

10/87  
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المكتبة - المكتبة  
BIBLIOTHEQUE - المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT : D'ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**Quantificateur non symétrique  
pour une Source de Distribution  
Gamma**

Proposé par :

Mr CHEKIMA Ali

Etudié par :

KBAIER Habib

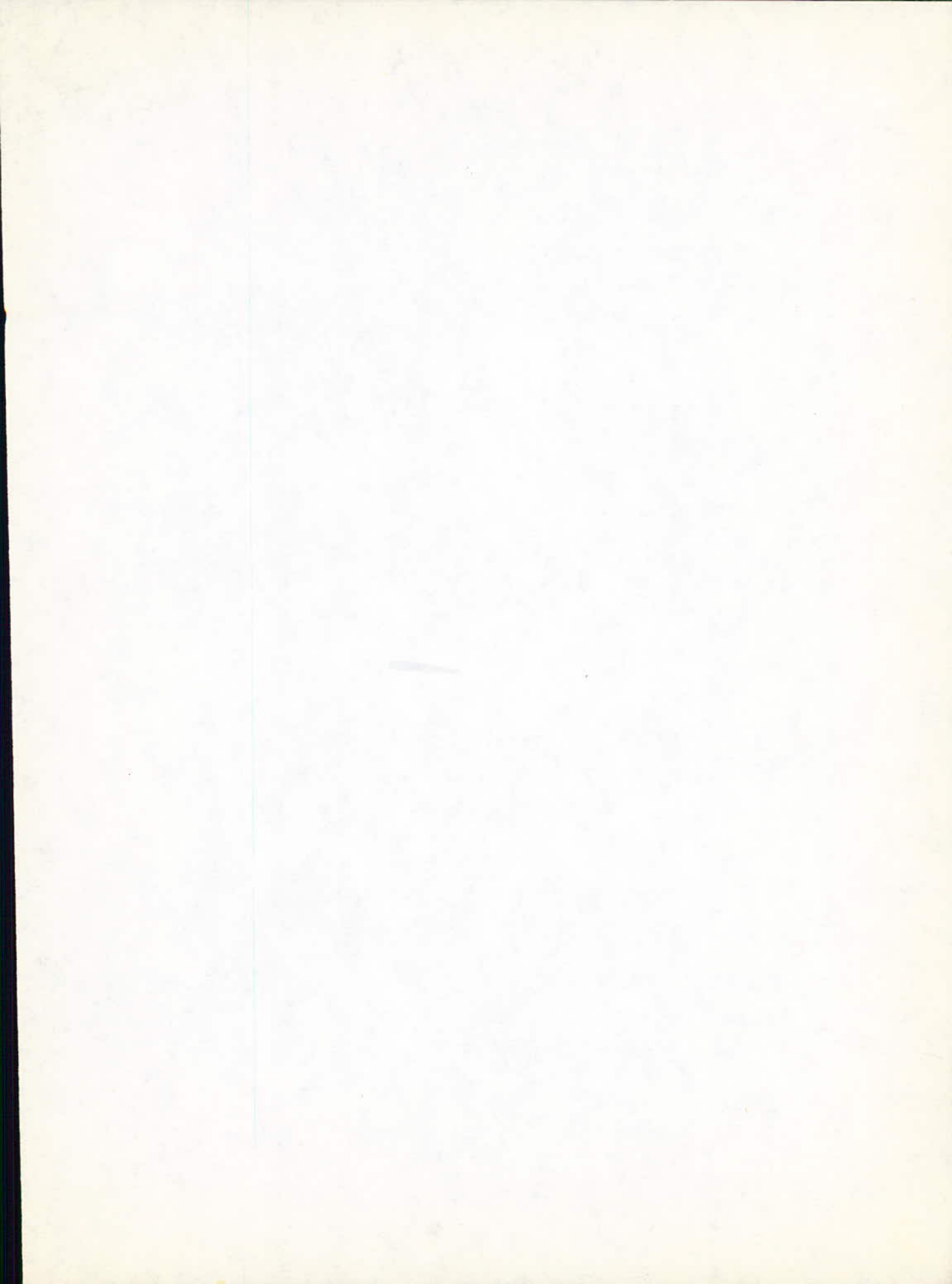
MOKEDDEM Abdelhamid

Dirigé par :

Mr CHEKIMA Ali

PROMOTION : JANVIER 1987

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi - EL-HARRACH — ALGER



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

# ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المكتبة الوطنية للتكنولوجيا  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT : D'ELECTRONIQUE

## PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

# **Quantificateur non symétrique pour une Source de Distribution Gamma**

Proposé par :

Mr CHEKIMA Ali

Etudié par :

KBAIER Habib

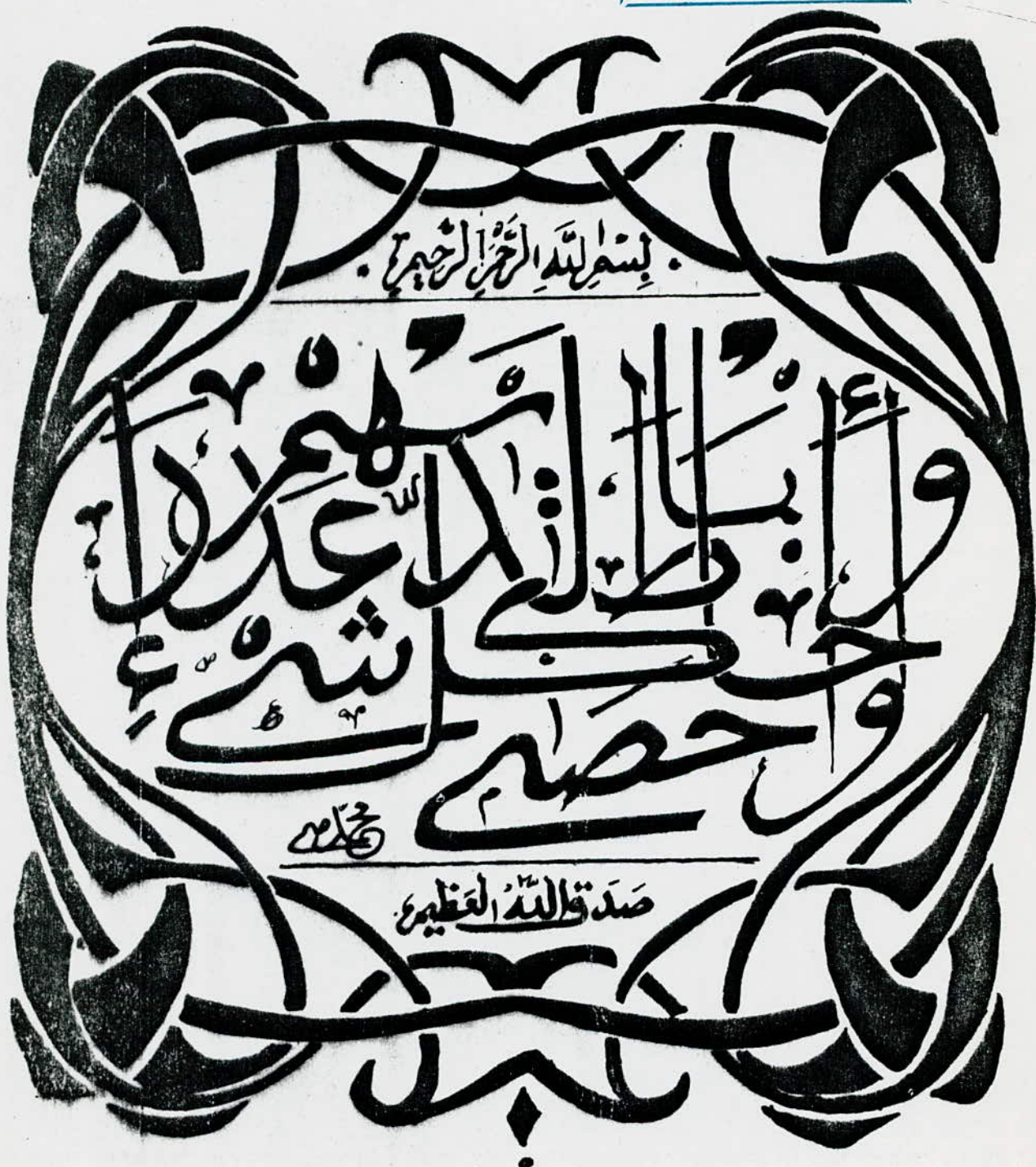
MOKEDDEM Abdelhamid

Dirigé par :

Mr CHEKIMA Ali

PROMOTION : JANVIER 1987

E.N.P. 10, Avenue Hacén Badi - EL-HARRACH — ALGER



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَاللَّهُ أَكْبَرُ  
وَالْحَمْدُ لِلَّهِ  
حَصْمٌ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

EDICACES  
=====


المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

- A mon père, à ma mère,
- A toute ma famille,
- A tous mes amis .

ABDELHAMID MOKEDDEM

- A mon père & à ma mère,
- A mon frère Ridha , pour tout le soutien moral ;
- A mes sœurs et Mustapha ,
- A tous mes Amis .

HABIB KBAIER

REMERCIEMENTS

Nous exprimons notre vive gratitude à Monsieur ALI CHEKIMA ,  
notre promoteur, pour toute l'aide qu'il nous a apportée durant  
l'élaboration de ce travail.

Nos remerciements vont également, à toute l'équipe du Centre  
de Calcul de l'Ecole Nationale Polytechnique .

Que tous ceux, qui ont contribué , de près ou de loin, à notre  
formation, trouvent ici l'expression de notre profonde reconnais-  
sance .

H.KBAIER et A.MOKEDDEM

Introduction .....	1
<u>Chapitre 1 : Théorie de l'information appliquée aux signaux numériques</u>	
1- Aperçu sur la théorie de l'information .....	3
1-1 Généralités .....	4
1-2 Formule de Hartley .....	4
1-3 Formule de Shannon .....	4
2- Processus stochastiques .....	4
<u>Chapitre 2 : Principes de la quantification</u>	
1- Généralités .....	8
2- Quantification .....	8
2-1 Définition .....	8
2-2 Principe .....	8
2-3 Quantificateur optimal .....	10
2-4 Configurations possibles d'un quantificateur .....	12
<u>Chapitre 3 : Conditions d'optimisation</u>	
1- Conditions nécessaires .....	15
2- Conditions suffisantes .....	16
<u>Chapitre 4 : Quantification non symétrique</u>	
1- Quantificateur uniforme .....	19
a) Problème de minimisation à deux dimensions de l'E.Q.M. ....	20
b) Algorithmes et commentaires .....	21
2- Quantificateur non uniforme .....	22
Méthode 1 de Lloyd .....	22
Méthode 2 de Lloyd-Max .....	22
3- Méthodes numériques adoptées .....	23
3-1 Méthodes d'intégration .....	23
3-2 Méthodes itératives .....	26
<u>Chapitre 5 : Résultats et interpretation</u>	
- Organigrammes .....	29
- Programmes & résultats .....	34

- Interprétations :

1 - Quantification non symétrique .....69

    1-1 Cas uniforme .....69

    1-2 Cas non uniforme .....75

    1-3 Comparaison uniforme/non uniforme .....76

2 - Comparaison symétrique/non symétrique .....79

Conclusion .....83

Annexe .....

Bibliographie .....



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# CHAPITRE 1

THEORIE DE L'INFORMATION APPLIQUEE AUX

SIGNAUX NUMERIQUES

## II INTRODUCTION

Dans beaucoup de domaines, il est devenu fréquent de comparer une grandeur analogique à une grandeur numérique ; ainsi, dans le domaine de la mesure, on utilise de plus en plus souvent, des indicateurs numériques pour visualiser les résultats; dans celui de la communication, on met en concurrence, la transmission d'une information sous une forme analogique et sous une forme numérique, etc. . Mais, ceci est lié à la possibilité de passer d'un signal analogique à sa représentation numérique et réciproquement. Ainsi, tout traitement numérique d'un signal analogique nécessite une opération préliminaire de conversion analogique-numérique. Si l'on désire restituer l'information initiale sous forme analogique après traitement, une transformation inverse est nécessaire .

Les opérations requises par ce processus sont :

- L'échantillonnage qui consiste à prélever périodiquement la valeur  $S(nt)$  d'une fonction analogique  $S(t)$  à l'entrée; ceci est une approximation dans l'espace des temps .
- La quantification, quant à elle consiste à remplacer l'amplitude exacte  $S(nt)$  de l'échantillon par un niveau  $S_q(nt)$  correspondant ; d'où une approximation dans l'espace des amplitudes .
- Le codage : la valeur  $S_q(nt)$ , ainsi quantifiée sera exprimée au moyen d'un code (ex: code binaire, ...) , sous forme d'un mot.

Notre travail, sera axé sur l'opération de quantification non symétrique d'une forme particulière de la densité de probabilité

gamma, modèle de la parole. [10]

Ainsi, dans le chapitre I, il est présenté un aperçu sur la théorie de l'information [1] et de la communication appliquées aux signaux numériques [3,4]. Nous y décrivons, aussi, l'importance de certaines lois de probabilités, dans la description des signaux physiques réels (non déterministes).

Au chapitre II, on présente les principes fondamentaux de la quantification et les concepts de son optimisation .

On procède, au chapitre III, au développement mathématique des conditions nécessaires et suffisantes d'optimisation .

L'étude proprement dite, (algorithmes, méthodes numériques adoptées ...), du quantificateur non symétrique pour la loi gamma fera l'objet du chapitre IV.

Enfin, au dernier chapitre, nous donnons les interprétations des résultats obtenus .

## 4- Aperçu sur la théorie de l'information

### 1-1 Généralités

La théorie de l'information s'occupe des problèmes mathématique soulevés par la conservation , la transmission et la transformation de l'information . [ 1 ]

Pour traiter ce genre de problèmes ; il faut d'abord définir une mesure objective de l'information (i.e., qui fait abstraction de la nature de cette information et aussi de son contenu.) .

### 1-2 Formule de Hartley

Soit un ensemble E comportant exactement  $N=2^n$  éléments . Un élément quelconque de E sera totalement caractérisé par une suite de n termes de 0 ou 1 , donc par n unités d'information . D'où la formule de Hartley :

$$I(E_N) = \log_2 N \quad , \quad N \in \mathbf{IN} \quad (1)$$

où  $I(E_N)$  représente l'information nécessaire pour caractériser les éléments d'un ensemble  $E_N$  , à N éléments.

Remarque :

Cette formule reste valable même si N n'est pas une puissance (entière) de 2 , et repose sur 3 postulats (voir Annexe 1 ) .

### 1-3 Formule de Shannon

Si à toute distribution de probabilités , discrète , finie , on fait correspondre un nombre  $I(\mathcal{P}) = I(p_1, p_2, \dots, p_N)$ , alors

$$I(\mathcal{P}) = - \sum_{k=1}^N p_k \cdot \log_2 p_k \quad (2)$$

(2) est appelée formule de Shannon , elle exprime l'entropie de la distribution  $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$  . [ 1, 3 ]

## 2- Processus stochastiques

La théorie de communication traite principalement des processus stochastiques, dont les variations temporelles sont aléatoires, nécessitant alors, une description statistique .

L'application d'une telle description à un processus  $x(t)$  n'étant complète que si, pour une séquence d'instants  $t_1, t_2, \dots, t_m$  nous pouvons donner la fonction de densité de probabilité (f.d.p)  $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$  des valeurs de ce processus aux instants choisis [3].

Ainsi la connaissance des propriétés statistiques d'un signal peuvent être utilisées pour résoudre le problème de sa propre détection et d'en extraire l'information efficacement .

En effet, il existe des signaux physiques suivant des densités de probabilité usuelles, à titre d'exemple :

- En transmission HF, un signal composé de moins de 6 ondes sinusoidales et indépendant des fluctuations de phase, donnerait une variation dont l'enveloppe suit une loi de Rayleigh et une phase uniformément distribuée . [4]

- D'autres exemples qui ont des statistiques de Rayleigh (exactement ou approximativement), sont l'enveloppe de passe-bande d'un processus Gaussien, les modules des transformées de Fourier de n'importe quel processus fig.(1) . [ 8 ]

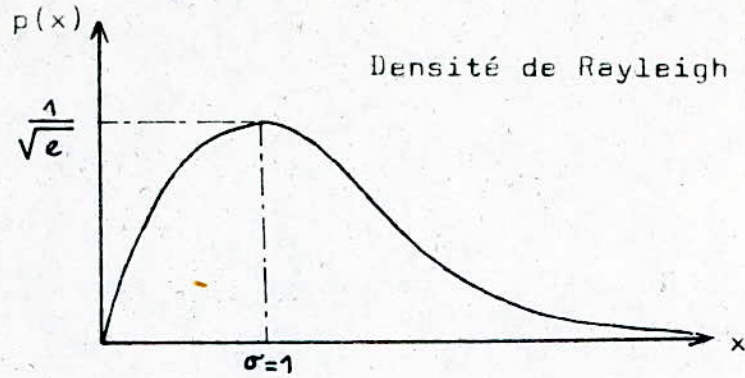


fig.( 1 )

La densité de Rayleigh est donnée par :

$$P(x) = x \cdot \exp(-x^2/2) \quad \text{pour } \sigma = 1$$

- Il existe aussi le bruit blanc ( bruit thermique , bruit dans les tubes à vides et dans les semi-conducteurs, etc. ) dont la distribution des valeurs instantannées suit la loi de Gauss , [4] , [5] , [12] .

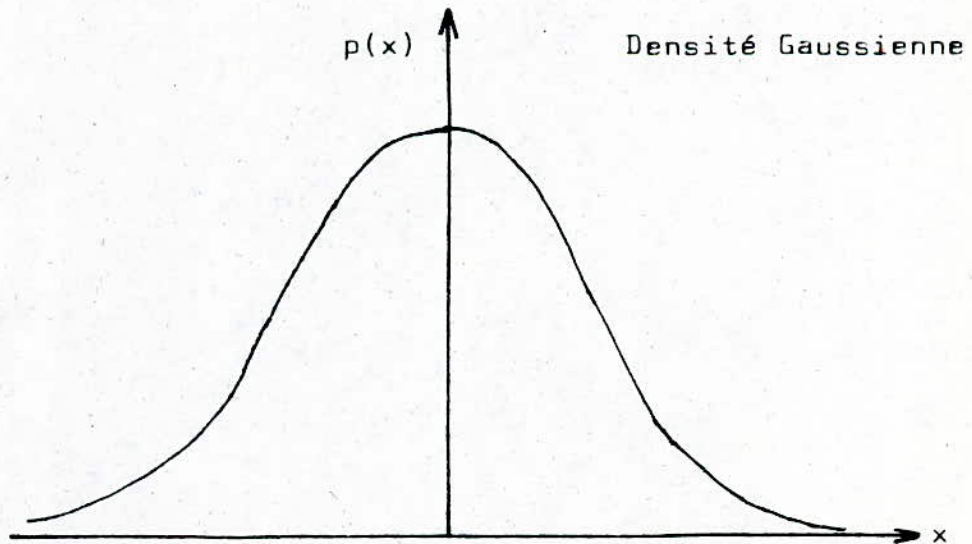


fig.( 2 )

La loi Gaussienne est donnée par :  $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(-x^2/2)$  ,  $\sigma = 1$

- Paez et Glisson [10] ont examiné-suite à des travaux de Mc Donald [28] - expérimentalement la densité de probabilité d'un signal réel de la parole et proposèrent ainsi une forme spéciale de la densité gamma :

$$P(x) = \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\exp(-k|x|)}{\sqrt{|x|}}$$

comme une bonne approximation de la densité de la parole .

Une autre approximation qui est moins précise mais beaucoup plus simple est la densité de Laplace :

$$P(x) = \frac{\alpha}{2} \cdot \exp(-\alpha|x|)$$

pour la densité gamma, la variance est :

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{0.75}}{k}$$

pour la densité de Laplace, la variance est :

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$$

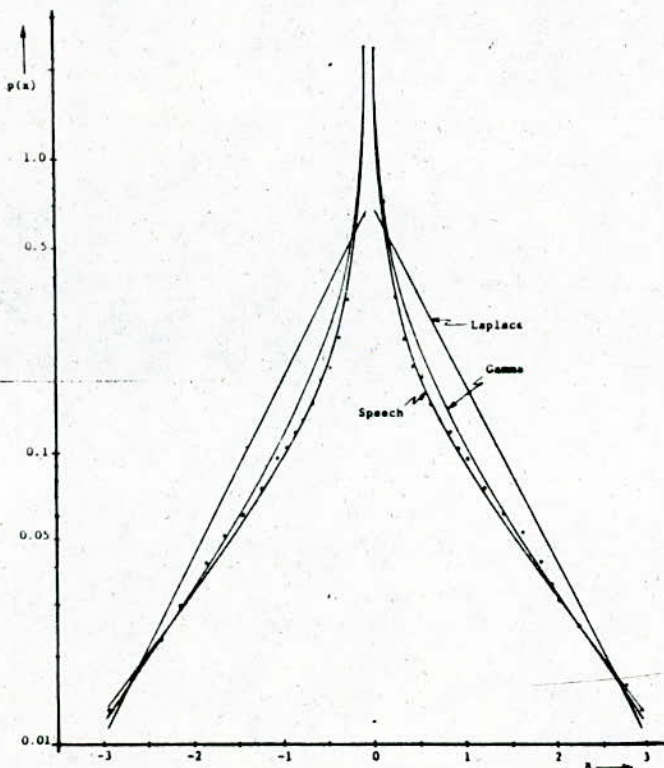


Fig. 3. Real speech and theoretical gamma and Laplace probability densities.

Dans la fig.(3) les densités gamma et de Laplace sont comparées à une densité réelle de la parole déterminée expérimentalement; par conséquent la loi gamma apparaît comme une meilleure approximation pour le signal de la parole .



## CHAPITRE 2

PRINCIPES DE LA QUANTIFICATION

## 1- Généralités

Dans beaucoup de systèmes de transmission de données, les signaux analogiques à l'entrées sont préalablement convertis sous forme digitale au niveau de l'émetteur, transmise sous cette forme et finalement reconstituée au niveau du récepteur comme signaux analogiques fig.(4). Le signal résultant doit normalement ressembler au signal d'entrée mais ce n'est pas le cas réellement car, à l'émission - comme nous allons le voir ci-dessous - l'opération de quantification introduit une erreur systématique dans le signal numérique.

Du moment, que le taux de transmission digitale pour tous système est fini (contrainte technologique), on doit utiliser un quantificateur dont l'entrée est subdivisée en un nombre fini d'intervalles  $N$ , [15].

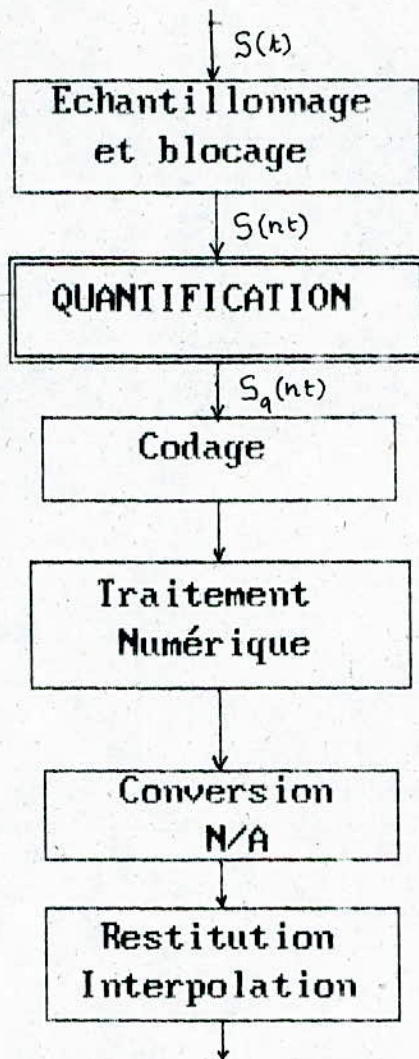
## 2- Quantification

### 2-1 Définition

La quantification est l'opération qui consiste à remplacer la valeur exacte du signal par une valeur choisie parmi les  $N$  valeurs quantifiées. On substitue donc, un nombre fini d'information, à une infinité de valeurs possibles de la grandeur analogique. C'est donc, une opération essentiellement non linéaire. [2]

### 2-2 Principe

Pour une valeur de  $N$  donnée, le quantificateur est décrit par les extrémités  $X_k$  des  $N$  intervalles d'entrée, et les niveaux de sortie  $Y_k$  correspondants. Si la densité de probabilité de l'amplitude du signal d'entrée du quantificateur est donnée, alors,



Etapes du processus du traitement numérique d'un signal  
FIG( 4 )

sa sortie est une quantité dont la densité de probabilité peut être facilement déterminée en fonction des  $X_k$  ( $k=0,1,\dots,N$ ) et  $Y_k$  ( $k=1,2,\dots,N$ ) . [14,15,16]

Soient:  $X_0, X_1, \dots, X_N$  les seuils du quantificateur et  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$  ses niveaux de sortie; on a:

$$Y_k \Leftrightarrow \{X_{k-1} < X \leq X_k\} \quad , k=1,2,\dots,N \quad (3)$$

c'est-à-dire qu'à toute valeur d'entrée  $X$ , comprise dans  $]X_{k-1}, X_k]$  le quantificateur fait correspondre un seul et même niveau  $Y_k$  à la sortie .

Par convention, les  $X_k$  sont choisis dans l'ordre croissant et les deux seuils extrêmes sont  $X_0 = -\infty$  et  $X_N = +\infty$  .

Les intervalles  $]X_{k-1}, X_k]$  sont ,par définition, disjointes.

### 2-3 Quantificateur optimal

Pour chaque quantificateur défini ci-dessous, on fait associer deux grandeurs  $R$  et  $D$  appelées, respectivement, taux d'entropie et moyenne de distorsion, qui déterminent la performance du quantificateur . [ 22 ]

#### 2-3-1 Entropie d'une source

Définition : L'entropie  $R$  à la sortie d'un quantificateur est la quantité minimale totale nécessaire à transmettre pour pouvoir reconstituer le signal avec une erreur arbitrairement petite [17,16].

Elle est donnée par :

$$R = - \sum_{i=1}^N p_i \cdot \log_2 p_i \quad (\text{bits/échantillon}) \quad , \quad (4)$$

(4) est inspirée de la formule de Shannon (2) .

2-3-2 Distorsion d'un quantificateur

a) Définition

Souvent, il est approprié de définir la mesure de la distorsion du processus de quantification, comme une statistique de l'erreur de quantification, [ 15 ] .

On définit D, la distorsion, comme l'espérance mathématique, de f(ξ), où f(.) est une fonction dérivable, et ξ est l'erreur de quantification. On fait appel à la densité de probabilité d'entrée P(x), alors,

$$D = E [ f(\text{Sin} - \text{Sout}) ]$$

$$= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x - Y_i) \cdot P(x) \cdot dx \quad (5)$$

f(.) est appelée critère de fidélité .

b) Choix du critère de fidélité

La distorsion D de quantification peut être formulée de différentes manières selon le choix de la fonction f(.). On utilise, notamment,  $|x - Y_i|^2$  pour désigner l'erreur quadratique moyenne, et  $|x - Y_i|^r$  avec  $r > 0$ , pour le critère de la puissance r-ème. Afin de pouvoir résoudre le problème, analytiquement et numériquement, f(.) doit être différentiable, et monotone croissante. Ainsi les conditions nécessaires pour un minimum local peuvent être facilement obtenues, [ 15, 19 ] .

Dans cette étude, nous avons choisi l'erreur quadratique moyenne comme critère de fidélité, pour:

- la simplicité de calcul,
- pouvoir comparer nos résultats avec ceux déjà publiés .

Soit,  $f(x - Y_i) = (x - Y_i)^2$ , il vient :

$$D = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - Y_i)^2 \cdot P(x) \cdot dx \quad (6)$$

avec  $X_0 = -\infty$  ,  $X_N = +\infty$

### 2-3-3 Définitions du quantificateur optimal

a) Définition 1 :

Un quantificateur est dit optimum selon Lloyd-Max, s'il minimise la distorsion moyenne pour un nombre N de niveaux fixe .

b) Définition 2 :

Un quantificateur à N niveaux est dit optimum sujet à entropie limitée, s'il minimise la distorsion moyenne pour une entropie de sortie inférieure à une valeur donnée [5] .

### 2-4 Configurations possibles d'un quantificateur

#### 2-4-1 Quantificateur symétrique / non symétrique :

Définition 1:

Les paramètres d'un quantificateur symétrique sont déterminés

- Dans le cas non uniforme, fig.(5a), à partir des équations de Max [15], appliquées à  $[0, +\infty[$  .

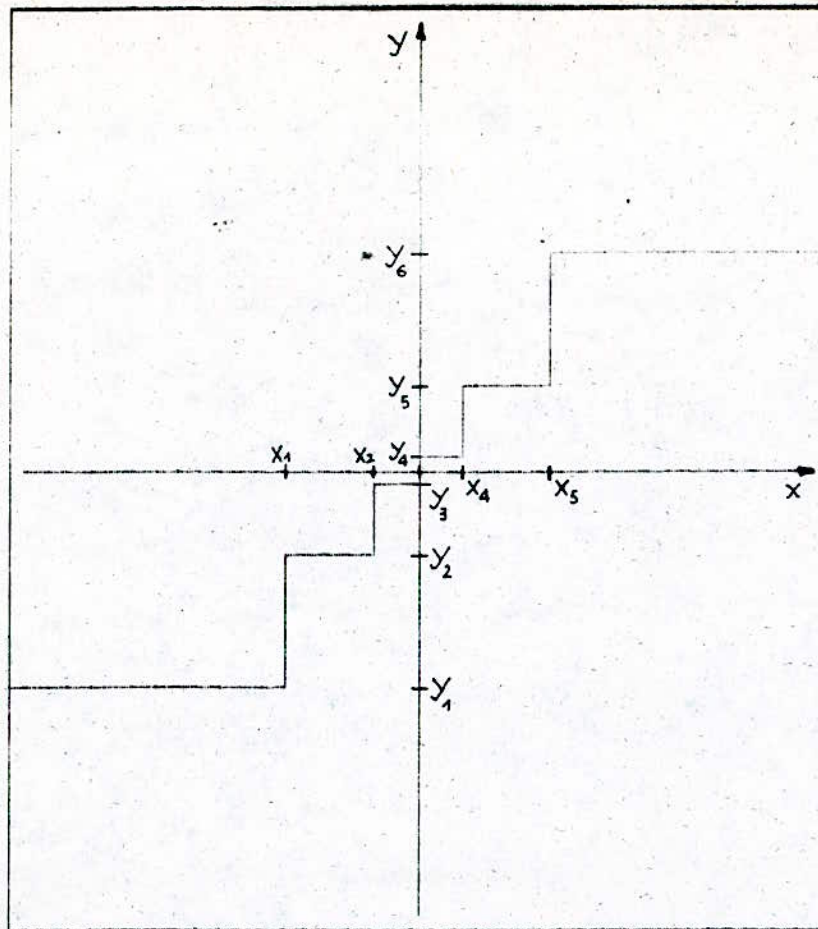
- Pour le cas uniforme ,fig(6a), avec un décalage nul dans  $[0, +\infty[$  .

