r \cdot A_k \cdot y_k + \phi_r \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \cdot E_k \cdot A_k \cdot (h_k^2 + h_{k-1}^2 + 2 \cdot h_{k-1} \cdot h_k - h_k \cdot h_{k-1})$$

$$M_x = \sum_{k=1}^n E_k \cdot \epsilon_r \cdot A_k \cdot y_k$$

$$+ \phi_r \left[\sum_{k=1}^n \frac{4}{3} \cdot A_k \cdot E_k \cdot \left[\frac{(h_k + h_{k-1})^2}{2} \right] - \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \cdot E_k \cdot A_k \cdot (h_k \cdot h_{k-1}) \right]$$

Or on néglige le moment d'inertie d'une couche par rapport à l'axe qui passe par son centre de symétrie, on aura :



$$I_{/GG'} = \frac{b \cdot (h_k - h_{k-1})^3}{12} = 0$$

Car : $h_k \approx h_{k-1} \approx y_k$

D'où :

$$M_x = \varepsilon_r \cdot EM + \phi_r \cdot EI$$

et

$$EI = \sum_{i=1}^n A_i \cdot E_i \cdot y_i$$

$$EM = \sum_{i=1}^n A_i \cdot E_i \cdot y_i^2$$

5.2 Formulation de la matrice de rigidité avec terme de couplage:

Les étapes de calcul présentées au chapitre III, restent valides, sauf que pour ce genre de problème, le comportement, membranaire et flexionnel ne sont plus découplés.

ETAPE I :

$$\{ F^e \} = [k^e] \{ \delta^e \}$$

$$\{ \delta(x,y) \} = [f(x,y)] \cdot \{ \alpha \} = \begin{Bmatrix} U \\ V \\ \theta \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} V = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 + \alpha_4 \cdot x^3 \\ \theta = \frac{dU}{dx} = \alpha_2 + 2 \cdot \alpha_3 \cdot x + 3 \cdot \alpha_4 \cdot x^2 \\ U = \alpha_5 + \alpha_6 \cdot x \end{cases}$$

$$\{ \delta^e \} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{ F^e \} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$\{ \delta(x,y) \} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

ETAPE II:

Relier les déplacements généraux de l'élément à ses déplacements nodaux :

$$\{ \delta^e \} = [A] \{ \alpha \}$$

et donc:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L \\ 1 & L & L^2 & L^3 & 0 & 0 \\ 0 & L & 2L & 3L^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = v_1 \\ \alpha_2 = \theta_1 \\ \alpha_5 = u_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_3 = \frac{3}{L^2}(-v_1 + v_2) - \frac{1}{L}(2\theta_1 + \theta_2) \\ \alpha_4 = \frac{2}{L^3}(-v_2 + v_1) - \frac{1}{L^2}(\theta_1 + \theta_2) \\ \alpha_6 = \frac{u_2}{L} - \frac{u_1}{L} \end{cases}$$

ETAPE III:

Relation entre déplacements et déformations :

$$\{ \delta(x,y) \} = [B] \{ \delta^e \}$$

$$\{ \delta(x,y) \} = \begin{bmatrix} du/dx \\ -\frac{d^2v}{dx^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_6 \\ -2 \cdot \alpha_3 - 6 \cdot \alpha_4 \cdot x \end{bmatrix}$$

Finalement :

$$\{ \delta(x,y) \} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & 0 & \frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

ETAPE IV :

Relation entre déplacements et contraintes .

$$\{ \sigma(x,y) \} = [D] \{ \varepsilon(x,y) \} = [D] [B] \{ \delta^e \}$$

Avec :

$$[D] = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & EM \\ EM & EI \end{bmatrix}$$

$$\{ \sigma(x, y) \} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}$$

Aussi nous avons : $[k^e] = \int_0^L [B]^T [D] [B] dx$

$$[B]^T = \begin{bmatrix} -1/L & 0 \\ 0 & a \\ 0 & b \\ 1/L & 0 \\ 0 & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} a &= \frac{6}{L^2} - \frac{12X}{L^3} & c &= -\frac{6}{L^2} + \frac{12X}{L^3} \\ b &= \frac{4}{L} - \frac{6X}{L^2} & d &= \frac{2}{L} - \frac{6X}{L^2} \end{aligned}$$

Après avoir effectué le produit des matrices "B^T" avec "D" avec "B", et après intégration entre [0 L], on déduit enfin la matrice de rigidité d'une poutre multicouche :

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EM}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EM}{L} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L} & \frac{4EI}{L} & \frac{EM}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{6EI}{L} & \frac{4EI}{L} & \frac{EM}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EM}{L} & \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EM}{L} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L} & -\frac{2EI}{L} & -\frac{EM}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

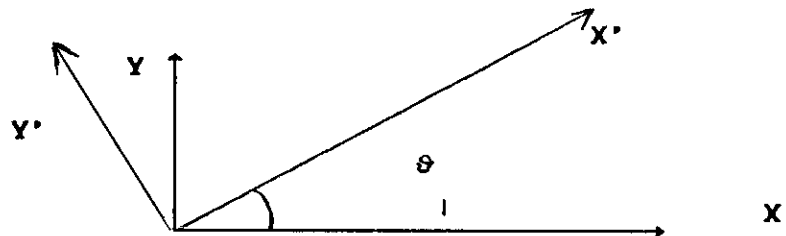
SYMETRIQUE

TRANSFORMATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE

La matrice de rigidité obtenue a été déterminée en fonction des coordonnées locales de l'élément . Pour une structure donnée , on doit déterminer la matrice de rigidité en fonction des coordonnées globales (système de coordonnées pour toute la structure)

D'où la nécessité de transformer la matrice de rigidité "K" du système de coordonnées locales au système de coordonnées globales.

Soit l'élément "ij" incliné d'un angle θ par rapport à l'axe "X" (axe global) , ayant comme système de coordonnées locales (x',y')



$$\text{Soit : } \begin{cases} \lambda = \cos(\theta) \\ \mu = \sin(\theta) \end{cases}$$

Soit M_t , la matrice de transformation définie telque :

$$M_t = \begin{bmatrix} \lambda & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice "K" dans un repère global vaut :

$$\boxed{[K]_G = [M_t] [K] [M_t]^T}$$

Les éléments de la matrice "K", dans le repère global valents :

$$k(1,1) = \lambda^2 \cdot \frac{EA}{L} + \mu \cdot \frac{12 \cdot EI}{L^3}$$

$$K(1,2) = \lambda \mu \cdot \frac{EA}{L} - \mu \lambda \cdot \frac{12 \cdot EI}{L}$$

$$K(1,3) = -\lambda \cdot \frac{EM}{L} - \mu \cdot \frac{6 \cdot EI}{L^2}$$

$$K(1,4) = -K(1,1)$$

$$K(1,5) = -K(1,2)$$

$$K(1,6) = \lambda \cdot \frac{EM}{L} - \mu \cdot \frac{6 \cdot EI}{L^2}$$

$$K(2,2) = \mu^2 \cdot \frac{EA}{L} + \lambda^2 \cdot \frac{12 \cdot EI}{L^3}$$

$$K(2,3) = -\mu \cdot \frac{EM}{L} + \lambda \cdot \frac{6 \cdot EI}{L^2}$$

$$K(2,4) = -K(1,2)$$

$$K(2,5) = -K(2,2)$$

$$K(2,6) = \mu \cdot \frac{EM}{L} + \lambda \cdot \frac{6 \cdot EI}{L^2}$$

$$K(3,3) = \frac{4 \cdot EI}{L}$$

$$K(3,4) = -K(1,3)$$

$$K(3,5) = -K(2,3)$$

$$K(3,6) = K(3,3)/2$$

$$K(4,4) = \lambda^2 \cdot \frac{EA}{L} + \mu^2 \cdot \frac{12 \cdot EI}{L^3}$$

$$K(4,5) = K(1,2)$$

$$K(4,6) = -K(1,6)$$

$$K(5,5) = K(2,2)$$

$$K(5,6) = K(1,3) \quad \text{Et :} \quad K(6,6) = K(3,3)$$

CHAPITRE V

METHODES D'ANALYSE NON-LINEAIRE

1 Introduction:

Dans tous les problèmes classiques en éléments finis les équations différentielles gouvernant l'évolution du système sont linéaires. Dans la mécanique du solide élastique, ceci résultait de:

-une forme linéaire pour les relations déformations déplacements

-une forme linéaire pour les relations contraintes déformations
Il existe cependant beaucoup de problèmes pratiques pour lesquels il n'est pas possible de conserver une telle linéarité.

En mécanique des structures, un problème est non-linéaire si la matrice de rigidité ou le vecteur chargement dépend des déplacements. La non-linéarité dans les structures peut être classée comme:

-non-linéarité matérielle, associée avec des changements dans les propriétés du matériau; les paramètres physiques supposés indépendants des déplacements U_n dans un modèle linéaire, tels que le module de YOUNG deviennent des fonctions de U_n . C'est par exemple le cas dans la plasticité.

-non-linéarité géométrique, associée au changement de configuration comme dans le cas de large déflexion des poutres minces élastiques où des termes non linéaires par rapport aux inconnues du problème apparaissent dans les équations aux dérivées partielles, même lorsque les propriétés physiques sont indépendantes de U_n . On a alors:

$$\epsilon_x = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta v}{\delta x} \right)^2$$

Ces classes de problèmes peuvent, dans la plupart des cas être traités sans pour cela que l'on soit conduit à en reprendre complètement la formulation. La méthode des éléments finis conduit à une formulation discrétisée des problèmes non-linéaires. Résoudre le système non-linéaire suivant:

à savoir que :

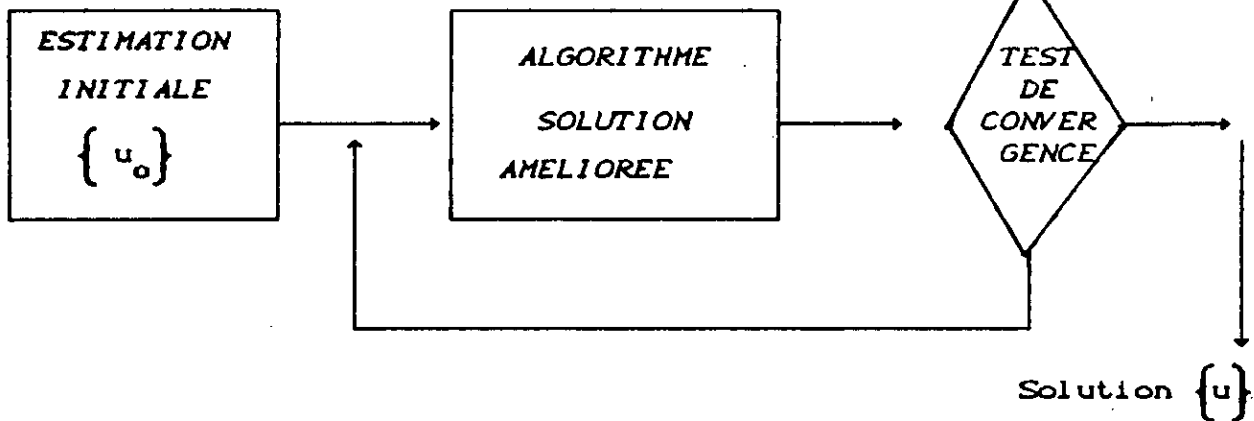
$$\{F\} = [k(u)] \{u\} \text{ ou } \{R(u)\} = \{F\} - [k(u)] \{u\} = 0$$

C'est chercher un vecteur $\{u\}$ qui rende le résidu $\{R(u)\}$ aussi proche que possible de zéro . La solution exacte rend $\{R(u)\}$ nul .

Ainsi , la recherche de la solution $\{u\}$ se fait de manière itérative

Divergence:

- changer l'algorithme
- changer la solution initiale



Il est cependant important de mentionner un point capitale: alors que dans les problèmes linéaires la solution était toujours unique, il n'en est plus de même dans la plupart des problèmes non-linéaires. Ainsi si l'on obtient une solution ce n'est pas nécessairement la bonne. Un analyste doit comprendre avant tout le problème physique et se mettre au courant des diverses stratégies de résolution. Une stratégie unique ne donnera pas toujours de bons résultats et peut être inefficace pour certains problèmes. Plusieurs tentatives sont quelquefois nécessaires pour obtenir des résultats satisfaisant. Il sera de cette manière impératif de faire appel au raisonnement physique pour trouver la solution d'un problème particulier.

La majorité des algorithmes conduisent à résoudre un système d'équations linéaires à chaque itération. Le choix d'un algorithme de résolution doit tenir compte de plusieurs facteurs.

- Le type de non-linéarité :
 - localisée ou non localisée .
 - prépondérante ou non prépondérante .
- L'existence de une ou plusieurs solutions .
- La disponibilité d'une méthode de construction d'une solution approchée
- La précision et la rapidité de convergence désirée
- Le risque de divergence

En pratique il n'existe pas de méthode générale valable pour tous les cas ; la stratégie de résolution doit s'adapter par expérience à une classe de problèmes donnés , en faisant appel à une des 3 méthodes suivantes:

- Méthode itérative
- Méthode incrémentale
- Méthode mixte: itérative et incrémentale .

2-Méthodes itératives:

Le chargement est appliqué en un seul incrément avec une matrice initiale et on calcule les déplacements; les contraintes sont calculées selon les lois constitutives et on déduit les forces nodales internes équivalentes qui n'équilibrent par forcément les forces extérieures. Les forces résiduelles sont appliquées à leur tour et on déduit de nouveaux déplacements qu'on doit cumuler aux précédents. Ces déplacements cumulés donnent de nouvelles contraintes et de nouvelles forces résiduelles. Le procédé est répété jusqu'à élimination des forces résiduelles à une certaine tolérance. Plusieurs techniques itératives de calcul de la matrice rigidité et des forces résiduelles existent:

- méthode de substitution
- méthode de Newton-Raphson modifié
- méthode de Newton-Raphson

Cas de la Méthode de substitution:

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions

$\{u_0\}, \{u_1\}, \{u_2\}, \dots, \{u_i\}$ étant calculé à partir de $\{u_{i-1}\}$.

Le vecteur $\{u_{i-1}\}$ étant connu, nous pouvons construire les matrices élémentaires $[k(u_{i-1})]$ puis les assembler pour obtenir $[K(u_{i-1})]$.

On détermine alors le résidu $\{R(u_{i-1})\}$.

$$\{R_1\} = \{R(u_{i-1})\} = \{F\} - [k(u_{i-1})] \{u_{i-1}\}$$

Et on résout ensuite le système en $\{\Delta u_i\}$

$$[k(u_{i-1})] \{\Delta u_i\} = \{R_1\}$$

On déduit alors :

$$\{ u_i \} = \{ u_{i-1} \} + \{ \Delta u_i \}$$

On détermine ensuite de même $\{ u_{i-1} \}$ à partir de $\{ u_i \}$ jusqu'à obtenir la solution la plus proche de la solution exacte, qui doit vérifier un test de convergence.

ALGORITHME DE SUBSTITUTION

calculer une solution approchée $\{ U_0 \}$ éventuellement nulle
construire $\{ F \}$ par assemblage des vecteurs élémentaires $\{ f \}$
 $i=1,2, \dots$ (pour chaque itératio.)

Pour chaque élément:

Extraire les valeurs $\{ u_{i-1} \}$ de $\{ U_{i-1} \}$

Calculer $[k(u_{i-1})]$

Calculer le résidu élémentaire $\{ r \} = \{ f \} - [k] \{ U_{i-1} \}$

Assembler comme dans un problème linéaire

$[k]$ dans $[K]$

$\{ r \}$ dans $\{ R \}$

Résoudre comme dans un problème linéaire $[K] \{ \Delta u_i \} = \{ R_i \}$

Construire la nouvelle estimation de la solution

$$\{ u_i \} = \{ u_{i-1} \} + \omega \cdot \{ \Delta u_i \}$$

Calculer la norme $\| \| ^n \| \|$ de $\{ \Delta u_i \}$

Test de convergence utilisant $\| \| ^n \| \|$.

Cet algorithme nécessite d'assembler et décomposer $[K]$ à chaque itération ce qui est très coûteux .

Dans le cas de non-linéarité faible on emploie alors souvent un algorithme simplifié appelé : " algorithme de *NEWTON-RAPHSON* modifié " .

Le principe est de décomposer $[K]$ en une somme d'une matrice $[K_1]$ constante et d'une matrice $[K_{nl}]$ fonction de U .

On a alors :

$$\left[[K_1] + [K_{nl}(u_{i-1})] \right] \{ \Delta u_i \} = \{ R_i \}$$

En négligeant $[K_{nl}]$ nous obtenons :

$$[K_1] \{ \Delta u_i \} = \{ R_i \}$$

$$\{ u_i \} = \{ u_{i-1} \} + \{ \Delta u_i \}$$

La matrice $[K_1]$ peut être décomposée une seule fois , dans chaque itération il suffit de calculer $\{ R_i \}$ puis d'évaluer $\{ \Delta u_i \}$ à partir de $[K_1]$ déjà décomposée . l'algorithme correspondant est le suivant :

ALGORITHME DE *NEWTON-RAPHSON* MODIFIÉ

Calculer une solution approchée $\{ u_0 \}$, éventuellement nulle et construire $\{ F \}$ par assemblage des vecteurs élémentaires $\{ f \}$.

Construire $[K_1]$ par assemblage des matrices élémentaires linéaires $[k_1]$. Décomposer $[K_1]$.

$i=1,2, \dots$ (pour chaque itération .)

pour chaque élément

Extréere les valeurs $\{ u_{i-1} \}$ de $\{ U_{i-1} \}$.

Calculer $[k(u_{i-1})]$

Calculer le résidu $\{ R_i \}$ par assemblage des résidus élémentaires .

$$\{ r \} = \{ f \} - [k(u)] \{ u_{i-1} \}$$

Résoudre $[K_1] \{ \Delta u_i \} = \{ R_i \}$ à partir de $[K_1]$ décomposée

Calculer $\{ U_i \} = \{ U_{i-1} \} + \{ \Delta U_i \}$ (en supposant $\omega = 1$)

Calculer $|| m ||$

Test de convergence en utilisant $|| n ||$

METHODE DE NEWTON-RAPHSON

Pour les problèmes fortement non linéaires , la méthode de NEWTON-RAPHSON est le plus souvent utilisée car elle converge plus rapidement .

Principe de la méthode :

Supposons qu'à l'itération ($i-1$) nous ayons obtenu une approximation U_{i-1} de la solution telle que le résidu ne soit pas nul

$$\{ R(U_{i-1}) \} = \{ F \} - [k(U_{i-1})] \{ U_{i-1} \} \neq 0$$

A l'itération "i" nous cherchons une approximation U_i de la solution telque :

$$\{ R(U_i) \} = \{ R(U_{i-1} + \Delta U_i) \} \approx 0$$

L'algorithme est obtenu en développant ce résidu en série de TAYLOR au voisinage de U_{i-1} .

$$\{RCU_{i-1} + \Delta U_i\} = \{RCU_i\} + \left[\frac{\partial R}{\partial U} \right]_{U=U_{i-1}} \{ \Delta u_i \} + \dots = 0$$

D'où en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1.

$$- \left[\frac{\partial R}{\partial U} \right]_{U=U_{i-1}} \{ \Delta u_i \} = \{RCU_{i-1}\}$$

Et

$$\{K_t(CU_{i-1})\} \{ \Delta u_i \} = \{RCU_{i-1}\}$$

$$\{ u_i \} = \{ u_{i-1} \} + \{ \Delta u_i \}$$

L'expression de la matrice tangente $\{K_t(CU_{i-1})\}$ s'obtient en dérivant en dérivant l'expression du résidu :

$$\{RCu\} = \{F\} - [k(u)] \{ u \}$$

$$\text{Soit } [K_t(u)] = - \left[\frac{\partial R}{\partial U} \right] = - \left[\frac{\partial F}{\partial U} \right] + [k(u)] + \left[\frac{\partial [k(u)]}{\partial U} \right] \{ u \}$$

Dans le cas où F est indépendant de U

$$[K_t(u)] = [k(u)] + \left[\frac{\partial [k(u)]}{\partial U} \right] \{ u \}$$

Où encore, si $(K)_{ij}$ et $(k_t)_{ij}$ sont les composantes des matrices

$$[K_t], [K]$$

$$(k_t)_{ij} = (K)_{ij} + \sum_1 \frac{\partial K_{ij}}{\partial U_j} U_j$$

-la technique de prédiction utilisée au début de chaque accroissement de sollicitation.