Définition 2:

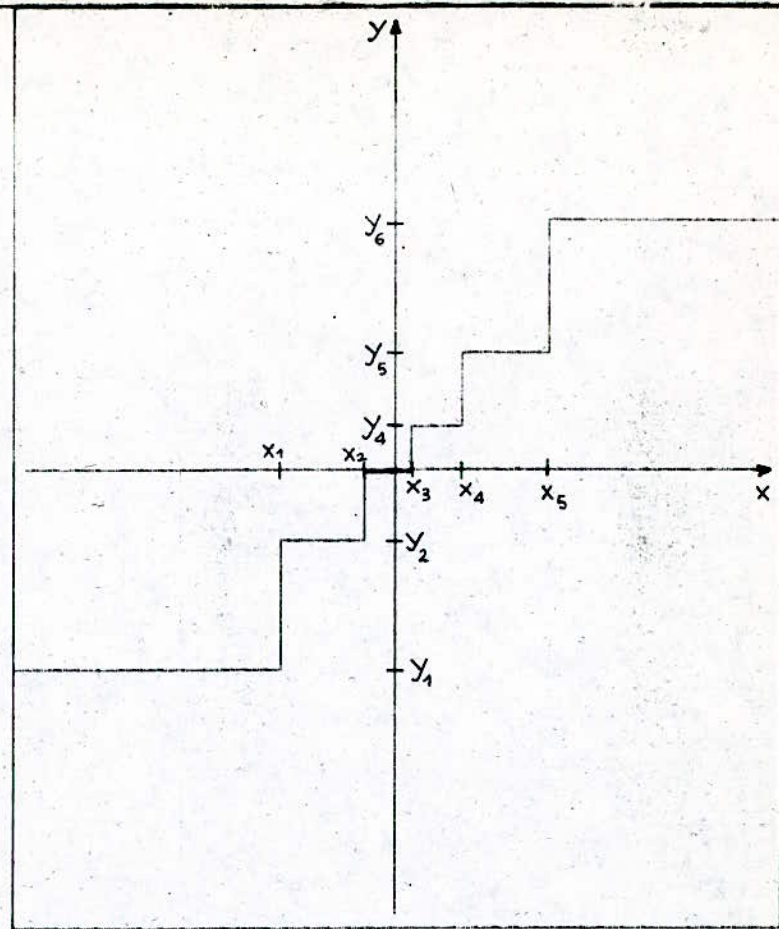
Les paramètres d'un quantificateur non symétrique sont obtenus

- Dans le cas non uniforme ,fig(5b), à partir des équations de Max [15] ; dans l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$  .

- Pour le cas uniforme, fig(6b), avec un décalage non nul dans  $]-\infty, +\infty[$  .

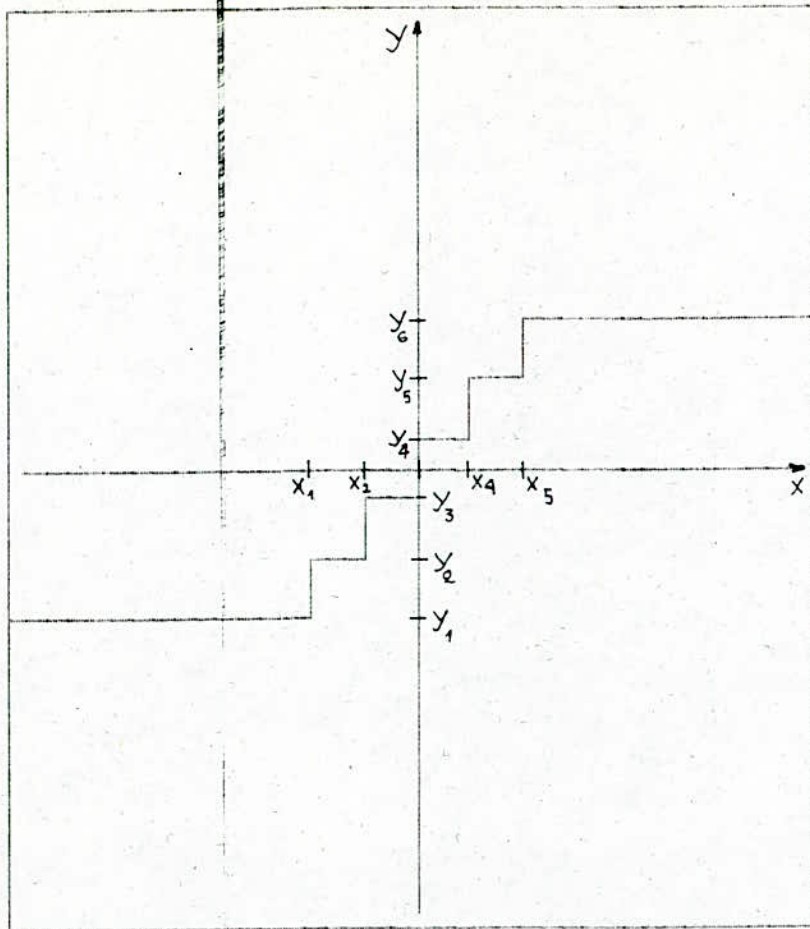


a) Symétrique

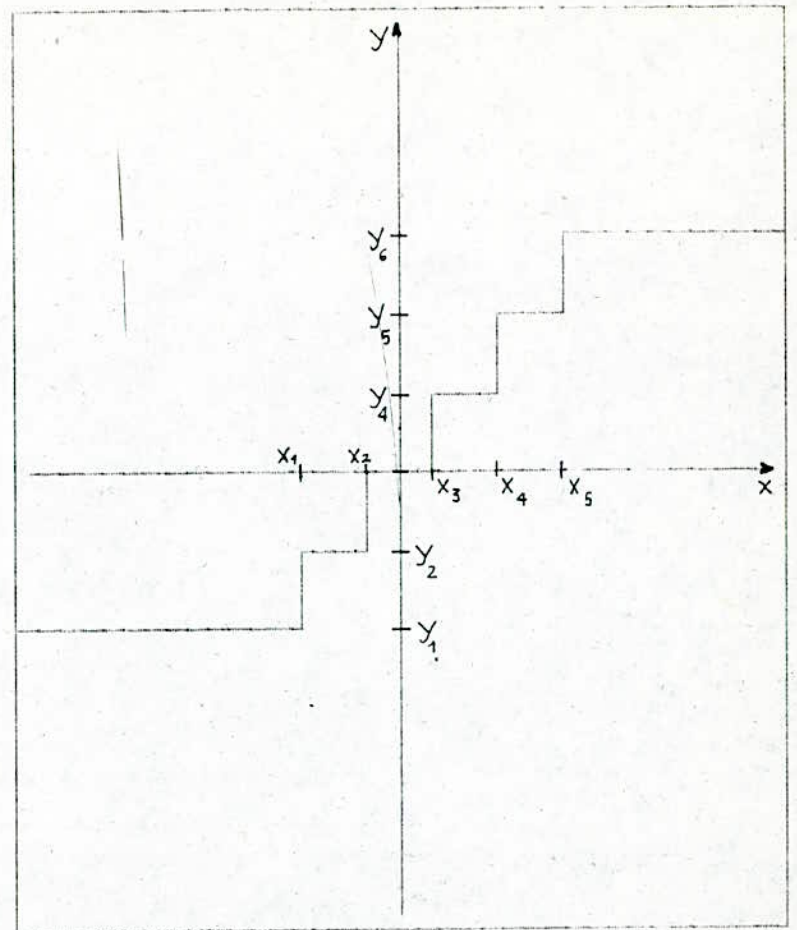


b) non symétrique

Exemple de configuration de quantification non uniforme à 6 niveaux  
fig( 5 )



a) Symétrique



b) Non symétrique

Exemples de configurations de quantification uniforme à 6 niveaux  
fig( 6 )



## **CHAPITRE 3**

CONDITIONS D'OPTIMISATION

Conditions d'optimisation

Nous utilisons la définition 1 (chap. 2) de Lloyd-Max afin de déterminer le quantificateur optimal, c'est-à-dire celui qui minimise la distorsion  $D$  pour un nombre de niveaux  $N$  fixe.

$$\text{Soit, } D = \min_{\sum_{i=1}^N X_i} \int_{X_{i-1}}^{X_i} f(x - Y_i) \cdot P(x) \cdot dx, \quad X_0 = -\infty, \quad X_N = +\infty$$

1- Conditions nécessaires

Les conditions nécessaires d'optimisation sont obtenues en dérivant  $D$  respectivement, par rapport, aux  $X_i$  et  $Y_i$ , et en égalisant ces dérivées à zéro :

$$\text{Soit : } D = \int_{X_0}^{X_1} f(x - Y_1) \cdot P(x) \cdot dx + \dots + \int_{X_{i-1}}^{X_i} f(x - Y_i) \cdot P(x) \cdot dx + \int_{X_i}^{X_{i+1}} f(x - Y_{i+1}) \cdot P(x) \cdot dx + \dots + \int_{X_{N-1}}^{X_N} f(x - Y_N) \cdot P(x) \cdot dx ;$$

Si  $f(x - Y_i) \cdot P(x)$  est une fonction continue, alors [13],

$$\frac{\partial D}{\partial X_i} = f(X_i - Y_i) \cdot P(X_i) - f(X_i - Y_{i+1}) \cdot P(X_i) ,$$

$$\text{donc } \frac{\partial D}{\partial X_i} = 0 \Rightarrow [f(X_i - Y_i) - f(X_i - Y_{i+1})] \cdot P(X_i) = 0 , \quad (7) ;$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1 .$$

$$\text{Et } \frac{\partial D}{\partial Y_i} = - \int_{X_{i-1}}^{X_i} f'_{Y_i}(x - Y_i) \cdot P(x) \cdot dx ,$$

$$\text{si } \frac{\partial D}{\partial Y_i} = 0 \text{ alors, } \int_{X_{i-1}}^{X_i} f'(x - Y_i) \cdot P(x) \cdot dx = 0 , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

(7) devient (si  $P(x) \neq 0$ ) ,

$$f(X_i - Y_i) = f(X_i - Y_{i+1}) , \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (9)$$

$$\text{et (8) sera : } \int_{X_{i-1}}^{X_i} f'(x - Y_i) \cdot P(x) \cdot dx = 0 , \quad i = 1, 2, \dots, N . \quad (10)$$

nottons que les conditions (9) et (10), développées pour la première fois par Max [15], sont nécessaires mais, ne sont pas suffisantes pour trouver le minimum absolu de D. Elles donnent seulement les points critiques pour lesquels, on évalue la distorsion correspondante.

Si on exige, de  $f(\cdot)$  qu'elle soit monotone croissante, et paire, i.e.,

$$f(0)=0 \quad ,$$

$$f(x-Y_i)=f(x+Y_i) \quad ;$$

alors (7)  $\Rightarrow$   $|X_i - Y_i| = |X_i - Y_{i+1}| \quad , \quad i=1,2,\dots,N-1$

or, on a  $Y_i \neq Y_{i+1}$  , donc :

$$X_i = \frac{Y_i + Y_{i+1}}{2} \quad , \quad i=1,2,\dots,N-1 \quad (11)$$

D'autre part, on a :  $f(x-Y_i)=(x-Y_i)^2$  ; (8) donnerait, alors :

$$\int_{X_{i-1}}^{X_i} (x-Y_i) \cdot P(x) \cdot dx = 0 \quad , \quad \int_{X_{i-1}}^{X_i} x \cdot P(x) \cdot dx = Y_i \int_{X_{i-1}}^{X_i} P(x) \cdot dx \quad , \quad i=1,2,\dots,N \quad (12).$$

Nous déduisons, alors, de (11) et (12) que :

- $X_i$  ( $i=1,2,\dots,N-1$ ) doit être le milieu de  $[Y_i, Y_{i+1}]$  .
- $Y_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) est le centroïde de l'aire de  $P(x)$  entre  $X_i$  et  $X_{i-1}$  .

## 2- Conditions suffisantes

Fleisher [20] a été le premier à avoir déterminé la condition suffisante pour l'unicité du quantificateur optimal dans le cas de l'erreur quadratique moyenne .

Soit une fonction de densité de probabilité  $P(x)$ ; si on a :

$$\frac{\partial^2 \log P(x)}{\partial x^2} < 0 \quad , \quad (13)$$

alors  $P(x)$  possède un quantificateur optimal absolu unique c'est-à-dire que les équations nécessaires admettent une seule solution .

Le test de log-concavité (13) est facilement, vérifié pour

pour la distribution Gaussienne (symétrique par rapport à sa moyenne)

Remarque

Tout quantificateur d'une distribution symétrique n'est, à priori, pas unique. En effet, on peut trouver, un autre avec les mêmes performances (R,D) par simple réflexion de sa caractéristique à la moyenne. Cet argument indique, que si, la distribution considérée est log-concave, alors son quantificateur optimal et unique, serait symétrique (i.e., il est confondu avec sa réflexion par rapport à l'origine) [ 14,16 ] .

Pour le cas des distributions de Laplace et de Rayleigh ou, autres distributions considérées en [ 26 ],  $[\log P(x)]'$  n'est pas strictement décroissante ( $\exists x, t.q. \frac{\partial^2 \log P(x)}{\partial x^2} = 0$ ) . Trushkin [ 9 ] a démontré que pour chacune de ces densités il existe un quantificateur optimal unique .

Dans notre cas, il est intéressant de voir le comportement de la fonction de densité de gamma généralisée vis-à-vis de la log-concavité.

soit : 
$$P(x) = \frac{\lambda(\lambda|x|)^{a-1} \cdot \exp(-\lambda|x|)}{2 \Gamma(a)} , \quad (14)$$

le paramètre  $\lambda$  fixe la variance de la distribution :

$$\sigma^2 = \frac{a(a+1)}{\lambda^2}$$

La fonction de densité (14) devient Laplacienne pour  $a=1$  . Pour la distribution prise comme modèle de la parole [ 10 ],  $a=1/2$  dans la formule (14).

Le test de log-concavité pour la loi gamma donne :

$$\frac{\partial^2 \log P(x)}{\partial x^2} = -\frac{2(a-1)}{x^2} ; x \neq 0$$

On conclut donc :

- La densité de gamma généralisée , n'est log-concave, que si,  $a \geq 1$  ( l'égalité a été donnée par Trushkin [9] )
- Le modèle de la parole ( $a = \frac{1}{2}$  ) ne vérifie pas , par conséquent, la log-concavité .Ce qui nous a obligé à chercher l'existence d'un quantificateur optimal parmi les non symétriques .

## **CHAPITRE 4**

QUANTIFICATION NON SYMETRIQUE

### 1- Quantificateur uniforme

Dans beaucoup d'applications, les convertisseurs analogique-numériques commerciaux, à grande vitesse, sont limités généralement à transformer des intervalles égaux, en des niveaux de sortie milieux. Aussi, on voudrait connaître le meilleur pas de quantification  $\Delta$  à utiliser, (i.e., donnant la distorsion minimale pour un nombre de niveaux  $N$  fixe) [5,15 et 22].

Si on envisage une distribution symétrique, et des niveaux symétriques par rapport à l'origine, sont désirés, à la sortie; le problème devient à une dimension. On a, alors :

$$Y_i = \left(i - \frac{N+1}{2}\right) \cdot \Delta, \quad i=1,2,\dots,N \quad (15)$$

C'est-à-dire que la distorsion  $D$  est fonction du pas  $\Delta$ . Par contre, si on considère, la même distribution avec des niveaux non symétriques à la sortie, le problème devient à deux dimensions et nous avons :

$$Y_i = \left(i - \frac{N+1}{2}\right) \cdot \Delta + \mathcal{E}, \quad i=1,2,\dots,N \quad (16)$$

La distorsion est fonction du pas  $\Delta$  et du décalage  $\mathcal{E}$  par rapport à la quantification symétrique.

Pour ces deux cas, Lloyd [21], a noté que les seuils seront donnés :

$$X_i = \frac{Y_i + Y_{i+1}}{2}, \quad i=1,2,\dots,N-1 \quad (17)$$

(16) et (17) donnent :

$$X_i = \left(i - \frac{N}{2}\right) \cdot \Delta + \mathcal{E}, \quad i=1,2,\dots,N-1 \quad (18)$$

Donc, les tailles du pas, et du décalage, seront calculées par le biais, d'une minimisation bidimensionnelle. Nous avons comme fonction objective l'erreur quadratique moyenne. D'autre part on démontre (dans l'Annexe 2) que la distorsion D est indépendante du signe de  $\varepsilon$ .

a) Problème de minimisation à deux dimensions de l'E.Q.M

D'après (6), on a :

$$D = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - Y_i)^2 \cdot P(x) dx, \quad \begin{cases} X_0 = -\infty \\ X_N = +\infty \end{cases}$$

On voit bien que l'intégrale est fonction, uniquement, de  $Y_i$ . Cette dernière étant fonction de  $\Delta$  et  $\varepsilon$ ; D l'est aussi, par conséquent.

En substituant (15) dans (6) :

$$D = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[ x - \left( i - \frac{N+1}{2} \right) \Delta + \varepsilon \right]^2 \cdot P(x) \cdot dx \quad (19),$$

Les conditions nécessaires pour l'existence d'un extrémum (minimum ou maximum), sont :

$$\frac{\partial D}{\partial \Delta} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (20) \quad ;$$

S'ils existent des couples  $(\Delta_0, \varepsilon_0)$ , pour lesquels (20) est vérifiée, et si les dérivées partielles de D sont continues jusqu'au troisième ordre inclus, alors ces points critiques seraient des minimums, si :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 D(\Delta_0, \varepsilon_0)}{\partial \Delta^2} \cdot \frac{\partial^2 D(\Delta_0, \varepsilon_0)}{\partial \varepsilon^2} - \left[ \frac{\partial^2 D(\Delta_0, \varepsilon_0)}{\partial \Delta \cdot \partial \varepsilon} \right]^2 > 0 \\ \text{et} \quad & \frac{\partial^2 D(\Delta_0, \varepsilon_0)}{\partial \Delta^2} > 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$



La résolution analytique de (20) et (21) est une tâche difficile .  
Pour cela on doit faire recours à la résolution numérique selon  
les algorithmes suivants .

b) Algorithmes et commentaires

4 Première approche : effet du décalage sur la distorsion

On introduit, comme données :

- Le nombre de niveaux  $N$ ,
- Les valeurs, initiale  $\Delta_i$  et finale  $\Delta_f$ , du pas de quantification,
- Les valeurs, initiale  $\varepsilon_i$  et finale  $\varepsilon_f$ , du décalage .
- Les pas d'incrémentation de  $\Delta$  et  $\varepsilon$  .

On calcule, ensuite, la distorsion et l'entropie correspondante  
à partir des seuils  $X_i$  ( $i=0,1,\dots,N$ ) et des niveaux  $Y_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ );  
à l'aide des équations (16) et (16) .

Les valeurs ainsi calculées seront imprimées, et le décalage  
sera décrémenté jusqu'à sa valeur finale .

Ce même procédé de calcul sera repris pour une autre valeur  
de  $\Delta$  .

Ainsi, nous aurions trouvés une famille de quantificateurs pour  
chaque valeur de  $\Delta$ , dont on choisira celui qui présentera la dis-  
tortion la plus faible et, par conséquent, nous aurions localisé  
le décalage  $\varepsilon$  optimal pour chaque  $\Delta$  (voir organigramme 1) .

Deuxième approche :

Nous avons trouvé, par la méthode ci-dessus, qu'il existe,  
pour chaque  $\Delta$ , un  $\varepsilon$  optimal assez proche de  $\frac{\Delta}{2}$  . Nous reprenons,  
ici, l'algorithme précédent et on cherchera  $D_{min}$  autour de  $\varepsilon = \frac{\Delta}{2}$  .  
On n'imprimera que les valeurs  $R, D_{min}$  pour chaque  $\Delta$  (organigramme 2).

## 2- Quantificateur non uniforme

Dans ,les quantificateurs non uniformes,les intervalles d'entrés]  $X_{i-1} , X_i]$  ,  $i=1,2,\dots,N$ ,ne sont pas nécessairement égaux. De même les niveaux de sorties  $Y_i ; i=1,2,\dots,N$ ,ne sont pas équidistants. les paramètres de ce type de quantificateur sont calculés à partir des équations (11) et (12) qui constituent la base d'un processus iteratif déterminant les quantificateurs localement optimaux.Cependant,il existe 2 méthodes itératives pour résoudre(11&12).

### a) Méthode I [2]

Dans cette première version,souvent appelée méthode I de Lloyd, on fait un choix initial de l'ensemble des niveaux de sortie. Ensuite, un ensemble de seuils de décisions, correspondant à ces niveaux, est déterminé à partir de (11).Finalement, on utilise (12) afin de déterminer un nouveau ensemble de niveaux de sortie optimum pour les seuils calculés.

Ces deux opérations, constituent une itération. A la fin d'une itération, l'E.Q.M aura diminué ou demeurera inchangée (organigramme 3).

### b) Méthode II

Une technique variationnelle, appelée méthode II, a été proposée par Lloyd-Max. Elle implique une recherche unidimensionnelle. En y procède à un choix initial du premier niveau de sortie  $Y_1$ . La valeur du seuil  $X_0$  étant connue, le prochain seuil  $X_1$  peut être évalué à l'aide de (12) par une technique itérative.

Ce même procédé sera appliqué au prochain intervalle, en utilisant (11) pour déterminer  $Y_2$  à partir de  $X_1$  et  $Y_1$  .

Et ainsi, le processus continue, intervalle par intervalle, jusqu'à

détermination de la totalité des niveaux de sortie .

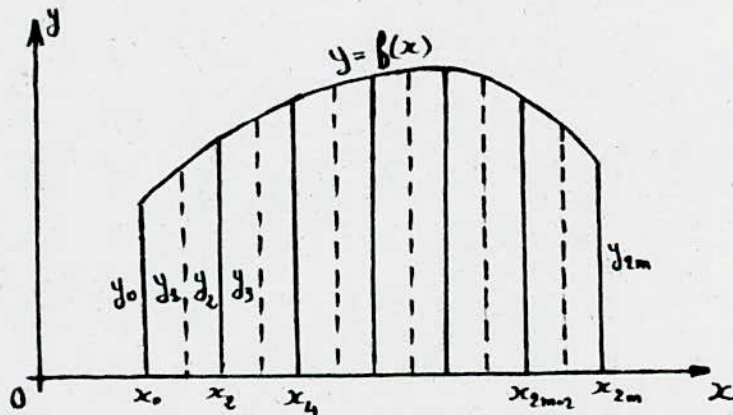
Enfin, nous testerons si  $Y_N$  est égal à  $Y_N^*$  ( $Y_N^*$  est le centroïde de l'aire de  $P(x)$  entre  $X_{N-1}$  et  $X_N$ ). Si tel est le cas, on arrête . Sinon, la différence entre  $Y_N$  et  $Y_N^*$  servira à évaluer le nouveau estimé de  $Y_1$  . ( organigramme 4 ) .

### 3- Méthodes numériques adoptées

#### 3-1 Méthodes d'intégration

##### a) Méthode de Simpson

Soient  $n=2m$ , ( $m \in \mathbb{N}$ ) et  $y_i=f(x)$ ;  $i=0,1,\dots,n$  ; les valeurs de la fonction  $y=f(x)$ , pour les points équidistants  $a=x_0, x_1, \dots, x_n=b$  ; (a et b sont les bornes d'intégration), le pas d'intégration sera  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$  .



En appliquant, la formule de Simpson [7,6,13] , pour chaque intervalle  $[x_0, x_2]$ ,  $[x_2, x_4]$ , ...,  $[x_{2m-2}, x_{2m}]$ , de longueur  $2h$ , fig. ci-dessus

Nous aurons :

$$\int_a^b y \, dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3} (y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})$$

$$\approx \frac{h}{3} \left[ (y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) \right] ;$$

Posons

$$\sigma_1 = y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1} \quad ,$$

$$\sigma_2 = y_2 + y_4 + \dots + y_{2m} \quad ;$$

$$\Rightarrow \int_a^b y \, dx \approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_1) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2] \quad , \quad (22) \quad ;$$

(22) est appelée formule de Simpson [7, 6].

Si  $y \in C^{(4)}[a, b]$ , ( $y$ , quatre fois dérivables), l'erreur  $E$  due à l'application de la formule de Simpson est :

$$E = -\frac{(b-a) \cdot h^4}{180} \cdot M_4$$

avec  $M_4 = \max |y^{(4)}(x)|$ ,  $x \in [a, b]$ .

Pour la loi gamma on a :

$$|E_g| \approx 10^{-7}$$

Pour plus de détails sur le calcul de cette erreur, voir [7].

b) Méthode de L.V. Kantorovich

La densité de probabilité gamma, présente une discontinuité au point zéro. Donc, la méthode de Simpson ne peut être appliquée directement; car elle exige -comme tout autre méthode numérique d'intégration - la continuité de la fonction.

Pour résoudre ce problème, on a eu recours à la méthode de Kantorovich [7] pour traiter la singularité.

Cette méthode, consiste à extraire de la fonction considérée  $f(x)$ , une certaine fonction  $g(x)$  ayant les mêmes singularités que  $f(x)$ , et qui soit intégrable dans l'intervalle.  $f(x)-g(x)$  doit être suffisamment lisse sur l'intervalle considéré.

Par exemple :  $f(x)-g(x) \in C^{(m)}[a, b]$  où  $m \geq 1$ .

On aura :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx + \int_a^b (f(x)-g(x)) \, dx \quad ;$$

Où la première intégrale est prise directement . La seconde se calcule, sans peine, à l'aide des méthodes usuelles.

Dans notre cas :

$$f(x) = p(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\exp(-k|x|)}{|x|^{1/2}}$$

On trouve :

$$\int_a^b g(x) dx = \frac{\eta}{2} \cdot \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}} \cdot \left( 2|x|^{1/2} - \frac{2}{3} k|x|^{3/2} + \frac{k^2}{5} |x|^{5/2} - \frac{k^3}{21} |x|^{7/2} + \frac{k^4}{108} |x|^{9/2} \right),$$

$$\text{avec } \eta = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \geq 0, \\ -1 & \text{pour } x \leq 0, \end{cases}$$

$$\text{et } f(x) - g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x|}} \left[ \exp(-k|x|) - \left( 1 - k|x| + \frac{(k|x|)^2}{2} - \frac{(k|x|)^3}{6} + \frac{(k|x|)^4}{24} \right) \right], & \text{pour } x \neq 0 ; \\ 0 & \text{pour } x = 0 . \end{cases}$$

Remarque

Le calcul des différentes intégrales est fait dans le domaine  $[-16, +16]$  (i.e.,  $x_0 = -16$ ,  $x_N = 16$ ; assimilée aux bornes infinies).

### 3-2 Méthodes itératives

#### 3-2-1 Méthode de Newton-Raphson

On a vu que l'algorithme de Max se basait sur un choix initial de  $y_1$  et sa modification s'il s'avère inapproprié; c'est-à-dire que  $y_N$  n'est pas le centroïde de l'aire comprise entre  $x_{N-1}$  et  $x_N$ . Soit cette aire,

$$\delta_N = \int_{x_{N-1}}^{x_N} (x - Y_N) P(x) dx ; \quad (23)$$

Notons que  $\delta_N$  est fonction du niveau initial  $Y_1$ .

Le problème de quantification optimale peut être considéré comme la recherche d'une solution numérique à l'aide d'un procédé itératif pour l'équation non linéaire  $\delta(Y_1) = 0$ , [24].

Notons, aussi que la solution de cette équation existe toujours [27].

A partir des conditions (11) et (12) trouvées par Max, on tire:

$$x'_i = \frac{dx_i}{dY_1} = \frac{x'_{i-1} \cdot (x_{i-1} - Y_1) \cdot P(x_{i-1}) + Y'_1 \int_{x_{i-1}}^{x_i} P(x) dx}{(x_i - Y_1) \cdot P(x_i)} \quad (24)$$

$$Y'_{i+1} = \frac{dY_{i+1}}{dY_1} = 2x'_i - Y'_i \quad (25)$$

$$\text{Avec } i=1, 2, \dots, N-1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'_0 = 0 \\ Y'_1 = 1 \end{cases}$$

De (23) on aura :

$$\delta'_N(Y_1) = \frac{d\delta(Y_1)}{dY_1} = x'_{N-1} \cdot (Y_N - x_{N-1}) \cdot P(x_{N-1}) - Y'_N \int_{x_{N-1}}^{x_N} P(x) dx, \quad (26)$$

En utilisant la méthode de Newton-Raphson d'ordre 2, [12,13,7] on peut modifier la valeur de  $Y_1$  après chaque itération par:

$$Y_1^{(k+1)} = Y_1^{(k)} - \frac{\delta_N(Y_1^{(k)})}{\delta'_N(Y_1^{(k)})} \quad (27)$$

Où  $k$  indique le nombre d'itérations.

Nous remarquons, enfin, que la plus part des calculs de (23) et (26) sont issus de l'algorithme standard de Max.

### 3-2-2 Méthode de Régula-Falsi

(variante de Dichotomie de Bolzano) [12]

Pour la recherche de  $x_i$  à partir de  $Y_i$  et de  $x_{i-1}$ , on utilise le procédé suivant :

$$\begin{aligned} \delta_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - Y_i) P(x) dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - Y_i) \cdot P(x) \cdot dx + \int_{Y_i}^{x_i} (x - Y_i) \cdot p(x) \cdot dx \end{aligned}$$

Le premier terme de cette somme étant connu, on fait varier  $x_i$  à partir de  $Y_i$  d'un pas positif, jusqu'à ce que  $\delta_i$  devienne légèrement positif.

La solution,  $\delta_i = 0$ , se trouvera alors, dans un intervalle réduit  $[x_{i-1} - w, x_i]$ . Ainsi, on peut appliquer la méthode de Bolzano, dont l'algorithme est le suivant :

a) - Calcul de  $y_d = \delta_i(x_d)$ , où  $x_d = x_i^{(0)}$

b) -  $x_i^{(k)} = \frac{x_d + x_g}{2}$ , avec  $x_g = x_i^{(0)} - w$

$g_i^{(k)} = \delta_i(x_i^{(k)})$

c) - On calcule  $Z = g_d \cdot g_i^{(k)}$ ,

si  $Z > 0$  alors,  $x_d = x_i^{(k)}$  et  $g_d = g_i^{(k)}$  ;

si  $Z < 0$  alors,  $x_g = x_i^{(k)}$  et  $g_g = g_i^{(k)}$  ;

a) - arrêter si  $|x_g - x_d| < e$  , e est un nombre très petit .

Remarque :

Si l'on choisit la solution  $x_i = \frac{x_g + x_d}{2}$  , l'erreur maximale commise, dans le calcul des niveaux et des seuils sera  $e/2$  . Dans notre cas , on a choisi  $e = 2 \cdot 10^{-5}$  , par conséquent l'erreur maximale est égale à  $10^{-5}$  .

N.B. : Les programmes ont été développés sur VAX 11/750  
et les graphes sur Olivetti H24 .

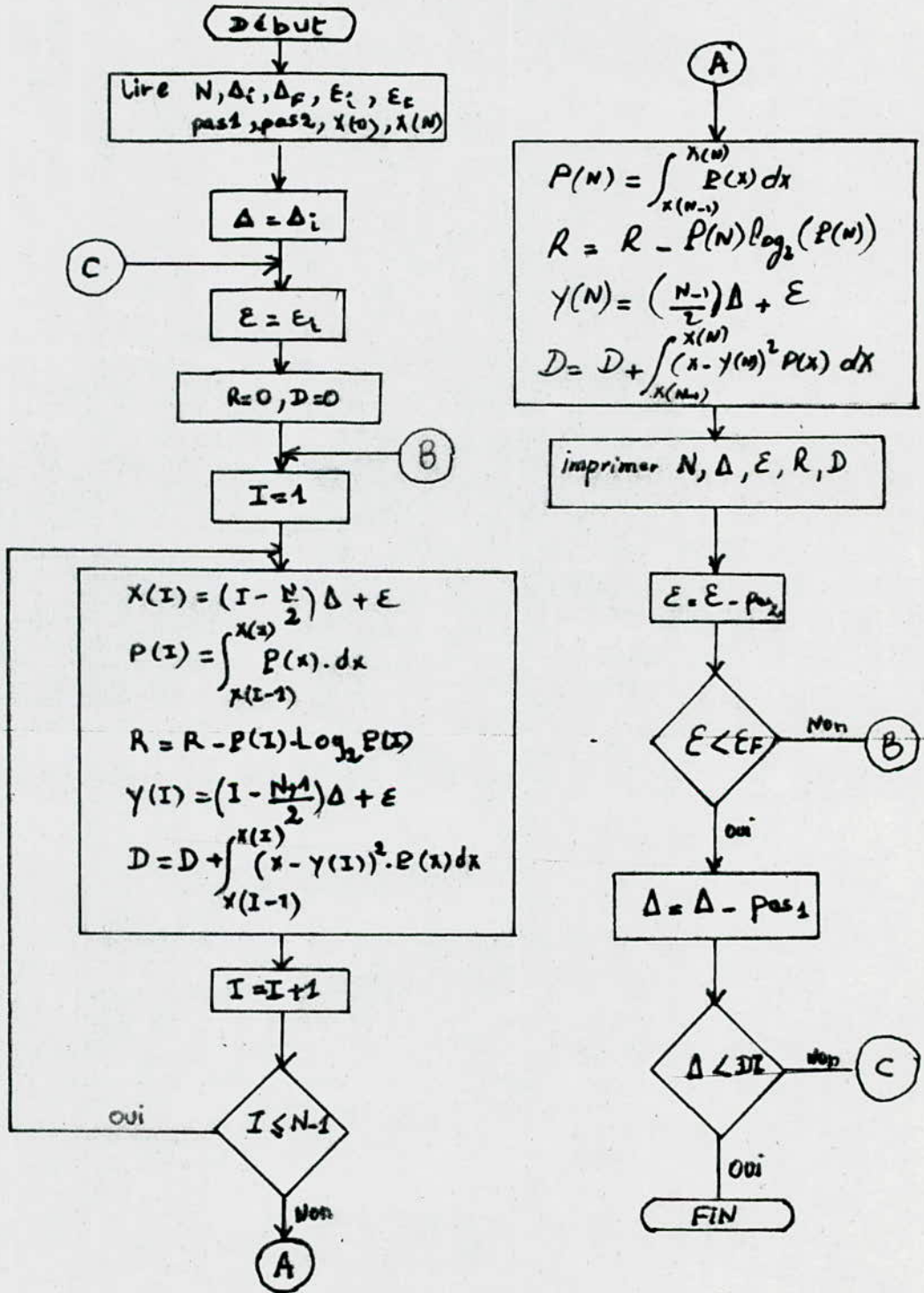


## CHAPITRE 5

RESULTATS ET INTERPRETATIONS

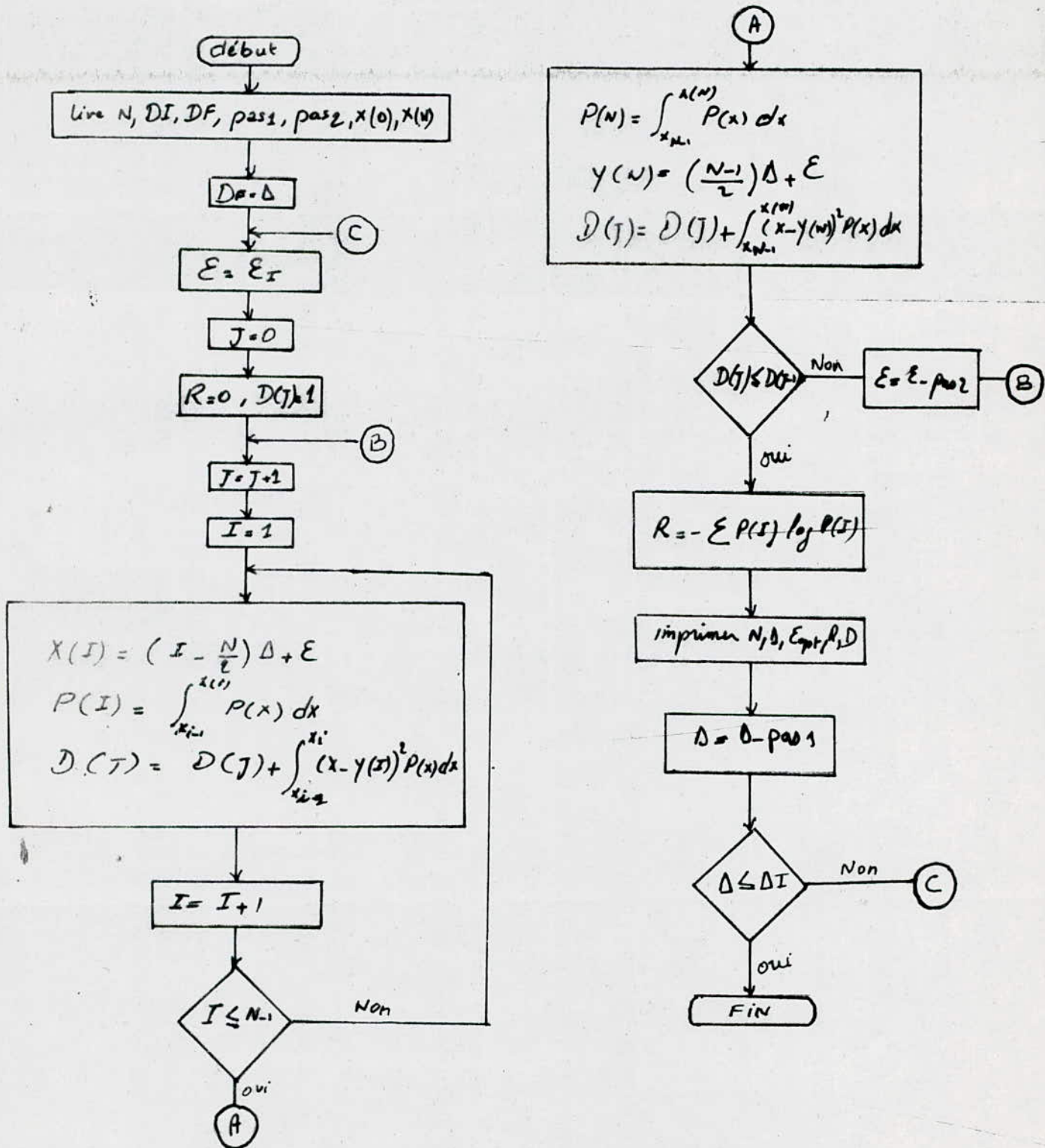
# Organigramme 1

## Quantification uniforme (1<sup>er</sup> approche)

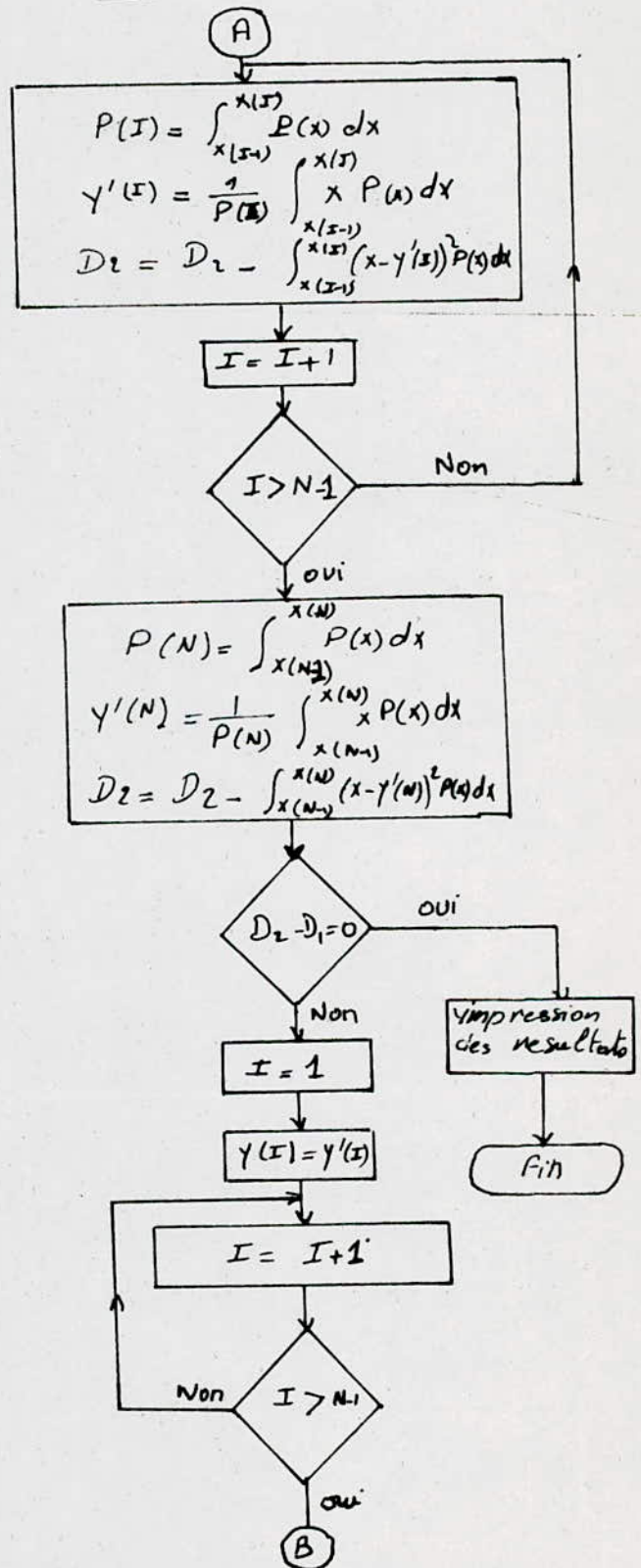
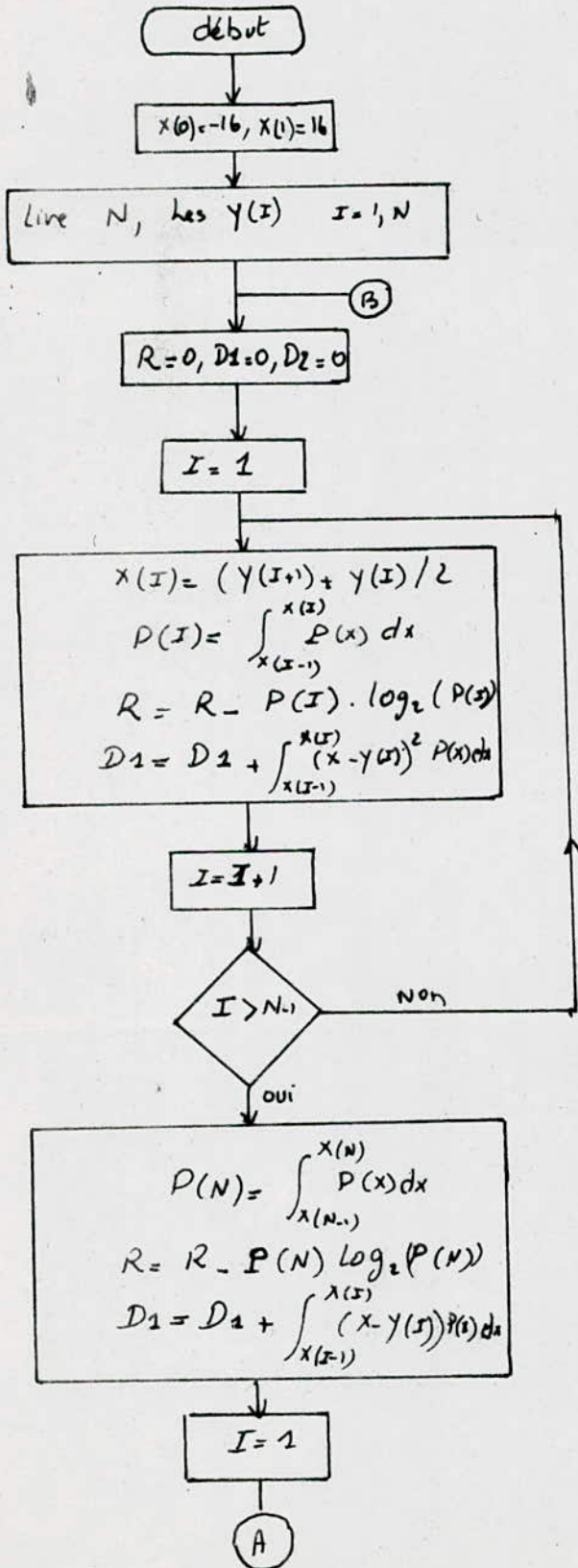


# Organigramme 2

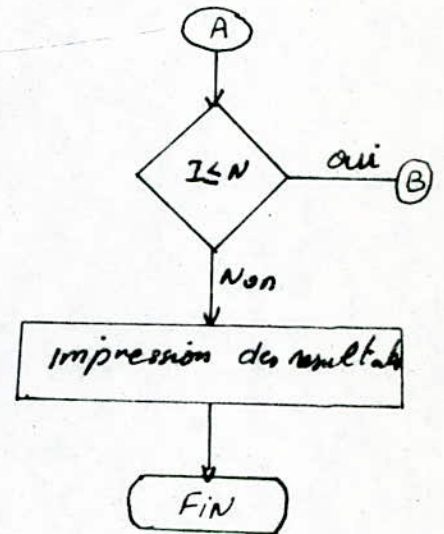
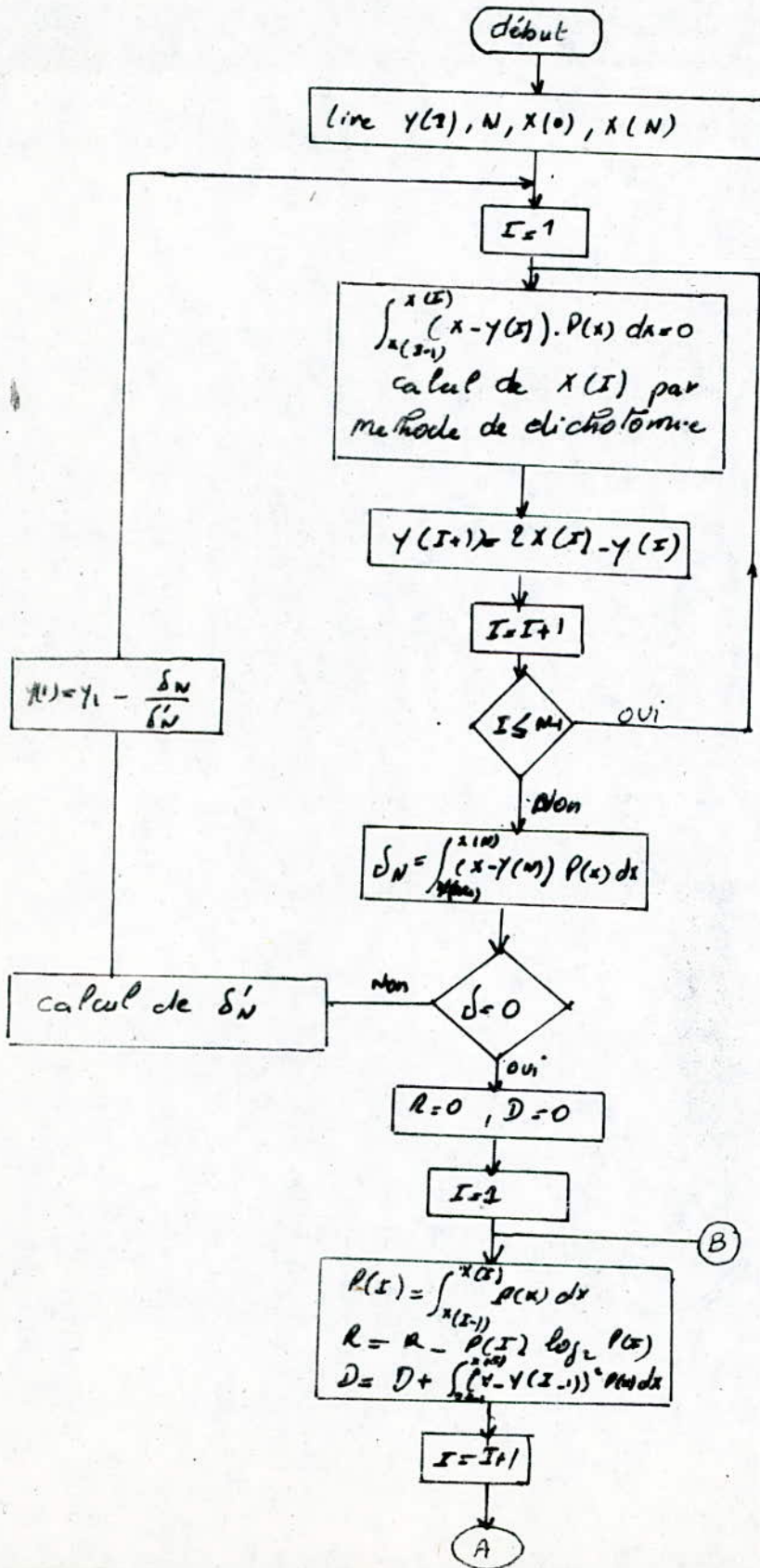
## Quantification uniforme (2<sup>ème</sup> approche)



## Quantification non uniforme (Méthode 1)



Organigramme 4  
Quantification non uniforme (méthode 2)



```

1 ! E.N.P : DEPT.D'ELECTRONIQUE 86/87 (GAMMA1.BAS)
2 !*****
5 !* QUANTIFICATION NON SYMETRIQUE UNIFORME POUR LA LOI GAMMA *
6 !*****
7 ! **** VARIANTE : DELTA FIXE , EPSILON VARIABLE ****
8 !*****
9 K1=SQR(0.75)
10 DIM A(150),Y(150),P(150)
20 DEF F(X,ALPHA)
22 IF ALPHA<>.5 THEN 24 ELSE 26
F=SQR(K1)*(ABS(X))^(ALPHA)*EXP(-K1*(ABS(X)))/(2*SQR(PI))
GOTO 28
F=SGN(X)*SQR(K1)*(ABS(X))^(ALPHA)*EXP(-K1*(ABS(X)))/(2*SQR(PI))
FNEND
30 DEF G(X)
32 IF ABS(X)<1E-30 THEN 36
33 G=SQR(K1)*(EXP(-K1*ABS(X))-(1-K1*ABS(X)+(K1*X)^2/2
-(K1*ABS(X))^3/6+(K1*X)^4/24))/(2*SQR(PI*ABS(X)))
35 GOTO 40
36 G=0
40 FNEND
45 DEF L(X)=SGN(X)*SQR(K1)*(2*(ABS(X))^1.5-(2/3)*K1*(ABS(X))^1.5
+K1^2*(ABS(X))^2.5/5-(1/21)*K1^3*(ABS(X))^3.5
+K1^4*(ABS(X))^4.5/108)/(2*SQR(PI))
49 A(0)=-16
50 READ DF,DI,PAS,N
54 DELTA=DF
55 EPS=DELTA
60 R=0 \ D=0
63 ! *** CALCUL DES SEUILS X(I),DES NIVEAUX Y(I) ET DE L'ENTROPIE R ***
65 IF N=1 GOTO 180
70 FOR I=1 TO N-1
80 A(I)=(I-N/2)*DELTA+EPS
90 A=A(I-1) \ B=A(I)
95 !*TEST DE DISCONTINUTE POUR LE CHOIX DE LA METHODE D'INTEGRATION**
100 IF B >=0 AND A <=0 THEN 120
105 ALPHA=-.5 \ GOSUB 1000
115 GOTO 130
120 GOSUB 3000
130 R=R-1.44269*P*LOG(P)
140 Y(I)=(I-(N+1)/2)*DELTA+EPS \ Y=Y(I)
150 GOSUB 4000
160 D=D+T \ NEXT I
180 A(N)=16 \ A=A(N-1) \ B=A(N)
183 IF A <= 0 THEN 185 ELSE 190
185 GOSUB 3000
188 GOTO 200
190 ALPHA=-.5 \ GOSUB 1000
200 R=R-1.44269*P*LOG(P)
210 Y(N)=(N-1)*DELTA/2+EPS \ Y=Y(N)

```

```
20 GOSUB 4000
30 D=D+T
40 PRINT"N=";N,"DELTA=";DELTA,"EPS=";EPS,"R=";R,"D=";D
50 EPS=EPS-DELTA*.05
60 IF*EPS < .001 THEN 300 ELSE 60
00 PRINT"-----"
10 DELTA=DELTA-PAS
20 IF DELTA >= DI THEN 55
30 GOTO 50
40 GOTO 5000
000 !*** CALCUL DE L'AIRES DE P(X) PAR LA METHODE DE SIMPSON ***
010 S=0 \ X=A \ N1=100
020 H=(B-A)/N1
030 S=F(A,ALPHA)+F(B,ALPHA)
040 FOR K=1 TO N1/2-1
050 X=X+H \ S=S+4*F(X,ALPHA)
060 X=X+H \ S=S+2*F(X,ALPHA)
070 NEXT K
080 X=X+H \ S=S+4*F(X,ALPHA)
090 P=H*S/3 \ RETURN
000 ! *** CALCUL D'INTEGRALE A L'AIDE DE LA
005 ! METHODE DE KANTOROVICH-SIMPSON ***
010 S2=0 \ X=A \ N2=150
020 H=(B-A)/N2
030 U=L(B)-L(A) \ S2=G(B)+G(A)
070 FOR M=1 TO N2/2-1
080 X=X+H \ S2=S2+4*G(X)
090 X=X+H \ S2=S2+2*G(X)
104 NEXT M
110 X=X+H \ S2=S2+4*G(X)
120 V=H*S2/3
130 P=V+U \ RETURN
000 ! *** CALCUL DE LA DISTORTION D ***
010 ALPHA=1.5 \ GOSUB 1000 \ P1=P
020 ALPHA=.5 \ GOSUB 1000 \ P2=-2*Y*P
023 ALPHA=-.5
024 IF A<=0 AND B>=0 THEN 4030
025 GOSUB 1000 \ GOTO 4040
030 GOSUB 3000
040 P3=Y^2*P
050 T=P1+P2+P3 \ RETURN
060 ! ***VALEURS DES DONNEES DF,DI,PAS ET N ***
070 DATA 2.3,1.4,.3,2,2.4,.8,.4,4,2,.8,.4,6,1.8,.8,.4,8
080 DATA 1.15,.70,.15,10,.85,.55,.10,12,.9,.5,.1,14,.8,.4
090 DATA .1,16.6,.3,.1,32,.40,.05,.10,64
000 END
```

TABLE I

\*\*\*\*\*  
 \* RESULTATS DE LA QUANTIFICATION NON SYMETRIQUE \*  
 \* UNIFORME POUR LA LOI GAMMA (N:PAIR) \*  
 \*\*\*\*\*

NBRE DE NIVEAUX	ESPACE INTER-NIVEAUX	DECALAGE (OFFSET)	ENTROPIE (BIT/ECHANTIL.)	DISTORTION (EQM)
N= 2	DELTA= 2.3	EPS= 1.495	R= .302051	D= .881254
N= 2	DELTA= 2.3	EPS= 1.380	R= .331780	D= .783380
N= 2	DELTA= 2.3	EPS= 1.265	R= .363777	D= .713568
N= 2	DELTA= 2.3	EPS= 1.150	R= .399429	D= .655831
N= 2	DELTA= 2.3	EPS= 1.035	R= .438311	D= .623386
N= 2	DELTA= 2.3	EPS= .920	R= .480760	D= .600563
N= 2	DELTA= 2.3	EPS= .805	R= .527361	D= .616661
N= 2	DELTA= 2.3	EPS= .690	R= .575563	D= .639142
N= 2	DELTA= 2.3	EPS= .575	R= .631552	D= .655005
N= 2	DELTA= 2.3	EPS= .460	R= .692528	D= .734136
N= 2	DELTA= 2.3	EPS= .345	R= .759397	D= .796248
N= 2	DELTA= 2.0	EPS= 1.20	R= .382573	D= .757001
N= 2	DELTA= 2.0	EPS= 1.10	R= .414311	D= .698083
N= 2	DELTA= 2.0	EPS= 1.00	R= .448910	D= .649153
N= 2	DELTA= 2.0	EPS= .90	R= .486357	D= .614591
N= 2	DELTA= 2.0	EPS= .80	R= .526781	D= .601980
N= 2	DELTA= 2.0	EPS= .70	R= .573280	D= .597653
N= 2	DELTA= 2.0	EPS= .60	R= .621006	D= .616265
N= 2	DELTA= 2.0	EPS= .50	R= .672211	D= .634037
N= 2	DELTA= 2.0	EPS= .40	R= .727918	D= .654405
N= 2	DELTA= 2.0	EPS= .30	R= .788115	D= .714976
N= 2	DELTA= 2.0	EPS= .20	R= .853428	D= .737358
N= 2	DELTA= 1.7	EPS= .93	R= .474677	D= .686991
N= 2	DELTA= 1.7	EPS= .85	R= .507508	D= .648742
N= 2	DELTA= 1.7	EPS= .76	R= .542758	D= .621628
N= 2	DELTA= 1.7	EPS= .68	R= .580519	D= .604187
N= 2	DELTA= 1.7	EPS= .59	R= .623444	D= .600278
N= 2	DELTA= 1.7	EPS= .51	R= .666594	D= .595885
N= 2	DELTA= 1.7	EPS= .42	R= .713019	D= .611552
N= 2	DELTA= 1.7	EPS= .34	R= .762481	D= .628936
N= 2	DELTA= 1.7	EPS= .25	R= .815647	D= .661714
N= 2	DELTA= 1.7	EPS= .17	R= .874676	D= .679677
N= 2	DELTA= 1.7	EPS= .08	R= .935279	D= .716905
N= 2	DELTA= 1.4	EPS= .77	R= .540292	D= .690006
N= 2	DELTA= 1.4	EPS= .70	R= .573355	D= .659337



TABLE I (suite)

N= 2	DELTA= 1.4	EPS= .63	R= .605413	D= .636377
N= 2	DELTA= 1.4	EPS= .56	R= .639370	D= .613948
N= 2	DELTA= 1.4	EPS= .49	R= .677887	D= .609996
N= 2	DELTA= 1.4	EPS= .42	R= .715942	D= .607675
N= 2	DELTA= 1.4	EPS= .35	R= .756205	D= .607999
N= 2	DELTA= 1.4	EPS= .28	R= .801261	D= .621635
N= 2	DELTA= 1.4	EPS= .21	R= .846361	D= .615705
N= 2	DELTA= 1.4	EPS= .14	R= .894266	D= .646383
N= 2	DELTA= 1.4	EPS= .70	R= .946663	D= .670314
-----				
N= 4	DELTA= 2.4	EPS= 1.80	R= .863574	D= .505322
N= 4	DELTA= 2.4	EPS= 1.68	R= .833360	D= .431951
N= 4	DELTA= 2.4	EPS= 1.56	R= .810904	D= .372344
N= 4	DELTA= 2.4	EPS= 1.44	R= .796038	D= .327883
N= 4	DELTA= 2.4	EPS= 1.32	R= .788661	D= .299441
N= 4	DELTA= 2.4	EPS= 1.20	R= .788736	D= .287508
N= 4	DELTA= 2.4	EPS= 1.08	R= .796321	D= .292203
N= 4	DELTA= 2.4	EPS= .96	R= .811511	D= .313311
N= 4	DELTA= 2.4	EPS= .84	R= .834486	D= .350222
N= 4	DELTA= 2.4	EPS= .72	R= .865522	D= .401973
N= 4	DELTA= 2.4	EPS= .60	R= .904963	D= .467033
-----				
N= 4	DELTA= 2.0	EPS= 1.50	R= .986677	D= .403070
N= 4	DELTA= 2.0	EPS= 1.40	R= .964061	D= .353415
N= 4	DELTA= 2.0	EPS= 1.30	R= .947671	D= .312722
N= 4	DELTA= 2.0	EPS= 1.20	R= .937481	D= .281853
N= 4	DELTA= 2.0	EPS= 1.10	R= .933451	D= .261325
N= 4	DELTA= 2.0	EPS= 1.00	R= .935613	D= .251438
N= 4	DELTA= 2.0	EPS= .90	R= .944037	D= .252249
N= 4	DELTA= 2.0	EPS= .80	R= .958804	D= .263603
N= 4	DELTA= 2.0	EPS= .70	R= .980088	D= .285116
N= 4	DELTA= 2.0	EPS= .60	R= 1.00807	D= .316160
N= 4	DELTA= 2.0	EPS= .50	R= 1.04303	D= .355774
-----				
N= 4	DELTA= 1.6	EPS= 1.12	R= 1.12227	D= .306524
N= 4	DELTA= 1.6	EPS= 1.04	R= 1.11271	D= .279648
N= 4	DELTA= 1.6	EPS= .96	R= 1.10733	D= .258664
N= 4	DELTA= 1.6	EPS= .88	R= 1.10768	D= .243852
N= 4	DELTA= 1.6	EPS= .80	R= 1.11232	D= .235367
N= 4	DELTA= 1.6	EPS= .72	R= 1.12181	D= .233220
N= 4	DELTA= 1.6	EPS= .64	R= 1.13626	D= .237322
N= 4	DELTA= 1.6	EPS= .56	R= 1.15579	D= .247442
N= 4	DELTA= 1.6	EPS= .48	R= 1.18056	D= .263224
N= 4	DELTA= 1.6	EPS= .40	R= 1.21077	D= .284121
N= 4	DELTA= 1.6	EPS= .32	R= 1.24668	D= .309377
-----				
N= 4	DELTA= 1.2	EPS= .78	R= 1.31213	D= .28649
N= 4	DELTA= 1.2	EPS= .72	R= 1.31291	D= .272578
N= 4	DELTA= 1.2	EPS= .66	R= 1.31689	D= .261960
N= 4	DELTA= 1.2	EPS= .60	R= 1.32415	D= .254697
N= 4	DELTA= 1.2	EPS= .54	R= 1.33479	D= .250791
N= 4	DELTA= 1.2	EPS= .48	R= 1.34889	D= .250190

TABLE I (suite)