-le coefficient de sur-relaxation

ALGORITHME GENERALE DE RESOLUTION DE PROBLEMES NON-LINEAIRES

choix de $\omega, \Delta\lambda, \text{METH}$

$\lambda=0$

Pas de sollicitations $j : \lambda = \lambda + \Delta\lambda$

Prédiction: $\left\{ U_j^0 \right\} = \left\{ U_{j-1} \right\}$ ou extrapolation de $\left\{ U_{j-1} \right\} = \left\{ U_{j-2} \right\}$

$i=0$

itération: $i=i+1$

éléments

calcul et assemblage du résidu $\left\{ R(\lambda, F_0, U^{i-1}) \right\}$

calcul et assemblage de $\left[K_c(U^{i-1}) \right]$ selon la valeur de METH

décomposition de $\left[K_c(U^{i-1}) \right]$

résolution de $\left[K_c \right] \left\{ \Delta U \right\} = \left\{ R \right\}$

correction de $\left\{ U^i \right\} = \left\{ U^{i-1} \right\} + \omega \left\{ \Delta U \right\}$

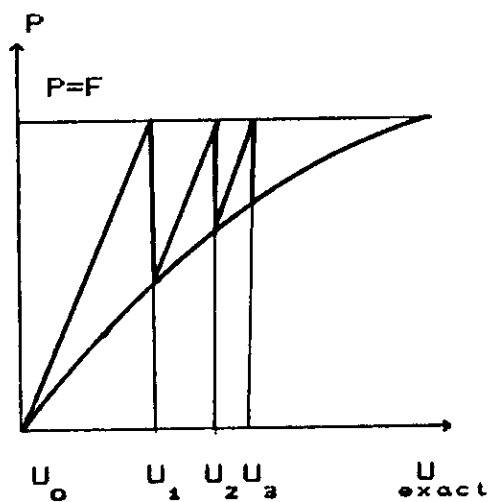
calcul des normes relatives $\| n \|$ de $\left\{ \Delta U \right\}$ ou de $\left\{ R \right\}$

impression éventuelle de l'itératio

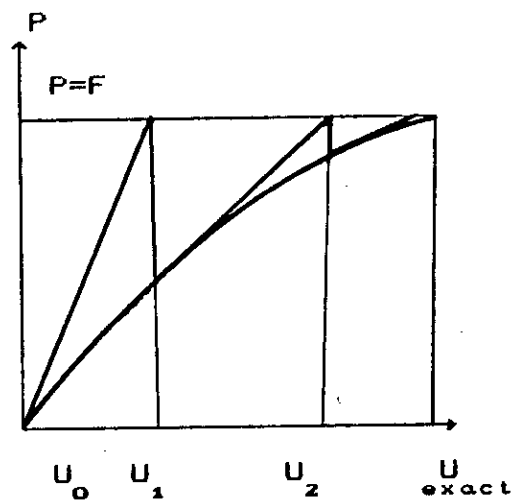
stratégie: choix de METH, $\omega, \Delta\lambda$.

Test de convergence

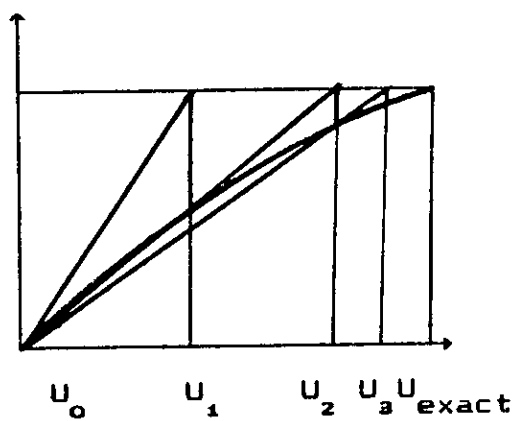
Impressin éventuelle du niveau j de sollicitation



METHODE DE NEWTON RAPHSON
MODIFIEE



METHODE DE NEWTON-RAPHSON

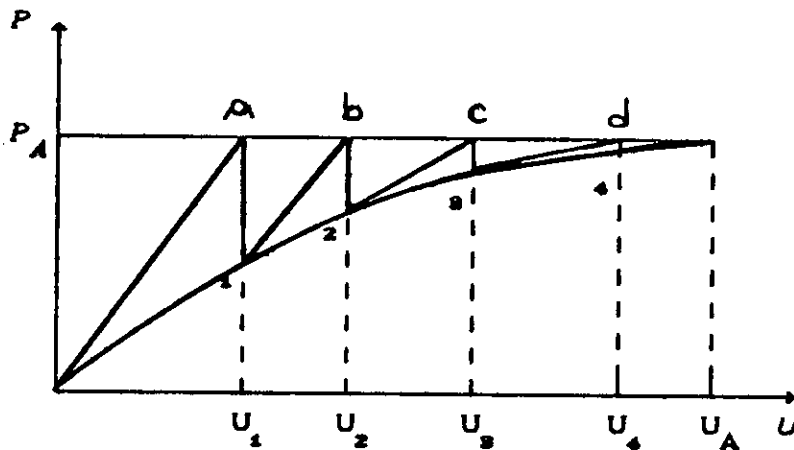


METHODE DE SUBSTITUTION

REPRESENTATION GRAPHIQUE DES ALGORITHMES DANS LE CAS D'UNE VARIABLE

METHODE QUASI-NEWTON

Dans la figure ci-dessous , les déplacements U_1 et U_2 sont calculés par deux itérations successives de la méthode de *NEWTON-RAPHSON* puis une sécante à la courbe est établie à travers les points 1 et 2 , qui constitue une étape du processus . L'étape suivante est établie long des points 2 et 3 . Avec plus d'itérations , amenant la convergence du système , la matrice sécante approche la matrice tangente exacte au point "A" . Les itérations dans des directions sécantes ne sont pas aussi efficace que les itérations dans les directions tangentes , comme dans la méthode *NEWTON-RAPHSON* , mais les itérations de la matrice sécante sont plus courtes et plus stable que les itérations de la matrice tangente .

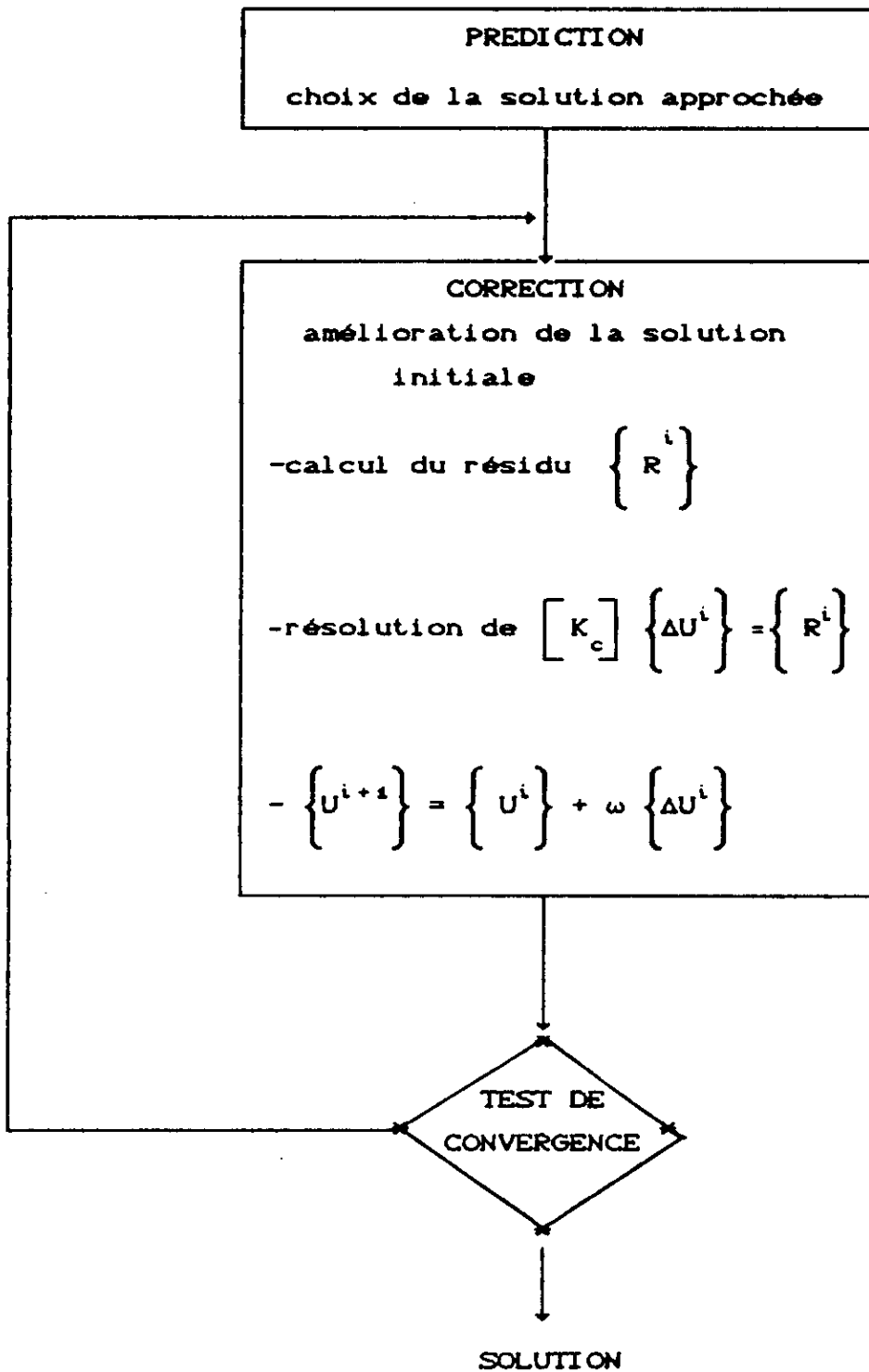


Remarque :

Une expression du concept de quasi-*NEWTON* est la méthode de l'inverse de *BROYDEN* . Si la matrice tangente K_t est symétrique et définie positive , on peut appliquer la méthode " *B.F.G.S* " qui est une méthode puissante du type quasi-*NEWTON* en relation avec la méthode de l'inverse de *BROYDEN* .

Une explication de cette méthode dépasse le cadre de notre thèse .

Toutes les méthodes précédentes peuvent se ramener à un seul algorithme qui est schématisé ainsi:



Quelquesoit la méthode utilisée, l'expression du résidu $\left\{ R \right\}$

reste la même car elle est caractéristique de l'équation à résoudre. Par contre l'expression de la matrice $\left[K_c \right]$ varie d'une

méthode à l'autre et influence la vitesse de convergence.

$$\left[K_c \right] = \left[K \right] \text{ pour la méthode de substitution}$$

$$\left[K_c \right] = \left[K_t \right] \text{ pour la méthode de Newton-Raphson modifié}$$

$$\left[K_c \right] = \left[K_t \right] \text{ pour la méthode de Newton-Raphson}$$

Les méthodes itératives sont généralement plus rapides et la procédure d'itération est facile à incorporer dans un programme linéaire, l'inconvénient majeur est que les déplacements ne sont déterminés que pour un seul incrément, et si le problème réside dans l'étude d'un chargement variable avec le temps ou si le chargement total est inconnu (recherche de la charge d'instabilité ou de rupture) ou encore si les lois constitutives dépendent du chemin parcouru: plasticité, viscoplasticité, fluage alors la méthode est inutilisable.

3 Méthodes incrémentales:

Le chargement est subdivisé en plusieurs incréments pas forcément égaux. Durant chaque incrément la relation $F = K U$ est supposé être linéaire avec une valeur constante de K déduite des résultats de l'incrément précédent. Des déplacements nodaux sont obtenus pour chaque incrément et sont ajoutés aux déplacements accumulés précédemment le procédé est répété jusqu'au chargement final. Il n'y a pas d'itérations dans l'incrément pour restaurer l'équilibre et la précision dépend de la taille de l'incrément.

La plus simple méthode incrémentale est la méthode D'EULER pour la résolution des équations différentielles du premier ordre . Pour expliquer la méthode D'EULER , on écrit l'équation :

$$P = K.U \quad , \quad \text{comme } P = f(U)$$

et on définit $K_t = dP/dU$ et on considère les incréments de charge " ΔP " .

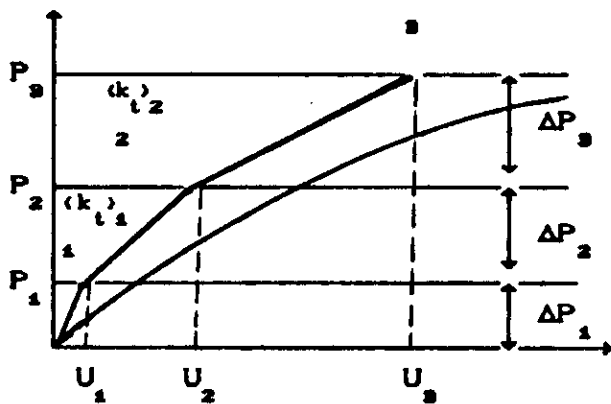
Commançant à partir de $P=0$ et $U=0$ nous calculons successivement :

$$U_1 = 0 + (K_t)_0^{-1} . \Delta P_1 \quad \text{où} \quad (K_t)_0 = K_t \quad \text{à} \quad U = 0$$

$$U_2 = U_1 + (K_t)_1^{-1} . \Delta P_2 \quad \text{où} \quad (K_t)_1 = K_t \quad \text{à} \quad U = U_1$$

$$U_3 = U_2 + (K_t)_2^{-1} . \Delta P_3 \quad \text{où} \quad (K_t)_2 = K_t \quad \text{à} \quad U = U_2 \quad \text{et en général :}$$

$$U_{i-1} = U_i + (K_t)_i^{-1} . \Delta P_{i+1}$$



Solution purement
incrémentale de
l'équation : $P=f(U)$

L'inconvénient de cette solution est apparent : l'approximation de la solution s'éloigne davantage de la solution exact à chaque étape. Une variante de cette méthode est la méthode médiane de RUNGE-KUTTA. On applique la moitié de l'incrément de charge, la matrice K est calculée à ce niveau et appliquée pour tout l'incrément.

L'avantage des méthodes incrémentales est la meilleure description du comportement force-déplacement. L'inconvénient majeure est la difficulté prédétermination des incréments nécessaires pour assurer une bonne précision.

4 Méthodes mixtes:

Les méthodes mixtes sont une combinaison des 2 méthodes précédemment citées. Plusieurs itérations sont réalisées à chaque incrément pour assurer l'équilibre. La méthode mixte combine les avantages des deux méthodes et sont les plus utilisées. Mais leur utilisation revient plus cher. Elle consiste en la résolution successive de:

$$\left[K(U_j) \right] \left\{ U_j \right\} = \lambda_j \left\{ F_0 \right\}$$

où $\lambda_j = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

La solution initiale utilisée pour calculer U_j est la solution U_{j-1} obtenue à l'étape précédente. Chaque étape constitue un problème non-linéaire qui se résout avec une ou plusieurs itérations de la méthode de Newton-Raphson ou de Newton-Raphson modifiée.

La méthode incrémentale utilisant plusieurs itérations de Newton-Raphson s'écrit pour un niveau donné de sollicitation λ_j .

$$\left\{ R(U_j^{i-1}) \right\} = \lambda_j \left\{ F_0 \right\} - \left[K(U_j^{i-1}) \right] \left\{ U_j^{i-1} \right\}$$

$$\left[K_t(U_j^{i-1}) \right] \left\{ \Delta U_j^i \right\} = \left\{ R(U_j^{i-1}) \right\} + (\lambda_j - \lambda_{j-1}) \left\{ F_0 \right\}$$

$$\left\{ U_j^i \right\} = \left\{ U_j^{i-1} \right\} + \left\{ \Delta U_j^i \right\} \quad i=2,3$$

Convergence:

critère de convergence:

Ces critères peuvent être formulés directement en termes de forces

résiduelles ou indirectement à travers les incréments de déplacement ou de variations de contraintes. Il est difficile et très cher de vérifier l'élimination de toutes les composantes des déplacements ou contraintes ou forces résiduelles pour chaque degré de liberté. Il est nécessaire d'utiliser une forme d'estimation globale en utilisant des normes telles que:

1. Convergence en force:

$$\frac{|\psi|}{|F|} \leq C_f$$

$|\psi|$ est la norme des forces résiduelles

$$|\psi| = (\psi_i^T \times \psi_i)^{0.5}$$

$|F|$ est la norme des forces résiduelles

$$|F| = (F_i^T \times F_i)^{0.5}$$

C_f : tolérance exigée

2. Convergence en déplacement:

2-a)

$$\frac{|\Delta U|}{|U|} \leq C_p$$

$|\Delta U|$ est la norme des déplacements produits, durant l'interaction

$$|\Delta U| = (\Delta U_i^T \times \Delta U_i)^{0.5}$$

$| U |$ est la norme des déplacements
totaux depuis début du chargement

$$| U | = (U_i^T \times U_i)^{0.5}$$

C_p : tolérance exigée

2. b)

$$\frac{| \Delta U |}{| U_\bullet |} \leq C_p$$

$| \Delta U |$ est la norme des déplacements produits, durant
l'interaction

$$| \Delta U | = (\Delta U_i^T \times \Delta U_i)^{0.5}$$

$| U_\bullet |$ est la norme des déplacements totaux durant l'in-
-crément étudié

$$| U_\bullet | = (U_i^T \times U_i)^{0.5}$$

C_p : tolérance

3. Convergence en énergie:

Le critère de convergence s'écrit

$$\frac{|\Delta E|}{|E|} \leq C_E$$

$|\Delta E|$ est la norme de l'énergie résiduelle

$$|\Delta E| = |\Delta \psi^T| \times |\Delta U|$$

$|E|$ est l'énergie totale durant l'incrément

$$|E| = |\psi^T| \times |U|$$

C_E : tolérance exigée

5 accélération de la convergence:

Différentes techniques d'accélération de la convergence viennent s'ajouter aux processus numérique précédemment décrits. On peut utiliser un processus de "surelaxation": la correction ΔU_i de U_{i-1} peut être affectée d'un coefficient appelé "facteur de surelaxation" noté ω tel que:

$$\left\{ U_i \right\} = \left\{ U_{i-1} \right\} + \omega \left\{ \Delta U_i \right\}$$

Il permet souvent d'améliorer la vitesse de convergence. Sa valeur optimale dépend du problème ; elle est déterminé par expérimentation numérique.

6 Termination :

L'efficacité d'une méthode de résolution de problèmes non-linéaires peut être mesurée par son " ordre de termination " . Soit e_i l'erreur après la i^{me} itération . Si e_i est suffisamment petit il est possible que e_{i+1} soit majoré .

Les possibilités pratiques incluent les inégalités suivantes, illustrées ici pour un degré de liberté :

$$\text{linéaire} \quad : \quad |e_{i+1}| \leq c_1 \cdot |e_i|$$

$$\text{superlinéaire} \quad : \quad |e_{i+1}| \leq c_2 \cdot |e_i| |e_{i-1}| = c_3 \cdot |e_i|^{1.5}$$

$$\text{quadratic} \quad : \quad |e_{i+1}| \leq c_4 \cdot e_i^2$$

La méthode de N-R exhibe une quadratique termination, alors que la méthode de l'inverse de BROYDEN exhibe une superlinéaire termination

7 Conclusion:

Le grand nombre de possibilités qui s'offrent pour obtenir numériquement la solution d'un système d'équations non-linéaires discrétisées pose le problème de savoir laquelle est la meilleure. On ne peut donner de réponse de façon systématique; en effet un procédé qui se révèle être le plus économique dans un certain contexte peut être divergent dans un autre cas. Il est cependant recommandé d'utiliser la méthode mixte: en effet la convergence peut toujours s'obtenir en utilisant des incréments suffisamment petits. De plus on remarquera que, dans beaucoup de cas, il n'est pas possible d'obtenir la forme explicite de l'équation $K U = F$ pour certains problèmes (plasticité): seule une matrice incrémentale est alors définie de façon satisfaisante.

Dans l'algorithme ci-dessous commun aux différentes méthodes il faut choisir :

- le nombre et la grandeur de chaque accroissement (ou pas) de sollicitation $\Delta \lambda$.
- le nombre maximum d'itérations par pas de sollicitations, ainsi que le critère de convergence.
- le type de matrice utilisée à chaque itération pour calculer la correction ΔU ; selon la valeur METH on peut utiliser soit

$$\left[K_i \right], \text{ soit } \left[K(U^{i-1}) \right], \text{ soit } \left[K_i(U^{i-1}) \right]$$

CHAPITRE VI

PROBLEME A LOIES DE COMPORTEMENT NON-LINEAIRE

1- Introduction :

Il existe beaucoup de problèmes pratiques pour lesquelles il n'est pas possible de conserver une linéarité pour les relations contraintes-déformations. Dans ce contexte, nous avons tout un éventail de problèmes de mécanique des solides dans lesquels des phénomènes tels que la plasticité, le fluage ou d'autres relations constitutives complexes remplacent les hypothèses simples de l'élasticité linéaire.

On procède alors par approximations successives de telle manière à ce que les constantes des matériaux soient ajustées de façon à ce qu'elles satisfassent les nouvelles lois constitutives. L'une des techniques les plus utilisées est de calculer les contraintes à partir du champ de déformation et des lois constitutives. Ces contraintes seront statiquement équivalentes à un système de forces nodales internes qui doivent équilibrer les forces nodales externes. Généralement ces deux systèmes de forces ne sont pas égaux et la différence entre eux est appelée "force résiduelle" qui doivent être annulées pour assurer l'équilibre.

La relation relation contrainte-déformation d'un problème linéaire peut s'écrire:

$$\sigma = D (\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0 \quad (1)$$

D est la matrice élastique

σ_0 est la contrainte initiale

ε_0 est la déformation initiale

Un problème de non-linéarité matérielle est résolu par linéarisation successive grâce à l'équation (1), en introduisant des corrections successives de D ou σ_0 ou ε_0 . Selon le type de correction utilisée on aura trois méthodes différentes :

Dans la méthode de rigidité variable, une analyse linéaire est réalisée avec une matrice de rigidité actualisée périodiquement. En général la méthode de rigidité variable nécessite moins d'itérations que celle de la rigidité constante mais la solution revient plus souvent chère à cause des calculs de rigidité répétés.

Cependant d'une manière générale, quel que soit la méthode de rigidité utilisée, les étapes d'une analyse non-linéaire mixte pour des problèmes à lois de comportement non-linéaire, sont les mêmes. Celles-ci sont au nombre de 8.