N = 4	DELTA = 1.2	EPS = .42	R = 1.36658	D = .252782
N = 4	DELTA = 1.2	EPS = .36	R = 1.38798	D = .258392
N = 4	DELTA = 1.2	EPS = .30	R = 1.41326	D = .266758
N = 4	DELTA = 1.2	EPS = .24	R = 1.44260	D = .277519
N = 4	DELTA = 1.2	EPS = .18	R = 1.47626	D = .290143
-----				
N = 4	DELTA = .8	EPS = .48	R = 1.55439	D = .350160
N = 4	DELTA = .8	EPS = .44	R = 1.56206	D = .343147
N = 4	DELTA = .8	EPS = .40	R = 1.57155	D = .337620
N = 4	DELTA = .8	EPS = .36	R = 1.58293	D = .333570
N = 4	DELTA = .8	EPS = .32	R = 1.59630	D = .330982
N = 4	DELTA = .8	EPS = .28	R = 1.61175	D = .329810
N = 4	DELTA = .8	EPS = .24	R = 1.62940	D = .329992
N = 4	DELTA = .8	EPS = .20	R = 1.64938	D = .331437
N = 4	DELTA = .8	EPS = .16	R = 1.67186	D = .334015
N = 4	DELTA = .8	EPS = .12	R = 1.69705	D = .337542
N = 4	DELTA = .8	EPS = .08	R = 1.72525	D = .341739
N = 4	DELTA = .8	EPS = .04	R = 1.75699	D = .346118
-----				
N = 6	DELTA = 2.0	EPS = 1.50	R = 1.07686	D = .322693
N = 6	DELTA = 2.0	EPS = 1.40	R = 1.04553	D = .279748
N = 6	DELTA = 2.0	EPS = 1.30	R = 1.02157	D = .245036
N = 6	DELTA = 2.0	EPS = 1.20	R = 1.00479	D = .219472
N = 6	DELTA = 2.0	EPS = 1.10	R = .995027	D = .203648
N = 6	DELTA = 2.0	EPS = 1.00	R = .992218	D = .197906
N = 6	DELTA = 2.0	EPS = .90	R = .996331	D = .202343
N = 6	DELTA = 2.0	EPS = .80	R = 1.00741	D = .216853
N = 6	DELTA = 2.0	EPS = .70	R = 1.02553	D = .241073
N = 6	DELTA = 2.0	EPS = .60	R = 1.05087	D = .274412
N = 6	DELTA = 2.0	EPS = .50	R = 1.08364	D = .315927
-----				
N = 6	DELTA = 1.6	EPS = 1.02	R = 1.27261	D = .229072
N = 6	DELTA = 1.6	EPS = 1.12	R = 1.24782	D = .203718
N = 6	DELTA = 1.6	EPS = 1.04	R = 1.22898	D = .183112
N = 6	DELTA = 1.6	EPS = .96	R = 1.21595	D = .167761
N = 6	DELTA = 1.6	EPS = .88	R = 1.20366	D = .157991
N = 6	DELTA = 1.6	EPS = .80	R = 1.20703	D = .153993
N = 6	DELTA = 1.6	EPS = .72	R = 1.21107	D = .155815
N = 6	DELTA = 1.6	EPS = .64	R = 1.22080	D = .163397
N = 6	DELTA = 1.6	EPS = .56	R = 1.23628	D = .176531
N = 6	DELTA = 1.6	EPS = .48	R = 1.25763	D = .194884
N = 6	DELTA = 1.6	EPS = .04	R = 1.28501	D = .217925
-----				
N = 6	DELTA = 1.2	EPS = .84	R = 1.50919	D = .164214
N = 6	DELTA = 1.2	EPS = .78	R = 1.49618	D = .152810
N = 6	DELTA = 1.2	EPS = .72	R = 1.48754	D = .144052
N = 6	DELTA = 1.2	EPS = .66	R = 1.48322	D = .138089
N = 6	DELTA = 1.2	EPS = .60	R = 1.48318	D = .135007
N = 6	DELTA = 1.2	EPS = .54	R = 1.48742	D = .134827
N = 6	DELTA = 1.2	EPS = .48	R = 1.49595	D = .137515
N = 6	DELTA = 1.2	EPS = .42	R = 1.50884	D = .142975
N = 6	DELTA = 1.2	EPS = .36	R = 1.52617	D = .151045
N = 6	DELTA = 1.2	EPS = .30	R = 1.54805	D = .161472
N = 6	DELTA = 1.2	EPS = .24	R = 1.57466	D = .173908

TABLE I (suite)

N= 6	DELTA= .8	EPS= .52	R= 1.84013	D= .185372
N= 6	DELTA= .8	EPS= .48	R= 1.83632	D= .180461
N= 6	DELTA= .8	EPS= .44	R= 1.83536	D= .176694
N= 6	DELTA= .8	EPS= .40	R= 1.83722	D= .174098
N= 6	DELTA= .8	EPS= .36	R= 1.84192	D= .172678
N= 6	DELTA= .8	EPS= .32	R= 1.84945	D= .172422
N= 6	DELTA= .8	EPS= .28	R= 1.85987	D= .173295
N= 6	DELTA= .8	EPS= .24	R= 1.87325	D= .175240
N= 6	DELTA= .8	EPS= .20	R= 1.88966	D= .178166
N= 6	DELTA= .8	EPS= .16	R= 1.90927	D= .181953
N= 6	DELTA= .8	EPS= .12	R= 1.93223	D= .186416
-----				
N= 8	DELTA= 1.8	EPS= 1.35	R= 1.18546	D= .254979
N= 8	DELTA= 1.8	EPS= 1.26	R= 1.15606	D= .222793
N= 8	DELTA= 1.8	EPS= 1.17	R= 1.13346	D= .196830
N= 8	DELTA= 1.8	EPS= 1.08	R= 1.11748	D= .177791
N= 8	DELTA= 1.8	EPS= .99	R= 1.10801	D= .166131
N= 8	DELTA= 1.8	EPS= .09	R= 1.10496	D= .162114
N= 8	DELTA= 1.8	EPS= .81	R= 1.10831	D= .165820
N= 8	DELTA= 1.8	EPS= .72	R= 1.11810	D= .177169
N= 8	DELTA= 1.8	EPS= .63	R= 1.13438	D= .195889
N= 8	DELTA= 1.8	EPS= .54	R= 1.15730	D= .221529
N= 8	DELTA= 1.8	EPS= .45	R= 1.18704	D= .252164
-----				
N= 8	DELTA= 1.4	EPS= 1.05	R= 1.42765	D= .165017
N= 8	DELTA= 1.4	EPS= .98	R= 1.40446	D= .147710
N= 8	DELTA= 1.4	EPS= .91	R= 1.38667	D= .133708
N= 8	DELTA= 1.4	EPS= .84	R= 1.37416	D= .123374
N= 8	DELTA= 1.4	EPS= .77	R= 1.36684	D= .116943
N= 8	DELTA= 1.4	EPS= .70	R= 1.36466	D= .114552
N= 8	DELTA= 1.4	EPS= .63	R= 1.36761	D= .116241
N= 8	DELTA= 1.4	EPS= .56	R= 1.37570	D= .121967
N= 8	DELTA= 1.4	EPS= .49	R= 1.38910	D= .131588
N= 8	DELTA= 1.4	EPS= .42	R= 1.40758	D= .144870
N= 8	DELTA= 1.4	EPS= .35	R= 1.43159	D= .161443
-----				
N= 8	DELTA= 1.0	EPS= .75	R= 1.76065	D= .116177
N= 8	DELTA= 1.0	EPS= .70	R= 1.74428	D= .108049
N= 8	DELTA= 1.0	EPS= .65	R= 1.73187	D= .101384
N= 8	DELTA= 1.0	EPS= .60	R= 1.72332	D= .963299E-01
N= 8	DELTA= 1.0	EPS= .55	R= 1.71857	D= .929856E-01
N= 8	DELTA= 1.0	EPS= .50	R= 1.71759	D= .914048E-01
N= 8	DELTA= 1.0	EPS= .45	R= 1.72036	D= .916032E-01
N= 8	DELTA= 1.0	EPS= .40	R= 1.72691	D= .935632E-01
N= 8	DELTA= 1.0	EPS= .35	R= 1.73726	D= .972234E-01
N= 8	DELTA= 1.0	EPS= .30	R= 1.75150	D= .102488
N= 8	DELTA= 1.0	EPS= .25	R= 1.76971	D= .109199
-----				
N= 10	DELTA= 1.15	EPS= .86	R= 1.64103	D= .112281
N= 10	DELTA= 1.15	EPS= .80	R= 1.62133	D= .101879
N= 10	DELTA= 1.15	EPS= .75	R= 1.60619	D= .934694E-01
N= 10	DELTA= 1.15	EPS= .69	R= 1.59550	D= .872717E-01
N= 10	DELTA= 1.15	EPS= .63	R= 1.58920	D= .834253E-01
N= 10	DELTA= 1.15	EPS= .57	R= 1.58725	D= .820143E-01
N= 10	DELTA= 1.15	EPS= .52	R= 1.58962	D= .8083061
N= 10	DELTA= 1.15	EPS= .46	R= 1.59634	D= .865417E-01
N= 10	DELTA= 1.15	EPS= .40	R= 1.60745	D= .923714E-01
N= 10	DELTA= 1.15	EPS= .34	R= 1.62302	D= .100410
N= 10	DELTA= 1.15	EPS= .29	R= 1.64316	D= .110437

N= 10	DELTA= 1.0	EPS= .75	R= 1.78874	D= .935074E-01
N= 10	DELTA= 1.0	EPS= .70	R= 1.77149	D= .860296E-01
N= 10	DELTA= 1.0	EPS= .65	R= 1.75827	D= .799626E-01
N= 10	DELTA= 1.0	EPS= .60	R= 1.74899	D= .754574E-01
N= 10	DELTA= 1.0	EPS= .55	R= 1.74357	D= .726125E-01
N= 10	DELTA= 1.0	EPS= .50	R= 1.74198	D= .714836E-01
N= 10	DELTA= 1.0	EPS= .45	R= 1.74422	D= .720876E-01
N= 10	DELTA= 1.0	EPS= .40	R= 1.75028	D= .744075E-01
N= 10	DELTA= 1.0	EPS= .35	R= 1.76021	D= .783834E-01
N= 10	DELTA= 1.0	EPS= .30	R= 1.77409	D= .839194E-01
N= 10	DELTA= 1.0	EPS= .25	R= 1.79200	D= .908596E-01

N= 10	DELTA= .85	EPS= .64	R= 1.96009	D= .832643E-01
N= 10	DELTA= .85	EPS= .55	R= 1.94538	D= .780427E-01
N= 10	DELTA= .85	EPS= .55	R= 1.93415	D= .737759E-01
N= 10	DELTA= .85	EPS= .51	R= 1.92633	D= .705609E-01
N= 10	DELTA= .85	EPS= .47	R= 1.92186	D= .684629E-01
N= 10	DELTA= .85	EPS= .42	R= 1.92069	D= .675174E-01
N= 10	DELTA= .85	EPS= .38	R= 1.92283	D= .067736
N= 10	DELTA= .85	EPS= .34	R= 1.92827	D= .691063E-01
N= 10	DELTA= .85	EPS= .30	R= 1.93706	D= .715904E-01
N= 10	DELTA= .85	EPS= .25	R= 1.94926	D= .751228E-01
N= 10	DELTA= .85	EPS= .21	R= 1.96497	D= .796043E-01

N= 10	DELTA= .70	EPS= .49	R= 2.14721	D= .825016E-01
N= 10	DELTA= .70	EPS= .45	R= 2.13807	D= .079550
N= 10	DELTA= .70	EPS= .42	R= 2.13179	D= .772675E-01
N= 10	DELTA= .70	EPS= .38	R= 2.12832	D= .756923E-01
N= 10	DELTA= .70	EPS= .35	R= 2.12764	D= .748466E-01
N= 10	DELTA= .70	EPS= .31	R= 2.12973	D= .747362E-01
N= 10	DELTA= .70	EPS= .28	R= 2.13460	D= .753545E-01
N= 10	DELTA= .70	EPS= .24	R= 2.14229	D= .766774E-01
N= 10	DELTA= .70	EPS= .21	R= 2.15286	D= .786663E-01
N= 10	DELTA= .70	EPS= .17	R= 2.16638	D= .812603E-01
N= 10	DELTA= .70	EPS= .14	R= 2.18298	D= .843725E-01

N= 12	DELTA= .85	EPS= .64	R= 1.97830	D= .690245E-01
N= 12	DELTA= .85	EPS= .59	R= 1.96317	D= .641072E-01
N= 12	DELTA= .85	EPS= .55	R= 1.95156	D= .601212E-01
N= 12	DELTA= .85	EPS= .51	R= 1.94338	D= .571645E-01
N= 12	DELTA= .85	EPS= .47	R= 1.93858	D= .553023E-01
N= 12	DELTA= .85	EPS= .45	R= 1.93712	D= .545708E-01

TABLE I (suite)

N= 12	DELTA=	.85	EPS=	.38	R=	1.93899	D=	.549818E-01
N= 12	DELTA=	.85	EPS=	.34	R=	1.94421	D=	.565232E-01
N= 12	DELTA=	.85	EPS=	.30	R=	1.95279	D=	.591577E-01
N= 12	DELTA=	.85	EPS=	.25	R=	1.96482	D=	.062820
N= 12	DELTA=	.85	EPS=	.21	R=	1.98037	D=	.674108E-01
-----								
N= 12	DELTA=	.75	EPS=	.56	R=	2.11596	D=	.637247E-01
N= 12	DELTA=	.75	EPS=	.52	R=	2.10248	D=	.060010
N= 12	DELTA=	.75	EPS=	.49	R=	2.09217	D=	.569826E-01
N= 12	DELTA=	.75	EPS=	.45	R=	2.08495	D=	.547142E-01
N= 12	DELTA=	.75	EPS=	.41	R=	2.08075	D=	.532509E-01
N= 12	DELTA=	.75	EPS=	.37	R=	2.07954	D=	.526194E-01
N= 12	DELTA=	.75	EPS=	.34	R=	2.08132	D=	.528278E-01
N= 12	DELTA=	.75	EPS=	.30	R=	2.08610	D=	.538673E-01
N= 12	DELTA=	.75	EPS=	.26	R=	2.09390	D=	.557107E-01
N= 12	DELTA=	.75	EPS=	.22	R=	2.10479	D=	.583115E-01
N= 12	DELTA=	.75	EPS=	.19	R=	2.11386	D=	.615974E-01
-----								
N= 12	DELTA=	.65	EPS=	.49	R=	2.27071	D=	.646895E-01
N= 12	DELTA=	.65	EPS=	.45	R=	2.25892	D=	.619256E-01
N= 12	DELTA=	.65	EPS=	.42	R=	2.24995	D=	.596531E-01
N= 12	DELTA=	.65	EPS=	.39	R=	2.24370	D=	.579211E-01
N= 12	DELTA=	.65	EPS=	.36	R=	2.24013	D=	.567614E-01
N= 12	DELTA=	.65	EPS=	.35	R=	2.23920	D=	.561921E-01
N= 12	DELTA=	.65	EPS=	.29	R=	2.24092	D=	.562191E-01
N= 12	DELTA=	.65	EPS=	.26	R=	2.24528	D=	.568359E-01
N= 12	DELTA=	.65	EPS=	.23	R=	2.25232	D=	.580237E-01
N= 12	DELTA=	.65	EPS=	.19	R=	2.26210	D=	.597505E-01
N= 12	DELTA=	.65	EPS=	.16	R=	2.27469	D=	.061966
-----								
N= 14	DELTA=	.90	EPS=	.67	R=	1.92149	D=	.682129E-01
N= 14	DELTA=	.90	EPS=	.63	R=	1.90539	D=	.627125E-01
N= 14	DELTA=	.90	EPS=	.58	R=	1.89301	D=	.582747E-01
N= 14	DELTA=	.90	EPS=	.54	R=	1.88424	D=	.055014
N= 14	DELTA=	.90	EPS=	.49	R=	1.87904	D=	.530051E-01
N= 14	DELTA=	.90	EPS=	.45	R=	1.87735	D=	.052292
N= 14	DELTA=	.90	EPS=	.40	R=	1.87918	D=	.528871E-01
N= 14	DELTA=	.90	EPS=	.36	R=	1.88453	D=	.547777E-01
N= 14	DELTA=	.90	EPS=	.31	R=	1.89344	D=	.579192E-01
N= 14	DELTA=	.90	EPS=	.27	R=	1.90597	D=	.622383E-01
N= 14	DELTA=	.90	EPS=	.22	R=	1.92222	D=	.676176E-01
-----								
N= 14	DELTA=	.80	EPS=	.60	R=	2.05508	D=	.057935
N= 14	DELTA=	.80	EPS=	.56	R=	2.04057	D=	.537988E-01
N= 14	DELTA=	.80	EPS=	.52	R=	2.02943	D=	.504545E-01
N= 14	DELTA=	.80	EPS=	.48	R=	2.02155	D=	.479371E-01
N= 14	DELTA=	.80	EPS=	.44	R=	2.01690	D=	.464507E-01
N= 14	DELTA=	.80	EPS=	.40	R=	2.01542	D=	.458784E-01
N= 14	DELTA=	.80	EPS=	.36	R=	2.01712	D=	.462783E-01
N= 14	DELTA=	.80	EPS=	.32	R=	2.02200	D=	.476423E-01
N= 14	DELTA=	.80	EPS=	.28	R=	2.03009	D=	.499361E-01
N= 14	DELTA=	.80	EPS=	.24	R=	2.04146	D=	.531072E-01
N= 14	DELTA=	.80	EPS=	.20	R=	2.05619	D=	.570681E-01

TABLE I (suite)

N= 14	DELTA= .70	EPS= .52	R= 2.20681	D= .516136E-01
N= 14	DELTA= .70	EPS= .49	R= 2.19392	D= .485795E-01
N= 14	DELTA= .70	EPS= .45	R= 2.18404	D= .461156E-01
N= 14	DELTA= .70	EPS= .42	R= 2.17708	D= .044283
N= 14	DELTA= .70	EPS= .38	R= 2.17299	D= .431191E-01
N= 14	DELTA= .70	EPS= .35	R= 2.17174	D= .426476E-01
N= 14	DELTA= .70	EPS= .31	R= 2.17333	D= .428742E-01
N= 14	DELTA= .70	EPS= .28	R= 2.17775	D= .437927E-01
N= 14	DELTA= .70	EPS= .24	R= 2.18504	D= .453796E-01
N= 14	DELTA= .70	EPS= .21	R= 2.19526	D= .475968E-01
N= 14	DELTA= .70	EPS= .17	R= 2.20849	D= .503833E-01
N= 14	DELTA= .70	EPS= .14	R= 2.22486	D= .536527E-01
-----				
N= 14	DELTA= .60	EPS= .45	R= 2.37995	D= .512779E-01
N= 14	DELTA= .60	EPS= .42	R= 2.36870	D= .491012E-01
N= 14	DELTA= .60	EPS= .39	R= 2.36012	D= .047320
N= 14	DELTA= .60	EPS= .36	R= 2.35410	D= .459741E-01
N= 14	DELTA= .60	EPS= .33	R= 2.35061	D= .450892E-01
N= 14	DELTA= .60	EPS= .30	R= 2.34962	D= .446808E-01
N= 14	DELTA= .60	EPS= .27	R= 2.35111	D= .447527E-01
N= 14	DELTA= .60	EPS= .24	R= 2.35509	D= .453007E-01
N= 14	DELTA= .60	EPS= .21	R= 2.36160	D= .463088E-01
N= 14	DELTA= .60	EPS= .18	R= 2.37069	D= .477519E-01
N= 14	DELTA= .60	EPS= .15	R= 2.38243	D= .495382E-01
-----				
N= 16	DELTA= .80	EPS= .60	R= 2.05968	D= .542609E-01
N= 16	DELTA= .80	EPS= .56	R= 2.04508	D= .501926E-01
N= 16	DELTA= .80	EPS= .52	R= 2.03385	D= .469111E-01
N= 16	DELTA= .80	EPS= .48	R= 2.02590	D= .445015E-01
N= 16	DELTA= .80	EPS= .44	R= 2.02118	D= .043018
N= 16	DELTA= .80	EPS= .40	R= 2.01964	D= .424936E-01
N= 16	DELTA= .80	EPS= .36	R= 2.02128	D= .429368E-01
N= 16	DELTA= .80	EPS= .32	R= 2.02610	D= .443392E-01
N= 16	DELTA= .80	EPS= .28	R= 2.03416	D= .466669E-01
N= 16	DELTA= .80	EPS= .24	R= 2.04549	D= .498671E-01
N= 16	DELTA= .80	EPS= .20	R= 2.06019	D= .538526E-01
-----				
N= 16	DELTA= .70	EPS= .52	R= 2.21474	D= .456162E-01
N= 16	DELTA= .70	EPS= .49	R= 2.20173	D= .426703E-01
N= 16	DELTA= .70	EPS= .45	R= 2.19173	D= .402884E-01
N= 16	DELTA= .70	EPS= .42	R= 2.18467	D= .385307E-01
N= 16	DELTA= .70	EPS= .38	R= 2.18048	D= .037436
N= 16	DELTA= .70	EPS= .35	R= 2.17915	D= .037027
N= 16	DELTA= .70	EPS= .31	R= 2.18065	D= .037310
N= 16	DELTA= .70	EPS= .28	R= 2.18500	D= .038279
N= 16	DELTA= .70	EPS= .24	R= 2.19223	D= .399102E-01
N= 16	DELTA= .70	EPS= .21	R= 2.20240	D= .421657E-01
N= 16	DELTA= .70	EPS= .17	R= 2.21559	D= .449844E-01
N= 16	DELTA= .70	EPS= .14	R= 2.23191	D= .482804E-01
-----				

TABLE I(suite)

N= 16	DELTA=	.69	EPS=	.45	R=	2.39361	D=	.416024E-01
N= 16	DELTA=	.60	EPS=	.42	R=	2.38220	D=	.395346E-01
N= 16	DELTA=	.60	EPS=	.39	R=	2.37346	D=	.378546E-01
N= 16	DELTA=	.60	EPS=	.36	R=	2.36730	D=	.366018E-01
N= 16	DELTA=	.60	EPS=	.33	R=	2.36368	D=	.358025E-01
N= 16	DELTA=	.60	EPS=	.30	R=	2.36257	D=	.354715E-01
N= 16	DELTA=	.60	EPS=	.27	R=	2.36395	D=	.356136E-01
N= 16	DELTA=	.60	EPS=	.24	R=	2.36785	D=	.362244E-01
N= 16	DELTA=	.60	EPS=	.21	R=	2.37427	D=	.372873E-01
N= 16	DELTA=	.60	EPS=	.18	R=	2.38328	D=	.387783E-01
N= 16	DELTA=	.60	EPS=	.15	R=	2.39497	D=	.040655
-----								
N= 16	DELTA=	.50	EPS=	.37	R=	2.60104	D=	.453806E-01
N= 16	DELTA=	.50	EPS=	.35	R=	2.59128	D=	.439678E-01
N= 16	DELTA=	.50	EPS=	.32	R=	2.58383	D=	.428069E-01
N= 16	DELTA=	.50	EPS=	.30	R=	2.57861	D=	.419232E-01
N= 16	DELTA=	.50	EPS=	.27	R=	2.57559	D=	.413327E-01
N= 16	DELTA=	.50	EPS=	.25	R=	2.57472	D=	.410446E-01
N= 16	DELTA=	.50	EPS=	.22	R=	2.57601	D=	.410619E-01
N= 16	DELTA=	.50	EPS=	.20	R=	2.57946	D=	.041382
N= 16	DELTA=	.50	EPS=	.17	R=	2.58510	D=	.419946E-01
N= 16	DELTA=	.50	EPS=	.15	R=	2.59297	D=	.428842E-01
N= 16	DELTA=	.50	EPS=	.12	R=	2.60316	D=	.440249E-01
-----								
N= 32	DELTA=	.60	EPS=	.45	R=	2.41084	D=	.289854E-01
N= 32	DELTA=	.60	EPS=	.42	R=	2.39924	D=	.270551E-01
N= 32	DELTA=	.60	EPS=	.39	R=	2.39031	D=	.255024E-01
N= 32	DELTA=	.60	EPS=	.36	R=	2.38399	D=	.243671E-01
N= 32	DELTA=	.60	EPS=	.33	R=	2.38021	D=	.236755E-01
N= 32	DELTA=	.60	EPS=	.30	R=	2.37896	D=	.234427E-01
N= 32	DELTA=	.60	EPS=	.27	R=	2.38022	D=	.236732E-01
N= 32	DELTA=	.60	EPS=	.24	R=	2.38399	D=	.243628E-01
N= 32	DELTA=	.60	EPS=	.21	R=	2.39032	D=	.254956E-01
N= 32	DELTA=	.60	EPS=	.18	R=	2.39925	D=	.270465E-01
N= 32	DELTA=	.60	EPS=	.15	R=	2.41086	D=	.289739E-01
-----								
N= 32	DELTA=	.50	EPS=	.37	R=	2.63730	D=	.207107E-01
N= 32	DELTA=	.50	EPS=	.35	R=	2.62723	D=	.194915E-01
N= 32	DELTA=	.50	EPS=	.32	R=	2.61950	D=	.185104E-01
N= 32	DELTA=	.50	EPS=	.30	R=	2.61402	D=	.177929E-01
N= 32	DELTA=	.50	EPS=	.27	R=	2.61076	D=	.173546E-01
N= 32	DELTA=	.50	EPS=	.25	R=	2.60968	D=	.172055E-01
N= 32	DELTA=	.50	EPS=	.22	R=	2.61077	D=	.173482E-01
N= 32	DELTA=	.50	EPS=	.20	R=	2.61404	D=	.177803E-01
N= 32	DELTA=	.50	EPS=	.17	R=	2.61952	D=	.184914E-01
N= 32	DELTA=	.50	EPS=	.15	R=	2.62727	D=	.194665E-01
N= 32	DELTA=	.50	EPS=	.12	R=	2.63734	D=	.206793E-01
-----								
N= 32	DELTA=	.40	EPS=	.30	R=	2.91839	D=	.154356E-01
N= 32	DELTA=	.40	EPS=	.28	R=	2.90988	D=	.147327E-01
N= 32	DELTA=	.40	EPS=	.26	R=	2.90336	D=	.141661E-01
N= 32	DELTA=	.40	EPS=	.24	R=	2.89874	D=	.013750

TABLE I (suite)

N= 32	DELTA= .40	EPS= .22	R= 2.89599	D= .134932E-01
N= 32	DELTA= .40	EPS= .20	R= 2.89509	D= .134017E-01
N= 32	DELTA= .40	EPS= .18	R= 2.89602	D= .134764E-01
N= 32	DELTA= .40	EPS= .16	R= 2.89879	D= .137162E-01
N= 32	DELTA= .40	EPS= .14	R= 2.90343	D= .141156E-01
N= 32	DELTA= .40	EPS= .12	R= 2.90999	D= .146653E-01
N= 32	DELTA= .40	EPS= .10	R= 2.91852	D= .153515E-01
-----				
N= 32	DELTA= .30	EPS= .22	R= 3.27892	D= .177975E-01
N= 32	DELTA= .30	EPS= .21	R= 3.27202	D= .174336E-01
N= 32	DELTA= .30	EPS= .19	R= 3.26673	D= .171374E-01
N= 32	DELTA= .30	EPS= .18	R= 3.26301	D= .169156E-01
N= 32	DELTA= .30	EPS= .16	R= 3.26080	D= .167729E-01
N= 32	DELTA= .30	EPS= .15	R= 3.26009	D= .167113E-01
N= 32	DELTA= .30	EPS= .13	R= 3.26087	D= .167319E-01
N= 32	DELTA= .30	EPS= .12	R= 3.26315	D= .168339E-01
N= 32	DELTA= .30	EPS= .10	R= 3.26695	D= .170147E-01
N= 32	DELTA= .30	EPS= .09	R= 3.27230	D= .017270
N= 32	DELTA= .30	EPS= .07	R= 3.27928	D= .175928E-01
-----				
N= 64	DELTA= .40	EPS= .30	R= 2.92217	D= .129194E-01
N= 64	DELTA= .40	EPS= .28	R= 2.91364	D= .122287E-01
N= 64	DELTA= .40	EPS= .26	R= 2.90710	D= .116734E-01
N= 64	DELTA= .40	EPS= .24	R= 2.90246	D= .112678E-01
N= 64	DELTA= .40	EPS= .22	R= 2.89970	D= .110206E-01
N= 64	DELTA= .40	EPS= .20	R= 2.89878	D= .010938
N= 64	DELTA= .40	EPS= .18	R= 2.89970	D= .110206E-01
N= 64	DELTA= .40	EPS= .16	R= 2.90246	D= .112676E-01
N= 64	DELTA= .40	EPS= .14	R= 2.90710	D= .116732E-01
N= 64	DELTA= .40	EPS= .12	R= 2.91364	D= .122284E-01
N= 64	DELTA= .40	EPS= .10	R= 2.92217	D= .129191E-01
-----				
N= 64	DELTA= .30	EPS= .22	R= 3.29624	D= .741726E-02
N= 64	DELTA= .30	EPS= .21	R= 3.28929	D= .708277E-02
N= 64	DELTA= .30	EPS= .19	R= 3.28395	D= .681393E-02
N= 64	DELTA= .30	EPS= .18	R= 3.28018	D= .661752E-02
N= 64	DELTA= .30	EPS= .16	R= 3.27793	D= .649791E-02
N= 64	DELTA= .30	EPS= .15	R= 3.27719	D= .645761E-02
N= 64	DELTA= .30	EPS= .13	R= 3.27794	D= .649747E-02
N= 64	DELTA= .30	EPS= .12	R= 3.28018	D= .661651E-02
N= 64	DELTA= .30	EPS= .10	R= 3.28395	D= .681249E-02
N= 64	DELTA= .30	EPS= .09	R= 3.28929	D= .708095E-02
N= 64	DELTA= .30	EPS= .07	R= 3.29625	D= .741479E-02
-----				
N= 64	DELTA= .20	EPS= .15	R= 3.83183	D= .550259E-02
N= 64	DELTA= .20	EPS= .14	R= 3.82651	D= .537956E-02
N= 64	DELTA= .20	EPS= .13	R= 3.82244	D= .528027E-02
N= 64	DELTA= .20	EPS= .12	R= 3.81957	D= .520728E-02
N= 64	DELTA= .20	EPS= .11	R= 3.81786	D= .516198E-02
N= 64	DELTA= .20	EPS= .10	R= 3.81729	D= .514559E-02
N= 64	DELTA= .20	EPS= .09	R= 3.81786	D= .515815E-02
N= 64	DELTA= .20	EPS= .08	R= 3.81958	D= .519955E-02



TABLE I (fin)

N= 64	DELTA= .20	EPS= .07	R= 3.82246	D= .52687E-02
N= 64	DELTA= .20	EPS= .06	R= 3.82654	D= .536418E-02
N= 64	DELTA= .20	EPS= .05	R= 3.83186	D= .548345E-02
-----				
N= 64	DELTA= .10	EPS= .06	R= 4.67582	D= .431867E-01
N= 64	DELTA= .10	EPS= .06	R= 4.67396	D= .431623E-01
N= 64	DELTA= .10	EPS= .05	R= 4.67287	D= .431434E-01
N= 64	DELTA= .10	EPS= .05	R= 4.67252	D= .431307E-01
N= 64	DELTA= .10	EPS= .04	R= 4.67292	D= .431241E-01
N= 64	DELTA= .10	EPS= .04	R= 4.67406	D= .431231E-01
N= 64	DELTA= .10	EPS= .03	R= 4.67597	D= .431283E-01
N= 64	DELTA= .10	EPS= .03	R= 4.67867	D= .431389E-01
N= 64	DELTA= .10	EPS= .02	R= 4.68218	D= .431548E-01
N= 64	DELTA= .10	EPS= .02	R= 4.68659	D= .431749E-01
N= 64	DELTA= .10	EPS= .01	R= 4.69195	D= .431989E-01

#####END#####

```
! E.N.P          DEPT D'ELECTRONIQUE          36/87          (GAM1.BAS)
!*****
!*      QUANTIFICATION NON SYMETRIQUE UNIFORME POUR LA LOI GAMMA      *
!*****
8  K1=SQR(0.75)
10 DIM A(100),Y(100),P(100,50),D(50)
20 DEF F(X,ALPHA)
22 IF ALPHA<>.5 THEN 24 ELSE 26
24 F=SQR(K1)*(ABS(X))^(ALPHA)*EXP(-K1*(ABS(X)))/(2*SQR(PI))
25 GOTO 28
26 F=SGN(X)*SQR(K1)*(ABS(X))^(ALPHA)*EXP(-K1*(ABS(X))) &
   / (2*SQR(PI))
28 FNEND
30 DEF G(X)
32 IF ABS(X)<1E-30 THEN 36
33 G=SQR(K1)*(EXP(-K1*ABS(X))-(1-K1*ABS(X)+(K1*X)^2/2
   -(K1*ABS(X))^3/6+(K1*X)^4/24))/(2*SQR(PI*ABS(X))) &
35 GOTO 40
36 G=0
40 FNEND
45 DEF L(X)=SGN(X)*SQR(K1)*(2*(ABS(X))^1.5-(2/3)*K1
   *(ABS(X))^1.5+K1^2*(ABS(X))^2.5/5-(1/21)*K1^3
   *(ABS(X))^3.5+K1^4*(ABS(X))^4.5/108)/(2*SQR(PI)) &
40 READ DF,DI,N
51 ! *****INITIALISATION*****
54 DELTA=DF \ A(0)=-16
55 J=1 \ D(0)=1
56 EPS=DELTA/2+.01
60 R=0 \ D=0
63 ! ***** CALCUL DES SEUILS X(I),DES NIVEAUX Y(I)*****
65 IF N=1 GOTO 180
70 FOR I=1 TO N-1
80 A(I)=(I-N/2)*DELTA+EPS
90 A=A(I-1) \ B=A(I)
140 Y(I)=(I-(N+1)/2)*DELTA+EPS \ Y=Y(I)
150 GOSUB 4000
160 D=D+T
170 NEXT I
180 I=N \ A(N)=16 \ A=A(N-1) \ B=A(N)
210 Y(N)=(N-1)*DELTA/2+EPS \ Y=Y(N)
220 GOSUB 4000
25 !***** RECHERCHE DE D(MIN) AUTOUR DE EPS=DELTA/2*****
26 D=D+T \ D(J)=D
30 IF D(J)>D(J-1) THEN 305
40 EPS=EPS-.01 \ J=J+1
45 GOTO 60
250 !***** CALCUL DE L'ENTROPIE *****
305 FOR I=1 TO N \ R=R-P(I,J-1)*LOG(P(I,J-1))/LOG(2) \ NEXT I
308 EPS=EPS+.01
310 PRINT"N=";N,"DELTA=";DELTA,"EPS=";EPS,"R=";R,"D=";D(J-1)
```

```
315 DELTA=DELTA-.05
320 IF DELTA >= DI THEN 55
330 PRINT"-----"
380 GOTO 50
390 GOTO 5000
1000 ! ** CALCUL DE L'AIRE DE P(X) PAR LA METHODE DE SIMPSON **
1010 S=C \ X=A \ N1=200
1020 H=(B-A)/N1
1030 S=F(A,ALPHA)+F(B,ALPHA)
1040 FOR K=1 TO N1/2-1
1050 X=X+H \ S=S+4*F(X,ALPHA)
1060 X=X+H \ S=S+2*F(X,ALPHA)
1070 NEXT K
1080 X=X+H \ S=S+4*F(X,ALPHA)
1090 P=H*S/3 \ RETURN
3000 !***** CALCUL D'INTEGRALE A L'AIDE DE
3005 ! LA METHODE DE KANTOROVICH-SIMPSON*****
3010 S2=0 \ X=A \ N2=200
3020 H=(B-A)/N2
3030 U=L(B)-L(A) \ S2=G(B)+G(A)
3070 FOR M=1 TO N2/2-1
3080 X=X+H \ S2=S2+4*G(X)
3090 X=X+H \ S2=S2+2*G(X)
3104 NEXT M
3110 X=X+H \ S2=S2+4*G(X)
3120 V=H*S2/3
3130 P=V+U \ RETURN
4000 !***** CALCUL DE LA DISTORTION D *****
4010 ALPHA=1.5 \ GOSUB 1000 \ P1=P
4020 ALPHA=.5 \ GOSUB 1000 \ P2=-2*Y*P
4022 ALPHA=-.5
4024 IF A<=C AND B>=0 THEN 4030
4025 GOSUB 1000 \ GOTO 4040
4030 GOSUB 3000
4040 P(I,J)=P \ P3=Y^2*P
4050 T=P1+P2+P3 \ RETURN
4060 !***** VALEURS DES DONNEES DF,DI ET N *****
4080 DATA 2.4,1.5,2,3.2,1.35,4,3.2,1,6,2.4,.8,8,2.4,.7,10
4090 DATA 2.3,.35,12,1.5,.45,14,1.5,.4,16,.8,.4,20,.9,.35,26
4095 DATA .9,.3,32,.45,.1,64
5000 END
```

TABLE 2

\*\*\*\*\*  
 \* QUANTIFICATION NON SYMETRIQUE UNIFORME \*  
 \* POUR LA LOI GAMMA (N:PAIR) \*  
 \*\*\*\*\*

-----  
 NOMBRE DE ! ESPACE INTER- ! DECALAGE ! ENTROPIE ! DISTORTION  
 NIVEAUX ! NIVEAUX ! OPTIMUM ! (BIT/ECHANT).! (E.Q.M)  
 -----

N= 2	DELTA= 2.40	EPS= .970	R= .459914	D= .613420
N= 2	DELTA= 2.35	EPS= .965	R= .464492	D= .612042
N= 2	DELTA= 2.30	EPS= .960	R= .465559	D= .611628
N= 2	DELTA= 2.25	EPS= .945	R= .468698	D= .611692
N= 2	DELTA= 2.20	EPS= .880	R= .494569	D= .606344
N= 2	DELTA= 2.15	EPS= .865	R= .502040	D= .605807
N= 2	DELTA= 2.10	EPS= .820	R= .520496	D= .604978
N= 2	DELTA= 2.05	EPS= .795	R= .530927	D= .598824
N= 2	DELTA= 2.00	EPS= .790	R= .532159	D= .599379
N= 2	DELTA= 1.95	EPS= .775	R= .540078	D= .600408
N= 2	DELTA= 1.90	EPS= .710	R= .565988	D= .597087
N= 2	DELTA= 1.85	EPS= .695	R= .573983	D= .597816
N= 2	DELTA= 1.80	EPS= .680	R= .582273	D= .599055
N= 2	DELTA= 1.75	EPS= .635	R= .603778	D= .599562
N= 2	DELTA= 1.70	EPS= .620	R= .608552	D= .595718
N= 2	DELTA= 1.65	EPS= .605	R= .617312	D= .598363
N= 2	DELTA= 1.60	EPS= .590	R= .626164	D= .601640
N= 2	DELTA= 1.55	EPS= .535	R= .652960	D= .600075
N= 2	DELTA= 1.50	EPS= .520	R= .661775	D= .603319

N= 4	DELTA= 3.20	EPS= 1.590	R= .564034	D= .386850
N= 4	DELTA= 3.15	EPS= 1.565	R= .575883	D= .380134
N= 4	DELTA= 3.10	EPS= 1.540	R= .587993	D= .373452
N= 4	DELTA= 3.05	EPS= 1.515	R= .600376	D= .366809
N= 4	DELTA= 3.00	EPS= 1.490	R= .613029	D= .360207
N= 4	DELTA= 2.95	EPS= 1.465	R= .625965	D= .353657
N= 4	DELTA= 2.90	EPS= 1.440	R= .639190	D= .347162
N= 4	DELTA= 2.85	EPS= 1.415	R= .652727	D= .340746
N= 4	DELTA= 2.80	EPS= 1.380	R= .666800	D= .334381
N= 4	DELTA= 2.75	EPS= 1.355	R= .680955	D= .328096
N= 4	DELTA= 2.70	EPS= 1.330	R= .695425	D= .321897
N= 4	DELTA= 2.65	EPS= 1.305	R= .710225	D= .315781
N= 4	DELTA= 2.60	EPS= 1.280	R= .725363	D= .309789
N= 4	DELTA= 2.55	EPS= 1.255	R= .740864	D= .303926
N= 4	DELTA= 2.50	EPS= 1.230	R= .756702	D= .298181
N= 4	DELTA= 2.45	EPS= 1.205	R= .772907	D= .292577
N= 4	DELTA= 2.40	EPS= 1.170	R= .789924	D= .287083
N= 4	DELTA= 2.35	EPS= 1.145	R= .806909	D= .281781
N= 4	DELTA= 2.30	EPS= 1.120	R= .824288	D= .276655
N= 4	DELTA= 2.25	EPS= 1.095	R= .842092	D= .271735

TABLE 2 (suite)

N= 4	DELTA= 2.20	EPS= 1.070	R= .860293	D= .267011
N= 4	DELTA= 2.15	EPS= 1.035	R= .879555	D= .262507
N= 4	DELTA= 2.10	EPS= 1.010	R= .898655	D= .258228
N= 4	DELTA= 2.05	EPS= .985	R= .918206	D= .254209
N= 4	DELTA= 2.00	EPS= .960	R= .938219	D= .250473
N= 4	DELTA= 1.95	EPS= .925	R= .959566	D= .247028
N= 4	DELTA= 1.90	EPS= .900	R= .980586	D= .243881
N= 4	DELTA= 1.85	EPS= .875	R= 1.00211	D= .241085
N= 4	DELTA= 1.80	EPS= .850	R= 1.02414	D= .238640
N= 4	DELTA= 1.75	EPS= .815	R= 1.04783	D= .236602
N= 4	DELTA= 1.70	EPS= .790	R= 1.07098	D= .234987
N= 4	DELTA= 1.65	EPS= .765	R= 1.09469	D= .233819
N= 4	DELTA= 1.60	EPS= .730	R= 1.12036	D= .233109
N= 4	DELTA= 1.55	EPS= .705	R= 1.14528	D= .232957
N= 4	DELTA= 1.50	EPS= .670	R= 1.17240	D= .233321
N= 4	DELTA= 1.45	EPS= .645	R= 1.19862	D= .234333
N= 4	DELTA= 1.40	EPS= .610	R= 1.22730	D= .235967
N= 4	DELTA= 1.35	EPS= .585	R= 1.25486	D= .238291

---

N= 6	DELTA= 3.20	EPS= 1.600	R= .576307	D= .372866
N= 6	DELTA= 3.15	EPS= 1.575	R= .588951	D= .365332
N= 6	DELTA= 3.10	EPS= 1.550	R= .601913	D= .357788
N= 6	DELTA= 3.05	EPS= 1.525	R= .615194	D= .350227
N= 6	DELTA= 3.00	EPS= 1.500	R= .628809	D= .342661
N= 6	DELTA= 2.95	EPS= 1.475	R= .642769	D= .335088
N= 6	DELTA= 2.90	EPS= 1.450	R= .657086	D= .327516
N= 6	DELTA= 2.85	EPS= 1.425	R= .671772	D= .319950
N= 6	DELTA= 2.80	EPS= 1.400	R= .686835	D= .312389
N= 6	DELTA= 2.75	EPS= 1.375	R= .702295	D= .304847
N= 6	DELTA= 2.70	EPS= 1.350	R= .718158	D= .297319
N= 6	DELTA= 2.65	EPS= 1.325	R= .734450	D= .289820
N= 6	DELTA= 2.60	EPS= 1.300	R= .751169	D= .282347
N= 6	DELTA= 2.55	EPS= 1.275	R= .768339	D= .274910
N= 6	DELTA= 2.50	EPS= 1.250	R= .785982	D= .267521
N= 6	DELTA= 2.45	EPS= 1.225	R= .804104	D= .260177
N= 6	DELTA= 2.40	EPS= 1.200	R= .822735	D= .252898
N= 6	DELTA= 2.35	EPS= 1.175	R= .841880	D= .245680
N= 6	DELTA= 2.30	EPS= 1.150	R= .861563	D= .238539
N= 6	DELTA= 2.25	EPS= 1.125	R= .881812	D= .231486
N= 6	DELTA= 2.20	EPS= 1.100	R= .902641	D= .224528
N= 6	DELTA= 2.15	EPS= 1.065	R= .924150	D= .217680
N= 6	DELTA= 2.10	EPS= 1.040	R= .946216	D= .210945
N= 6	DELTA= 2.05	EPS= 1.015	R= .968932	D= .204345
N= 6	DELTA= 2.00	EPS= .990	R= .992320	D= .197891
N= 6	DELTA= 1.95	EPS= .965	R= 1.016410	D= .191600
N= 6	DELTA= 1.90	EPS= .940	R= 1.041240	D= .185494
N= 6	DELTA= 1.85	EPS= .915	R= 1.066830	D= .179587
N= 6	DELTA= 1.80	EPS= .890	R= 1.093200	D= .173903
N= 6	DELTA= 1.75	EPS= .865	R= 1.120390	D= .168465
N= 6	DELTA= 1.70	EPS= .840	R= 1.148440	D= .163300
N= 6	DELTA= 1.65	EPS= .815	R= 1.177380	D= .158435

TABLE 2 (suite)

N= 6	DELTA= 1.60	EPS= .790	R=1.207230	D= .153900
N= 6	DELTA= 1.55	EPS= .755	R=1.238350	D= .149711
N= 6	DELTA= 1.50	EPS= .730	R=1.270170	D= .145937
N= 6	DELTA= 1.45	EPS= .705	R=1.303030	D= .142611
N= 6	DELTA= 1.40	EPS= .680	R=1.336960	D= .139782
N= 6	DELTA= 1.35	EPS= .655	R=1.371990	D= .137505
N= 6	DELTA= 1.30	EPS= .620	R=1.408730	D= .135806
N= 6	DELTA= 1.25	EPS= .595	R=1.446140	D= .134801
N= 6	DELTA= 1.20	EPS= .560	R=1.485530	D= .134552
N= 6	DELTA= 1.15	EPS= .535	R=1.525470	D= .135121
N= 6	DELTA= 1.10	EPS= .510	R=1.566700	D= .136620
N= 6	DELTA= 1.05	EPS= .475	R=1.610330	D= .139159
N= 6	DELTA= 1.00	EPS= .450	R=1.654300	D= .142858
-----				
N= 8	DELTA= 2.40	EPS= 1.200	R= .826004	D= .249277
N= 8	DELTA= 2.35	EPS= 1.175	R= .845519	D= .241680
N= 8	DELTA= 2.30	EPS= 1.150	R= .865615	D= .234120
N= 8	DELTA= 2.25	EPS= 1.125	R= .886323	D= .226606
N= 8	DELTA= 2.20	EPS= 1.100	R= .907661	D= .219137
N= 8	DELTA= 2.15	EPS= 1.075	R= .929664	D= .211727
N= 8	DELTA= 2.10	EPS= 1.050	R= .952355	D= .204378
N= 8	DELTA= 2.05	EPS= 1.025	R= .975773	D= .197102
N= 8	DELTA= 2.00	EPS= 1.000	R= .999946	D= .189903
N= 8	DELTA= 1.95	EPS= .975	R=1.024910	D= .182793
N= 8	DELTA= 1.90	EPS= .950	R=1.050710	D= .175786
N= 8	DELTA= 1.85	EPS= .925	R=1.077380	D= .168888
N= 8	DELTA= 1.80	EPS= .900	R=1.104960	D= .162114
N= 8	DELTA= 1.75	EPS= .875	R=1.133500	D= .155479
N= 8	DELTA= 1.70	EPS= .850	R=1.163060	D= .148999
N= 8	DELTA= 1.65	EPS= .825	R=1.193670	D= .142690
N= 8	DELTA= 1.60	EPS= .800	R=1.225400	D= .136574
N= 8	DELTA= 1.55	EPS= .775	R=1.258300	D= .130675
N= 8	DELTA= 1.50	EPS= .750	R=1.292430	D= .125016
N= 8	DELTA= 1.45	EPS= .715	R=1.327960	D= .119628
N= 8	DELTA= 1.40	EPS= .690	R=1.364770	D= .114543
N= 8	DELTA= 1.35	EPS= .665	R=1.403020	D= .109804
N= 8	DELTA= 1.30	EPS= .640	R=1.442790	D= .105453
N= 8	DELTA= 1.25	EPS= .615	R=1.484150	D= .101552
N= 8	DELTA= 1.20	EPS= .590	R=1.527190	D= .981572E-01
N= 8	DELTA= 1.15	EPS= .565	R=1.572000	D= .953417E-01
N= 8	DELTA= 1.10	EPS= .540	R=1.618650	D= .093191
N= 8	DELTA= 1.05	EPS= .505	R=1.667610	D= .917907E-01
N= 8	DELTA= 1.00	EPS= .480	R=1.718250	D= .912706E-01
N= 8	DELTA= .95	EPS= .455	R=1.771000	D= .917664E-01
N= 8	DELTA= .90	EPS= .420	R=1.826600	D= .934345E-01
N= 8	DELTA= .85	EPS= .395	R=1.883850	D= .964692E-01
N= 8	DELTA= .80	EPS= .370	R=1.943400	D= .101105
-----				
N= 10	DELTA= 2.40	EPS= 1.200	R= .826351	D= .248383
N= 10	DELTA= 2.35	EPS= 1.175	R= .845922	D= .241225

TABLE 2 (suite)

N= 10	DELTA= 2.30	EPS= 1.150	R= .866082	D= .233593
N= 10	DELTA= 2.25	EPS= 1.125	R= .886868	D= .225997
N= 10	DELTA= 2.20	EPS= 1.100	R= .908295	D= .218435
N= 10	DELTA= 2.15	EPS= 1.075	R= .930400	D= .210916
N= 10	DELTA= 2.10	EPS= 1.050	R= .953212	D= .203441
N= 10	DELTA= 2.05	EPS= 1.025	R= .976771	D= .196021
N= 10	DELTA= 2.00	EPS= 1.000	R=1.001110	D= .188656
N= 10	DELTA= 1.95	EPS= .975	R=1.026260	D= .181354
N= 10	DELTA= 1.90	EPS= .950	R=1.052280	D= .174127
N= 10	DELTA= 1.85	EPS= .925	R=1.079210	D= .166975
N= 10	DELTA= 1.80	EPS= .900	R=1.107090	D= .159910
N= 10	DELTA= 1.75	EPS= .875	R=1.135980	D= .152939
N= 10	DELTA= 1.70	EPS= .850	R=1.165940	D= .146074
N= 10	DELTA= 1.65	EPS= .825	R=1.197030	D= .139322
N= 10	DELTA= 1.60	EPS= .800	R=1.229300	D= .132698
N= 10	DELTA= 1.55	EPS= .775	R=1.262850	D= .126216
N= 10	DELTA= 1.50	EPS= .750	R=1.297730	D= .119890
N= 10	DELTA= 1.45	EPS= .725	R=1.334040	D= .113739
N= 10	DELTA= 1.40	EPS= .700	R=1.371860	D= .107784
N= 10	DELTA= 1.35	EPS= .675	R=1.411280	D= .102053
N= 10	DELTA= 1.30	EPS= .650	R=1.452420	D= .965703E-01
N= 10	DELTA= 1.25	EPS= .625	R=1.495380	D= .913735E-01
N= 10	DELTA= 1.20	EPS= .600	R=1.540280	D= .865054E-01
N= 10	DELTA= 1.15	EPS= .575	R=1.587250	D= .820142E-01
N= 10	DELTA= 1.10	EPS= .540	R=1.636550	D= .779591E-01
N= 10	DELTA= 1.05	EPS= .515	R=1.688080	D= .744115E-01
N= 10	DELTA= 1.00	EPS= .490	R=1.742130	D= .714661E-01
N= 10	DELTA= .95	EPS= .465	R=1.798840	D= .692303E-01
N= 10	DELTA= .90	EPS= .440	R=1.858380	D= .067841
N= 10	DELTA= .85	EPS= .415	R=1.920900	D= .674645E-01
N= 10	DELTA= .80	EPS= .380	R=1.987010	D= .683011E-01
N= 10	DELTA= .75	EPS= .355	R=2.056040	D= .706004E-01
N= 10	DELTA= .70	EPS= .330	R=2.128500	D= .746915E-01

---

N= 12	DELTA= 2.30	EPS= 1.150	R= .866139	D= .233531
N= 12	DELTA= 2.25	EPS= 1.125	R= .886936	D= .225922
N= 12	DELTA= 2.20	EPS= 1.100	R= .908378	D= .218343
N= 12	DELTA= 2.15	EPS= 1.075	R= .930501	D= .210805
N= 12	DELTA= 2.10	EPS= 1.050	R= .953335	D= .203306
N= 12	DELTA= 2.05	EPS= 1.025	R= .976920	D= .195858
N= 12	DELTA= 2.00	EPS= 1.000	R= 1.00129	D= .188459
N= 12	DELTA= 1.95	EPS= .975	R= 1.02648	D= .181117
N= 12	DELTA= 1.90	EPS= .950	R= 1.05255	D= .173840
N= 12	DELTA= 1.85	EPS= .925	R= 1.07953	D= .166629
N= 12	DELTA= 1.80	EPS= .900	R= 1.10749	D= .159491
N= 12	DELTA= 1.75	EPS= .875	R= 1.13646	D= .152435
N= 12	DELTA= 1.70	EPS= .850	R= 1.16653	D= .145466
N= 12	DELTA= 1.65	EPS= .825	R= 1.19774	D= .138591
N= 12	DELTA= 1.60	EPS= .800	R= 1.23017	D= .131818
N= 12	DELTA= 1.55	EPS= .775	R= 1.26391	D= .125158
N= 12	DELTA= 1.50	EPS= .750	R= 1.29902	D= .118617

TABLE 2 (suite)

N= 12	DELTA= 1.45	EPS= .725	R= 1.33560	D= .112210
N= 12	DELTA= 1.40	EPS= .700	R= 1.37376	D= .105948
N= 12	DELTA= 1.35	EPS= .675	R= 1.41360	D= .998486E-01
N= 12	DELTA= 1.30	EPS= .650	R= 1.45524	D= .939272E-01
N= 12	DELTA= 1.25	EPS= .625	R= 1.49881	D= .882066E-01
N= 12	DELTA= 1.20	EPS= .600	R= 1.54445	D= .827135E-01
N= 12	DELTA= 1.15	EPS= .575	R= 1.59233	D= .774783E-01
N= 12	DELTA= 1.10	EPS= .550	R= 1.64260	D= .725409E-01
N= 12	DELTA= 1.05	EPS= .525	R= 1.69547	D= .679501E-01
N= 12	DELTA= 1.00	EPS= .500	R= 1.75113	D= .637696E-01
N= 12	DELTA= .95	EPS= .475	R= 1.80979	D= .600748E-01
N= 12	DELTA= .90	EPS= .450	R= 1.87171	D= .569664E-01
N= 12	DELTA= .85	EPS= .415	R= 1.93727	D= .545651E-01
N= 12	DELTA= .80	EPS= .390	R= 2.00647	D= .530361E-01
N= 12	DELTA= .75	EPS= .365	R= 2.07973	D= .525916E-01
N= 12	DELTA= .70	EPS= .340	R= 2.15731	D= .535069E-01
N= 12	DELTA= .65	EPS= .315	R= 2.23946	D= .561364E-01
N= 12	DELTA= .60	EPS= .280	R= 2.32697	D= .609238E-01
N= 12	DELTA= .55	EPS= .255	R= 2.41893	D= .685004E-01
N= 12	DELTA= .50	EPS= .220	R= 2.51691	D= .796537E-01
N= 12	DELTA= .45	EPS= .195	R= 2.61866	D= .954501E-01
N= 12	DELTA= .40	EPS= .160	R= 2.72637	D= .117303
N= 12	DELTA= .35	EPS= .125	R= 2.83799	D= .147129

---

N= 14	DELTA= 1.50	EPS= .750	R= 1.29934	D= .118298
N= 14	DELTA= 1.45	EPS= .725	R= 1.33601	D= .111808
N= 14	DELTA= 1.40	EPS= .700	R= 1.37427	D= .105444
N= 14	DELTA= 1.35	EPS= .675	R= 1.41425	D= .099216
N= 14	DELTA= 1.30	EPS= .650	R= 1.45607	D= .931339E-01
N= 14	DELTA= 1.25	EPS= .625	R= 1.49986	D= .872128E-01
N= 14	DELTA= 1.20	EPS= .600	R= 1.54579	D= .814693E-01
N= 14	DELTA= 1.15	EPS= .575	R= 1.59403	D= .759221E-01
N= 14	DELTA= 1.10	EPS= .550	R= 1.64477	D= .705965E-01
N= 14	DELTA= 1.05	EPS= .525	R= 1.69822	D= .655244E-01
N= 14	DELTA= 1.00	EPS= .500	R= 1.75463	D= .607465E-01
N= 14	DELTA= .95	EPS= .475	R= 1.81424	D= .563127E-01
N= 14	DELTA= .90	EPS= .450	R= 1.87736	D= .522923E-01
N= 14	DELTA= .85	EPS= .425	R= 1.94431	D= .487745E-01
N= 14	DELTA= .80	EPS= .400	R= 2.01543	D= .458782E-01
N= 14	DELTA= .75	EPS= .375	R= 2.09111	D= .437642E-01
N= 14	DELTA= .70	EPS= .340	R= 2.17191	D= .426401E-01
N= 14	DELTA= .65	EPS= .315	R= 2.25797	D= .428033E-01
N= 14	DELTA= .60	EPS= .290	R= 2.34984	D= .446514E-01
N= 14	DELTA= .55	EPS= .265	R= 2.44792	D= .048727
N= 14	DELTA= .50	EPS= .230	R= 2.55314	D= .557685E-01
N= 14	DELTA= .45	EPS= .205	R= 2.66441	D= .668095E-01

---

N= 16	DELTA= 1.50	EPS= .750	R= 1.29942	D= .118219
N= 16	DELTA= 1.45	EPS= .725	R= 1.33611	D= .111703
N= 16	DELTA= 1.40	EPS= .700	R= 1.37441	D= .105305



TABLE 2 (suite)

N= 16	DELTA= 1.35	EPS= .675	R= 1.41444	D= .990338E-01
N= 16	DELTA= 1.30	EPS= .650	R= 1.45632	D= .928945E-01
N= 16	DELTA= 1.25	EPS= .625	R= 1.50019	D= .868989E-01
N= 16	DELTA= 1.20	EPS= .600	R= 1.54623	D= .810582E-01
N= 16	DELTA= 1.15	EPS= .575	R= 1.59462	D= .753842E-01
N= 16	DELTA= 1.10	EPS= .550	R= 1.64554	D= .698937E-01
N= 16	DELTA= 1.05	EPS= .525	R= 1.69925	D= .646075E-01
N= 16	DELTA= 1.00	EPS= .500	R= 1.75599	D= .595519E-01
N= 16	DELTA= .95	EPS= .475	R= 1.81605	D= .547585E-01
N= 16	DELTA= .90	EPS= .450	R= 1.87976	D= .502739E-01
N= 16	DELTA= .85	EPS= .425	R= 1.94749	D= .461579E-01
N= 16	DELTA= .80	EPS= .400	R= 2.01964	D= .424935E-01
N= 16	DELTA= .75	EPS= .375	R= 2.09670	D= .393965E-01
N= 16	DELTA= .70	EPS= .350	R= 2.17915	D= .370267E-01
N= 16	DELTA= .65	EPS= .325	R= 2.26758	D= .356113E-01
N= 16	DELTA= .60	EPS= .290	R= 2.36276	D= .354664E-01
N= 16	DELTA= .55	EPS= .265	R= 2.46498	D= .037047
N= 16	DELTA= .50	EPS= .240	R= 2.57499	D= .410149E-01
N= 16	DELTA= .45	EPS= .205	R= 2.69396	D= .483121E-01
N= 16	DELTA= .40	EPS= .180	R= 2.82080	D= .602891E-01

---

N= 20	DELTA= .80	EPS= .400	R= 2.02255	D= .401209E-01
N= 20	DELTA= .75	EPS= .375	R= 2.10077	D= .361492E-01
N= 20	DELTA= .70	EPS= .350	R= 2.18488	D= .325932E-01
N= 20	DELTA= .65	EPS= .325	R= 2.27561	D= .295751E-01
N= 20	DELTA= .60	EPS= .300	R= 2.37384	D= .272814E-01
N= 20	DELTA= .55	EPS= .275	R= 2.48055	D= .259979E-01
N= 20	DELTA= .50	EPS= .250	R= 2.59683	D= .261713E-01
N= 20	DELTA= .45	EPS= .215	R= 2.72406	D= .284925E-01
N= 20	DELTA= .40	EPS= .190	R= 2.86293	D= .340651E-01

---

N= 26	DELTA= .90	EPS= .450	R= 1.88155	D= .048744
N= 26	DELTA= .85	EPS= .425	R= 1.95004	D= .440164E-01
N= 26	DELTA= .80	EPS= .400	R= 2.02330	D= .394959E-01
N= 26	DELTA= .75	EPS= .375	R= 2.10194	D= .352033E-01
N= 26	DELTA= .70	EPS= .350	R= 2.18668	D= .311652E-01
N= 26	DELTA= .65	EPS= .325	R= 2.27840	D= .274252E-01
N= 26	DELTA= .60	EPS= .300	R= 2.37817	D= .240544E-01
N= 26	DELTA= .55	EPS= .275	R= 2.48724	D= .211715E-01
N= 26	DELTA= .50	EPS= .250	R= 2.60718	D= .189856E-01
N= 26	DELTA= .45	EPS= .225	R= 2.73983	D= .178613E-01
N= 26	DELTA= .40	EPS= .200	R= 2.88735	D= .184538E-01
N= 26	DELTA= .35	EPS= .165	R= 3.05240	D= .219424E-01

---

N= 32	DELTA= .90	EPS= .450	R= 1.88157	D= .482235E-01
N= 32	DELTA= .85	EPS= .425	R= 1.95009	D= .439789E-01
N= 32	DELTA= .80	EPS= .400	R= 2.02338	D= .394288E-01
N= 32	DELTA= .75	EPS= .375	R= 2.10208	D= .350852E-01
N= 32	DELTA= .70	EPS= .350	R= 2.18694	D= .309595E-01

TABLE 2 (suite)

N= 32	DELTA= .65	EPS= .325	R= 2.27886	D= .270695E-01
N= 32	DELTA= .60	EPS= .300	R= 2.37897	D= <del>.234428E-01</del>
N= 32	DELTA= .55	EPS= .275	R= 2.48866	D= .201254E-01
N= 32	DELTA= .50	EPS= .250	R= 2.60969	D= .172057E-01
N= 32	DELTA= .45	EPS= .225	R= 2.74424	D= .148512E-01
N= 32	DELTA= .40	EPS= .200	R= 2.89510	D= .134014E-01
N= 32	DELTA= .35	EPS= .175	R= 3.06570	D= .135456E-01
N= 32	DELTA= .30	EPS= .150	R= 3.26010	D= .167111E-01

---

N= 64	DELTA= .45	EPS= .225	R= 2.74598	D= .136433E-01
N= 64	DELTA= .40	EPS= .200	R= 2.89879	D= .109379E-01
N= 64	DELTA= .35	EPS= .175	R= 3.07361	D= .852024E-02
N= 64	DELTA= .30	EPS= .150	R= 3.27720	D= .645758E-02
N= 64	DELTA= .25	EPS= .125	R= 3.51979	D= .499443E-02
N= 64	DELTA= .20	EPS= .100	R= 3.81730	D= .514555E-02
N= 64	DELTA= .15	EPS= .075	R= 4.19365	D= .112951E-01
N= 64	DELTA= .10	EPS= .040	R= 4.67408	D= .043123