1. Appliquer le $n^{\text{ième}}$ incrément de force ΔF_n et calculer la 1^{ère} estimation de l'incrément ($n=1$) de déplacement par résolution du système $K \cdot U = F$ avec "K" matrice initiale, sécante ou tangente basée sur les conditions initiales de l'incrément.

2. Dédire l'incrément de déformation $\Delta \epsilon_n$ à partir de l'incrément des déplacements.

3. Calculer les déplacements et déformations totales:

$$\begin{cases} U_n = U_{n-1} + \Delta U_n \\ \epsilon_n = \epsilon_{n-1} + \Delta \epsilon_n \end{cases}$$

4. Calculer les contraintes totales σ_n en utilisant la loi constitutive $f(\sigma, \epsilon) = 0$ ou $f(\Delta \sigma, \Delta \epsilon) = 0$ et :

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} + \Delta \sigma$$

5. Déterminer les forces nodales internes équivalentes dues à σ_n et déduire les forces résiduelles ψ .

$$\psi = \int B^t \Delta \sigma_0 \, dv - F_n$$

F_n : Forces extérieures totales

$$F_n = F_{n-1} + \Delta F_n$$

- correction de $\sigma_0 \rightarrow$ méthode des contraintes initiales
- correction de $\varepsilon_0 \rightarrow$ méthode des déformations initiales
- correction de D \rightarrow méthode de rigidité variable

Les trois méthodes sont plus ou moins équivalentes et aboutissent à un système de forces résiduelles qu'on doit éliminer par redistribution répétées. Dans les deux premières méthodes, la rigidité est constante, dans la troisième elle est actualisée périodiquement.

2. Méthode des contraintes initiales:

On réalise une analyse élastique et l'écart entre la contrainte calculée élastiquement et la contrainte réelle déduite de la loi constitutive est traité comme une contrainte initiale qui est transférée en charges nodales internes (résiduelles) qu'on doit éliminer par des redistributions.

$$\Delta\sigma = D \Delta\varepsilon + \Delta\sigma_0 \text{ d'où } \Delta\sigma_0 = \Delta\sigma - D \Delta\varepsilon = f(\Delta\varepsilon) - D \Delta\varepsilon \quad (3)$$

Les forces résiduelles qu'on doit éliminer

$$\psi = \int_V B^t \Delta\sigma_0 \, dv \quad (4)$$

3. Méthode des déformations initiales:

Le principe est le même. On réalise une analyse élastique, on a:

$$\begin{aligned} \sigma &= D \varepsilon \quad \text{soit} \quad \Delta\sigma = D (\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_0) \\ \Delta\varepsilon_0 &= \Delta\varepsilon - D^{-1} \Delta\sigma \\ \Delta\varepsilon_0 &= f(\Delta\sigma) - D^{-1} \Delta\sigma \end{aligned} \quad (5)$$

De $\Delta\varepsilon_0$ on tire $\Delta\sigma_0$ et les forces résiduelles à éliminer s'écrivent de même:

$$\psi = \int B^t \Delta\sigma_0 \, dv$$

Cependant cette méthode peut poser des problèmes car la fonction $\Delta \epsilon_0 = f(\Delta \sigma)$ est souvent non univoque alors que $\Delta \sigma_0 = f(\Delta \epsilon)$ est dans la plupart des cas univoque. Ainsi on préférera la méthode des contraintes initiales à la méthode des déformations initiales.

4. Méthode de rigidité variable :

Dans la méthode de rigidité variable une analyse linéaire est réalisé avec une matrice D actualisée périodiquement. Cela peut se faire par des techniques de module sécant ou tangent:

4.1 Rigidité sécante:

Le problème est linéarisé par rapport à la configuration initiale. On change le module de YOUNG dans la matrice de rigidité D à chaque itération. Le module de YOUNG E_i à l'itération i est calculé à partir des contraintes σ_i et des déformations ϵ_i à l'itération i par la relation:

$$E_i = \sigma_i / \epsilon_i \quad (5)$$

4.2 Rigidité tangente:

Le problème est linéarisé par rapport à la configuration actuelle. Le module de YOUNG E_i à l'itération i s'écrit:

$$E_i = (\sigma_i - \sigma_{i-1}) / (\epsilon_i - \epsilon_{i-1}) \quad (6)$$

5. conclusion:

Dans les trois méthodes, il s'agit d'éliminer les forces résiduelles soit avec rigidité constante (méthode des déformations initiales et méthode des contraintes initiales), soit avec rigidité variable.

Dans la méthode de rigidité constante la matrice de rigidité initiale est utilisée à chaque incrément et itération. L'avantage est que la matrice est calculée qu'une seule fois. L'inconvénient est qu'elle est plus lente et nécessite un nombre élevé d'itérations. Des algorithmes d'accélération peuvent être utilisés mais pas toujours avec succès (notamment après fissuration ou plastification)

6-. Vérifier les critères de convergence (en force ou déplacement ou en énergie) , s'ils sont vérifiés, répéter à partir de l'étape (1) .

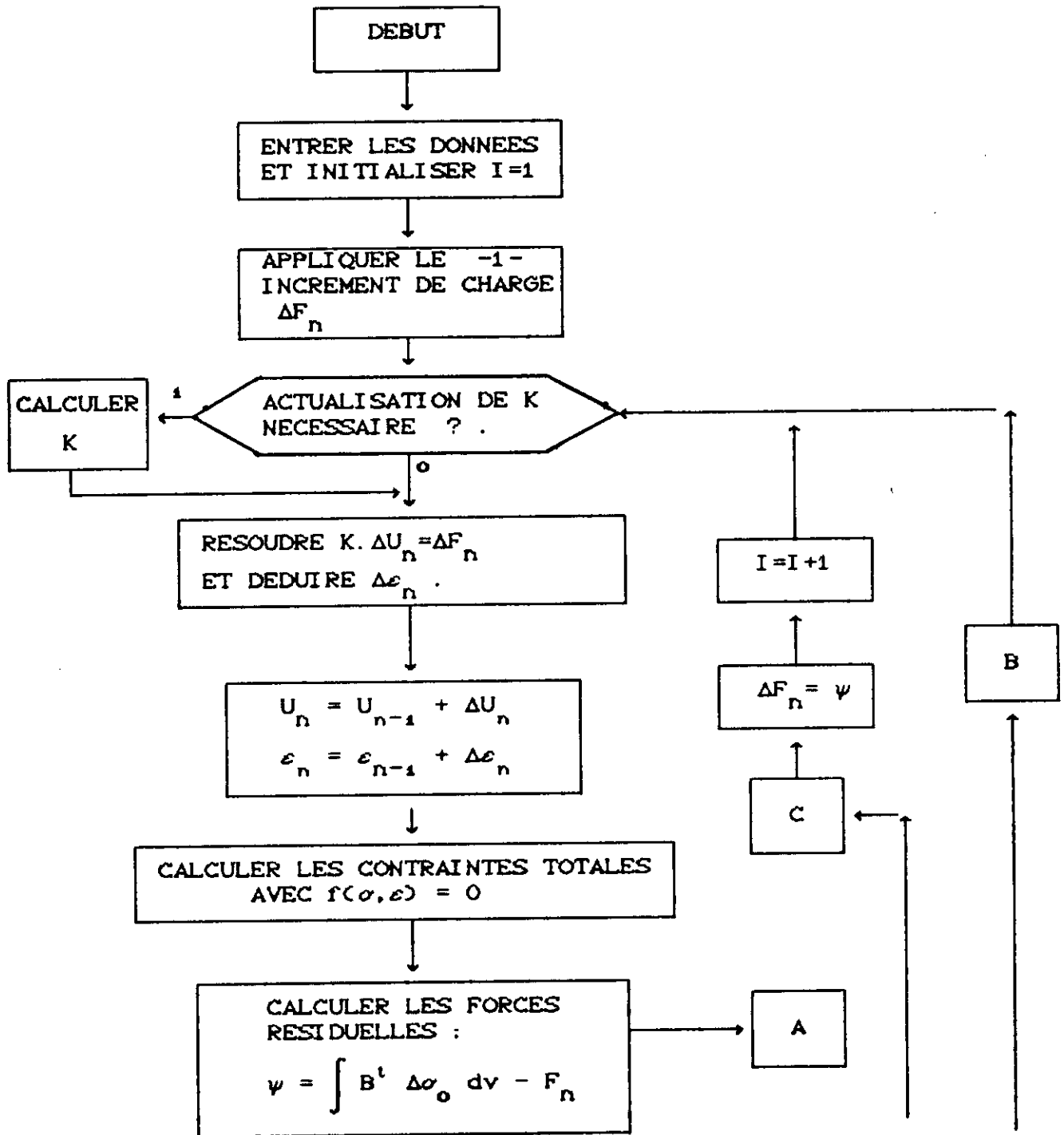
7. Si ces critères de convergence ne sont pas vérifiés , appliquer les forces résiduelles et calculer le nouvel incrément correctif de déplacement ΔU_{ni} en résolvant :

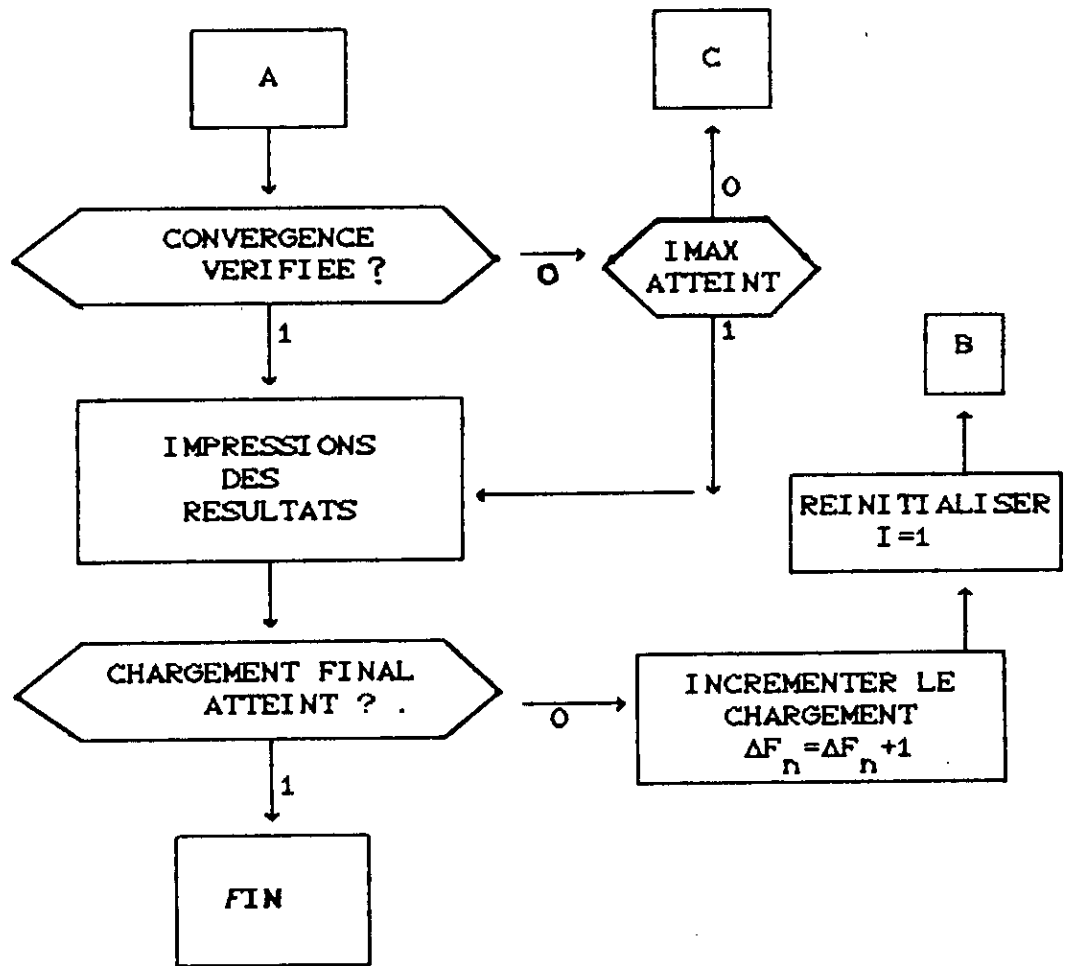
$$K \cdot U_i = \Delta U_i \quad (\text{à l'itération } i \text{ de l'incrément } n)$$

K : Matrice de rigidité initiale sécante ou tangente , selon les conditions initiales de l'itération .

8. Répéter à partir de l'étape (2) jusqu'à convergence .

METHODE NON-LINEAIRE MIXTE (NON-LINEARITE MATERIEL)
[ORGANIGRAMME]





CHAPITRE VII

NON LINEARITE GEOMETRIQUE

1 - Introduction

Nous avons présenté dans les chapitres précédents les différentes méthodes d'analyse non-linéaires et leur application aux problèmes à lois de comportement non-linéaire. Dans ce chapitre , nous utiliserons une voie analogue pour traiter le comportement géométrique non-linéaire des structures .

Dans tous les problèmes abordés jusqu'ici , déplacements et déformations de la structure ont été supposés implicitement petits. D'un point de vue pratique , ceci veut dire que la géométrie des éléments reste quasiment inchangée lorsque ceux-ci sont soumis à des sollicitations . On peut par conséquent , utiliser au premier ordre les approximations de déformations linéaires infinitésimales .

En pratique , de telles hypothèses sont fréquemment mises en défaut , même lorsque les déformations restent petites et que la limite élastique des matériaux ordinaires n'est pas dépassée . Si l'on veut connaître avec précision les déplacements pour certaines structures , il est nécessaire de tenir compte des non-linéarités géométriques.

Ainsi , par exemple , dans l'étude des structures élancées , les déplacements obtenus par un calcul linéaire peuvent diminuer considérablement . Réciproquement , on peut se trouver dans le cas où , au delà d'un certain chargement , les déplacements augmentent beaucoup plus rapidement que ne le prévoit la solution linéaire . En fait , on peut aboutir à un état dans lequel la possibilité qu'a le matériau de supporter les charges extérieurs décroît continuellement

avec la déformation . Ce problème classique est celui de la stabilité des structures , et bien évidemment a beaucoup d'implications pratiques .

Il est clair que la considération de tels effets a une importance considérable dans le domaine aéro-spacial , dans la conception de tours de refroidissement , de caissons de ponts ou d'autres structures relativement élancées .

Dans beaucoup de cas , on peut constater de très grands déplacements sans pour autant qu'apparaissent de grandes déformations. C'est ce type de non-linéarité géométrique que nous étudierons.

Un aspect complexe du comportement géométrique non-linéaire n'est pas du tout abordé dans notre étude : c'est celui des grandes déformations ou les hypothèses de " *BERNOULLI* " ne seront plus valables .

Il est souvent possible de combiner les non-linéarités géométriques avec les non-linéarités matérielles du type de celles que nous venons d'étudier dans les chapitres précédents , comme par exemple la plasticité ou la fissuration en petites déformations , etc .

En théorie ceci n'introduit pas de difficultés supplémentaires , donc les méthodes de la présente étude peuvent dans ce cas être facilement généralisées .

Pour traiter de tels problèmes , il est possible d'utiliser n'importe quelle relation non-linéaire contraintes-déformations , car le processus global de résolution se ramène une fois de plus , à la résolution d'un système d'équations non-linéaires. Bien évidemment , la recherche de la solution se fait d'une manière itérative , et les méthodes générales qui ont été décrites dans les chapitres précédents peuvent s'appliquer .

Une fois de plus l'algorithme conduit à résoudre un système d'équations linéaires à chaque itération .

2- Changement de géométrie:

En règle générale , pour les structures usuelles , hormis des phénomènes de flambement ou d'instabilités analogue , auxquels on doit prendre garde tant en élasticité qu'en élastoplasticité , on peut admettre que les changements de géométrie sont négligeables :

* En phase élastique .

* En phase élasto-plastique , tout au long de celle-ci lorsque la structure comporte un nombre assez faible d'éléments , et que la charge limite peut être atteinte .

Par contre , lorsque l'on a affaire à une structure complexe , ou à un milieu continu , et que l'étude dans l'hypothèse des changements de géométrie négligeables montre que la charge limite est atteinte après une déformation relativement importante de la structure ou bien apparaît comme une valeur asymptotique, il convient d'abandonner l'hypothèse des changements de géométrie négligeable .

3 - Etablissement de la matrice de rigidité d'un élément poutre en tenant compte de la non-linéarité

Soit l'élément poutre de la figure (1) caractérisé par :

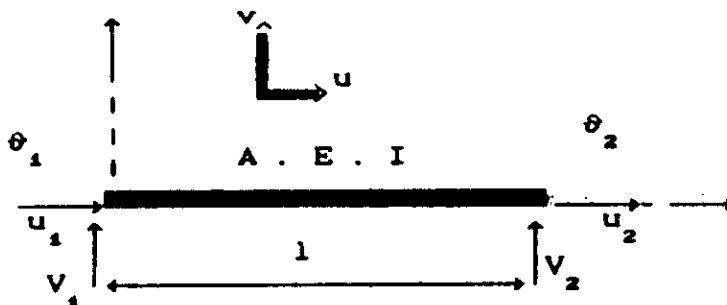


Figure 1:

- * Sa longueur " l "
- * Module de young " E "

* Section efficace " A "

* Les six composantes de déplacements

Soit " ϵ_0 " la déformation obtenue au début de chaque incrément , et " ϵ_a " la déformation finale additionnelle qui se développe durant l'approche de la solution .

Durant cette approche , l'énergie de déformation s'écrit comme suite :

$$P = \int_1 \int_A \left[\int_{\epsilon_0}^{\epsilon_0 + \epsilon_a} \sigma. d\epsilon \right] dA dx \quad (1)$$

$$P = \int_1 \int_A \left[E. \epsilon. d \right] dA dx = E. \int_1 \int_A \left[\frac{\epsilon^2}{2} \right]_{\epsilon_0}^{\epsilon_0 + \epsilon_a} dA dx$$

$$P = E. \int_1 \int_A \left[\frac{(\epsilon_0 + \epsilon_a)^2 - \epsilon_0^2}{2} \right] dA dx$$

$$P = E. \epsilon_0 \int_1 \int_A \epsilon_a dA dx + \frac{E}{2} \int_1 \int_A \epsilon_a^2 dA dx \quad (2)$$

La relation déformation-déplacement pour un élément poutre est :

$$\epsilon_a = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - y. \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3)$$

Substituant l'équation (3) dans (2) et intégrant par rapport à la surface , nous aurons :

$$P = N \int_1 \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx$$

$$+ \frac{E}{2} \int_1 \left[A \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + I \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 + A \frac{du}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{A}{4} \left(\frac{dv}{dx} \right)^4 \right] dx$$

Notant que le moment statique par rapport à un axe qui passe par le centre géométrique d'une section est nul .

Soit : $N = \epsilon_0 \cdot EA$ | est la force axiale qui existe dans l'élément
 au début d'un incrément de charge donné .

* Fonction de déplacement :

Pour un élément de poutre , la fonction de déplacement de n'importe quel point est donnée par :

$$\left| \begin{array}{l} u_i = a_0 + a_1 \cdot x = u \\ v_j = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3 = v \end{array} \right. \quad (4)$$

* Conditions aux limites :

Les conditions aux limites donnent :

$$\left| \begin{array}{l} u = (1-x/l)u_1 + (x/l)u_2 \\ v = (1 - 3 \cdot x^2/l^2 + 2 \cdot x^3/l^3)v_1 + (3 \cdot x^2/2 - 2 \cdot x^3/l^3)v_2 \\ \quad + (-2 \cdot x^2/l + x + x^3/l^2)\theta_1 + (-x^2/l + x^3/l^2)\theta_2 \end{array} \right. \quad (5)$$

3.1 - Matrice de rigidité sécante

La matrice de rigidité sécante manie des termes en

déplacement total et des termes en force totale, par conséquent la valeur initiale de la déformation " ϵ_0 " sera égale à zéro. La relation d'énergie de l'équation (2) sera remplacée par :

$$P = \frac{E}{2} \int_1 \int_A \epsilon_a^2 dA dx \quad (6)$$

Ici, ϵ_a est une déformation totale.

L'énergie de déformation totale se réduit à :

$$P = \frac{E}{2} \int_1 \left[A. \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + I. \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 + A. \frac{du}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{A}{4} \left(\frac{dv}{dx} \right)^4 \right] dx \quad (7)$$

La force axiale " $N = \epsilon_0 \cdot EA$ " existera, mais n'aura pas d'influence lors de l'utilisation d'une matrice de rigidité sécante.

Soit $P = P_1 + P_2$ telque :

$$P_1 = \frac{E}{2} \int_1 \left[A. \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + I. \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \right] dx \implies \text{Énergie de déformation linéaire.}$$

$$P_2 = \frac{E}{2} \int_1 \left[A. \frac{du}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{A}{4} \left(\frac{dv}{dx} \right)^4 \right] dx \implies \text{Composantes non linéaires de l'énergie de déformation totale.}$$

Il est maintenant possible de substituer l'équation (5) dans (7)

est appliquant le principe de stationarité de l'énergie potentielle totale pour l'expression de : $[K_s]$ (MR sécante).

La matrice de rigidité $[K_s]$ sera constituée de sous-matrices tellesque:

$$[K_s] = [K_0] + \frac{EA}{2} [K_1] + \frac{EA}{3} [K_2]$$

Avec : $[K_0]$: Matrice de rigidité d'un élément poutre en flexion composée .