\*\*\*\*\*

```
5 ! E.N.P DEPT D'ELECTRONIQUE           86/87           (GAMMA2.BAS)
6 !*****
10 !*      QUANTIFICATION NON UNIFORME POUR LA LOI GAMMA      *
20 !*      METHODE 1 DE LLOYD                                *
25 !*****
30 DIM X(100),Y(100),P(100),T(100),Q(100),E(100)
40 IT=0 \ K1=SQR(.75) \ X(0)=-16
50 PRINT" NOUS ALLONS VOUS DEMANDER LE NOMBRE DE NIVEAUX N,ENSUITE"
60 PRINT
70 PRINT" VOUS ALLEZ FAIRE ENTRER LES NIVEAUX Y(I) UN PAR UN PAR ORDRE"
80 PRINT
90 PRINT" CROISSANT"
100 PRINT
110 INPUT"N=";N
120 FOR I=1 TO N
130 PRINT"NIVEAU Y(";I;")";
    INPUT Y(I)
    PRINT
NEXT I
!DEFINITION DE FONCTIONS
170 DEF F(X,ALPHA)
172 IF ALPHA=.5 THEN 178
174 F=SQR(K1)*ABS(X)^(ALPHA)*EXP(-K1*ABS(X))/(2*SQR(PI)) \ GOTO 179
178 F=SGN(X)*SQR(K1)*ABS(X)^.5*EXP(-K1*ABS(X))/(2*SQR(PI))
179 FNEND
180 DEF L(X)=SGN(X)*SQR(K1)*(2*ABS(X)^.5-(2/3)*K1*ABS(X)^1.5      &
    +(1/5)*K1^2*ABS(X)^2.5-(1/21)*K1^3*ABS(X)^3.5              &
    +(1/108)*K1^4*ABS(X)^4.5)/(2*SQR(PI))
190 DEF U(X)
192 IF ABS(X)<1E-10 THEN 196
194 U=SGN(X)*SQR(K1)*(EXP(-K1*ABS(X))-(1-(K1*ABS(X))+(K1*X)^2/2  &
    -(K1*ABS(X))^3/6+(K1*X)^4/24))/(2*SQR(ABS(X)*PI))
195 GOTO 198
196 U=0
198 FNEND
200 R=0 \ D1=0 \ D2=0
210 FOR I=1 TO N-1
220 X(I+1)=(Y(I+1)+Y(I))/2
230 A=X(I) \ B=X(I+1)
240 GOSUB 830
250 R=R-2*P*LOG(P)/LOG(2)
260 Y=Y(I)
270 GOSUB 990
280 D1=D1+2*T
290 NEXT I
300 B=12 \ A=X(N)
310 ALPHA=-.5 \ GOSUB 710
320 R=R-2*P*LOG(P)/LOG(2)
330 Y=Y(N)
340 GOSUB 990
!INITIALISATION
```

```
350 D1=D1+2*T
360 IF N=1 GOTO 470
370 FOR I=1 TO N-1
380 A=X(I) \ B=X(I+1)
390 GOSUB 830
400 P1=P
410 ALPHA=.5 \ GOSUB 710
420 E(I)=P/P1
430 Y=E(I)
GOSUB 990
D2=D2+2*T
NEXT I
B=12 \ A=X(N)
480 ALPHA=-.5 \ GOSUB 710
490 P1=P
500 ALPHA=.5 \ GOSUB 710
510 E(N)=P/P1
520 Y=E(N)
530 GOSUB 990
540 D2=D2+2*T
550 D=D2-D1
560 IF D=0 GOTO 630
570 IF D>0 THEN PRINT "DEBORDEMENT"
580 IF D<0 GOTO 590 ELSE 630
590 FOR I=1 TO N
600 Y(I)=E(I)
610 NEXT I
620 IT=IT+1 \ IF IT>70 GOTO 640 ELSE 170
630 PRINT "VOICI LES RESULTATS"
640 PRINT "R=";R
650 PRINT "D1=";D1
660 FOR I=1 TO N
670 PRINT "X(";I;")=";X(I);"Y(";I;")=";Y(I)
680 NEXT I
690 PRINT "NOMBRE D'ITERATIONS";IT
700 GOTO 1070
710 REM CALCUL D'INTEGRAL A L'AIDE DE LA METHODE DE SIMPSON DE G(X)
720 C=100 \ S=0
730 H=(B-A)/C
740 S=F(A,ALPHA)+F(B,ALPHA)
750 X=A
760 FOR W=1 TO C/2-1
770 X=X+H \ S=S+4*F(X,ALPHA)
780 X=X+H \ S=S+2*F(X,ALPHA)
790 NEXT W
800 X=X+H \ S=S+4*F(X,ALPHA)
810 P=H*S/3
820 RETURN
830 REM CALCUL D'INTEGRALE IMPROPRE A L'AIDE DE LA METHODE DE KANTOROVITCH
840 S1=0 \ N1=100
850 H=(B-A)/N1
860 Z=L(B)-L(A)
```

```
900 S1=U(B)+U(A)
910 X=A
920 FOR W=1 TO N1/2-1
930 X=X+H \ S1=S1+4*U(X)
940 X=X+H \ S1=S1+2*U(X)
NEXT W
X=X+H \ S1=S1+4*U(X)
P=S1*H/3+Z
RETURN
```

```
990 REM CALCUL DE L'AIRES DE  $(X-Y)^2 * F(X)$  PAR LA METHODE DE KANTOROVITCH
1000 ALPHA=1.5 \ GOSUB 710
1010 T1=P
1020 ALPHA=.5 \ GOSUB 710
1030 T2=P
1040 GOSUB 830
1050 T=T1-2*Y*T2+(Y^2)*P
1060 RETURN
1070 END
```

```
5 ! ENP DPT D'ELECTRONIQUE 86/87 (DIC.BAS)
10 !*****!
15 ! QUANTIFICATION NON SYMETRIQUE !
20 ! NON UNIFORME POUR LA LOI GAMMA !
30 ! METHODE 2 DE LLOYD-MAX !
35 !*****!
40 DIM X(70),Y(70),P(70),X1(70),Y1(70),B(50),EPS(50),DEPS(50)
50 IT=0 \ K1=SQR(.75) \ SOMME=0
55 PRINT"DONNER LE NOMBRE DE NIVEAUX N,ET LE CHOIX DE Y(1)"
60 INPUT"N=";N,"Y(1)=";Y(1)
130 DEF F(X,ALPHA)
135 IF ALPHA=.5 THEN 150
140 F=SQR(K1)*(ABS(X))^(ALPHA)*EXP(-K1*ABS(X))/(2*SQR(PI))
145 GOTO 155
150 F=SGN(X)*SQR(K1)*(ABS(X))^.5*EXP(-K1*ABS(X))/(2*SQR(PI))
155 FNEND
160 DEF L(X)=SGN(X)*SQR(K1)*(2*ABS(X)^.5-(2/3)*K1*ABS(X)^1.5
      +(1/5)*K1^2*ABS(X)^2.5-(1/21)*K1^3*ABS(X)^3.5
      +(1/108)*K1^4*ABS(X)^4.5)/(2*SQR(PI))
165 DEF U(X)
170 IF ABS(X)<=1E-30 THEN 185
175 U=SGN(X)*SQR(K1)*(EXP(-K1*ABS(X))-(1-K1*ABS(X)+(K1*X)^2/2
      -(K1*ABS(X))^3/6+(K1*X)^4/24))/(2*SQR(ABS(X)*PI))
180 GOTO 190
185 U=0
190 FNEND
195 X(N)=15 \ X(0)=-15
205 FOR I=1 TO N-1
210 A=X(I-1) \ Y=Y(I)
215 GOSUB 520
220 X(I)=T1
230 Y(I+1)=2*X(I)-Y(I)
240 NEXT I
260 A=X(N-1) \ B=X(N) \ Y=Y(N)
270 ALPHA=.5 \ GOSUB 720 \ T2=P
280 IF B>=0 AND A<=0 THEN GOSUB 840 ELSE 290
285 GOTO 300
290 ALPHA=-0.5 \ GOSUB 720
300 T2=T2-Y*P
302 IF ABS(T2)<1E-6 GOTO 370
303 !*** MODIFICATION DE Y(1) PAR LA METHODE DE NEWTON-RAPHSON ***
305 FOR I=1 TO N-1
310 X1(0)=0 \ Y1(1)=1 \ ALPHA=-.5
311 A=X(I-1) \ B=X(I) \ GOSUB 1045
320 X1(I)=(X1(I-1)*(X(I-1)-Y(I))*F(X(I-1),ALPHA)
      +Y1(I)*P(I))/((X(I)-Y(I))*F(X(I),ALPHA))
330 Y1(I+1)=2*X1(I)-Y1(I)
339 NEXT I
340 I=N \ A=X(N-1) \ B=X(N) \ GOSUB 1045
345 EPS2=X1(N-1)*(Y(N)-X(N-1))*F(X(N-1),ALPHA)-Y1(N)*P(N)
348 Y(1)=Y(1)-T2/EPS2 \ IT=IT+1
```

```
60 GOTO 205
70 R=0 \ D=0
80 FOR I=1 TO N
90 A=X(I-1) \ B=X(I)
25 Y=Y(I)
30 GOSUB 1000
40 T=T1-2*Y*T2+Y^2*P(I) \ D=D+T \ R=R-P(I)*LOG(P(I))/LOG(2) \ SOMME=SOMME+P(I)
50 NEXT I
55 PRINT \ PRINT TAB(7);"N=";N
60 FOR I=1 TO N-1
70 PRINT USING"
      I,X(I),I,Y(I)
      X(##)=###.####
      Y(##)=###.####",8
75 NEXT I
80 PRINT USING"
      N,Y(N) \ PRINT
      Y(##)=###.####",8
90 PRINT USING"
      D=#.####^####
      R=#.####",D,R
00 PRINT \ !PRINT"OMBRE D'ITERATIONS";IT,"SOMME=";SOMME
03 PRINT"
-----
04 SOMME=0
05 GOTO 55
10 GOTO 1080
20 !***** CALCUL DE X(I) CONNAISSANT X(I-1) ET Y(I) *****
30 B=Y \ A=X(I-1)
40 ALPHA=.5 \ GOSUB 720
45 A1=P \ IF B>=0 AND A<=0 THEN GOSUB 840 ELSE 555
50 GOTO 560
55 ALPHA=-.5 \ GOSUB 720
60 A1=A1-Y*P
70 !***** LOCALISATION DE X(I) *****
80 PAS=.2 \ B(0)=Y+PAS
90 A=Y \ B=B(0)
80 ALPHA=.5 \ GOSUB 720 \ A2=P
85 IF B>=0 AND A<=0 THEN 590 ELSE 595
90 GOSUB 840 \ GOTO 600
95 ALPHA=-.5 \ GOSUB 720
00 A2=A2-Y*P \ EPS=A2+A1
05 IF EPS>=0 THEN 615
10 B(0)=B(0)+PAS \ IF B(0)<15 GOTO 570
11 PRINT"LA METHODE 2 NE CONVERGE PAS POUR LE Y(1) CHOISI"
12 GOTO 1080
13 !**** DETERMINATION DE X(I) PAR LA METHODE DE
14 ! REGULA-FALSI (VARIANTE DE DICHOTOMIE DE BOLZANO) ****
15 XG=B(0)-PAS \ XD=B(0)
20 W=(XD+XG)/2
25 B=W \ A=Y \ GOSUB 670 \ EPSW=A1+A2
30 B=XD \ A=Y \ GOSUB 670 \ EPSD=A1+A2
40 IF EPSD*EPSW>0 THEN 645 ELSE 655
45 XD=W
50 GOTO 660
55 XG=W
60 IF ABS(XD-XG)<2E-5 THEN 665 ELSE 620
65 T1=(XD+XG)/2 \ GOTO 710
```

```
0 ALPHA=.5 \ GOSUB 720 \ A2=P
5 IF B>=0 AND A<=0 THEN 680 ELSE 685
0 GOSUB 840 \ GOTO 690
5 ALPHA=-.5 \ GOSUB 720
0 A2=A2-Y*P \ RETURN
0 RETURN
0 !*****CALCUL DE L'INTEGRALE DE F(X,ALPHA)
5 !      PAR LA FORMULE DE SIMPSON *****
0 N2=90
0 H=(B-A)/N2 \ S=0
0 S=F(A,ALPHA)+F(B,ALPHA)
0 X=A
0 FOR L2=1 TO N2/2-1
0 X=X+H \ S=S+4*F(X,ALPHA)
0 X=X+H \ S=S+2*F(X,ALPHA)
0 NEXT L2
0 X=X+H \ S=S+4*F(X,ALPHA)
0 P=H*S/3
0 RETURN
0 !***** CALCUL DE L'INTEGRALE IMPROPRE DE F(X,-0.5)
5 !      PAR LA METHODE DE KANTOROVICH *****
0 S1=0 \ N1=90
0 H=(B-A)/N1
0 Z=L(B)-L(A)
0 S1=U(B)+U(A)
0 X=A
0 FOR L1=1 TO N1/2-1
0 X=X+H \ S1=S1+4*U(X)
0 X=X+H \ S1=S1+2*U(X)
0 NEXT L1
0 X=X+H \ S1=S1+4*U(X)
0 P=S1*H/3+Z
0 RETURN
00 !***** CALCUL DE LA DISTORSION D PAR LA METHODE
05 !      DE SIMPSON-KANTOROVICH *****
10 ALPHA=1.5 \ GOSUB 720
20 T1=P
30 ALPHA=.5 \ GOSUB 720
35 T2=P
45 ALPHA=-0.5
50 IF B>=0 AND A<=0 THEN 1060
55 GOSUB 720 \ GOTO 1070
60 GOSUB 840
70 P(I)=P \ RETURN
80 END
```



TABLE 3

\*\*\*\*\*  
\* RESULTATS DE LA QUANTIFICATION NON SYMETRIQUE \*  
\* NON UNIFORME POUR LA LOI GAMMA (N:PAIR) \*  
\*\*\*\*\*

N= 4

X( 1)=	-1.04454	Y( 1)=	-1.98133
X( 2)=	0.39561	Y( 2)=	-0.10776
X( 3)=	1.89006	Y( 3)=	0.89898
		Y( 4)=	2.88114

D=2.12599E-01

R=1.26775

N= 6

X( 1)=	-2.11036	Y( 1)=	-3.11097
X( 2)=	-0.58366	Y( 2)=	-1.10976
X( 3)=	0.28871	Y( 3)=	-0.05757
X( 4)=	1.20262	Y( 4)=	0.63498
X( 5)=	2.79388	Y( 5)=	1.77027
		Y( 6)=	3.81749

D=1.08938E-01

R=1.72608

N= 8

X( 1)=	-2.92833	Y( 1)=	-3.95565
X( 2)=	-1.32791	Y( 2)=	-1.90102
X( 3)=	-0.39518	Y( 3)=	-0.75480
X( 4)=	0.22565	Y( 4)=	-0.03555
X( 5)=	0.88049	Y( 5)=	0.48685
X( 6)=	1.86506	Y( 6)=	1.27412
X( 7)=	3.49647	Y( 7)=	2.45600
		Y( 8)=	4.53694

D=6.62556E-02

R=2.07481

N= 10

X( 1)=	-3.58757	Y( 1)=	-4.63003
X( 2)=	-1.95184	Y( 2)=	-2.54511
X( 3)=	-0.96129	Y( 3)=	-1.35856
X( 4)=	-0.29398	Y( 4)=	-0.56401
X( 5)=	0.18427	Y( 5)=	-0.02395
X( 6)=	0.69139	Y( 6)=	0.39250
X( 7)=	1.40260	Y( 7)=	0.99028
X( 8)=	2.41866	Y( 8)=	1.81491
X( 9)=	4.07394	Y( 9)=	3.02242
		Y(10)=	5.12547

D=4.45764E-02

R=2.35598

TABLE 3 (suite)

N= 12

X( 1)=	-4.13886	Y( 1)=	-5.19121
X( 2)=	-2.48163	Y( 2)=	-3.08651
X( 3)=	-1.46287	Y( 3)=	-1.87675
X( 4)=	-0.74753	Y( 4)=	-1.04899
X( 5)=	-0.23161	Y( 5)=	-0.44607
X( 6)=	0.15501	Y( 6)=	-0.01716
X( 7)=	0.56660	Y( 7)=	0.32718
X( 8)=	1.12045	Y( 8)=	0.80603
X( 9)=	1.85754	Y( 9)=	1.43488
X(10)=	2.89194	Y(10)=	2.28021
X(11)=	4.56207	Y(11)=	3.50366
		Y(12)=	5.62048

D=3.20443E-02

R=2.59161

N= 14

X( 1)=	-4.61219	Y( 1)=	-5.67153
X( 2)=	-2.94030	Y( 2)=	-3.55284
X( 3)=	-1.90418	Y( 3)=	-2.32777
X( 4)=	-1.16494	Y( 4)=	-1.48059
X( 5)=	-0.60790	Y( 5)=	-0.84928
X( 6)=	-0.18969	Y( 6)=	-0.36652
X( 7)=	0.13332	Y( 7)=	-0.01286
X( 8)=	0.47830	Y( 8)=	0.27950
X( 9)=	0.92993	Y( 9)=	0.67710
X(10)=	1.50611	Y(10)=	1.18275
X(11)=	2.25890	Y(11)=	1.82946
X(12)=	3.30573	Y(12)=	2.68834
X(13)=	4.98678	Y(13)=	3.92312
		Y(14)=	6.05045

D=2.41477E-02

R=2.79426

N= 16

X( 1)=	-5.02667	Y( 1)=	-6.09120
X( 2)=	-3.34412	Y( 2)=	-3.96214
X( 3)=	-2.29604	Y( 3)=	-2.72611
X( 4)=	-1.54190	Y( 4)=	-1.86598
X( 5)=	-0.96402	Y( 5)=	-1.21782
X( 6)=	-0.50989	Y( 6)=	-0.71023
X( 7)=	-0.15977	Y( 7)=	-0.30956
X( 8)=	0.11660	Y( 8)=	-0.00999

TABLE 3 (suite)

X( 9)=	0.41256	Y( 9)=	0.24319
X(10)=	0.79251	Y(10)=	0.58193
X(11)=	1.26377	Y(11)=	1.00310
X(12)=	1.85368	Y(12)=	1.52444
X(13)=	2.61715	Y(13)=	2.18292
X(14)=	3.67292	Y(14)=	3.05138
X(15)=	5.36185	Y(15)=	4.29445
		Y(16)=	6.42925

D=1.88498E-02

R=2.97206

N= 20

X( 1)=	-6.00616	Y( 1)=	-7.08001
X( 2)=	-4.30462	Y( 2)=	-4.93231
X( 3)=	-3.23608	Y( 3)=	-3.67692
X( 4)=	-2.45845	Y( 4)=	-2.79525
X( 5)=	-1.85186	Y( 5)=	-2.12166
X( 6)=	-1.35968	Y( 6)=	-1.58207
X( 7)=	-0.95103	Y( 7)=	-1.13728
X( 8)=	-0.60314	Y( 8)=	-0.76477
X( 9)=	-0.32174	Y( 9)=	-0.45151
X(10)=	-0.09277	Y(10)=	-0.19198
X(11)=	0.12015	Y(11)=	0.00644
X(12)=	0.38199	Y(12)=	0.23385
X(13)=	0.71067	Y(13)=	0.53013
X(14)=	1.10931	Y(14)=	0.89121
X(15)=	1.59375	Y(15)=	1.32740
X(16)=	2.19398	Y(16)=	1.86010
X(17)=	2.96613	Y(17)=	2.52785
X(18)=	4.02976	Y(18)=	3.40440
X(19)=	5.72683	Y(19)=	4.65513
		Y(20)=	6.79853

D=1.24027E-02

R=3.27294

N= 26

X( 1)=	-6.77988	Y( 1)=	-7.85831
X( 2)=	-5.06847	Y( 2)=	-5.70145
X( 3)=	-3.98896	Y( 3)=	-4.43549
X( 4)=	-3.19938	Y( 4)=	-3.54244
X( 5)=	-2.57945	Y( 5)=	-2.85633
X( 6)=	-2.07193	Y( 6)=	-2.30257
X( 7)=	-1.64504	Y( 7)=	-1.84129
X( 8)=	-1.27942	Y( 8)=	-1.44879
X( 9)=	-0.96263	Y( 9)=	-1.11005
X(10)=	-0.68651	Y(10)=	-0.81520
X(11)=	-0.44606	Y(11)=	-0.55782
X(12)=	-0.23935	Y(12)=	-0.33431
X(13)=	-0.07029	Y(13)=	-0.14439
X(14)=	0.08620	Y(14)=	0.00380

TABLE 3 (suite)

X(15)=	0.27363	Y(15)=	0.16860
X(16)=	0.50278	Y(16)=	0.37866
X(17)=	0.77088	Y(17)=	0.62690
X(18)=	1.08145	Y(18)=	0.91486
X(19)=	1.44197	Y(19)=	1.24805
X(20)=	1.86451	Y(20)=	1.63589
X(21)=	2.36819	Y(21)=	2.09313
X(22)=	2.98461	Y(22)=	2.64325
X(23)=	3.77085	Y(23)=	3.32597
X(24)=	4.84698	Y(24)=	4.21573
X(25)=	6.55444	Y(25)=	5.47823
		Y(26)=	7.63065

D=7.53188E-03

R=3.63219

N= 32

X( 1)=	-7.21843	Y( 1)=	-8.29822
X( 2)=	-5.50347	Y( 2)=	-6.13864
X( 3)=	-4.41934	Y( 3)=	-4.86830
X( 4)=	-3.62469	Y( 4)=	-3.97039
X( 5)=	-2.99922	Y( 5)=	-3.27899
X( 6)=	-2.48558	Y( 6)=	-2.71944
X( 7)=	-2.05184	Y( 7)=	-2.25173
X( 8)=	-1.67839	Y( 8)=	-1.85196
X( 9)=	-1.35242	Y( 9)=	-1.50483
X(10)=	-1.06519	Y(10)=	-1.20001
X(11)=	-0.81066	Y(11)=	-0.93037
X(12)=	-0.58473	Y(12)=	-0.69095
X(13)=	-0.38497	Y(13)=	-0.47851
X(14)=	-0.21093	Y(14)=	-0.29144
X(15)=	-0.06646	Y(15)=	-0.13042
X(16)=	0.05610	Y(16)=	-0.00250
X(17)=	0.18389	Y(17)=	0.11470
X(18)=	0.34911	Y(18)=	0.26308
X(19)=	0.53243	Y(19)=	0.43514
X(20)=	0.73878	Y(20)=	0.62973
X(21)=	0.96980	Y(21)=	0.84783
X(22)=	1.22847	Y(22)=	1.09177
X(23)=	1.51919	Y(23)=	1.36517
X(24)=	1.84818	Y(24)=	1.67321
X(25)=	2.22428	Y(25)=	2.02315
X(26)=	2.66039	Y(26)=	2.42541
X(27)=	3.17615	Y(27)=	2.89537
X(28)=	3.80355	Y(28)=	3.45693
X(29)=	4.59993	Y(29)=	4.15016
X(30)=	5.68547	Y(30)=	5.04971
X(31)=	7.40080	Y(31)=	6.32123
		Y(32)=	8.48038

D=5.05412E-03

R=3.91970

TABLE 3 (suite)

N=64

X( 1)=	-9.46312	Y( 1)=	-10.49010
X( 2)=	-7.81321	Y( 2)=	-8.43617
X( 3)=	-6.74118	Y( 3)=	-7.19026
X( 4)=	-5.94249	Y( 4)=	-6.29210
X( 5)=	-5.30704	Y( 5)=	-5.59289
X( 6)=	-4.77968	Y( 6)=	-5.02118
X( 7)=	-4.32934	Y( 7)=	-4.53817
X( 8)=	-3.93673	Y( 8)=	-4.12051
X( 9)=	-3.58902	Y( 9)=	-3.75295
X(10)=	-3.27729	Y(10)=	-3.42509
X(11)=	-2.99505	Y(11)=	-3.12948
X(12)=	-2.73743	Y(12)=	-2.86061
X(13)=	-2.50072	Y(13)=	-2.61425
X(14)=	-2.28200	Y(14)=	-2.38718
X(15)=	-2.07396	Y(15)=	-2.17682
X(16)=	-1.88971	Y(16)=	-1.98110
X(17)=	-1.71273	Y(17)=	-1.79833

X(18)=	-1.54672	Y(18)=	-1.62712
X(19)=	-1.39065	Y(19)=	-1.46632
X(20)=	-1.24362	Y(20)=	-1.31497
X(21)=	-1.10491	Y(21)=	-1.17227
X(22)=	-0.97389	Y(22)=	-1.03755
X(23)=	-0.85006	Y(23)=	-0.91024
X(24)=	-0.73299	Y(24)=	-0.78988
X(25)=	-0.62235	Y(25)=	-0.67609
X(26)=	-0.51793	Y(26)=	-0.56861
X(27)=	-0.41956	Y(27)=	-0.46724
X(28)=	-0.32725	Y(28)=	-0.37189
X(29)=	-0.24115	Y(29)=	-0.28262
X(30)=	-0.16169	Y(30)=	-0.19968
X(31)=	-0.08989	Y(31)=	-0.12370
X(32)=	-0.02850	Y(32)=	-0.05607
X(33)=	0.02476	Y(33)=	-0.00093
X(34)=	0.08223	Y(34)=	0.05046
X(35)=	0.14984	Y(35)=	0.11399
X(36)=	0.22500	Y(36)=	0.18569
X(37)=	0.30683	Y(37)=	0.26431
X(38)=	0.39501	Y(38)=	0.34935
X(39)=	0.48949	Y(39)=	0.44067
X(40)=	0.59038	Y(40)=	0.53831
X(41)=	0.69790	Y(41)=	0.64245
X(42)=	0.81239	Y(42)=	0.75336
X(43)=	0.93427	Y(43)=	0.87142
X(44)=	1.06406	Y(44)=	0.99711
X(45)=	1.20239	Y(45)=	1.13100
X(46)=	1.35003	Y(46)=	1.27378
X(47)=	1.50786	Y(47)=	1.42627

TABLE 3 (fin)

X(48)=	1.67697	Y(48)=	1.58945
X(49)=	1.85865	Y(49)=	1.76450
X(50)=	2.05445	Y(50)=	1.95281
X(51)=	2.26625	Y(51)=	2.15608
X(52)=	2.49638	Y(52)=	2.37641
X(53)=	2.74778	Y(53)=	2.61636
X(54)=	3.02416	Y(54)=	2.87920
X(55)=	3.33036	Y(55)=	3.16912
X(56)=	3.67280	Y(56)=	3.49159
X(57)=	4.06032	Y(57)=	3.85401
X(58)=	4.50554	Y(58)=	4.26664
X(59)=	5.02741	Y(59)=	4.74445
X(60)=	5.65634	Y(60)=	5.31037
X(61)=	6.44605	Y(61)=	6.00231
X(62)=	7.50655	Y(62)=	6.88979
X(63)=	9.13496	Y(63)=	8.12331
		Y(64)=	10.14660

D=1.301830E-03

R=4.90507

\*\*\*\*\*

- 66 -  
TABLE 4

\*\*\*\*\*  
\* QUANTIFICATION NON SYMETRIQUE NON UNIFORME \*  
\* POUR LA LOI GAMMA (N:IMPAIR) \*  
\*\*\*\*\*

N= 3

X( 1)=	-0.92589	Y( 1)=	-1.85264
X( 2)=	0.92616	Y( 2)=	0.00086
		Y( 3)=	1.85147

D=2.96082E-01

R=0.93760

N= 5

X( 1)=	-2.03566	Y( 1)=	-3.03329
X( 2)=	-0.51878	Y( 2)=	-1.03804
X( 3)=	0.52004	Y( 3)=	0.00047
X( 4)=	2.03714	Y( 4)=	1.03960
		Y( 5)=	3.03467

D=1.39404E-01

R=1.50063

N= 7

X( 1)=	-2.88212	Y( 1)=	-3.90822
X( 2)=	-1.28409	Y( 2)=	-1.85601
X( 3)=	-0.35660	Y( 3)=	-0.71217
X( 4)=	0.35269	Y( 4)=	-0.00103
X( 5)=	1.27748	Y( 5)=	0.70642
X( 6)=	2.87434	Y( 6)=	1.84853
		Y( 7)=	3.90014

D=8.06994E-02

R=1.90449

N= 11

X( 1)=	-3.62514	Y( 1)=	-4.67139
X( 2)=	-1.98356	Y( 2)=	-2.57889
X( 3)=	-0.98872	Y( 3)=	-1.38824
X( 4)=	-0.31613	Y( 4)=	-0.58920
X( 5)=	0.12376	Y( 5)=	-0.04305
X( 6)=	0.52752	Y( 6)=	0.29056
X( 7)=	1.07715	Y( 7)=	0.76448
X( 8)=	1.81066	Y( 8)=	1.38981
X( 9)=	2.84246	Y( 9)=	2.23150
X(10)=	4.51105	Y(10)=	3.45342
		Y(11)=	5.56869

D=3.95370E-02

R=2.48846

TABLE 4 (suite)

N= 15

X( 1)=	-4.63745	Y( 1)=	-5.69864
X( 2)=	-2.96278	Y( 2)=	-3.57625
X( 3)=	-1.92491	Y( 3)=	-2.34930
X( 4)=	-1.18407	Y( 4)=	-1.50051
X( 5)=	-0.62510	Y( 5)=	-0.86762
X( 6)=	-0.20353	Y( 6)=	-0.38259
X( 7)=	0.09847	Y( 7)=	-0.02447
X( 8)=	0.38882	Y( 8)=	0.22140
X( 9)=	0.76510	Y( 9)=	0.55624
X(10)=	1.23267	Y(10)=	0.97396
X(11)=	1.81826	Y(11)=	1.49138
X(12)=	2.57820	Y(12)=	2.14513
X(13)=	3.63253	Y(13)=	3.01127
X(14)=	5.32127	Y(14)=	4.25380
		Y(15)=	6.38874

D=2.19125E-02

R=2.89231

N= 21

X( 1)=	-6.50831	Y( 1)=	-7.58591
X( 2)=	-4.79918	Y( 2)=	-5.43071
X( 3)=	-3.72277	Y( 3)=	-4.16765
X( 4)=	-2.93670	Y( 4)=	-3.27790
X( 5)=	-2.32072	Y( 5)=	-2.59550
X( 6)=	-1.81738	Y( 6)=	-2.04593
X( 7)=	-1.39517	Y( 7)=	-1.58883
X( 8)=	-1.03532	Y( 8)=	-1.20152
X( 9)=	-0.72553	Y( 9)=	-0.86913
X(10)=	-0.45871	Y(10)=	-0.58192
X(11)=	-0.23235	Y(11)=	-0.33549
X(12)=	-0.05221	Y(12)=	-0.12922
X(13)=	0.15572	Y(13)=	0.102481
X(14)=	0.45748	Y(14)=	0.28664
X(15)=	0.83936	Y(15)=	0.62832
X(16)=	1.31075	Y(16)=	1.05040
X(17)=	1.89936	Y(17)=	1.57110
X(18)=	2.66192	Y(18)=	2.22762
X(19)=	3.71881	Y(19)=	3.09623
X(20)=	5.41094	Y(20)=	4.34139
		Y(21)=	6.48049

D=1.23012E-02

R=3.34721

N= 31

X( 1)=	-6.80811	Y( 1)=	-7.88665
X( 2)=	-5.09642	Y( 2)=	-5.72957
X( 3)=	-4.01655	Y( 3)=	-4.46327



TABLE 4 (suite)

X( 4)=	-3.22659	Y( 4)=	-3.56984
X( 5)=	-2.60625	Y( 5)=	-2.88335
X( 6)=	-2.09828	Y( 6)=	-2.32915
X( 7)=	-1.67089	Y( 7)=	-1.86740
X( 8)=	-1.30468	Y( 8)=	-1.47437
X( 9)=	-0.98718	Y( 9)=	-1.13500
X(10)=	-0.71019	Y(10)=	-0.83937
X(11)=	-0.46858	Y(11)=	-0.58101
X(12)=	-0.26013	Y(12)=	-0.35615
X(13)=	-0.08765	Y(13)=	-0.16411
X(14)=	0.04172	Y(14)=	-0.01119
X(15)=	0.16291	Y(15)=	0.09463
X(16)=	0.31048	Y(16)=	0.23120
X(17)=	0.47925	Y(17)=	0.38977
X(18)=	0.66861	Y(18)=	0.56872
X(19)=	0.87962	Y(19)=	0.76849
X(20)=	1.11444	Y(20)=	0.99074
X(21)=	1.37632	Y(21)=	1.23814
X(22)=	1.66981	Y(22)=	1.51450
X(23)=	2.00126	Y(23)=	1.82513
X(24)=	2.37957	Y(24)=	2.17739
X(25)=	2.81772	Y(25)=	2.58176
X(26)=	3.33538	Y(26)=	3.05368
X(27)=	3.96459	Y(27)=	3.61709
X(28)=	4.76273	Y(28)=	4.31210
X(29)=	5.84999	Y(29)=	5.21337
X(30)=	7.56708	Y(30)=	6.48662
		Y(31)=	8.64755

D=5.59801E-03

R=3.87645

\*\*\*\*\*

## 1- Quantification non symétrique

### 1-1 Cas uniforme

#### 1-1-1 N pair :

Nous avons représenté la caractéristique  $R=f(D)$ , pour différentes valeurs du pas de quantification  $\Delta$ . On conclue que :

-pour chaque  $\Delta$ , on trouve un décalage  $\epsilon_{opt}$  voisin de  $\frac{\Delta}{2}$  pour lequel la distorsion est minimale.

-pour chaque N, il existe un  $\Delta_{opt}$ , pour lequel D est minimale. Par conséquent, pour chaque N, on peut trouver un couple  $(\Delta_{opt}, \epsilon_{opt})$ .

-l'entropie R correspondant à  $D_{min}$ , augmente avec N.

-pour des valeurs faibles et moyenne de N ( $N=4,8,16$ ), on peut trouver, pour un  $\Delta$  donné, deux valeurs  $d'$  de  $\epsilon$ , situées de part et d'autre de  $\epsilon_{opt}$ , donnant la même entropie mais des distorsions différentes, et vis-versa. Ces différences tendent vers l'égalité pour des grandes valeurs de N, fig.(7,8,9,10).

Nous avons représenté, fig.(11a), la courbe  $R=f(D)$ , pour N variant de 4 à 64. L'enveloppe de cette courbe, est appelée courbe de performance du quantificateur uniforme.

-pour chaque valeur de R, on peut déterminer la distorsion optimale, et vis-versa.

-pour des N différents, on peut avoir des quantificateurs ayant le même couple  $(R,D)$ . Donc, si une telle performance est voulue, il est préférable - par raison de simplicité - de choisir celui dont le nombre de niveaux N est le plus faible.

-la distorsion  $D_{min}$  pour chaque N, décroît quand celui-ci augmente.

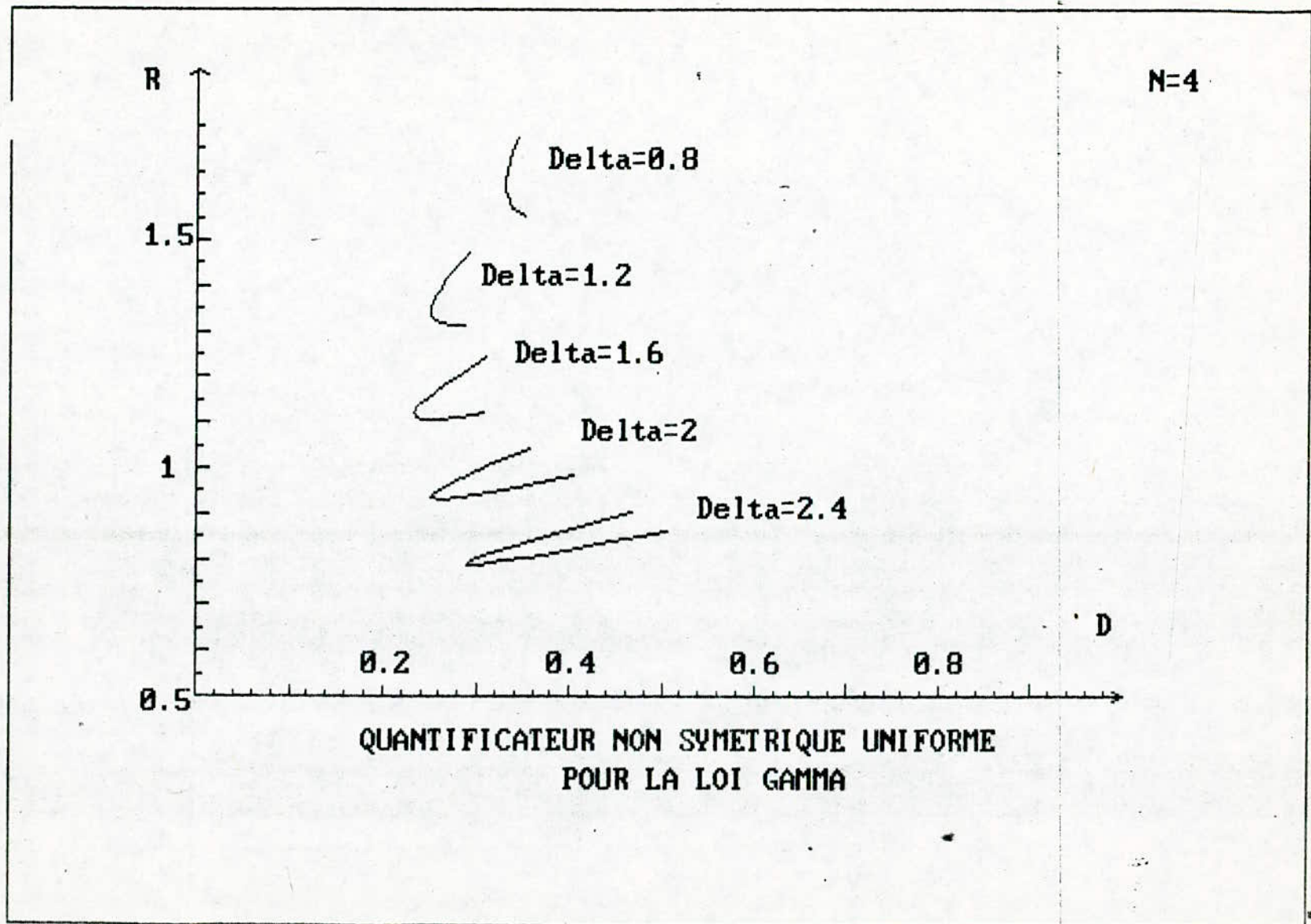


Fig.(7)

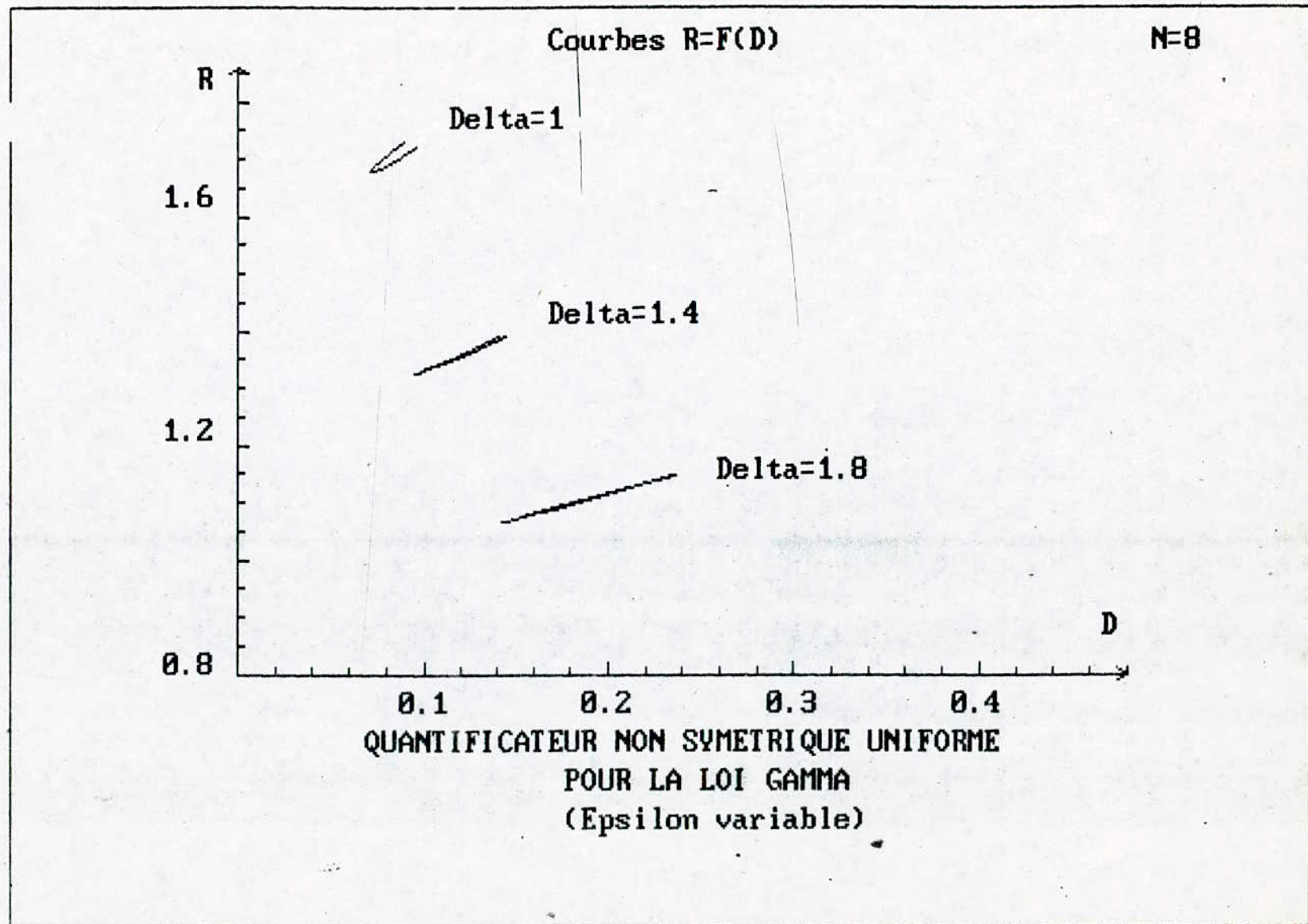


Fig.(8)

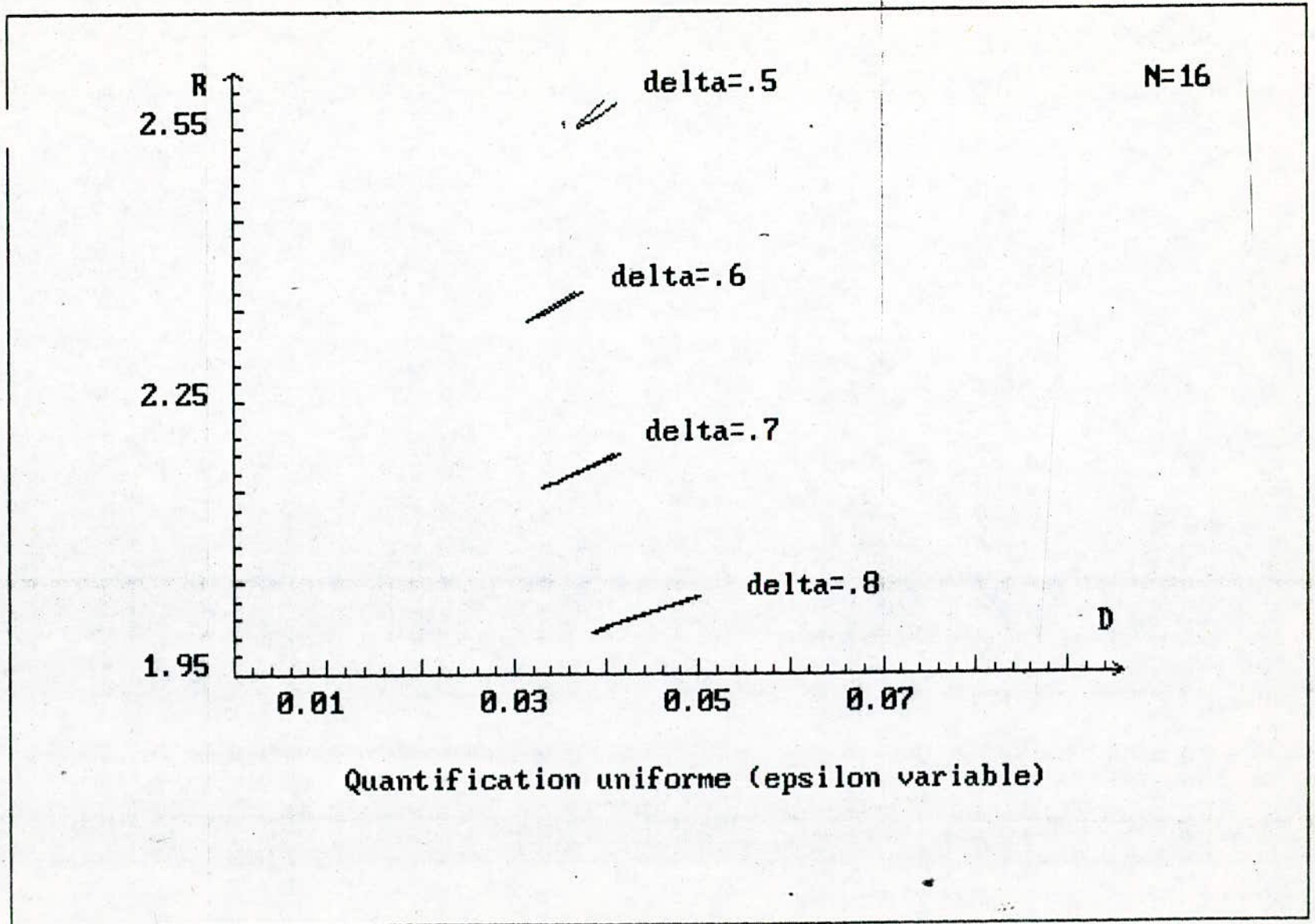


Fig.(9)

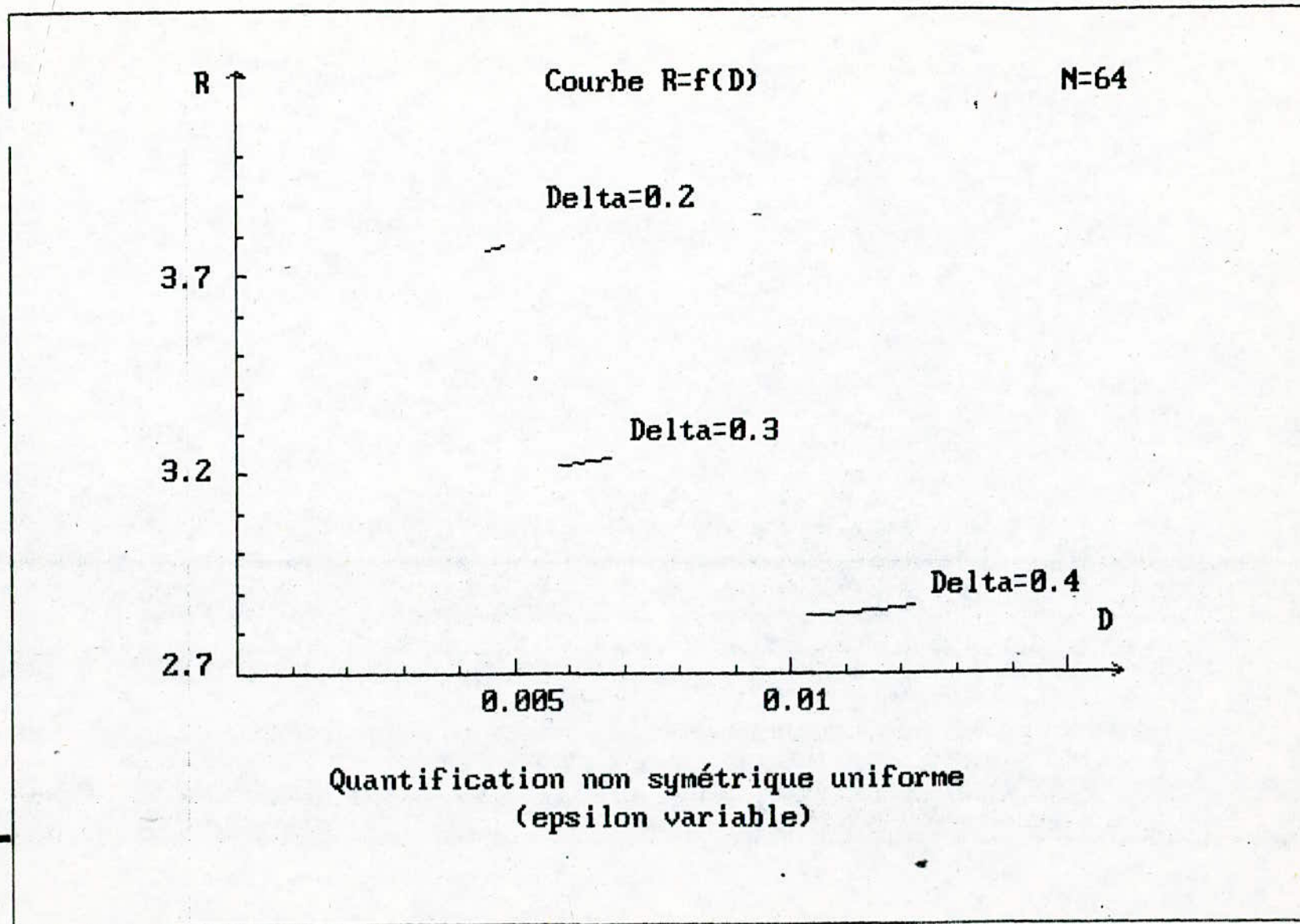


Fig. (10)

Quantification non symétrique uniforme  
pour la loi Gamma (N:pair)  
 $R=f(D)$

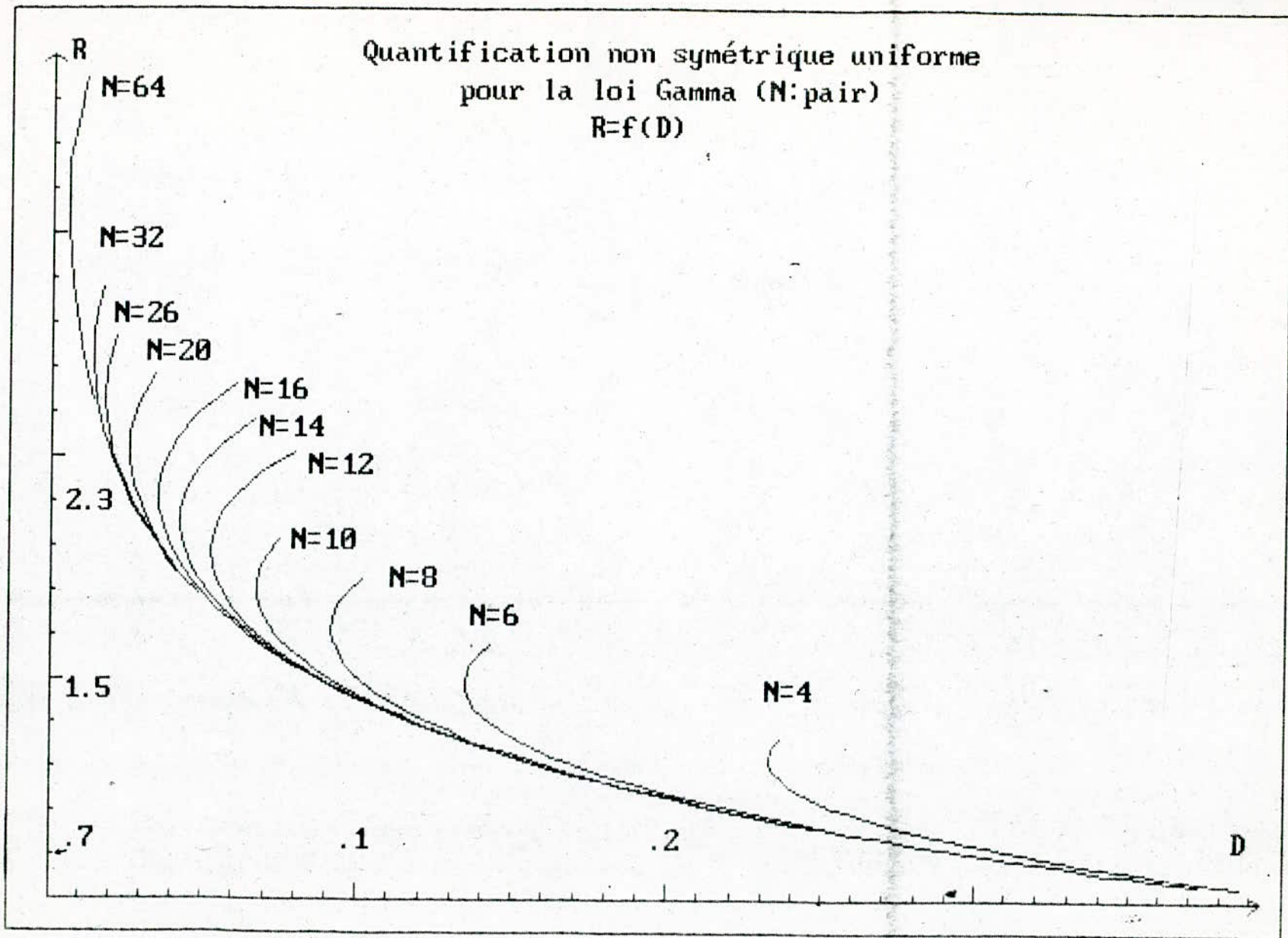


Fig. (110)

-l'écart entre  $D_{min}$  de deux valeurs de  $N$  pairs et successifs, diminue vers les grandes valeurs de  $N$  .

-il existe des quantificateurs ayant des entropies inférieures à 1, par contre, pour le symétrique, on montre que  $R \geq 1$ , fig(11b), [5].

1-1-2 N impair :

Pour ce cas, on a trouvé qu'un décalage nul donnait, la distorsion la plus petite, comme nous allons voir plus loin .

1-2 Cas non uniforme

Un compromis pratique, est d'utiliser la méthode 1 de Lloyd, vu sa rapidité, pour trouver une solution approximative et la raffiner à l'aide de la méthode 2 de Lloyd-Max, qui est plus précise mais moins rapide. Telle était la stratégie envisagée.

Cependant, nous avons constaté que ces méthodes pouvaient converger vers plusieurs solutions optimales localement . Ainsi, pour  $N=6$ , on trouve trois solutions: une symétrique et deux non symétriques, fig.(12) . Et pour des  $N$  grands, exemple  $N=20$ , nous avons trouvé trois solutions non symétriques (TABLE 3+Annexe 3 ), en plus de la solution symétrique .

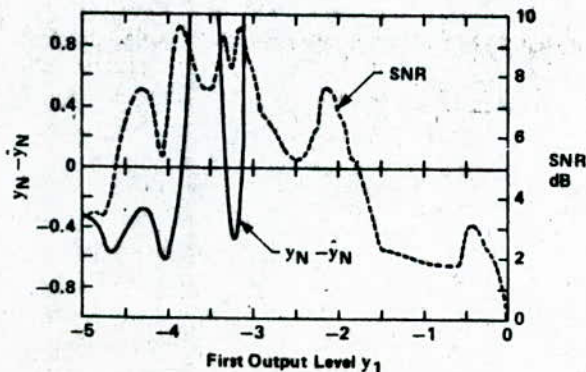


fig.(12)



Remarque :

- La solution non symétrique, si elle existe, n'est pas unique. En effet, chacune d'elles, génère, par réflexion des niveaux par rapport à zéro, une autre avec la même distorsion et même entropie.

- La méthode 2 risque de diverger, si le premier niveau  $Y_1$  n'est pas choisi assez proche de la solution, fig.(12).

Pour un choix précis, et rapide de  $Y_1$ , nous avons adopté la méthode suivante :

- nous avons cherché toutes les solutions possibles, pour différentes valeurs de N ( $N=4, \dots, 64$ ).

- parmi ces solutions, nous avons choisi celles qui donnent la plus faible distorsion.

- nous avons tracé le lieu des points  $(\text{LOG}(N), -Y_1)$ . Nous avons trouvé que c'est une droite, dont l'équation (calculée par la méthode des moindres carrés), est :

$$-Y_1 = 3.12445 \times \text{LOG}(N) - 2.48159$$

-- à partir de cette droite, on peut obtenir un très bon estimé de  $Y_1$ , fig.(13).

- l'utilisation de la droite pour l'estimation de  $Y_1$ , procure un double avantage. Elle évite de passer par la méthode 1 de Lloyd, pour l'approximation de  $Y_1$ . Et elle permet d'avoir, directement, le choix de  $Y_1$  pour la solution absolue.

1-3 Comparaison cas uniforme/non uniforme

- Dans le cas où N est pair, le quantificateur non uniforme est meilleur que l'uniforme, fig.(14a).

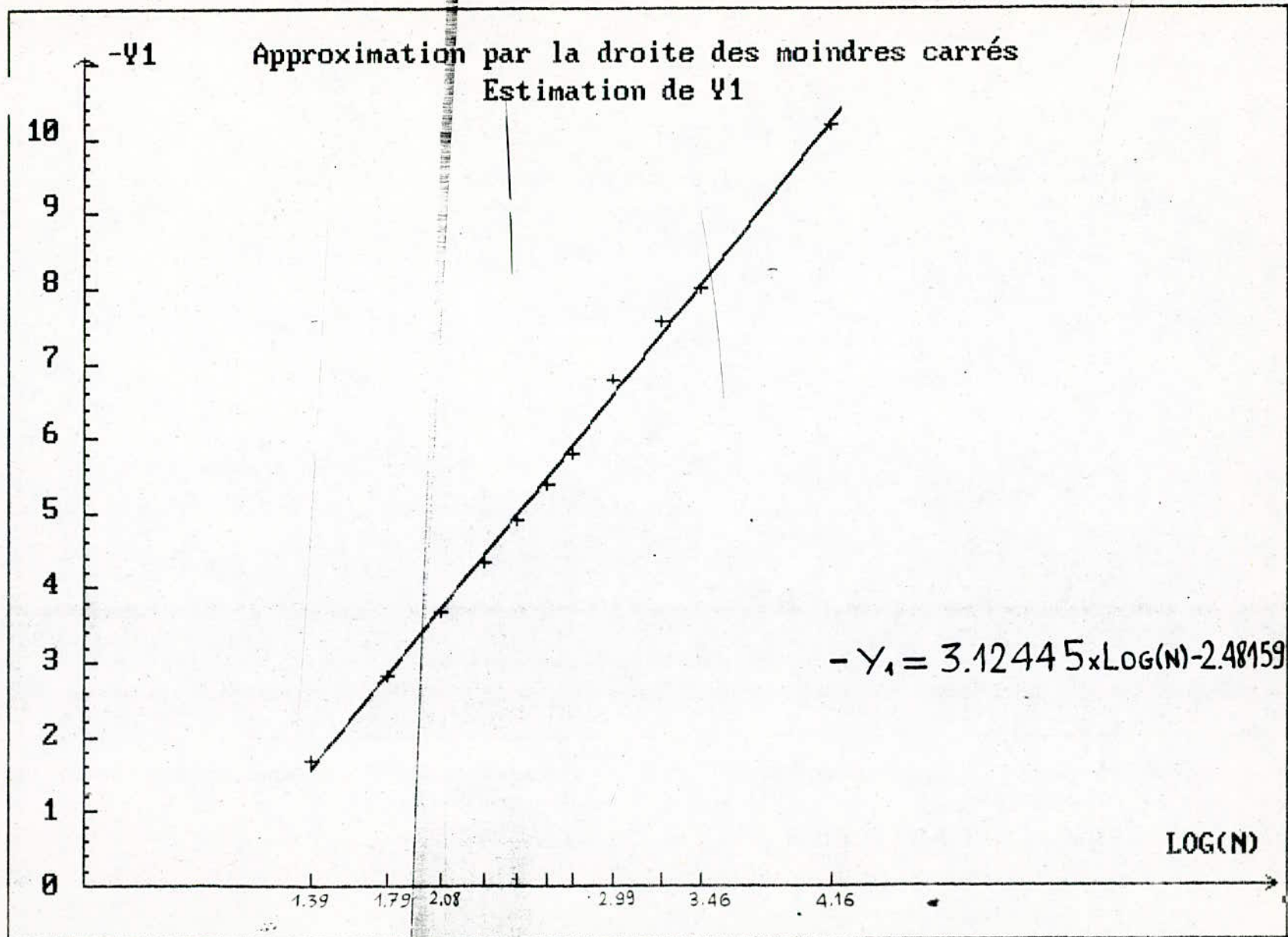
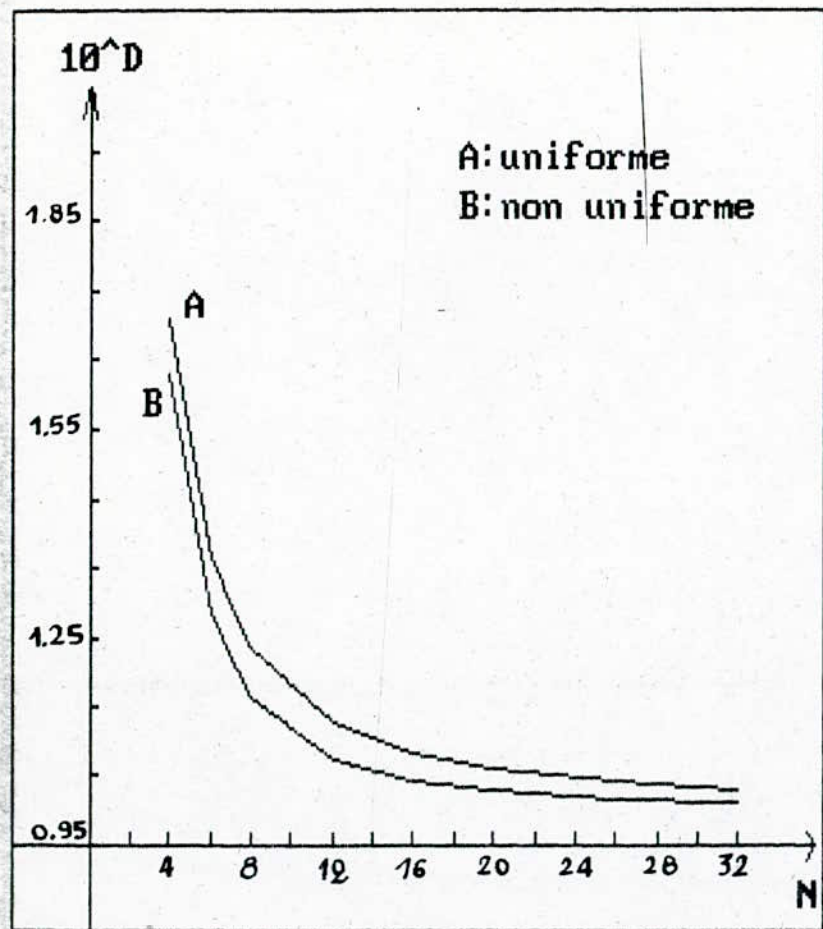
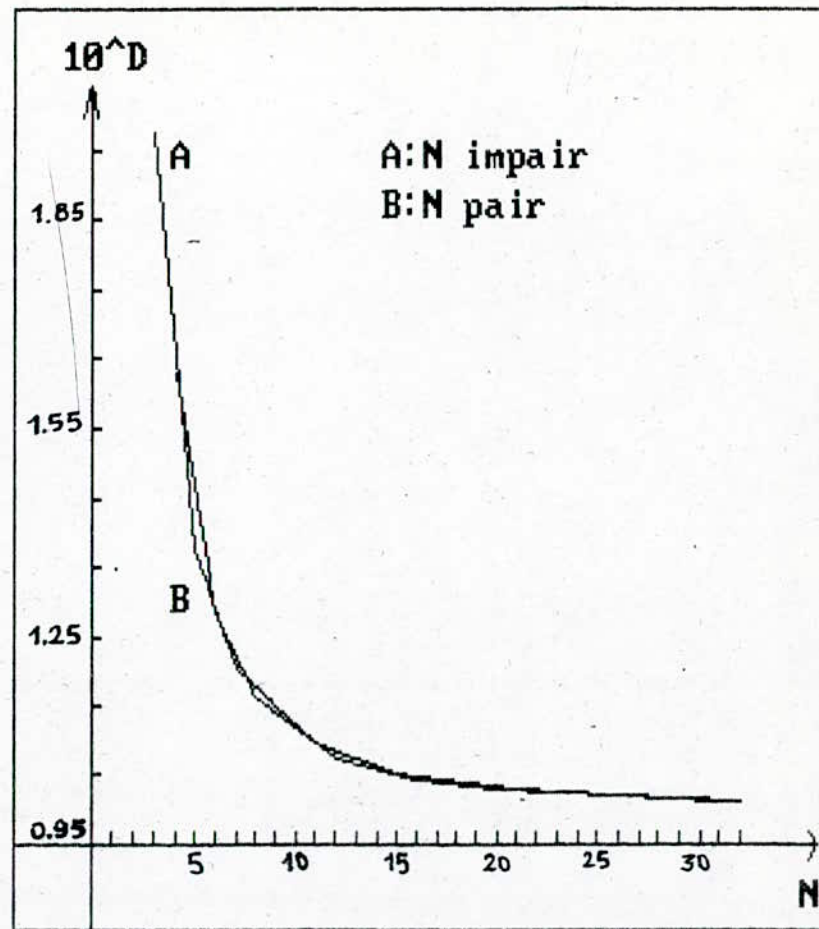


Fig. (13)



a) Quantification non symétrique uniforme et non uniforme pour la loi Gamma (N: pair)



b) Quantification non symétrique non uniforme pour la loi gamma (N: pair, impair)

Fig. ( 14 )

- pour la quantification non uniforme, la parité de  $N$  est peu importante (fig.14b<sup>e</sup>) .