$\frac{EA}{2} [K_1]$: Représente la matrice dont les termes sont en fonction linéaire des déplacements généralisés.

$\frac{EA}{3} [K_2]$: Représente la matrice dont les termes sont en fonction quadratiques des déplacements généralisés.

Determination des termes : $(K_1)_{ij}$ et $(K_2)_{ij}$.

* calculer

$$\begin{array}{|l} du/dx \\ dv/dx \\ d^2v/dx^2 \end{array}$$

et donc :

$$\begin{array}{|l} \frac{du}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \\ \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \\ \left(\frac{dv}{dx} \right)^4 \end{array} \quad (8)$$

Remplaçant l'équation (8) dans (7) et intégrant par rapport à la longueur de l'élément . L'expression finale de l'énergie potentielle totale sera uniquement fonction des six composantes de déplacements , telque :

$$P = f(u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2)$$

Appliquant maintenant le 1^{er} théorème de CASTIGLIANO , pour trouver les termes correspondant à chaque déplacement .

$$F_i = \frac{\partial P}{\partial u_i}$$

Finalement les termes non nuls de $[K_1]$, $[K_2]$ sont :

$$K_1(1,2) = K_1(4,5) = -K_1(2,4) = -K_1(1,5) = \frac{6}{5.1^2} (v_2 - v_1) - \frac{1}{10.1} (\theta_1 + \theta_2)$$

$$K_1(1,3) = K_1(3,4) = \frac{1}{10.1} (v_2 - v_1) + \frac{1}{30} (\theta_2 - 4.\theta_1)$$

$$K_1(1,6) = -K_1(4,6) = \frac{1}{10.1} (v_2 - v_1) + \frac{1}{30} (\theta_1 - 4.\theta_2)$$

$$K_1(2,2) = K_1(5,5) = -K_1(2,5) = \frac{6}{5.1^2} (u_2 - u_1)$$

$$K_1(3,3) = K_1(6,6) = \frac{2}{15} (u_2 - u_1)$$

$$K_1(3,5) = K_1(5,6) = -K_1(2,3) = -K_1(2,6) = \frac{1}{10.1} (u_2 - u_1)$$

$$K_1(3,6) = -\frac{1}{30} (u_2 - u_1)$$

$$\begin{aligned}
 K_z^{(2,2)} &= K_z^{(5,5)} = -K_z^{(2,5)} = \frac{1}{1} \left[\frac{140}{z} + \frac{1}{18} \frac{1}{(v^2 - v^1)^2} \right] \left[18 \cdot \frac{\theta^1}{z} + 18 \cdot \frac{\theta^2}{z} + \frac{1}{432} \frac{1}{(v^2 - v^1)^2} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{108} \frac{1}{z} \frac{1}{(v^2 - v^1)^2} (\theta^1 + \theta^2) \\
 K_z^{(2,3)} &= -K_z^{(3,5)} = \frac{1}{1} \left[-3 \cdot (\theta^1 - \theta^2) + 6 \cdot \theta^1 \theta^2 + \frac{1}{108} \frac{1}{(v^2 - v^1)^2} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{72} \frac{1}{\theta^1 (v^2 - v^1)} \\
 K_z^{(2,4)} &= K_z^{(5,4)} = \frac{1}{1} \left[3 \cdot (\theta^1 - \theta^2) - \theta^2 + \frac{1}{108} \frac{1}{z} \frac{1}{(v^2 - v^1)^2} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{72} \frac{1}{\theta^1 (v^2 - v^1)} \\
 K_z^{(3,3)} &= -K_z^{(3,5)} = \frac{1}{1} \left[-3 \cdot (\theta^1 - \theta^2) + 6 \cdot \theta^1 \theta^2 + \frac{1}{108} \frac{1}{z} \frac{1}{(v^2 - v^1)^2} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{72} \frac{1}{\theta^1 (v^2 - v^1)} \\
 K_z^{(3,4)} &= K_z^{(5,4)} = \frac{1}{1} \left[12 \cdot 1 \cdot \theta^1 + 1 \cdot \theta^2 - 3 \cdot 1 \cdot \theta^1 \theta^2 + \frac{1}{18} \frac{1}{(v^2 - v^1)^2} \right] \\
 &\quad + 3 \cdot (v^2 - v^1) (\theta^1 - \theta^2) \\
 K_z^{(3,5)} &= \frac{1}{1} \left[-31 \theta^1 + \theta^2 + 41 \cdot \theta^1 \theta^2 - 6 (v^2 - v^1) (\theta^1 + \theta^2) \right] \\
 &\quad + 3 \cdot (v^2 - v^1) (\theta^1 - \theta^2) \\
 K_z^{(4,4)} &= \frac{1}{1} \left[12 \cdot 1 \cdot \theta^1 + 1 \cdot \theta^2 - 3 \cdot 1 \cdot \theta^1 \theta^2 + \frac{1}{18} \frac{1}{(v^2 - v^1)^2} \right] \\
 &\quad + 3 \cdot (v^2 - v^1) (\theta^1 - \theta^2) \\
 K_z^{(4,5)} &= \frac{1}{1} \left[12 \cdot 1 \cdot \theta^1 + 1 \cdot \theta^2 - 3 \cdot 1 \cdot \theta^1 \theta^2 + \frac{1}{18} \frac{1}{(v^2 - v^1)^2} \right] \\
 &\quad + 3 \cdot (v^2 - v^1) (\theta^1 - \theta^2)
 \end{aligned}$$

Ainsi que :

3.2. — Algorithme de la méthode de substitution

(Matrice de rigidité sécante)

- 1- Former la matrice de rigidité classique $[k_o]$ élémentaire .
- 2- Utiliser la géométrie initiale non déformée pour former la matrice de rotation $[T]$.
- 3- Poser que : $[k_s] = [k_o]$.
- 4- Ecrire les matrices élémentaires $[k_s]$ dans le repère global pour et assembler pour former la matrice de rigidité globale $[K_s]$
- 5- Spécifier le chargement $[F]$.
- 6- Initialiser $i=0$
- 7- Incrémenter i : $i=i+1$
- 8- Résoudre le système $[K_s]_{i=1} [U]_i = [F]$.
- 9- Utiliser $[U]_i$, pour générer les sous-matrices $[k_1]$ et $[k_2]$
- 10- Former les matrices de rigidités élémentaires on utilisant l'équation $[k_s] = [k_o] + [k_1] + [k_2]$
- 11- Transformer les matrices de rigidité élémentaires du repère local au repère global et assembler pour former la matrice de rigidité globale $[K_s]_i$
- 12- Résoudre le système $[F]_i = [K_s]_i [U]_i$
- 13- Répéter les étapes 7 à 12 jusqu'à convergence .
- 14- Retourner à l'étape 5 pour le prochain chargement

3.3 - Etablissement de la matrice de rigidité dans le cas d'une poutre multicouche

L'expression générale de l'énergie de déformation s'écrit:

$$P = \frac{1}{2} \int_1 \int_A E. \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - y. \frac{d^2v}{dx^2} \right] A dx$$

$$P = \frac{1}{2} \int_1 \int_A E. \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{du}{dx} \cdot \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - 2. y. \frac{du}{dx} \frac{v}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - y. \frac{d^2v}{dx^2} \cdot \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + y^2 \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \right] dA dx \quad (9)$$

Soit : $p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$

Avec : p_1 et p_2 sont connus

$$p_3 = \frac{1}{2} \int_1 \int_A E. \left[-2. y. \frac{du}{dx} \cdot \frac{d^2v}{dx^2} \right] dA$$

$$p_4 = \frac{1}{2} \int_1 \int_A E. \left[- y. \frac{d^2v}{dx^2} \cdot \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]$$

Contrairement, au premier cas, les valeurs p_3 et p_4 ne sont plus nulles. p_3 et p_4 sont des multiples du moment statique, qui n'est pas nul, car l'axe neutre ne passe plus par le centre géométrique de la section.

$$EA = \int^A E_1 \cdot A_1 \cdot dA = \sum E_1 \cdot A_1$$

$$EI = \int^A E_1 \cdot Y^2 \cdot dA = \sum E_1 \cdot A_1 \cdot Y_1^2$$

$$EM = \int^A E_1 \cdot Y \cdot dA = \sum E_1 \cdot A_1 \cdot Y_1$$

Posons que :

Les fonctions de déplacements et les conditions aux limites des équations (4) et (5) restent inchangées .

Substituant l'équation (4) dans (8) , et appliquant le principe de stationarité de l'énergie potentielle totale , et intégrant P sur la longueur de l'élément .

* calculer

$\frac{du}{dx} \quad \frac{dv}{dx} \quad \frac{d^2v}{dx^2}$	<p>et donc :</p>
$\frac{du}{dx} \quad \frac{dv}{dx} \quad \frac{d^2v}{dx^2}$	

Finalement :

$$P_3 = -EM(u_2 - u_1) - \frac{1}{2}(v_2 - v_1) \left[-\frac{1}{6}(v_2 - v_1) + \frac{1}{1} \theta_1 + \frac{1}{1} \theta_2 \right] \quad (10)$$

Appliquons le 1^{er} théorème de CASTIGLIANO

$$F_1 = \frac{\partial P_s}{\partial u_1}$$

$$* \frac{\partial P_s}{\partial u_1} = N_1 \implies N_1 = EM \left(0 \cdot u_1 + \frac{6}{l^2} \cdot v_1 - \frac{6}{l^2} \cdot v_2 - \frac{1}{l} \cdot \theta_1 + \frac{1}{l} \cdot \theta_2 \right)$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} K_s(1,1) = K_s(1,4) = 0 \\ K_s(1,6) = -K_s(1,3) = \frac{EM}{l} \\ K_s(1,2) = -K_s(1,5) = \frac{6 \cdot EM}{l^2} \end{array} \right.$$

$$* \frac{\partial P_s}{\partial u_2} = N_2 \implies N_2 = -EM \left(0 \cdot u_1 + \frac{6}{l^2} \cdot v_1 - \frac{6}{l^2} \cdot v_2 - \frac{1}{l} \cdot \theta_1 + \frac{1}{l} \cdot \theta_2 \right)$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} K_s(4,1) = K_s(4,4) = 0 \\ K_s(4,3) = -K_s(4,6) = \frac{EM}{l} \\ K_s(4,2) = -K_s(4,5) = -\frac{6 \cdot EM}{l^2} \end{array} \right.$$

$$* \frac{\partial P_s}{\partial v_1} = T_1 \implies T_1 = -\frac{6 \cdot EM}{l^2} (u_2 - u_1)$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} K_s(2,2) = K_s(2,3) = K_s(2,5) = K_s(2,6) = 0 \\ K_s(2,1) = -K_s(2,4) = \frac{6 \cdot EM}{l^2} \end{array} \right.$$

$$* \frac{\partial P_g}{\partial v_2} = T_2 \implies T_2 = \frac{6 \cdot EM}{l^2} (u_2 - u_1)$$

$$\implies \begin{cases} K_g(2,2) = K_g(2,3) = K_g(2,5) = K_g(2,6) = 0 \\ -K_g(2,1) = K_g(2,4) = \frac{6 \cdot EM}{l^2} \end{cases}$$

$$* \frac{\partial P_g}{\partial \theta_1} = M_1 \implies M_1 = \frac{EM}{l} (u_2 - u_1)$$

$$\implies \begin{cases} K_g(3,5) = K_g(3,2) = K_g(3,3) = K_g(3,6) = 0 \\ -K_g(3,1) = K_g(3,4) = \frac{EM}{l} \end{cases}$$

$$* \frac{\partial P_g}{\partial \theta_2} = M_2 \implies M_2 = -\frac{EM}{l} (u_2 - u_1)$$

$$\implies \begin{cases} K_g(6,5) = K_g(6,2) = K_g(6,3) = K_g(6,6) = 0 \\ -K_g(6,1) = K_g(6,4) = -\frac{EM}{l} \end{cases}$$

Finalemment :

$$\left[K_g \right] = \frac{EM}{l} \begin{bmatrix} 0 & 6/l & -1 & 0 & -6/l & 1 \\ & 0 & 0 & -6/l & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 6/l & -1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Symétrique

De la même manière , on détermine les termes de la sous-matrice $[K_4]$

III.4 - CONCLUSION , DIFFICULTE , ORIENTATION

La difficulté essentielle concernant cette question des changements de géométries est qu'en fait seul le calcul exact effectué en tenant compte des changements de géométrie permettrait de décider rigoureusement dans chaque cas s'il ya lieu ou non de tenir compte des dits changements de géométries .

Il va de soit que ceci ne présenterait alors aucun intérêt matériel (économie) . C'est pourquoi on procède de façon assez heuristique en effectuant d'abord le calcul simplifié sans tenir compte des changements de géométrie , et en tentant de décider d'après ses résultats s'il ya lieu de passer au calcul exact en suivant la géométrie déformée ou non .

CHAPITRE VIII

PRESENTATION DE NOTRE ANALYSE NON-LINEAIRE DU BETON ARME CAS DE LA FLEXION DES POUTRES ET PORTIQUES

1 Hypothèses de base:

La formulation mathématique de la méthode d'analyse proposée est basée sur les suppositions suivantes:

-Les sections efficaces restent planes après déformation. Ce qui implique une distribution linéaire des déformations. Cette hypothèse ou principe de BERNOUILLI, implique que la déformation longitudinale dans le béton et l'acier à divers points à travers la section est proportionnelle à la distance à partir de l'axe neutre. Un grand nombre de tests sur des membres en béton armé ont montré que cette supposition est presque correcte à tous les niveaux de chargement jusqu'à la rupture par flexion, prouvant qu'une bonne adhérence existe entre le béton et l'acier. Ceci est assurément exact dans la zone comprimée du béton; cependant dans la zone de traction, les fissures impliquent qu'un glissement est survenu entre l'acier d'armature et le béton l'entourant, ce qui signifie donc que cette supposition n'est pas complètement applicable au béton dans le voisinage d'une fissure. Cependant des essais réalisés par HOGNESTAD ont montré que les profils de la déformation mesurée sont raisonnablement linéaires. L'hypothèse de la conservation de la planéité des sections ne tient pas dans les régions d'effort tranchant élevé.

-La section efficace de chaque élément est symétrique par rapport à un axe coïncidant avec le plan de charge.

-Les propriétés mécaniques du béton et de l'acier d'armature sont bien définies. Ce qui implique que l'on utilisera des lois de comportement aussi précises que possible.

2 Modèles de comportement:

Dans les modèles que nous proposerons seule la contrainte uniaxiale du béton sera considérée. Il est admis que cette supposition peut être justifiée dans la plupart des situations structurelles.

Les modèles mathématiques du comportement utilisés seront suffisamment élaborés pour étudier:

- la plasticité du béton en compression
- la ductilité de confinement
- la fissuration du béton tendu
- le raidissement en traction
- la non-linéarité de l'acier (modèle élasto-plastique avec écrouissage non-linéaire)

2.1 Béton en compression:

Dans cette présente étude, le modèle idéalisé de HOGNESTAD pour les bétons non confinés et le modèle de KENT et PARK modifié pour le béton confiné par des cadres rectangulaires seront utilisés. Ces modèles ont été explicités au premier chapitre.

2.2 Béton en traction:

Une idéalisation trilineaire pour le béton en traction est utilisée. Ce modèle a été lui aussi explicité au premier chapitre.

2.3 Armatures d'acier:

Le modèle de PARK et PAULAY précédemment défini est utilisé.

3 Critères de rupture:

Deux modes de rupture sont considérés dans cette étude: la rupture du béton par compression et la rupture de l'acier d'armature.

La rupture par compression du béton se produit lorsque celui-ci atteint sa déformation maximale. Pour le béton non confiné la déformation maximale est prise égale à 0.004. BLUME NEWMARK et CORNING

ont recommandé cette valeur pour les calculs de courbure ultime sur béton non confiné. Pour le béton confiné la valeur de la déformation maximale sera fonction du taux de confinement.

La rupture des armatures d'acier est atteinte lorsque la contrainte ultime de traction, de l'acier des armatures est atteinte.

La rupture par effort tranchant n'est pas considérée dans cette étude. Seule le comportement flexionnel des poutres et portiques en béton armé nous intéresse dans notre analyse.

4 Modèle analytique et définitions géométriques:

Les poutres en béton armé sont divisées en une série d'éléments de poutre unidimensionnel. Chaque élément est supposé avoir une section efficace prismatique. Les propriétés du béton et de l'acier d'armature, l'arrangement des armatures et la géométrie de la section efficace sont supposés être constant le long de chaque élément mais peut changer d'un élément à un autre.

Chaque élément et ses axes locaux sont définis par les deux noeuds finaux i et j . L'axe des x , appelé aussi axe de référence de l'élément, est celui qui joint les deux noeuds i et j .

L'axe y coïncide avec l'axe de symétrie de la section efficace et est perpendiculaire avec l'axe des x dans le plan de la structure. La position de l'axe de référence à l'intérieur de la hauteur de chaque élément peut être choisie arbitrairement et doit être définie.

Chaque noeud possède trois degrés de liberté U , V et φ comme illustré en figure(1).

La figure 1 montre aussi l'idéalisation géométrique multicouche d'un élément poutre en béton armé. Chaque élément est subdivisé en un certain nombre de couches de béton et d'acier dans la direction perpendiculaire à l'axe de symétrie. Les couches d'acier seront caractérisées par leur position par rapport à l'axe de référence et par leur aire; elles représenteront un lit d'armatures d'acier.

dans la section. Pour le béton, la géométrie de chaque couche est définie par sa hauteur, sa largeur et la distance entre sa mi-hauteur et l'axe de référence y_i . Les contraintes et les déformations sont supposées être constantes à travers chaque couche et égales à la valeur correspondante à mi-hauteur de chaque couche. Un exemple de système multicouche avec la distribution moyenne des contraintes et des déformations sur la hauteur de la section efficace est montré en figure(2).

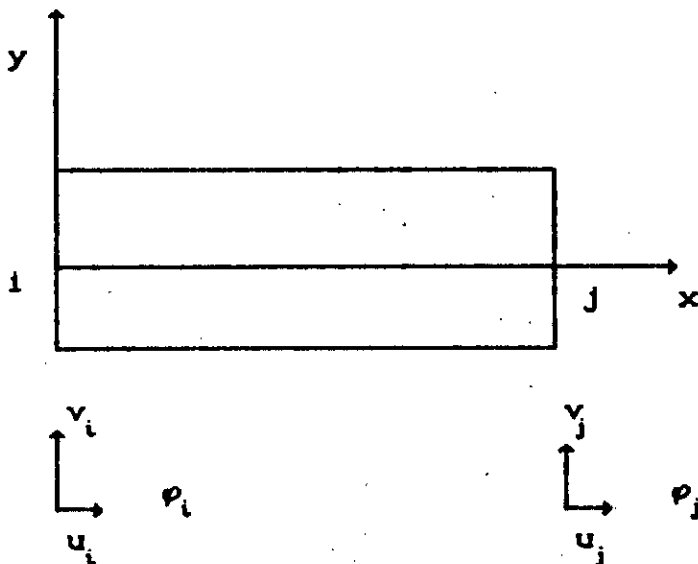


Figure 1:

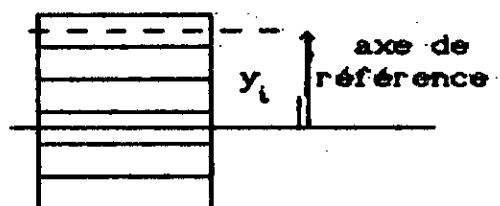


Figure 2 :

5 Procédure analytique :

Une procédure d'analyse non-linéaire itérative et incrémentale est utilisée dans notre analyse.

La procédure emploie l'approche en rigidité sécante et ne demande pas de contrôle de l'équilibre. Chaque cycle dans le processus itératif peut être divisé en deux principales étapes qui sont décrits dans les paragraphes suivants:

-La première étape concerne la détermination des forces et des déplacements en se basant sur les coefficients corrigés de la ma-

-trice de rigidité sécante déterminé dans le cycle précédent.

Ces coefficients sont: la rigidité axiale EA, la rigidité flexionnelle EI, la rigidité de couplage EM.

La matrice de rigidité sécante d'un élément est déterminée par la méthode des éléments finis appliquée à l'élément poutre avec effort normal. Les équations d'équilibre sécant de la structure sont assemblées et résolues en utilisant les techniques classiques de calcul matricielle des structures. Les forces et les déplacements aux noeuds sont ainsi déterminés linéairement.

-La seconde étape concerne la détermination des coefficients corrigés de la rigidité sécante pour chaque élément c'est-à-dire EA, EI, EM, à partir des déplacements et des efforts calculés dans l'étape précédente.

L'introduction de la notion de rigidité de couplage a été rendue nécessaire à cause du déplacement de l'axe neutre du à l'hétérogénéité du béton armé. Deux méthodes ont été établies pour résoudre le problème de la position de l'axe neutre:

Méthode de stabilisation de l'axe neutre :

Cette méthode consiste à repositionner l'axe neutre après chaque itération et chaque incrémentation de manière à assurer l'équilibre dans la section.