## 2- Comparaison de la quantification symétrique/non symétrique

### a) Cas uniforme:

- pour  $N$  impair, le quantificateur symétrique est meilleur que le non symétrique, fig.(15b) .

- pour  $N$  pair, le quantificateur non symétrique est meilleur que le symétrique, fig.(15a) .

### b) Cas non uniforme:

- pour  $N$  pair, le quantificateur non symétrique est <sup>meilleur</sup> que le symétrique, fig.(16a) .

- pour  $N$  impair, le quantificateur non symétrique est meilleur que le symétrique, pour  $N \geq 5$ , fig.(16b) .

### Rémarque:

Le meilleur quantificateur pour  $N$  impair, est le non symétrique non uniforme, fig.(17) . De même, que pour  $N$  pair, on peut voir, aisément, que le non symétrique non uniforme est le meilleur.

*\* Pour cette comparaison, on s'est référé aux résultats obtenus dans [18].*

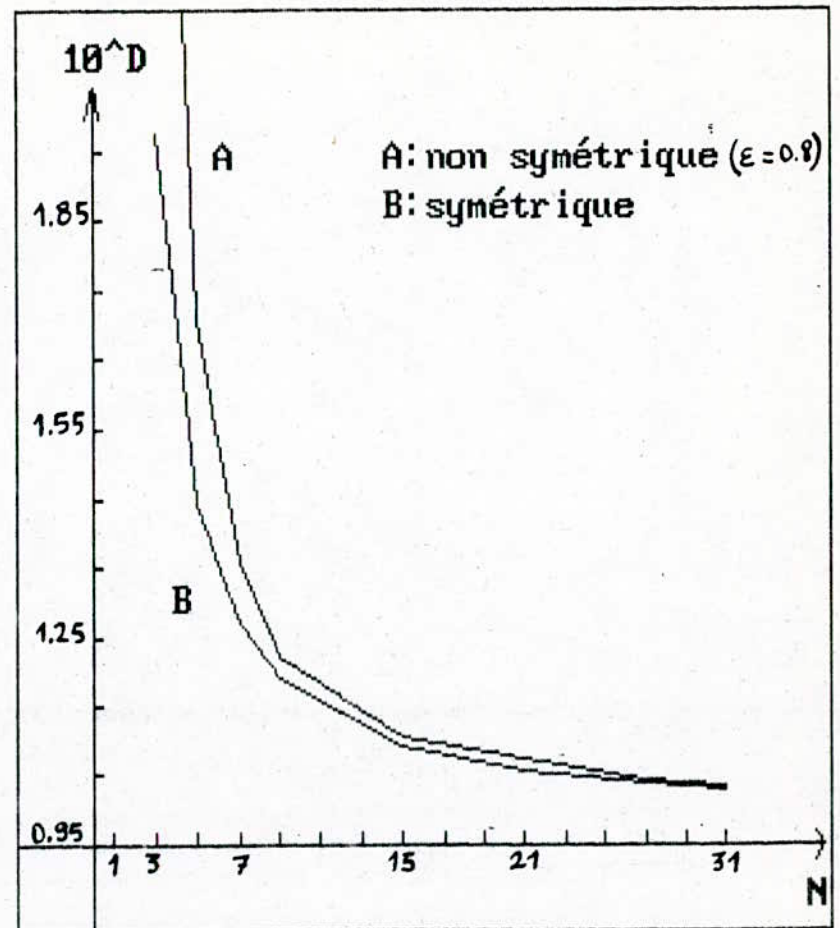
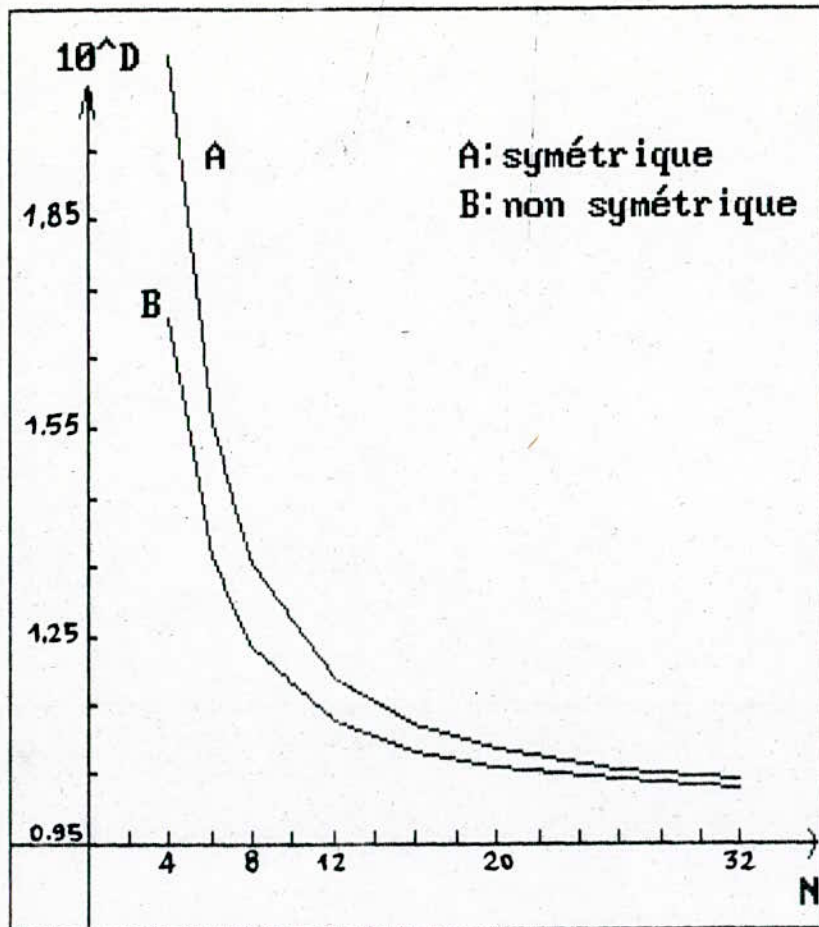
Note !

Dans la comparaison, symétrique [18], avec notre quantificateur non symétrique (non uniforme) pour  $N$  impair, nous trouvés un résultat contraire à celui de [14]. Nous pensons que cela est dû à une imprécision dans le choix des bornes "infinies" dans [18] ( $x_0 = -x_N = -10$ ). Nous avons fait, dans le cas présent un choix plus rigoureux, avec  $x_0 = -x_N = -15$ .

— 0 —  
Cette imprécision n'affecte pas la comparaison pour  $N$  pair.

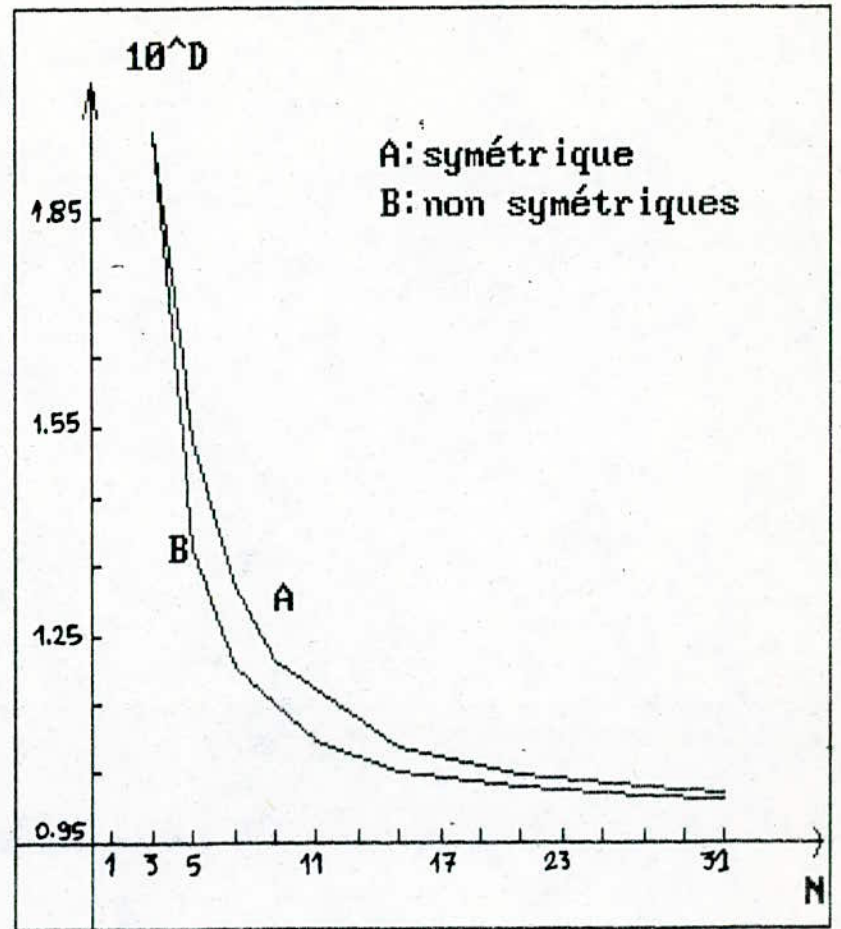
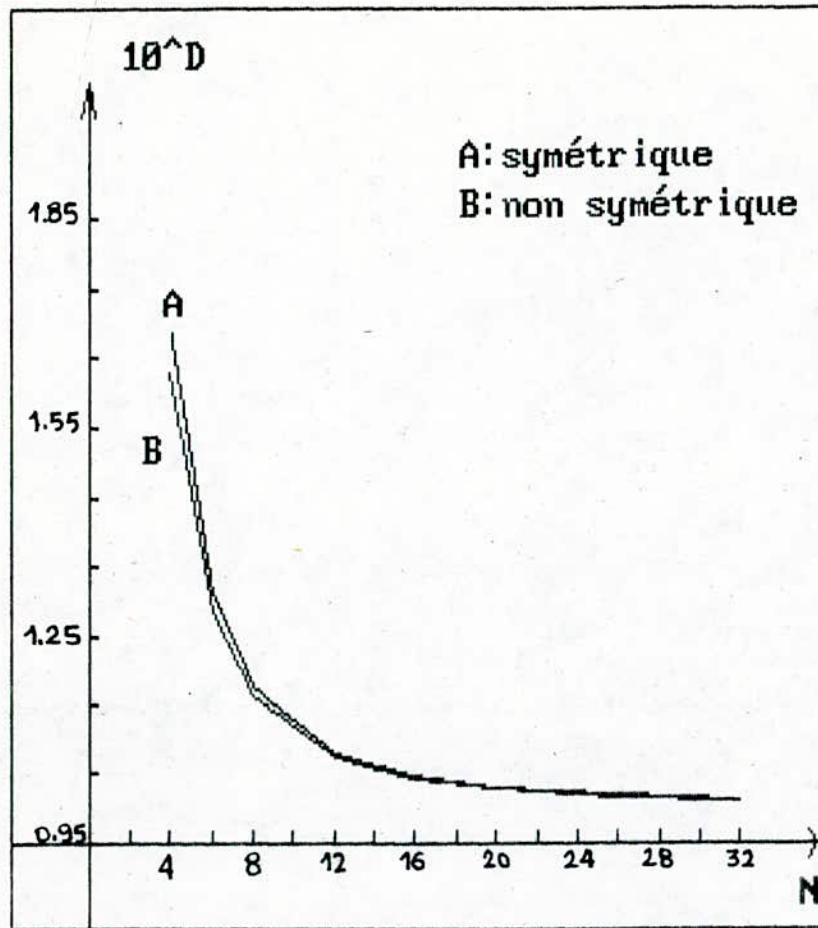
peut  
— 0 —  
Elle affecte beaucoup la valeur  $D$ , mais légèrement la valeur  $R$ .

— 0 —



a) Quantification uniforme symétrique  
et non symétrique pour la loi Gamma  
(N: PAIR)

b) Quantification uniforme symétrique  
et non symétrique pour la loi gamma  
(N: IMPAIR)



a) Quantification non uniforme symétrique et non symétrique pour la loi Gamma (N: PAIR)

b) Quantification non uniforme symétrique et non symétrique pour la loi gamma (N: IMPAIR)

Fig. (16)

Comparaison du meilleur quantifi-  
cateur uniforme et non uniforme  
pour  $N$ : impair

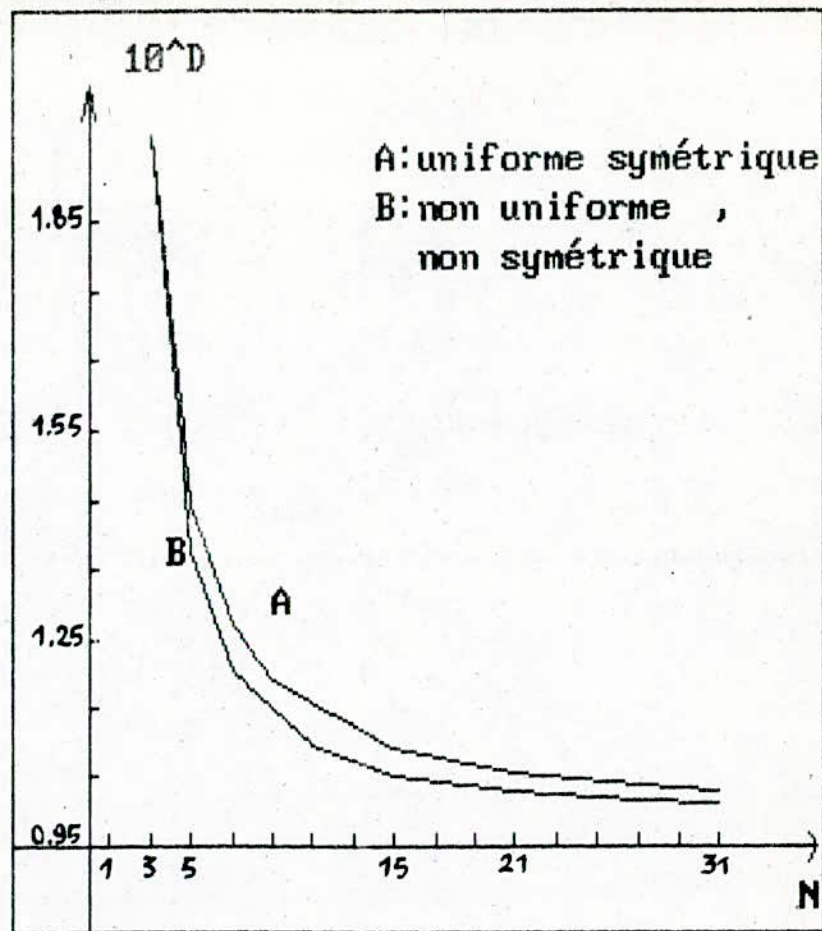


Fig. ( 17 )



## Conclusion

L'étude de la quantification non symétrique a montré, qu'on peut trouver, pour la densité gamma, un quantificateur optimal absolu, mais pas unique, parmi les non symétriques .

De plus, nous avons vu, que les solutions des conditions nécessaires étaient multiples. De ce fait, nous étions obligés de trouver une méthode, qui permette d'avoir, directement, la solution optimale absolue (l'une des deux), à partir de l'algorithme de Lloyd-Max.

Cette méthode est basée sur le choix de  $Y_1$  (premier niveau) pour l'algorithme sus-cité . Ainsi,  $Y_1$  est obtenu directement, à l'aide de la droite d'estimation de  $Y_1$  .

ANNEXE

Les postulats sur lesquels repose la formule (1) sont:

$$a) I(E_{NM}) = I(E_N) + I(E_M) \quad , N, M=1, 2, \dots, \infty$$

l'information est une grandeur additive .

$$b) I(E_N) \leq I(E_{N+1}) \quad ;$$

$$c) I(E_2) = 1.$$

Remarque : justification du postulat, a)

Un ensemble  $E_{NM}$  de  $NM$  éléments peut être décomposé en  $N$  parties, de  $M$  éléments chacune; désignons-les par  $E_M^{(1)}, \dots, E_M^{(N)}$ .  
 Pour caractériser un élément  $^{\text{de}} E_{NM}$ , on peut procéder en deux étapes :  
 dire d'abord à quelle partie  $E_M^{(j)}$  il appartient. ceci nécessite l'information  $I(E_N)$  puisqu'il y a  $N$  parties . Puis identifier l'élément dans  $E_M^{(j)}$  à  $M$  éléments . Comme ces deux informations  $I(E_M)$  et  $I(E_N)$ , caractérisent complètement un élément de  $E_{NM}$ , le postulat, a) exprime que l'information est une grandeur additive .

ANNEXE 2

La distorsion D ne dépend pas du signe du décalage  $\epsilon$ .

DEMONSTRATION

Soient  $u_i = (i - \frac{N}{2}) \cdot \Delta$  ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$  ;  
 $v_i = (i - \frac{N+1}{2}) \cdot \Delta$  ,  $i = 1, 2, \dots, N$  .

Nous avons :

$$\left. \begin{aligned} u_i &= -u_{N-i} & , i = 1, 2, \dots, N-1 & ; \\ v_i &= -v_{N+1-i} & , i = 1, 2, \dots, N & . \end{aligned} \right\} \text{cas symétrique .}$$

Soit  $\theta = |\epsilon|$  ,

\*  $\epsilon > 0 \Rightarrow \theta = \epsilon \Rightarrow \begin{cases} x_i = u_i + \theta & , i = 1, 2, \dots, N-1 ; \\ y_i = v_i + \theta & , i = 1, 2, \dots, N . \end{cases}$

L'expression de la distorsion , sera :

$$D_1 = \int_{x_0}^{u_1 + \theta} (x - v_1 - \theta)^2 P(x) dx + \dots + \int_{u_{i-1} + \theta}^{u_i + \theta} (x - v_i - \theta)^2 P(x) dx + \dots + \int_{u_{N-1} + \theta}^{u + \theta} (x - v_{N+1-i} - \theta)^2 P(x) dx + \dots + \int_{u_{N-1} + \theta}^{x_N} (x - v_N - \theta)^2 P(x) dx$$

\*  $\epsilon < 0 \Rightarrow \theta = -\epsilon \Rightarrow \begin{cases} x_i = u_i - \theta & , i = 1, 2, \dots, N-1 ; \\ y_i = v_i - \theta & , i = 1, 2, \dots, N . \end{cases}$

L'expression de la distorsion deviendra :

$$D_2 = \int_{x_0}^{u_1 - \theta} (x - v_1 + \theta)^2 P(x) dx + \dots + \int_{u_{i-1} - \theta}^{u_i - \theta} (x - v_i + \theta)^2 P(x) dx + \dots + \int_{u_{N-1} - \theta}^{u - \theta} (x - v_{N+1-i} + \theta)^2 P(x) dx + \dots + \int_{u_{N-1} - \theta}^{x_N} (x - v_N + \theta)^2 P(x) dx$$

Montrons que les deux expressions de D sont équivalentes :

On convient de prendre :  $x_0 = -x_N$ .

Considérons le 1<sup>er</sup> terme de  $D_1$  :

$$\int_{x_0}^{u_i + \theta} (x - v_i - \theta)^2 P(x) dx = \int_{-x_N}^{-(u_{N-1} - \theta)} (x - v_i - \theta)^2 P(x) dx$$

$$= \int_{-x_N}^{-(u_{N-1} - \theta)} (x + v_N - \theta)^2 P(x) dx, \quad (a)$$

Faisons le changement de variable suivant :

$$t = -x \Rightarrow dt = -dx$$

$$(a) = - \int_{x_N}^{u_{N-1} - \theta} (-t + v_N - \theta)^2 P(-t) dt$$

$$= \int_{u_{N-1} - \theta}^{x_N} (t - v_N + \theta)^2 P(t) dt, \quad (b); \text{ car } P(x) \text{ est pair}$$

(b) est le dernier terme de  $D_2$ .

Considérons, maintenant, le  $i^{\text{ième}}$  terme de  $D_1$  :

$$\int_{x_{i-1}}^{u_i + \theta} (x - v_i - \theta)^2 P(x) dx = \int_{-(u_{N+1-i} - \theta)}^{-(u_{N-i} - \theta)} (x + v_{N+1-i} - \theta)^2 P(x) dx, \quad (c)$$

Soit le même changement de variable :

$$t = -x \Rightarrow dt = -dx$$

$$(c) = - \int_{u_{N+1-i} - \theta}^{u_{N-i} - \theta} (-t + v_{N+1-i} - \theta)^2 P(t) dt$$

$$\Rightarrow (c) = \int_{\frac{u-\theta}{N-i}}^{\frac{u-\theta}{N+1-i}} \left( t - \frac{u-\theta}{N+1-i} + \theta \right)^2 \cdot P(t) dt, \quad (d); \quad P(u) \text{ est paire.}$$

Ceci montre que le  $i^{\text{ième}}$  terme de  $D_1$  est identique au  $(N+1-i)^{\text{ième}}$  terme de  $D_2$ .

Finalement, nous avons montré, par récurrence, que l'expression de  $D_1$  (distorsion pour un décalage positif), est équivalente à celle de  $D_2$  (distorsion pour  $z < 0$ ).

C. Q. F. D .

## ANNEXE 3

Exemples de solutions non optimales, non symétriques pour  $N=20$ 

N= 20

X( 1)=	-6.25544	Y( 1)=	-7.33106
X( 2)=	-4.55023	Y( 2)=	-5.17983
X( 3)=	-3.47775	Y( 3)=	-3.92063
X( 4)=	-2.69581	Y( 4)=	-3.03488
X( 5)=	-2.08433	Y( 5)=	-2.35675
X( 6)=	-1.58639	Y( 6)=	-1.81192
X( 7)=	-1.17068	Y( 7)=	-1.36086
X( 8)=	-0.81861	Y( 8)=	-0.98050
X( 9)=	-0.51905	Y( 9)=	-0.65671
X(10)=	-0.26676	Y(10)=	-0.38139
X(11)=	-0.06584	Y(11)=	-0.15212
X(12)=	0.15169	Y(12)=	0.02044
X(13)=	0.45438	Y(13)=	0.28295
X(14)=	0.83773	Y(14)=	0.62581
X(15)=	1.31136	Y(15)=	1.04966
X(16)=	1.90322	Y(16)=	1.57307
X(17)=	2.66855	Y(17)=	2.23338
X(18)=	3.72649	Y(18)=	3.10372
X(19)=	5.41925	Y(19)=	4.34926
		Y(20)=	6.48923

D=1.30239E-02


R=3.27708

N= 20

X( 1)=	-6.42149	Y( 1)=	-7.49813
X( 2)=	-4.71408	Y( 2)=	-5.34485
X( 3)=	-3.63916	Y( 3)=	-4.08331
X( 4)=	-2.85457	Y( 4)=	-3.19502
X( 5)=	-2.24012	Y( 5)=	-2.51411
X( 6)=	-1.73880	Y( 6)=	-1.96614
X( 7)=	-1.31910	Y( 7)=	-1.51147
X( 8)=	-0.96206	Y( 8)=	-1.12672
X( 9)=	-0.65594	Y( 9)=	-0.79739
X(10)=	-0.39399	Y(10)=	-0.51450
X(11)=	-0.17460	Y(11)=	-0.27349
X(12)=	-0.01220	Y(12)=	-0.07571
X(13)=	0.20630	Y(13)=	0.05132
X(14)=	0.56400	Y(14)=	0.36128
X(15)=	1.02203	Y(15)=	0.76672
X(16)=	1.60253	Y(16)=	1.27734
X(17)=	2.35865	Y(17)=	1.92771
X(18)=	3.40836	Y(18)=	2.78960
X(19)=	5.09234	Y(19)=	4.02712
		Y(20)=	6.15756

D=1.43680E-02

R=3.35239

 IBLIOGRAPHIE  
=====

- 1- A.RENYI  
"Calcul des probabilités." p496-509 , DUNOD An.1966
- 2- B.LORIFERNE  
"La conversion analogique-numérique,numérique-analogique"  
p5 , C.F.E An.1976
- 3- A.V.BALAKRISHNAN  
"Communication theory." p26,p196 , Mc-GRAW-HILL An.1968
- 4- M.SCHWARTZ,W.R.BENNETT,S.STEIN  
"Communication systems and techniques." p349  
Mc-GRAW-HILL An.1968
- 5- N.FARVARDIN,J.W.MODESTONO  
"Optimum Quantizer Performance for a Class of Non-Gaussian  
Memoryless Sources."  
IEEE trans. on inform. theory , May 1984
- 6- A.D:BOOTH  
"Numerical Methods." B.S.P An.1957
- 7- B.P.DEMIDOVICH & I.A.MARON  
"Computational Mathematics." MIR An.1981
- 8- W.A.PEARLMAN & G.H.SENGE  
"Optimal Quantization of the Rayleigh Probability distribution"  
IEEE trans. on communication ,p101-112 January 1979
- 9- ALEXANDER V.TRUSHKIN  
"Sufficient Conditions for Uniqueness of a Locally Optimal  
Quantizer for a Class of Convex Error Weighting Functions."  
IEEE trans. on inform. theory, p187-198 March 1982
- 10- M.D.PEAZ & T.H.GLISSON  
"Minimum Mean Squared-Error Quantization in Speech PCM and  
DPCM Systems." ,  
IEEE trans. on communication, p225-230 April 1972
- 11- M.BOUMEHRAT & A.GOURDIN  
"Méthodes numériques appliquées." OPU An. 1983



12-- M.R.SPIEGL

"Théorie et application de la statistique."

An.1983 Série SCHAUM McGRAW-HILL

13-N.PISKOUNOV

"Calcul différentiel et intégral." Tome 1

An.1980 Ed.MIR

14-PETER KABAL

"Quantizers for the Gamma Distribution and Other Symmetrical  
Distributions." IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal  
August 1984 pp 836-841

15-JOEE MAX

"Quantizing for Minimum Distorsion." pp 7-12

IRE Trans. on Inform. March 1960

16-A.GERSHO

"Principles of Quantization." IEEE Trans. on Circuits and Systems  
JULY 1978

17-HERBERT GISH and JOHN N.PIERCE

"Asymptotically Efficient Quantizing." pp 676-683

IEEE Trans. on Inform. Theory September 1968

18-ERADUCENE et S.AMIMER

"Quantificateur optimal pour la loi gamma."

Thèse d'Ingénieur , Juin 1986 E.N.P

19-D.K. SHARMA

"Design of Absolutely Optimal Quantizers for a Wide Class of  
Distorsion Measures." pp 693-702 ,IEEE Tran.on Inf.Th. Nov78

20-P.E. FLEISHER

"Sufficient Conditions for Achieving Minimum Distorsion in  
a Quantizer." pp 104-111 .

IEEE Int. Conv. Rec. 1964

21-STUART P.LLOYD

"Least Squares Quantization in P.C.M." pp 129-137

IEEE Trans. on Inform. Theory March 1982

22-TOBY BERGER

"Minimum Entropy Quantizer and Permutation Codes." pp 149-157

IEEE Trans.on Inform. Theory March 1982

23-R.C.WOOD

"On Optimum Quantization." pp 240-252

IEEE Trans. on Inform. Theory March 1969

24-FU-SHENG LU and GARY.L.WISE

"A Further Investigation of Max's Algorithm for Optimum  
Quantization." pp 746-750

IEEE Trans. on Communication , July 1985

25-J.A.BUCKLEW and N.C.GALLAGHER

"A Note on the Computation of Optimal Minimum Mean-Square Error  
Quantizers." pp 298-301

IEEE Trans. on Communication , January 1982,

26- R.M.GRAY & J.C.KEIFFER & Y.LINDE

"Locally Optimal Block Quantizer Design."

Inform. and Contol, p178-198 May 1980

27- E.F.ABAYA & G.L.WISE

"On the Existence of Optimal Quantizers."

IEEE trans. on inform. theory, p937-940 November 1982

28- R.A.Mc DONALD

" Signal-to-noise and idle channel performance of differential  
pulse code modulation systems - particular applications to  
voice signals "

Bell. Syst. techn. pp 1123-1151 Sep. 1966