L'axe neutre sera positionné initialement au centre géométrique comme première approximation. Pour une itération donnée, l'erreur sur cette position initiale est donnée par " EM/EA " avec:

$$EM = \sum_1^n E_i A_i Y_i + \sum_1^{ns} E_i A_{si} Y_i$$

$$EA = \sum_1^n E_i A_i + \sum_1^{ns} E_i A_{si}$$

y_i : la distance entre la mi-hauteur de la $i^{\text{ème}}$ couche et l'axe neutre supposé

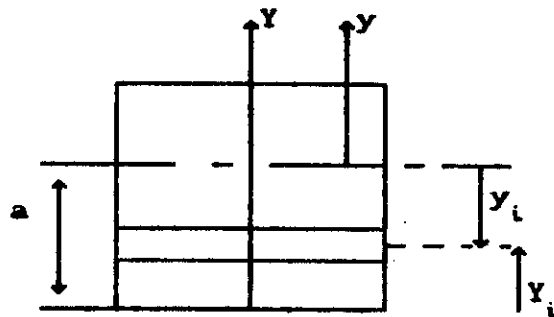
E_i : le module de YOUNG de la couche considérée

A_i : aire de la couche de béton

A_{st} : aire de la couche d'acier

Démonstration:

Figure 3:



Soit A la section droite de la multicouche représentée sur la figure

Soit C l'origine arbitraire définissant les ordonnées Y_i .

Soit O l'origine des y_i appelé centre élastique défini tel que:

$$\int_{\bullet} E_i y_i dA = 0$$

et le point O est tel que : $\int_{\bullet} E_i (Y_i - a) ds = 0$

$$\text{donc } \int_{\bullet} E_i Y_i dA = \int_{\bullet} E_i a dA$$

Le centre élastique est donc tel que:

$$a = \frac{\int_{\bullet} E_i Y_i dA}{\int_{\bullet} E_i dA}$$

où

$$\int E_i dA = \sum_1^n E_i A_i + \sum_1^{ns} E_i A_{si} = EA$$

$$\text{et } \int E_i Y_i dA = \sum_1^n E_i A_i Y_i + \sum_1^{ns} E_i A_{si} Y_i = EM$$

Soit :

$$a = EM / EA$$

Les positions des couches doivent être ainsi repositionnées après chaque itération en posant:

$$Y_i = Y_i + EM/EA$$

On détermine ensuite dans chaque couche les déformations ϵ_i à partir des efforts et des déplacements aux noeuds. A partir des lois de comportement on déduit les contraintes σ_i . On obtient alors des nouveaux modules pour chaque couche en faisant le rapport:

$$E_i = \sigma_i / \epsilon_i$$

Les valeurs corrigées de Y_i et E_i permettent la détermination des nouvelles valeurs des coefficients de rigidité comme suit:

$$EI = \sum_1^n E_i A_i Y_i^2 + \sum_1^{ns} E_i A_{si} Y_i^2$$

$$EM = \sum_1^n E_i A_i Y_i + \sum_1^{ns} E_i A_{si} Y_i$$

$$EA = \sum_1^n E_i A_i + \sum_1^{ns} E_i A_{si}$$

Le processus itératif est initié avec des coefficients de rigidité initiaux estimés pour donner une première estimation des forces et des déplacements aux noeuds. Les cycles itératifs sont répétés jusqu'à convergence de la courbure sur chaque élément et stabilisation de la position de l'axe neutre c'est-à-dire lorsque la distance EM/EA qui détermine la nouvelle position de l'axe neutre tend vers 0 (avec une certaine tolérance). La courbure ϕ pour un élément donné sera défini comme suit:

$$\phi = (\rho(j) - \rho(i)) / L$$

L est la longueur de l'élément
 $\rho(j)$ la rotation au noeud j
 $\rho(i)$ la rotation au noeud i

Résumé du processus itératif:

Pour une itération donnée:

- On détermine les déplacements et les efforts aux noeuds.
- A partir des déplacements et des efforts on détermine les déformations au niveau de chaque couche de chaque élément.
- Les contraintes sont ensuite calculées à partir des lois de comportement.
- On détermine ensuite comme précédemment les nouveaux modules pour chaque couche et on déduit les termes EA, EI, EM qui interviennent dans la matrice de rigidité

Lorsque la convergence est vérifiée on incrémente le chargement initial et on recommence le même processus itératif. Si le nombre d'itérations pour un même chargement dépasse une valeur que l'on se fixe, sans qu'il y ait convergence, on incrémentera aussi le chargement.

Description du processus incrémentale:

La structure est chargée initialement par un système de charge F_0 . Ce système de charge est incrémentée de la manière suivante:

$$F = F + \Delta\lambda F_0$$

F est le système de charge obtenue après incrémentation.

$\Delta\lambda$ est un coefficient d'incrémentatation que l'on choisie.

Certaines charges pourront être maintenues constante dans le système de charge initiale F_0 tout en incrémentant les autres.

L'analyse est terminée lorsqu'un des critère de rupture que

l'on se définie est vérifié avec une certaine précision que l'on se fixe.

Méthode avec matrice de rigidité multicouche:

La matrice de rigidité sécante incluera un terme de couplage dû aux déplacements et aux forces axiaux créant des moments et des rotations aux extrémités. Ce type de matrice de rigidité est celui que nous avons établi pour une poutre multicouche. Elle a été précédemment démontrée plus haut. Utiliser une telle matrice présente un avantage certain par rapport à l'utilisation d'une matrice de poutre classique. En effet le repositionnement de l'axe neutre n'est plus nécessaire, le déplacement de celui-ci étant pris en compte par l'introduction du terme de couplage dans la matrice de rigidité. On évite ainsi d'avoir à redéfinir la position de chaque couche qui reste ainsi fixe par rapport à un axe de référence que l'on fixe une fois pour toute. Cet axe de référence sera l'axe des x.

Le principe de la procédure utilisé reste le même que pour la méthode de stabilisation de l'axe neutre.

Les cycles itératifs sont répétés jusqu'à convergence des paramètres définissant la distribution des déformations, c'est-à-dire la déformation axiale à l'axe de référence e_x et la courbure ϕ . Cette convergence devant être satisfaite pour chaque

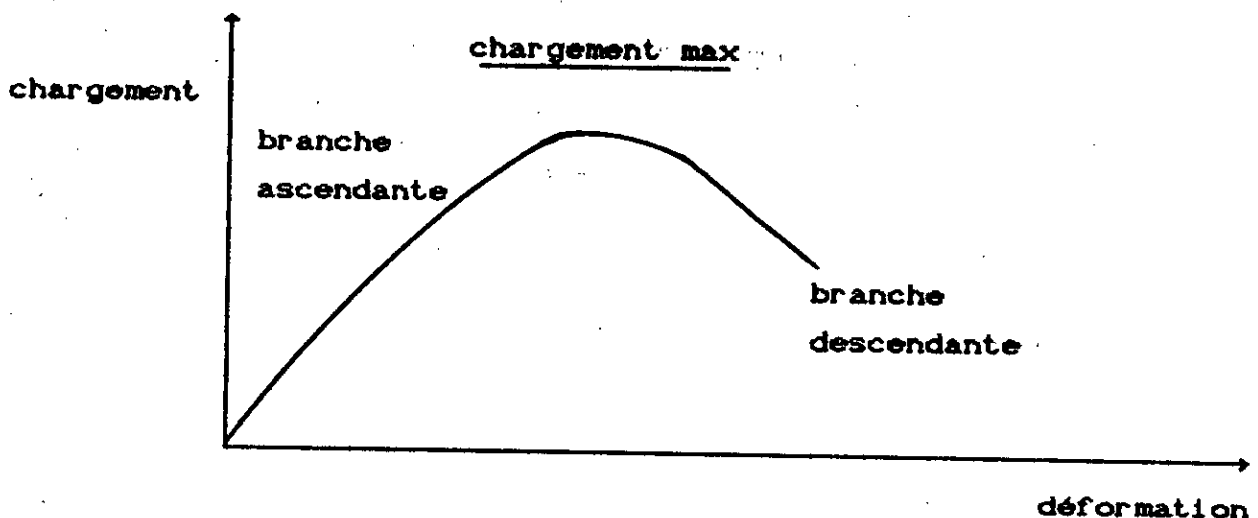
élément. ϕ est défini comme précédemment ; ϵ_r est défini comme suit.

$$\epsilon_r = (du / dx) = N/EA \quad N \text{ est l'effort normal dans l'élément}$$

Une fois la convergence réalisée on incrémente les charges à étudier de la même façon que la méthode précédente.

6 Détermination du chargement maximale (point d'instabilité) :

La forme générale de la courbe chargement-déformation attendue est montré en figure ci-dessous :



La procédure proposée peut être utilisée pour déterminer avec une grande précision la valeur de la charge maximale.

Lors du processus itératif si la charge maximale est dépassée, les résultats des itérations montreront des déformations croissantes jusqu'à ce que une rupture soit détectée. C'est pourquoi on établira un test de rupture à la fin de chaque itération et à chaque fois qu'une rupture sera détectée on reviendra au chargement précédent et on réincrémentera en diminuant le pas d'incrémentation. Lorsque après des détections de ruptures successives le rapport de la charge incrémentée sur le chargement

est inférieure à une certaine valeur que l'on se fixe, on aura déterminé la charge maximale. C'est-à-dire on doit avoir:

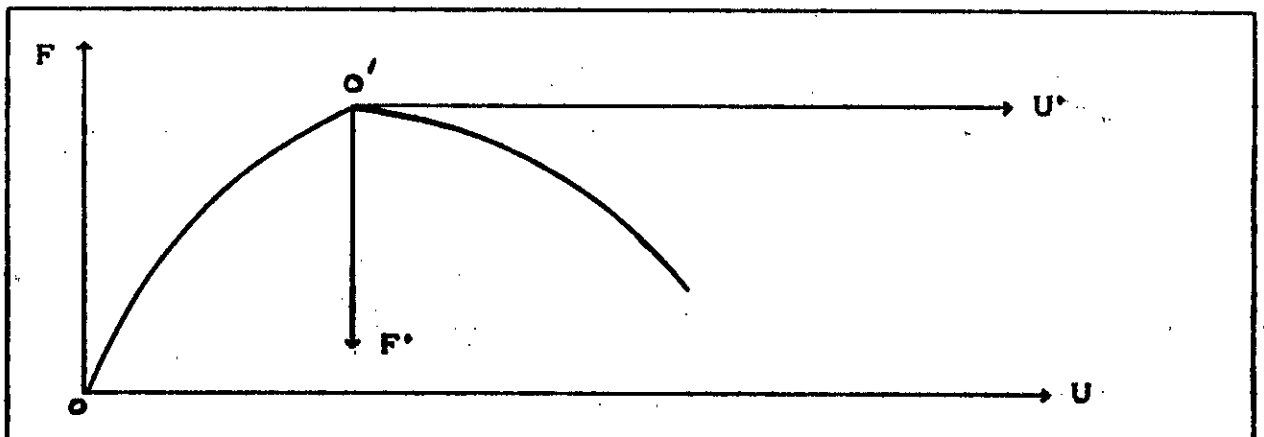
$$(\Delta \lambda F_0) / F \leq \text{précision}$$

Cette charge maximale correspondra à un point d'instabilité.

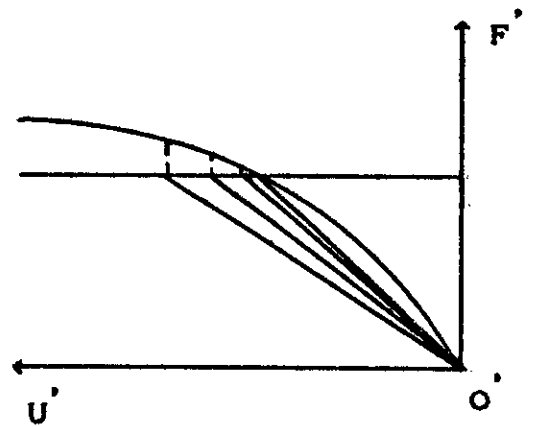
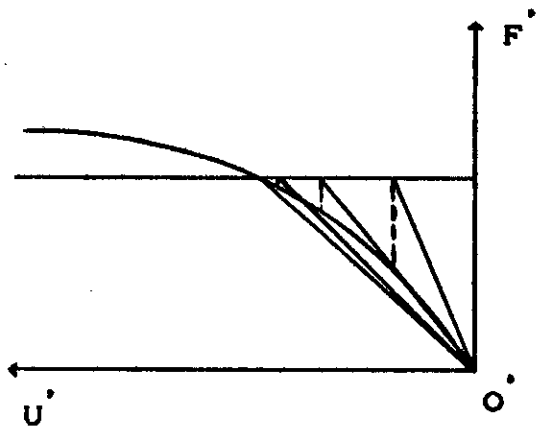
Les données concernant ce point seront nécessaires pour l'analyse de la partie descendante de la courbe.

7 Analyse de la partie descendante:

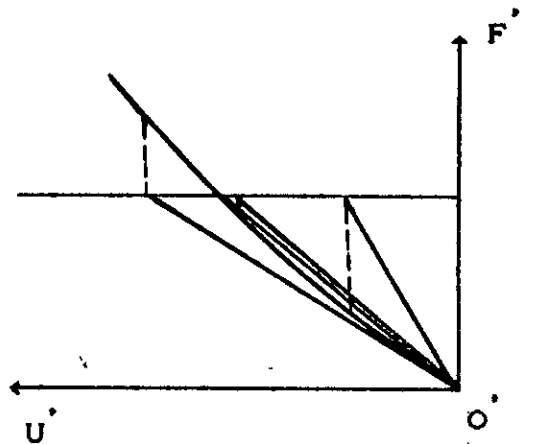
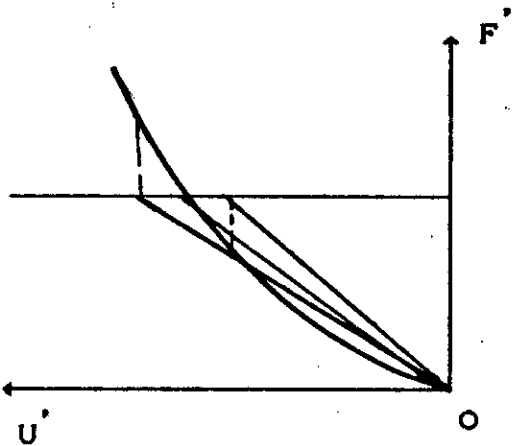
Une fois le point d'instabilité déterminé, on procède à un changement de repère pour pouvoir analyser la partie descendante de la courbe chargement-déformation. Le changement de repère établie est illustré dans la figure ci-dessous:



Le nouveau repère (F', U') a pour origine le point d'instabilité. Dans ce repère la courbe descendante dans le repère (F, U) devient une courbe ascendante que l'on étudie de la même manière que la partie ascendante dans le repère (F, U) . Dans tous les cas il est possible d'analyser cette courbe numériquement. La convergence est toujours assurée; elle se fait soit monotonement soit par alternance (voir figure ci-dessous). Quatre cas sont à envisager:



Il y a convergence monotone.



Il y a convergence, mais par alternance, dans ce cas, il faut prévoir le critère de rupture qu'après convergence. En effet, les itérations dans la direction sécante peuvent dépasser la charge de rupture sans qu'il y ait pour autant rupture ou divergence.

L'incrément de charge dans le repère (F', U') correspondra à une diminution du chargement maximal dans le repère (F, U) .

Soient ϵ_{s1} et σ_{s1} les déformations et les contraintes pour le point d'instabilité la déformation ϵ_i calculée avec le repère (F', U') devra être cumulée à ϵ_{s1} . La déformation totale s'écrit:

$$\epsilon_{it} = \epsilon_{si} + \epsilon_i$$

Dalà les contraintes σ_i sont calculées à partir des lois de comportement.

Les calculs des modules E_i pour chaque couche et chaque élément seront calculés de la manière suivantes:

$$E_i = \frac{\sigma_i - \sigma_{si}}{\epsilon_{it} - \epsilon_{si}}$$

Cette fois-ci les détections de rupture successives correspondront à la rupture et non pas à la charge maximale.

CHAPITRE IX

PRESENTATION DU PROGRAMME MIS AU POINT

1 - Introduction

Nous avons déjà dit plus haut que les problèmes non-linéaires sont toujours solutionés par la résolution de plusieurs problèmes linéaires où les conditions non linéaires sont vérifiées à une certaine tolérance . Dans les programmes de calcul non-linéaires le principe est le même : on réalise un programme de résolution linéaire qu'on prolonge par de nouvelles sousroutines (si nécessaire) , et sur lequel on établit des itérations . Le programme de résolution linéaire constitue ainsi toujours le noyau du programme non-linéaire . Le programme que nous avons réalisé suit le même schéma : Dans un premier temps nous avons mis au point un programme de résolution linéaire classique des portiques par la MEF , puis par l'incorporation de nouvelles sousroutines de tests et de branchements étudiés , on a obtenu le programme d'analyse non linéaire " *FRAME-NL.FLEX* " .

2 - Présentation du programme linéaire " SKY-FLEX L "

Avant d'entamer la description du programme , il convient de préciser la manière dont sont rangés les coefficients de la matrice du système linéaire .

2.1 - Méthode de mémorisation des grandes matrices

Il est évident qu'il ya intérêt à tirer profit des propriétés et de la structure des matrices de rigidité .

En effet , ces matrices symétriques sont en général faiblement peuplées , avec de nombreux termes au voisinage immédiat de la

diagonale et avec quelques termes additionnels hors diagonale .

On remarque aussi , que la décomposition (GAUSS ou CHOLESKY) de cette matrice fait apparaître quelques termes non nuls additionnels mais n'en change pas fondamentalement la structure initiale . Pour mémoriser ces matrices , les principales méthodes sont les suivantes :

- Mémorisation par "BANDE"
- Mémorisation par "LIGNE-DE-CIEL" (dite SKY-LINE) .
- Méthode "FRONTALE" .

Nous avons opté pour la méthode dite "ligne de ciel" qui présente l'amélioration de la mémorisation "bande" . La ligne de ciel présente des avantages certains par rapport à la méthode bande mais au détriment de la simplicité de mise en oeuvre.

Dans cette méthode la matrice est mémorisée colonne par colonne en faisant varier la demi-largeur de bande de façon à limiter la mémorisation au profil de la matrice . On notera que la partie de la matrice qui est mémorisée , correspond aux termes non nuls de la triangulaire supérieure , après décomposition .

Cette méthode consiste à ranger dans un tableau à un seul indice les coefficients situés au-dessus de la diagonale , et en tenant pas compte des termes nuls situés au-dessus du premier terme non nul d'une colonne (ce qui définit une ligne de ciel) .

On définit les matrices et vecteurs suivants:

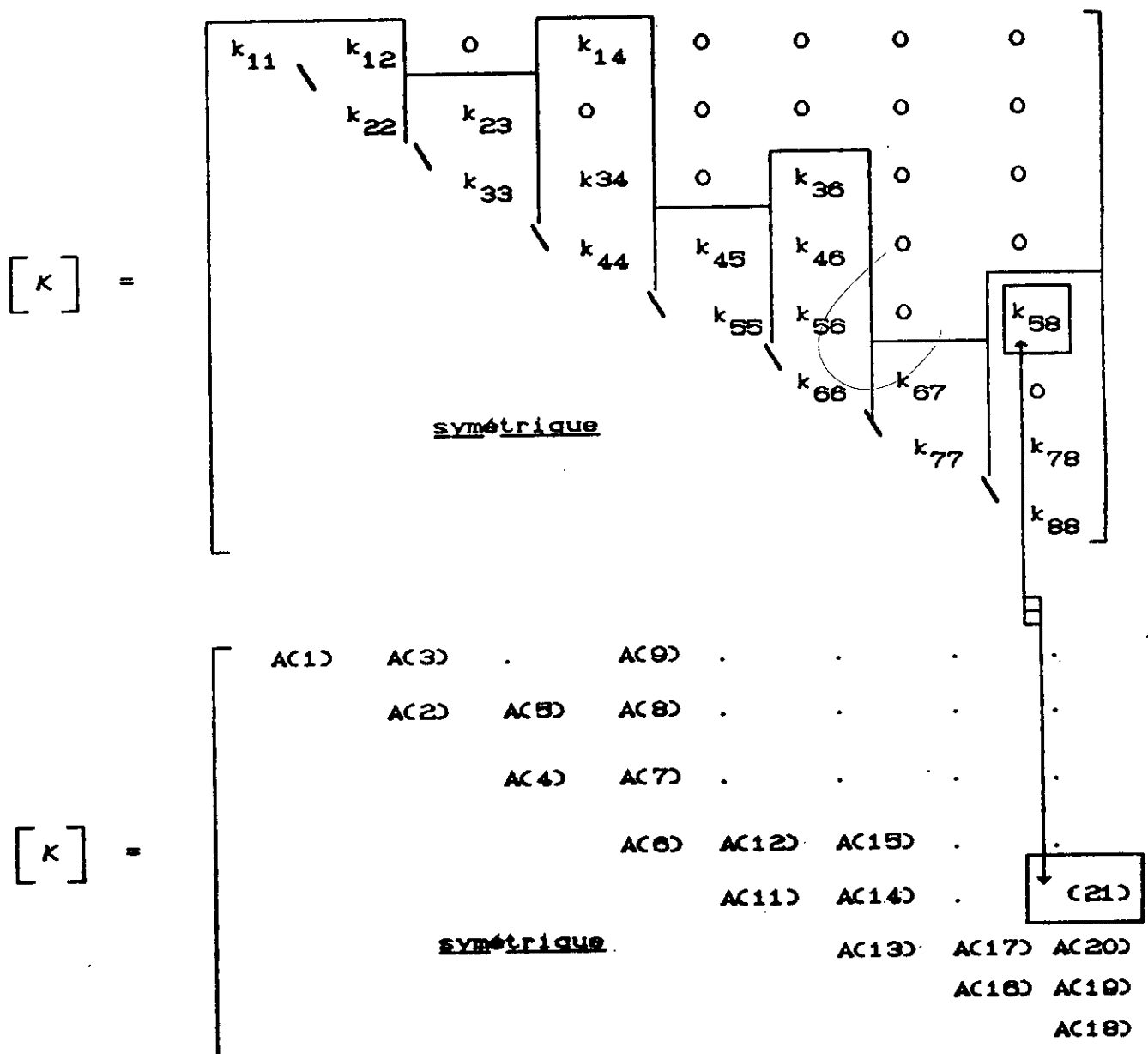
$[K]$: Tableau complet à deux indices , correspondant à la matrice de rigidité à stocker .

$[A]$: Tableau à un indice où sont rangés les coefficients situés au dessus de la diagonale .

$[MAXA]$: Vecteur des adresses des termes diagonaux .

Les coefficients seront rangés dans le tableau "A" et les adresses des termes diagonaux dans le tableau "MAXA".

Pour définir ce tableau d'adresses, on effectue un premier balayage des éléments au cours duquel on détermine les hauteurs de colonnes, par cumul des hauteurs de colonnes, on obtient les adresses des termes diagonaux.



Exemple:

AC(21) emmagasine k₅₈ .

Et :

$$\left[\text{MAXA} \right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \\ 12 \\ 16 \\ 18 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Nous expliciterons ci-dessous les principales étapes du programme

2.2 - Lecture des données

L'entrée des données se fera au moyen de la subroutine *LECTDON* , les données à introduire sont de 4 sortes :

- * Les données relatives aux propriétés des matériaux béton et acier :

Ces données sont introduites successivement dans un vecteur , soit:

- le module de young de l'acier .
- Le module d'élasticité du béton .
- Densité du béton armé .

- * Les données relatives à la géométrie de la structure .

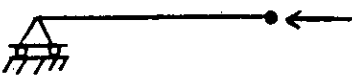






Les noeuds de la structure doivent être numérotés , on donne :

- Le nombre de noeuds NN et pour chaque noeud les coordonnées x(i) et y(i) dans le repère global de la structure .
- Le nombre d'éléments poutres Nbarres
- Pour chaque élément poutres le numéro du noeud début et le numéro du noeud fin , ces données sont introduites dans une matrice dite matrice de connectivité

* Les données relatives au chargement:

Les charges appliquées à la structure devront être numérotées on donne :

- Le nombre de charges élémentaires appliquées à la structure NC
- Pour chaque charge élémentaire on doit définir :
 - .La valeur de la charge
 - .Le numéro de l'élément ou du noeuds chargés
 - .Le type de la charge par son code :

		CODE
charge concentrée au noeud .	selon X 	1
	selon Y 	2
	moment 	3
charge uniformément répartie sur l'élément	selon X 	4
	selon Y 	5
	charge triangulaire 	6
	charge triangulaire 	7

Il faut de plus entrer le nombre de charges à incrémenter et donner le numéro de chacune de ces charges parmi les charges élémentaires appliquées à la structure.

A ce stade là , nous avons introduit toutes les données indépendantes du problème . Il s'agira ensuite de générer les données pour toutes la structure :

2.3 - Génération des données (Subroutine GENERDON)

Cette génération concerne les conditions aux limites et des caractéristiques des tronçons .

.Conditions aux limites :

à partir de NSA , des codes de chaque noeud appui et de leur numéro on génère les codes appuis de chaque noeud.

.Caractéristiques des tronçons :

Chaque tronçon étant affecté d'un numéro correspondant à un type de section on pourra alors générer les caractéristiques de chaque tronçon de la structure .

La procédure de génération des données constitue un aspect important du programme "FRAME-FLEX NL" , car le nombre de tronçon étant généralement élevé,car elle permet de simplifier considérablement l'introduction des données permettant ainsi d'éviter de nombreuses erreurs tout en donnant au programme une très grande souplesse d'utilisation .

2.4 - Impression des résultats (subroutine IMPRIM 1)

Cette subroutine servira à imprimer les données de la structure pour corriger les éventuelles erreurs de données avant d'entamer les calculs .

2.5 - Génération des caractéristiques multicouches (subroutine COUCHE 1)

Cette subroutine permet de générer les caractéristiques de chaque couche de béton de la section C'est-à-dire son aire A_1 et la distance par rapport à l'axe de référence y_1 , l'épaisseur des couches étant supposée identique .

2.6 - Génération des coefficients de rigidités (subroutine COUCHE 2)

Elle concerne le calcul des coefficients de rigidités EA , EI et EM .

2.6 - Calcul des indices des degrés de liberté bloqués

Il est nécessaire de savoir , pour la suite des calculs, si un degré de liberté est libre ou bloqué. Cela est effectué par le sous-programme "CIDLB" à partir des codes appuis .

Pour chaque barre ou tronçon on calculera ensuite les termes non nuls de sa matrice de rigidité et les hauteurs de colonnes de cette matrice .

2.7 - Calcul des hauteurs de colonne (subroutine HCOL)

On détermine les hauteurs de colonne à partir de la définition des éléments , ainsi pour chaque élément :

- On détermine le plus petit des noeuds définissant l'élément
- Pour chaque noeud de l'élément :
 - . On détermine la hauteur de colonne du 1^{er} degré de liberté.
 - . Si cette hauteur est inférieur à la hauteur déjà déterminée pour ce degré de liberté ,on passe au noeud suivant.
 - . Sinon , pour chaque degré de liberté du noeud , on réactualise les hauteurs de colonne correspondantes .
- Passer au noeud suivant .

Cette procédure est effectuée par le sous-programme "CHC" .

2.8 - Subroutine format

Calcul des termes non nuls de chaque matrice élémentaire .

2.9 - Calcul des indices des termes diagonaux (subroutine CITD)

Une fois toutes les hauteurs de colonnes déterminées, le sous-programme "CITD", calcul les adresses des termes de la matrice "A" situés sur la diagonale.

Il suffit d'effectuer le cumul des hauteurs de colonne.

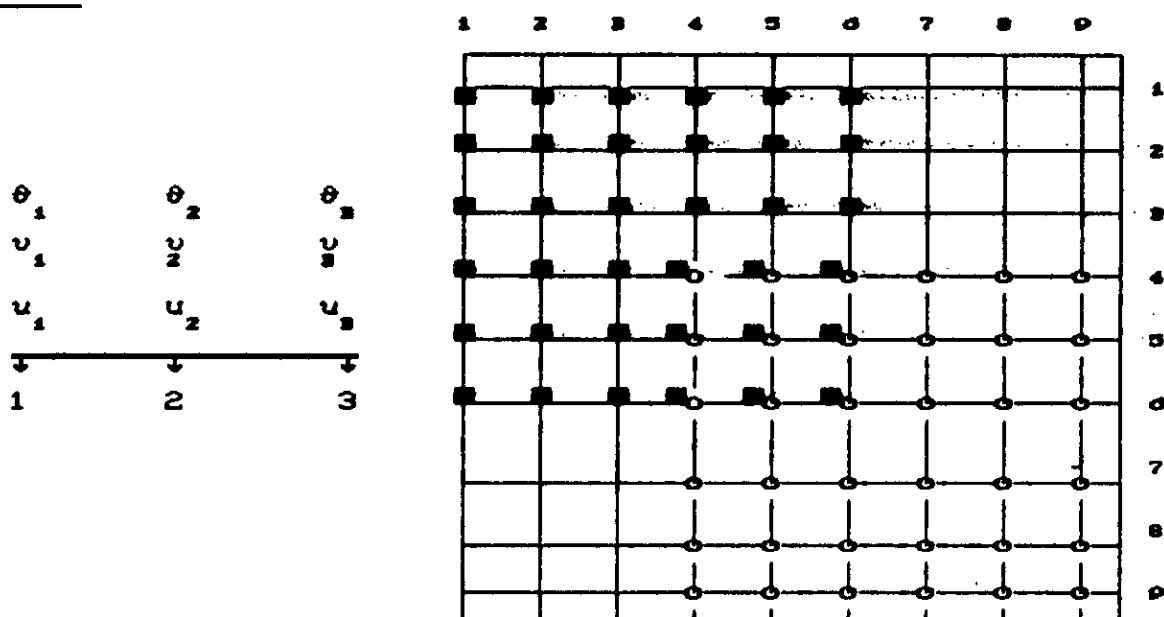
2.10 - Assemblage de la matrice du système linéaire

Un deuxième parcours des éléments permet d'effectuer les opérations suivantes :

- Formation de la matrice de rigidité de l'élément dans le repère global (subroutine RIGIDITE)
- Calcul des adresses des coefficients de cette matrice dans le tableau "A" (Subroutine ADRESSE).
- Cumul de ces coefficients dans le tableau "A" (Subroutine CUMUL).

L'emplacement des coefficients de la matrice de rigidité de la barre dans le vecteur "A" est définie à l'aide d'une table d'adresse "LM".

EXEMPLE : Soit la poutre (P) à deux travées, 1-2 et 2-3.



La barre définie par 2-3: LM =

4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---

La barre définie par 1-2: LM =

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

2.11 - Formation du second membre (Subroutine SECOND)

Les éléments du second membre du système (vecteur charge) sont placés à la suite des coefficients de la matrice dans le tableau A. Pour cela, une variable " indice " est définie et donne l'adresse du premier coefficient du second ordre.

Deux types de charges sont prévues :

- *Charges arrivant directement aux noeuds : F_x , F_y , M .
- *Charges réparties : Ce type de charge est transformée en charges nodales équivalentes . On distingue :
 - .Les charges réparties provenant du poids propre , ce cas de charge est généré automatiquement à partir de la donnée de la densité du matériau .
 - .Charges en travées réparties uniformément ou triangulairement .

2.12 - Prise en compte des conditions aux limites (Subroutine MODIF)

Cette subroutine utilise la méthode du terme unité sur la diagonale .

Cette technique consiste à repérer le degré de liberté imposé , de mettre (1) à la place de l'élément diagonal (K_{ii}) , puis mettre un zéro sur toute la ligne et la colonne (i) . A la place du terme (F_i) on met la valeur imposée au degré de liberté i.

On a donc :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & 0 & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \dots & 0 & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

L'équation (1) devient alors :

$$0 \cdot \sum u_j + 1 \cdot u_i = \bar{u}_i \quad j=(1,n)$$

2.13 - Résolution du système linéaire (Subroutine SOLV)

Nous utiliserons la méthode de factorisation de GAUSS modifiée, en vue de son utilisation en calcul automatique. Nous supposons que la matrice du système linéaire est définie positive : s'il n'en est pas ainsi, soit la structure est instable, soit elle ne correspond pas à une structure réelle, ce qui provient généralement d'une erreur de données. Rappelons que cette méthode comporte deux phases :

- La première phase transforme la matrice du système linéaire de façon à obtenir une matrice triangulaire supérieure. C'est la 'factorisation'.

- La seconde phase est la phase de substitution, permettant de calculer les inconnues les une après les autres.

2.14 - Calcul des efforts dans les barres (Subroutine EFFORT)

- Calcul des efforts de fin de barre de chaque élément dans son repère local

- Passage au repère global de ces efforts avec superposition aux noeuds

- Détermination des forces sur les noeuds libres et des réactions d'appuis dans un repère global.

2.15 - Impression des résultats

L'impression des résultats est effectuée par la sous-routine "IMPRIM2"

Remarque :

L'entrée et la sortie des données se fait à l'aide de fichiers.

3 - Présentation du programme non-linéaire "FRAME.FLEX.NL"

Le programme *FRAME.FLEX.NL* est réalisé à partir du programme linéaire *SKY-FLEX*. Des branchements judicieux sur les diverses sous-routines de "SKY-FLEX" ainsi que l'incorporation et le prolongement de plusieurs autres sous-routines permettent la mise en œuvre du processus incrémental et itératif précédemment décrit.

Le programme *FRAME.FLEX.NL* comporte deux parties correspondant l'une à l'analyse de la partie ascendante de la courbe, l'autre à l'analyse de la partie descendante. Ces deux parties faisant intervenir en général les mêmes sous-routines. Nous expliciterons ci-dessous les nouvelles procédures établies pour ce programme. L'organigramme général du programme est représenté plus loin.

3.1 Introduction de nouvelles données: prolongement de lecture

Ces données sont:

-les données relatives aux matériaux béton et acier qui caractérisent leur comportement non-linéaire:

- * pour le béton:
 - la contrainte maximale
 - la déformation en contrainte maximale
 - la déformation ultime de rupture

- * pour l'acier:
 - la limite élastique
 - la déformation en fin d'écoulement plastique

-la déformation ultime de rupture

-les données concernant le processus itératif et incrément-

-tale:

- * le nombre maximal d'itérations
- * le coefficient d'incrémentation $\Delta\lambda$
- * les précisions requises pour les critères de convergence

3.2 Calcul des déformations, contraintes, modules:

Pour la partie ascendante de la courbe on utilise la subroutine DEFCON1. Cette subroutine calcule les déformations dans chaque couche d'acier et de béton. A partir des déformations on détermine les contraintes, ceci au moyen des 3 subroutines LOIE1, LOIE2, LOIE3 correspondant aux 3 lois de comportement utilisées.

Pour la partie descendante on utilise la subroutine DEFCON2. Le principe est le même que DEFCON1, le calcul des modules est bien sur différent.

* Les données relatives aux caractéristiques des sections: .
 Chaque élément poutre ou tronçon de la structure doit être numéroté .

- On définit d'abord ,le nombre de tronçons différents dans la structure , les sections étant supposées identiques à tout point de vue dans un tronçon .
- Pour chaque tronçon différents , il faut entrer :
 - .Son numero
 - .Le type de section (rectangulaire ou en T)
 - .Les dimensions de la section
 - .La position de l'axe de référence par rapport à la base .
 - .Le nombre de couches de béton
 - .Le nombre de couches d'acier , l'aire et la position de chacune par rapport à l'axe de référence .

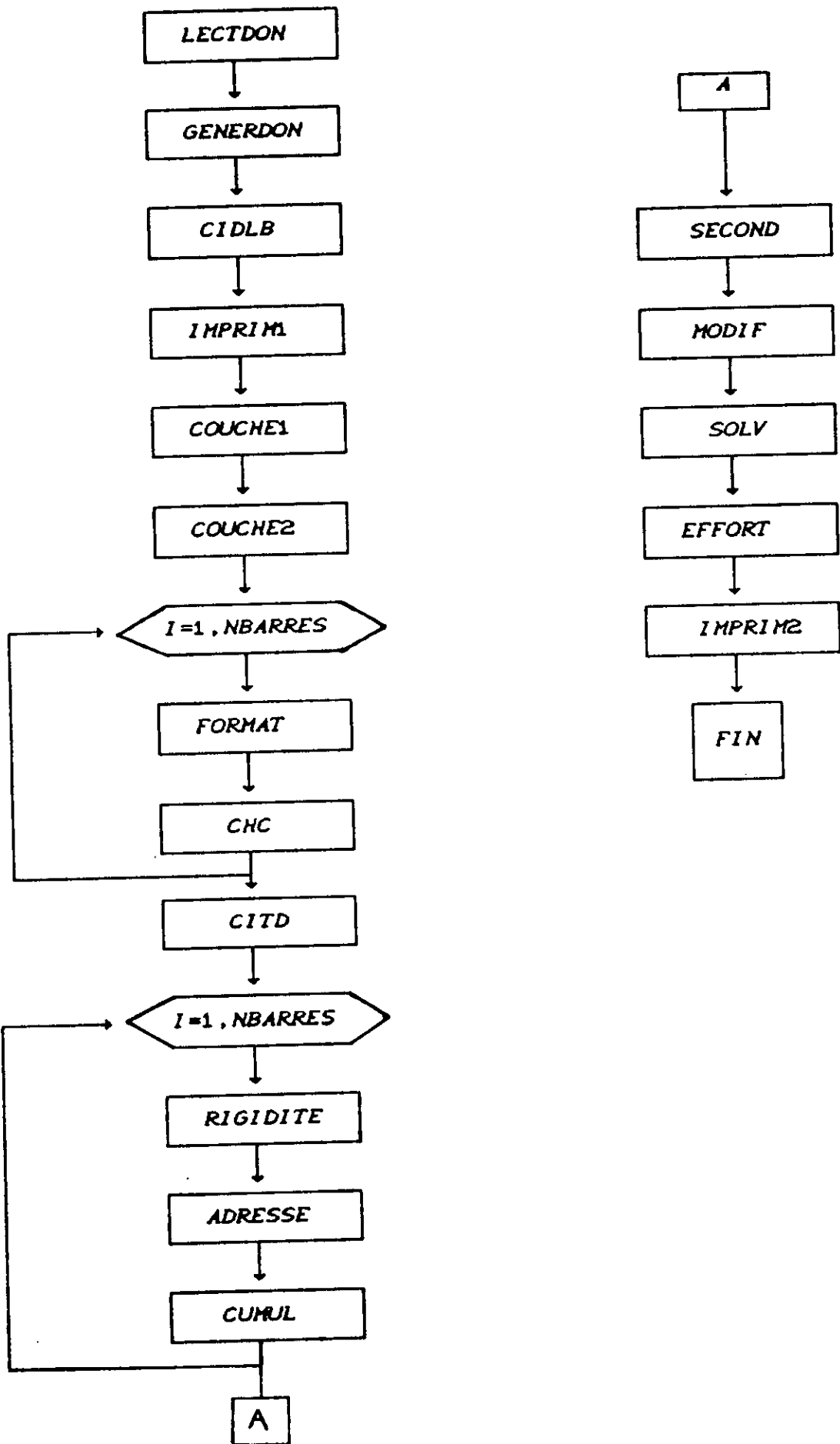
* Les données définissant les conditions aux appuis:

- Le nombre de noeuds appuis (NSA) .
- Pour chaque noeuds appuis on donne le numéro du noeud correspondant ainsi qu'un code définissant les degrés de liberté bloqués telque :
 - 1 si le degré de liberté est bloqué
 - 0 si le degré de liberté est libre

Pour les trois degrés de liberté U, V, θ par noeud , on peut avoir les combinaisons suivantes .

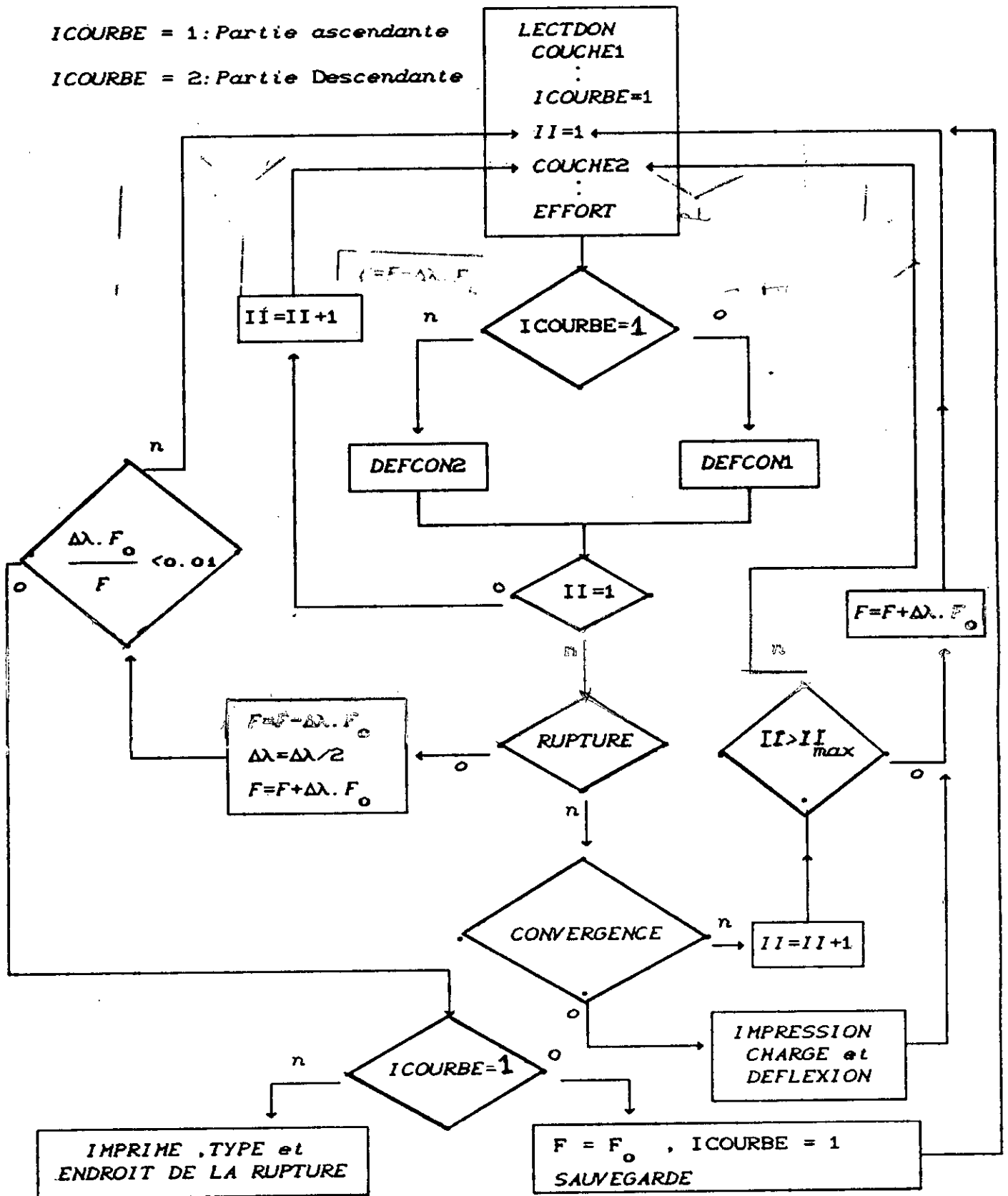
	U	V	θ	code
libre	0	0	0	0
θ bloquée	0	0	1	1
V	0	1	0	10
U	1	0	0	100
V et θ	0	1	1	11
U et θ	1	0	1	101
U et V	1	1	0	110
U, V et θ	1	1	1	111

ORGANIGRAMME DU PROGRAMME " SKY-FLEX L "



PRESENTATION DU PROGRAMME "FRAME.FLEX.NL"

ICOURBE = 1: Partie ascendante
 ICOURBE = 2: Partie Descendante



CHAPITRE X

EXPERIMENTATION NUMERIQUE

1. Confrontation avec des résultats expérimentaux:

Deux exemples expérimentaux sont présentés dans ce chapitre pour démontrer la validité et l'applicabilité du modèle analytique proposé et du programme informatique correspondant. Dans les deux exemples les zones proches des appuis seront confinées et ceux pour éviter une rupture par effort tranchant prématurée .

1.1. Poutre simple, essai d'ALAMI et FERGUSON

Des séries de trois poutres rectangulaires simplement appuyées désignées série 'M3 beam 'ont été testées par ALAMI et FERGUSON pour se briser en mode de compression flexionnelle. Les données pour cette poutre sont représentées en figure 2.

On utilisera une première discrétisation de 4 éléments en faisant varier le nombre de couches. (figure 2). Lorsqu'on utilise 50 couches les résultats obtenus sont sensiblement les mêmes que ceux obtenus avec 25 couches. En prenant donc 50 couches on obtiendra convergence sur l'idéalisation multicouche. Dans la suite des calculs, on utilisera ce nombre de couches .

Pour tester la convergence sur le nombre d'éléments on discrétise la poutre en un nombre croissant d'éléments. La convergence est obtenue pour 22 éléments (figure 3).

La courbe chargement-déflexion prévue en utilisant le modèle analytique développé dans cette étude , et la courbe expérimentale sont montrées en figure (Figure 5) . Les résultats obtenus par LAZARO et RICHARDS sont aussi représentés.

Une bonne similitude entre les résultats expérimentaux et ceux prédit dans cette étude peut être observée avec cependant un comportement plus flexible au début du chargement et un comportement moins flexible en fin de chargement. Les résultats de LAZARO et RICHARDS montre un comportement général plus flexible.

1.2. Poutre simple de LITTLE et PAPARONI

Une série de poutres en béton armé a été testée par LITTLE et PAPARONI. Le prototype 1% IMME a été analysé en utilisant le 'FRAME FLEX.NL'. Les dimensions, le chargement et les propriétés du matériau de la poutre 1% IMME sont montrés en figure 1.

La courbe obtenue dans cette étude (avec 22 éléments et 50 couches) et la courbe expérimentale sont montrées en figure 7.

Sur la même figure on montre aussi les résultats analytiques prévus par LAZARO et RICHARDS.

Une bonne similitude entre les résultats expérimentaux et ceux prédit dans cette étude peut être observée avec un comportement plus flexible. Cependant, la courbe obtenue est meilleure que celle prévue par LAZARO et RICHARD ce qui est du principalement à la négligence des effets de rigidité dus à la traction du béton dans leur modèle. (négligence du raidissement en traction)

1.3. Interprétation des résultats:

La différence entre les résultats obtenues dans notre analyse et les résultats expérimentaux est due principalement aux:

- Erreurs numériques
- Erreurs dues au modèle
- Erreur de la courbe expérimentale elle-même

-Erreurs du au modèle utilisé :

Celles-ci sont les plus importantes.

1) Le modèle de comportement utilisé est sans contexte la source d'erreur la plus probable dans notre analyse.

L'idéalisation des lois de comportement de l'acier et surtout du béton n'est pas exacte, ce n'est qu'une approximation de la réalité qui est très complexe dans le cas du béton armé. D'autre part ces lois sont unidimensionnelles, on néglige l'effet du cisaillement qui fait diminuer la résistance à la flexion (prouvée expérimentalement). Enfin, les lois adoptées pour le béton en compression ont été établies par compression de cylindres de béton or

en flexion le mode de sollicitation n'est pas le même (effet du gradient de déformation). Il en est de même pour le béton en traction et de plus pour celui-ci le glissement de l'acier a une influence sur sa résistance.

Par ailleurs d'autres effets plus complexes sont négligés tels que le fluage et le retrait.

2) L'idéalisation multicouche pour un lit d'armatures ne traduit pas la réalité exacte.

3) L'hypothèse de poutre BERNOUILLI n'est pas rigoureusement exacte dans la zone de traction du béton car un léger glissement de l'acier et du béton l'entourant se produit.

-Erreur de la courbe expérimentale elle-même:

L'expérience est toujours entachée d'erreurs et ce quel que soit la qualification de l'opérateur. Les courbes expérimentales qui ont servi pour valider peuvent comporter elles-mêmes des erreurs. Il en est de même pour les caractéristiques du béton et de l'acier, obtenues expérimentalement et sur la base d'une analyse statistique.

-Erreurs numériques :

Elles sont dues à la précision de l'ordinateur sur les calculs. Ceux-ci étant très nombreux leur cumul peut amener à des erreurs sur les résultats globaux.

D'autre part la méthode d'analyse non-linéaire utilisée peut quelquefois ne pas converger monotonement mais par alternance, on est conduit alors à prendre une valeur moyenne.

1.4. Conclusion:

Une bonne concordance entre les résultats analytiques et expérimentaux peut être obtenue en utilisant le modèle analytique suggéré. Le modèle analytique et la procédure utilisée peut donc tracer avec précision le comportement des poutres en béton armé.

2. Etude de l'effort normal:

On utilisera la poutre de ALAMI et FERGUSON sur lequel on appliquera des valeurs croissantes d'effort normal. Soit N_u l'effort normal ultime, pour des valeurs croissantes du pourcentage de N_u on obtient les courbes charge-deflection illustrée en figure 8.

Lorsque l'effort normal est supérieur à 50% de l'effort normal ultime, la charge maximale admissible pour le chargement en flexion augmente par contre la ductilité diminue.

L'effort normal augmentera ainsi la charge maximale en flexion au détriment de la ductilité qui le critère essentiel dans la résistance au séisme.

Lorsque l'effort normal est inférieur à 30% de l'effort normal ultime la résistance ainsi que la ductilité diminueront.

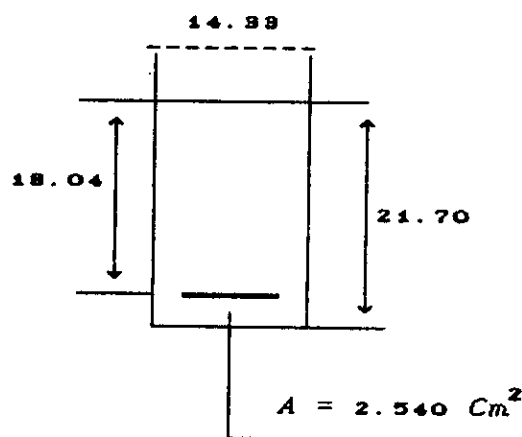
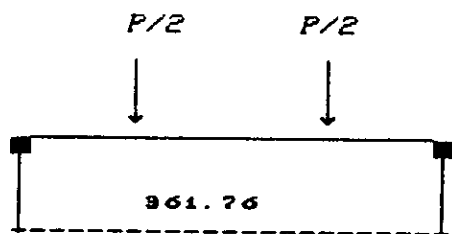
Cet exemple illustre bien l'interaction qui existe entre l'effort normal et le moment fléchissant.

3. Etude du confinement:

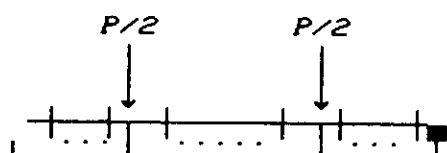
On utilisera la même poutre que précédemment en faisant varier la disposition des armatures transversales. Pour des coefficients de confinement croissant on peut observer une appréciable augmentation de résistance et surtout une extraordinaire augmentation de ductilité (figure 9). Le confinement améliore donc à la fois la résistance mais surtout fournit au béton une très grande capacité à absorber de l'énergie de déformation.

La résistance flexionnelle au séisme des poutres en béton armé est ainsi considérablement augmentée par le confinement.

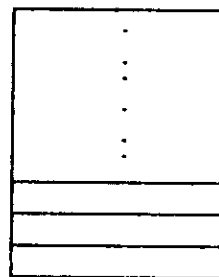
EXEMPLE 1 : Poutre sous armée testée par PAPARONI et LITTLE



- Avec :
- $f_c'' = 350 \text{ Kg/Cm}^2$
 - $f_y = 3.42 \text{ t/Cm}^2$
 - $f_{su} = 5.06 \text{ t/Cm}^2$
 - $E_s = 2000 \text{ t/Cm}^2$
 - $\epsilon_{sh} = 0.02$
 - $\epsilon_{su} = 0.1$



22 Eléments

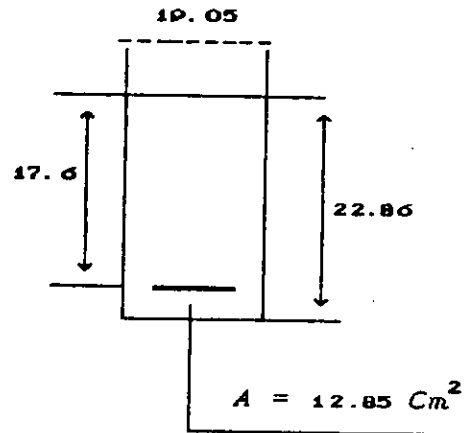
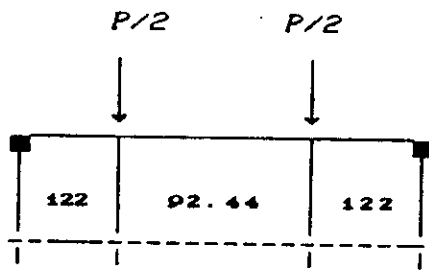


50 Couches

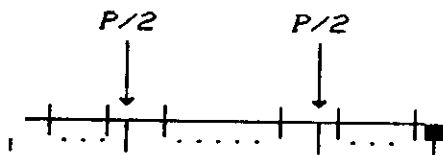
FIGURE 1. PROPRIETES MATERIELS ET GEOMETRIQUES

(EXEMPLE 1)

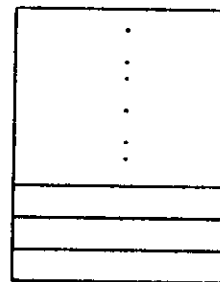
EXEMPLE 2: Poutre sur-armée testée par ALAMI et FERGUSON



- Avec :
- $f_c'' = 218 \text{ Kg/Cm}^2$
 - $f_y = 3.41 \text{ t/Cm}^2$
 - $f_{su} = 5.06 \text{ t/Cm}^2$
 - $E_s = 2000 \text{ t/Cm}^2$
 - $\epsilon_{sh} = 0.02$
 - $\epsilon_{su} = 0.1$



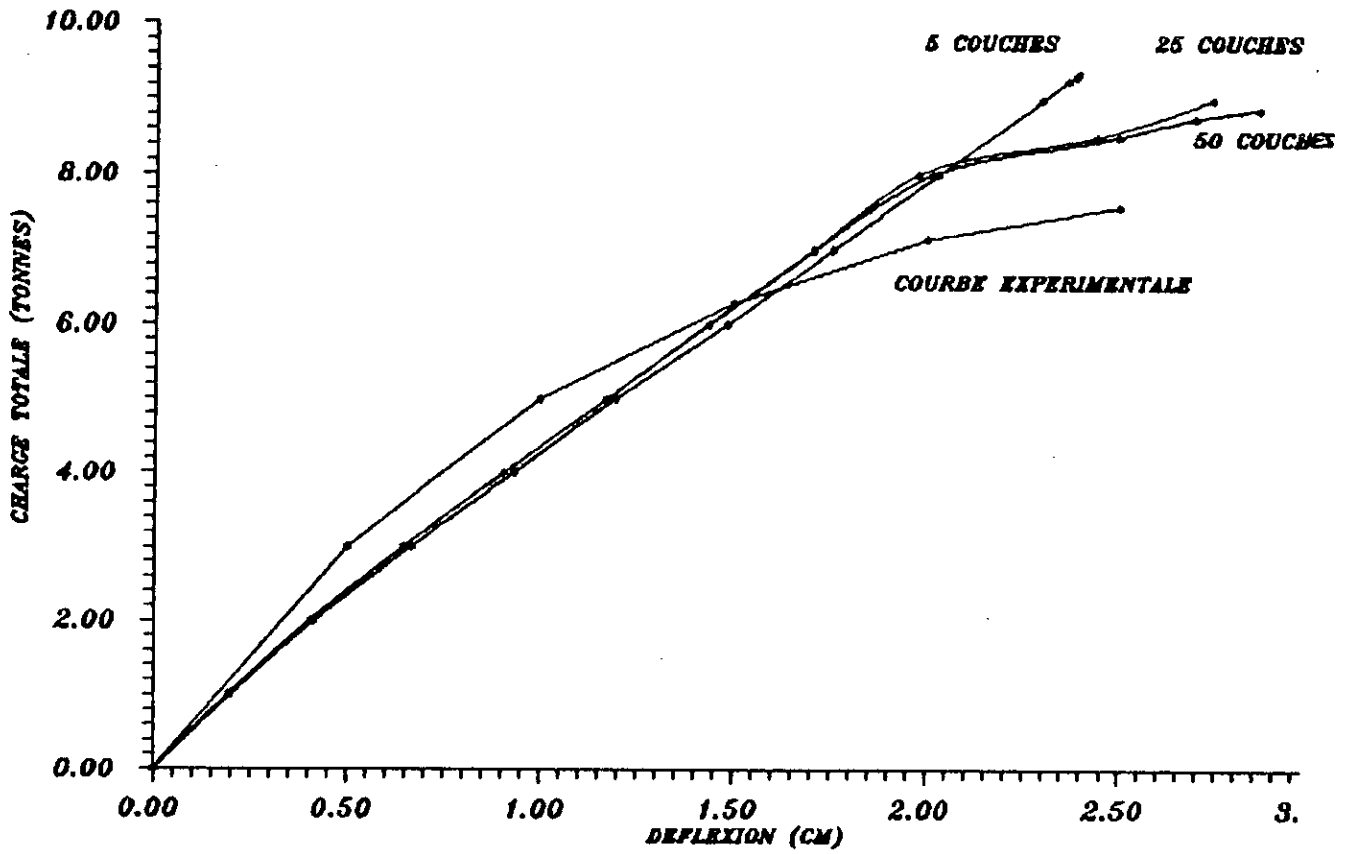
22 Eléments



50 Couches

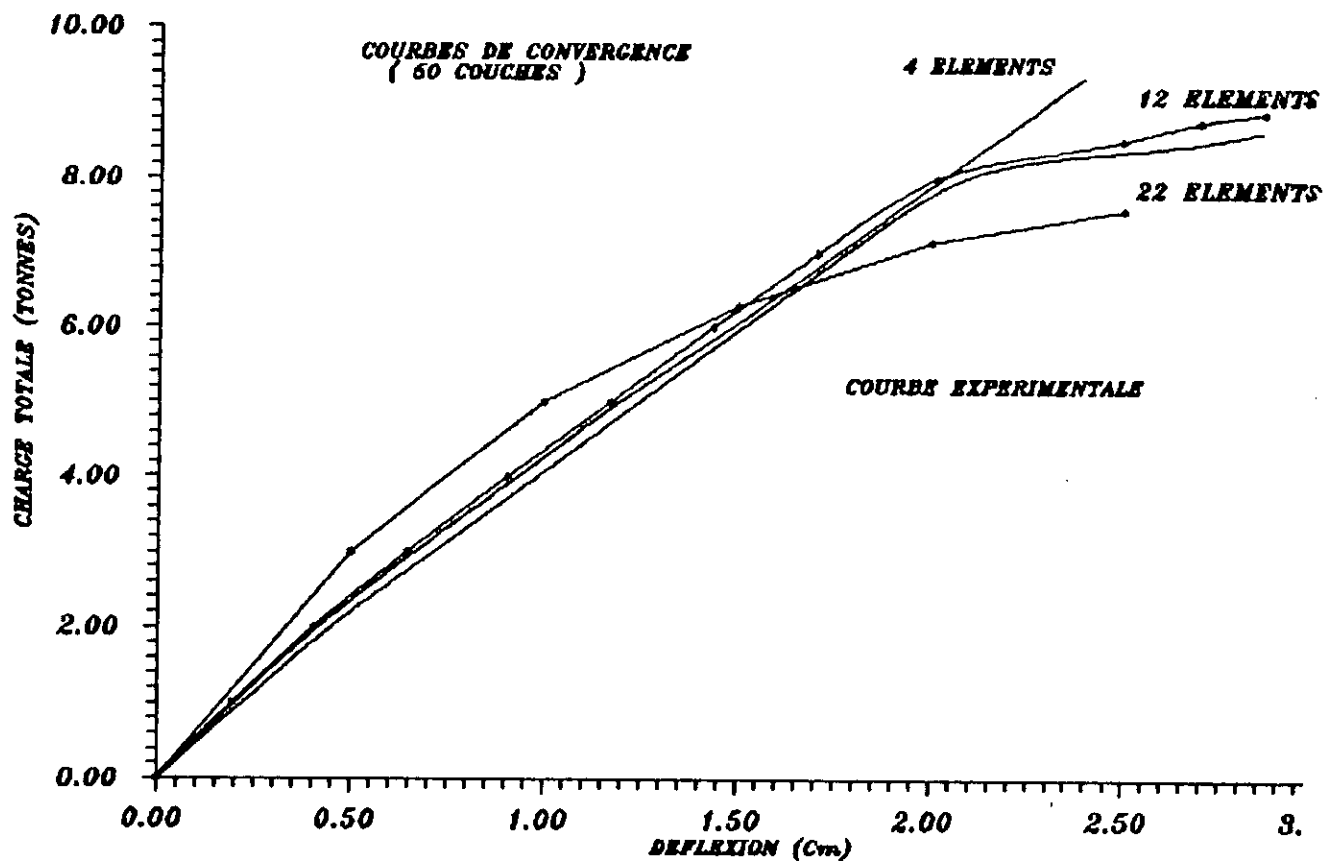
FIGURE-2 - PROPRIETES MATERIELS ET GEOMETRIQUES

(EXEMPLE 2)



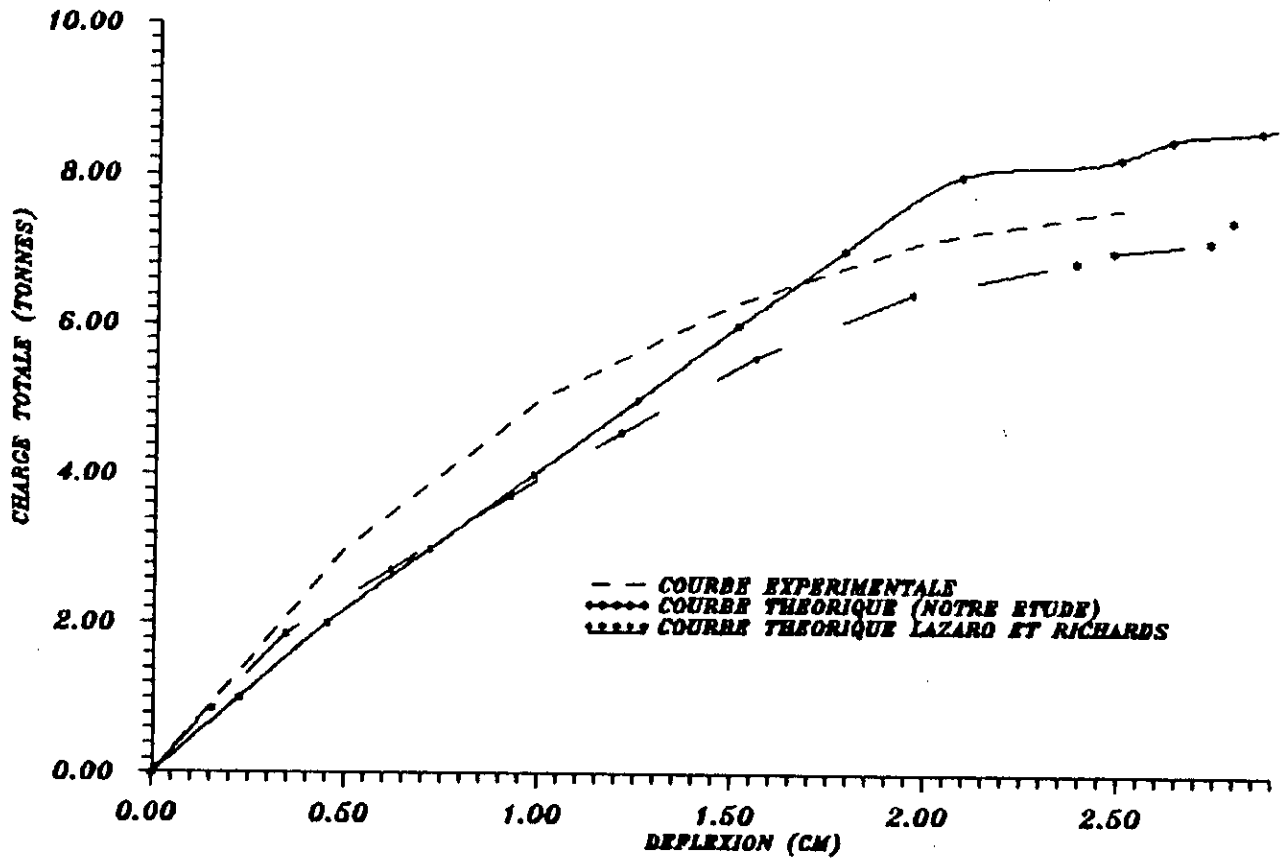
**COURBES CHARGE-DEFLEXION CENTRALE
POUR DIFFERENTS NOMBRE DE COUCHES**

FIGURE -3-



**COURBES CHARGE-DEFLEXION CENTALE
POUR DIFFERENTS NOMBRE D'ELEMENTS**

FIGURE -4-



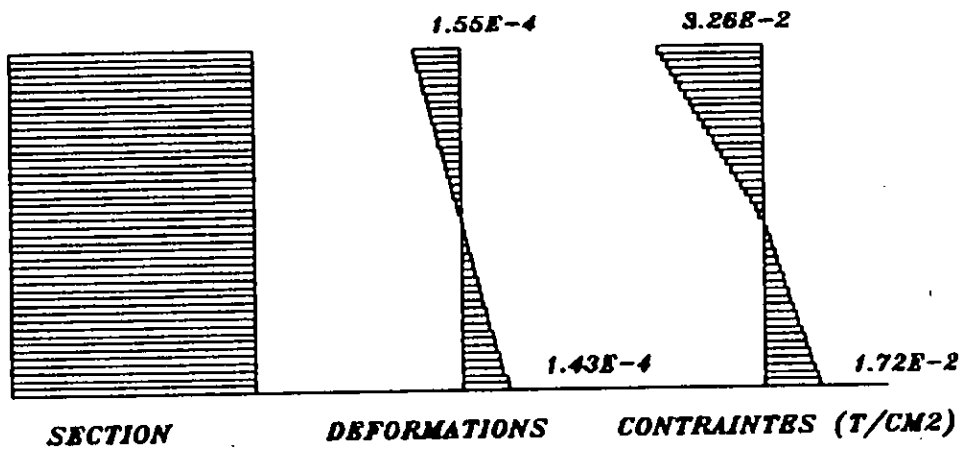
COURBE CHARGE DEFLEXION CENTRALE
 EXEMPLE : 2

FIGURE -5-

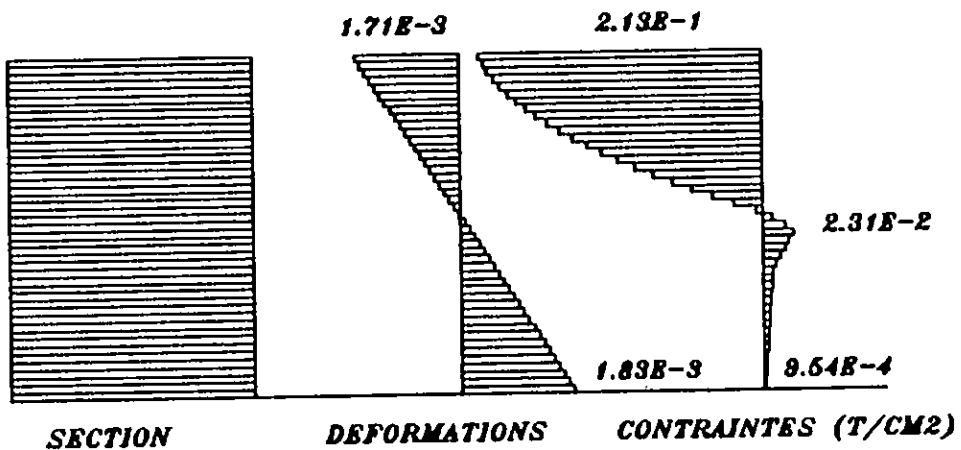
FIGURE -6-

DIAGRAMMES CONTRAINTES-DEFORMATION DE QUELQUES SECTIONS A LA RUPTURE

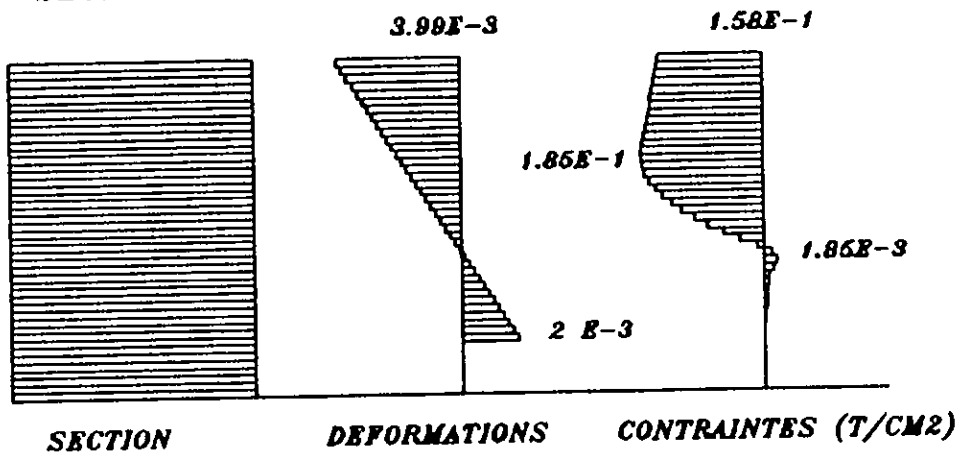
SECTION A-A:SECTION NON FISSUREE

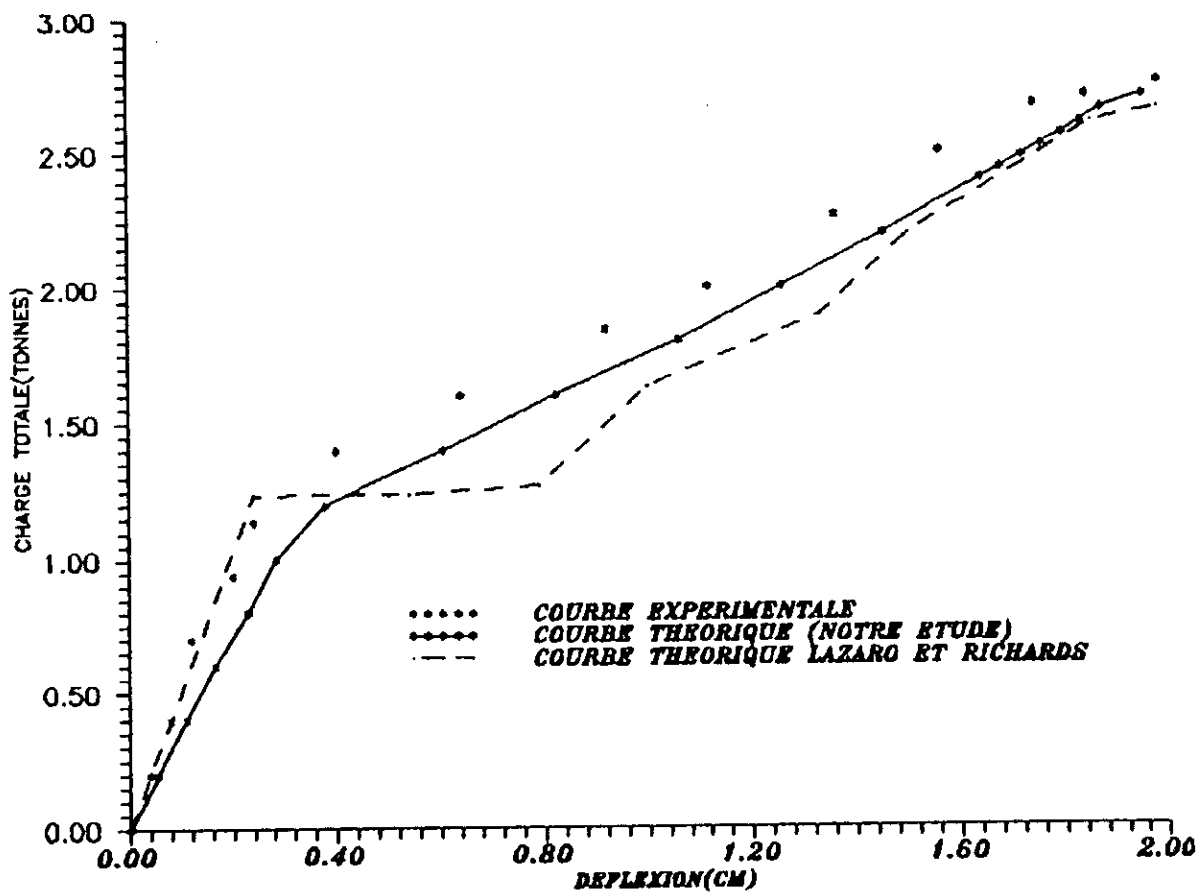


SECTION B-B:SECTION FISSUREE



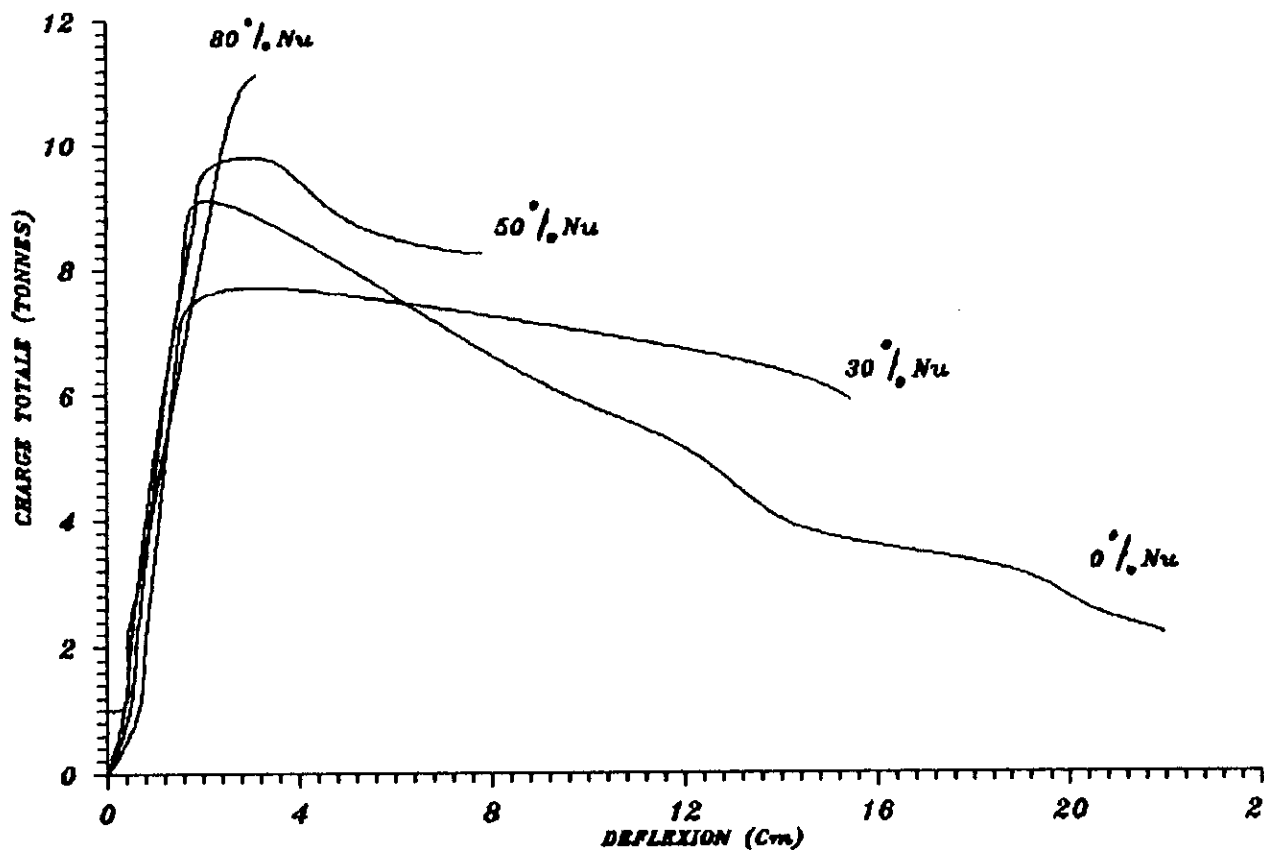
SECTION C-C:SECTION DE RUPTURE





COURBE CHARGE DEFLEXION CENTRALE
 EXEMPLE : 1

FIGURE -7-



**COURBES CHARGES DEFLEXIONS CENTRALES
 POUR DIFFERENTES VALEURS D'EFFORTS
 NORMAUX (22 ELEMENTS ET 60 COUCHES)**

FIGURE - 8 -

**COURBES CHARGES-DEFLEXIONS
POUR
DIFFERENTS TYPES DE CONFINEMENTS**

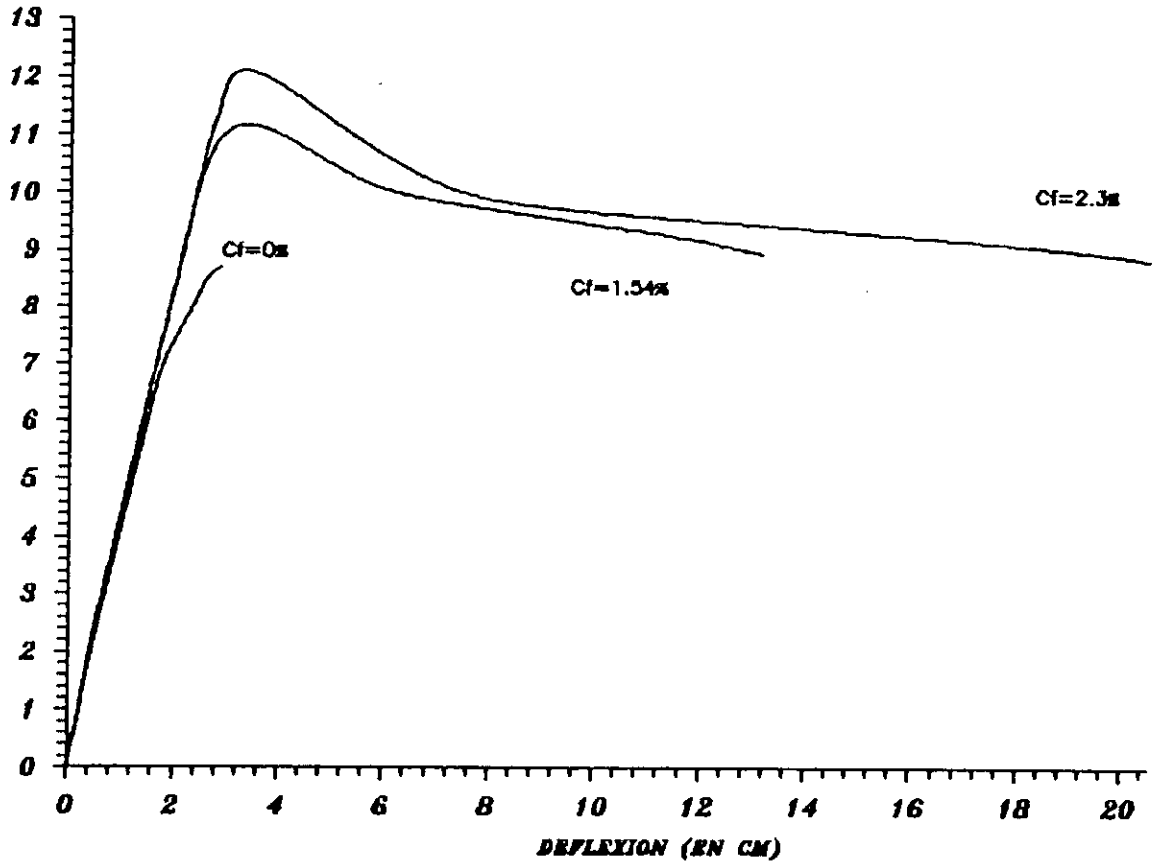


FIGURE -9-

CONCLUSION

Dans cette présente étude nous avons exposé une application de l'analyse non-linéaire à un matériau complexe mais aussi le plus utilisé en génie civil: le béton armé. Notre étude s'est limitée au comportement flexionnel des poutres et portiques en béton armé.

La modélisation utilisée s'est effectuée à deux niveaux:

-modélisation des relations contraintes-déformations du béton armé en flexion.

-modélisation géométrique de la structure par éléments finis multicouche.

Les déplacements et efforts sont déterminés non-linéairement par procédé itératif et incrémental établi sur la résolution du système linéaire, de telle manière à prendre en compte les non-linéarités matérielles du béton armé et les non-linéarités géométriques de la structure.

Le programme d'application réalisé nous a permis de simuler numériquement avec une grande précision l'effet de l'effort normal et du confinement du béton sur l'amélioration de la résistance à la flexion des poutres en béton armé.

Les méthodes de calcul non-linéaire sont suffisamment au point de nos jours pour connaître l'évolution quasi-réelle du comportement des structures. Ces méthodes impliquent l'utilisation de calculateurs puissants, cependant les progrès actuels en informatique permettent d'annuler le caractère potentiellement restrictif de cette condition.

Le développement des méthodes de calcul non-linéaire et son utilisation systématique permettront un perfectionnement des règles de calcul par une meilleure description du phénomène étudié et avec des répercussions considérables. Ce perfectionnement doit être aussi obtenu par une meilleure connaissance des propriétés mécaniques des matériaux de manière à avoir des modèles analytiques aussi précis que possible.

Lorsqu'on possède de tels modèles, les études de comportement par simulation numérique sont possibles. Les possibilités offertes seront alors extraordinaires puisqu'on pourra étudier le comportement de structures et de phénomènes complexes sans avoir recours à l'expérience et pour des coûts relativement modestes. L'étude numérique que nous avons réalisé sur l'amélioration de la ductilité des poutres en béton armé par le confinement en est un exemple. Il sera intéressant d'étudier d'autres phénomènes physiques plus complexes tel que le retrait, le fluage, le cisaillement, l'interaction béton-acier ...

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages:

K. J. BATHE. 'Finite Element Procedure in engineering analysis';
Prentice-Hall(1982)

R. D. COOK, D. S. MALKUS, M. E. PLESHA. 'Concepts and applications of finite
element analysis'; John Wiley & Sons(1989)

G. DHATT et G. TOUZOT. 'Une présentation de la méthode des éléments
finis des éléments finis'; Maloine S. A. Editeur, Paris(1984)

J. F. IMBERT 'Analyse des structures par éléments finis '(1984)

MARTIN, HAROLD CLIFFORD. 'Introduction to finite élément analysis'; Mc
Graw-Hill(1973)

O. RAHMANI, S. KEBDANI : 'Introduction à la méthode des éléments finis
'; OPU

K. C. ROCKEY, H. R. EVANS, D. W. GRIFFITHS, D. A. NETHERCOT. 'Introduction à la
méthode des éléments finis'; Eyrolles, Paris(1979)

O. C. ZIENKIEWICZ. 'The Finite Element Method'; McGraw-Hill, (1979)

J. SALENCON. 'Cours de calcul des structures anélastiques'(1987)

W. F. CHEN D. J. HAN. 'Plasticity for Structural Engineers'(1988)

B. ASANCHEYEV. 'Calcul des structures en basic'; Eyrolles(1984)

AUBOIN. 'Calcul des structures et informatique'; Eyrolles(1984)

PARK and PAULEY. 'Reinforced concrete structures' John Wiley and Sons
, Inc., New York ,1975

R. M. JONES. , 'Mechanic of composite material '. Technique of publishing CO. INC

D. GAY. , 'Materiaux composites '. Edition Hermes 1987 .

SW. TSAI. H. T. HAHN. , ' Introduction to composite matériel '.
Technique publishing CO. INC 1980 .

Articles:

LITTLE and PAPANONI . 'Size effect in Small-Scale Models of Reinforced Concrete Beams'. ACI Journal, Proceedings V. 63 No . 54, Nov. 1966, pp. 1191-1204.

MATTOCK, A. H., 'Redistribution of Design Bending Moment in Reinforced Concrete Continuous Beam' Proceedings, Institution of Civil Engineers (London), V. 13, 1959, pp. 35-45.

PARK, R., PRIESTLEY, M. J. M., W. D., 'Ductility of Square-Confined Concrete Columns . 'Journal of the Structural Division , ASCE, No . ST4, Avril 1982 , pp. 929-950.

CARRIRA, D. J., and CHU, K-H, 'Stress-Strain Relation-ship for Reinforced Concrete in Tension.' ACI Journal, Proceedings V. 83, No. 1, Janvier-Février 1986, p. 21-28.

CHAJES A., CHURCHILL J. E. 'Nonlinear Frame Analysis By Finite Element Methods'. Journal of Structural Engineering, Vol. 113, No 6, Juin 1987.

GRELAT. A. 'Comportement non linéaire et stabilité des ossatures en béton armé'. Annales de l'institut technique du bâtiment et des travaux publics. Nov 1978.

Cours:

CHARIF. Abdelhamid cours de post-graduation de l'Ecole Nationale. Polytechnique d'Alger E N P.